Universidade Federal de Uberlândia

FEMEC 42060

Controle de Sistemas Lineares

Laboratório 7 - Resposta em frequência

Prof. Pedro Augusto

18 de julho de 2022

1 Introdução

Na sequência uma breve revisão sobre resposta em frequência será realizada. Posteriormente, mostrar-se-á como características importantes dessa resposta podem ser determinadas e utilizadas para mudar o comportamento do sistema em malha fechada (MF).

1.1 Resposta em frequência

A resposta em frequência de um sistema linear e invariante no tempo (SLIT) é definida como a resposta em regime permanente a uma entrada do tipo senoidal. No caso particular de SLITs, é possível demonstrar que a saída da planta também é uma senoide de mesma frequência da entrada. Com esse propósito, considere um processo com dinâmica descrita da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{m(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \tag{1}$$

em que $m(s)$ é um polinômio de grau m e p_1, p_2, ..., p_n são maiores do que zero.

Uma vez que a entrada é do tipo senoidal, $u(t) = A \text{ sen}(\omega t)$, tem-se que

$$U(s) = A\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1) e expandindo em frações parciais, é possível escrever

$$Y(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n} + \frac{a_0}{s-j\omega} + \frac{\bar{a}_0}{s+j\omega} \tag{3}$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace em (3), obtém-se

$$y(t) = \underbrace{a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t}}_{\text{resp. natural}} + \underbrace{a_0 e^{j\omega t} + \bar{a}_0 e^{-j\omega t}}_{\text{resp. forçada}}$$

sendo a_0 e $\bar{a}_0$ complexos conjugados[1].

Em regime permanente, os termos exponencias se anulam. Portanto,

$$y(t) = 2|a_0|\text{sen }(\omega t + \phi + \pi/2) \tag{4}$$

sendo que $\phi = \text{atan }(\text{Im}\{a_0\}/\text{Re}\{a_0\})$.

A constante a_0 pode ser calculada a partir de (3), como resultado, tem-se que

$$|a_0| = \left|G(j\omega)\frac{A}{2j}\right| = \frac{A}{2}|G(j\omega)| \tag{5}$$

[1]Esses termos são obtidos fazendo-se $s \to \pm j\omega$

$$\angle a_0 = \phi = \angle\left(G(j\omega)\frac{A}{2j}\right) = \angle G(j\omega) - \pi/2 \tag{6}$$

Finalmente, substituindo (5) e (6) em (4), chega-se a

$$y(t) = A|G(j\omega)|\text{sen }(\omega t + \angle G(j\omega))$$

De fato, verifica-se que a saída do sistema é uma senoide de mesma frequência da entrada. Adicionalmente, o módulo e a fase da entrada são modificados pelo módulo e pela fase da planta calculados na frequência de entrada ω.

A resposta em frequência pode ser caracterizada experimentalmente com certa facilidade. Então, é possível identificar modelos que descrevem razoavelmente o comportamento do sistema. Nesse processo, representações gráficas da resposta em frequência são de grande importância.

Dentre as diferentes formas de representação, o diagrama de Bode é composto por duas figuras: uma contendo os valores $|G(j\omega)|_{dB}$[2] e outra de $\angle G(j\omega)$ °. Já o eixo das abscissas é constituído por uma escala logarítmica da frequência. A Figura 1 ilustra o diagrama de Bode de um determinado sistema.

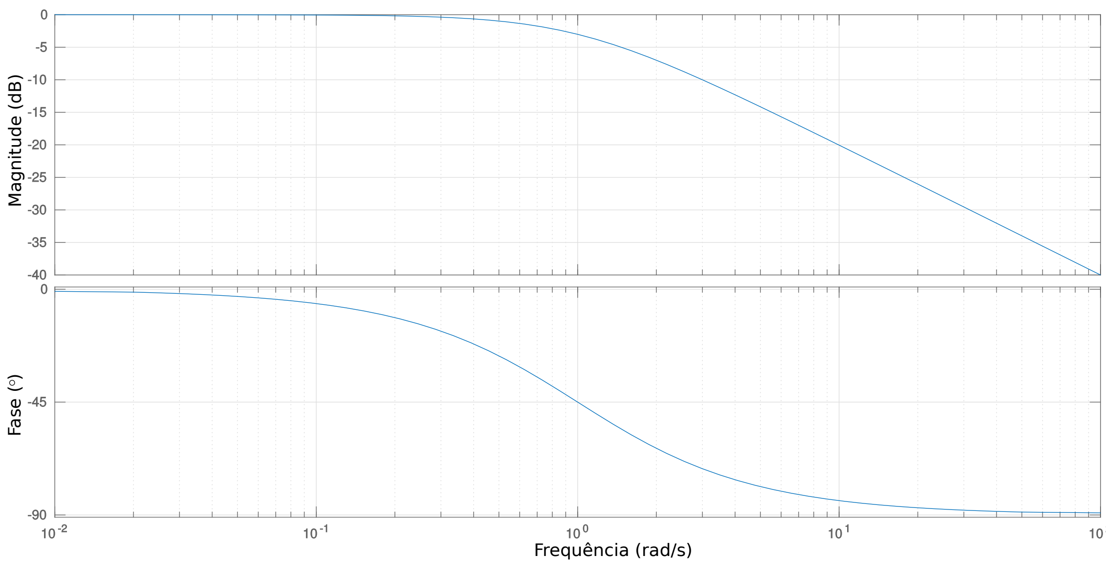


Figura 1: Representação da resposta em frequência no diagrama de Bode.

[2] $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log(|G(j\omega)|)$.

1.2 Cálculo de módulo e fase da planta para uma dada frequência a partir de dados experimentais

Considere que foi aplicada uma entrada senoidal em um SLIT (Figura 2). Mais ainda, que foram medidas entrada e saída com auxílio de um osciloscópio. A tela do osciloscópio é ilustrada na Figura 3.

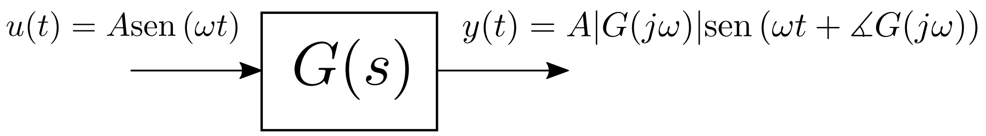


Figura 2: Diagrama de blocos para obtenção da resposta em frequência de um sistema estável.

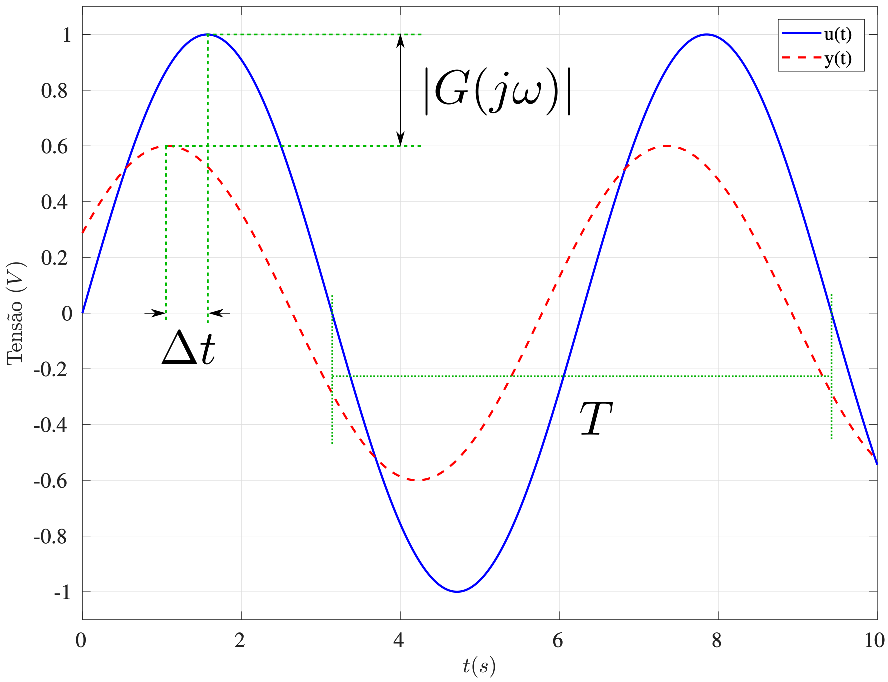


Figura 3: Sinais observados no osciloscópio.

A razão entre as amplitudes das ondas senoidais é $|G(j\omega)|$. Então, da Figura 3, pode-se escrever

$$|G(j\omega)| = \frac{V_{pp}^{y}}{V_{pp}^{u}} \tag{7}$$

A fase está relacionada com a defasagem entre as ondas. Em particular, pode-se determinar $\angle G(j\omega)$ fazendo-se

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\angle G(j\omega^\circ)}{360^\circ} \tag{8}$$

2 Objetivos

Os objetivos do presente experimento são

- Determinar características importantes da resposta em frequência. Mais especificamente, ganho em baixas frequências e frequência de corte ω_c

- Estimar o erro de regime estacionário e_{ss} pra uma operação em MF com um compensador unitário

- Projeto de compensador para reduzir o erro de regime sem afetar ω_c

3 Materiais utilizados

Os equipamentos e materiais necessários para realização do experimento são

- Arduino UNO
- Fios de conexão
- Fonte DC
- Motor DC com encoder
- Ponte H - L298N
- *Protoboard*

4 Procedimentos experimentais

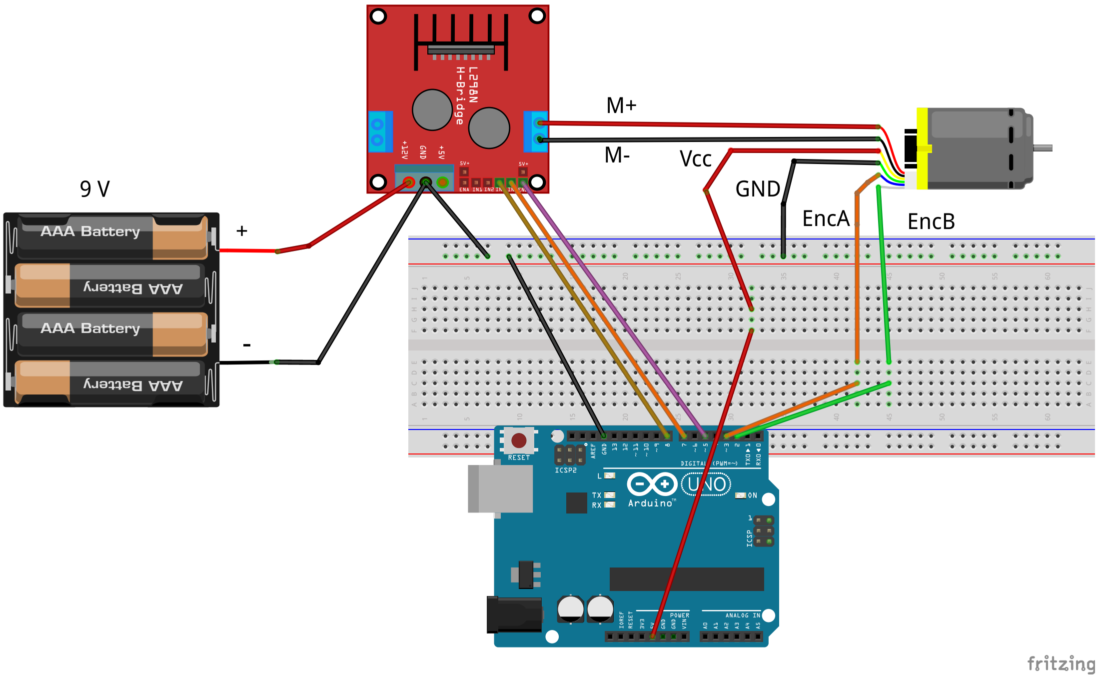
4.1 Caracterizando a resposta em frequência

Utilizando o procedimento a seguir, determinar-se-ão o ganho em baixas frequências e a frequência de corte da resposta em frequência.

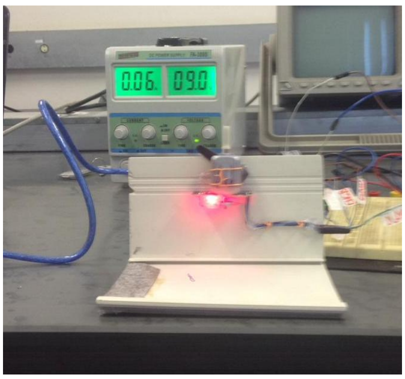
Ganho em baixas frequências

- Monte o circuito a seguir

  MUITA ATENÇÃO NA CONEXÃO DOS CABOS VCC E GND DO ENCODER!!!



- Posicione o motor na posição indicada na Figura 4.1



- O código abaixo que permite aplicar uma senoide na entrada da planta (*duty* *cycle* e medir a saída (velocidade)

```
//Incluindo biblioteca para leitura do encoder
#include <Encoder.h>

//Definindo objeto meuEncoder
Encoder meuEncoder(2, 3);

//Definindo variaveis uteis
double velAng, theta = 0.0, thetaAnt = 0.0, tempo1 = 0.0,
   tempo2 = 0.0, dt, u, w;
long contEnc = 0.0;
double vel1 = 0.0, vel2 = 0.0, vel3 = 0.0, mediavel;

void setup() {

  //Inicializando comunicacao serial
  Serial.begin(115200);

  //Definindo Entradas da ponte H
  pinMode(5,OUTPUT); //velocidade de giro
  pinMode(7,OUTPUT); //sentido de giro
  pinMode(8,OUTPUT); //sentido de giro
}

void loop() {
  //Salvando valores anteriores de tempo e posicao
  tempo1 = tempo2; thetaAnt = theta;

  //Determinando leitura autal do encoder
  contEnc = meuEncoder.read();

  //Calculando theta a partir da leitura do encoder
  theta = contEnc*2*3.1415/(334*4);

  //Determinando tempo atual
  tempo2 = micros();

  //Calculando intervalo de tempo
  dt = tempo2 - tempo1;//em micro s
  //Calculando velocidade angular
  velAng = (theta - thetaAnt)/dt*1E6;//em rad/s
```

```
  //media movel (filtro)
  vel1 = vel2; vel2 = vel3; vel3 = velAng;
  mediavel = (vel1 + vel2 + vel3)/3.0;

  //Variando duty cycle
  u = XXXXXXXXX;

  if(u >= 0){
    //sentido horario
    digitalWrite(8,LOW);
    digitalWrite(7,HIGH);
    w = u;
    }
  else{
    //sentido anti-horario
    digitalWrite(7,LOW);
    digitalWrite(8,HIGH);
    w = -u;
    }
  analogWrite(5,255.0*w/100.0);

  //Imprimindo os valores de velocidade e tempo na porta
     serial
  Serial.print(mediavel);
  Serial.print(" ");
  Serial.print(u);
  Serial.print(" ");
  Serial.println(tempo2/1E6);
}
```

- Modifique o código acima para aplicar uma senoide com frequência ω = 0,1 rad/s e amplitude 80 % na entrada do motor

- Monitore (Ctrl+Shift+M) por dois ciclos completos e salve os dados da porta serial em um arquivo .txt
- Gere uma figura com os dados do arquivo .txt. O código para Matlab encontra-se a seguir

```
clear; close all; clc

%Carregando dados
```

```
load('NomedoArquivo.txt')
Data = NomedoArquivo;

figure
%imprimindo resultados
plot(Data(:,3), Data(:,1),'b-','LineWidth',2)
grid on, hold on
plot(Data(:,3), Data(:,2),'g-.','LineWidth',2)
%configurando figura
legend('\omega~(rad/s)','u~(\%)','Location','SouthEast');
xlabel('t (s)','FontSize',24);
set(gca,'FontSize',24)
xlim([0 100])
```

- A partir do gráfico, calcule o ganho em baixas frequências, isto é, $|G(j0.1)|_{dB} = 20\log V_{pp,y}/V_{pp,u}$

Frequência de corte

- Aumente a frequência de excitação ω até que os sinais de entrada e saída tenham **aproximadamente** a mesma amplitude, conforme ilustrado abaixo. Utilize o plotter serial para monitorar os sinais (atalho: "Ctrl + Shift + L")

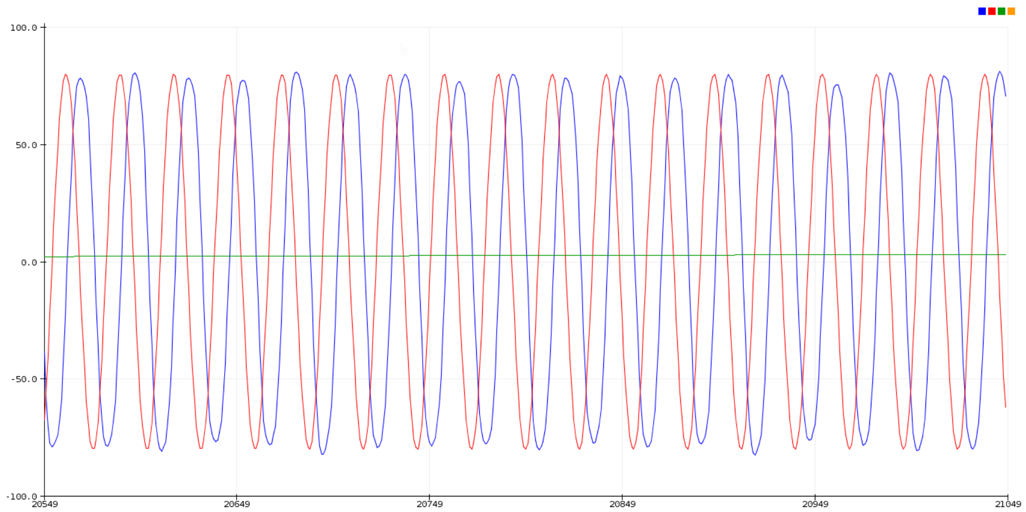


Figura 4: Resposta da planta para determinação de ω_c.

Nota: Nesse ponto, tem-se que $\omega = \omega_c$, pois $|G(j\omega_c)|_{dB} = 0$ (i.e. $|G(j\omega_c)| = 1$).

- Salve os dados da resposta em um arquivo .txt. **No relatório será necessário apresentar a resposta da planta**
- Complete os quadros da Figura 5. Nota: Considerou-se que a dinâmica do sistema é de primeira ordem devido aos resultados observados no Laboratório 3.

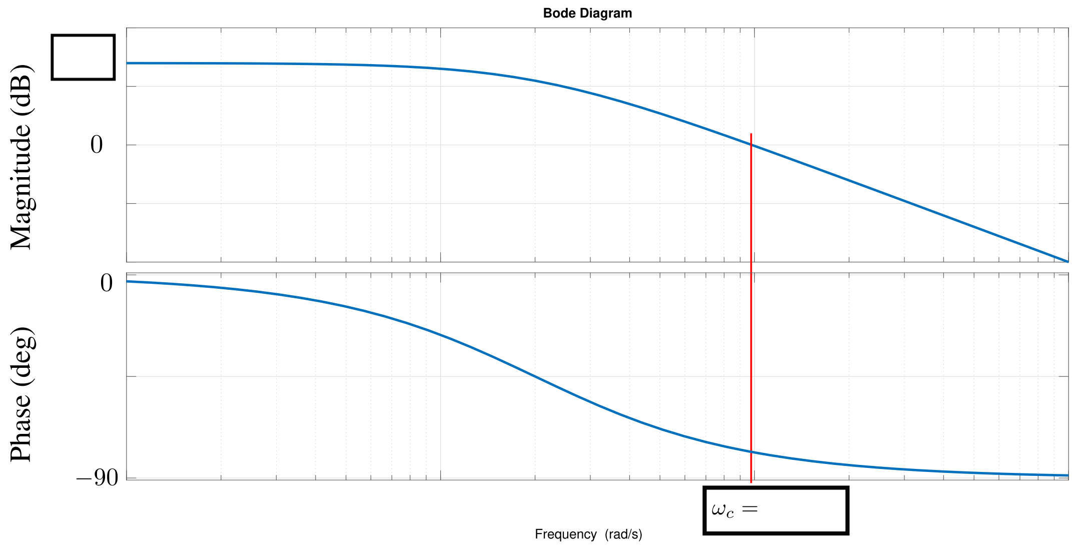


Figura 5: Resposta em frequência da planta.

4.2 Comportamento da planta em MF

Realize as atividades a seguir considerando a estrutura de controle mostrada na Figura 6.

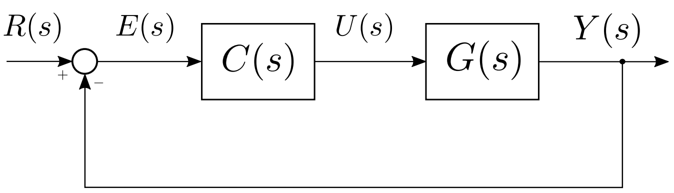


Figura 6: Estrutura de controle em malha fechada com um compensador $C(s)$.

Controlador proporcional com ganho unitário

- **Supondo** $C(s) = 1$ e com os dados da resposta em frequência calculados na Seção 4.1, estime o erro de regime estacionário e_{ss} para uma referência degrau de magnitude $\omega_{ref} = 200$ rad/s

- Modifique o código abaixo para implementar um controlador em MF com $C(s) = 1$

```
   //Incluindo biblioteca para leitura do encoder
#include <Encoder.h>

//Definindo objeto meuEncoder
Encoder meuEncoder(2, 3);

//Definindo variaveis uteis
double velAng, theta = 0.0, thetaAnt = 0.0, tempo1 = 0.0,
   tempo2 = 0.0, dt, erro, u;
double vel1 = 0.0, vel2 = 0.0, vel3 = 0.0, mediavel,
   omega_ref = 0;
long contEnc = 0.0;

void setup() {
  //Inicializando comunicacao serial
  Serial.begin(115200);

   //Definindo Entradas da ponte H
  pinMode(5,OUTPUT); //velocidade de giro
  pinMode(7,OUTPUT); //sentido de giro
  pinMode(8,OUTPUT); //sentido de giro

  //sentido horario
  digitalWrite(7,HIGH);
  digitalWrite(8,LOW);
}

void loop() {
  //Salvando valores anteriores de tempo e posicao
  tempo1 = tempo2;  thetaAnt = theta;

  //Determinando leitura autal do encoder
  contEnc = meuEncoder.read();

  //Calculando theta a partir da leitura do encoder
  theta = contEnc*2*3.1415/(334*4);//rad

  //Determinando tempo atual
```

```
  tempo2 = micros();

  //Calculando dt
  dt = tempo2 - tempo1;//em micro s

  //Calculando velocidade angular
  velAng = (theta - thetaAnt)/(dt/1E6);

  //calculando media movel dos tres ultimos valores
  vel3 = vel2;  vel2  = vel1;  vel1 = velAng;
  mediavel = (vel1 + vel2 + vel3)/3;

  //Degrau de referencia
  if(tempo2/1E6 >= 3 ){
    omega_ref = XXXXXXXX; //rad/s
  }

   //Calculando err de rastreamento
    erro = XXXXXX;
    //Calculando controle
    u = XXXXXXXXx;

    //Saturando na faixa linear
    u = min(u,100);//limitando superiormente
    u = max(u,0);//limitando inferiormente

    //Aplicando controle a planta
    analogWrite(5,u*255.0/100.0);

  //Imprimindo na porta serial
  Serial.print(mediavel);
  Serial.print(" ");
  Serial.print(u);
  Serial.print(" ");
  Serial.println(tempo2/1E6);
}
```

- Aplique um degrau de referência de $\omega_{ref} = 200$ rad/s e verifique o erro de regime estacionário obtido

- Monitore (Ctrl+Shift+M) e salve os dados da porta serial em um arquivo .txt

Projeto de compensador

- Projete um compensador

$$C_2(s) = \frac{s+a}{s+b},$$

de modo que $e_{ss} = 5$ rad/s. Mais ainda, **não** se deve alterar significativamente o comportamento transitório, isto é, não modificar ω_c nem a margem de fase.

- Para implementação digital, determine um compensador digital $C_d(z)$ utilizando o seguinte código (Matlab ou *software* similar):

```
clear;close all;clc

% Definindo uma variavel auxiliar
s = tf([1 0],1);

% Substitua a e b com os valores projetados
C2 = (s+a)/(s+b);

%Obtendo um equivalente discreto por meio do metodo de
   Tustin
Cd = c2d(C2, 1e-3, 'tustin');
```

- O controlador digital é da forma

$$\frac{U(z)}{E(z)} = C_d(z) = \frac{\bar{a_1} z + \bar{a_2}}{z + \bar{b}}$$

o que corresponde a seguinte **equação a diferenças**:

$$u(k) = -\bar{b}u(k-1) + \bar{a_1}e(k) + \bar{a_2}e(k-1) \tag{9}$$

em que k é o índice de tempo discreto.

- Modifique o código a seguir para implementar o $C(z)$ projetado

```
//Incluindo biblioteca para leitura do encoder
#include <Encoder.h>

//Definindo objeto meuEncoder
Encoder meuEncoder(2, 3);

//Definindo outras variaveis uteis
```

```
double thetak = 0.0, thetakm1 = 0.0;
double tempo1 = 0.0, tempo2 = 0.0, dt = 0.0, omega_ref =
   0;
double velk, vel1 = 0.0, vel2 = 0.0, vel3 = 0.0, mediavel;
double uk = 0.0, ukm1 = 0.0, errokm1 = 0.0, errok = 0.0;
long contEnc = 0.0;

void setup() {
  //Inicializando comunicacao serial
  Serial.begin(115200);

   //Definindo Entradas da ponte H
  pinMode(5,OUTPUT); pinMode(7,OUTPUT); pinMode(8,OUTPUT);

  //sentido horario
  digitalWrite(7,HIGH); digitalWrite(8,LOW);
 }

void loop() {
  tempo1 = tempo2;
  //Determinando leitura autal do encoder
  contEnc = meuEncoder.read();

  //Calculando theta a partir da leitura do encoder
  thetak = contEnc*2*3.1415/(334*4); //rad/s

  //Determinando tempo atual
  tempo2 = micros();

  //Calculando dt
  dt = tempo2 - tempo1;//em micro s

  //Calculando velocidade angular
  velk = (thetak - thetakm1)/(dt/1E6);

  //calculando media movel dos tres ultimos valores
  vel3 = vel2; vel2  = vel1;  vel1 = velk;
  mediavel = (vel1 + vel2 + vel3)/3;

    //Degrau de referencia e aplicado entre 5 e 6s
  if(tempo2/1E6 >= 3 ){
    omega_ref = 200.0; //rad/s
  }
```

```
  //Obtendo erro de rastreamento
  errok = XXXXXXX;

  //Calculando controle
  uk = -bbarra*ukm1 + abarra1*errok + abarra2*errokm1;

  //Housekeeping
  errokm1 = errok;  ukm1 = uk; thetakm1 = thetak;

  //Saturando na faixa linear
  uk = min(uk,100); uk = max(uk,0);

  //Aplicando controle a planta
  analogWrite(5,uk*255.0/100.0);

  //Imprimindo na porta serial
  Serial.print(mediavel);
  Serial.print(" ");
  Serial.print(uk);
  Serial.print(" ");
  Serial.println(tempo2/1E6);

  //Esperando proximo instante de amostragem 1ms
  while ((micros() - tempo1) < 1000.0){ }
}
```

- Aplique um degrau de referência de $\omega_{ref} = 200$ rad/s e verifique o erro de regime estacionário obtido na prática

- Monitore (Ctrl+Shift+M) e salve os dados da porta serial em um arquivo .txt

- Utilize o código abaixo para comparar as respostas do sistema com $C(s) = 1$ e com $C(s) = C_2(s)$

```
 clear; close all; clc

%Carregando dados
load('Arquivo1_Cigual1.txt')
Data1 = Arquivo1_Cigual1;
```

```
load('Arquivo2_CigualC2.txt')
Data2 = Arquivo2_CigualC2;

figure
%imprimindo resultados
plot(Data1(:,3), Data1(:,1),'b-','LineWidth',2)
grid on, hold on
plot(Data2(:,3), Data2(:,1),'g-.','LineWidth',2)
%configurando figura
legend('\omega_{C(s)= 1} (rad/s)','\omega_{C_2(s)} (rad/s)
   ','Location','SouthEast');
xlabel('t (s)','FontSize',24);
set(gca,'FontSize',24)
xlim([2 4])
```