MODELIZACIÓN

APUNTES DEL CURSO

2019-2020 IMPARTIDO

POR RAFAEL ORIVE ILLERA

Rafael Sánchez

Revisión del 30 de enero de 2020 a las 02:35.

Índice general

Parte I

Primer parcial

Capítulo 1

Análisis dimensional

El análisis dimensional es una herramienta que nos permite simplificar el estudio de cualquier fenómeno que involucre varias magnitudes físicas para tratarlas como variables independientes. Esto nos ayudará a simplificar los modelos matemáticos de lo que queramos estudiar.

Vamos a comenzar con un ejemplo introductorio a la asignatura, con el que se busca de alguna forma introducir conceptos que si bien no son del todo matemáticos o formales serán de utilidad en el desarrollo del curso.

Ejemplo 1 (*Segunda Ley de Newton - Ley física*)

La segunda ley de Newton se puede escribir como la ecuación diferencial:

$$m\ddot{x}(t) = F(x,t),\ \ t \in [0,T]$$

donde m representa la masa de un objeto, $x(t)$ la posición del mismo respecto del tiempo, $F(x,t)$ la fuerza que se ejerce sobre él y T es el tiempo final.
Para completar el problema daremos un par de condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \text{ la posición inicial} \\ \dot{x}(0) &= v_0 \text{ la velocidad inicial} \end{aligned}$$

*En el análisis dimensional analizaremos que **magnitudes** entran en juego en la **ley**. En este caso tenemos:*

- *m - masa.*
- *x - posición.*
- *F - fuerza.*
- *T - tiempo final.*
- *x_0 - posición inicial.*
- *v_0 - velocidad inicial.*

Por tanto nuestra función final será de la forma:

$$f(m, x, F, T, x_0, v_0) = 0$$

*que es otra forma de expresar la **ley**. Además, querremos ver de qué **magnitudes** dependen estos 6 parámetros. Esto lo expresaremos con la notación:*

$$\big[p\big] = M$$

donde p representa un parámetro y M una magnitud (también puede ser un producto de ellas). En nuestro caso tenemos:

- *$\big[m\big] = M$. Masa, una magnitud elemental.*
- *$\big[x\big] = L$. Longitud, una magnitud elemental.*
- *$\big[T\big] = \tau$. Tiempo, una magnitud elemental.*
- *$\big[x_0\big] = L$. Longitud.*
- *$\big[v_0\big] = L \cdot \tau^{-1}$. Velocidad, longitud × tiempo^{-1}.*
- *$\big[F\big] = \big[m \cdot \ddot{x}\big] = M \cdot L \cdot \tau^{-2}$. Fuerza, masa × longitud × tiempo^{-2}.*

1.1. Magnitudes. Teorema Π.

Vamos a suponer la existencia de $L_1, \ldots, L_n$ magnitudes elementales con $n < \infty \in \mathbb{N}$, es decir, cada L_i es independiente de cada magnitud de $\mathcal{L} \backslash L_i$. Diremos que una colección de magnitudes conforman un sistema.

Definición 1 (Dimensión de una magnitud)**.** Sea $a \in \mathbb{R}$ una medida de una magnitud A en un sistema $L_1, \ldots, L_n$. Si cambiamos a un sistema $L'_1, \ldots, L'_n$ con $L'_i = \lambda_i L_i$ y sea a' la medida de A en el nuevo sistema, entonces si se cumple que:

$$a' = a \cdot \lambda_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot \lambda_n^{a_n}$$

para una serie de escalares $a_1, \ldots, a_n$, entonces diremos que la magnitud A tiene **dimensión** $L_1^{a_1} \cdots L_n^{a_n}$ y lo expresamos por:

$$\left[A\right] = L_1^{a_1} \cdots L_n^{a_n}$$

Cuando el sistema $L_1, \ldots, L_n$ esté fijado podremos identificar la dimensión de la magnitud A con el vector de escalares $(a_1, \ldots, a_n)$.

Recordando el ejemplo de la segunda ley de Newton, donde teníamos tres magnitudes elementales (L, τ, M), si consideramos que nuestro sistema $L_1, \ldots, L_n$ es dicha 3-tupla, entonces podemos expresar las magnitudes no elementales como 3-tuplas (o vectores de $\mathbb{R}^3$):

- $\left[v_0\right] = L \cdot \tau^{-1} = (1, -1, 0)$
- $\left[F\right] = \left[m\ddot{x}\right] = M \cdot L \cdot \tau^{-1} = (1, -2, 1)$

Ejemplo 2 (*Dimensión de una magnitud*)

Sea $L_1 = \{m\}$ y $L_2 = \{s\}$ un sistema de magnitudes (longitud en metros y tiempo en segundos respectivamente), consideramos la magnitud de la velocidad V que tiene dimensión:

$$\left[V\right] = L_1 \cdot L_2^{-1} = (1, -1)$$

entonces, si tenemos una medida $v = 30 ^m/_s$ y queremos ver su medida L' en el sistema:

$$L'_1 = 10^{-3} L_1 \text{ con } L'_1 \text{ longitud en km}$$
$$L'_2 = \frac{1}{3600} L_2 \text{ con } L'_2 \text{ tiempo en h}$$

entonces:

$$v' = v \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2^{-1} = \frac{30 \cdot 3{,}6 \cdot \cancel{10^3}}{\cancel{10^3}} = 108 ^{km}/_h$$

Proposición 1 (Expresión de una magnitud dependiente)**.** Sean A, B dos magnitudes tales que:

$$\left[A\right] = L_1^{a_1} \cdots L_n^{a_n}$$
$$\left[B\right] = L_1^{b_1} \cdots L_n^{b_n}$$

Sea C otra magnitud dependiente de A y B, tal que si a, b son medidas de A, B y C y $\exists p, q, d$ tales que $c = d \cdot a^p + b^q$ con p, q, d independientes de las unidades $L_1, \ldots, L_n$, entonces:

$$\left[C\right] = L_1^{a_1 p + b_1 q} \ldots L_n^{a_n p + b_n q}$$

Demostración. Sean $L'_i = \lambda_i L_i$ un nuevo sistema, entonces:

$$a' = a \cdot \lambda_1^{a_1} \cdots \lambda_n^{a_n}, \quad b' = b \cdot \lambda_1^{b_1} \cdots \lambda_n^{b_n}$$

y por tanto c' es:

$$\begin{aligned} c' &= da'^p + b'^q = d(a\lambda_1^{a_1}\cdots\lambda_n^{a_n})^p + (b\lambda_1^{b_1}\cdots\lambda_n^{b_n}) \\ &= (da^p + b^q)\cdot(\lambda_1^{a_1p+b_1q}\cdots\lambda_n^{a_np+b_nq}) \\ &= c\cdot(\lambda_1^{a_1p+b_1q}\cdots\lambda_n^{a_np+b_nq}) \implies \\ \big[C\big] &= L_1^{a_1p+b_1q}\cdots L_n^{a_np+b_nq} \end{aligned}$$

♢

Definición 2 (Matriz de dimensiones)**.** Dados $q_1,\dots,q_m$ magnitudes, tales que su dimensión es:

$$\big[q_i\big] = L_1^{a_{i1}}\cdots L_n^{a_{in}}$$

llamamos **matriz de dimensiones** a la matriz $(n\times m)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

que tiene n filas (una por cada *magnitud elemental* L_i) y m columnas (una por cada magnitud del problema q_i)

Observación. Los índices de los elementos de la matriz quedan permutados respecto de la notación habitual.

Retomando el ejemplo de la segunda ley de Newton tendríamos la *matriz de dimensiones*:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} x_0 & v_0 & T & F & M & x \end{array} \\ \begin{array}{c} L \\ \tau \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Definición 3 (Magnitud adimensional)**.** Una magnitud Π se dice adimensional si $\big[\Pi\big] = 1$.

Hallar magnitudes adimensionales en los distintos problemas nos ayuda a simplificar el estudio de los mismos. Retomemos el ejemplo de la segunda ley de Newton, vamos a intentar reducir la dimensión del problema.

Ejemplo 3 (*Reduciendo la dimensión del ejemplo 1*)

Recordemos que teníamos 6 parámetros (x, x_0, v_0, T, F, m). Una forma de reducir los parámetros es intentar enmascarar los valores iniciales en nuevas variables.
Recordemos que tanto x como x_0 tenían la misma dimensión. Gracias a ello podemos definir un nuevo parámetro y sin dimensión:

$$y = \frac{x}{x_0}$$

Además, como $x(0) = x_0$ tendremos que $y(0) = 1$ y como $\dot{x}(0) = v_0$ entonces $\dot{y}(0) = \frac{v_0}{x_0}$.
Podemos también hacer lo mismo con el tiempo, recordemos que en la fórmula original la variable t pertencía a $[0,T]$. Podemos definir entonces:

$$\frac{t}{T} = \tau$$

y por tanto $\tau \in [0,1]$, con lo que hemos eliminado T. Sin embargo, cambiar t tiene consecuencias debido que es la variable respecto de la que se diferencia x (y por tanto y), tenemos que ver como afectan estos cambios a nuestras variables.
Usaremos la notación $\dot{x}$ para referirnos a $\frac{\partial x}{\partial t}$ y x' para referirnos a $\frac{\partial x}{\partial \tau}$.

Entonces obtenemos:

$$y' = \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{1}{x_0}\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{T}{x_0}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{T}{x_0}\dot{x} \implies y'(0) = \frac{T}{x_0} \cdot v_0 = \tilde{q}$$

y de nuevo $\left[\tilde{q}\right] = 1$.

Recordemos que nuestro problema comenzaba con $m\ddot{x} = F$, *vamos a usar esto para encontrar otro parámetro adimensional.*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x_0}{T}\frac{\partial y}{\partial \tau} \\
&\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{x_0}{T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right) = \frac{x_0}{T}\frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{x_0}{T} \cdot y'' \\
&\frac{m x_0}{T^2} \cdot y'' = F \implies y'' = \frac{T^2}{m x_0} \cdot F = f
\end{aligned}$$

y podemos comprobar que $\left[f\right] = 1$. *Recapitulado, hemos conseguido encontrar nuevos parámetros adimensionales* y, $\tilde{q} = y'$, $f = y''$ *haciendo algunos cambios en el problema. Con esto, podemos reescribir el problema de valores iniciales con los nuevos parámetros adimensionales:*

$$\begin{aligned}
&y'' = f = \frac{T^2}{m x_0} \cdot F \\
&y(0) = 1 \\
&y'(0) = \tilde{q} = \frac{T v_0}{x_0}
\end{aligned}$$

Definición 4 (Ley invariante)**.** Sea una ley $f(q_1, \ldots, q_m) = 0$, se dice que es **invariante** frente al cambio de unidades $L_1' = \lambda_1 L_1, \ldots L_n' = \lambda_n L_n$ si verifica que $f({q'}_1, \ldots, {q'}_m) = 0$ para ${q'}_1, \ldots, {q'}_m$ las medidas de $q_1, \ldots, q_m$ en las nuevas unidades ${L'}_1, \ldots, {L'}_n$. Informalmente:

Una ley es invariante cuando sigue siendo cierta tras el cambio de variables del problema

Teorema 2 (Teorema Π)**.** Sea $f(q_1, \ldots, q_m) = 0$ una ley invariante con $q_1, \ldots, q_m$ magnitudes con matriz de dimensiones:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

tal que $n < m$ y el rango de D es $r \leqslant n$. Entonces existen $m - r$ cantidades $\Pi_1, \ldots, \Pi_{m-r}$ que van a ser magnitudes adimensionales tales que la ley invariante es equivalente a una relación $F(\Pi_1, \ldots, \Pi_{m-r}) = 0$.

Parte II

Apéndices

Capítulo 2

Índices

Lista de definiciones

Lista de teoremas

Lista de ejemplos

Lista de ejercicios