# ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(y-x) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(b-z)-y \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy-cz$$

APUNTES DEL CURSO 2018-2019 IMPARTIDO POR ANTONIO SANCHEZ

Rafael Sánchez

*& alii*

Revisión del 1 de febrero de 2019 a las 00:48.

# Índice general

# Capítulo 0

# Notación

- $\mathcal{P} \equiv f(x) = g(x)$, $\mathcal{P}$ es una ecuación.
- $\mathbf{y} = f(x)$, $\mathbf{y}$ es una variable dependiente.
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'$, derivada de y respecto de x.

# Parte I

# Primer parcial

# Capítulo 1

# Introducción a las ecuaciones diferenciales

## 1.1. Idea intuitiva

**Definición 1** (Ecuacion diferencial de primer orden)**.** Sea $\mathbf{y} = f(x)$, una **ecuación diferencial de primer orden** es una ecuación de la forma: $\mathbf{y}' = F(x, \mathbf{y})$.
Sea $g(x)$ una función de x, diremos que es solución cuando la ecuación diferencial se cumpla para $\mathbf{y} = g(x)$.

Veamos unos ejemplos típicos.

**Ejemplo 1**

*Consideramos* $\mathcal{P} \equiv x'(t) = 2x(t)$ *(o alternativamente* $\mathbf{x}' = 2\mathbf{x}$*)*
*Vemos que es una ecuación diferencial de primer orden ya que sigue la definición anterior. Es sencillo ver que* $F(t, \mathbf{x}) = 2\mathbf{x} = 2x(t)$*. Queremos hallar que funciones resuelven* $P$
*Además, observamos que si* $x(t) = e^{2t}$*, entonces* $x'(t) = 2e^{2t} = 2x(t)$ *y por tanto* $x(t) = e^{2t}$ *es una solución de* $P$*.*
*Si pensamos con más cuidado también observamos que* $x(t) = 7e^{2t}$ *también satisface* $P$*.*
*Nos interesaría entonces hallar una* ***solución general****, que con una sola ecuación englobe todas las soluciones. Aunque de momento no podemos justificarlo, si tomamos* $x(t) = ae^{2t} \mid a \in \mathbb{R}$ *entonces se cumple que* $x'(t) = 2ae^{2t} = 2x(t)$ *y por tanto es la solución general de* $P$*.*

Del ejemplo anterior surgen problemas llamados *problema de valor inicial*, donde hallando la solución general y sabiendo la imagen de un punto $t_0$ por medio de $x(t)$ podemos determinar el parámetro y encontrar una solución explícitamente. Como continuación al ejemplo anterior consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ x(0) = 8 \end{cases}$$

Para resolverlo, hallamos la solución general $x(t) = ae^{2t}$ y sustituimos la segunda ecuación. $x(0) = ae^0 = 8 \implies a = 8$.

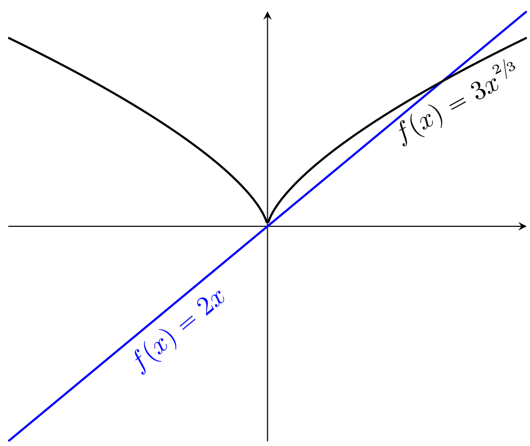
**Ejemplo 2**

*Consideramos* $\mathcal{P} \equiv x'(t) = 3(x(t))^{2/3}$*., queremos hallar la solución para* $x(0) = 0$*.*
*Empezamos hallando soluciones a la ecuación, en este caso* $x(t) = t^3$ *y* $x(t) = 0$ *resuelven la ecuación. Nuestro sistema sería:*

$$\begin{cases} x'(t) = 3(x(t))^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

*Sin embargo, tanto* $x(t) = t^3 \mid t = 0$ *como* $x(t) = 0$ *resuelven* $P$*. No podemos hablar de la solución puesto que hay dos.*

En los dos ejemplos anteriores tenemos una ecuación diferencial de la forma $\mathbf{x}' = F(t, \mathbf{x})$, $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ y $f(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}^{2/3}$ respectivamente. Sin embargo, en la segunda tenemos dos soluciones para $x(0) = 0$. Al observar las gráficas de las dos funciones se ve la razón a simple vista, la segunda no es derivable en 0.




**Ejemplo 3 (*Crecimiento de una población*)**

*Consideramos $\mathcal{P} \equiv \mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x}$. ($\lambda$ típicamente es natalidad o mortalidad).*
*Sabiendo que modela el crecimiento de una población en función del tiempo, podemos aproximar (veremos por qué más adelante) $\frac{\Delta x}{\Delta t} \sim \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathbf{x}'$. Por tanto (como es una tasa, se entiende que el tiempo tiende a 0 para hallarla):*

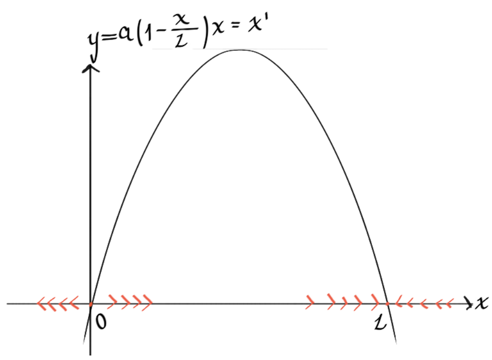
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \sim \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda \cdot \mathbf{x} \implies \lambda = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{x}'}{\mathbf{x}}$$

.

El crecimiento de una población de organismos lo suficientemente grandes no se ve representada por la ecuación anterior debido a la limitación de recursos. Interesaría por tanto modelizar la ecuación teniendo esto en cuenta. Para ello utilizaremos el parámetro $L$ como el límite al que tendería la población con los recursos existentes.

**Ejemplo 4 (*Crecimiento de una población con limitación de recursos*)**

*Consideramos $\mathcal{P} \equiv \mathbf{x}' = a(1 - \frac{\mathbf{x}}{L})\mathbf{x}$ con $a > 0$. De esta forma cuando $\mathbf{x} << L$ o $\mathbf{x} >> L$ , tenemos prácticamente la ecuación del ejemplo anterior. Si $\mathbf{x} \sim L$ entonces la población apenas crece/decrece. Para encontrar soluciones a esta ecuación no hace falta resoverla, basta graficarla. Partimos de $\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) = a(1 - \frac{\mathbf{x}}{L})\mathbf{x}$.*




*Es fácil ver que $\mathbf{x}'$ es una parábola, que corta al eje $X$ en $0$ y $L$. Además, se indica con (») la dirección en la que se mueve $x(t)$ conforme avanza $t$. Tanto $0$ como $L$ son puntos de equilibrio, repulsor (inestable) y atractor (estable) respectivamente.*

Habiendo encontrado las soluciones de la funcion anterior, nos preguntamos como varía la población frente al tiempo. Más adelante veremos formalmente como representar $\mathbf{x}$ frente a $t$. Sin embargo, podemos razonar el aspecto de la función. Sabemos que tiene que corregirse cerca de L, y que si $\mathbf{x} << L$ entonces tiene un crecimiento parecido al exponencial. Por tanto, podría tener el aspecto de la figura 1.1. De este gráfico podemos deducir varias cosas. Para empezar, sabemos que $\mathbf{x}''(t_0) = 0$ tiene solución para la curva $c_2$ ya que tiene un punto de inflexión. Además, observamos disintos tipos de crecimiento en función del valor de $x(0)$ por lo que tendría sentido intentar determinar para qué valores $x_0$ obtenemos el crecimiento de $c_1$ y para cuáles el de $c_2$.

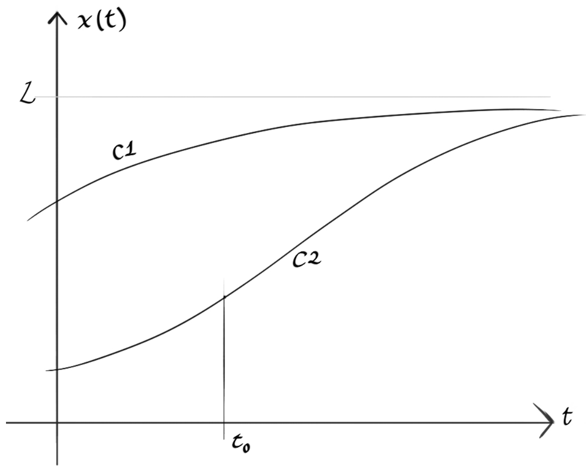



Figura 1.1: Población - Tiempo

**Ejercicio propuesto 1.** ¿Para qué valores de $x_0$ se dan los diferentes crecimientos de $c_1$ y $c_2$?. *Sugerencia*: Considerar el problema de valor inicial con $x''(t_0) = 0$.

## 1.2. Método de separación de variables

Esta sección trata sobre el primer método de resolución de ecuaciones diferenciales. Antes de definir el método formalmente vamos a ver un ejemplo.

**Ejemplo 5 (*Resolución sencilla*)**

*Sea $\mathcal{P} \equiv \mathbf{y}' = x\mathbf{y}$. Halla las soluciones de la ecuación.*
$\mathbf{y}' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$*, con esta igualdad podemos hacer manipulaciones sin justificar (de momento).*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\mathbf{y} \implies \frac{dy}{\mathbf{y}} = x\mathrm{d}x \implies \int \frac{dy}{\mathbf{y}} = \int x\mathrm{d}x \implies \log|\mathbf{y}| = \frac{x^2}{2} + C \implies |\mathbf{y}| = e^{x^2/2+C} = e^C \cdot e^{x^2/2}$$

$$\mathbf{y} = \pm e^C \cdot e^{x^2/2} = ke^{x^2/2} \mid k \in \mathbb{R}$$

Esta resolución se conoce como método de separación de variables.

**Ejercicio propuesto 2.** Resolver $\mathcal{P} \equiv \mathbf{x}' = a(1 - {}^{\mathbf{x}}/_{L})\mathbf{x}$ con $x(0) = 0$.

Vamos a generalizar el método por medio de la siguiente proposición.

**Proposición 1** (Método de separación de variables)**.** Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ y $G(\mathbf{y})$ una primitiva de $g(\mathbf{y})$, es decir, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$ y $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\mathbf{y}} = g(\mathbf{y})$, con $\mathbf{y} = f(x)$. Y sea una ecuación $\mathcal{P} \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{g(\mathbf{y})}$, entonces las soluciones de $\mathcal{P}$ cumplen:

$$G(y(x)) = F(x) + \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ } constante.$$

*Demostración.*

Por la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y(x)) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\mathbf{y}}(y(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)$$

Como $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\mathbf{y}} = g(\mathbf{y})$ y $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{g(\mathbf{y})}$ por hipóstesis:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\mathbf{y}}(y(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = g(y(x)) \cdot \frac{f(x)}{g(y(x))} = f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)$$

Es decir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = 0 \implies G(y(x)) - F(x) = \mathcal{C} \implies G(y(x)) = F(x) + \mathcal{C}$$

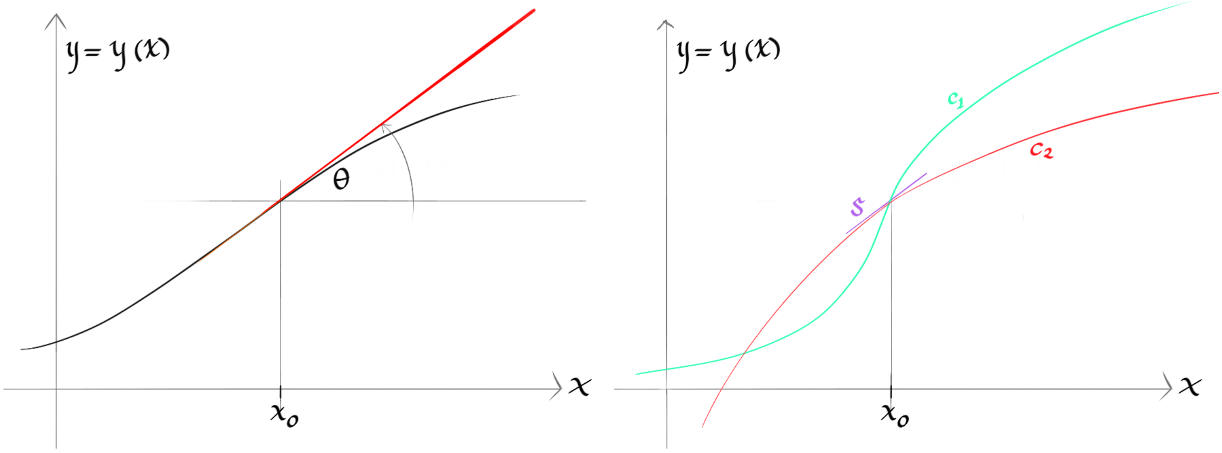
$\diamondsuit$

**Observación 1.** La prosposición anterior está incompleta, faltaría ver que condiciones tienen que cumplir $f(x)$ y $g(\mathbf{y})$. Para completarla tenemos que considerar la existencia de primitivas y la condición de que $\mathcal{C}$ sea constante.

- Ya que tenemos que usar que $F(x)$ y $G(\mathbf{y})$ son primitivas, basta pedir que tanto $f(x)$ y $g(\mathbf{y})$ sean continuas. Esto garantiza que $F(x)$ y $G(\mathbf{y})$ son ambas $C^1$
- Si $h'(x) = 0 \implies h(x)$ constante en cada intervalo en que está definida (pues $\mathbb{R}$ es conexo). Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces $h(x)$ es constante. Como $\mathcal{C}$ surge de integrar 0 a la derecha de la ecuación, podemos afirmar que $\mathcal{C} = h(x)$ y por tanto constante.

## 1.3. Significado geométrico de la ecuación diferencial ordinaria

Vamos a analizar una ecuación diferencial de forma gráfica para interpretarla geométricamente. Consideramos $\mathbf{y}' = f(x, (y))$. Supongamos que $\mathbf{y}$ tiene la gráfica de la figura 1.2a. Entonces, $\mathbf{y}'(x_0) = \tan\theta$, que




(a) Recta tangente en $x_0$ conocidas $\mathbf{y}$ y $x_0$ (b) Curvas dadas el segmento $\mathcal{S}$.

es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $\mathbf{y}$ en $x_0$. Esto es cálculo elemental, lo que nos interesa es saber algo de la función $\mathbf{y}$ cuando sabemos algo de $\mathbf{y}'$.

Ilustramos en la figura 1.2b entonces la casuística de conocer $\mathcal{P} \equiv \mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$. En este caso, nos preguntamos que aspecto podría tener $\mathbf{y}$ para que fuera solución de $\mathcal{P}$. Como conocemos $y'(x_0)$, podemos considerar que $\mathcal{S}$ es un semento paralelo a la recta tangente de la gráfica en $x_0$. Es fácil ver que $\mathcal{C}_1$ no puede ser solución de $\mathcal{P}$ pues $\mathcal{C}_1'(x_0) \neq y'(x_0)$. Sin embargo, es evidente que $\mathcal{C}_2$ sí resuelve $\mathcal{P}$.

Si repetimos el procedimiento de determinar como son las pendientes (como acabamos de hacer para $x_0$) para todos los puntos, hallamos el *campo de pendientes*.

**Ejemplo 6 (*Hallar un campo de pendientes*)**

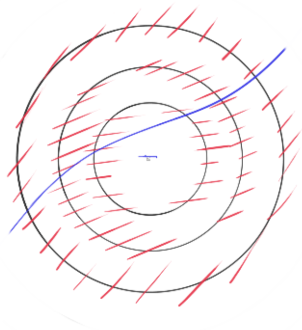
*Sea $\mathcal{P} \equiv \mathbf{x}' = t^2 + \mathbf{x}^2$, es decir, $f(t, \mathbf{x}) = t^2 + \mathbf{x}^2$. Si queremos hallar qué pendiente se le asigna al punto $p = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ evaluamos la función $f$, $f(p) = 1$. Por tanto, la función $\mathbf{x}$ que soluciona $\mathcal{P}$ tiene tangente* *con pendiente 1 en $t = 1/\sqrt{2}$.*

*De hecho, es lógico pensar que a cualquier punto que cumpla $t^2 + \mathbf{x}^2 = 1$ se le asignará una pendiente de 1 a su recta tangente. Este conjunto de puntos conforman la* ***isoclina*** *de pendiente 1.*

*De forma general, para una constante c dada (en este ejemplo necesariamente no negativa pues $f(t, \mathbf{x})$ es suma de cuadrados), podemos definir la isoclina de pendiente c:*

$$ISO_c = \{(t, \mathbf{x}) \mid f(t, \mathbf{x}) = c\}$$

*Volviendo a nuestro ejemplo, las isoclinas van a ser curvas que cumplan $t^2 + \mathbf{x}^2 = c$ para un c dado.*



*Hemos representado las isoclinas junto con un pequeño segmento de pendiente c para disintos valores de c. Como las isoclinas cumplen que $t^2 + \mathbf{x}^2 = c$, estas son las circumferencias de radio $\sqrt{c}$ con $c > 0$. Podemos observar tambien que $ISO_0 = \{(0, 0)\}$ e $ISO_{c<0} = \emptyset$.*

*Llamamos a la gráfica con pequeños segmentos campo de pendientes y por tanto, una función que resuelva $\mathcal{P}$ tiene que ser tangente al segmento del punto por el que pase.*

*Sin embargo, los campos de pendientes permiten ver cómo es la función a grandes rasgos. En nuestro ejemplo parece indicar que $x(t) \uparrow \infty$, pero no sabemos si lo hace de forma asintótica ($x(t) \uparrow \infty$ en t finito), o $x(t)$ crece a infinito cuando $t \to \infty$.*
*Esto no puede resolverse gráficamente y veremos como resolverlo de forma analítica más adelante.*

## 1.4. Ecuaciones diferenciales y problemas geométricos

Gracias a la relación de la derivada con la tangencia de funciones, podemos plantear problemas geométricos en forma de ecuación diferencial.

### 1.4.1. Trayectorias ortogonales

De la recta tagente a un punto surge el concepto de recta normal a ese punto, que no es más que la recta perpendicular a la tangente y que pasa por dicho punto. Para ver como se relacionan estas dos rectas vamos a hacer un análisis simple. Diremos que dos curvas son ortogonales si en el punto de cruce las rectas tangentes a cada curva son perpendiculares entre sí.

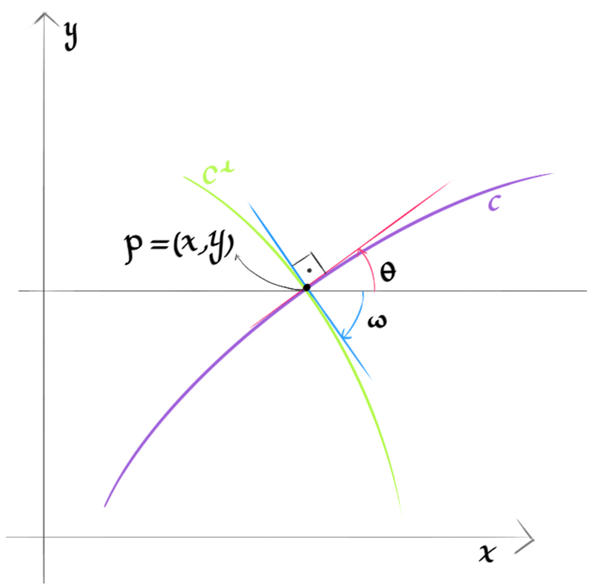



Figura 1.3: Relaciones entre curvas ortogonales

De la figura 1.3 vemos que la pendiente de $C$ es $pend_C = \tan(\theta)$. Asimismo, $pend_{C^\perp} = \tan(\omega)$ y $\omega = \theta - \pi/2$. A partir de aquí desarrollamos:

$$\tan(\omega) = \frac{\sin(\theta - \pi/2)}{\cos(\theta - \pi/2)} = \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -\frac{1}{\tan(\theta)}$$

y por tanto,

$$pend_C \cdot pend_{C^\perp} = -1 \tag{1.1}$$

Nuestro objetivo es que dada una familia de curvas $fam_C$, podamos encontrar una (*familia de*) curva que sea ortogonal a todas las de la familia en los puntos de cruce.

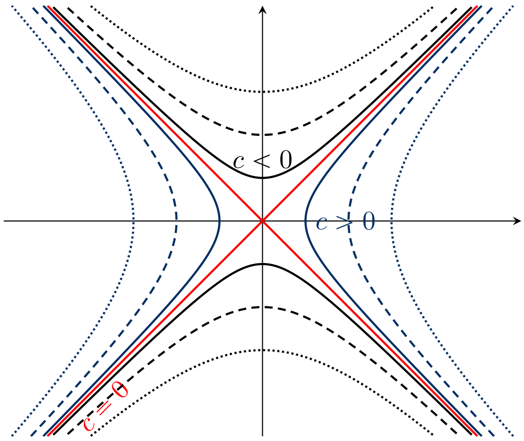
Supongamos que la familia original satisface una ecuación diferencial ordinaria $\mathbf{y}_1' = f(x, \mathbf{y}_1)$. Queremos encontrar otra ecuación que defina a la ortogonal.

Como $fam_C$ sigue una EDO (*ecuacion diferencial ordinaria*), podemos afirmar que $pend_C = \mathbf{y_1'} = f(x, \mathbf{y_1})$. Usando 1.1, $pend_{C^\perp} = \frac{-1}{f(x,\mathbf{y_1})}$. Pero además, si $C^\perp$ sigue una EDO, está dada por una función $\mathbf{y_2} = y_2(x)$ y entonces $\mathbf{y_2'} = \frac{-1}{f(x,\mathbf{y_1})}$.
Concluimos con que dada $fam_C$ descrita por $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$, podemos encontrar $fam_{C^\perp}$ que satisface:

$$\mathbf{y}' = -\frac{1}{f(x, \mathbf{y})}$$

**Ejemplo 7 (*Familia ortogonal a otra dada*)**

*Consideramos la familia:* $x^2 - \mathbf{y}^2 = c \mid c \neq 0$
*Para cada* $c$*, eso define* $\mathbf{y}$ *implícitamente en función de* $x$*.*




$x^2 - y^2 = c$ *para distintos valores de* $c$*.*
*(También puede verse como las curvas de nivel del paraboloide hiperbólico)*

*Para hallar la familia de curvas ortogonales vamos a seguir una serie de pasos:*

1. `Encontrar una EDO que cumplan esas curvas.`

$$x^2 - \mathbf{y}^2 = c \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - y^2 = c) \to 2x - 2\mathbf{y}\mathbf{y}' = 0 \implies \mathbf{y}' = \frac{x}{\mathbf{y}} = f(x, \mathbf{y})$$

2. `Econtrar la EDO para trayectorias ortogonales.`

$$\mathbf{y}' = -\frac{1}{f(x, \mathbf{y})} = -\frac{\mathbf{y}}{x}$$

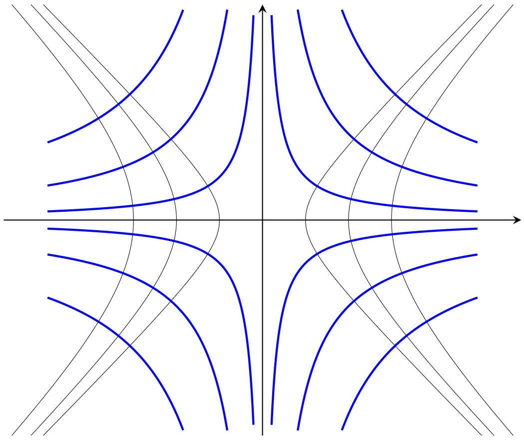
3. `Resolver la ecuación anterior`

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathbf{y}}{x} \implies -\frac{\mathrm{d}y}{\mathbf{y}} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \implies \log|y| = \log|x| + \mathcal{C}$$

*es decir,*

$$|\mathbf{y}| = \frac{e^{\mathcal{C}}}{|x|} \implies |x\mathbf{y}| = e^{\mathcal{C}} \implies x\mathbf{y} = k : k = e^{\mathcal{C}} \vee k = e^{-\mathcal{C}} \implies \mathbf{y} = \frac{k}{x}$$

*Con la solución general podemos representar parte de la familia:*



*En azul posibles soluciones para disintos valores de $k$, en negro la familia original*
*Se observa que son curvas ortogonales a la familia original.*

# Parte II

# Segundo parcial

# Parte III

# Tercer parcial

# Parte IV

# Apéndices

# Capítulo 2

# Índices

# Lista de definiciones

# Lista de teoremas

# Lista de ejemplos

# Lista de ejercicios