

MODELIZACIÓN

APUNTES DEL CURSO

2019-2020 IMPARTIDO

POR RAFAEL ORIVE ILLERA

Rafael Sánchez

Revisión del 3 de febrero de 2020 a las 11:25.

Índice general

I	Primer parcial	5
1.	Análisis dimensional	7
1.1.	Magnitudes. Teorema II.	8
II	Apéndices	17
2.	Índices	19

Parte I

Primer parcial

Capítulo 1

Análisis dimensional

El análisis dimensional es una herramienta que nos permite simplificar el estudio de cualquier fenómeno que involucre varias magnitudes físicas para tratarlas como variables independientes. Esto nos ayudará a simplificar los modelos matemáticos de lo que queramos estudiar.

Vamos a comenzar con un ejemplo introductorio a la asignatura, con el que se busca de alguna forma introducir conceptos que si bien no son del todo matemáticos o formales serán de utilidad en el desarrollo del curso.

Ejemplo 1 (Segunda Ley de Newton - Ley física)

La segunda ley de Newton se puede escribir como la ecuación diferencial:

$$m\ddot{x}(t) = F(x, t), \quad t \in [0, T]$$

donde m representa la masa de un objeto, $x(t)$ la posición del mismo respecto del tiempo, $F(x, t)$ la fuerza que se ejerce sobre él y T es el tiempo final.

Para completar el problema daremos un par de condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0 \text{ la posición inicial}$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \text{ la velocidad inicial}$$

En el análisis dimensional analizaremos que **magnitudes** entran en juego en la **ley**. En este caso tenemos:

- m - masa.
- x - posición.
- F - fuerza.
- T - tiempo final.
- x_0 - posición inicial.
- v_0 - velocidad inicial.

Por tanto nuestra función final será de la forma:

$$f(m, x, F, T, x_0, v_0) = 0$$

que es otra forma de expresar la **ley**. Además, queremos ver de qué **magnitudes** dependen estos 6 parámetros. Esto lo expresaremos con la notación:

$$[p] = M$$

donde p representa un parámetro y M una magnitud (también puede ser un producto de ellas). En nuestro caso tenemos:

- $[m] = M$. Masa, una magnitud elemental.
- $[x] = L$. Longitud, una magnitud elemental.
- $[T] = \tau$. Tiempo, una magnitud elemental.
- $[x_0] = L$. Longitud.
- $[v_0] = L \cdot \tau^{-1}$. Velocidad, longitud \times tiempo $^{-1}$.
- $[F] = [m \cdot \ddot{x}] = M \cdot L \cdot \tau^{-2}$. Fuerza, masa \times longitud \times tiempo $^{-2}$.

1.1. Magnitudes. Teorema II.

Vamos a suponer la existencia de L_1, \dots, L_n magnitudes elementales con $n < \infty \in \mathbb{N}$, es decir, cada L_i es independiente de cada magnitud de $\mathcal{L} \setminus L_i$. Diremos que una colección de magnitudes conforman un sistema.

Definición 1 (Dimensión de una magnitud). Sea $a \in \mathbb{R}$ una medida de una magnitud A en un sistema L_1, \dots, L_n . Si cambiamos a un sistema L'_1, \dots, L'_n con $L'_i = \lambda_i L_i$ y sea a' la medida de A en el nuevo sistema, entonces si se cumple que:

$$a' = a \cdot \lambda_1^{a_1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{a_n}$$

para una serie de escalares a_1, \dots, a_n , entonces diremos que la magnitud A tiene **dimensión** $L_1^{a_1} \cdot \dots \cdot L_n^{a_n}$ y lo expresamos por:

$$[A] = L_1^{a_1} \cdot \dots \cdot L_n^{a_n}$$

Cuando el sistema L_1, \dots, L_n esté fijado podremos identificar la dimensión de la magnitud A con el vector de escalares (a_1, \dots, a_n) .

Recordando el ejemplo de la segunda ley de Newton, donde teníamos tres magnitudes elementales (L, τ, M) , si consideramos que nuestro sistema L_1, \dots, L_n es dicha 3-tupla, entonces podemos expresar las magnitudes no elementales como 3-tuplas (o vectores de \mathbb{R}^3):

- $[v_0] = L \cdot \tau^{-1} = (1, -1, 0)$
- $[F] = [m\ddot{x}] = M \cdot L \cdot \tau^{-2} = (1, -2, 1)$

Ejemplo 2 (*Dimensión de una magnitud*)

Sea $L_1 = \{m\}$ y $L_2 = \{s\}$ un sistema de magnitudes (longitud en metros y tiempo en segundos respectivamente), consideramos la magnitud de la velocidad V que tiene dimensión:

$$[V] = L_1 \cdot L_2^{-1} = (1, -1)$$

entonces, si tenemos una medida $v = 30 \text{ m/s}$ y queremos ver su medida L' en el sistema:

$$L'_1 = 10^{-3} L_1 \text{ con } L'_1 \text{ longitud en km}$$

$$L'_2 = \frac{1}{3600} L_2 \text{ con } L'_2 \text{ tiempo en h}$$

entonces:

$$v' = v \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2^{-1} = \frac{30 \cdot 3,6 \cdot 10^3}{10^3} = 108 \text{ km/h}$$

Proposición 1 (Expresión de una magnitud dependiente). Sean A, B dos magnitudes tales que:

$$[A] = L_1^{a_1} \cdot \dots \cdot L_n^{a_n}$$

$$[B] = L_1^{b_1} \cdot \dots \cdot L_n^{b_n}$$

Sea C otra magnitud dependiente de A y B , tal que si a, b son medidas de A, B y C y $\exists p, q, d$ tales que $c = d \cdot a^p + b^q$ con p, q, d independientes de las unidades L_1, \dots, L_n , entonces:

$$[C] = L_1^{a_1 p + b_1 q} \cdot \dots \cdot L_n^{a_n p + b_n q}$$

Demostración. Sean $L'_i = \lambda_i L_i$ un nuevo sistema, entonces:

$$a' = a \cdot \lambda_1^{a_1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{a_n}, \quad b' = b \cdot \lambda_1^{b_1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{b_n}$$

y por tanto c' es:

$$\begin{aligned} c' &= da'^p + b'^q = d(a\lambda_1^{a_1} \dots \lambda_n^{a_n})^p + (b\lambda_1^{b_1} \dots \lambda_n^{b_n}) \\ &= (da^p + b^q) \cdot (\lambda_1^{a_1 p + b_1 q} \dots \lambda_n^{a_n p + b_n q}) \\ &= c \cdot (\lambda_1^{a_1 p + b_1 q} \dots \lambda_n^{a_n p + b_n q}) \implies \\ [C] &= L_1^{a_1 p + b_1 q} \dots L_n^{a_n p + b_n q} \end{aligned}$$

◇

Definición 2 (Matriz de dimensiones). Dados q_1, \dots, q_m magnitudes, tales que su dimensión es:

$$[q_i] = L_1^{a_{i1}} \dots L_n^{a_{in}}$$

llamamos **matriz de dimensiones** a la matriz $(n \times m)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

que tiene n filas (una por cada *magnitud elemental* L_i) y m columnas (una por cada magnitud del problema q_i)

Observación. Los índices de los elementos de la matriz quedan permutados respecto de la notación habitual.

Retomando el ejemplo de la segunda ley de Newton tendríamos la *matriz de dimensiones*:

$$\begin{matrix} & x_0 & v_0 & T & F & M & x \\ \begin{matrix} L \\ \tau \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Definición 3 (Magnitud adimensional). Una magnitud Π se dice adimensional si $[\Pi] = 1$.

Hallar magnitudes adimensionales en los distintos problemas nos ayuda a simplificar el estudio de los mismos. Retomemos el ejemplo de la segunda ley de Newton, vamos a intentar reducir la dimensión del problema.

Ejemplo 3 (*Reduciendo la dimensión del ejemplo 1*)

Recordemos que teníamos 6 parámetros (x, x_0, v_0, T, F, m) . Una forma de reducir los parámetros es intentar *enmascarar* los valores iniciales en nuevas variables.

Recordemos que tanto x como x_0 tenían la misma dimensión. Gracias a ello podemos definir un nuevo parámetro *y* sin dimensión:

$$y = \frac{x}{x_0}$$

Además, como $x(0) = x_0$ tendremos que $y(0) = 1$ y como $\dot{x}(0) = v_0$ entonces $\dot{y}(0) = \frac{v_0}{x_0}$.

Podemos también hacer lo mismo con el tiempo, recordemos que en la fórmula original la variable t pertenecía a $[0, T]$. Podemos definir entonces:

$$\frac{t}{T} = \tau$$

y por tanto $\tau \in [0, 1]$, con lo que hemos eliminado T . Sin embargo, cambiar t tiene consecuencias debido que es la variable respecto de la que se diferencia x (y por tanto y), tenemos que ver como afectan estos cambios a nuestras variables.

Usaremos la notación \dot{x} para referirnos a $\frac{\partial x}{\partial t}$ y x' para referirnos a $\frac{\partial x}{\partial \tau}$.

Entonces obtenemos:

$$y' = \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{1}{x_0} \frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{T}{x_0} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{T}{x_0} \dot{x} \implies y'(0) = \frac{T}{x_0} \cdot v_0 = \tilde{q}$$

y de nuevo $[\tilde{q}] = 1$.

Recordemos que nuestro problema comenzaba con $m\ddot{x} = F$, vamos a usar esto para encontrar otro parámetro adimensional.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{x_0}{T} \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{x_0}{T} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} \right) = \frac{x_0}{T} \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{x_0}{T} \cdot y'' \\ \frac{mx_0}{T^2} \cdot y'' &= F \implies y'' = \frac{T^2}{mx_0} \cdot F = f \end{aligned}$$

y podemos comprobar que $[f] = 1$. Recapitulado, hemos conseguido encontrar nuevos parámetros adimensionales y , $\tilde{q} = y'$, $f = y''$ haciendo algunos cambios en el problema. Con esto, podemos reescribir el problema de valores iniciales con los nuevos parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} y'' &= f = \frac{T^2}{mx_0} \cdot F \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= \tilde{q} = \frac{Tv_0}{x_0} \end{aligned}$$

Definición 4 (Ley invariante). Sea una ley $f(q_1, \dots, q_m) = 0$, se dice que es **invariante** frente al cambio de unidades $L'_1 = \lambda_1 L_1, \dots, L'_n = \lambda_n L_n$ si verifica que $f(q'_1, \dots, q'_m) = 0$ para q'_1, \dots, q'_m las medidas de q_1, \dots, q_m en las nuevas unidades L'_1, \dots, L'_n . Informalmente:

Una ley es invariante cuando sigue siendo cierta tras el cambio de variables del problema

Teorema 2 (Teorema II). Sea $f(q_1, \dots, q_m) = 0$ una ley invariante con q_1, \dots, q_m magnitudes con matriz de dimensiones:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

tal que $n < m$ y el rango de D es $r \leq n$. Entonces existen $m - r$ cantidades Π_1, \dots, Π_{m-r} que van a ser magnitudes adimensionales tales que la ley invariante es equivalente a una relación $F(\Pi_1, \dots, \Pi_{m-r}) = 0$.

Demostración.

- (1) Vamos a demostrar que existen Π_1, \dots, Π_{m-r} magnitudes adimensionales independientes entre sí. Partimos de la matriz de dimensiones:

$$\begin{matrix} & q_1 & \cdots & q_m \\ L_1 & \left(a_{11} & \cdots & a_{m1} \right) \\ \vdots & \left(\vdots & \ddots & \vdots \right) \\ L_n & \left(a_{1n} & \cdots & a_{mn} \right) \end{matrix}$$

Y entonces tenemos:

$$\begin{aligned} [\Pi] &= 1 \text{ con } \Pi = q_1^{\alpha_1} \cdots q_m^{\alpha_m} \\ [\Pi] &= (L_1^{a_{11}} \cdots L_n^{a_{1n}})^{\alpha_1} \cdot (L_1^{a_{21}} \cdots L_n^{a_{2n}})^{\alpha_2} \cdots (L_1^{a_{m1}} \cdots L_n^{a_{mn}})^{\alpha_m} = L_1^{\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_m a_{m1}} \cdots L_n^{\alpha_1 a_{1n} + \cdots + \alpha_m a_{mn}} \end{aligned}$$

De donde surge el sistema:

$$\begin{aligned}\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots + \alpha_m a_{m1} &= 0 \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_m a_{m2} &= 0 \\ (\cdots) \\ \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \cdots + \alpha_m a_{mn} &= 0\end{aligned}$$

Y la demostración se reduce a resolver un sistema homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas. Como la matriz D es de rango r , entonces existen $m - r$ soluciones linealmente independientes.

- (2) La demostración de que la ley invariante es equivalente a otra que solo comprende a las magnitudes adimensionales para el caso general resulta muy difícil de escribir. Un caso particular para $m = 4, n = 2$ y $r = 2$ se encuentra en el siguiente ejemplo.

◇

Ejemplo 4 (Cálculo de las magnitudes adimensionales y la ley invariante asociada)

Vamos a hacer un caso particular del sistema de la demostración. Sea $m = 4, n = 2$ y $r = 2$, es decir:

$$\begin{aligned}\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \alpha_3 a_{31} + \alpha_4 a_{41} &= 0 \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{32} + \alpha_4 a_{42} &= 0\end{aligned}$$

Como el rango es 2, sin pérdida de generalidad puedo suponer que:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = 0$$

Entonces por Rouché-Frobenius existen $C_{34}, C_{32}, C_{41}, C_{42}$ tales que:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\alpha_3 C_{31} - \alpha_4 C_{41} \text{ con } \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 &= -\alpha_3 C_{32} - \alpha_4 C_{42} \text{ con } \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 1\end{aligned}$$

Y entonces puedo encontrar las magnitudes adimensionales:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= q_1^{-C_{31}} q_2^{-C_{32}} q_3^1 q_4^0 \implies q_3 = \Pi_1 q_1^{C_{31}} q_2^{C_{32}} \\ \Pi_2 &= q_1^{-C_{41}} q_2^{-C_{42}} q_3^0 q_4^1 \implies q_4 = \Pi_2 q_1^{C_{41}} q_2^{C_{42}}\end{aligned}$$

Recordemos que partíamos de una ley:

$$f(q_1, q_2, q_3, q_4) = 0$$

Y además, hemos encontrado que:

$$f(q_1, q_2, q_3, q_4) = f(q_1, q_2, \Pi_1 q_1^{C_{31}} q_2^{C_{32}}, \Pi_2 q_1^{C_{41}} q_2^{C_{42}}) = G(q_1, q_2, \Pi_1, \Pi_2)$$

Además, vamos a hacer un cambio del sistema de magnitudes de la forma:

$$L'_1 = \lambda_1 L_1, \quad L'_2 = \lambda_2 L_2$$

para conseguir:

$$\begin{aligned}q'_1 &= q_1 \lambda_1^{a_1^1} \lambda_2^{a_1^2} \\ q'_2 &= q_2 \lambda_1^{a_2^1} \lambda_2^{a_2^2} \\ \Pi'_1 &= \Pi_1 \\ \Pi'_2 &= \Pi_2\end{aligned}$$

Entonces tenemos una nueva ley invariante al cambio de escala:

$$0 = G(q_1, q_2, \Pi_1, \Pi_2) = G(q'_1, q'_2, \Pi_1, \Pi_2)$$

Finalmente, queremos hacer un cambio de variables tal que $q_1 = q_2 = 1$ en nuestra nueva ley.

$$L_n q_1 + a_{11} L_n \lambda_1 + a_{12} L_n + \lambda_2 = 0$$

$$L_n q_2 + a_{21} L_n \lambda_1 + a_{22} L_n + \lambda_2 = 0$$

En el sistema anterior hacemos el cambio: $y_i = L_n \lambda_i$ y tomando logaritmos obtenemos:

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 = -\log(q_1)$$

$$a_{21} y_1 + a_{22} y_2 = -\log(q_2)$$

Y sabemos que dichos q_1, q_2 existen porque la matriz es invertible, y por tanto:

$$0 = f(q_1, q_2, q_3, q_4) = G(1, 1, \Pi_1, \Pi_2) = F(\Pi_1, \Pi_2)$$

Ejercicio (H1.4).

a) Magnitudes. Magnitudes elementales. Magnitudes adimensionales.

Nuestras magnitudes q_i serán (h, t, g, R, v) . Podemos analizarlas en función de las magnitudes elementales:

- $[h] = L = \{\text{longitud}\}.$
- $[t] = T = \{\text{tiempo}\}.$
- $[g] = LT^{-2}.$
- $[v] = LT^{-1}.$
- $[R] = L.$

Que tiene como matriz de dimensiones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde podemos encontrar las siguientes 3 magnitudes adimensionales (ya que el rango de la matriz es 2):

$$\frac{h}{R}, \frac{tv}{R}, \frac{v}{\sqrt{gR}}$$

b) Relación de la altura máxima a alcanzar el proyectil con respecto a v, g, R .

Partimos de $0 = f(h, t, v, g, R)$ y por el teorema II sabemos que tenemos una ley equivalente:

$$0 = F\left(\frac{h}{R}, \frac{tv}{R}, \frac{v}{\sqrt{gR}}\right)$$

Además, sabemos que la altura máxima h_{max} se va a tomar en un tiempo determinado t_{max} . Por tanto tenemos la relación:

$$0 = F\left(\frac{h_{max}}{R}, \frac{t_{max}v}{R}, \frac{v}{\sqrt{gR}}\right)$$

Por el Teorema de la función implícita (TFI):

$$\frac{h}{R} = G\left(\frac{tV}{R}, \frac{V}{\sqrt{gR}}\right)$$

Como alcanzamos la altura máxima:

$$h'(t_{max}) = 0 \implies \frac{\partial G}{\partial \Pi_2}\left(\frac{t_{max}V}{R}, \frac{V}{\sqrt{gR}}\right) = 0$$

Aplicando de nuevo el TFI:

$$\frac{t_{max}v}{R} = \varphi\left(\frac{V}{\sqrt{gR}}\right)$$

Y llegamos a la relación que nos pedían:

$$\frac{h_{max}}{R} = G\left(\varphi\left(\frac{V}{\sqrt{gR}}\right), \frac{V}{\sqrt{gR}}\right) = \varphi^*\left(\frac{V}{\sqrt{gR}}\right)$$

c) Identificar las escalas privilegiadas del problema y como se simplifica en dichas escalas:

Vamos a hacer los cambios de variables:

$$\bar{t} = \frac{t}{t_C}$$

$$\bar{h}(\bar{t}) = \frac{h(t_C \cdot \bar{t})}{h_C}$$

y entonces:

$$\dot{\bar{h}}(\bar{t}) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}}(\bar{t}) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left(\frac{h(t_C \bar{t})}{h_C}\right) = \frac{t_C}{h_C} h'(t_C \bar{t})$$

$$\ddot{\bar{h}}(\bar{t}) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left(\frac{t_C h'(t_C \bar{t})}{h_C}\right) = \frac{t_C^2}{h_C} h''(t_C \bar{t})$$

$$\bar{h}(0) = 0$$

$$\dot{\bar{h}}(0) = \frac{t_C}{h_C} h'(0) = \frac{t_C}{h_C} v$$

y por último:

$$h''(t) = \frac{h_C}{t_C^2} \ddot{\bar{h}}(\bar{t}) \text{ y } h(t) = h_C \bar{h}(\bar{t}) \implies \frac{h_C}{t_C^2} \ddot{\bar{h}}(\bar{t}) = -\frac{SR^2}{(h_C \bar{h}(\bar{t}) + R)^2}$$

Vamos a tratar de simplificar el problema con estas escalas de tres formas distintas:

(1)

$$\frac{h}{R}; h_C = R$$

$$\frac{t}{R/v}; t_C = \frac{R}{v}$$

De esto, hallamos:

$$\frac{R}{(R/v)^2} \ddot{\bar{h}} = \frac{-SR^2}{(R\bar{h} + R)^2}$$

$$\frac{R^3 \ddot{\bar{h}}}{(R/v)^2 g R^2} = -\frac{1}{(1 + \bar{h})^2}$$

$$\frac{v^2}{Rg} \ddot{\bar{h}} = -\frac{1}{(1 + \bar{h})^2}$$

Y para $R \gg 1$ (el radio terrestre), entonces $\epsilon = \frac{v^2}{Rg} \ll 1$ es casi 0. Donde obtenemos:

$$0 = -\frac{1}{(1 + \bar{h})^2}$$

Que no tiene mucho sentido y entonces lo que hemos hecho no nos ha servido, vamos a probar otro cambio.

(2)

$$\frac{h}{R}; h_C = R$$

$$\frac{t}{\sqrt{R/g}}; t_C = \sqrt{\frac{R}{g}}$$

De esto hallamos:

$$\frac{R}{R/g} \ddot{\bar{h}} = -\frac{gR^2}{(R\bar{h} + R)^2}$$

$$g\ddot{\bar{h}} = -\frac{g}{(\bar{h} + 1)^2}$$

$$\ddot{\bar{h}} = -\frac{1}{(1 + \bar{h})^2}$$

Si ahora simplificamos el problema, vemos que $\dot{\bar{h}}(0) = \frac{t_C}{h_C} v = \frac{v}{\sqrt{gR}} = \epsilon \ll 1$ y obtenemos el sistema:

$$\ddot{\bar{h}} = -\frac{1}{(1 + \bar{h})^2}$$

$$\bar{h}(0) = 0$$

$$\bar{h}'(0) = \epsilon \simeq 0$$

Y este sistema también carece de sentido físico ya que indica que el proyectil se lanzaría en sentido contrario.

(3)

$$\frac{h}{v^2/g}; h_C = \frac{v^2}{g}$$

$$\frac{t}{\sqrt{v/g}}; t_C = \sqrt{\frac{v}{g}}$$

De este obtenemos:

$$\dot{\bar{h}}(0) = \frac{\frac{v}{g}}{\frac{v^2}{g}} = 1$$

$$\frac{\frac{v^2}{g}}{\left(\frac{v}{g}\right)^2} \ddot{\bar{h}}(t) = -\frac{gR^2}{\left(\frac{v^2}{g}\bar{h} + R\right)^2}$$

$$\ddot{\bar{h}}(t) = -\frac{1}{\left(\frac{v^2}{gR}\bar{h} + 1\right)^2}$$

y con este resultado hallamos el sistema:

$$\bar{h}(0) = 0$$

$$\dot{\bar{h}}(0) = 1$$

$$\ddot{\bar{h}} = -\frac{1}{(t^2\bar{h} + 1)^2}$$

Cuando $t \rightarrow 0$ entonces:

$$\ddot{\bar{h}}(\bar{t}) = -1$$

$$\bar{h}(\bar{t}) = \frac{\bar{t}^2}{2} + A\bar{t} + B$$

$$\bar{h}(0) = 0 \implies B = 0 \implies \bar{h}(\bar{t}) = -\bar{t} + A$$

También hallamos:

$$\begin{aligned}
 h(\bar{t}) &= -\frac{\bar{t}^2}{2} + \bar{t} \\
 \frac{h(t_C \bar{t})}{h_C} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_C} \right)^2 + \left(\frac{t}{t_C} \right) \\
 h(t) &= -\frac{h_C}{2t_C^2} t^2 + \frac{h_C t}{t_C} \\
 h(t) &= -\frac{v^2/g}{2(v/g)^2} t^2 + \frac{v^2/g}{v/g} t = -g \frac{t^2}{2} + vt
 \end{aligned}$$

Ejercicio (H1.1). Comenzamos identificando las magnitudes del problema:

$$\begin{aligned}
 [m] &= M \\
 [\rho] &= L \\
 [V] &= L^3 \\
 [S] &= L^2
 \end{aligned}$$

Y las magnitudes elementales son L y M . Escribimos la matriz de dimensiones:

$$\begin{matrix} M \\ L \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A$$

Donde comprobamos que el rango de A es 2 y entonces por el teorema II existen 2 magnitudes adimensionales independientes Π_1, Π_2 .

Parte II

Apéndices

Capítulo 2

Índices

Lista de definiciones

1.	Definición (Dimensión de una magnitud)	8
2.	Definición (Matriz de dimensiones)	9
3.	Definición (Magnitud adimensional)	9
4.	Definición (Ley invariante)	10

Lista de teoremas

1.	Proposición (Expresión de una magnitud dependiente)	8
2.	Teorema (Teorema II)	10

Lista de ejemplos

1.	Ejemplo (Segunda Ley de Newton - Ley física)	7
2.	Ejemplo (Dimensión de una magnitud)	8
3.	Ejemplo (Reduciendo la dimensión del ejemplo 1)	9
4.	Ejemplo (Cálculo de las magnitudes adimensionales y la ley invariante asociada)	11

Lista de ejercicios

. Ejercicio (H1.4)	12
. Ejercicio (H1.1)	15