1. Preliminares

1.1. Normas

Sea V un espacio vectorial, $x, y, z \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

- Un **producto escalar** es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que cumple:

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \qquad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$
$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \qquad \langle x, x \rangle \geq 0, \ \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}_V$$

- Una **norma** es una función $\|\cdot\| : V \to R$ que cumple:

$$\|x\| \geq 0, \ \|x\| = 0 \iff x = \vec{0}_V$$
$$\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\| \qquad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

  - $\|\cdot\|$ cumple la **identidad del paralelogramo**

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|}{2}$$

    si y solo si procede producto escalar dado por la **identidad de polarización**

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

    Se dice que esta es una **norma euclídea**.

- Un espacio normado es un par $(V, \|\cdot\|_V)$

- Una **p-norma** es una norma $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to R$ definida con

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left[\sum_{j=1}^{n} x_j^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

  - El **exponente conjugado** de p es p' y cumple $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Es único y si $p = 1$ entonces $p' = \infty$ y viceversa
  - La norma euclidea que procede del producto escalar estándar es la p-norma de orden 2. 2 es el único número que tiene como conjudago a sí mismo
  - Las p-normas cumplen las desigualdades de **Young, Hölder y Minkowski**:

$$a, b > 0 \implies \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$
$$x, y \in \mathbb{R}^n \implies \langle x, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$$
$$x, y \in \mathbb{R}^n \implies \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

- Dos **normas** son **equivalentes** si definen los mismos abiertos

  - en $V = \mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes

- Una norma $\|\cdot\|$ es **submultiplicativa** $\iff \forall x, y, \ \|xy\| \leq \|x\| \|y\|$

  - $\|\cdot\|$ submultiplicativa $\implies \|x^n\| \leq \|x\|^n$

- La **norma de Frobenius** para matrices es $\|\cdot\|_F = \sqrt{\text{traza } A^* A}$ donde A^* es la traspuesta conjugada de A

  - La norma de Frobenius es submultiplicativa

1.2. Espacios métricos

Sea $X \neq \emptyset$ conjunto y sean $x, y, z \in X$

- Un espacio métrico es un par (X, d) donde la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una distancia que cumple:

$$d(x, y) \geq 0, \ d(x, y) = 0 \iff x = y$$
$$d(x, y) = d(y, x) \qquad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

- Si $E \subset X, \ E \neq \emptyset$ entonces la restricción $d_E : E \times E \to \mathbb{R}$ define una distancia

- Si $E \subset \mathbb{R}^n = X$ no vacío, no necesariamente subespacio, entonces $\|x - y\|_E$ define una distancia en E

1.3. Sucesiones

- Una **sucesión** $\{x_n\} \subset X$ es **de Cauchy** $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ tal que $n, m \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$

  - (X, d) **completo** $\iff \{x_n\}$ de Cauchy $\implies \{x_n\}$ convergente

- Una **sucessión** $\{x_n\} \subset X$ es **convergente** a $L \in X \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ tal que $n \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, L) < \varepsilon$

  - $\{x_n\}$ convergente $\implies \{x_n\}$ de Cauchy
  - Si el límite $\lim_{n \to \infty} x_n = L$ existe entonces es único

1.4. Aplicaciones lineales. Normas equivalentes.

- Una **aplicación lineal** es **acotada** $L \in \mathcal{L}(E, F)$ si cumple alguna de

  - L es continua en $\vec{0}_E$
  - L es continua $\forall x \in E$
  - $\forall x \in E, \ \exists M \mid \|x\|_E \leq 1 \implies \|L(v)\|_F \leq M$

- $\|\cdot\|_A$ domina a $\|\cdot\|_B \iff \exists 0 < c < \infty$ tal que $\forall x \in E, \ \|x\|_B \leq c \|x\|_A$

- $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$ son equivalentes $\iff \exists 0 < c, C < \infty$ tales que $\forall x \in E, \ c \|x\|_A \leq \|x\|_B \leq C \|x\|_A$. Entonces,

  - Definen los mismos abiertos y cerrados.
  - En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

1.5. Topología

Sea (X, d) un espacio métrico, $E \subset Y \subset X, \ a, x, y \in X, \ r \in \mathbb{R}$

- La **bola abierta** de radio r y centro a es el conjunto $B_r(a) = B(a; r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$

- La **bola cerrada** de radio r y centro a es el conjunto $\overline{B}_r(a) = \overline{B}(a; r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$

- E es **abierto** $\iff \forall e \in E, \exists r > 0 \mid B_r(e) \subset E$

  - La unión arbitrara de abiertos es un abierto
  - La intersección finita de abiertos es un abierto
  - Dado $x \in X$, un **entorno abierto** de x es cualquier abierto $U \mid x \in U$.
  - U es abierto $\iff U = \bigcup B_r(x)$

- E es **cerrado** si $E^{\complement} = X \setminus E$ es un abierto

- La intersección arbitraria de cerrados es un cerrado
- La unión finita de cerrados es un cerrado

- E **abierto relativo** de $Y \iff \exists E' \mid E = Y \cap E'$ y E' es abierto en X (análogo para cerrados)
  - E abierto relativo en $Y \implies E$ abierto en (Y, d_Y)
- El **interior** $\text{int } E = \{x \in X \mid \exists r > 0, B_r(x) \subset E\}$
- El **exterior** $\text{ext } E = \{x \in X \mid \exists r > 0, B_r(x) \cap E = \emptyset\}$
- El **cierre, clausura o adherencia** $\overline{E} = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset\} = \{L \in X \mid \{a_n\} \subset E \text{ converge a } L\}$
  - E cerrado $\iff E = \overline{E}$
  - E **denso** $\iff \overline{E} = X$. Tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$
- La **frontera** $\partial E = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap E^{\complement} \neq \emptyset\} = \{x \in X \mid x \notin \text{ int } E \wedge x \notin \text{ ext } E\}$
- Los **puntos de acumulación** $E' = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset\}$
  - $\overline{E} = E \cup E'$
- Un **punto** $x \in E$ es **aislado** $\iff \exists r > 0 \mid B_r(x) \cap E = \{x\}$
  - si $\forall x,\ x \in E \implies x$ aislado entonces E es **discreto** y $\{x\}$ abierto relativo de E
- (X, d) de **Banach** $\iff$ X es e.v., d es una norma y X completo
- E es **compacto** en $(X, d) \iff$
  - $\{x_n\} \subset E \implies \exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ subsucesión convergente con límite en K
  - Todo recubrimiento $\{U_i\}$ por abiertos de K tiene una subfamilia finita que también recubre a K
- Propiedades de compactos
  - E compacto $\implies K$ es cerrado y acotado
  - en (X, d), X compacto $\implies (X, d)$ completo
  - $E \subset X$ compacto, f continua en $E \implies f$ alcanza máximo y mínimo en E
- Un **camino** es una aplicación continua $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to X$ con I un intervalo
- E es **conexo** (por abiertos) $\iff \nexists A, B \subset X \mid A \cap B = \emptyset \wedge (E \cap A) \cup (B \cap E) = E$
- E es **conexo** (por abiertos relativos) $\iff \forall A, B$ abiertos en E con $A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = E \implies (A = \emptyset \wedge B = E) \vee B = \emptyset \wedge A = E)$
  - Equivalentemente, E conexo $\iff \nexists A, B$ abiertos en E con $A \cap B = \emptyset \wedge E = A \cup B$
  - E conexo y $p \in \overline{E} \implies E \cup p$ conexo
  - E_1, E_2 conexos y $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \implies E_1 \cap E_2$ conexo
- E es **conexo por caminos** o **arco-conexo** $\iff \forall p, q \in E, \exists \alpha(t) : [0, 1] \to E$ un camino tal que $\alpha(0) = p \wedge \alpha(1) = q$
  - E conexo $\implies E$ arco-conexo
- Dado $x \in E$, la **componente conexa** que contiene a e es el conjunto $\{y \in E \mid \exists A \text{ conexo, con } x \in A \wedge y \in A\}$
  - La relación de equivalencia $x \sim y \iff \exists C$ conexo con $x, y \in C$ define una partición cuyas clases de equivalencia son las componentes conexas de cada punto.
  - Si $A \subset X$ conexo, A está contenido en una única componente conexa.
- E es **convexo** $\iff \forall x, y \in E \implies [x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\} \subset E$

1.6. Continuidad

Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos, $f : X \to Y$ una función

- f es **continua** en $a \in X \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$. Equivalentemente, f continua en $a \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que $d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
- f **continua** en $X \iff$
  - f continua en $x,\ \forall x \in X$
  - $\forall V \subseteq Y,\ V$ abierto de $Y \implies f^{-1}(V)$ abierto de X
  - $\forall V \subseteq Y,\ V$ cerrado de $Y \implies f^{-1}(V)$ cerrado de X
  - $\forall \{x_n\} \subset X, \{x_n\} \to x_0 \implies \{f(x_n)\} \to f(x_0)$
- f **uniformemente continua** $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $d_X(x, x') \leq \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$
  - Si (X, d) es compacto entonces f continua en $X \implies f$ uniformemente continua
  - Si f es uniformemente continua entonces se pueden intercambiar límite y derivada
- Si f es composición de funciones continuas entonces es continuas. Las fórmulas elementales son continuas.

2. Diferenciabilidad

Sean E, F espacios normados, $x_0 \in E, U \subset E$ entorno abierto de x_0. $f : U \to F$ es **diferenciable** en $x_0 \iff \exists T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$\lim_{h \to \vec{0}_E} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Th}{\|h\|} = \vec{0}_F$$

- T existe $\implies T$ única y la llamamos **diferencial** de f en x_0 y se denota $(df)_{x_0}$
- f diferenciable en $x_0 \implies f$ continua en x_0
- toda $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es diferenciable en todo punto y coincide con sus diferenciales
- f constante $\implies f$ es diferenciable en todo punto y su diferencial $(df)_{x_0}$ es nula
- La **linealidad:** $(f + g)_{x_0} = (df)_{x_0} + (dg)_{x_0}$
- La **regla del producto:** $(d(f \cdot g))_{x_0} = (df)_{x_0} g(x_0) + f(x_0)(dg)_{x_0}$
- La **regla de la cadena:** $(d(g \circ f))_{x_0} = (dg)_{f(x_0)}(df)_{x_0}$
- La **derivada respecto de un vector** $v \in E$ en el punto $x_0 \in E$ es $D_v f(x_0) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(x_0 + tv) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}$
  - Si $\|v\| = 1$ entonces la derivada se llama direccional

- Si $v = e_j \in \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^n$, entonces $D_{e_j} f(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x_0} f = D_j f(x_0)$ es la j-ésima **derivada parcial**

- La composición de funciones diferenciables es diferenciable. Ojo con aplicar las reglas de derivación a cosas que no son números reales (p.e. en matrices no funcionan).

- **Condiciones de diferenciabilidad** de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en x_0:

  1. Las derivadas parciales $\partial_{x_j} f(x_0)$ existen
  2. El único candidato posible a diferencial $(df)_{x_0}$ es la aplicación lineal dada por la **matriz jacobiana** de $m \times n$

  $$Df_{x_0} := \left(\begin{array}{c|c|c} \partial_{x_1} f(x_0) & \ldots & \partial_{x_n} f(x_0) \end{array} \right)$$

  $$Df_{x_0} := \left(\begin{array}{c} Df_1(x_0) \\ \hline \vdots \\ \hline Df_m(x_0) \end{array} \right)$$

  $$Df_{x_0} := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x_0) & \ldots & \partial_{x_n} f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(x_0) & \ldots & \partial_{x_n} f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

  3. Df_{x_0} cumple la definición de diferenciabilidad

- El **gradiente** ∇f es el jacobiano de una función escalar $(f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$. Es un vector fila.

- El **Jacobiano** es $\det(Df)$

- Una función vectorial es diferenciable $\iff$ son diferenciables todas sus funciones componentes

2.1. Extremos relativos

En funciones escalares $f : E \to \mathbb{R}$

- f tiene un **máximo relativo** en $x_0 \iff \exists U$ entorno de x_0 tal que $\forall x \in U \implies f(x) \leq f(x_0)$

- f tiene un **máximo relativo estricto** en $x_0 \iff \exists U$ entorno de x_0 tal que $\forall x \in U \implies f(x) < f(x_0)$

- Análogamente se definen los mínimos

- el **Hessiano** es la matriz simétrica de las derivadas segundas

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- $f \in C^2 \implies \frac{\partial f^2}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}$

- Si $Df(x_0) = 0$, f tiene un punto crítico en x_0. Además,
  - Hess $f(x_0)$ definida positiva $\implies f$ tiene un **mínimo relativo estricto** en x_0
  - Hess $f(x_0)$ definida negativa $\implies f$ tiene un **máximo relativo estricto** en x_0
  - f tiene un **mínimo relativo** en $x_0 \implies$ Hess $f(x_0)$ es semidefinida positiva
  - f tiene un **máximo relativo** en $x_0 \implies$ Hess $f(x_0)$ es semidefinida negativa

- El **Laplaciano** $\Delta f =$ traza (Hess f)
  - f es armónica en $E \iff \forall x \in E,\ \Delta f(x) = 0$

- El **criterio de Sylvester** para una matriz cuadrada A dice
  - menores principales $> 0 \iff A$ es **definida positiva**
  - menores principales $\geq 0 \iff A$ es **semidefinida positiva**
  - menores impares ≤ 0 y menores pares $\geq 0 \iff A$ es **semidefinida negativa**
  - menores impares < 0 y menores pares $> 0 \iff A$ **definida negativa**
  - en otro caso A es indefinida (no implica que no haya extremo relativo)

2.2. Polinomio de Taylor

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funnción de clase C^2. El polinomio de Taylor de grado 2 en x_0 es

$$p_{x_0}(x) = f(x_0) + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - x_0) + \frac{1}{2!} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_{0_i})(x_j - x_{0_j}) + o(\|x\|^2)$$

2.3. Tipos de aplicaciones

Sean E, F e.v, sea $f : E \to F$

- f es **convexa** $\iff \forall x, y \in E, t \in [0,1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$
  - $\forall x \in A$, Hess $f(x)$ es semidefinida positiva $\iff f$ es convexa en A

- Sean $x_1, \ldots, x_n$. Un punto x es **combinación convexa** de $x_1, \ldots, x_n \iff x = t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n$ con $\sum t_i = 1 \wedge t_i \geq 0$

- f es **α-Hölder continua** $\iff \exists c > 0 \mid \|f(x) - f(x')\| \leq c\,\|x - x'\|^\alpha$
  - Si $\alpha > 1$ entonces f es constante
  - Si $\alpha = 1$ entonces f es de Lipschitz

Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos, sea $f : X \to Y$

- f es **de Lipschitz** $\iff \exists K > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq K d_X(x, x'), \qquad \forall x, x' \in X$$

  - Toda aplicación de Lipschitz es uniformemente continua
  - Si f es de Lipschitz entonces f es α-Hölder continua.

- f es **contractiva** $\iff f$ es de Lipschitz con $K < 1 \wedge$ dominio y codomino coinciden, distancias incluidas $(f : (X, d_X) \to (X, d_X))$
  - Si f es contractiva y X es completo entonces f tiene un único punto fijo para el que $f(x) = x$

- f es **inyectiva** $\iff \forall x, x' \in X, f(x) \neq f(x') \implies x \neq x'$

- f es **coerciva** $\iff \exists \lambda > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(x')) \geq \lambda d_X(x, x'), \qquad \forall x, x' \in X$$

- f coerciva $\implies$ f inyectiva

$$\boxed{\begin{array}{c} f \in C^1 \implies f \text{ de Lipschitz } \implies \\ \implies f \text{ uniformemente continua } \implies f \text{ continua} \end{array}} \tag{1}$$

3. Teoremas gordos

Teorema (de la función inversa)**.** *Sea* $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Sean* $U_0 \in \mathbb{V}$ *un abierto y* $f : U_0 \to V$ *una función de clase* C^1*. Si en* $x_0 \in U_0$ *la diferencial* $L = (df)_{x_0}$ *es invertible (e.d.* L *es lineal acototada, biyectiva y con inversa* L^{-1} *también acotada) entonces existen abiertos* U, V *con* $x_0 \in U, y_0 \in V, f(x_0) = y_0$ *tales que* f *es biyectiva de* U *a* V*. Además, en ese caso la inversa* $f^{-1} : V \to U$ *es diferenciable en* y_0 *y* $(df^{-1})_{y_0} = [(df)_{x_0}]^{-1}$*.*

E. Hernandis, 29 de noviembre de 2018 a las 21:26