ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(y - x) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(b - z) - y \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - cz$$

APUNTES DEL CURSO

2018-2019 IMPARTIDO

POR ANTONIO SANCHEZ

Rafael Sánchez

& alii

Revisión del 28 de febrero de 2019 a las 01:28.

Índice general

Capítulo 0

Notación

- $\mathcal{P} \equiv f(x) = g(x)$, $\mathcal{P}$ es una ecuación.
- $\mathbf{y} = f(x)$, $\mathbf{y}$ es una variable dependiente.
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = y_x$ es la derivada de y respecto de x.
- $X, Y, Z, A, B, ...$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ o funciones : $(\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$
- $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ son matrices (típicamente cuadradas $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$) o funciones : $(\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
- Sea el sistema:

$$\begin{cases} x' = 2tx - e^t y + \sin(t) \\ y' = x - \cos(t) y \end{cases}$$

lo escribimos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2t & -e^t \\ 1 & -\cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

o de la misma forma:

$$X' = \mathbb{A}(t) X + B(t)$$

- La matriz diagonal:

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

- La matriz formada por los vectores columna $X_1, \dots X_n$:

$$\begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

Parte I

Primer parcial

Capítulo 1

Introducción a las ecuaciones diferenciales

1.1. Idea intuitiva

Definición 1 (Ecuación diferencial de primer orden)**.** Sea $\mathbf{y} = f(x)$, una **ecuación diferencial de primer orden** es una ecuación de la forma: $\mathbf{y}' = F(x, \mathbf{y})$.
Sea $g(x)$ una función de x, diremos que es solución cuando la ecuación diferencial se cumpla para $\mathbf{y} = g(x)$.

Veamos unos ejemplos típicos.

Ejemplo 1 (*Resolución no formal de una ecuación ordinaria de primer orden*)

Consideramos $\mathcal{P} \equiv x'(t) = 2x(t)$ *(o alternativamente* $\mathbf{x}' = 2\mathbf{x}$*)*
Vemos que es una ecuación diferencial de primer orden ya que sigue la definición anterior. Es sencillo ver que $F(t, \mathbf{x}) = 2\mathbf{x} = 2x(t)$. *Queremos hallar qué funciones resuelven* P
Además, observamos que si $x(t) = e^{2t}$, *entonces* $x'(t) = 2e^{2t} = 2x(t)$ *y por tanto* $x(t) = e^{2t}$ *es una solución de* P.
Si pensamos con más cuidado también observamos que $x(t) = 7e^{2t}$ *también satisface* P.
Nos interesaría entonces hallar una ***solución general****, que con una sola ecuación englobe todas las soluciones. Aunque de momento no podemos justificarlo, si tomamos* $x(t) = ae^{2t} \mid a \in \mathbb{R}$ *entonces se cumple que* $x'(t) = 2ae^{2t} = 2x(t)$ *y por tanto es la solución general de* P.

Del ejemplo anterior surgen problemas llamados *problema de valor inicial*, donde hallando la solución general y sabiendo la imagen de un punto t_0 por medio de $x(t)$ podemos determinar el parámetro y encontrar una solución explícitamente. Como continuación al ejemplo anterior consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ x(0) = 8 \end{cases}$$

Para resolverlo, hallamos la solución general $x(t) = ae^{2t}$ y sustituimos la segunda ecuación. $x(0) = ae^0 = 8 \implies a = 8$.

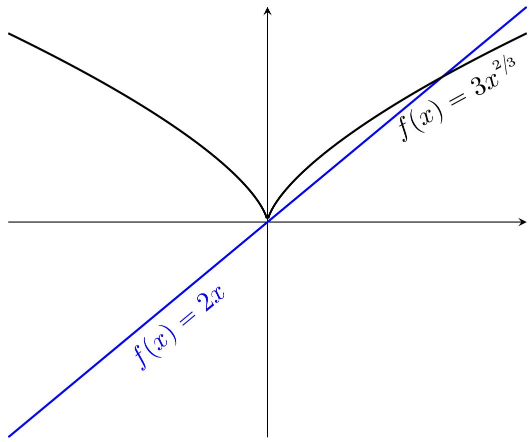
Ejemplo 2 (*No unicidad en soluciones informalmente*)

Consideramos $\mathcal{P} \equiv x'(t) = 3(x(t))^{2/3}$*., queremos hallar la solución para* $x(0) = 0$.
Empezamos hallando soluciones a la ecuación, en este caso $x(t) = t^3$ *y* $x(t) = 0$ *resuelven la ecuación. Nuestro sistema sería:*

$$\begin{cases} x'(t) = 3(x(t))^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Sin embargo, tanto $x(t) = t^3 \mid t = 0$ *como* $x(t) = 0$ *resuelven* P. *No podemos hablar de la solución puesto que hay dos.*

En los dos ejemplos anteriores tenemos una ecuación diferencial de la forma $\mathbf{x}' = F(t, \mathbf{x})$, $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ y $f(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}^{2/3}$ respectivamente. Sin embargo, en la segunda tenemos dos soluciones para $x(0) = 0$. Al observar las gráficas de las dos funciones se ve la razón a simple vista, la segunda no es derivable en 0.



Ejemplo 3 (*Crecimiento de una población*)

Consideramos $\mathcal{P} \equiv \mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x}$. ($\lambda$ típicamente es natalidad o mortalidad).
Sabiendo que modela el crecimiento de una población en función del tiempo, podemos aproximar (veremos por qué más adelante) $\frac{\Delta x}{\Delta t} \sim \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathbf{x}'$. Por tanto (como es una tasa, se entiende que el tiempo tiende a 0 para hallarla):

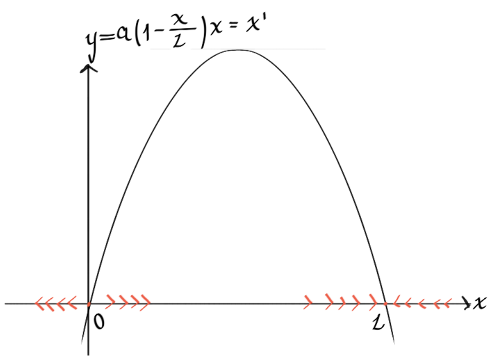
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \sim \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda \cdot \mathbf{x} \implies \lambda = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{x}'}{\mathbf{x}}$$

.

El crecimiento de una población de organismos lo suficientemente grandes no se ve representada por la ecuación anterior debido a la limitación de recursos. Interesaría por tanto modelizar la ecuación teniendo esto en cuenta. Para ello utilizaremos el parámetro L como el límite al que tendería la población con los recursos existentes.

Ejemplo 4 (*Crecimiento de una población con limitación de recursos*)

Consideramos $\mathcal{P} \equiv \mathbf{x}' = a(1 - \frac{\mathbf{x}}{L})\mathbf{x}$ con $a > 0$. De esta forma cuando $\mathbf{x} << L$ o $\mathbf{x} >> L$, tenemos prácticamente la ecuación del ejemplo anterior. Si $\mathbf{x} \sim L$ entonces la población apenas crece/decrece. Para encontrar soluciones a esta ecuación no hace falta resoverla, basta graficarla. Partimos de $\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) = a(1 - \frac{\mathbf{x}}{L})\mathbf{x}$.



Es fácil ver que $\mathbf{x}'$ es una parábola, que corta al eje X en 0 y L. Además, se indica con (») la dirección en la que se mueve $x(t)$ conforme avanza t. Tanto 0 como L son puntos de equilibrio, repulsor (inestable) y atractor (estable) respectivamente.

Habiendo encontrado las soluciones de la funcion anterior, nos preguntamos cómo varía la población frente al tiempo. Más adelante veremos formalmente como representar $\mathbf{x}$ frente a t. Sin embargo, podemos razonar el aspecto de la función. Sabemos que tiene que corregirse cerca de L, y que si $\mathbf{x} << L$ entonces tiene un crecimiento parecido al exponencial. Por tanto, podría tener el aspecto de la figura 1.1. De este gráfico podemos deducir varias cosas. Para empezar, sabemos que $\mathbf{x}''(t_0) = 0$ tiene solución para la curva c_2 ya que tiene un punto de inflexión. Además, observamos distintos tipos de crecimiento en función del valor de $x(0)$ por lo que tendría sentido intentar determinar para qué valores x_0 obtenemos el crecimiento de c_1 y para cuáles el de c_2.

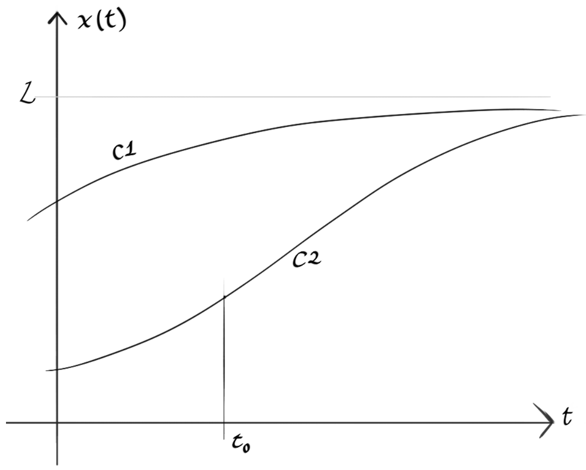


Figura 1.1: Población - Tiempo

Ejercicio propuesto 1. ¿Para qué valores de x_0 se dan los diferentes crecimientos de c_1 y c_2?.
Sugerencia: Considerar el problema de valor inicial con $x''(t_0) = 0$.

1.2. Método de separación de variables

Esta sección trata sobre el primer método de resolución de ecuaciones diferenciales. Antes de definir el método formalmente vamos a ver un ejemplo.

Ejemplo 5 (*Resolución sencilla*)

Sea $\mathcal{P} \equiv \mathbf{y}' = x\mathbf{y}$. Halla las soluciones de la ecuación.
$\mathbf{y}' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, *con esta igualdad podemos hacer manipulaciones sin justificar (de momento).*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\mathbf{y} \implies \frac{dy}{\mathbf{y}} = x\mathrm{d}x \implies \int \frac{dy}{\mathbf{y}} = \int x\mathrm{d}x \implies \log|\mathbf{y}| = \frac{x^2}{2} + C \implies |\mathbf{y}| = e^{x^2/2+C} = e^C \cdot e^{x^2/2}$$

$$\mathbf{y} = \pm e^C \cdot e^{x^2/2} = ke^{x^2/2} \mid k \in \mathbb{R}$$

Esta resolución se conoce como método de separación de variables.

Ejercicio propuesto 2. Resolver $\mathcal{P} \equiv \mathbf{x}' = a(1 - {}^{\mathbf{x}}/_{L})\mathbf{x}$ con $x(0) = 0$.

Vamos a generalizar el método por medio de la siguiente proposición.

Proposición 1 (Método de separación de variables)**.** Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ y $G(\mathbf{y})$ una primitiva de $g(\mathbf{y})$, es decir, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$ y $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\mathbf{y}} = g(\mathbf{y})$, con $\mathbf{y} = f(x)$. Y sea una ecuación $\mathcal{P} \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{g(\mathbf{y})}$, entonces las soluciones de $\mathcal{P}$ cumplen:

$$G(y(x)) = F(x) + \mathcal{C} \mid \mathcal{C}\ constante.$$

Demostración.

Por la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y(x)) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\mathbf{y}}(y(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)$$

Como $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\mathbf{y}} = g(\mathbf{y})$ y $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{g(\mathbf{y})}$ por hipótesis:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\mathbf{y}}(y(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = g(y(x)) \cdot \frac{f(x)}{g(y(x))} = f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)$$

Es decir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = 0 \implies G(y(x)) - F(x) = \mathcal{C} \implies G(y(x)) = F(x) + \mathcal{C}$$

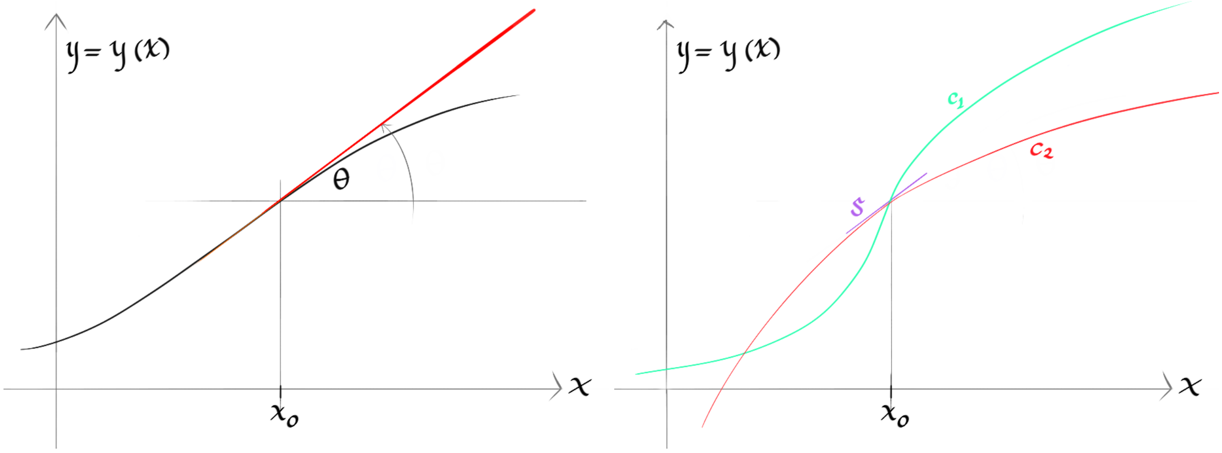
$\diamondsuit$

Observación. La prosposición anterior está incompleta, faltaría ver que condiciones tienen que cumplir $f(x)$ y $g(\mathbf{y})$. Para completarla tenemos que considerar la existencia de primitivas y la condición de que $\mathcal{C}$ sea constante.

- Ya que tenemos que usar que $F(x)$ y $G(\mathbf{y})$ son primitivas, basta pedir que tanto $f(x)$ y $g(\mathbf{y})$ sean continuas. Esto garantiza que $F(x)$ y $G(\mathbf{y})$ son ambas C^1
- Si $h'(x) = 0 \implies h(x)$ constante en cada intervalo en que está definida (pues $\mathbb{R}$ es conexo). Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces $h(x)$ es constante. Como $\mathcal{C}$ surge de integrar 0 a la derecha de la ecuación, podemos afirmar que $\mathcal{C} = h(x)$ y por tanto constante.

1.3. Significado geométrico de la ecuación diferencial ordinaria

Vamos a analizar una ecuación diferencial de forma gráfica para interpretarla geométricamente. Consideramos $\mathbf{y}' = f(x, (y))$. Supongamos que $\mathbf{y}$ tiene la gráfica de la figura 1.2a. Entonces, $\mathbf{y}'(x_0) = \tan\theta$, que



(a) Recta tangente en x_0 conocidas $\mathbf{y}$ y x_0

(b) Curvas dadas el segmento $\mathcal{S}$.

es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $\mathbf{y}$ en x_0. Esto es cálculo elemental, lo que nos interesa es saber algo de la función $\mathbf{y}$ cuando sabemos algo de $\mathbf{y}'$.

Ilustramos en la figura 1.2b entonces la casuística de conocer $\mathcal{P} \equiv \mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$. En este caso, nos preguntamos qué aspecto podría tener $\mathbf{y}$ para que fuera solución de $\mathcal{P}$. Como conocemos $y'(x_0)$, podemos considerar que $\mathcal{S}$ es un segmento paralelo a la recta tangente de la gráfica en x_0. Es fácil ver que $\mathcal{C}_1$ no puede ser solución de $\mathcal{P}$ pues $\mathcal{C}_1'(x_0) \neq y'(x_0)$. Sin embargo, es evidente que $\mathcal{C}_2$ sí resuelve $\mathcal{P}$.

Si repetimos el procedimiento de determinar cómo son las pendientes (como acabamos de hacer para x_0) para todos los puntos, hallamos el *campo de pendientes*.

Ejemplo 6 (***Hallar un campo de pendientes***)

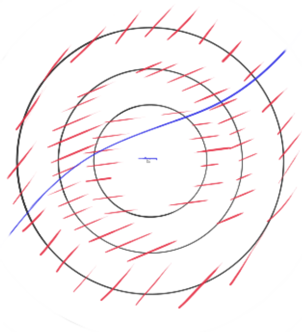
Sea $\mathcal{P} \equiv \mathbf{x}' = t^2 + \mathbf{x}^2$, es decir, $f(t, \mathbf{x}) = t^2 + \mathbf{x}^2$. Si queremos hallar qué pendiente se le asigna al punto $p = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ evaluamos la función f, $f(p) = 1$. Por tanto, la función $\mathbf{x}$ que soluciona $\mathcal{P}$ tiene tangente *con pendiente 1 en* $t = {}^1\!/\!\sqrt{2}$.

De hecho, es lógico pensar que a cualquier punto que cumpla $t^2 + \mathbf{x}^2 = 1$ *se le asignará una pendiente de 1 a su recta tangente. Este conjunto de puntos conforman la* ***isoclina*** *de pendiente 1.*

De forma general, para una constante c *dada (en este ejemplo necesariamente no negativa pues* $f(t, \mathbf{x})$ *es suma de cuadrados), podemos definir la isoclina de pendiente* c*:*

$$ISO_c = \{(t, \mathbf{x}) \mid f(t, \mathbf{x}) = c\}$$

Volviendo a nuestro ejemplo, las isoclinas van a ser curvas que cumplan $t^2 + \mathbf{x}^2 = c$ *para un* c *dado.*



Hemos representado las isoclinas junto con un pequeño segmento de pendiente c *para distintos valores de* c*. Como las isoclinas cumplen que* $t^2 + \mathbf{x}^2 = c$*, estas son las circunferencias de radio* $\sqrt{c}$ *con* $c > 0$*. Podemos observar también que* $ISO_0 = \{(0, 0)\}$ *e* $ISO_{c<0} = \varnothing$*.*

Llamamos a la gráfica con pequeños segmentos campo de pendientes *y por tanto, una función que resuelva* $\mathcal{P}$ *tiene que ser tangente al segmento del punto por el que pase.*

Sin embargo, los campos de pendientes permiten ver cómo es la función a grandes rasgos. En nuestro ejemplo parece indicar que $x(t) \uparrow \infty$*, pero no sabemos si lo hace de forma asintótica (*$x(t) \uparrow \infty$ *en* t *finito), o* $x(t)$ *crece a infinito cuando* $t \to \infty$*.*
Esto no puede resolverse gráficamente y veremos como resolverlo de forma analítica más adelante.

1.4. Ecuaciones diferenciales y problemas geométricos

Gracias a la relación de la derivada con la tangencia de funciones, podemos plantear problemas geométricos en forma de ecuación diferencial.

1.4.1. Trayectorias ortogonales

De la recta tangente a un punto surge el concepto de recta normal a ese punto, que no es más que la recta perpendicular a la tangente y que pasa por dicho punto. Para ver cómo se relacionan estas dos rectas vamos a hacer un análisis simple. Diremos que dos curvas son ortogonales si en el punto de cruce las rectas tangentes a cada curva son perpendiculares entre sí.

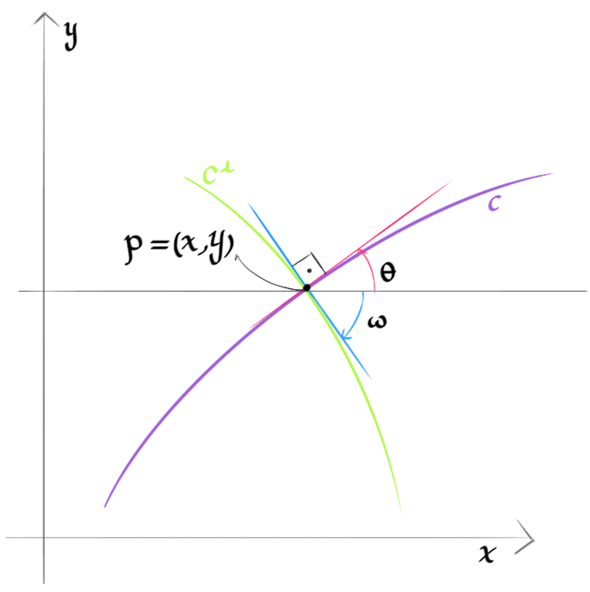


Figura 1.3: Relaciones entre curvas ortogonales

De la figura 1.3 vemos que la pendiente de C es $pend_C = \tan(\theta)$. Asimismo, $pend_{C^\perp} = \tan(\omega)$ y $\omega = \theta - {}^\pi\!/\!_2$. A partir de aquí desarrollamos:

$$\tan(\omega) = \frac{\sin(\theta - {}^\pi\!/\!_2)}{\cos(\theta - {}^\pi\!/\!_2)} = \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -\frac{1}{\tan(\theta)}$$

y por tanto,

$$pend_C \cdot pend_{C^\perp} = -1 \tag{1.1}$$

Nuestro objetivo es que dada una familia de curvas fam_C, podamos encontrar una (*familia de*) curva que sea ortogonal a todas las de la familia en los puntos de cruce.

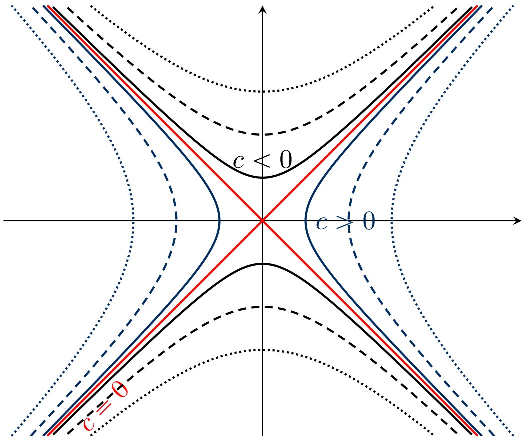
Supongamos que la familia original satisface una ecuación diferencial ordinaria $\mathbf{y}_1' = f(x, \mathbf{y_1})$. Queremos encontrar otra ecuación que defina a la ortogonal.

Como fam_C sigue una EDO (*ecuación diferencial ordinaria*), podemos afirmar que $pend_C = \mathbf{y_1'} = f(x, \mathbf{y_1})$. Usando 1.1, $pend_{C^\perp} = \frac{-1}{f(x,\mathbf{y_1})}$. Pero además, si $C^\perp$ sigue una EDO, está dada por una función $\mathbf{y_2} = y_2(x)$ y entonces $\mathbf{y_2'} = \frac{-1}{f(x,\mathbf{y_1})}$.
Concluimos con que dada fam_C descrita por $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$, podemos encontrar $fam_{C^\perp}$ que satisface:

$$\mathbf{y}' = -\frac{1}{f(x, \mathbf{y})}$$

Ejemplo 7 (*Familia ortogonal a otra dada*)

Consideramos la familia: $x^2 - \mathbf{y}^2 = c \mid c \neq 0$
Para cada c*, eso define* $\mathbf{y}$ *implícitamente en función de* x*.*



$x^2 - y^2 = c$ *para distintos valores de* c*.*
(También puede verse como las curvas de nivel del paraboloide hiperbólico)

Para hallar la familia de curvas ortogonales vamos a seguir una serie de pasos:

1. `Encontrar una EDO que cumplan esas curvas.`

$$x^2 - \mathbf{y}^2 = c \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - y^2 = c) \to 2x - 2\mathbf{y}\mathbf{y}' = 0 \implies \mathbf{y}' = \frac{x}{\mathbf{y}} = f(x, \mathbf{y})$$

2. `Encontrar la EDO para trayectorias ortogonales.`

$$\mathbf{y}' = -\frac{1}{f(x, \mathbf{y})} = -\frac{\mathbf{y}}{x}$$

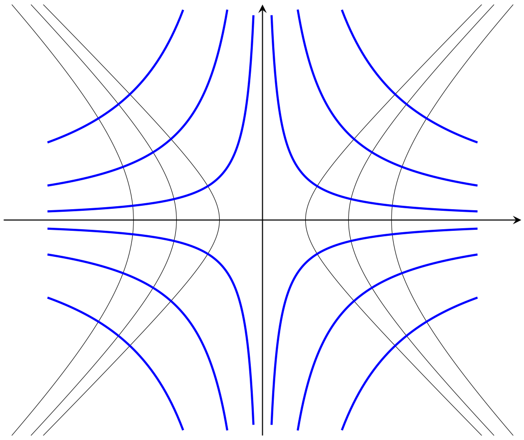
3. `Resolver la ecuación anterior`

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathbf{y}}{x} \implies -\frac{\mathrm{d}y}{\mathbf{y}} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \implies \log|y| = \log|x| + \mathcal{C}$$

es decir,

$$|\mathbf{y}| = \frac{e^{\mathcal{C}}}{|x|} \implies |x\mathbf{y}| = e^{\mathcal{C}} \implies x\mathbf{y} = k : k = e^{\mathcal{C}} \vee k = e^{-\mathcal{C}} \implies \mathbf{y} = \frac{k}{x}$$

Con la solución general podemos representar parte de la familia:



En azul posibles soluciones para distintos valores de k, en negro la familia original
Se observa que son curvas ortogonales a la familia original.

1.4.2. Trayectorias ortogonales en coordenadas polares

Veamos que al igual que encontramos una expresión para la trayectorias ortogonales en coordenadas rectangulares, también lo podemos hacer en coordenadas polares. En este caso partimos de una familia de curvas fam_C descrita por la solución de una EDO $\mathbf{r}' = h(\mathbf{r}, \theta)$. ¿Cuál es la familia ortogonal $fam_{C^\perp}$?.

Para ello tenemos que empezar analizando la expresión de la tangente como ecuación.

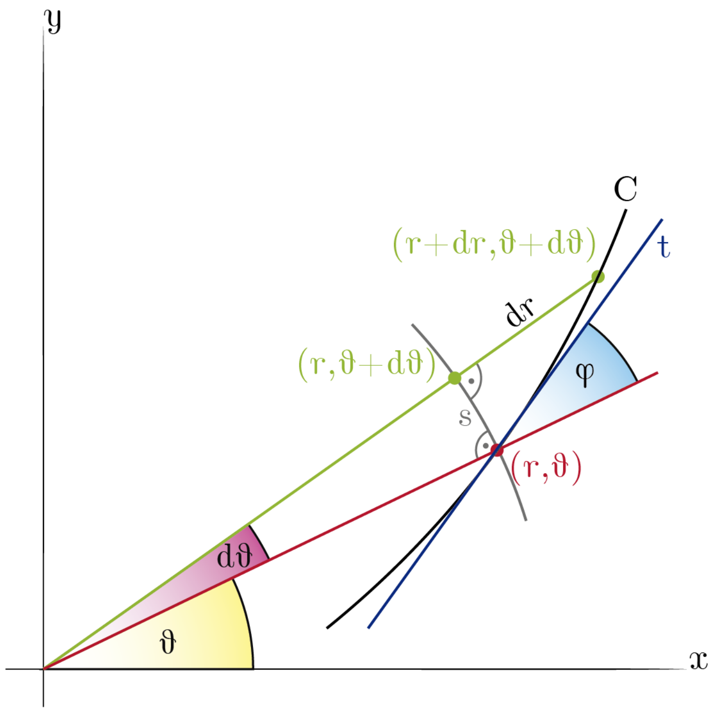


Figura 1.4: Análisis de dr y dθ

En la figura 1.4 hemos trazado una curva arbitraria C. Queremos hallar una ecuación diferencial que describa a la tangente en cierto punto $p = (r, \theta)$. Para ello, hallamos un nuevo punto $q = (r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta) \in C$. Se indica además la cirfumferencia s de radio r con centro en 0, y la recta tangente t al punto original p.

Observamos que s es perpendicular a las rectas que unen el origen con p y q ($\vec{0p}$ y $\vec{0q}$ respectivamente), ya que son trazadas desde el radio de la misma. Además, la intersección de $\vec{0q}$ con s nos marca el punto $q' = (r, \theta{+}\mathrm{d}\theta)$. Finalmente, denominamos ϕ al ángulo del que queremos hallar la tangente.

El gráfico de la figura 1.4 está distorsionado. Tanto dr como dθ son infinitesimales, es decir, extremadamente pequeños. Debido a ello podemos hacer distintas asunciones.

Para comenzar, el arco de circunferencia que une p y q' tiene longitud $r\mathrm{d}\theta$ y podemos aproximarlo con un segmento que va a ser perpendicular a las rectas $\vec{0p}$ y $\vec{0q}$. Esto hará que $\vec{0p}$ y $\vec{0q}$ sean aproximadamente paralelas, pues comparten un mismo segmento perpendicular a ellas.
Además, podemos aproximar el arco de C que une p y q con un segmento de t. Esto se ilustra en la figura 1.5.

Como puede apreciarse en 1.5, el área sombreada se corresponde con un triángulo rectángulo en la aproximación, y de hecho tenemos descritos los catetos, lo que nos permite hallar $\tan\phi'$. Sin embargo, como hemos visto en la aproximación, ambas rectas perpendiculares a ts son paralelas entre sí. Es fácil ver entonces que $\phi = \phi'$ y al describir $\tan\phi'$ hemos descrito $\tan\phi$.

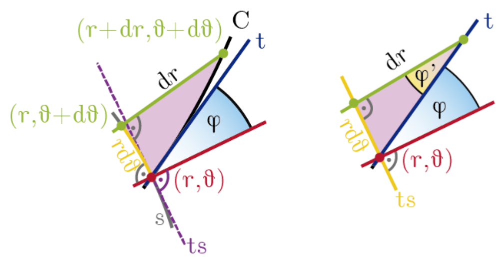


Figura 1.5: Aproximación por infinitesimales

Por tanto, podemos concluir que:

$$\tan\phi = \frac{r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = r\frac{1}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}} = \frac{r}{r'}$$

Una vez hemos descrito la forma que tiene la tangente a una curva C arbitraria en forma de ecuación diferencial $r' = h(r,\theta)$, podemos hallar $fam_{C^\perp}$ que buscábamos al comienzo de la sección. Para ello, vamos a considerar de nuevo una curva arbitraria C y su perpendicular $C^\perp$. Nos interesa especialmente la relación que existe entre los ángulos de las rectas tangentes de cada curva.

En la figura 1.6 se ilustra la relación que buscamos. Supongamos que las dos curvas se cortan en un punto $p = (r,\theta)$ y consideramos la recta $\vec{0p}$. Al igual que en la figura 1.4, definimos ϕ_C como el ángulo existente entre $\vec{0p}$ y la curva C. Siguiendo el mismo procedimiento podemos definir $\phi_{C^\perp}$.
Como por definición $C \perp C^\perp$, entonces el ángulo existente entre ellas es $\pi/2$, por tanto: $\phi_{C^\perp} = \pi/2 + \phi_C$.

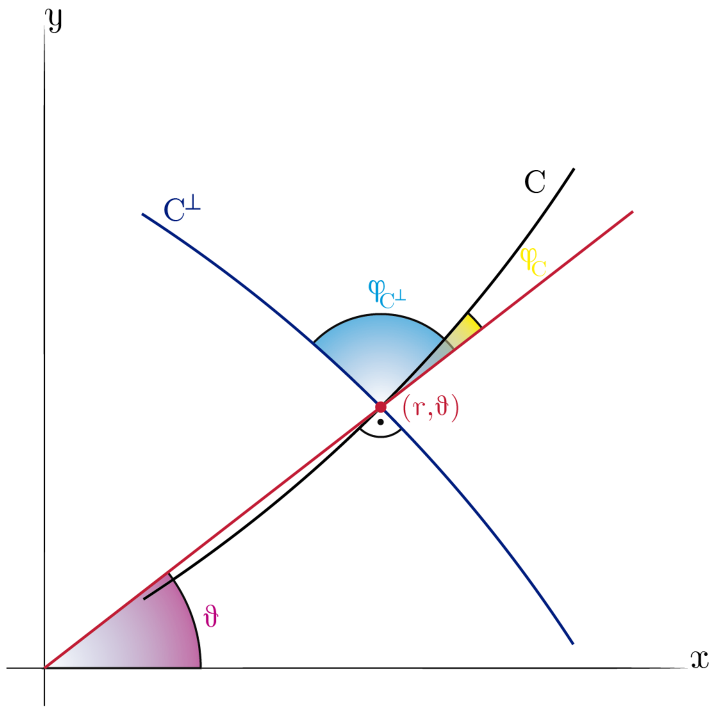


Figura 1.6: Angulos entre curvas ortogonales

Del caso en coordenadas rectangulares recordamos la ecuación:

$$\tan(\phi_{C^\perp}) = -\frac{1}{\tan(\phi_C)}$$

donde a la derecha de la ecuación figura todo lo relacionado con la curva original y a la izquierda lo relacionado con la curva tangente. Como hallamos antes que $\tan\alpha = r/r'$ para un ángulo α que describa a la recta tangente, de la misma forma $\tan(\phi_{C^\perp}) = r/r'$ describe a su recta tangente, que es ortogonal a la curva C original.
Usando esto, la definición $r' = h(r,\theta)$ del comienzo de la sección y la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{r}{r'} = -\frac{1}{r/r'} = -\frac{1}{r/h(r,\theta)} \implies \frac{r}{r'} = -\frac{h(r,\theta)}{r}$$

Finalmente, de la expresión anterior hallamos la ecuación diferencial general para describir a $fam_{C^\perp}$ a partir de la función $h(r,\theta)$ que describe a fam_C:

$$r' = -\frac{r^2}{h(r,\theta)}$$

Capítulo 2

Integración elemental

2.1. Ecuaciones homogéneas de grado 0

En esta sección daremos un breve método para resolver ecuaciones homogéneas de grado 0.

Definición 2 (Ecuación homogénea de grado k)**.** Sea $f : KxK \longrightarrow K$, decimos que es **homogénea de grado k** $\iff f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^k \cdot f(x_1, x_2)$

Nos interesarán especialmente las de grado $k = 0$, es decir, aquellas en que $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = f(x_1, x_2)$.

Supongamos que tenemos la EDO $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$, tenemos que $f(x, \mathbf{y}) = f(x, \mathbf{y} \cdot {}^{x}\!/\!_{x})$. Si f es homogénea de grado 0, y tomamos $\lambda = x$ entonces, $f(x, \mathbf{y} \cdot {}^{x}\!/\!_{x}) = f(\lambda, y \cdot {}^{\lambda}\!/\!_{x}) = \lambda^0 f(1, {}^{\mathbf{y}}\!/\!_{x})$, es decir:

$$\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y}) = f\left(1, \frac{\mathbf{y}}{x}\right)$$

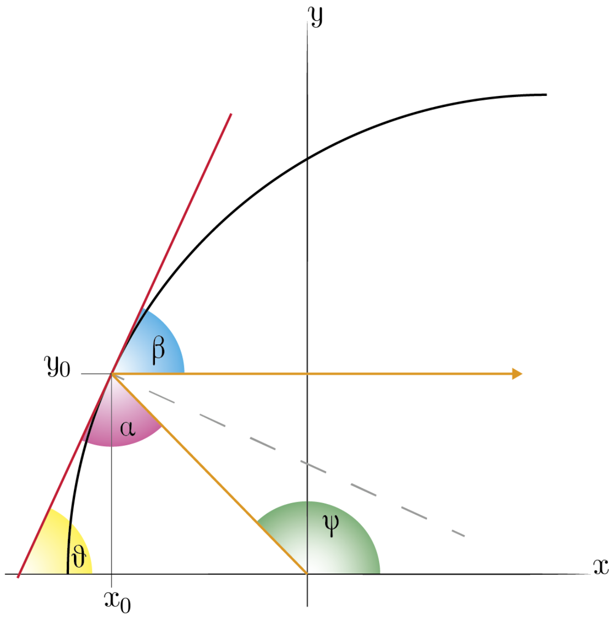
Haciendo el cambio $\mathbf{z} = {}^{\mathbf{y}}\!/\!_{x}$ y desarrollando $\mathbf{z}'$ tenemos:

$$\mathbf{z}' = \frac{\mathbf{y}'}{x} - \frac{\mathbf{y}}{x^2} = \frac{f\left(1, \frac{\mathbf{y}}{x}\right)}{x} - \frac{1}{x}\frac{\mathbf{y}}{x} = \frac{f(1, \mathbf{z}) - \mathbf{z}}{x}$$

que es una EDO de variables separables.
Veamos un ejemplo con resolución por este método:

Ejemplo 8 (*Espejo parabólico*)

Queremos construir un espejo para los faros de un automóvil. Buscamos que si la luz proviene del origen (la bombilla), ésta salga reflejada paralela al suelo. Vamos a hallar qué forma tiene que tener una sección del espejo (que tiene simetría radial) que cumple nuestro objetivo. Vamos a ejemplificar con la ayuda del diagrama siguiente.



En la figura hemos marcado 4 ángulos: α, β, θ y ψ.
Si nos fijamos con más detenimiento, como la trayectoria del rayo es paralela al eje X los ángulos que forman ambas con la recta tangente en un punto arbitrario del espejo son idénticos, por lo que $\beta = \theta$.
Además, debido a que en la reflexión de un haz de luz el ángulo de reflexión coincide con el de incidencia tenemos que $\alpha = \beta$.
Es fácil ver que el ángulo suplementario a ψ ($\pi - \psi$ rad) forma parte de los ángulos internos de un triángulo, junto con α y θ. Por ello, podemos expresar la igualdad $\alpha + \theta + (\pi - \psi) = \pi$ rad $\implies \psi = \alpha + \theta = 2\theta$.

Como ya viene siendo conocido, $\tan(\theta) = \mathbf{y}'$. *Y si nos fijamos en la figura, para cualquier punto* $(x, \mathbf{y})$ *del espejo* $\tan(\psi) = {}^{\mathbf{y}}/_{x}$. *Por tanto:*

$$\frac{\mathbf{y}}{x} = \tan(\psi) = \tan(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)} = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} = \frac{2\mathbf{y}'}{1 - \mathbf{y}'^2}$$

es decir,

$$(1 - \mathbf{y}'^2) \cdot \mathbf{y} = 2\mathbf{y}' \cdot x \implies \mathbf{y}' = \frac{-x \pm (x^2 + \mathbf{y}^2)^{1/2}}{\mathbf{y}}$$

de las dos opciones que tenemos, tenemos que ver cuál es válida. Como la pendiente de la recta tangente es positiva, nuestra ecuación diferencial sólo puede ser:

$$\mathbf{y}' = \frac{-x + \sqrt{(x^2 + \mathbf{y}^2)}}{\mathbf{y}}$$

Salta a la vista que no podemos resolverla por el método de separación de variables. Por ello, vamos a considerar un cambio de variables para convertirla en una ecuación de variables separables.

Sea $z(x) = {}^{y(x)}/_{x}$, *hallamos la expresión de* $\mathbf{z}'$*:*

$$\mathbf{z}' = \frac{\mathbf{y}'}{x} - \frac{\mathbf{y}}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot (\mathbf{y}' - \mathbf{z}) = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-x + \sqrt{(x^2 + \mathbf{y}^2)}}{\mathbf{y}} - \mathbf{z} \right) = \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{x}{\mathbf{y}} + \sqrt{\left(\frac{x}{\mathbf{y}}\right)^2 + 1} - \mathbf{z} \right)$$

y si del último paso hacemos el cambio ${}^{1}/_{\mathbf{z}} = {}^{x}/_{\mathbf{y}}$ *obtenemos:*

$$\mathbf{z}' = \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{\mathbf{z}} + \sqrt{\frac{1}{\mathbf{z}^2} + 1} - \mathbf{z} \right)$$

que es de variables separables.

La solución a esta EDO es: $1 - \sqrt{1 + \mathbf{z}^2} = \frac{c}{x}$ *y como* $\mathbf{z} = {}^{\mathbf{y}}/_{x}$ *obtenemos la ecuación que describe la altura de nuestro espejo en función de* x *y una constante* c*, a falta de algún dato extra para resolver un PVI.*

$$y(x) = \sqrt{c^2 + 2cx}$$

2.2. Ecuaciones lineales de orden I

Vamos a ver un nuevo tipo de ecuaciones que no se pueden resolver por los métodos anteriormente descritos, sin embargo, vamos a comenzar ejemplificando el tipo de ecuación para enunciar una proposición más adelante.

Ejemplo 9 (*Ecuaciones lineales de orden I - Intuición*)

Sea $(\mathcal{EC}) \equiv \mathbf{x}' = \mathbf{x} + t$, *vamos a intentar resolverla, es decir, queremos encontrar una expresión para x(t).*

1. *Vamos a considerar primero la ecuación sin el término que únicamente depende de* t : $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. *En este caso es sencillo ver que* e^t *es solución.*
2. *Consideramos ahora* $y(t) = e^{-t}x(t)$, *donde* $x(t)$ *es solución de* $(\mathcal{EC})$ *(como observación,* e^{-t} *es la inversa de la solución encontrada en (1)). Derivando se obtiene que:*

   $$y'(t) = -e^{-t} \cdot \mathbf{x} + e^{-t} \cdot \mathbf{x}' = e^{-t} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = t \cdot e^{-t}$$

   Solo queda integrar y despejar $x(t)$ *de* $y(t) = \int y'(t)$*:*

   $$y(t) = \int y'(t)\mathrm{d}t = \int t \cdot e^{-t}\mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t} + C, \ C \ \textit{constante}$$

   es decir,

   $$e^{-t} \cdot x(t) = -te^{-t} - e^{-t} + C \implies x(t) = Ce^t - 1 - t$$

Con lo que hemos hallado la solución general a nuestra ecuación.

Observación. Veamos ciertos aspectos de lo que hemos hallado.

1. $(-1-t)$ es una solución particular de $(\mathcal{EC})$ (cuando $C=0$).
2. e^t es solución de la *ecuación homogénea* $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$.
3. Esa ecuación homogénea es lineal, es decir, la suma de ecuaciones es solución, y por tanto la multiplicación por un escalar también lo es.
$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} \\ \mathbf{y}' = \mathbf{y} \end{cases} \implies (\mathbf{x}+\mathbf{y})' = \mathbf{x}+\mathbf{y}$$
y además, si $x(t)$ es solución, $\lambda x(t)$ también lo es.
4. Todas las solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ (la homogénea) son $x(t) = Ce^t$.
5. $x(t) = Ce^t - 1 - t$ nos dice que la solución general a $(\mathcal{EC})$ es igual a una solución particular $(-1-t)$ más la solución de la homogénea.

Lo que hemos hecho ha sido encontrar una solución de una ecuación del tipo $\mathbf{x}' = \alpha(t)\cdot\mathbf{x} + \beta(t)$ (con $\alpha(t) = 1,\ \beta(t) = t$)). Para resolver este tipo de ecuaciones enunciamos la siguiente proposición:

Proposición 2. Sean $\alpha,\ \beta:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Y sean:
$$A(t) = \int_a^t \alpha(u)\mathrm{d}u \qquad H(t) = \int_a^t e^{-A(u)}\beta(u)\mathrm{d}u$$
Entonces:

1. $x(t)$ verifica $x'(t) = \alpha(t)x(t) + \beta(t)\ \forall t \in [a,b] \iff \exists c \in \mathbb{R} : x(t) = H(t)\cdot e^{A(t)} + c\cdot e^{A(t)}$
2. Dados $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces $\exists! c : x(t) = H(t)\cdot e^{A(t)} + c\cdot e^{A(t)}$ es solución del PVI:
$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(t)\cdot x(t) + \beta(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Demostración. Vamos a demostrar 1 y 2 por separado:

1. Tenemos $(\mathcal{EC}) \equiv x'(t) = \alpha(t)x(t) + \beta(t)$ con α, β continuas.
La ecuación homogénea asociada a $(\mathcal{EC})$ es $x'(t) = \alpha(t)x(t)$ que es lineal, es decir, la suma de soluciones es solución. Tenemos:
$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha(t)x_1(t) \\ x_2'(t) = \alpha(t)x_2(t) \end{cases} \implies (\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2})' = \alpha(t)\cdot(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2})$$

Observación. Si sumo soluciones de $(\mathcal{EC})$ obtengo $(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2})' = \alpha(t)\cdot(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}) + 2\beta(t)$

Para hallar la solución general vamos a proceder de forma parecida al ejemplo 9. Sea $A(t)$ tal que $A'(t) = \alpha(t)$, entonces $x(t) = e^{A(t)}$ verifica la ecuación homogénea.

Construimos $y(t) = e^{-A(t)}\cdot\mathbf{x}$, y la igualamos con la integral de su derivada:
$$(e^{-A(t)}\cdot\mathbf{x})' = e^{-A}\mathbf{x}' - e^{-A}\cdot\mathbf{x}\cdot A' = e^{-A}\cdot(\mathbf{x}' - \alpha\mathbf{x}) = e^{-A}\cdot\beta$$
entonces,
$$y(t) = e^{-A(t)}\cdot x(t) = \int e^{-A(t)}\cdot\beta(t)\mathrm{d}t \implies e^{-A(t)}\cdot x(t) = H(t) + C \implies x(t) = e^{A(t)}\cdot(H(t)+C)$$

2. $x_0 = x(t_0) = c \cdot e^{A(t_0)} + e^{A(t_0)} \cdot H(t) \implies \exists! c$ pues $e^{A(t_0)} \neq 0$. Y por tanto, para el PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(t) \cdot x(t) + \beta(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

existe solución y es única.

$\diamondsuit$

Ejemplo 10 (*Resolución ecuación lineal de orden I*)

Sea $y'(x) = x^3 - 2x \cdot y(x)$, donde $\beta(x) = x^3$ y $\alpha(x) = 2x$. Queremos hallar la expresión de todas las posibles soluciones, es decir, la solución general.

1. `Solución general de la homogénea`

   La ecuación de la homogénea es $\mathbf{y}' = -2x\mathbf{y}$. Es de variables separables, resolviendo obtenemos:

   $$y(x) = C \cdot e^{-x^2} : C \text{ es constante.}$$

2. `Tomando` e^{-x^2} `una solución de (1)`

   Volvemos a la ecuación $\mathbf{y}' = x^3 - 2x\mathbf{y}$. Por tanto, podemos reescribir $\mathbf{y}'$como : $2x\mathbf{y} + \mathbf{y}' = x^3$.
   A continuación, hacemos el cambio

   $$z(x) = e^{-(-x^2)}y(x) = e^{x^2}\mathbf{y} \text{ y hallamos } z'(x).$$

   $$\mathbf{z}' = 2x\mathbf{y}e^{x^2} + e^{x^2} = e^{x^2} \cdot (2x\mathbf{y} + \mathbf{y}') = e^{x^2}x^3.$$

   Hallamos $z(x)$ integrando $\mathbf{z}'$:

   $$z(x) = \int x^3 e^{x^2} \mathrm{d}x = \frac{x^2 - 1}{2} \cdot e^{x^2} + C. \text{ (se resuelve por partes).}$$

   Igualando a nuestra $z(x) = e^{x^2}\mathbf{y}$ original, despejamos $y(x)$:

   $$y(x) = \frac{x^2 - 1}{2} + Ce^{-x^2}$$

   Donde $\frac{x^2-1}{2}$ coincide con una solución particular con $C = 0$, y Ce^{-x^2} es la solución general de la homogénea.

2.3. Teoremas de existencia y unicidad

En la sección anterior hemos enunciado una proposición que denominamos de existencia y unicidad para ecuaciones lineales de orden I. Nos gustaría dar condiciones más generales para saber si existen y son únicas ciertas soluciones.
Consideraremos el PVI general:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \\ x(t_0) = t_0 \end{cases}$$

Teorema 3 (Existencia y unicidad global)**.** Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f \in C^1$.
Si $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f_x$ es acotada, es decir:

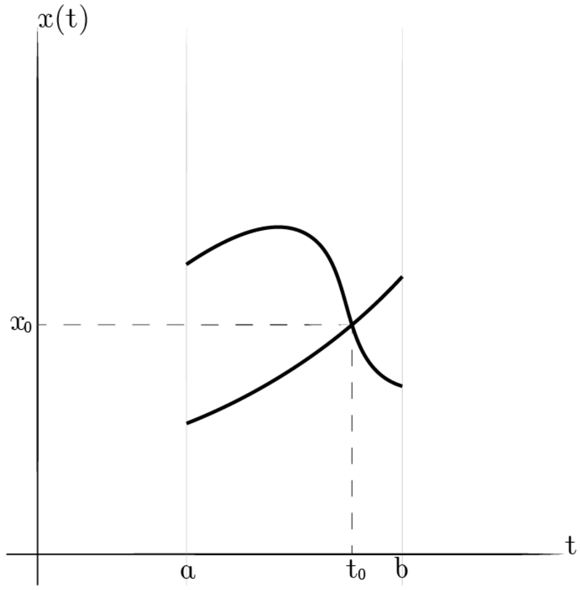
$$\exists L \in \mathbb{R} : |f_x(t, \mathbf{x})| \leqslant L \ \forall t \in [a, b], \ \forall x \in R$$

entonces, el PVI tiene solución y es única.

La demostración la veremos más adelante cuando consideremos el caso n-dimensional.

Observación. Vamos a ver ciertos aspectos de este resultado.

1. Gráfica de la solución

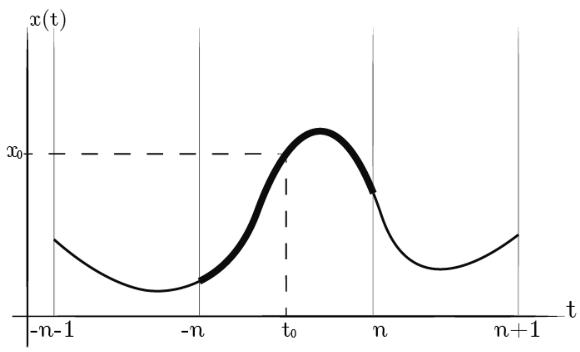


A nivel visual, no puede haber dos soluciones como las de la figura. Si las hubiera, el PVI tendría dos soluciones distintas para t_0 y habíamos dicho que era única.

Analíticamente podemos considerar el gráfico de $x(t)$ como un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$. Si consideramos cada solución de esta forma, digamos S_1, S_2, entonces:

$$S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \iff S_1 = S_2$$

2. Unicidad en la recta real



Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple que $|f_x \leqslant L|$ (su derivada está acotada), entonces el PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

entonces tiene solución y es única $\forall t \in \mathbb{R}$

Si nos fijamos en la imagen de la izquierda, la idea intuitiva surge de tener una solución $x(t)$ definida sobre un intervalo $[-n, n]$. Si podemos extender $x(t)$ a $[-n-1, n+1]$, ésta tiene que coincidir en $[-n, n]$ y por unicidad, la solución es la misma. Podemos hacer esto para cualquier intervalo mayor que $[-n, n]$ y por tanto sobre la totalidad de $\mathbb{R}$.
Formalmente puede intentar demostrarse por inducción sobre el tamaño del intervalo.

Ejercicio propuesto 3. Supongamos que $x(t)$ resuelve $\mathbf{x}' = f(x)$ y $\lim_{t\to\infty} x(t) = a$. ¿Podemos asegurar que $f(a) = 0$?.
Pista: tener en cuenta que el recíproco es cierto. Es decir, si $f(a) = 0$ entonces sabemos que hay ecuaciones que se acercan a a conforme avanzan.

La versión global del teorema de existencia y unicidad no es muy útil. Veamos dos situaciones simples en las que no funciona.

Sea el PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x}^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [-2, 2] \text{ no tiene solución.}$$

Si intentamos resolverlo:

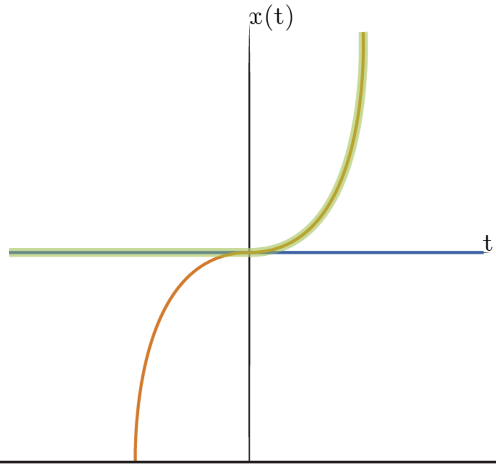
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathbf{x}^2 \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathbf{x}^2} = \int \mathrm{d}t \implies -\frac{1}{\mathbf{x}} = t + C$$
$$x(0) = 1 \implies C = -1 \implies x(t) = \frac{1}{1-t}$$

que no es solución en $[-2, 2]$ pues no está definida para $t = 1$.

Consideremos ahora el PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x}^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

es fácil ver que tanto $x_1(t) = 0$ como $x_2(t) = (\frac{t}{3})^3$ resuelven el PVI. De hecho, si combino trozos de la función puedo hallar más. En la figura se representan ambas soluciones y se resalta una posible combinación.



Teorema 4 (Existencia y unicidad local)**.** Sean $[a, b] \times [c, d] = A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^1$ y $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in (c, d)$. Entonces:

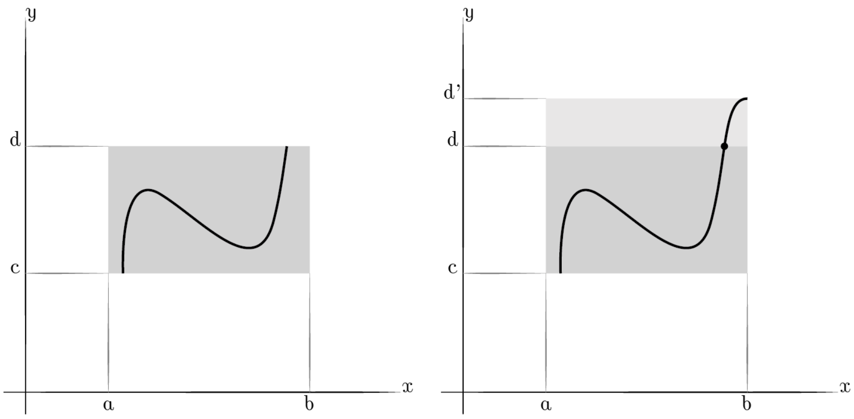
- Existencia:
  $\exists \delta > 0$ y $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \in C^1$ tal que $\mathbf{x}$ es solución del PVI:
  $$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{con } \delta < \text{mín}(t_0 - a, b - t_0)$$
- Unicidad:
  Si $x_1(t)$, $x_2(t)$ son C^1 en un intervalo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ y satisfacen:
  $$\begin{cases} \mathbf{x_i}' = f(t, \mathbf{x_i}), \ |t - t_0| < \varepsilon \\ x_i(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{con } \varepsilon < \text{mín}(t_0 - a, b - t_0)$$
  entonces $x_1(t) = x_2(t)$ $\forall t : |t - t_0| < \varepsilon$.

De nuevo, se deja la demostración para cuando enunciemos el caso *n-dimensional*.

Observación. Al igual que en el caso global, vamos a estudiar una serie de implicaciones de este resultado.

1. Unicidad local.
   Podemos expresar la solución analíticamente como:

   Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ soluciones a un PVI. Si $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, entonces $\exists \varepsilon > 0 : x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t : |t - t_0| < \varepsilon$
2. Prolongación de la solución.



Puede ocurrir que hayamos definido la función sobre un área más pequeña de lo necesario. En la imagen superior se representa esta casuística.
En este caso, podemos prolongar la solución gracias a la unicidad, si existiera otra solución con $t \in [a, b]$ que estuviera definida en todo $[c, d']$, entonces debería coincidir con nuestra solución original por compartir el punto (t, d). Podríamos preguntarnos entonces si existe un intervalo cerrado máximo en el que existe nuestra solución.

3. Acerca de las hipótesis.
   No es necesario pedir que $f \in C^1$. Para la existencia sólo necesitamos que f sea continua, y para la unicidad nos basta con que f_x exista y sea continua. En el caso general veremos que podemos pedir incluso menos para la unicidad.

2.3.1. Regularidad de soluciones

En ocasiones nos va a interesar saber como de buena es la función que resuelve nuestra EDO, entendiendo buena por cómo de suave es. Supongamos que nuestra ecuación diferencial es $x'(t) = f(t, x(t))$ definida en un intervalo, con $f : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $x(t)$ derivable.
Entonces:

$$x(t) \text{ derivable} \implies x(t) \text{ continua.}$$

$$\begin{cases} x(t) \text{ continua} \\ f(t_1, t_2) \text{ continua} \end{cases} \implies [\text{componiendo } f \text{ con } x(t) \text{ como } t_2 = x(t))]\ f(t, x(t)) \text{ es continua} \implies$$

$$\implies x'(t) \text{ es continua} \implies x(t) \in C^1$$

Además, si $f(t_1, t_2) \in C^1$ entonces $f(t, x(t)) \in C^1$, pues:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t, x(t))) = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t)) \cdot x'(t)$$

De donde sabemos que tanto f_t como f_x son continuas pues $f(t_1, t_2) \in C^1$ y $x'(t)$ es continua como acabamos de ver. Y como $x''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x'(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t, x(t)))$ que es continua, entonces $x(t) \in C^2$.

Repitiendo este argumento, concluimos con que: $f(t_1, t_2) \in C^k \implies x(t) \in C^{k+1}$.

2.4. Ecuaciones exactas

Hasta ahora hemos visto como resolver ecuaciones de variables separables, homogéneas de grado 0 y lineales de orden I. Veamos un método más.

Supongamos que $\mathbf{y}$ está definida implícitamente por $g(x, \mathbf{y}) = cte$ con $g \in C^1$. Si derivamos $g(x, \mathbf{y}) = cte$) respecto de x obtenemos:

$$g_x(x, y(x)) + g_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0, \text{ es decir,}$$

$y(x)$ se resuelve a partir de.

$$\mathbf{y}' = -\frac{g_x(x, \mathbf{y})}{g_y(x, \mathbf{y})}$$

Observación. Podemos argumentar a la inversa. Si $y(x)$ verifica la EDO, entonces $g(x, y(x))$ es constante (en intervalos), pues $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x, y(x))) = 0$

Además, la notación habitual para este tipo de ecuaciones es:

$$\mathbf{y}' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{g_x(x,\mathbf{y})}{g_y(x,\mathbf{y})} \implies g_x\mathrm{d}x + g_y\mathrm{d}y = 0$$

Supongamos que tenemos una ecuación $y'(x) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, es decir, $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$. Nos gustaría saber cuándo existe $g(x,\mathbf{y}) : M = g_x,\ N = g_y$, ya que en ese caso es exacta y su solución es $g(x,\mathbf{y}) = C \mid C$constante en forma implícita.

Ejemplo 11 (*Ecuación exacta simple*)

Sea $\mathbf{y}' = \frac{-\mathbf{y}}{x}$, es decir, $\mathbf{y}\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$ es una ecuación exacta.
De hecho la g necesaria es $g(x,\mathbf{y}) = xy$ pues $g_x = \mathbf{y}$ y $g_y = x$. Y por tanto, la solución general es:

$$x\mathbf{y} = C \implies y(x) = \frac{C}{x}$$

De hecho, esta ecuación es de los tres tipos que hemos visto.

Proposición 5 (Condición necesaria de ecuación exacta)**.**

$$\mathcal{EC} \equiv M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y \text{ es exacta y } g(x,\mathbf{y}) \in C^2 \implies M_y = N_x$$

Demostración. Si $\mathcal{EC}$ es exacta, entonces $\exists g : M = g_x,\ N = g_y$. Como $g \in C^2$, sabemos que $g_{xy} = g_{yx}$, entonces:

$$\begin{cases} g_{xy} = (g_x)_y = M_y \\ g_{yx} = (g_y)_x = N_x \end{cases} \implies M_y = N_x$$

$\diamondsuit$

Observación. Sabemos que una ecuación es exacta cuando $(M, N) = g$, sea γ cualquier curva tal que $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces:

$$\int_\gamma M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

Es claro que si la curva es cerrada, $\gamma(a) = \gamma(b)$ y la integral es nula.

Ejemplo 12 (*Ecuación exacta*)

Sea $(\mathcal{EC}) \equiv (\mathbf{y} + x^3)dx + (x + \mathbf{y}^3)dy = 0$ es fácil ver que cumple la condición de $M_x = N_y$.
Nos gustaría hallar cual sería nuestra g a partir de que $g_x = M$ y $g_y = N$. Sabemos que $g_x = M = y + x^3$.
Si integramos en x (suponiendo $\mathbf{y}$ constante):

$$g(x, \mathbf{y} = yx + x^4/4 + C(y)) \text{ para } C \text{ una constante vista desde } x.$$

Además,

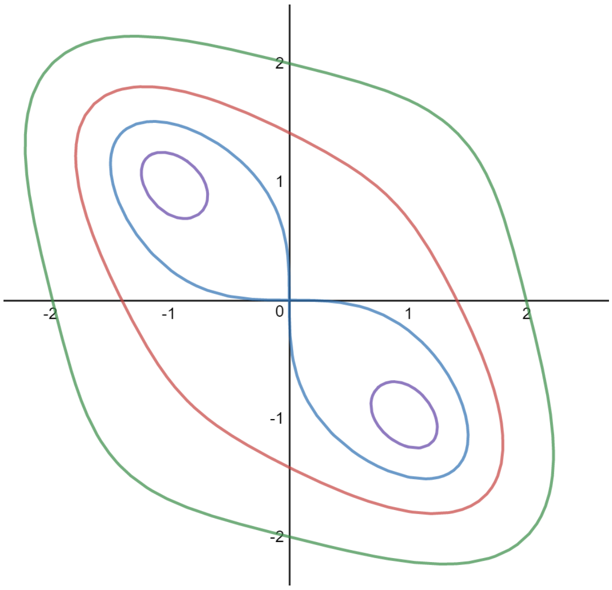
$$x + \mathbf{y}^3 = N = g_y = x + c'(\mathbf{y}) \implies c'(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^3$$

$$c'(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^3 \implies c(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^4}{4} + cte.$$

Por lo que tenemos: $g(x,\mathbf{y}) = x\mathbf{y} + \frac{x^4+\mathbf{y}^4}{4}$. Es decir, las soluciones de $(\mathcal{EC})$ vienen dadas por $xy + \frac{x^4+y^4}{4} = C(C$ constante).

Por ejemplo, una solución particular para C=1 es:

$$xy + \frac{x^4 + y^4}{4} = 1, \text{ que es la curva roja en la imagen siguiente.}$$



Queremos ahora analizar la condición necesaria y suficiente que nos asegure que podamos realizar el procedimiento del ejemplo. Haremos uso de la siguiente proposición.

Proposición 6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto simplemente conexo. Sean $M, N : \Omega \to \mathbb{R}$ con $M, N \in C^1$, entonces:

$$\exists g : \Omega \to \mathbb{R} \text{ con } g \in C^2 \text{ tal que } M = g_x|_\Omega \,,\, N = g_y|_\Omega \iff M_y|_\Omega = N_x|_\Omega \,.$$

La demostración se deja al lector.

A modo de recordatorio vamos a dar una definición de *abierto simplemente conexo.*

Definición 3 (Conjunto simplemente conexo)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado.
Decimos que Ω es **simplemente conexo** $\iff$ $\Omega^C = \mathbb{R}^2\Omega$ es conexo.

2.5. Factores integrantes

Sea de nuevo $(\mathcal{EC})_1 = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$, pero supongamos ahora que no se cumple la condición $M_x = N_y$ necesaria para encontrar una ecuación exacta. Nos preguntamos si podemos encontrar un $\mu(x, \mathbf{y})$ no trivial de forma que teniendo la ecuación $(\mathcal{EC})_2 = \mu(x, \mathbf{y})M\mathrm{d}x + \mu(x, \mathbf{y})N\mathrm{d}y = 0$ se cumpla:

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \tag{2.1}$$

Llamamos a μ factor integrante de $(\mathcal{EC})_1$. Veremos que siempre existe pero que es difícil de encontrar. Calculando 2.1, obtenemos:

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} + (M_y - N_x)\mu = 0$$
$$\left(M\frac{\partial}{\partial y} - N\frac{\partial}{\partial x}\right)\mu + (M_y - N_x)\mu = 0$$

de donde tendremos que calcular μ. Como suele resultar difícil, habitualmente se intenta que μ solo dependa de una de las dos variables, es decir, $\mu = \mu(y)$ o $\mu = \mu(x)$.

Veamos un ejemplo de ecuación de factores integrantes

Ejemplo 13 (*Factores integrantes*)

Sea $x\mathbf{y}\ \mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y = 0$, esta claro que $M = x\mathbf{y}$, $N = \mathbf{y}^2$. Para ver si puede ser una ecuación exacta evaluamos si cumple la condición necesaria $M_y = N_x$, sin embargo las derivadas cruzadas son $M_y = x$ y $N_x = 0$ y por tanto no puede ser ecuación exacta.

Nos preguntamos entonces por cual es su factor integrante. Para encontrarlo vamos a intentar que μ dependa solo de una variable (o de una combinación lineal, por ejemplo $z = x + y$).

1. `Intentamos que` μ `dependa de` x.

   Transformamos nuestra ecuación en: $(\mathcal{EC}) \equiv \mu M\ \mathrm{d}x + \mu N\ \mathrm{d}y = 0$. Es decir, tenemos:

   $$\mu(x)\ x\mathbf{y}\ \mathrm{d}x + \mu(x)\ \mathbf{y}^2\ \mathrm{d}y = 0, \text{entonces hallamos las nuevas } M_y \text{ y } N_x \text{ para hallar } \mu$$

   como se tiene que cumplir que $M_y = N_x$

   $$M_y = \mu(x)\ x = \mu'(x)\ \mathbf{y}^2 = N_x \implies \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{x}{\mathbf{y}}$$

   y es claro que no tiene solución, pues la parte de la izquierda no depende de y.
2. `Intentamos que` μ `dependa de` $\mathbf{y}$.

   Repitiendo el mismo procedimiento, hallamos las nuevas M_y y N_x para hallar μ que cumple la condición necesaria. Obtenemos:

   $$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{-1}{y} \implies (log|\mu|) = -log|y| \implies \mu(y) = \frac{1}{y} \text{ es solución.}$$

   Es decir, $(\mathcal{EC}) \equiv x\ \mathrm{d}x + \mathbf{y}\ \mathrm{d}y = 0$. Podemos resolverla por separación de variables y su solución es:

   $$\frac{x^2 + \mathbf{y}^2}{2} = C \implies x^2 + \mathbf{y}^2 = C$$

Observación. Sea la ecuación lineal de primer orden $\mathbf{y}' = a(x) \cdot \mathbf{y} + b(x)$.
Con $A(x) : A'(x) = a(x)\ (e^{A(x)})$. Entonces $e^{-A(x)}$ es un factor integrante de $y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$.

Ejemplo 14 (*Análisis de cotas en una ecuación diferencial*)

Vamos a hacer un aparte para retomar el ejemplo 6. Teníamos que $(\mathcal{EC}1) \equiv \mathbf{x}' = t^2 + \mathbf{x}^2 = f(t, \mathbf{x})$ y llegábamos a la conclusión a través de trazar su campo de pendientes de que $x(t) \uparrow \infty$, pero no sabíamos si lo hacía de forma asintótica o lo alcanza cuando $t \to \infty$, aunque el campo parecía indicar que lo hacía de forma asintótica en $t = 1$ o antes. Vamos a tratarla de forma analítica comparándola con otra ecuación que se asemeja y que ya conocemos.

Sabemos que $|f_x| < L$ no se cumple, pues $2x \to \infty$ si $x \to \infty$ y no podemos aplicar el teorema de existencia y unicidad global.
Vamos a comparar la solución de $(\mathcal{EC}1)$ donde exista con la de:

$$(\mathcal{EC}2) \equiv \begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x}^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Sean $u(t)$ la solución de $(\mathcal{EC}1)$ y $v(t)$ la solución de $(\mathcal{EC}2)$. A primera vista en $t = 0$ ambas tienen la misma pendiente pues $f(0, 1) = 1$. Sabemos también que $u(t)$ crece más rápido que $v(t)$ por que en el momento en que $t \neq 0$, crecerá más rápido (pues $t^2 + x(t^2) \geqslant x(t^2)$). Cualitativamente podemos afirmar que $u(t)$ "va por encima"de $v(t)$. Nos gustaría hacer una comparativa cuantitativa de ambas.

Para ello, consideramos $z(t) = u(t) - v(t)$. Ahora, calculamos $z'(t)$:

$$z'(t) = u'(t) - v'(t) = t^2 + u^2 - v^2 = t^2 + (u - v) \cdot (u + v) = t^2 + \mathbf{z} \cdot (u + v).$$

En este caso no conocemos explícitamente $(u(t)+v(t))$, pero podemos afirmar que como $(u(t), v(t))$ son crecientes $\forall t \geqslant 0$ y para $t=0$ valen 1, entonces $(u+v) \geqslant 2$. Por tanto,

$$\mathbf{z}' \geqslant 2\mathbf{z} + t^2 \implies \mathbf{z}' - 2\mathbf{z} \geqslant t^2.$$

Sea $w(t) = e^{-2t} \cdot z(t)$, entonces $\mathbf{w}' = e^{-2t}(\mathbf{z}' - 2\mathbf{z}) \geqslant e^{-2t}t^2 \geqslant t^2$. Entonces $\mathbf{w}' \geqslant e^{-2t}t^2$ y además $w(0) = z(0) = 1 - 1 = 0$. A partir de esto tenemos:

$$w(t) = w(0) + \int_0^t w'(s)\mathrm{d}s \geqslant \int_0^t s^2 e^{-2s}\mathrm{d}s = e^{-2s} \cdot \left. \frac{2s^2+2s+1}{4} \right|_0^t$$

es decir,

$$w(t) \geqslant \frac{1}{4} - e^{-2t}\frac{2t^2+2t+1}{4}, \text{ y como } w(t) = e^{-2t}z(t) \text{ entonces,}$$

$$z(t) \geqslant \frac{e^{2t} - (2t^2+2t+1)}{4} \implies u(t) - v(t) \geqslant \frac{e^{2t} - (2t^2+2t+1)}{4} \implies u(t) \geqslant v(t) + \frac{e^{2t} - (2t^2+2t+1)}{4}$$

Como vimos en 2.3, $v(t) = \frac{1}{1-t}$ y por tanto $v \to \infty$ cuando $t \to 1$. Y ya que $u(t) \geqslant v(t) + \frac{e^{2t}-(1+2t+2t^2)}{4}$, $u \to \infty$ antes de $t = 1$.

Ejercicio propuesto 4. Encontrar otra ecuación que sea sencilla de resolver para $u(t) \geqslant x$.

2.6. Ecuaciones reducibles de orden II

Hasta ahora hemos estudiado distintas ecuaciones de orden I. Vamos a ver un nuevo tipo de ecuaciones que involucra la segunda derivada y hay diversos ejemplos en el estudio de la Física.

Definición 4 (Ecuaciones de orden II)**.** Sea $\mathbf{x} = f(t)$, una **ecuación diferencial de segundo orden** es una ecuación de la forma: $\mathbf{x}'' = F(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$

Observación. La ecuación $\mathbf{x}'' = 5\mathbf{x}'$ es de orden 2 sólo formalmente, ya que se resuelve como una de primer orden. Con $y(t) = 5\mathbf{y}, \mathbf{y}' = 5\mathbf{y} \implies y(t) = ce^{5t} \implies x(t) = \int Ce^{5t} = a + be^5 t$. Sin embargo tenemos dos parámetros, para determinarlos necesitamos añadir dos condiciones. El PVI entonces sería del tipo:

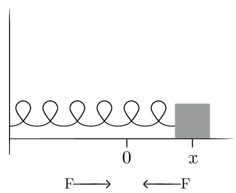
$$\begin{cases} \mathbf{x}'' = 5\mathbf{x}' \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Con esto hallaríamos $a + b = 1$, $b = 0$.

Sin embargo, podemos tener otro tipo de condiciones que no serían un PVI, por ejemplo, dar dos condiciones para x(t) y ninguna para x'(t). Estas no tienen aseguradas existencia y unicidad y lo veremos más adelante.

Como fuente de ejemplos para esta sección utilizaremos la segunda ley de Newton $F = m \cdot a$.

Ejemplo 15 (*Muelles*)



Consideramos que $x = 0$ corresponde a la situación de equilibrio, es decir totalmente parado. Además vamos a suponer que:

- *no hay fricción con la superficie ni con el aire.*

- *tenemos movimientos oscilatorios desde la situación de equilibrio.*
- *la masa es puntual.*

La fuerza por tanto se expresa como $F = -kx$, *donde* k *es la constante del muelle y es negativa por que va en sentido contrario al vector posición con origen en* $x = 0$.

La ecuación diferencial de este modelo es:

$$m\mathbf{x}'' = -k\mathbf{x} \implies \mathbf{x}'' = -\frac{k}{m} \cdot \mathbf{x}$$

Consideramos que $x = 0$ *corresponde a la situación de equilibrio, es decir totalmente parado. Además vamos a suponer que:*

- *no hay fricción con la superficie ni con el aire.*
- *tenemos movimientos oscilatorios desde la situación de equilibrio.*
- *la masa es puntual.*

La fuerza por tanto se expresa como $F = -kx$, *donde* k *es la constante del muelle y es negativa por que va en sentido contrario al vector posición con origen en* $x = 0$.

La ecuación diferencial de este modelo es:

$$m\mathbf{x}'' = -k\mathbf{x} \implies \mathbf{x}'' = -\frac{k}{m} \cdot \mathbf{x}$$

Vamos a hallar sus soluciones. Definimos $y(t) = x(\alpha t)$ *(para esconder el parámetro* $\frac{k}{m}$*), vamos a ver cual es este* α:

$$\mathbf{y}'' = \alpha^2 \cdot \mathbf{x}''(\alpha t) = a^2 \left(-\frac{k}{m} \cdot x(\alpha t)\right) = -\frac{k}{m}\alpha^2 \cdot y(t)$$

Eligiendo $\alpha = \sqrt{\frac{m}{k}}$ *tenemos* $\mathbf{y}'' = -\mathbf{y}$. *Vemos fácilmente que:*

1. $\sin(t)$ *y* $\cos(t)$ *son soluciones.*
2. $\mathbf{y}'' = \mathbf{y}$ *es lineal.*

   Es decir, si $y_1(t), y_2(t)$ *son solución, entonces:*

   $$\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 \text{ es solución } \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

   Entonces con $\mathbf{y}_1 = \sin$, $\mathbf{y}_2 = \cos$ *sabemos que:*

   $$\alpha_1 \sin(t) + \alpha_2 \cos(t) \text{ es solución.}$$

   A priori no sabemos si estas son todas las soluciones. Podemos asegurar que sí con el teorema 7 que se enuncia tras este ejemplo.

   Dados cualquier y_0, y_1 *entonces:*

   $$\alpha, \beta : \mathbf{y}_{\alpha,\beta} = \alpha \sin(t) + \beta \cos(t)$$

   que cumplen:

   $$\beta = y_{\alpha,\beta}(0) = y_0. \ \alpha = y'_{\alpha,\beta}(0) = y_1.$$

   es decir, α, β *forman el vector* $(\alpha\ \beta) = (y_1\ y_0)$. *Por tanto, en el momento en que sepamos el valor* $y(0)$, $y'(0)$ *lo hemos resuelto pues* $y(t) = y(0)\cos(t) + y'(0)\sin(t)$.

Capítulo 3

Ecuaciones de orden superior

3.1. Ecuaciones lineales de orden II

Teorema 7 (Existencia y unicidad para ecuaciones lineales de orden II)**.** Sean:
$(\mathcal{EC}) \equiv \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = r(t)$ con $p, q, r : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y $t_0 \in [a, b]$, $x_0,\ x_1 \in R$ entonces existe una solución y es única al PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = r(t),\ \forall t \in [a, b]. \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

La demostración de nuevo se deja para el caso general.

Vamos a enunciar ciertas **propiedades**.

1. Es lineal, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial.

   Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ soluciones de la homogénea, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ es solución de la homogénea.

2. Ese espacio vectorial tiene dimensión 2.

Demostración. (*de las propiedades*)

1. Se demuestra como en el ejemplo.
2. Sea x_1 la solución del PVI:
$$\begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0 \\ x(a) = 1 \\ x'(a) = 0 \end{cases}$$
   y sea x_2 la solución del PVI:
$$\begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0 \\ x(a) = 0 \\ x'(a) = 1 \end{cases}$$
   Por existencia y unicidad, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ existen en $[a, b]$. Además, ninguna es un múltiplo de la otra, es decir, son linealmente independientes pues:

   - Cualquier $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1$ cumple $x'(a) = 0$ pero $x_2'(a) \neq 0$.
   - Cualquier $\mathbf{x} = \beta\mathbf{x}_2$ cumple $x(a) = 0$ pero $x_1(a) \neq 0$.

Por tanto, la dimensión del espacio de soluciones es al menos 2. Para ver que es justo dos se sigue:

Dada cualquier solución x(t) de la ecuación

$$x(t) = x(a) \cdot x_1(t) + x'(a) \cdot x_2(t)$$

por unicidad, el término de la derecha es solución con:

$$\begin{cases} \text{valor en a igual a } x(a) \\ \text{derivada en a igual a } x'(a) \end{cases}$$

$\diamondsuit$

Observación. Como vimos en el ejemplo 15, para resolver $\mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0$ basta encontrar dos soluciones linealmente independientes.

Ejemplo 16 (*Ecuaciones de orden II como sistemas*)

Consideramos $(\mathcal{EC} \equiv f(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}'))$. *Sea* $\mathbf{y} = \mathbf{x}'$, *entonces podemos resolverla resolviendo un sistema de ecuaciones. Para ello consideraremos el vector* $X(t) = \left[\begin{smallmatrix} x(t) \\ y(t) \end{smallmatrix}\right]$. *Si derivamos:*

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ f(t, x, x') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ f(t, x, y) \end{bmatrix} = F(t, X)$$

Con lo que llegamos a la expresión:

$$X'(t) = F(t, X) \text{ que representa un sistema de ecuaciones}$$

Proposición 8 (Estructura de soluciones de la $(\mathcal{EC}) \equiv \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = r(t)$)**.** Vamos a matizar las propiedades descritas en 3.1 en forma de proposición.

1. Sean $p, q, r : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas, el conjunto de soluciones de la EDO homogénea $(\mathcal{ECH}) \equiv \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0$ es un espacio vectorial de dimensión 2. Es decir, existen 2 soluciones linealmente independientes $x_1(t)$, $x_2(t)$.
   Además, todas las soluciones son de la forma $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

   Este par $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ se obtiene, por ejemplo, resolviendo los PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0 \\ x(t_0) = 1 \\ x'(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0 \\ x(t_0) = 0 \\ x'(t_0) = 1 \end{cases}$$

2. Sea $x_p(t)$ una solución particular de $(\mathcal{EC})$ entonces cualquier solución se escribe:

$$x(t) = x_p(t) + \alpha_1 \cdot x_1(t) + \alpha_2 \cdot x_2(t)$$

Demostración. La prueba de cada apartado:

1. Visto en la demostración de las propiedades 3.1.
2. Si $x(t)$ resuelve la EDO, entonces $x(t) - x_p(t)$ resuelve la EDO homogénea asociada. Por tanto $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : x(t) - x_p(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$.

$\diamondsuit$

Observación. El procedimiento habitual es resolver primero la ecuación homogénea y luego buscar la solución particular de la EDO original. Se dice que la solución general de la EDO original = solución particular + solución general de la homogénea.

3.1.1. Ecuaciones lineales de orden 2 con coeficientes constantes.

Consideramos $\mathbf{x}'' + a\mathbf{x}' + b\mathbf{x} = 0,\ \forall a, b \in \mathbb{R}$. Vamos a ver distintos ejemplos para la resolución de este tipo de ecuaciones.

Ejemplo 17 (*Ecuación lineal de orden 2:* $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + 2\mathbf{x} = 0$)

- *Intentamos* $x(t) = e^{\lambda t},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. *Que sea solución quiere decir que* $(\lambda^2 + 3\lambda + 2) \cdot e^{\lambda t} = 0$, *entonces* $e^{\lambda t}$ *es solución* $\iff \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = -1$ *o* $\lambda = -2$. *De esta forma podemos hallamos:*

$$x_1(t) = e^{-t}$$
$$x_2(t) = e^{-2t}$$

son soluciones.
- *Por tanto, como son linealmente independientes* $\implies x(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{-2t}$ *es la solución general.*

Ejemplo 18 (*Ecuación lineal de orden 2:* $\mathbf{x}'' + a\mathbf{x}' + b\mathbf{x} = 0$)

Volviendo a intentar $x(t) = e^{\lambda t}$, *tenemos que* $e^{\lambda t}$ *es solución* $\iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0$. *De aquí deducimos distintos casos:*

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \iff (a^2 - 4b > 0)$, *las soluciones son:*

$$\mathbf{x}_1 = e^{\lambda_1 t}$$
$$\mathbf{x}_2 = e^{\lambda_2 t}$$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \notin \mathbb{R} \iff (a^2 - 4b < 0)$.

Como los coeficientes $a, b \in \mathbb{R} \implies \lambda_2 = \bar{\lambda_1}$. *Si* $\lambda_1 = \mu + i\omega \implies \lambda_2 = \mu - i\omega$, *y con* $\omega \neq 0 \implies (\lambda_1 \neq \lambda_2)$. *Entonces:*

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\mu t + i\omega t} = e^{\mu t} e^{i\omega t} = e^{\mu t} \cdot (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) = e^{\mu t} \cos(\omega t) + i e^{\mu t} \sin(\omega t)$$

Afirmamos entonces que:

$$\mathbf{x}_1 = e^{\mu t} \cos(\omega t)$$
$$\mathbf{x}_2 = e^{\mu t} \sin(\omega t)$$

son soluciones y linealmente independientes.
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \iff (a^2 - 4b = 0)$

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$
$$x_2(t) = t e^{\lambda_1 t}$$

son solución y linealmente independientes.

Ejercicio propuesto 5. Comprobar en el caso 3 del ejemplo anterior que $x_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ es solución y linealmente independiente de x_1.

Ejemplo 19 (*Ecuación lineal de orden 2:* $\mathbf{x}'' + \mathbf{x}' + \mathbf{x} = 0$)

Siguiendo el ejemplo 18, es una ecuación del caso 2. $\lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \implies \mu = -\frac{1}{2},\ \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Y nuestra solución es:*

$$\mathbf{x}_1 = e^{-1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$
$$\mathbf{x}_2 = e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

Ejemplo 20 (*Ecuación lineal de orden 2:* $\mathbf{x}'' + 2\mathbf{x}' + \mathbf{x} = 0$)

Es fácil ver que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Siguiendo 18, las soluciones son:

$$x_1(t) = e^t$$
$$x_2(t) = te^t$$

Ejemplo 21 (*Ecuación lineal de orden 2:* $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + 2\mathbf{x} = te^t$)

Intentamos ver si $x(t) = e^t(\alpha + \beta t)$ es solución. Entonces:

$$x'(t) = e^t(\alpha + \beta + \beta t)$$
$$x''(t) = e^t(\alpha + 2\beta + \beta t)$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + 2\mathbf{x} = e^t(6\beta t + 6\alpha + 5\beta) \text{ entonces,}$$

$$e^t(6\beta t + 6\alpha + 5\beta) = te^t \implies \begin{cases} 6\beta = 1 \\ 6\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$$

que es fácil de resolver para α y β.

Ejemplo 22 (*Ecuación lineal de orden 2:* $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + 2\mathbf{x} = te^{-t}$)

Si intentamos hacerlo como en el ejemplo 21 no podremos resolverlo.
Vamos a intentar el cambio $x(t) = e^{-t}(\alpha + \beta + \gamma t^2)$, donde veremos que α sobra y que γ es necesario. Entonces la ecuación queda como:

$$\mathbf{x}' = e^{-t}(-\alpha - \beta t - \gamma t^2 + \beta + 2t) \implies \ldots \implies \mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + 2x = e^{-t}(4\gamma + 2\beta + 2\gamma t)$$

Vemos que no aparece el término α, esto es porque $e^{-\lambda t}$ cuando λ es un autovalor de la ecuación homogénea es solución. Es decir,

$$x(t) = e^{-t}(t - \frac{t^2}{2}) \text{ es una solución particular.}$$

Ejemplo 23 (*Ecuación lineal de orden 2:* $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + \mathbf{x} = te^{-t}$)

En este caso, si intentamos que $x(t) = e^{\lambda t}$ sea solución de la homogénea $\mathbf{x}'' + 2\mathbf{x}' + \mathbf{x} = 0$, tenemos que resolver para $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, de donde obtenemos la solución doble: $\lambda = -1$.

Se puede comprobar que dos soluciones independientes de la homogénea son e^{-t}, te^{-t}. Para buscar una solución particular de la ecuación original tomamos:

$$x(t) = (\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3)e^{-t}$$

De donde veremos que $\alpha + \beta t$ sobrarán. La idea subyacente es que tenemos que añadir tantos grados al polinomio $x(t)$ como la multiplicidad de las raíces.

Observación. Lo que hemos hecho para la resolución ha sido tomar:

$$x(t) = e^{\gamma t} \cdot pol(t) \implies x'(t) \text{ es del mismo tipo que } e^{\gamma t} \cdot \hat{pol}(t)$$

Nos gustaría saber que familias cumplen la propiedad anterior.

1. $e^{\gamma t}pol(t)$, con $pol(t)$ un polinomio de cualquier grado. Si γ es una solución de intentar $e^{\gamma t}$ como solución a la homogénea, entonces tenemos que añadir tantos grados al polinomio como multiplicidad de γ en la ecuación que resuelve. Como caso particular si $\gamma = 0$, nuestra expresión son sólo polinomios.
2. $e^{\gamma t}(pol_1(t)\sin(\alpha t) + pol_2(t)\cos(\alpha t))$. Análogo con los complejos.

3.1.2. Ecuaciones lineales de orden 2 con coeficientes no constantes.

Vamos a comentar algunos resultados para el caso general de ecuaciones lineales de orden 2. Es decir, para la ecuación:

$$\mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = r(t), \text{ con } p, q, r : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continuas.}$$

y por tanto, tenemos existencia y unicidad para el PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = r(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Proposición 9 (Método de variación de constantes)**.** Vamos a enunciar un método para encontrar soluciones particulares a partir de la solución de la ecuación homogénea:

1. Si se tiene una solución $x_1(t)$ de la homogénea $(\mathcal{ECH}) \equiv \mathbf{x}''+p(t)\mathbf{x}'+q(t)\mathbf{x} = 0$ y $x_1(t) \neq 0\ \forall t \in [\alpha, \beta]$ se puede encontrar una segunda linealmente independiente de la primera, de la forma: $x_2(t) = u(t)x_1(t)$ con $u(t)$ apropiada.
2. $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ linealmente independientes y soluciones de la homogénea (con $r(t) = 0$), se puede encontrar una solución particular $\mathbf{x}_p$ de $\mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = r(t)$ de la forma:
$$\mathbf{x}_p = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$$
.

Demostración. Se considera que $x_1(t)$ es suficientemente buena como para no tener ningún caso crítico durante el desarrollo de la prueba.

1. Sea $x(t) = u(t)x_1(t) \implies \mathbf{x}' = \mathbf{u}'\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}\mathbf{x}_1'$ y $\mathbf{x}'' = \mathbf{u}''\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{u}'\mathbf{x}_1' + \mathbf{u}\mathbf{x}_1''$. Entonces:
$$\mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_1'' + p(t)\mathbf{x}_1' + q(t)\mathbf{x}_1) + \mathbf{u}'(2\mathbf{x}_1' + p\mathbf{x}_1) + \mathbf{u}''\mathbf{x}_1 = 0$$
y por tanto, $u(t) \cdot x_1(t)$ es solución de la homogénea $\iff$ $\mathbf{u}''\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}(2\mathbf{x}_1' + p(t)\mathbf{x}_1) = 0$ pues $\mathbf{u}(\mathbf{x}_1'' + p(t)\mathbf{x}_1' + q(t)\mathbf{x}_1) = 0$.

   Si llamamos $y(t) = u'(t)$ entonces:
$$\begin{aligned} \mathbf{y}' = -\frac{2\mathbf{x}_1' + p(t)\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1} \cdot y = \left(-\frac{2\mathbf{x}_1'}{\mathbf{x}_1} + p(t)\right) y \implies \\ \implies \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{-2\mathbf{x}_1'}{\mathbf{x}_1} - p(t)dt \implies \\ \implies \mathbf{y} = \frac{e^{-P(t)}}{x_1^2(t)} \text{ donde } P'(t) = p(t) \end{aligned}$$
por tanto, como $\mathbf{u}' = \mathbf{y} \implies u(t) = \int \frac{\mathbf{u}^{-P}}{\mathbf{x}_1^2}$

   Entonces, $x_2(t) = u(t)x_1(t)$ con $u(t)$ una primitiva de $\frac{\mathbf{u}^{-P}}{\mathbf{x}_1^2}$ es solución de la homogénea y es linealmente independiente de $\mathbf{x}_1$ pues basta ver que $u(t) \neq$ constante. Y esto es cierto pues es la primitiva de una exponencial, que nunca se anula.
2. Sea $\mathbf{x} = x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$ una solución particular. Entonces:
$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}_1\mathbf{x}_1' + \mathbf{u}_2\mathbf{x}_2' + \mathbf{u}_1'\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_2'\mathbf{x}_2$$
donde pedimos que

$$\mathbf{u}_1'\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_2'\mathbf{x}_2 = 0 \tag{3.1}$$

Además:

$$\mathbf{x}'' = (\mathbf{u}_1\mathbf{x}_1' + \mathbf{u}_2\mathbf{x}_2')' = \mathbf{u}_1\mathbf{x}_1'' + \mathbf{u}_2\mathbf{x}_2'' + \mathbf{u}_1'\mathbf{x}_1' + \mathbf{u}_2'\mathbf{x}_2'$$

Y sustituyendo en nuestra EDO original:

$$\mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_1'' + p(t)\mathbf{x}_1' + q(t)\mathbf{x}_1) + \mathbf{u}_2(\mathbf{x}_2'' + p(t)\mathbf{x}_2' + q(t)\mathbf{x}_2) + \mathbf{u}_1'\mathbf{x}_1' + \mathbf{u}_2'\mathbf{x}_2' = r(t)$$

Donde los dos primeros sumandos son nulos pues $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2$ son soluciones de la homogénea, así hallamos la condición $\mathbf{u}_1'\mathbf{x}_1' + \mathbf{u}_2'\mathbf{x}_2' = r(t)$. Y por la condición que pedimos en 3.1, $\mathbf{u}_1'\mathbf{x}_1' + \mathbf{u}_2'\mathbf{x}_2'$ es solución de $x(t) = \mathbf{u}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{x}_2 \iff$ se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1'\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_2'\mathbf{x}_2 = 0 \\ \mathbf{u}_1'\mathbf{x}_1' + \mathbf{u}_2'\mathbf{x}_2 = r(t) \end{cases} \quad \text{es decir} \begin{bmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t_0) \\ u_2'(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix}$$

Donde llamamos a la primera matriz $W(t)$, el «wronskiano» de $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2$.

Para ayudarnos con la demostración vamos a hacer uso del lema 10 que se enuncia posteriormente. Este lema nos dice que si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ son linealmente independientes entonces $W(t) \neq 0\ \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Sabiendo esto, $W(t)$ es invertible y entonces:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1' \\ \mathbf{u}_2' \end{bmatrix} = W^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \mathbf{u}_1' = \frac{-x_2(t)r(t)}{W(t)} \\ \mathbf{u}_2' = \frac{x_1(t)r(t)}{W(t)} \end{cases}$$

y finalmente hallamos $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ como primitivas de lo anterior:

$$\mathbf{u}_1 = \int_u^t \frac{-x_2(s)r(s)}{W(s)} \mathrm{d}s$$

$$\mathbf{u}_2 = \int_u^t \frac{x_1(s)r(s)}{W(s)} \mathrm{d}s$$

$\diamondsuit$

Proposición 10 (Linealmente independiente $\implies$ wronskiano no nulo en todo punto)**.** Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ soluciones linealmente independientes. Sea

$$W(t) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{bmatrix}$$

entonces, $W(t) \neq 0\ \forall t \in [\alpha, \beta]$

Demostración. Demostraremos el contrarrecíproco, es decir, si $W(t_0) = 0$ en algún punto entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ son linealmente dependientes.

Si $\exists t_0 \in [\alpha, \beta] : W(t_0) = 0$ entonces las columnas de

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{bmatrix}$$

son linealmente dependientes, es decir, una es un múltiplo de la otra. Digamos que:

$$\begin{bmatrix} x_2(t_0) \\ x_2'(t_0) \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_1'(t_0) \end{bmatrix}$$

Entonces, $\mathbf{x}_2$ y $c\mathbf{x}_1$ satisfacen las mismas condiciones iniciales y por unicidad de soluciones del PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

se tiene por tanto que $x_2(t) \equiv c \cdot x_1(t)\ \forall t \in [\alpha, \beta]$, con lo que hemos demostrado el contrarrecíproco. $\diamondsuit$

Proposición 11 (Wronskiano no nulo en un punto $\implies$ linealmente independientes)**.** Si $W(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in [\alpha, \beta]$ entonces $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ son linealmente independientes. Como consecuencia, $W(t) \neq 0$ $\forall t \in [\alpha, \beta]$.

Demostración. Directamente (si $W(t_0) \neq 0$) entonces:

$$\begin{bmatrix} x_2(t_0) \\ x_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq c \cdot \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_1'(t_0) \end{bmatrix} \forall c \text{ constante} \implies x_2(t) \neq c x_1(t) \ \forall c \text{ constante.}$$

♢

Ejercicio propuesto 6. Resolver la demostración anterior justificando primero que $W(t)$ satisface que $W'(t) + p(t)W(t) = 0$, y por tanto $W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s}$. Esa expresión es siempre 0 o siempre $\neq 0$.

Como comentarios a este desarrollo:

Observación.

1. Puede ser útil la expresión de la derivada del determinante de una matriz de funciones:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{vmatrix}$$

2. Este método también es útil para coeficientes constantes si $r(t)$ no es de las familias:
$$exp \cdot pol$$
$$exp \cdot (pol_1 \cdot \sin + pol_2 \cdot \cos)$$

3. Estas propiedades están enunciadas sobre intervalos compactos, se pueden ir ampliando los intervalos hasta llenar $\mathbb{R}$.

Ejemplo 24 (*Resolución de la ecuación homogénea de orden II a partir de una solución*)

Sea $(1 - x^2)\mathbf{y}'' - 2x\mathbf{y}' + 2\mathbf{y} = 0$ con $x \in (-1,\ 1)$.
Es fácil ver que $y_1(x) = x$ es solución. Vamos a encontrar todas la soluciones de la ecuación.

1. *Como es una ecuación homogénea de orden 2 basta encontrar $y_2(x)$ linealmente independiente de $\mathbf{y}_1$, ya que $\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$.*
2. *Buscamos $y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x) = x \cdot u(x)$. Derivando obtenemos que:*
   $\mathbf{y}_2$ *es solución* $\iff \frac{\mathbf{u}''}{\mathbf{u}'} = \frac{4x^2-2}{x-x^3}$
3. *Por tanto:*
$$\log|\mathbf{u}'| = \int \frac{4x^2-2}{x-x^3}\mathrm{d}x = \int \frac{3x^2-1}{x-x^3}\mathrm{d}x + \int \frac{x^2-1}{x-x^3}$$

Como resultado obtenemos:

$$u(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$\mathbf{y}_2 = -1 + \frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Podemos observar que $\mathbf{y}_2 = -1 + \frac{x}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ es solución en los dos intervalos de $|x| > 1$, aunque explota en $x = \pm 1$.

$$\mathbf{y}'' - \frac{2x}{1-x^2}\mathbf{y}' + \frac{2}{1-x^2}\mathbf{y} = 0$$

Ejemplo 25 (*Resolución de una ecuación lineal de orden II por variación de las constantes*)

Sea $(\mathcal{ED}) \equiv \mathbf{y}'' - \mathbf{y} = e^{2x}$ que cumple $y(0) = 0$.
La ecuación homogénea es: $(\mathcal{ED}_h) \equiv \mathbf{y}'' - \mathbf{y} = 0 \implies \lambda^2 - 1 = 0$. Por tanto, $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ resuelven $(\mathcal{ED}_h)$ y entonces:

$$\mathbf{y}_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Además, la solución general de ($\mathcal{ED}$) es la suma de una solución particular de ($\mathcal{ED}$) más la solución general de ($\mathcal{ED}_h$), que ya la sabemos. Vamos a hallarla por variación de las constantes. Llamamos $y_p(x)$ a una solución particular de ($\mathcal{ED}$). Entonces:

$$y_p(x) = \mathbf{u}_1\mathbf{y}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{y}_2 \implies \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_1' & \mathbf{y}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1' \\ \mathbf{u}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema, hallamos: $2\mathbf{u}_1'e^x = e^{2x}$, *es decir,* $\mathbf{u}_1' = \frac{e^x}{2} \implies \mathbf{u}_1 = \frac{e^x}{2}$. *Sabiendo esto, hallamos* $\mathbf{u}_2 = -\frac{e^{3x}}{6}$. *Por tanto:*

$$\mathbf{y}_p = \frac{e^x}{2}e^x + \left(-\frac{e^{3x}}{6}\right)e^{-x} = \frac{1}{3}e^{2x}$$

Y entonces nuestra solución general $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ *es:*

$$y(x) = \frac{e^{2x}}{3} + c_1e^x + c_2e^{-x}$$

y para nuestro caso concreto, como $y(0) = 0$, *podemos hallar que:*

$$c_2 = -\frac{1}{3} - c_1$$

Observación. Sea $\mathbf{y}'' - \mathbf{y} = e^{2x} + xe^{5x}$, si $\mathbf{y}_j$ es solución de:

$$\mathbf{y}'' + p(x)\mathbf{y}' + q(x) = r_j(x), \text{ con } j = 1, 2$$

entonces $\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2$ es solución de:

$$\mathbf{y}'' + p(x)\mathbf{y}' + q(x)\mathbf{y} = r(x) \text{ con } r(x) = \alpha_1r_1(x) + \alpha_2r_2(x)$$

Ejemplo 26 (*Resonancia. Oscilador armónico simple.*)

Sea $\mathbf{x}'' + \omega_0^2\mathbf{x} = 0$ *con* $\omega_0 \neq 0$ *un sistema físico. Es un ejemplo conocido pues es el oscilador armónico simple, y la solución general es:*

$$\mathbf{x} = a\sin(\omega_0t) + b\cos(\omega_0t)$$

es decir, son soluciones periódicas, de periodo $2\pi/\omega_0$ *y por tanto de frecuencia* $\omega_0/2\pi$. *Vamos a aplicarle al sistema una fuerza externa periódica. Entonces nuestra ecuación es de la forma:*

$$\mathbf{x}'' + \omega_0^2\mathbf{x} = cos(\omega t)$$

Para resolverla, vamos a diferenciar dos casos.

Caso $\omega \neq \omega_0$.
Probamos $x(t) = a\cos(\omega t)$. ($\cos(\omega t)$ *no es solución de la homogénea pues* $\omega \neq \omega_0$). *Probando:*

$$x(t) = a\cos(\omega t) \text{ hallamos } a = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \textit{ es decir, la solución general de la } \mathcal{ED} \textit{ es:}$$

$$\frac{\cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} + \alpha\,\mathrm{sen}(\omega_0t) + \beta\cos(\omega_0t)$$

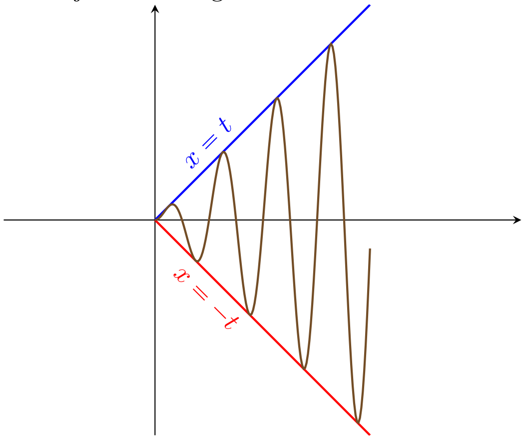
Caso $\omega = \omega_0$ *(resonancia).*
Ahora $\cos(\omega_0t) = \cos(\omega t)$. *Por tanto, tenemos que resolver la ecuación homogénea. En este caso, intentamos una solución particular del tipo* $\mathbf{x} = at\cos(\omega_0t) + bt\sin(\omega_0t)$ *(como ayuda para saber de donde sale esto, ver el ejemplo 21). Desarrollando, hallamos:*

$$\mathbf{x}'' + \omega_0^2x = \cos(\omega_0t)$$

Eso requiere que $a = 0$, $2\omega_0b = 1$, *es decir,* $b = \frac{1}{2\omega_0}$. *Lo que implica que la solución particular es:* $x_p(t) = \frac{t\sin(\omega_0t)}{2\omega_0}$ *y por tanto la solución general:*

$$x(t) = \frac{t\sin(\omega_0t)}{2\omega_0} + \alpha\cos(\omega_0t) + \beta\sin(\omega_0t)$$

Cuya representación gráfica es semejante a la siguiente:



Observación. Como comentario, es más sencillo resolver las ecuaciones usando $e^{i\omega t}$, $e^{-i\omega t}$ y luego separando la parte real e imaginaria.

Ejemplo 27 (*Oscilador armónico amortiguado*)

Vamos a empezar considerando el muelle. En el oscilador armónico simple, teníamos $\mathbf{x}'' = -\omega_0^2\mathbf{x}$ *(donde* $-\omega_0^2\mathbf{x}$*) era la fuerza de recuperación.*
Ahora, vamos a considerar el caso en el que exista el rozamiento. Sabemos que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad (para velocidades no muy grandes) en dirección contraria al movimiento. Es decir, tenemos: $(\mathcal{ED}) \equiv \mathbf{x}'' = -\omega_0^2\mathbf{x} - \mu\mathbf{x}' \implies \mathbf{x}'' + \mu\mathbf{x}' + \omega_0^2\mathbf{x} = 0$*, que es una ecuación lineal homogénea. Por tanto su solución general es de la forma:*

$$x(t) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 \ : \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \text{ son linealmente independientes.}$$

Para hallar $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ *resolvemos las raíces del polinomio característico:* $\lambda^2 + \mu\lambda + \omega_0^2 = 0$*. Distinguimos distintos casos:*

- *Caso* $\mu/2 > \omega_0$

$$\lambda = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{mu}{2}^2\right) - \omega_0^2} \implies \begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_+ = e^{\lambda_+ t} \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_- = e^{\lambda_- t} \end{cases} \quad \text{con } \lambda_- < \lambda_+ < 0$$

  Y entonces, $\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+ \to 0$ *cuando* $t \to \infty$.

- *Caso* $\mu/2 = \omega_0$

  Tenemos una raíz doble y las soluciones son:

$$\mathbf{x}_1 = e^{-\mu/2 t}$$
$$\mathbf{x}_2 = te^{-\mu/2 t}$$

- *Caso* $\mu/2 < \omega_0$

$$-\frac{\mu}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2} = -\frac{\mu}{2} \pm i\omega_\mu$$

  y entonces, resolviendo la ecuación tenemos las soluciones:

$$\mathbf{x}_1 = e^{-\mu/2 t}\cos(\omega_\mu t)$$
$$\mathbf{x}_2 = e^{-\mu/2 t}\sin(\omega_\mu t)$$

Parte II

Segundo parcial

Capítulo 4

Sistemas lineales de orden I

4.1. Introducción a sistemas

En esta sección vamos a ver como resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de orden I. Estos sistemas son del tipo:

$$\begin{cases} x' = f(t,x,y) \\ y' = g(t,x,y) \end{cases}$$

y habitualmente los escribiremos:

$$X' = F(t,X)$$

Donde:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$F(t,X) = \begin{pmatrix} f(t,x,y) \\ g(t,x,y) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 28 (*Sistema lineal de orden I a partir de una ecuación de orden II*)

Sea $x'' + \mu \cdot (1-x^2)x' + x = 0$, vamos a estudiarla como sistema.
Consideramos $y = x$'. Tenemos:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = y = f(t,x,y)$$

$$y' = (x'') = -x - \mu(1-x^2)y = g(t,x,y)$$

entonces obtenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -x - \mu(1-x^2)y \end{pmatrix}$$

Como hemos visto, podemos transformar una ecuación diferencial de orden II en un sistema de ecuaciones de orden I. De hecho, podremos transformar cualquier EDO en un sistema de orden I.

Observación. Cualquier sistema se puede convertir en un sistema autónomo, es decir, no depende de la variable t.
Sea nuestro sistema: $X' = F(t,X)$ con $X : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^n$, $F : (\alpha,\beta) \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Podemos tomar:

$$Y = \begin{pmatrix} t \\ X \end{pmatrix},\ Y' = \begin{pmatrix} 1 \\ F(t,X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ F(Y) \end{pmatrix} = G(Y)$$

Y de esta forma hemos transformado nuestro sistema $X' = F(t,X)$ en uno autónomo $Y' = G(Y)$.

4.2. Unicidad, existencia y estructura de soluciones.

Consideraremos a partir de ahora el sistema:

$$X' = \mathbb{A}(t)X + B(t)$$

con $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, y $X, B \in \mathbb{R}^n$

Teorema 12 (Teorema de existencia, unicidad y estructura)**.** Sean $\mathbb{A} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ ambas continuas. Y sea $t_0 \in [\alpha, \beta]$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$.Entonces:

1. Existe una solución $X(t)$ del PVI:

$$\begin{cases} X' = \mathbb{A}(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

   es decir, $\exists X : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ que cumple el PVI y esa solución es única.
2. Para la ecuación homogénea asociada $(\mathcal{EDL}_h) \equiv X' = \mathbb{A}(t) \cdot X$:
   - Existen $X_1(t) \dots X_n(t)$ linealmente independientes, que son soluciones de $(\mathcal{EDL}_h)$ en $t \in [\alpha, \beta]$.
   - Si $X_1(t) \dots X_n(t)$ son soluciones linealmente independientes de $(\mathcal{EDL}_h)$, entonces:

$$X(t) \text{ es solución de } (\mathcal{EDL}_h) \text{ en } [\alpha, \beta] \iff \exists c_1, c_2, \dots c_n \in \mathbb{R} : X(t) = c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t)$$

3. Si $X_p(t)$ es una solución de $(\mathcal{EDL})$, entonces $X(t)$ es solución de $(\mathcal{EDL})$ (en $[\alpha, \beta]$) $\iff$

$$\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} : X = X_p + \sum_{j=1}^{n} c_jX_j$$

   donde $\sum_{j=1}^{n} c_jX_j$ es la solución general de la homogénea.

Demostración. Veamos la demostraciones de cada punto:

1. Lo veremos más adelante.
2. Elegimos $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Sea $X_j(t)$ **la** solución del PVI con

$$X_j(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_j \text{ vector j-ésimo de la base canónica.}$$

   Afirmamos que son linealmente independientes pues

$$\sum c_jX_j(t) = 0 \ \forall t \in [\alpha, \beta] \implies \sum c_jX_j(t_0) = 0 \implies c_i = 0 \forall i$$

   Entonces:
   $X_1, \dots, X_n$ son soluciones de $(\mathcal{EDL}_h)$ linealmente independientes. La implicación ($\Longleftarrow$) está demostrada, pues si $X = \sum c_jX_j$ entonces X es solución. Vamos a ver la implicación ($\implies$), que la resolveremos por reducción al absurdo.

   Elegimos $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Entonces $X_1(t_0) + \dots + X_n(t_0)$ son linealmente independientes. Si no lo fueran, existirían $c_1, \dots, c_n : \exists c_i \neq 0$ y que $c_1X_1(t_0) + \dots c_nX_n(t_0) = 0$. Y esto haría que:

$$c_1X_1(t) + \dots c_nX_n(t)$$

resuelve:

$$\begin{cases} X' = \mathbb{A}(t)X \\ X(t_0) = 0 \end{cases} \implies X(t) = 0 \text{ también es solución.}$$

Por unicidad es una contradicción.

Además, si $X(t)$ es solución de $(\mathcal{EDL}_h)$, entonces acabamos de ver que $\exists c_1, \ldots, c_n$ tal que $X(t_0) = \sum c_j X_j(t_0)$ (donde X_j forman una base de $\mathbb{R}^n$). Por unicidad:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j(t) \ \forall t \in [\alpha, \beta]$$

3. Vamos a ver ques si tenemos dos soluciones que resuelven el sistema, entonces la resta es la solución de la homogénea. Es decir, si $X(t)$ resuelve $X' = \mathbb{A}(t) + B(t)$, sea:

$$Y(t) \equiv X(t) - X_p(t)$$

entonces:

$$Y' = X' - X_p' = (\mathbb{A}(t)X + B(t)) - (\mathbb{A}(t)X_p + B(t)) = \mathbb{A}(t)X - \mathbb{A}(t)X_p = \mathbb{A}(t)Y \implies Y = c_1X_1 + \ldots c_nX_n$$

$\diamondsuit$

Observación. El apartado 2 nos dice que el conjunto de soluciones de la $(\mathcal{EDL}_h)$ es un espacio vectorial de dimensión n.

Durante la demostración del apartado 2 vimos aproximadamente el siguiente lema:

Proposición 13. Sean $X_1(t) + X_2(t) + \ldots + X_n(t)$ solucion de la $(\mathcal{EDL}_h)$ son equivalentes:

1. $X_1, \ldots, X_n$ son linealmente independientes como funciones, es decir,

$$\sum c_j X_j(t) = 0 \text{ con } t \in [\alpha, \beta] \implies c_j = 0 \ \forall j$$

2. $$\exists t_0 \in [\alpha, \beta] : X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0) \text{ son vectores linealmente independientes.}$$

3. $$\forall t \in [\alpha, \beta], \text{ entonces } X_1(t), \ldots, X_n(t) \text{ son vectores linealmente independientes.}$$

Demostración. En la demostración del apartado 2 del teorema 12 vimos que 1 $\iff$ 2 y 3 se sigue sin dificultad. $\diamondsuit$

Observación.
- El enunciado del lema sigue siendo cierto si hay $m \leqslant n$ soluciones con n la dimensión del espacio de soluciones.
- $X_1(t_0) \ldots X_n(t_0)$ son linealmente independientes $\iff \det \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \neq 0$

Definición 5 (Wronskiano)**.** El **wronskiano** de $X_1, \ldots, X_n$ es la función:

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

Tras ver esta definición del wronskiano, lo que dice parte del lema 13 es que:

$$W(t) \neq 0 \ \forall t \in [\alpha, \beta] \iff \exists t_0 \in [\alpha, \beta] : W(t_0) \neq 0$$

Más adelante veremos que $W(t)$ satisface la ecuación:

$$W'(t) = a(t)W(t) \ : \ t \in [\alpha, \beta]$$
$$a(t) = Traza(\mathbb{A}(t))$$

De ahí $W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ y se ve que $W(t) = 0$ ó $W(t) \neq 0 \ \forall t \in [\alpha, \beta]$

4.3. Sistema lineal con coeficientes constantes.

Vamos a considerar sistemas lineales de ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes no son una variable del problema.

Ejemplo 29 (*Sistemas lineales con coeficientes constantes - Idea básica*)

Vamos a considerar:

$$X'(t) = \mathbb{A}X(t), \ \text{con } \mathbb{A}_{n\times n} \text{ constante.}$$

Procediendo de forma similar a como lo hacíamos en el caso de ecuaciones lineales de segundo orden, vamos a probar $X(t) = e^{\lambda t}V : V \in \mathbb{R}^n, \ V$ *constante como solución. Vamos a ver como hallamos* λ *y* V*.*

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t}V \equiv \mathbb{A}X(t) = \mathbb{A}e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}\mathbb{A}V$$

por tanto:

$$X' = \mathbb{A}X \iff e^{\lambda t}(\mathbb{A}V - \lambda V) = 0 \iff \mathbb{A}V = \lambda V$$

es decir:

$$V \text{ es autovector de } \mathbb{A} \text{ con autovalor } \lambda$$

Ejemplo 30 (*Sistema lineal con matriz diagonalizable*)

Sea

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

entonces es fácil ver que los autovalores de $\mathbb{A}$ *son* $1, \ 1, \ 2$*. Con sus correspondientes autovectores:*

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con lo que tenemos tres soluciones:

$$X_1(t) = e^t V_1$$
$$X_2(t) = e^t V_2$$
$$X_3(t) = e^{2t} V_3$$

que son base del espacio de soluciones de $X' = \mathbb{A}X$

Hemos podido hacer esto por que la matriz es diagonalizable, es decir

$$\exists \mathbb{B} : \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

donde la diagonal son los autovalores.

Ejemplo 31 (*Sistema lineal con matriz no diagonalizable*)

Sea

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X = \mathbb{A}X$$

De aquí hallamos que los autovalores son $2, 2$. *Entonces:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

donde hallamos:

$$2a + b = 2a \tag{4.1}$$

$$2b = 2b \tag{4.2}$$

$$b = 0 \tag{4.3}$$

Entonces hemos hallado un autovector:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies X_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para buscar otra solución intentamos:

$$X(t) = e^{2t}(C + tD)$$

donde $C,\ D \in \mathbb{R}^2$. *Entonces:*

$$X' = e^{2t}(2C + D + 2tD) \equiv \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X = e^{2t}(\mathbb{A}C + t\mathbb{A}D)$$

es decir, se necesita:

$$\mathbb{A}D = 2D \implies D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ por ejemplo.}$$

$$\mathbb{A}C = 2C + D$$

es decir, $(\mathbb{A} - 2I)C = D$ *con* I *la identidad. Tenemos:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies b = 1, \text{ vale cualquier valor para a.}$$

entonces:

$$\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies a = 0$$

Por tanto podemos hallar $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* D *era* $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Por tanto nuestras dos soluciones son:*

$$X_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_2(t) = e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

4.4. Exponencial de una matriz

Definición 6 (Matriz fundamental)**.** Llamamos **matriz fundamental** a :

$$F(t) = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es el wronskiano, según vimos en la definición 5.

Observación. Sea $(\mathcal{EL}_h) \equiv X' = \mathbb{A}X$ con $\mathbb{A}$ una matriz $d \times d$.

1. La solución general de $(\mathcal{EL}_h)$ es $\mathbb{F}(t) \cdot C$ con:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{d} c_j X_j(t)$$

2. Esto vale para $X' = \mathbb{A}(t)X$. Por tanto, podemos afirmar que:

$$\mathbb{F}'(t) = \mathbb{A}\mathbb{F}(t) \text{ con } \det(\mathbb{F}(t)) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1'(t_0) & \cdots & X_n'(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \mathbb{A} \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{A}X_1(t_0) & \cdots & \mathbb{A}X_n(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

En general, vamos a buscar una $\mathbb{F}$ especial; la que cumple que $\mathbb{F}(0) = I$. Vamos a ver que esta $\mathbb{F}$ es de la forma:

$$\mathbb{F}(t) = e^{t\mathbb{A}}$$

Para esto, vamos a construir la exponencial de una matriz.

Sea $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{d \times d}$. Vamos a intentar construir la exponencial de la misma forma que hace Taylor cuando trabajamos con escalares.

Proposición 14. La serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!}$$

converge (sea cual sea $\mathbb{A}$)

Demostración. Empezamos viendo ciertos aspectos.

1. Definimos:

$$||\mathbb{A}|| = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} = \max_{||y||_2 = 1} ||Ay||_2$$

con $x, y \in \mathbb{C}^d$ y $||z||_2 = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_d|^2}$ la norma euclídea.
Se puede comprobar que lo que acabamos de definir es una norma y tiene una propiedad importante:

$$||\mathbb{A}\mathbb{B}|| \leqslant ||\mathbb{A}||||\mathbb{B}|| \text{ y en particular } ||\mathbb{A}^n|| \leqslant ||\mathbb{A}||^n$$

2. Es fácil ver que:

$$\left|\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!} \right|\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{||\mathbb{A}||^n}{n!} \text{ y esta última converge.}$$

Entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!}$ converge y:

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{||\mathbb{A}||^n}{n!}$$

$\diamondsuit$

Definición 7 (Exponencial de una matriz)**.** Definimos la exponencial de una matriz $\mathbb{A}$ como:

$$e^{\mathbb{A}} = \exp(\mathbb{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!}$$

Vamos a ver ciertas propiedades:

Proposición 15 (Exponencial de una matriz - propiedades)**.**

1. Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan ($\mathbb{AB} = \mathbb{BA}$) entonces:
$$e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}} = e^{\mathbb{A}} e^{\mathbb{B}}$$

2. Si $\mathbb{A}$ es diagonal ($\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$), entonces:
$$e^{\mathbb{A}} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots)$$

3. Si $\mathbb{A} = \mathbb{SBS}^{-1}$, entonces:
$$e^{\mathbb{A}} = \mathbb{S} e^{\mathbb{B}} \mathbb{S}^{-1}$$

4. Si $\mathbb{B}$ es una matriz de bloques diagonales:
$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbb{B}_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbb{B}_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \text{ con } \mathbb{B}_i \in \mathbb{C}^{m \times n}$$
entonces:
$$\mathbb{B}^n = \mathrm{diag}_b(\mathbb{B}_1^n, \mathbb{B}_2^n, \ldots, \mathbb{B}_m^n)$$
y por tanto:
$$e^{\mathbb{B}} = \mathrm{diag}_b(e^{\mathbb{B}_1}, e^{\mathbb{B}_2}, \ldots, e^{\mathbb{B}_n})$$

Demostración. Vamos a demostrar cada propiedad:

1. $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ conmutan entonces:
$$(\mathbb{A} + \mathbb{B})^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \mathbb{A}^k \mathbb{B}^{m-k}$$
Por tanto:
$$e^{\mathbb{A}} e^{\mathbb{B}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = (\cdots) = \sum_{m}^{\infty} \frac{1}{m!} (\mathbb{A} + \mathbb{B})^m = e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}$$

2. $$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d^m \end{bmatrix}$$

3. $$\mathbb{A} = \mathbb{SBS}^{-1}$$
$$\mathbb{A}^2 = \mathbb{SBS}^{-1}\mathbb{SBS}^{-1} = \mathbb{SB}^2\mathbb{S}^{-1}$$
$$\mathbb{A}^m = \mathbb{SB}^m\mathbb{S}^{-1} \implies \sum \frac{\mathbb{A}^m}{m!} = \mathbb{S}\frac{\mathbb{B}^m}{m!}\mathbb{S}^{-1}$$

4.
$$\begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{B}_2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_1^2 & 0 \\ 0 & \mathbb{B}_2^2 \end{bmatrix}$$

$\diamondsuit$

Proposición 16. Sea $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{d\times d}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{t\mathbb{A}} = \mathbb{A} e^{t\mathbb{A}} = e^{t\mathbb{A}} \mathbb{A}$$

Demostración. A completar $\diamondsuit$

Parte III

Tercer parcial

Parte IV

Apéndices

Capítulo 5

Índices

Lista de definiciones

Lista de teoremas

Lista de ejemplos

Lista de ejercicios