1. Preliminares

1.1. Normas

Sea V un espacio vectorial, $x, y, z \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

- Un **producto escalar** es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que cumple:

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \qquad \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$
$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \qquad \langle x, x\rangle \geq 0,\ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = \vec{0}_V$$

- Una **norma** es una función $\|\cdot\| : V \to R$ que cumple:

$$\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \iff x = \vec{0}_V$$
$$\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\| \qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

  - $\|\cdot\|$ cumple la **identidad del paralelogramo**

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|}{2}$$

  si y solo si procede producto escalar dado por la **identidad de polarización**

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

  Se dice que esta es una **norma euclídea**.

- Un espacio normado es un par $(V, \|\cdot\|_V)$
- Una **p-norma** es una norma $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to R$ definida con

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left[\sum_{j=1}^{n} x_j^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

  - El **exponente conjugado** de p es p' y cumple $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Es único y si $p = 1$ entonces $p' = \infty$ y viceversa
  - La norma euclidea que procede del producto escalar estándar es la p-norma de orden 2. 2 es el único número que tiene como conjudago a sí mismo
  - Las p-normas cumplen las desigualdades de **Young, Hölder y Minkowski**:

$$a, b > 0 \implies \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$
$$x, y \in \mathbb{R}^n \implies \langle x, y\rangle \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$$
$$x, y \in \mathbb{R}^n \implies \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

1.2. Espacios métricos

Sea $X \neq \emptyset$ conjunto y sean $x, y, z \in X$

- Un espacio métrico es un par (X, d) donde la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una distancia que cumple:

$$d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \iff x = y$$
$$d(x, y) = d(y, x) \qquad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

- Si $E \subset X,\ E \neq \emptyset$ entonces la restricción $d_E : E \times E \to \mathbb{R}$ define una distancia
- Si $E \subset \mathbb{R}^n = X$ no vacío, no necesariamente subespacio, entonces $\|x - y\|_E$ define una distancia en E

1.3. Sucesiones

- Una **sucesión** $\{x_n\} \subset X$ es **de Cauchy** $\iff \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ tal que $n, m \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$
  - (X, d) **completo** $\iff$ $\{x_n\}$ de Cauchy $\implies$ $\{x_n\}$ convergente
- Una **sucessión** $\{x_n\} \subset X$ es **convergente** a $L \in X \iff \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ tal que $n \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, L) < \varepsilon$
  - $\{x_n\}$ convergente $\implies$ $\{x_n\}$ de Cauchy
  - Si el límite $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ existe entonces es único

1.4. Aplicaciones lineales. Normas equivalentes.

- Una **aplicación lineal** es **acotada** $L \in \mathcal{L}(E, F)$ si cumple alguna de
  - L es continua en $\vec{0}_E$
  - L es continua $\forall x \in E$
  - $\forall x \in E,\ \exists M \mid \|x\|_E \leq 1 \implies \|L(v)\|_F \leq M$
- $\|\cdot\|_A$ domina a $\|\cdot\|_B \iff \exists 0 < c < \infty$ tal que $\forall x \in E,\ \|x\|_B \leq c\,\|x\|_A$
- $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$ son equivalentes $\iff \exists 0 < c, C < \infty$ tales que $\forall x \in E,\ c\,\|x\|_A \leq \|x\|_B \leq C\,\|x\|_A$. Entonces,
  - Definen los mismos abiertos y cerrados.
  - En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

1.5. Topología

Sea (X, d) un espacio métrico, $E \subset Y \subset X,\ a, x, y \in X,\ r \in \mathbb{R}$

- La **bola abierta** de radio r y centro a es el conjunto $B_r(a) = B(a; r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$
- La **bola cerrada** de radio r y centro a es el conjunto $\overline{B}_r(a) = \overline{B}(a; r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$
- E es **abierto** $\iff \forall e \in E, \exists r > 0 \mid B_r(e) \subset E$
  - La unión arbitrara de abiertos es un abierto
  - La intersección finita de abiertos es un abierto
  - Dado $x \in X$, un **entorno abierto** de x es cualquier abierto $U \mid x \in U$.
  - U es abierto $\iff U = \bigcup B_r(x)$
- E es **cerrado** si $E^{\complement} = X \setminus E$ es un abierto
  - La intersección arbitraria de cerrados es un cerrado
  - La unión finita de cerrados es un cerrado
- E **abierto relativo** de $Y \iff \exists E' \mid E = Y \cap E'$ y E' es abierto en X (análogo para cerrados)
  - E abierto relativo en $Y \implies E$ abierto en (Y, d_Y)
- El **interior** $\operatorname{int} E = \{x \in X \mid \exists r > 0, B_r(x) \subset E\}$
- El **exterior** $\operatorname{ext} E = \{x \in X \mid \exists r > 0, B_r(x) \cap E = \emptyset\}$
- El **cierre, clausura o adherencia** $\overline{E} = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset\} = \{L \in X \mid \{a_n\} \subset E \text{ converge a } L\}$
  - E cerrado $\iff E = \overline{E}$

- E **denso** $\iff$ $\overline{E} = X$. Tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$

- La **frontera** $\partial E = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap E^{\complement} \neq \emptyset\} = \{x \in X \mid x \notin \text{ int } E \wedge x \notin \text{ ext } E\}$

- Los **puntos de acumulación** $E' = \{x \in X \mid \forall r > 0, B_r(x) \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset\}$
  - $\overline{E} = E \cup E'$

- Un **punto** $x \in E$ es **aislado** $\iff$ $\exists r > 0 \mid B_r(x) \cap E = \{x\}$
  - si $\forall x,\ x \in E \implies x$ aislado entonces E es **discreto** y $\{x\}$ abierto relativo de E

- (X, d) de **Banach** $\iff$ X es e.v., d es una norma y X completo

- E es **compacto** en (X, d) $\iff$
  - $\{x_n\} \subset E \implies \exists\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ subsucesión convergente con límite en K
  - Todo recubrimiento $\{U_i\}$ por abiertos de K tiene una subfamilia finita que también recubre a K

- Propiedades de compactos
  - E compacto $\implies$ K es cerrado y acotado
  - en (X, d), X compacto $\implies$ (X, d) completo
  - $E \subset X$ compacto, f continua en E $\implies$ f alcanza máximo y mínimo en E

- Un **camino** es una aplicación continua $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to X$ con I un intervalo

- E es **conexo** (por abiertos) $\iff$ $\nexists A, B \subset X \mid A \cap B = \emptyset \wedge (E \cap A) \cup (B \cap E) = E$

- E es **conexo** (por abiertos relativos) $\iff$ $\forall A, B$ abiertos en E con $A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = E \implies (A = \emptyset \wedge B = E) \vee B = \emptyset \wedge A = E)$
  - Equivalentemente, E conexo $\iff$ $\nexists A, B$ abiertos en E con $A \cap B = \emptyset \wedge E = A \cup B$
  - E conexo y $p \in \overline{E} \implies E \cup p$ conexo
  - E_1, E_2 conexos y $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \implies E_1 \cap E_2$ conexo

- E es **conexo por caminos** o **arco-conexo** $\iff$ $\forall p, q \in E, \exists \alpha(t) : [0, 1] \to E$ un camino tal que $\alpha(0) = p \wedge \alpha(1) = q$

- Dado $x \in E$, la **componente conexa** que contiene a e es el conjunto $\{y \in E \mid \exists A$ conexo, con $x \in A \wedge y \in A\}$
  - La relación de equivalencia $x \sim y \iff \exists C$ conexo con $x, y \in C$ define una partición cuyas clases de equivalencia son las componentes conexas de cada punto.
  - Si $A \subset X$ conexo, A está contenido en una única componente conexa.

- E es **convexo** $\iff$ $\forall x, y \in E \implies [x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\} \subset E$

1.6. Continuidad

Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos, $f : X \to Y$ una función

- f es **continua** en $a \in X$ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$. Equivalentemente, f continua en $a \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que $d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

- f **continua** en X $\iff$
  - f continua en $x,\ \forall x \in X$
  - $\forall V \subseteq Y,\ V$ abierto de $Y \implies f^{-1}(V)$ abierto de X
  - $\forall V \subseteq Y,\ V$ cerrado de $Y \implies f^{-1}(V)$ cerrado de X
  - $\forall \{x_n\} \subset X, \{x_n\} \to x_0 \implies \{f(x_n)\} \to f(x_0)$

- f **uniformemente continua** $\iff$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $d_X(x, x') \leq \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$
  - Si (X, d) es compacto entonces f continua en $X \implies f$ uniformemente continua
  - Si f es uniformemente continua entonces se pueden intercambiar límite y derivada

- Si f es composición de funciones continuas entonces es continuas. Las fórmulas elementales son continuas.

2. Diferenciabilidad

Sean E, F espacios normados, $x_0 \in E, U \subset E$ entorno abierto de x_0. $f : U \to F$ es **diferenciable** en x_0 $\iff$ $\exists T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$\lim_{h \to \vec{0}_E} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Th}{\|h\|} = \vec{0}_F$$

- T existe $\implies$ T única y la llamamos **diferencial** de f en x_0 y se denota $(df)_{x_0}$

- f diferenciable en $x_0 \implies f$ continua en x_0

- toda $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es diferenciable en todo punto y coincide con sus diferenciales

- f constante $\implies$ f es diferenciable en todo punto y su diferencial $(df)_{x_0}$ es nula

- La **linealidad:** $(f + g)_{x_0} = (df)_{x_0} + (dg)_{x_0}$

- La **regla del producto:** $(d(f \cdot g))_{x_0} = (df)_{x_0} g(x_0) + f(x_0)(dg)_{x_0}$

- La **regla de la cadena:** $(d(g \circ f))_{x_0} = (dg)_{f(x_0)}(df)_{x_0}$

- La **derivada respecto de un vector** $v \in E$ en el punto $x_0 \in E$ es $D_v f(x_0) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(x_0 + tv)$
  - Si $\|v\| = 1$ entonces la derivada se llama direccional
  - Si $v = e_j \in \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^n$, entonces $D_{e_j} f(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x_0} f = D_j f(x_0)$ es la j-ésima **derivada parcial**

- La composición de funciones diferenciables es diferenciable. Ojo con aplicar las reglas de derivación a cosas que no son números reales (p.e. en matrices no funcionan).

- **Condiciones de diferenciabilidad** de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en x_0:
  1. Las derivadas parciales $\partial_{x_j} f(x_0)$ existen

2. El único candidato posible a diferencial $(df)_{x_0}$ es la aplicación lineal dada por la **matriz jacobiana** de $m \times n$

$$Df_{x_0} := \left(\begin{array}{c|c|c} \partial_{x_1} f(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f(x_0) \end{array} \right)$$

$$Df_{x_0} := \begin{pmatrix} Df_1(x_0) \\ \hline \vdots \\ \hline Df_m(x_0) \end{pmatrix}$$

$$Df_(x_0) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

3. Df_{x_0} cumple la definición de diferenciabilidad

- El **gradiente** ∇f es el jacobiano de una función escalar ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Es un vector fila.
- El **Jacobiano** es $\det Df$
- Una función vectorial es diferenciable $\iff$ son diferenciables todas sus funciones componentes
- El **Hessiano** es la matriz simétrica de las derivadas se segundas

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- El **Laplaciano** $\Delta f = \text{traza Hess } f$

2.1. Tipos de aplicaciones

Sean E, V e.v, sea $f : E \to F$

- f es **convexa** $\iff \forall x, y \in E, t \in [0,1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$
- Sean $x_1, \dots, x_n$. Un punto x es **combinación convexa** de $x_1, \dots, x_n \iff x = t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$ con $\sum t_i = 1 \wedge t_i \geq 0$.

Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos, sea $f : X \to Y$

- f es **de Lipschitz** $\iff \exists K > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq K d_X(x, x'), \qquad \forall x, x' \in X$$

  - Toda aplicación de Lipschitz es continua.
- f es **contractiva** $\iff$ f es de Lipschitz con $K < 1 \wedge$ dominio y codomino coinciden, distancias incluidas ($f : (X, d_X) \to (X, d_X)$)
- f es **inyectiva** $\iff \forall x, x' \in X, f(x) \neq f(x') \implies x \neq x'$
- f es **coerciva** $\iff \exists \lambda > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(x')) \geq \lambda d_X(x, x'), \qquad \forall x, x' \in X$$

  - f coerciva $\implies$ f inyectiva

3. Teoremas gordos

Teorema (de la función inversa). *Sea $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Sean $U_0 \in \mathbb{V}$ un abierto y $f : U_0 \to V$ una función de clase C^1. Si en $x_0 \in U_0$ la diferencial $L = (df)_{x_0}$ es invertible (e.d. L es lineal acototada, biyectiva y con inversa L^{-1} también acotada) entonces existen abiertos U, V con $x_0 \in U, y_0 \in V, f(x_0) = y_0$ tales que f es biyectiva de U a V. Además, en ese caso la inversa $f^{-1} : V \to U$ es diferenciable en y_0 y $(df^{-1})_{y_0} = [(df)_{x_0}]^{-1}$.*

Teorema (de la función inversa de Balodis). *Sea E un espacio de Banach, $U \subset E$ un abierto y $f : U \to E$ con $f \in C^1$. Entonces si en $x_0 \in U$ se tiene que $Df(x_0)$ es invertible entonces f es localmente invertible.*

E. Hernandis, 28 de noviembre de 2018 a las 18:45