

1. Estadística descriptiva

X, Y variables con muestras x_1, \dots, x_n , e y_1, \dots, y_n , respectivamente.

- La **media** $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
- La **varianza** $V_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ y la desviación típica $\sqrt{V_x}$
- La **asimetría** $\text{asim}_x = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{V_x^{3/2}}$
- La **covarianza**, cumple $|\text{cov}_{x,y}| < \sqrt{V_x} \sqrt{V_y}$

$$\text{cov}_{x,y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

- El **coeficiente de correlación** (adimensional, tipificado)

$$\rho_{x,y} = \frac{\text{cov}_{x,y}}{\sqrt{V_x} \sqrt{V_y}}$$

- La **recta de regresión** de Y sobre X , $y = \hat{b}x + \hat{a}$, es

$$\hat{b} = \frac{\text{cov}_{x,y}}{V_x}, \quad \hat{a} = -\hat{b}\bar{x} + \bar{y}$$

$$\frac{y - \bar{y}}{\sqrt{V_y}} = \rho_{x,y} \frac{x - \bar{x}}{\sqrt{V_x}}$$

- La **bondad del ajuste** $\sqrt{E(a,b)} = \sqrt{V_y} \sqrt{1 - \rho_{x,y}^2}$ donde $\rho_{x,y}^2 = R^2$, $E(a,b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i))^2$
- El ajuste logarítmico $y = B \ln(x) + A$: cambio de variable $Z = \ln(X)$.
- El ajuste exponencial $y = Ce^{Dx}$: cambio de variable $W = \ln(Y)$ y tomar $C = e^{\hat{a}}$, $D = \hat{b}$.
- El ajuste potencial $y = CX^H$: cambios de variable $W = \ln(Y)$ y $Z = \ln(X)$.
- Ajuste por norma euclídea (sin asumir $Y = f(X)$): tomar $E(a,b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|y_i, (\hat{a} + \hat{b}x_i)\|^2$

2. Variables aleatorias

- X **variable aleatoria** es una lista de valores x_1, \dots, x_n con sus probabilidades p_1, \dots, p_n con $p_i = P(X = x_i)$.
- Función de masa o de densidad** $f_X(x)$ da las probabilidades de cada dato. Cumple $f_X \geq 0$, $\sum_{i=1}^n f_X(x_i) = \int_{\mathbb{R}} f_X = 1$ en el caso discreto y continuo, resp.
- Función de distribución** $F_X(x)$ cumple $0 \leq F_X \leq 1$, F_X creciente, $F'_X = f_X$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{j|x_j \leq x} p_j = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

- La **esperanza** $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$
 - es lineal: $E(aX + b) = aE(X) + b$, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
 - Cauchy-Schwarz: $|E(XY)|^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$
- La **covarianza** $\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$ es un producto escalar (**bilineal!**):

- $\text{cov}(X_1 + X_2, X_3) = \text{cov}(X_1, X_3) + \text{cov}(X_2, X_3)$
- $\text{cov}(\lambda X_1, X_2) = \lambda \text{cov}(X_1, X_2)$

- el **coeficiente de correlación** $\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}_{X,Y}}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}}$

$$X \perp Y \implies \rho_{X,Y} = 0 \iff \text{cov}_{X,Y} = 0$$

$$\iff E(XY) = E(X)E(Y)$$

- La **varianza** $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$
 - $V(\lambda X) = \text{cov}(\lambda X, \lambda X) = \lambda^2 V(X)$
 - $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}_{X,Y}$

2.1. Modelos de distribución

- Bernoulli:** $X \sim \text{Ber}(p)$: $x_k \in \{0, 1\}$, $p = P(X = 1)$

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1 - p) \quad P(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k}$$

- Binomial:** $X \sim \text{Binom}(n, p)$. Repetir una Bernoulli n veces y contar los aciertos. $x_i = k = 0, \dots, n$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p)$$

- Poisson:** $X \sim \text{Poisson}(\lambda = np)$. Binomial con $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$.

$$E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda \quad P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

- Exponencial:** $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0, \infty)} \quad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \in [0, \infty]$$

- Gamma:** $X \sim \text{Gamma}(\lambda, t)$

$$\text{función gamma } \Gamma(s) = (s - 1)\Gamma(s - 1) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(t)} \lambda^t x^{t-1} e^{-\lambda x}, \quad E(X^k) = \frac{(t + k - 1)!}{\lambda^k (t - 1)!}$$

$$\text{y es de utilidad } \int_0^\infty x^t e^{-bx} dx = \frac{\Gamma(t + 1)}{b^{t+1}} = \frac{t!}{b^{t+1}}$$

$$\text{Propiedad: } U \sim \text{Gamma}(a, b) \perp V \sim \text{Gamma}(a, c) \implies U + V \sim \text{Gamma}(a, b + c)$$

- Normal:** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2$$

2.2. Cambio de variable

Si $Y = H(X)$ entonces

$$f_Y(H(x)) |H'(x)| = f_X(x)$$

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) |(H^{-1})'(y)|$$

Si $Z = X + Y$ entonces $f_Z(z) = \int_{-\infty}^\infty f_{(X,Y)}(x, z - x) dx$

3. Vectores aleatorios

X_1, \dots, X_n v.v. aa., $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^t$ vector aleatorio.

- La **función de densidad conjunta** $f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n)$
- X_1, \dots, X_n **indep.** $\iff P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n)$
- El **vector de medias** $E(\mathbb{X}) = (E(X_1), \dots, E(X_n))$
- La **matriz de covarianzas**

$$V(\mathbb{X}) = \text{cov}(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} V(X_1) & \cdots & \text{cov}_{X_1, X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}_{X_n, X_1} & \cdots & V(X_n) \end{pmatrix}$$

es simétrica y semidefinida positiva.

3.1. Vectores normales

Sea $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$, V matriz simétrica def. positiva de $n \times n$. Entonces $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\vec{m}, V) \iff$

$$f_{\mathbb{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{\det V}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{m})^t V^{-1} (\vec{x} - \vec{m}) \right\}$$

V es def. pos $\implies V = UU^t$, $\det U \neq 0$ escribimos

$$\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\vec{m}, V) \iff \mathbb{X} = \vec{m} + U\mathbb{Y} \iff f_{\mathbb{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{|\det U|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|U^{-1}(\vec{x} - \vec{m})\|^2 \right\}$$

Además se tiene

$$E(\mathbb{X}) = \vec{m} \quad \text{cov}(\mathbb{X}) = V \quad X_j \sim \mathcal{N}(m_j, V_{jj})$$

- Si $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det B \neq 0$, $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\vec{m}, V)$ vector normal, entonces $\mathbb{Z} = h + B\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\vec{h} + B\vec{m}, BV B^t)$.
- Si $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ entonces la combinación lineal $\sum_{i=1}^n a_i X_i = \vec{a}^t \mathbb{X}$ es v.a. y $\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim \mathcal{N}(\vec{a}^t \vec{m}, \vec{a}^t V \vec{a})$.

3.2. Distr. asociadas a vectores normales

- Chi-cuadrado** $Z \sim \chi_n^2$ con n grados de libertad. $Z = \|\mathbb{X}\|^2 = \sum X_i^2$, $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, X_1, \dots, X_n indep.

$$E(Z) = n, \quad E(Z^\alpha) = 2^\alpha \frac{\Gamma(n/2 + \alpha)}{\Gamma(n/2)}, \quad V(Z) = 2n$$

$$X_i^2 \sim \text{Gamma}(1/2, 1/2), \quad Z \sim \text{Gamma}(n/2, 1/2)$$

- F de Fischer** $Z \sim F_{n,m}$. Si $U \sim \chi_n^2$, $V \sim \chi_m^2$, $U \perp V$ entonces

$$Z = \frac{U/n}{V/m} \sim F_{n,m}$$

$$E(Z) = \frac{m}{m-2}, \quad V(Z) = \frac{2m^2(m+n-2)}{n(m-4)(m-2)^2}$$

- t de Student** $Z \sim t_n$. Si $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $U_n \sim \chi_n^2$, $Y \perp U_n$ entonces

$$Z = \frac{Y}{\sqrt{\frac{U_n}{n}}} \sim t_n, \quad E(Z) = 0, \quad V(Z) = \frac{n}{n-2}$$

4. Modelo de muestreo aleatorio

Sea X una v.a. Sean X_1, \dots, X_n clones independientes de X que cumplen

- X_i, X_j independientes si $i \neq j$
- $X_i \stackrel{d}{=} X$, $i = 1, \dots, n$ (X_i es igual a X en distribución)

Un **estadístico** T es una función $T = H(X_1, \dots, X_n)$ donde $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

4.1. Estadístico media muestral

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad E(\bar{X}) = E(X) \quad V(\bar{X}) = \frac{1}{n} V(X)$$

- Si $X \sim \text{Ber}(p)$ entonces $n\bar{X} \sim \text{Binom}(n, p)$:

$$P(\bar{X} = \frac{k}{n}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$P(\bar{X} = \frac{k}{n}) = P(n\bar{X} = k) = e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$$

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$P(|\bar{X} - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{n\lambda^2}$$

$$\sqrt{n}(\bar{X} - E(X)) \stackrel{d}{\rightarrow}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, V(X))$$

4.2. Estadístico cuasivarianza muestral

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$n(n-1)S^2 = (n-1) \sum_{i=1}^n X_i^2 - \sum_{i \neq j} x_i x_j$$

$$E(S^2) = V(X)$$

$$V(S^2) = \frac{1}{n} E((X - E(X))^4) - \frac{n-3}{n(n-1)} V(X)^2$$

Estimación de la dispersión de S^2 con Chebyshev:

$$P(|S^2 - V(X)| > \lambda) \leq \frac{V(S^2)}{\lambda^2} \leq \frac{1}{\lambda n^2} E((X - E(X))^4)$$

Teorema (de Fischer-Cochran). Si $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, X_1, \dots, X_n clones independientes de X y \bar{X} , S^2 son los estadísticos habituales entonces \bar{X} y S^2 son independientes. Además

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}), \quad \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2, \quad \frac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

4.3. Estadísticos máximo y mínimo

$$Mn = \max\{X_1, \dots, X_n\} \quad m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

$$F_{Mn}(t) = F_X(t)^n \quad F_{m_n}(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n$$

Para α **mínimo esencial** ($F_X(x < \alpha) = 0 \wedge F_X(x > \alpha) > 0$) y β **máximo esencial** ($F_X(x < \beta) < 1 \wedge F_X(x > \beta) = 1$) de X

$$P(\alpha \leq x \leq r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \quad r > \alpha$$

$$P(r \leq x \leq \beta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \quad r < \beta$$

5. Estimación de parámetros

Sea X v.a. con modelo descrito por $f(x; \theta)$, $\theta \in \Theta$. Sea x_1, \dots, x_n una muestra de X .

- El **soporte** $\text{sop}_\theta = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x; \theta) > 0\}$
- Un **estimador** es un estadístico $T = h(x_1, \dots, x_n) = \hat{\theta}$ que dados unos datos da una estimación de θ llamada $\hat{\theta}$
Sean T, T' estimadores
 - El **sesgo** de T es $\text{sesgo}_\theta(T) = E_\theta(T) - \theta$
 - T es **insesgado** $\iff E_\theta(T) = \theta, \forall \theta \in \Theta$
 - El **error cuadrático medio** de T es $\text{ECM}_\theta(T) = E_\theta((T - \theta)^2)$
 - T insesgado $\implies \text{ECM}_\theta(T) = V_\theta(T)$
- T es más **eficiente** que T' $\iff \text{ECM}_\theta(T) < \text{ECM}_\theta(T')$ para todo $\theta \in \Theta$
- T es eficiente $\iff V_\theta(T) = \frac{1}{nI_X(\theta)}$

5.1. Método de momentos

El **estimador por momentos de orden** $n \in \mathbb{R}$ se obtiene de

$$\bar{x}^n = E_\theta(X^n)$$

- En las distribuciones simétricas, se utilizan momentos de orden par
- Si el momento no depende de θ entonces no hay estimador

5.2. Método de máxima verosimilitud

Sea X una v.a. con distribución $f(x; \theta)$ discreta y finita, x_1, \dots, x_n muestra de X

- La **función de verosimilitud** $\text{VERO} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{VERO}(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n f(x_j; \theta)$$

- La **estimación de máxima verosimilitud**, si existe, es $\hat{\theta}$, el **máximo global (único)** de VERO en Θ
 - Para maximizar, es útil tomar $\log \text{VERO}$

5.3. Límites de calidad de estimadores

Lema (de Diotivede). Sea X una v.a. con soporte que no depende de θ y algunas hipótesis técnicas más. Entonces $E_\theta(Y) = 0, \forall \theta \in \Theta$.

- La **variable de información**

$$Y = \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x; \theta) = \frac{\partial_\theta f(x; \theta)}{f(x; \theta)}$$

- La **cantidad de información** $I_X(\theta) = V_\theta(Y)$

Lema (Cramér-Rao). Para todo estadístico insesgado T de una v.a. X se tiene

$$V_\theta(T) \geq \frac{1}{nI_X(\theta)}$$

5.4. Comportamiento asintótico

Teorema (Método delta). Sea Z_n una sucesión de v.a. tales que para ciertos $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$ se cumple

$$\sqrt{n}(Z_n - \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \beta)$$

y sea $g \in C^2(a, b)$ con $\alpha \in (a, b)$ y $g'(\alpha) \neq 0$. Entonces

$$\sqrt{n}(g(Z_n) - g(\alpha)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, |g'(\alpha)|^2 \beta)$$

6. Caramelos

$$\text{Chebyshev } P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\text{TCL } \sqrt{n}(\bar{X}_n - E(X)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, V(X))$$

6.1. Más distribuciones

- **Uniforme:** $X \sim \text{Unif}([0, a])$

$$f_X(x) = \frac{x}{a} \mathbf{1}_{[0, a]}, \quad E(X) = \frac{a}{2}, \quad V(X) = \frac{a^2}{12}$$

- **Geométrica:** $X \sim \text{Geo}(p)$

$$f_X(k) = p(1-p)^{k-1}, \quad E(X) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$