

1. Preliminares

1.1. Normas

Sea V un espacio vectorial, $x, y, z \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

- Un **producto escalar** es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple:

$$\begin{aligned}\langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle & \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle & \langle x, x \rangle &\geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}_V\end{aligned}$$

- Una **norma** es una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple:

$$\begin{aligned}\|x\| &\geq 0, \|x\| = 0 \iff x = \vec{0}_V \\ \|\lambda v\| &= |\lambda| \|v\| & \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

- $\|\cdot\|$ cumple la **identidad del paralelogramo**

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$$

si y solo si procede producto escalar dado por la **identidad de polarización**

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

Se dice que esta es una **norma euclídea**.

- Un espacio normado es un par $(V, \|\cdot\|_V)$
- Una **p-norma** es una norma $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida con

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left[\sum_{j=1}^n x_j^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

- El **exponente conjugado** de p es p' y cumple $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Es único y si $p = 1$ entonces $p' = \infty$ y viceversa
- La norma euclídea que procede del producto escalar estándar es la p-norma de orden 2. 2 es el único número que tiene como conjugado a sí mismo
- Las p-normas cumplen las desigualdades de **Young, Hölder y Minkowski**:

$$\begin{aligned}a, b > 0 &\implies \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \\ x, y \in \mathbb{R}^n &\implies \langle x, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_{p'} \\ x, y \in \mathbb{R}^n &\implies \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p\end{aligned}$$

1.2. Espacios métricos

Sea $X \neq \emptyset$ conjunto y sean $x, y, z \in X$

- Un espacio métrico es un par (X, d) donde la función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una distancia que cumple:

$$\begin{aligned}d(x, y) &\geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y \\ d(x, y) &= d(y, x) & d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z)\end{aligned}$$

- Si $E \subset X$, $E \neq \emptyset$ entonces la restricción $d_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ define una distancia
- Si $E \subset \mathbb{R}^n = X$ no vacío, no necesariamente subespacio, entonces $\|x - y\|_E$ define una distancia en E

1.3. Sucesiones

- Una **sucesión** $\{x_n\} \subset X$ es **de Cauchy** $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ tal que $n, m \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$
 - (X, d) **completo** $\iff \{x_n\}$ de Cauchy $\implies \{x_n\}$ convergente
- Una **sucesión** $\{x_n\} \subset X$ es **convergente** a $L \in X$ $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ tal que $n \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, L) < \varepsilon$
 - $\{x_n\}$ convergente $\implies \{x_n\}$ de Cauchy
 - Si el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ existe entonces es único

1.4. Aplicaciones lineales. Normas equivalentes.

- Una **aplicación lineal** es **acotada** $L \in \mathcal{L}(E, F)$ si cumple alguna de
 - L es continua en $\vec{0}_E$
 - L es continua $\forall x \in E$
 - $\forall x \in E, \exists M \mid \|x\|_E \leq 1 \implies \|L(x)\|_F \leq M$
- $\|\cdot\|_A$ domina a $\|\cdot\|_B$ $\iff \exists 0 < c < \infty$ tal que $\forall x \in E, \|x\|_B \leq c \|x\|_A$
- $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$ son equivalentes $\iff \exists 0 < c, C < \infty$ tales que $\forall x \in E, c \|x\|_A \leq \|x\|_B \leq C \|x\|_A$. Entonces,
 - Definen los mismos abiertos y cerrados.
 - En \mathbb{R}^n todas las normas son equivalentes.

1.5. Topología

Sea (X, d) un espacio métrico, $E \subset Y \subset X$, $a, x, y \in X$, $r \in \mathbb{R}$

- La **bola abierta** de radio r y centro a es el conjunto $B_r(a) = B(a; r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$
- La **bola cerrada** de radio r y centro a es el conjunto $\overline{B}_r(a) = \overline{B}(a; r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$
- E es **abierto** $\iff \forall e \in E, \exists r > 0 \mid B_r(e) \subset E$
 - La unión arbitraria de abiertos es un abierto
 - La intersección finita de abiertos es un abierto
 - Dado $x \in X$, un **entorno abierto** de x es cualquier abierto $U \mid x \in U$.
 - U es abierto $\iff U = \bigcup B_r(x)$
- E es **cerrado** si $E^c = X \setminus E$ es un abierto
 - La intersección arbitraria de cerrados es un cerrado
 - La unión finita de cerrados es un cerrado
- E **abierto relativo** de Y $\iff \exists E' \mid E = Y \cap E'$ y E' es abierto en X (análogo para cerrados)
 - E abierto relativo en $Y \implies E$ abierto en (Y, d_Y)
- El **interior** $\text{int } E = \{x \in X \mid \exists r > 0, B_r(x) \subset E\}$
- El **exterior** $\text{ext } E = \{x \in X \mid \exists r > 0, B_r(x) \cap E = \emptyset\}$
- El **cierre, clausura o adherencia** $\overline{E} = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset\} = \{L \in X \mid \{a_n\} \subset E \text{ converge a } L\}$
 - E cerrado $\iff E = \overline{E}$

- E **denso** $\iff \overline{E} = X$. Tanto \mathbb{Q} como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en \mathbb{R}
- La **frontera** $\partial E = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap E^c \neq \emptyset\} = \{x \in X \mid x \notin \text{int } E \wedge x \notin \text{ext } E\}$
- Los **puntos de acumulación** $E' = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset\}$
 - $\overline{E} = E \cup E'$
- Un **punto** $x \in E$ es **aislado** $\iff \exists r > 0 \mid B_r(x) \cap E = \{x\}$
 - si $\forall x, x \in E \implies x$ aislado entonces E es **discreto** y $\{x\}$ abierto relativo de E
- (X, d) de **Banach** $\iff X$ es e.v., d es una norma y X completo
- E es **compacto** en (X, d) \iff
 - $\{x_n\} \subset E \implies \exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ subsucesión convergente con límite en K
 - Todo recubrimiento $\{U_i\}$ por abiertos de K tiene una subfamilia finita que también recubre a K
- Propiedades de compactos
 - E compacto $\implies K$ es cerrado y acotado
 - en (X, d) , X compacto $\implies (X, d)$ completo
 - $E \subset X$ compacto, f continua en $E \implies f$ alcanza máximo y mínimo en E
- Un **camino** es una aplicación continua $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ con I un intervalo
- E es **conexo** (por abiertos) $\iff \nexists A, B \subset X \mid A \cap B = \emptyset \wedge (E \cap A) \cup (B \cap E) = E$
- E es **conexo** (por abiertos relativos) $\iff \forall A, B$ abiertos en E con $A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = E \implies (A = \emptyset \wedge B = E) \vee (B = \emptyset \wedge A = E)$
 - Equivalentemente, E conexo $\iff \nexists A, B$ abiertos en E con $A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = E$
 - E conexo y $p \in \overline{E} \implies E \cup p$ conexo
 - E_1, E_2 conexos y $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \implies E_1 \cup E_2$ conexo
- E es **conexo por caminos** o **arco-conexo** $\iff \forall p, q \in E, \exists \alpha(t) : [0, 1] \rightarrow E$ un camino tal que $\alpha(0) = p \wedge \alpha(1) = q$
- Dado $x \in E$, la **componente conexa** que contiene a e es el conjunto $\{y \in E \mid \exists A \text{ conexo, con } x \in A \wedge y \in A\}$
 - La relación de equivalencia $x \sim y \iff \exists C$ conexo con $x, y \in C$ define una partición cuyas clases de equivalencia son las componentes conexas de cada punto.
 - Si $A \subset X$ conexo, A está contenido en una única componente conexa.
- E es **convexo** $\iff \forall x, y \in E \implies [x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\} \subset E$

1.6. Continuidad

Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos, $f : X \rightarrow Y$ una función

- f es **continua** en $a \in X \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$. Equivalentemente, f continua en $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
- f **continua** en $X \iff$
 - f continua en $x, \forall x \in X$
 - $\forall V \subseteq Y, V$ abierto de $Y \implies f^{-1}(V)$ abierto de X
 - $\forall V \subseteq Y, V$ cerrado de $Y \implies f^{-1}(V)$ cerrado de X
 - $\forall \{x_n\} \subset X, \{x_n\} \rightarrow x_0 \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x_0)$
- f **uniformemente continua** $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $d_X(x, x') \leq \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$
 - Si (X, d) es compacto entonces f continua en $X \implies f$ uniformemente continua
 - Si f es uniformemente continua entonces se pueden intercambiar límite y derivada
- Si f es composición de funciones continuas entonces es continuas. Las fórmulas elementales son continuas.

2. Diferenciabilidad

Sean E, F espacios normados, $x_0 \in E, U \subset E$ entorno abierto de x_0 . $f : U \rightarrow F$ es **diferenciable** en $x_0 \iff \exists T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}_E} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Th}{\|h\|} = \vec{0}_F$$

- T existe $\implies T$ única y la llamamos **diferencial** de f en x_0 y se denota $(df)_{x_0}$
- f diferenciable en $x_0 \implies f$ continua en x_0
- toda $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es diferenciable en todo punto y coincide con sus diferenciales
- f constante $\implies f$ es diferenciable en todo punto y su diferencial $(df)_{x_0}$ es nula
- La **linealidad**: $(f + g)_{x_0} = (df)_{x_0} + (dg)_{x_0}$
- La **regla del producto**: $(d(f \cdot g))_{x_0} = (df)_{x_0}g(x_0) + f(x_0)(dg)_{x_0}$
- La **regla de la cadena**: $(d(g \circ f))_{x_0} = (dg)_{f(x_0)}(df)_{x_0}$
- La **derivada respecto de un vector** $v \in E$ en el punto $x_0 \in E$ es $D_v f(x_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + tv)$
 - Si $\|v\| = 1$ entonces la derivada se llama direccional
 - Si $v = e_j \in \{e_1, \dots, e_n\}$ la base estándar de \mathbb{R}^n , entonces $D_{e_j} f(x_0) = \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_{x_0} f = D_j f(x_0)$ es la j -ésima **derivada parcial**
- La composición de funciones diferenciables es diferenciable. Ojo con aplicar las reglas de derivación a cosas que no son números reales (p.e. en matrices no funcionan).
- **Condiciones de diferenciabilidad** de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en x_0 :
 1. Las derivadas parciales $\partial_{x_j} f(x_0)$ existen

2. El único candidato posible a diferencial $(df)_{x_0}$ es la aplicación lineal dada por la **matriz jacobiana** de $m \times n$

$$Df_{x_0} := \left(\partial_{x_1} f(x_0) \mid \dots \mid \partial_{x_n} f(x_0) \right)$$

$$Df_{x_0} := \begin{pmatrix} Df_1(x_0) \\ \vdots \\ Df_m(x_0) \end{pmatrix}$$

$$Df_{x_0} := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

3. Df_{x_0} cumple la definición de diferenciabilidad

- El **gradiente** ∇f es el jacobiano de una función escalar $(f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$. Es un vector fila.
- El **Jacobiano** es $\det Df$
- Una función vectorial es diferenciable \iff son diferenciables todas sus funciones componentes
- El **Hessiano** es la matriz simétrica de las derivadas se segundas

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- El **Laplaciano** $\Delta f = \text{traza Hess } f$

2.1. Tipos de aplicaciones

Sean E, F e.v, sea $f : E \rightarrow F$

- f es **convexa** $\iff \forall x, y \in E, t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$
- Sean x_1, \dots, x_n . Un punto x es **combinación convexa** de $x_1, \dots, x_n \iff x = t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$ con $\sum t_i = 1 \wedge t_i \geq 0$
- f es **α -Hölder continua** $\iff \exists c > 0 \mid \|f(x) - f(x')\| \leq c \|x - x'\|^\alpha$
 - Si $\alpha > 1$ entonces f es constante
 - Si $\alpha = 1$ entonces f es de Lipschitz

Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos, sea $f : X \rightarrow Y$

- f es **de Lipschitz** $\iff \exists K > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq K d_X(x, x'), \quad \forall x, x' \in X$$

- Toda aplicación de Lipschitz es uniformemente continua
- Si f es de Lipschitz entonces f es α -Hölder continua.
- f es **contractiva** $\iff f$ es de Lipschitz con $K < 1 \wedge$ dominio y codominio coinciden, distancias incluidas $(f : (X, d_X) \rightarrow (X, d_X))$
 - Si f es contractiva y X es completo entonces f tiene un único punto fijo para el que $f(x) = x$
- f es **inyectiva** $\iff \forall x, x' \in X, f(x) \neq f(x') \implies x \neq x'$
- f es **coerciva** $\iff \exists \lambda > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(x')) \geq \lambda d_X(x, x'), \quad \forall x, x' \in X$$

- f coerciva $\implies f$ inyectiva

$$\boxed{f \in C^1 \implies f \text{ de Lipschitz} \implies f \text{ uniformemente continua} \implies f \text{ continua}} \quad (1)$$

3. Teoremas gordos

Teorema (de la función inversa). Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Sean $U_0 \in V$ un abierto y $f : U_0 \rightarrow V$ una función de clase C^1 . Si en $x_0 \in U_0$ la diferencial $L = (df)_{x_0}$ es invertible (e.d. L es lineal acotada, biyectiva y con inversa L^{-1} también acotada) entonces existen abiertos U, V con $x_0 \in U, y_0 \in V, f(x_0) = y_0$ tales que f es biyectiva de U a V . Además, en ese caso la inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ es diferenciable en y_0 y $(df^{-1})_{y_0} = [(df)_{x_0}]^{-1}$.

E. Hernandis, 29 de noviembre de 2018 a las 16:24