1era Lista de Fundamentos de Programación

(Otoño-Invierno 2020)

Cristhian Alejandro Ávila-Sánchez

0. *La aritmética Maya* utiliza un sistema numérico posicional base 20, en donde un caracol equivale a un 0, un punto equivale a un 1 y una barra es equivalente a 5 puntos. Las barras, puntos y caracoles permiten representar números del 0 al 19 (ver figura 0).

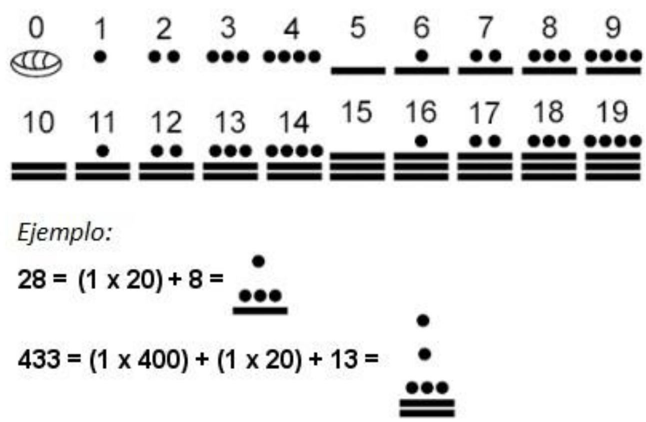

Figura 0. Numeración Maya.

Un número natural en general puede representarse a partir del conjunto de valores $\mathbb{Z}_{20} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8{,}9{,}10{,}11{,}12{,}13{,}14{,}15{,}16{,}17{,}18{,}19\}$ mediante:

$$n_{10} = \sum_{k=0}^{M-1} x_k \cdot 20^k$$

en donde k denota la posición y $x_k \in \mathbb{Z}_{20}$.

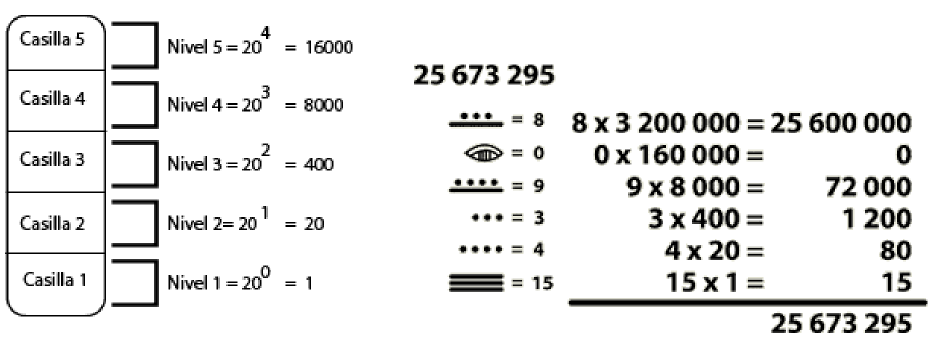

Figura 1. Representación gráfica maya de un número base 10 en base 20.

a) Notando que la conversión base 20 a base 10 es una suma del producto de un número que pertenece $\mathbb{Z}_{20}$ por una potencia de 20, divise un algoritmo para realizar la operación inversa de convertir de base 10 a base 20.

b) Convierta los números 169_{10}, 2020_{10}, 62634_{10}, 3141592_{10} y 3120837_{10} a base 20.

c) Represente gráficamente estos 5 números utilizando la convención maya de barras, puntos y caracoles.

d) Finalmente convierta de vuelta estas cantidades de base 20 a base 10.

1. Imagine una persona de la civilización maya que atraviesa la zona sureste mesoamericana para ir de Palenque a Chichen-Itzá. Acorde a la geografía de la región, proponga una ruta a seguir para ir de una ciudad a otra, dando indicaciones para desplazarse entre puntos clave y el tiempo que le tomará atravesar cada tramo a pie. Considere la presencia de regiones selváticas, valles, planicies, montes, lagos y ríos.

2. Describa las *Ecuaciones de Maxwell* de electromagnetismo en términos de una maquinaria de engranes y explique los efectos físicos de cada ecuación.

3. Enuncie el *Teorema Fundamental de la Aritmética* y el *Teorema Fundamental del Álgebra*. Señale su importancia en la búsqueda de soluciones enteras a *Ecuaciones Diofantinas*.

4. Sume y multiplique los siguientes números complejos y grafique el resultado en el plano de Argand:

a) $z_1 = x_1 + iy_1,\qquad z_2 = x_2 + iy_2$
b) $z_1 = r_1 e^{i\theta_1},\qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$
c) $z_1 = 3e^{i\pi/5},\qquad z_2 = 17 + i23$
d) $z_1 = \sqrt{3} + i2,\qquad z_2 = \sqrt{6}e^{i\pi/11}$

5. Calcule las N raíces complejas $z_k = e^{i2\pi k/N}$, $k = 0, \dots, N-1$, correspondientes al círculo unitario $z^N = 1$ para N= 0, 1,2,3,4, 5,6,7,8,9. Mapee las N raíces a elementos consecutivos de $\mathbb{Z}_N = \{0,1,2, \dots, N-1\}$.

6. Convierta las siguientes palabras de bits a base 10: 10101110_2, 11001001_2 y 10101010_2. y los números en base 10 a base 2: 111_{10}, 2048_{10}, 2020_{10}.

7. Proponga un algoritmo para convertir números de base n ($\mathbb{Z}_n$) a base m ($\mathbb{Z}_m$) y viceversa.

8. Proponga una codificación binaria de un número de punto flotante de N bits. Considere que debe haber 1 bit para el signo, n bits para la parte entera, m bits para la mantisa, q bits para el exponente y 1 bit adicional para el signo de la potencia. ¿Cuántos números distintos puedo almacenar con esta codificación? Con la codificación propuesta, represente los números $h = 6.62607004 \times 10^{-34}$ (*constante de Planck*), $k = 1.38064852 \times 10^{-23}$ (*constante de Boltzmann*) y $c = 299792458$ (*velocidad de la luz*).

9. Dibuje los grafos de los autómatas que modelan las estructuras de control *if-else*, *while* y *for*.

10. Escriba un algoritmo para controlar el lanzamiento, vuelo y aterrizaje de un cohete espacial que realiza un viaje de la Tierra a la Luna y de regreso. Describa cada etapa con el mayor detalle posible.

11. Genere un árbol de q ramas y profundidad L. Recorra el árbol de la raíz a las hojas para generar todas las palabras de longitud $L = 3$ y $q = 0, 1, 2, 3, 4$. ¿Cuántas palabras podrán generarse para L=6 y $q = 5, 6, 7, 8\ y\ 9$.

12. Evalúe las siguientes funciones lógicas, construyendo la tabla de verdad que le corresponde (los operadores $+, \cdot, \bar{x}$ denotan las operaciones lógicas $OR, AND\ y\ NOT$, respectivamente):

a) $f(x,y) = x + y$
b) $g(x,y) = x \cdot y$
c) $h(x,y) = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y$
d) $p(x,y,z) = (\bar{x} + y) \cdot (x \cdot \bar{z}) + (z \cdot \bar{y})(z + \bar{x})$
e) $q(w,x,y,z) = (w \cdot \bar{y} + z \cdot \bar{x}) \cdot (x + y) + (w \cdot z)$

13. Las compuertas lógicas $x\ NAND\ y = \overline{(x \cdot y)}$ y $x\ NOR\ y = \overline{(x + y)}$ son compuertas universales que permiten construir cualquier función lógica utilizando únicamente estos operadores. Represente las funciones lógicas del problema anterior utilizando a) exclusivamente compuertas $NAND$ y b) solamente compuertas NOR.

14. Considere una neurona artificial (perceptrón) con vector de entrada $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, pesos $\mathbf{w} = (w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$, suma ponderada (producto interno) $\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\, w_k$, función de activación$f(\lambda)$ y salida $y = f(\lambda)$. Determine la salida de disparo de una neurona que tiene $n = 6$ entradas sinápticas con valores $\mathbf{x} = (1{,}0{,}1{,}0{,}0{,}1)$ ponderadas por el vector $\mathbf{w} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right)$ y función de activación $f(\lambda) = tanh(\lambda)$. Exprese su resultado analíticamente en términos de funciones exponenciales.

15. Un avión tiene 3 turbinas en el ala izquierda y 3 turbinas en el ala derecha. El estado de cada turbina puede modelarse con un bit en donde $0 \equiv APAGADO$ y $1 \equiv ENCENDIDO$. El avión despega al encender todas las turbinas. Durante el vuelo puede ocurrir alguna avería en las turbinas, provocando que la turbina averiada se apague. El avión se mantiene en el aire cuando al menos 2 turbinas de cada ala están prendidas, en caso contrario realizará un descenso de emergencia. Al aterrizar apaga todas las turbinas. Codifique un algoritmo para modelar la dinámica del avión en las fases de despegue, vuelo y aterrizaje.

16. Determine los siguientes 13 números de las siguientes secuencias. Deduzca una expresión matemática que las genere y escriba el algoritmo correspondiente, utilizando ciclos, que las reproduzca:

a. 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 ...

b. 000 1 0000 1 00000 1 000000 1 ...
c. 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6, …
d. 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...
e. -19, -28, -37, -46, -54, -63, …
f. 2, 3, 5, 7, 4, 6, 10, 14, 6, 9, 15, 21, 8, 12, 20, 28
g. 0, -1, 1/2, -1/4, 1/8, -1/16, 1/32, -1/64, 1/128, -1/256, 1/512, ...
h. 7, 5, 12, 17, 29, 46, 75, 121, 196, 317, 513, …

17. Una escalera tiene N peldaños. A cada peldaño se le asigna como índice un número natural consecutivo, comenzando por el primer peldaño, el cual tiene asignado el número 0, hasta el último, cuyo índice es $N-1$. Proponga un algoritmo para subir/bajar la escalera, desde el primer al último peldaño (y viceversa), en incrementos/decrementos de k peldaños. ¿Cuántos pasos le toma subir una escalera de $N=100$ peldaños, con incrementos/decrementos de $k=1{,}2{,}3{,}5{,}7{,}11{,}13$?

18. En un universo paralelo, la escalera de N peldaños del problema anterior toma una topología toroidal en donde el último peldaño se une con el primero: a) si se encuentra en el último peldaño ($N-1$) y avanza al siguiente, regresa al primero (cero 0) e inversamente b) si se encuentra en el primer peldaño (0) y retrocede, llega al último ($N-1$). Considere $N=360$, y comienza en el primer peldaño, ¿en que peldaño se encontrará después de "subir" 2021 peldaños? Sitúese en el peldaño 36 y "baja" 97 peldaños, ¿en cuál peldaño se encuentra? ¿Cómo se relaciona este problema con el conjunto $\mathbb{Z}_{60}$. Escriba el algoritmo para ascender y descender en la escalera.

19. Usted tiene un reloj $\mathbb{Z}_{24}$ que marca las 24 horas que dura un "día" (una rotación completa de un astro sobre su eje) en la Tierra y un reloj $\mathbb{Z}_{655}$ que marca las 655 horas que dura un "día" en la Luna. Viaja a la Luna y durante su estancia vislumbra 9 amaneceres lunares ¿cuántos días y horas han transcurrido en la Tierra? Escriba un algoritmo para convertir horas de su reloj-terrestre al reloj-lunar, y viceversa.

20. Considere que tiene N números aleatorios. Escriba un algoritmo para ordenarlos, ascendente y descendentemente, y otro para desordenarlos aleatoriamente.

21. Escriba un algoritmo para multiplicar dos matrices A y B, de dimensiones $M\times L$ y $L\times N$, respectivamente. La matriz resultante $C=AB$ tiene dimensiones $M\times N$ y sus coeficientes son calculados mediante $C_{ij}=\sum_{k=0}^{L-1}A_{ik}B_{kj}$, con índices $0\le i<M$ y $0\le j<N$.

22. Tiene frente a usted 4 torres de fichas circulares de 4 colores distintos (azul, verde, amarillo, rojo). Las fichas dentro de cada torre tienen el mismo color y diferentes torres tienen diferentes colores. Escriba un algoritmo para formar una sola torre que intercale las fichas con las siguientes secuencias: a) azul-verde-amarillo-rojo, b) azul-azul-verde-rojo-rojo-amarillo, c) verde - amarillo – amarillo – amarillo – azul – azul -azul – rojo.

23. Un nuevo juego tiene fichas cuadradas cuyos bordes están coloreados. Dos fichas pueden colocarse contiguamente, lado a lado, si el color de sus bordes es el mismo. Cuenta con varias alternativas para colocar una ficha junto a otra, si la ficha tiene más de un lado con el mismo color (puede rotarla) o si hay varias fichas tienen algún borde con el color deseado. Indique una forma de construir circuitos lógicos (reconstruyendo compuertas AND, OR, y NOT) con un kit que contiene N fichas.

24. Investigue y describa los algoritmos para sumar y multiplicar números acorde a la aritmética maya. Considere los números $x = 235711$ & $y = 131719$, conviértalos a números mayas y realice los cálculos: $w = x + y$, $z = x * y$, siguiendo los algoritmos descritos. ¿Cuáles son los valores resultantes de los números w & z en base 20 y en base 10?

25. Usted cuenta con un tablero de ajedrez de 8×8 casillas. Escriba un algoritmo para mover las piezas: rey, reina, alfil, caballo, torre y peón a través del tablero. Si hay 16 piezas blancas y 16 piezas negras, ¿cuántas configuraciones potenciales distintas pueden generarse en un juego? Las mismas piezas son transportadas a un tablero tridimensional de $8 \times 8 \times 8$ casillas, ¿cuántas configuraciones distintas pueden existir ahora? Proponga un algoritmo para que las piezas se desplacen en el tablero tridimensional.

26. Escriba un algoritmo para jugar una partida de dominó de 28 fichas entre 4 jugadores. Cada ficha tiene dos caras, cada cara tiene de 0 a 6 puntos. Inicialmente se reparten 7 fichas a cada jugador al azar. Comienza el jugador que tenga la ficha con 6 puntos en ambas caras y continúan jugando en el sentido contrario a las manecillas del reloj. En cada ronda el jugador que tenga el turno coloca una ficha cuya cara coincida (i.e. tiene el mismo número de puntos) con la cara de uno de los extremos de la línea de dominó. Si aún le quedan fichas, pero no tiene fichas que coincidan, cede su turno al siguiente jugador. El ganador del juego es aquel que haya colocado todas sus fichas en la línea del dominó, concluyendo la partida.

27. Ha adquirido un nuevo juego de naipes que tiene 54 cartas compuestas por 4 grupos de 13 cartas y 2 comodines. Los grupos se identifican por una figura y un color: espadas (negro), tréboles (negro), corazones (rojo) y diamantes (rojo). Cada grupo contiene las siguientes cartas: números del 2 al 10, jack, reina, rey y 1 as. Escriba un algoritmo para "barajear" las cartas y repartirlas entre 4 jugadores (cada jugador debe tener 5 cartas). Excluyendo los comodines, ¿cuántas posibles "manos" diferentes de 5 cartas pueden existir? De este número calculado, ¿cuántos pókeres de 4 cartas (mismo número, diferente figura) hay?

28. Se tiene un dado de 6 caras, cada una identificada por un número del 0 al 5. Un nuevo juego requiere lanzar N dados, ¿Cuántas salidas diferentes pueden generarse potencialmente por el lanzamiento? Escriba un algoritmo para generar todas las salidas para $N = 1,2,3,6,12,18,$ 24 y elegir una al azar entre todas las generadas.

29. Un instrumento musical está formado por un conjunto de osciladores armónicos cuyos modos de vibraciones reproducen las notas musicales. Se quiere reproducir una melodía compuesta por las notas musicales *DO, RE, MI, FA, SOL, LA y SI*, cuyas frecuencias fundamentales son: *261.63 Hz, 293.66 Hz, 329.63 Hz, 349.23 Hz, 392.00 Hz, 440.00 Hz y 493.88 Hz*, respectivamente. El instrumento permite reproducir notas que corresponden a modos de vibraciones de n semitonos arriba (n>0) o debajo (n<0) de la nota central ($n \in \mathbb{Z}$). Las frecuencias de estas nuevas notas son:

$$f_n = 2^{n/12} f_0$$

Escriba el algoritmo que reproduzca los sonidos correspondientes a las notas musicales:

$$F(\omega_n, t) = A \sin(\omega_n t + \phi_0)$$
$$G(\omega_n, t) = B \cos(\omega_n t + \phi_1)$$

Donde A y B son las amplitudes del sonido, $\omega_n = 2\pi f_n$ representa la frecuencia angular de la nota, t el tiempo, ϕ_0 y ϕ_1 los desfasamientos (en radianes) de las señales. Componga una breve melodía compuesta por 20 notas.

30. Considere un autómata celular bidimensional conformado por $M \times N$ celdas. Cada celda puede contener un dígito 0 ó 1. Inicialice cada celda, ubicada en la *i-ésima* fila y *j-ésima* columna, mediante la operación: $c_{ij}(0) = (i * j + 1)\, mod\ 2$. Actualice las celdas en el instante t acorde a la regla:

$$c_{ij}(t) = \left(c_{(i-1)\%2\ j}(\tau) + \ c_{i\ (j-1)\%2}(\tau) + \ c_{(i+1)\%2\ j}(\tau) + \ c_{i\ (j+1)\%2}(\tau)\right)\ mod\ 2$$

Realice una prueba de escritorio de la evolución de un autómata celular de dimensiones $M = 10, N = 10$ para los instantes discretos $0 < t < 10$ y $\tau = t - 1$.

31. En una feria se realiza un concurso de trompos. Nueve concursantes ($A, B, C, D, E, F, G, H, I$) participan con trompos que tienen diferentes velocidades angulares de giro y un número máximo de vueltas que pueden dar antes de caerse debido a los efectos de la gravedad. Los primeros 6 trompos ($A - F$) giran en sentido contrario a las manecillas del reloj con velocidades de $2, 3, 5, 7{,}11\ y\ 13$ revoluciones/s y se derrumban después de 764, 541, 335, 673, 297 y 821 vueltas, respectivamente. Los trompos $G, H\ e\ I$ son lanzados de tal forma que giran en el sentido de las manecillas del reloj, con velocidades de -17, -19 y -23 revoluciones/s, cayendo después de 1001, 879 y 219 vueltas, respectivamente.

a) Después de 60 segundos, ¿cuántas revoluciones han dado los primeros 6 trompos?
b) En el segundo 79, se lanzan el trompo G contra los trompos $B\ y\ C$ y el trompo H contra los trompos $E\ y\ F$, lo que provoca que los trompos $B, C, E\ y\ F$ reduzcan su velocidad por 2 revoluciones/s menos. ¿Cuántas revoluciones han dado los 9 trompos después de 120 segundos (indique el sentido de rotación)?
c) En el segundo 169 se lanza el trompo I contra los trompos $A, C\ y\ E$, causando que las velocidades angulares de los trompos involucrados en la colisión se inviertan (cambiando de positivas a negativas y viceversa). ¿Cuántas revoluciones han dado después de 180 segundos?
d) Después de 360 segundos, gana el jugador cuyo trompo sigue en pie y ha dado más vueltas (en cualquier sentido). ¿Cuál jugador ganó?
e) Repita el análisis, esta vez desactivando la gravedad (los trompos no se caen).

32. Está a punto de ir a dar una vuelta por el mundo y cuenta con una mochila que permite llevar consigo un volumen y pesos máximos V y W, respectivamente. Proponga un algoritmo para introducir los artículos necesarios para el viaje a escoger de entre N objetos, con pesos w_k, volúmenes v_k y utilidad u_k, tal que no sobrepasen la capacidad de la mochila y maximicen su utilidad.

33. Usted se encuentra en una ciudad que tiene M calles horizontales y N avenidas verticales, la cuales se cruzan y forman una cuadricula de $M \times N$. Considerando que las vías permiten el paso libre de un extremo a otro, escriba un algoritmo para recorrer las calles y avenidas para ir de una esquina de la ciudad a la contra esquina diagonal. La ciudad se reconfigura, bloqueando algunas de las vías y construyendo un laberinto. Describa la forma de como a travesar la ciudad ¿Hay siempre un camino para salir del laberinto?

34. Bosqueje la demostración de los *Teoremas de Incompletitud e Inconsistencia de Gödel*. Utilice argumentos relacionados con la búsqueda de soluciones enteras de *ecuaciones Diofantinas*.

35. Describa los componentes, así como el funcionamiento, de una *Máquina Turing* y bosqueje la demostración del *Problema de Detención*. ¿Todos los problemas computacionales son computables?