

# 1. Preliminares

## 1.1. Normas

Sea  $V$  un espacio vectorial,  $x, y, z \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

- Un **producto escalar** es una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple:

$$\begin{aligned}\langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle & \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle & \langle x, x \rangle &\geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}_V\end{aligned}$$

- Una **norma** es una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple:

$$\begin{aligned}\|x\| &\geq 0, \|x\| = 0 \iff x = \vec{0}_V \\ \|\lambda v\| &= |\lambda| \|v\| & \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

- $\|\cdot\|$  cumple la **identidad del paralelogramo**

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$$

si y solo si procede producto escalar dado por la **identidad de polarización**

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

Se dice que esta es una **norma euclídea**.

- Un espacio normado es un par  $(V, \|\cdot\|_V)$
- Una **p-norma** es una norma  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida con

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left[ \sum_{j=1}^n x_j^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

- El **exponente conjugado** de  $p$  es  $p'$  y cumple  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Es único y si  $p = 1$  entonces  $p' = \infty$  y viceversa
- La norma euclídea que procede del producto escalar estándar es la p-norma de orden 2. 2 es el único número que tiene como conjugado a sí mismo
- Las p-normas cumplen las desigualdades de **Young, Hölder y Minkowski**:

$$\begin{aligned}a, b > 0 &\implies \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \\ x, y \in \mathbb{R}^n &\implies \langle x, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_{p'} \\ x, y \in \mathbb{R}^n &\implies \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p\end{aligned}$$

- Dos **normas** son **equivalentes** si definen los mismos abiertos

- en  $V = \mathbb{R}^n$  todas las normas son equivalentes

- Una norma  $\|\cdot\|$  es **submultiplicativa**  $\iff \forall x, y, \|xy\| \leq \|x\| \|y\|$

- $\|\cdot\|$  submultiplicativa  $\implies \|x^n\| \leq \|x\|^n$

- La **norma de Frobenius** para matrices es  $\|\cdot\|_F = \sqrt{\text{traza } A^* A}$  donde  $A^*$  es la traspuesta conjugada de  $A$

- La norma de Frobenius es submultiplicativa

## 1.2. Espacios métricos

Sea  $X \neq \emptyset$  conjunto y sean  $x, y, z \in X$

- Un espacio métrico es un par  $(X, d)$  donde la función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  es una distancia que cumple:

$$\begin{aligned}d(x, y) &\geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y \\ d(x, y) &= d(y, x) & d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z)\end{aligned}$$

- Si  $E \subset X, E \neq \emptyset$  entonces la restricción  $d_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  define una distancia
- Si  $E \subset \mathbb{R}^n = X$  no vacío, no necesariamente subespacio, entonces  $\|x - y\|_E$  define una distancia en  $E$

## 1.3. Sucesiones

- Una **sucesión**  $\{x_n\} \subset X$  es **de Cauchy**  $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$  tal que  $n, m \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$

- $(X, d)$  **completo**  $\iff \{x_n\}$  de Cauchy  $\implies \{x_n\}$  convergente

- Una **sucesión**  $\{x_n\} \subset X$  es **convergente** a  $L \in X$   $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$  tal que  $n \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, L) < \varepsilon$

- $\{x_n\}$  convergente  $\implies \{x_n\}$  de Cauchy
- Si el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$  existe entonces es único

## 1.4. Aplicaciones lineales. Normas equivalentes.

- Una **aplicación lineal** es **acotada**  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  si cumple alguna de

- $L$  es continua en  $\vec{0}_E$
- $L$  es continua  $\forall x \in E$
- $\forall x \in E, \exists M \mid \|x\|_E \leq 1 \implies \|L(x)\|_F \leq M$

- $\|\cdot\|_A$  domina a  $\|\cdot\|_B$   $\iff \exists 0 < c < \infty$  tal que  $\forall x \in E, \|x\|_B \leq c \|x\|_A$

- $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$  son equivalentes  $\iff \exists 0 < c, C < \infty$  tales que  $\forall x \in E, c \|x\|_A \leq \|x\|_B \leq C \|x\|_A$ . Entonces,

- Definen los mismos abiertos y cerrados.
- En  $\mathbb{R}^n$  todas las normas son equivalentes.

## 1.5. Topología

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $E \subset Y \subset X, a, x, y \in X, r \in \mathbb{R}$

- La **bola abierta** de radio  $r$  y centro  $a$  es el conjunto  $B_r(a) = B(a; r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$

- La **bola cerrada** de radio  $r$  y centro  $a$  es el conjunto  $\overline{B}_r(a) = \overline{B}(a; r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$

- $E$  es **abierto**  $\iff \forall e \in E, \exists r > 0 \mid B_r(e) \subset E$

- La unión arbitraria de abiertos es un abierto
- La intersección finita de abiertos es un abierto
- Dado  $x \in X$ , un **entorno abierto** de  $x$  es cualquier abierto  $U \mid x \in U$ .
- $U$  es abierto  $\iff U = \bigcup B_r(x)$

- $E$  es **cerrado** si  $E^c = X \setminus E$  es un abierto

- La intersección arbitraria de cerrados es un cerrado
- La unión finita de cerrados es un cerrado
- **$E$  abierto relativo** de  $Y \iff \exists E' \mid E = Y \cap E'$  y  $E'$  es abierto en  $X$  (análogo para cerrados)
  - $E$  abierto relativo en  $Y \implies E$  abierto en  $(Y, d_Y)$
- El **interior**  $\text{int } E = \{x \in X \mid \exists r > 0, B_r(x) \subset E\}$
- El **exterior**  $\text{ext } E = \{x \in X \mid \exists r > 0, B_r(x) \cap E = \emptyset\}$
- El **cierre, clausura o adherencia**  $\overline{E} = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset\} = \{L \in X \mid \{a_n\} \subset E \text{ converge a } L\}$ 
  - $E$  cerrado  $\iff E = \overline{E}$
  - $E$  **denso**  $\iff \overline{E} = X$ . Tanto  $\mathbb{Q}$  como  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  son densos en  $\mathbb{R}$
- La **frontera**  $\partial E = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap E^c \neq \emptyset\} = \{x \in X \mid x \notin \text{int } E \wedge x \notin \text{ext } E\}$
- Los **puntos de acumulación**  $E' = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset\}$ 
  - $\overline{E} = E \cup E'$
- Un **punto**  $x \in E$  es **aislado**  $\iff \exists r > 0 \mid B_r(x) \cap E = \{x\}$ 
  - si  $\forall x, x \in E \implies x$  aislado entonces  $E$  es **discreto** y  $\{x\}$  abierto relativo de  $E$
- $(X, d)$  de **Banach**  $\iff X$  es e.v.,  $d$  es una norma y  $X$  completo
- $E$  es **compacto** en  $(X, d) \iff$ 
  - $\{x_n\} \subset E \implies \exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$  subsucesión convergente con límite en  $K$
  - Todo recubrimiento  $\{U_i\}$  por abiertos de  $K$  tiene una subfamilia finita que también recubre a  $K$
- Propiedades de compactos
  - $E$  compacto  $\implies K$  es cerrado y acotado
  - en  $(X, d)$ ,  $X$  compacto  $\implies (X, d)$  completo
  - $E \subset X$  compacto,  $f$  continua en  $E \implies f$  alcanza máximo y mínimo en  $E$
- Un **camino** es una aplicación continua  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$  con  $I$  un intervalo
- $E$  es **conexo** (por abiertos)  $\iff \nexists A, B \subset X \mid A \cap B = \emptyset \wedge (E \cap A) \cup (B \cap E) = E$
- $E$  es **conexo** (por abiertos relativos)  $\iff \forall A, B$  abiertos en  $E$  con  $A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = E \implies (A = \emptyset \wedge B = E) \vee (B = \emptyset \wedge A = E)$ 
  - Equivalentemente,  $E$  conexo  $\iff \nexists A, B$  abiertos en  $E$  con  $A \cap B = \emptyset \wedge E = A \cup B$
  - $E$  conexo y  $p \in \overline{E} \implies E \cup p$  conexo
  - $E_1, E_2$  conexos y  $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \implies E_1 \cup E_2$  conexo
- $E$  es **conexo por caminos o arco-conexo**  $\iff \forall p, q \in E, \exists \alpha(t) : [0, 1] \rightarrow E$  un camino tal que  $\alpha(0) = p \wedge \alpha(1) = q$
- Dado  $x \in E$ , la **componente conexa** que contiene a  $e$  es el conjunto  $\{y \in E \mid \exists A \text{ conexo, con } x \in A \wedge y \in A\}$

- La relación de equivalencia  $x \sim y \iff \exists C$  conexo con  $x, y \in C$  define una partición cuyas clases de equivalencia son las componentes conexas de cada punto.
- Si  $A \subset X$  conexo,  $A$  está contenido en una única componente conexa.

- $E$  es **convexo**  $\iff \forall x, y \in E \implies [x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\} \subset E$

## 1.6. Continuidad

Sean  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  espacios métricos,  $f : X \rightarrow Y$  una función

- $f$  es **continua** en  $a \in X \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ . Equivalentemente,  $f$  continua en  $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .
- $f$  **continua** en  $X \iff$ 
  - $f$  continua en  $x, \forall x \in X$
  - $\forall V \subseteq Y, V$  abierto de  $Y \implies f^{-1}(V)$  abierto de  $X$
  - $\forall V \subseteq Y, V$  cerrado de  $Y \implies f^{-1}(V)$  cerrado de  $X$
  - $\forall \{x_n\} \subset X, \{x_n\} \rightarrow x_0 \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x_0)$
- $f$  **uniformemente continua**  $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $d_X(x, x') \leq \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$ 
  - Si  $(X, d)$  es compacto entonces  $f$  continua en  $X \implies f$  uniformemente continua
  - Si  $f$  es uniformemente continua entonces se pueden intercambiar límite y derivada
- Si  $f$  es composición de funciones continuas entonces es continuas. Las fórmulas elementales son continuas.

## 2. Diferenciabilidad

Sean  $E, F$  espacios normados,  $x_0 \in E, U \subset E$  entorno abierto de  $x_0$ .  $f : U \rightarrow F$  es **diferenciable** en  $x_0 \iff \exists T \in \mathcal{L}(E, F)$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Th}{\|h\|} = \vec{0}_F$$

- $T$  existe  $\implies T$  única y la llamamos **diferencial** de  $f$  en  $x_0$  y se denota  $(df)_{x_0}$
- $f$  diferenciable en  $x_0 \implies f$  continua en  $x_0$
- toda  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  es diferenciable en todo punto y coincide con sus diferenciales
- $f$  constante  $\implies f$  es diferenciable en todo punto y su diferencial  $(df)_{x_0}$  es nula
- La **linealidad**:  $(f + g)_{x_0} = (df)_{x_0} + (dg)_{x_0}$
- La **regla del producto**:  $(d(f \cdot g))_{x_0} = (df)_{x_0}g(x_0) + f(x_0)(dg)_{x_0}$
- La **regla de la cadena**:  $(d(g \circ f))_{x_0} = (dg)_{f(x_0)}(df)_{x_0}$
- La **derivada respecto de un vector**  $v \in E$  en el punto  $x_0 \in E$  es  $D_v f(x_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + tv)$ 
  - Si  $\|v\| = 1$  entonces la derivada se llama direccional

- Si  $v = e_j \in \{e_1, \dots, e_n\}$  la base estándar de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $D_{e_j} f(x_0) = \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_{x_0} f = D_j f(x_0)$  es la **j-ésima derivada parcial**

- La composición de funciones diferenciables es diferenciable. Ojo con aplicar las reglas de derivación a cosas que no son números reales (p.e. en matrices no funcionan).

- **Condiciones de diferenciabilidad** de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $x_0$ :

1. Las derivadas parciales  $\partial_{x_j} f(x_0)$  existen
2. El único candidato posible a diferencial  $(df)_{x_0}$  es la aplicación lineal dada por la **matriz jacobiana** de  $m \times n$

$$Df_{x_0} := \left( \partial_{x_1} f(x_0) \mid \dots \mid \partial_{x_n} f(x_0) \right)$$

$$Df_{x_0} := \begin{pmatrix} Df_1(x_0) \\ \vdots \\ Df_m(x_0) \end{pmatrix}$$

$$Df_{x_0} := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

3.  $Df_{x_0}$  cumple la definición de diferenciabilidad

- El **gradiente**  $\nabla f$  es el jacobiano de una función escalar ( $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ). Es un vector fila.
- El **Jacobiano** es  $\det Df$
- Una función vectorial es diferenciable  $\iff$  son diferenciables todas sus funciones componentes

## 2.1. Extremos relativos

En funciones escalares  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

- $f$  tiene un **máximo relativo** en  $x_0 \iff \exists U$  entorno de  $x_0$  tal que  $\forall x \in U \implies f(x) \leq f(x_0)$
- $f$  tiene un **máximo relativo estricto** en  $x_0 \iff \exists U$  entorno de  $x_0$  tal que  $\forall x \in U \implies f(x) < f(x_0)$
- Análogamente se definen los mínimos
- el **Hessiano** es la matriz simétrica de las derivadas segundas

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Si  $Df(x_0) = 0$ ,  $f$  tiene un punto crítico en  $x_0$ . Además,
  - Hess  $f(x_0)$  definida positiva  $\implies f$  tiene un **mínimo relativo estricto** en  $x_0$
  - Hess  $f(x_0)$  definida negativa  $\implies f$  tiene un **máximo relativo estricto** en  $x_0$
  - Hess  $f(x_0)$  semidefinida positiva  $\implies f$  tiene un **mínimo relativo** en  $x_0$
  - Hess  $f(x_0)$  semidefinida negativa  $\implies f$  tiene un **máximo relativo** en  $x_0$
  - Puede haber extremos sin que Hess  $f(x_0)$  sea definida
- El **Laplaciano**  $\Delta f = \text{traza Hess } f$

- $f$  es armónica en  $E \iff \forall x \in E, \Delta f(x) = 0$

- El **criterio de Sylvester** para una matriz cuadrada  $A$  dice

- menores principales  $> 0 \iff A$  es **definida positiva**
- menores principales  $\geq 0 \iff A$  es **semidefinida positiva**
- menores impares  $\leq 0$  y menores pares  $\geq 0 \iff A$  es **semidefinida negativa**
- menores impares  $< 0$  y menores pares  $> 0 \iff A$  es **definida negativa**
- en otro caso  $A$  es indefinida (no implica que no haya extremo relativo)

## 2.2. Tipos de aplicaciones

Sean  $E, F$  e.v., sea  $f : E \rightarrow F$

- $f$  es **convexa**  $\iff \forall x, y \in E, t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ 
  - $\forall x \in A, \text{Hess } f(x)$  es semidefinida positiva  $\iff f$  es convexa en  $A$
- Sean  $x_1, \dots, x_n$ . Un punto  $x$  es **combinación convexa** de  $x_1, \dots, x_n \iff x = t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$  con  $\sum t_i = 1 \wedge t_i \geq 0$
- $f$  es  **$\alpha$ -Hölder continua**  $\iff \exists c > 0 \mid \|f(x) - f(x')\| \leq c \|x - x'\|^\alpha$ 
  - Si  $\alpha > 1$  entonces  $f$  es constante
  - Si  $\alpha = 1$  entonces  $f$  es de Lipschitz

Sean  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  espacios métricos, sea  $f : X \rightarrow Y$

- $f$  es **de Lipschitz**  $\iff \exists K > 0$  tal que
 
$$d_Y(f(x), f(x')) \leq K d_X(x, x'), \quad \forall x, x' \in X$$
  - Toda aplicación de Lipschitz es uniformemente continua
  - Si  $f$  es de Lipschitz entonces  $f$  es  $\alpha$ -Hölder continua.
- $f$  es **contractiva**  $\iff f$  es de Lipschitz con  $K < 1 \wedge$  dominio y codominio coinciden, distancias incluidas ( $f : (X, d_X) \rightarrow (X, d_X)$ )
  - Si  $f$  es contractiva y  $X$  es completo entonces  $f$  tiene un único punto fijo para el que  $f(x) = x$
- $f$  es **inyectiva**  $\iff \forall x, x' \in X, f(x) \neq f(x') \implies x \neq x'$
- $f$  es **coerciva**  $\iff \exists \lambda > 0$  tal que
 
$$d_Y(f(x), f(x')) \geq \lambda d_X(x, x'), \quad \forall x, x' \in X$$
  - $f$  coerciva  $\implies f$  inyectiva

$f \in C^1 \implies f \text{ de Lipschitz} \implies f \text{ uniformemente continua} \implies f \text{ continua}$	(1)
---	-----

### 3. Teoremas gordos

**Teorema** (de la función inversa). Sea  $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach. Sean  $U_0 \in \mathbb{V}$  un abierto y  $f : U_0 \rightarrow V$  una función de clase  $C^1$ . Si en  $x_0 \in U_0$  la diferencial  $L = (df)_{x_0}$  es invertible (e.d.  $L$  es lineal acotada, biyectiva y con inversa  $L^{-1}$  también acotada) entonces existen abiertos  $U, V$  con  $x_0 \in U, y_0 \in V, f(x_0) = y_0$  tales que  $f$  es biyectiva de  $U$  a  $V$ . Además, en ese caso la inversa  $f^{-1} : V \rightarrow U$  es diferenciable en  $y_0$  y  $(df^{-1})_{y_0} = [(df)_{x_0}]^{-1}$ .

E. Hernandis, 29 de noviembre de 2018 a las 18:34