

# ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

$$\frac{dx}{dt} = a(y - x) \quad \frac{dy}{dt} = x(b - z) - y \quad \frac{dz}{dt} = xy - cz$$

APUNTES DEL CURSO

2018-2019 IMPARTIDO

POR ANTONIO SÁNCHEZ

Rafael Sánchez  
*& alii*

Revisión del 14 de mayo de 2019 a las 22:24.

# Índice general

<b>0. Notación</b>	<b>5</b>
<b>I Primer parcial</b>	<b>7</b>
<b>1. Introducción a las ecuaciones diferenciales</b>	<b>9</b>
1.1. Idea intuitiva . . . . .	9
1.2. Método de separación de variables . . . . .	11
1.3. Significado geométrico de la ecuación diferencial ordinaria . . . . .	12
1.4. Ecuaciones diferenciales y problemas geométricos . . . . .	13
1.4.1. Trayectorias ortogonales . . . . .	13
1.4.2. Trayectorias ortogonales en coordenadas polares . . . . .	15
<b>2. Integración elemental</b>	<b>17</b>
2.1. Ecuaciones homogéneas de grado 0 . . . . .	17
2.2. Ecuaciones lineales de orden I . . . . .	19
2.3. Teoremas de existencia y unicidad . . . . .	21
2.3.1. Regularidad de soluciones . . . . .	24
2.4. Ecuaciones exactas . . . . .	24
2.5. Factores integrantes . . . . .	26
2.6. Ecuaciones reducibles de orden II . . . . .	28
<b>3. Ecuaciones de orden superior</b>	<b>31</b>
3.1. Ecuaciones lineales de orden II . . . . .	31
3.1.1. Ecuaciones lineales de orden 2 con coeficientes constantes. . . . .	33
3.1.2. Ecuaciones lineales de orden 2 con coeficientes no constantes. . . . .	35
<b>II Segundo parcial</b>	<b>41</b>
<b>4. Sistemas lineales de orden I</b>	<b>43</b>
4.1. Introducción a sistemas . . . . .	43
4.2. Unicidad, existencia y estructura de soluciones. . . . .	44
4.3. Sistema lineal con coeficientes constantes. . . . .	46
4.4. Exponencial de una matriz . . . . .	47
4.4.1. $e^{\mathbb{A}t}$ y la forma de Jordan . . . . .	49
4.5. Matriz fundamental . . . . .	51
<b>5. Teorema general de existencia y unicidad</b>	<b>57</b>
5.1. Espacio vectorial de funciones. . . . .	57
5.2. Series de funciones . . . . .	61
5.3. Teorema de existencia y unicidad . . . . .	63
5.3.1. Teorema de existencia y unicidad global . . . . .	64
5.4. Teorema de existencia y unicidad local . . . . .	68
5.4.1. Prolongabilidad de soluciones . . . . .	69
5.5. Dependencia de parámetros. . . . .	70
5.5.1. Algunas consecuencias de la diferencia acotada de soluciones. . . . .	72

5.5.2. Diferenciabilidad con respecto a parámetros y datos iniciales . . . . .	75
<b>III Tercer parcial</b>	<b>77</b>
<b>6. Sistemas autónomos</b>	<b>79</b>
6.1. Sistemas autónomos en el plano. . . . .	80
6.1.1. Sistemas conservativos en dimensión mayor que 1 . . . . .	84
6.2. Linealización y clasificación de puntos críticos . . . . .	85
6.2.1. Clasificación de puntos críticos . . . . .	86
6.3. Estabilidad de puntos críticos . . . . .	96
6.3.1. Interpretación geométrica . . . . .	98
6.4. Trayectorias cerradas . . . . .	101
<b>IV Apéndices</b>	<b>105</b>
<b>7. Índices</b>	<b>107</b>

# Capítulo 0

## Notación

- $\mathcal{P} \equiv f(x) = g(x)$ ,  $\mathcal{P}$  es una ecuación.
- $\mathbf{y} = f(x)$ ,  $\mathbf{y}$  es una variable dependiente.
- $\frac{dy}{dx} = y' = y_x$  es la derivada de  $y$  respecto de  $x$ .
- $X, Y, Z, A, B, \dots$  son vectores en  $\mathbb{R}^n$  o funciones :  $(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$  son matrices (típicamente cuadradas  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ) o funciones :  $(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .
- Sea el sistema:

$$\begin{cases} x' = 2tx - e^t y + \sin(t) \\ y' = x - \cos(t)y \end{cases}$$

lo escribimos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2t & -e^t \\ 1 & -\cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

o de la misma forma:

$$X' = \mathbb{A}(t)X + B(t)$$

- La matriz diagonal:

$$\text{diag}(a_1, a_2, a_3, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

- La matriz formada por los vectores columna  $X_1, \dots, X_n$ :

$$\begin{bmatrix} \overset{\uparrow}{X_1(t_0)} & \cdots & \overset{\uparrow}{X_n(t_0)} \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

- $f_n \xrightarrow{pp} f$ ,  $f_n$  converge puntualmente (o punto a punto) a  $f$ .
- $f_n \xrightarrow{unif} f$ ,  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ .



# **Parte I**

## **Primer parcial**



# Capítulo 1

## Introducción a las ecuaciones diferenciales

### 1.1. Idea intuitiva

**Definición 1** (Ecuación diferencial de primer orden). Sea  $\mathbf{y} = f(x)$ , una **ecuación diferencial de primer orden** es una ecuación de la forma:  $\mathbf{y}' = F(x, \mathbf{y})$ .

Sea  $g(x)$  una función de  $x$ , diremos que es solución cuando la ecuación diferencial se cumpla para  $\mathbf{y} = g(x)$ .

Veamos unos ejemplos típicos.

#### Ejemplo 1 (*Resolución no formal de una ecuación ordinaria de primer orden*)

Consideramos  $\mathcal{P} \equiv x'(t) = 2x(t)$  (o alternativamente  $\mathbf{x}' = 2\mathbf{x}$ )

Vemos que es una ecuación diferencial de primer orden ya que sigue la definición anterior. Es sencillo ver que  $F(t, \mathbf{x}) = 2\mathbf{x} = 2x(t)$ . Queremos hallar qué funciones resuelven  $P$

Además, observamos que si  $x(t) = e^{2t}$ , entonces  $x'(t) = 2e^{2t} = 2x(t)$  y por tanto  $x(t) = e^{2t}$  es una solución de  $P$ .

Si pensamos con más cuidado también observamos que  $x(t) = 7e^{2t}$  también satisface  $P$ .

Nos interesaría entonces hallar una **solución general**, que con una sola ecuación englobe todas las soluciones. Aunque de momento no podemos justificarlo, si tomamos  $x(t) = ae^{2t} \mid a \in \mathbb{R}$  entonces se cumple que  $x'(t) = 2ae^{2t} = 2x(t)$  y por tanto es la solución general de  $P$ .

Del ejemplo anterior surgen problemas llamados *problema de valor inicial*, donde hallando la solución general y sabiendo la imagen de un punto  $t_0$  por medio de  $x(t)$  podemos determinar el parámetro y encontrar una solución explícitamente. Como continuación al ejemplo anterior consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ x(0) = 8 \end{cases}$$

Para resolverlo, hallamos la solución general  $x(t) = ae^{2t}$  y sustituimos la segunda ecuación.  $x(0) = ae^0 = 8 \implies a = 8$ .

#### Ejemplo 2 (*No unicidad en soluciones informalmente*)

Consideramos  $\mathcal{P} \equiv x'(t) = 3(x(t))^{2/3}$ , queremos hallar la solución para  $x(0) = 0$ .

Empezamos hallando soluciones a la ecuación, en este caso  $x(t) = t^3$  y  $x(t) = 0$  resuelven la ecuación. Nuestro sistema sería:

$$\begin{cases} x'(t) = 3(x(t))^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Sin embargo, tanto  $x(t) = t^3 \mid t = 0$  como  $x(t) = 0$  resuelven  $P$ . No podemos hablar de la solución puesto que hay dos.

En los dos ejemplos anteriores tenemos una ecuación diferencial de la forma  $\dot{x} = F(t, x)$ ,  $f(x) = 2x$  y  $f(x) = 3x^{2/3}$  respectivamente. Sin embargo, en la segunda tenemos dos soluciones para  $x(0) = 0$ . Al observar las gráficas de las dos funciones se ve la razón a simple vista, la segunda no es derivable en 0.



### Ejemplo 3 (Crecimiento de una población)

Consideramos  $P \equiv \dot{x} = \lambda x$ . ( $\lambda$  típicamente es natalidad o mortalidad).

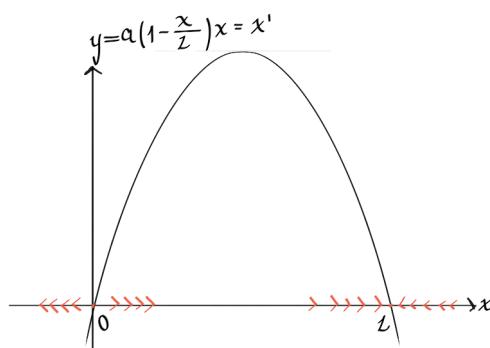
Sabiendo que modela el crecimiento de una población en función del tiempo, podemos aproximar (veremos por qué más adelante)  $\frac{\Delta x}{\Delta t} \sim \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ . Por tanto (como  $\lambda$  es una tasa, se entiende que el tiempo tiende a 0 para hallarla):

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \sim \frac{dx}{dt} = \lambda \cdot x \implies \lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x'}{x}$$

El crecimiento de una población de organismos lo suficientemente grandes no se ve representada por la ecuación anterior debido a la limitación de recursos. Interesaría por tanto modelizar la ecuación teniendo esto en cuenta. Para ello utilizaremos el parámetro  $L$  como el límite al que tendería la población con los recursos existentes.

### Ejemplo 4 (Crecimiento de una población con limitación de recursos)

Consideramos  $P \equiv \dot{x} = a(1 - \frac{x}{L})x$  con  $a > 0$ . De esta forma cuando  $x \ll L$  o  $x \gg L$ , tenemos prácticamente la ecuación del ejemplo anterior. Si  $x \sim L$  entonces la población apenas crece/decrece. Para encontrar soluciones a esta ecuación no hace falta resoverla, basta graficarla. Partimos de  $\dot{x} = f(t, x) = a(1 - \frac{x}{L})x$ .



Es fácil ver que  $\dot{x}$  es una parábola, que corta al eje X en 0 y L. Además, se indica con (») la dirección en la que se mueve  $x(t)$  conforme avanza t. Tanto 0 como L son puntos de equilibrio, repulsor (inestable) y atractor (estable) respectivamente.

Habiendo encontrado las soluciones de la función anterior, nos preguntamos cómo varía la población frente al tiempo. Más adelante veremos formalmente como representar  $x$  frente a  $t$ . Sin embargo, podemos razonar el aspecto de la función. Sabemos que tiene que corregirse cerca de  $L$ , y que si  $x << L$  entonces tiene un crecimiento parecido al exponencial. Por tanto, podría tener el aspecto de la figura 1.1. De este gráfico podemos deducir varias cosas. Para empezar, sabemos que  $x''(t_0) = 0$  tiene solución para la curva  $c_2$  ya que tiene un punto de inflexión. Además, observamos distintos tipos de crecimiento en función del valor de  $x(0)$  por lo que tendría sentido intentar determinar para qué valores  $x_0$  obtenemos el crecimiento de  $c_1$  y para cuáles el de  $c_2$ .

**Ejercicio propuesto 1.** ¿Para qué valores de  $x_0$  se dan los diferentes crecimientos de  $c_1$  y  $c_2$ ?.

*Sugerencia:* Considerar el problema de valor inicial con  $x''(t_0) = 0$ .

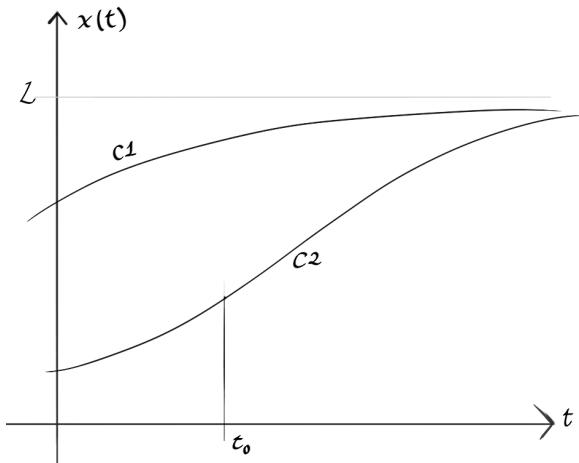


Figura 1.1: Población - Tiempo

## 1.2. Método de separación de variables

Esta sección trata sobre el primer método de resolución de ecuaciones diferenciales. Antes de definir el método formalmente vamos a ver un ejemplo.

### Ejemplo 5 (*Resolución sencilla*)

Sea  $\mathcal{P} \equiv y' = xy$ . Halla las soluciones de la ecuación.

$y' = \frac{dy}{dx}$ , con esta igualdad podemos hacer manipulaciones sin justificar (de momento).

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = xy &\implies \frac{dy}{y} = xdx \implies \int \frac{dy}{y} = \int xdx \implies \log|y| = \frac{x^2}{2} + C \implies |y| = e^{x^2/2+C} = e^C \cdot e^{x^2/2} \\ y &= \pm e^C \cdot e^{x^2/2} = ke^{x^2/2} \mid k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Esta resolución se conoce como método de separación de variables.

**Ejercicio propuesto 2.** Resolver  $\mathcal{P} \equiv x' = a(1 - x/L)x$  con  $x(0) = 0$ .

Vamos a generalizar el método por medio de la siguiente proposición.

**Proposición 1** (Método de separación de variables). Sea  $F(x)$  una primitiva de  $f(x)$  y  $G(y)$  una primitiva de  $g(y)$ , es decir,  $\frac{dF}{dx} = f(x)$  y  $\frac{dG}{dy} = g(y)$ , con  $y = f(x)$ . Y sea una ecuación  $\mathcal{P} \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ , entonces las soluciones de  $\mathcal{P}$  cumplen:

$$G(y(x)) = F(x) + C \mid C \text{ constante.}$$

*Demostración.*

Por la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = \frac{dG}{dy}(y(x)) \cdot \frac{dy}{dx}(x)$$

Como  $\frac{dG}{dy} = g(y)$  y  $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$  por hipótesis:

$$\frac{dG}{dy}(y(x)) \cdot \frac{dy}{dx}(x) = g(y(x)) \cdot \frac{f(x)}{g(y(x))} = f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

Es decir:

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = \frac{d}{dx}F(x) \implies \frac{d}{dx}G(y(x)) - \frac{d}{dx}F(x) = 0 \implies G(y(x)) - F(x) = C \implies G(y(x)) = F(x) + C$$

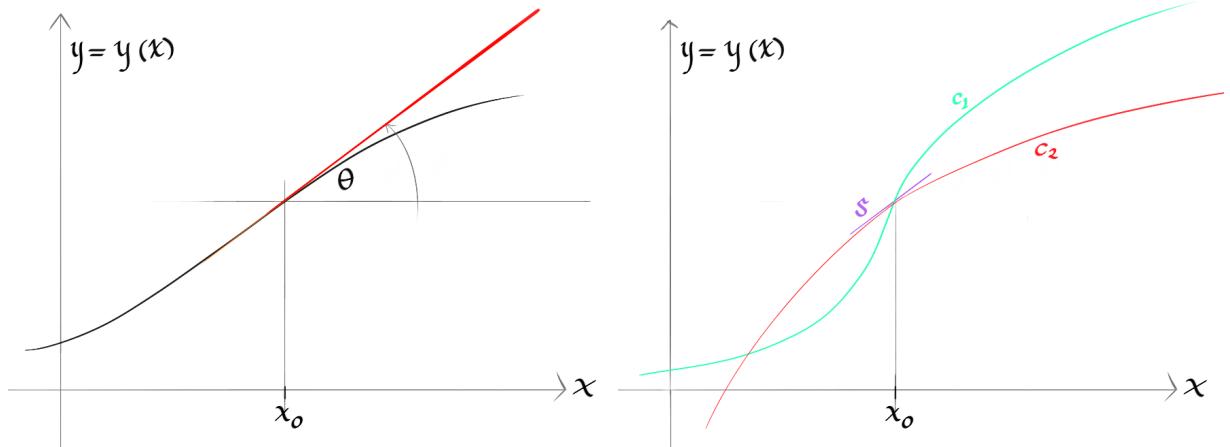
◇

**Observación.** La proposición anterior está incompleta, faltaría ver que condiciones tienen que cumplir  $f(x)$  y  $g(y)$ . Para completarla tenemos que considerar la existencia de primitivas y la condición de que  $C$  sea constante.

- Ya que tenemos que usar que  $F(x)$  y  $G(y)$  son primitivas, basta pedir que tanto  $f(x)$  y  $g(y)$  sean continuas. Esto garantiza que  $F(x)$  y  $G(y)$  son ambas  $C^1$
- Si  $h'(x) = 0 \implies h(x)$  constante en cada intervalo en que está definida (pues  $\mathbb{R}$  es conexo). Si  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  entonces  $h(x)$  es constante. Como  $C$  surge de integrar 0 a la derecha de la ecuación, podemos afirmar que  $C = h(x)$  y por tanto constante.

### 1.3. Significado geométrico de la ecuación diferencial ordinaria

Vamos a analizar una ecuación diferencial de forma gráfica para interpretarla geométricamente. Consideramos  $y' = f(x, (y))$ . Supongamos que  $y$  tiene la gráfica de la figura 1.2a. Entonces,  $y'(x_0) = \tan \theta$ , que



(a) Recta tangente en  $x_0$  conocidas  $y$  y  $x_0$

(b) Curvas dadas el segmento  $S$ .

es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $y$  en  $x_0$ . Esto es cálculo elemental, lo que nos interesa es saber algo de la función  $y$  cuando sabemos algo de  $y'$ .

Ilustramos en la figura 1.2b entonces la casuística de conocer  $\mathcal{P} \equiv y' = f(x, y)$ . En este caso, nos preguntamos qué aspecto podría tener  $y$  para que fuera solución de  $\mathcal{P}$ . Como conocemos  $y'(x_0)$ , podemos considerar que  $S$  es un segmento paralelo a la recta tangente de la gráfica en  $x_0$ . Es fácil ver que  $c_1$  no puede ser solución de  $\mathcal{P}$  pues  $c'_1(x_0) \neq y'(x_0)$ . Sin embargo, es evidente que  $c_2$  sí resuelve  $\mathcal{P}$ .

Si repetimos el procedimiento de determinar cómo son las pendientes (como acabamos de hacer para  $x_0$ ) para todos los puntos, hallamos el *campo de pendientes*.

#### Ejemplo 6 (*Hallar un campo de pendientes*)

Sea  $\mathcal{P} \equiv x' = t^2 + x^2$ , es decir,  $f(t, x) = t^2 + x^2$ . Si queremos hallar qué pendiente se le asigna al punto  $p = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  evaluamos la función  $f$ ,  $f(p) = 1$ . Por tanto, la función  $x$  que soluciona  $\mathcal{P}$  tiene tangente

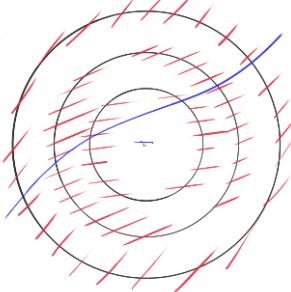
con pendiente 1 en  $t = 1/\sqrt{2}$ .

De hecho, es lógico pensar que a cualquier punto que cumpla  $t^2 + x^2 = 1$  se le asignará una pendiente de 1 a su recta tangente. Este conjunto de puntos conforman la **isoclinia** de pendiente 1.

De forma general, para una constante  $c$  dada (en este ejemplo necesariamente no negativa pues  $f(t, x)$  es suma de cuadrados), podemos definir la isoclinia de pendiente  $c$ :

$$ISO_c = \{(t, x) \mid f(t, x) = c\}$$

Volviendo a nuestro ejemplo, las isoclinias van a ser curvas que cumplan  $t^2 + x^2 = c$  para un  $c$  dado.



Hemos representado las isoclinias junto con un pequeño segmento de pendiente  $c$  para distintos valores de  $c$ . Como las isoclinias cumplen que  $t^2 + x^2 = c$ , estas son las circunferencias de radio  $\sqrt{c}$  con  $c > 0$ . Podemos observar también que  $ISO_0 = \{(0, 0)\}$  e  $ISO_{c<0} = \emptyset$ . Sin

Llamamos a la gráfica con pequeños segmentos campo de pendientes y por tanto, una función que resuelva  $\mathcal{P}$  tiene que ser tangente al segmento del punto por el que pase.

embargo, los campos de pendientes permiten ver cómo es la función a grandes rasgos. En nuestro ejemplo parece indicar que  $x(t) \uparrow \infty$ , pero no sabemos si lo hace de forma asintótica ( $x(t) \uparrow \infty$  en  $t$  finito), o  $x(t)$  crece a infinito cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Esto no puede resolverse gráficamente y veremos como resolverlo de forma analítica más adelante.

## 1.4. Ecuaciones diferenciales y problemas geométricos

Gracias a la relación de la derivada con la tangencia de funciones, podemos plantear problemas geométricos en forma de ecuación diferencial.

### 1.4.1. Trayectorias ortogonales

De la recta tangente a un punto surge el concepto de recta normal a ese punto, que no es más que la recta perpendicular a la tangente y que pasa por dicho punto. Para ver cómo se relacionan estas dos rectas vamos a hacer un análisis simple. Diremos que dos curvas son ortogonales si en el punto de cruce las rectas tangentes a cada curva son perpendiculares entre sí.

De la figura 1.3 vemos que la pendiente de  $C$  es  $pend_C = \tan(\theta)$ . Asimismo,  $pend_{C^\perp} = \tan(\omega)$  y  $\omega = \theta - \pi/2$ . A partir de aquí desarrollamos:

$$\tan(\omega) = \frac{\sin(\theta - \pi/2)}{\cos(\theta - \pi/2)} = \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -\frac{1}{\tan(\theta)}$$

y por tanto,

$$pend_C \cdot pend_{C^\perp} = -1 \quad (1.1)$$

Nuestro objetivo es que dada una familia de curvas  $fam_C$ , podamos encontrar una (familia de) curva que sea ortogonal a todas las de la familia en los puntos de cruce.

Supongamos que la familia original satisface una ecuación diferencial ordinaria  $y'_1 = f(x, y_1)$ . Queremos encontrar otra ecuación que defina a la ortogonal.

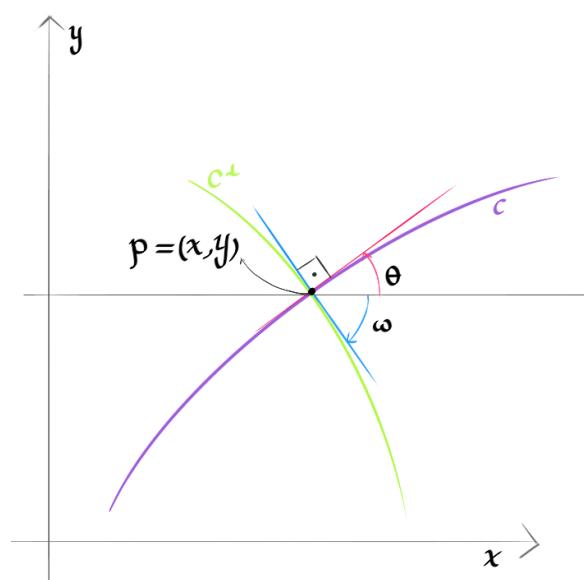


Figura 1.3: Relaciones entre curvas ortogonales

Como  $fam_C$  sigue una EDO (*ecuación diferencial ordinaria*), podemos afirmar que  $pend_C = \mathbf{y}'_1 = f(x, \mathbf{y}_1)$ . Usando 1.1,  $pend_{C^\perp} = \frac{-1}{f(x, \mathbf{y}_1)}$ . Pero además, si  $C^\perp$  sigue una EDO, está dada por una función  $\mathbf{y}_2 = y_2(x)$  y entonces  $\mathbf{y}'_2 = \frac{-1}{f(x, \mathbf{y}_1)}$ .

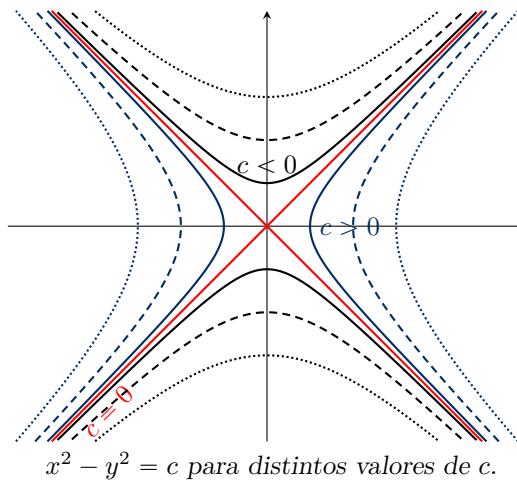
Concluimos con que dada  $fam_C$  descrita por  $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$ , podemos encontrar  $fam_{C^\perp}$  que satisface:

$$\mathbf{y}' = -\frac{1}{f(x, \mathbf{y})}$$

### Ejemplo 7 (Familia ortogonal a otra dada)

Consideramos la familia:  $x^2 - y^2 = c \mid c \neq 0$

Para cada  $c$ , eso define  $\mathbf{y}$  implícitamente en función de  $x$ .



$$x^2 - y^2 = c \text{ para distintos valores de } c.$$

(También puede verse como las curvas de nivel del paraboloide hiperbólico)

Para hallar la familia de curvas ortogonales vamos a seguir una serie de pasos:

1. Encontrar una EDO que cumplan esas curvas.

$$x^2 - y^2 = c \rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 - y^2 = c) \rightarrow 2x - 2y\mathbf{y}' = 0 \implies \mathbf{y}' = \frac{x}{y} = f(x, \mathbf{y})$$

2. Encontrar la EDO para trayectorias ortogonales.

$$\mathbf{y}' = -\frac{1}{f(x, \mathbf{y})} = -\frac{\mathbf{y}}{x}$$

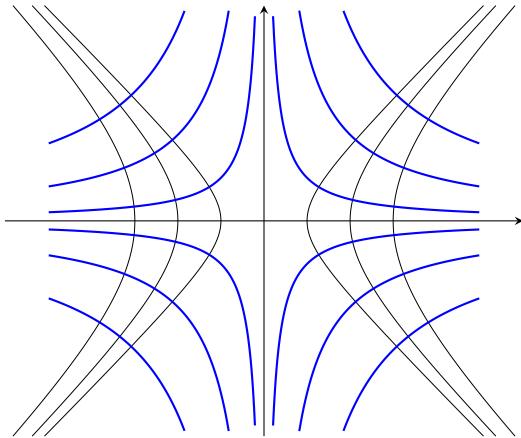
3. Resolver la ecuación anterior

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mathbf{y}}{x} \implies -\frac{dy}{\mathbf{y}} = \frac{dx}{x} \implies \log|\mathbf{y}| = \log|x| + C$$

es decir,

$$|\mathbf{y}| = \frac{e^C}{|x|} \implies |x\mathbf{y}| = e^C \implies x\mathbf{y} = k : k = e^C \vee k = e^{-C} \implies \mathbf{y} = \frac{k}{x}$$

Con la solución general podemos representar parte de la familia:



En azul posibles soluciones para distintos valores de  $k$ , en negro la familia original  
 Se observa que son curvas ortogonales a la familia original.

#### 1.4.2. Trayectorias ortogonales en coordenadas polares

Veamos que al igual que encontramos una expresión para la trayectorias ortogonales en coordenadas rectangulares, también lo podemos hacer en coordenadas polares. En este caso partimos de una familia de curvas  $fam_C$  descrita por la solución de una EDO  $\mathbf{r}' = h(\mathbf{r}, \vartheta)$ . ¿Cuál es la familia orthogonal  $fam_{C^\perp}$ ?

Para ello tenemos que empezar analizando la expresión de la tangente como ecuación.

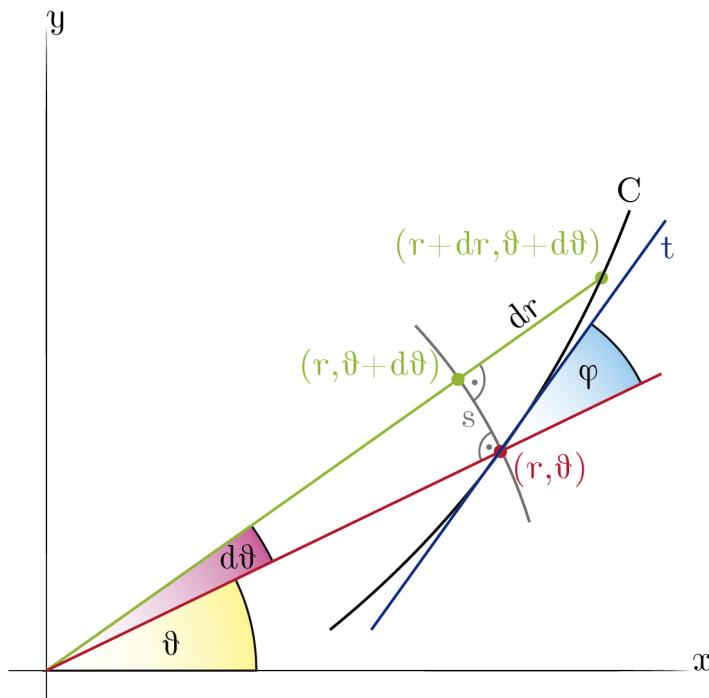


Figura 1.4: Análisis de  $dr$  y  $d\vartheta$

podemos aproximararlo con un segmento que va a ser perpendicular a las rectas  $\overleftrightarrow{0p}$  y  $\overleftrightarrow{0q}$ . Esto hará que  $\overleftrightarrow{0p}$  y  $\overleftrightarrow{0q}$  sean aproximadamente paralelas, pues comparten un mismo segmento perpendicular a ellas. Además, podemos aproximar el arco de  $C$  que une  $p$  y  $q$  con un segmento de  $t$ . Esto se ilustra en la figura 1.5.

En la figura 1.4 hemos trazado una curva arbitraria  $C$ . Queremos hallar una ecuación diferencial que describa a la tangente en cierto punto  $p = (r, \vartheta)$ . Para ello, hallamos un nuevo punto  $q = (r + dr, \vartheta + d\vartheta) \in C$ . Se indica además la circunferencia  $s$  de radio  $r$  con centro en  $0$ , y la recta tangente  $t$  al punto original  $p$ .

Observamos que  $s$  es perpendicular a las rectas que unen el origen con  $p$  y  $q$  ( $\vec{0p}$  y  $\vec{0q}$  respectivamente), ya que son trazadas desde el radio de la misma. Además, la intersección de  $\vec{0q}$  con  $s$  nos marca el punto  $q' = (r, \vartheta + d\vartheta)$ . Finalmente, denominamos  $\varphi$  al ángulo del que queremos hallar la tangente.

El gráfico de la figura 1.4 está distorsionado. Tanto  $dr$  como  $d\vartheta$  son infinitesimales, es decir, extremadamente pequeños. Debido a ello podemos hacer distintas asunciones.

Para comenzar, el arco de circunferencia que une  $p$  y  $q'$  tiene longitud  $rd\vartheta$  y

Como puede apreciarse en 1.5, el área sombreada se corresponde con un triángulo rectángulo en la aproximación, y de hecho tenemos descritos los catetos, lo que nos permite hallar  $\tan \varphi'$ . Sin embargo, como hemos visto en la aproximación, ambas rectas perpendiculares a  $ts$  son paralelas entre sí. Es fácil ver entonces que  $\varphi = \varphi'$  y al describir  $\tan \varphi'$  hemos descrito  $\tan \varphi$ .

Por tanto, podemos concluir que:

$$\tan \varphi = \frac{rd\vartheta}{dr} = r \frac{1}{\frac{dr}{d\vartheta}} = \frac{r}{r'}$$

Una vez hemos descrito la forma que tiene la tangente a una curva  $C$  arbitraria en forma de ecuación diferencial  $r' = h(r, \vartheta)$ , podemos hallar  $fam_{C^\perp}$  que buscábamos al comienzo de la sección. Para ello, vamos a considerar de nuevo una curva arbitraria  $C$  y su perpendicular  $C^\perp$ . Nos interesa especialmente la relación que existe entre los ángulos de las rectas tangentes de cada curva.

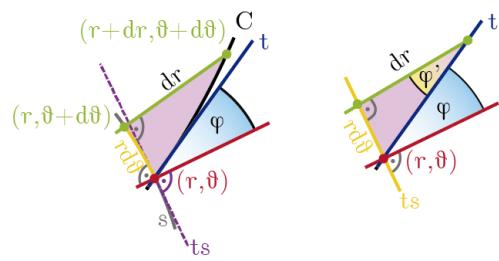


Figura 1.5: Aproximación por infinitesimales

En la figura 1.6 se ilustra la relación que buscamos. Supongamos que las dos curvas se cortan en un punto  $p = (r, \vartheta)$  y consideramos la recta  $0\vec{p}$ . Al igual que en la figura 1.4, definimos  $\varphi_C$  como el ángulo existente entre  $0\vec{p}$  y la curva  $C$ . Siguiendo el mismo procedimiento podemos definir  $\varphi_{C^\perp}$ .

Como por definición  $C \perp C^\perp$ , entonces el ángulo existente entre ellas es  $\pi/2$ , por tanto:  $\varphi_{C^\perp} = \pi/2 + \varphi_C$ .

Del caso en coordenadas rectangulares recordamos la ecuación:

$$\tan(\varphi_{C^\perp}) = -\frac{1}{\tan(\varphi_C)}$$

donde a la derecha de la ecuación figura todo lo relacionado con la curva original y a la izquierda lo relacionado con la curva tangente. Como hallamos antes que  $\tan \alpha = r/r'$  para un ángulo  $\alpha$  que describa a la recta tangente, de la misma forma  $\tan(\varphi_{C^\perp}) = r/r'$  describe a su recta tangente, que es ortogonal a la curva  $C$  original.

Usando esto, la definición  $r' = h(r, \vartheta)$  del comienzo de la sección y la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{r}{r'} = -\frac{1}{r/r'} = -\frac{1}{r/h(r, \vartheta)} \implies \frac{r}{r'} = -\frac{h(r, \vartheta)}{r}$$

Finalmente, de la expresión anterior hallamos la ecuación diferencial general para describir a  $fam_{C^\perp}$  a partir de la función  $h(r, \vartheta)$  que describe a  $fam_C$ :

$$r' = -\frac{r^2}{h(r, \vartheta)}$$

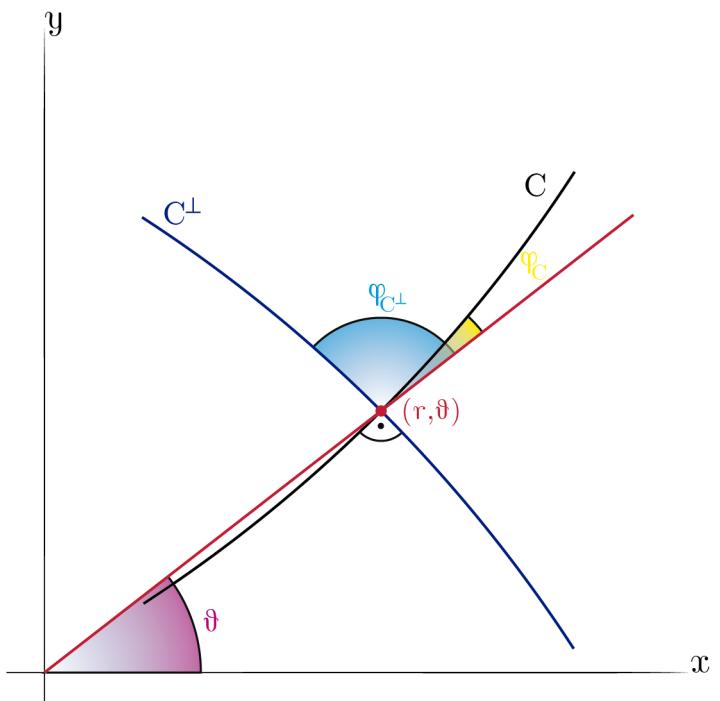


Figura 1.6: Ángulos entre curvas ortogonales

## Capítulo 2

# Integración elemental

### 2.1. Ecuaciones homogéneas de grado 0

En esta sección daremos un breve método para resolver ecuaciones homogéneas de grado 0.

**Definición 2** (Ecuación homogénea de grado k). Sea  $f : \mathbb{K}x\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , decimos que es **homogénea de grado k**  $\iff f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^k \cdot f(x_1, x_2)$

Nos interesarán especialmente las de grado  $k = 0$ , es decir, aquellas en que  $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = f(x_1, x_2)$ .

Supongamos que tenemos la EDO  $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$ , tenemos que  $f(x, \mathbf{y}) = f(x, \mathbf{y} \cdot x/x)$ . Si  $f$  es homogénea de grado 0, y tomamos  $\lambda = x$  entonces,  $f(x, \mathbf{y} \cdot x/x) = f(\lambda, y \cdot \lambda/x) = \lambda^0 f(1, y/x)$ , es decir:

$$\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y}) = f\left(1, \frac{\mathbf{y}}{x}\right)$$

Haciendo el cambio  $\mathbf{z} = \mathbf{y}/x$  y desarrollando  $\mathbf{z}'$  tenemos:

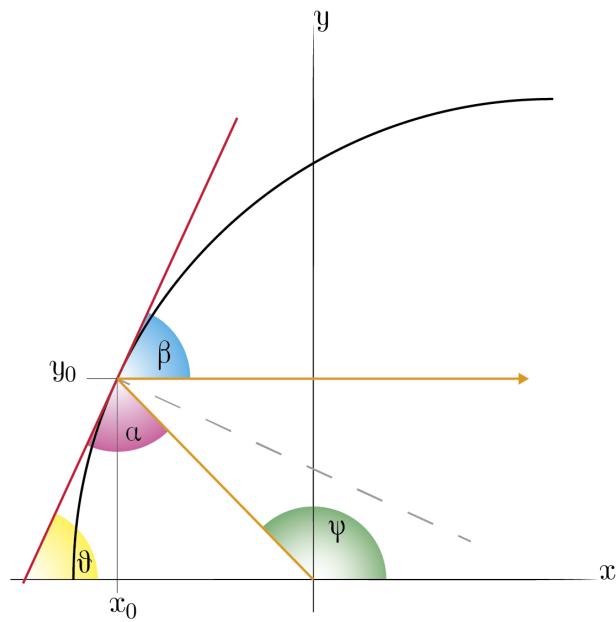
$$\mathbf{z}' = \frac{\mathbf{y}'}{x} - \frac{\mathbf{y}}{x^2} = \frac{f\left(1, \frac{\mathbf{y}}{x}\right)}{x} - \frac{1}{x} \frac{\mathbf{y}}{x} = \frac{f(1, \mathbf{z}) - \mathbf{z}}{x}$$

que es una EDO de variables separables.

Veamos un ejemplo con resolución por este método:

**Ejemplo 8 (Espejo parabólico)**

Queremos construir un espejo para los faros de un automóvil. Buscamos que si la luz proviene del origen (la bombilla), ésta salga reflejada paralela al suelo. Vamos a hallar qué forma tiene que tener una sección del espejo (que tiene simetría radial) que cumple nuestro objetivo. Vamos a exemplificar con la ayuda del diagrama siguiente.



En la figura hemos marcado 4 ángulos:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  y  $\psi$ .

Si nos fijamos con más detenimiento, como la trayectoria del rayo es paralela al eje  $X$  los ángulos que forman ambas con la recta tangente en un punto arbitrario del espejo son idénticos, por lo que  $\beta = \theta$ .

Además, debido a que en la reflexión de un haz de luz el ángulo de reflexión coincide con el de incidencia tenemos que  $\alpha = \beta$ .

Es fácil ver que el ángulo suplementario a  $\psi$  ( $\pi - \psi$  rad) forma parte de los ángulos internos de un triángulo, junto con  $\alpha$  y  $\theta$ . Por ello, podemos expresar la igualdad  $\alpha + \theta + (\pi - \psi) = \pi$  rad  $\implies \psi = \alpha + \theta = 2\theta$ .

Como ya viene siendo conocido,  $\tan(\theta) = \mathbf{y}'$ . Y si nos fijamos en la figura, para cualquier punto  $(x, \mathbf{y})$  del espejo  $\tan(\psi) = \mathbf{y}/x$ . Por tanto:

$$\frac{\mathbf{y}}{x} = \tan(\psi) = \tan(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)} = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} = \frac{2\mathbf{y}'}{1 - \mathbf{y}'^2}$$

es decir,

$$(1 - \mathbf{y}'^2) \cdot \mathbf{y} = 2\mathbf{y}' \cdot x \implies \mathbf{y}' = \frac{-x \pm (x^2 + \mathbf{y}^2)^{1/2}}{\mathbf{y}}$$

de las dos opciones que tenemos, tenemos que ver cuál es válida. Como la pendiente de la recta tangente es positiva, nuestra ecuación diferencial sólo puede ser:

$$\mathbf{y}' = \frac{-x + \sqrt{(x^2 + \mathbf{y}^2)}}{\mathbf{y}}$$

Salta a la vista que no podemos resolverla por el método de separación de variables. Por ello, vamos a considerar un cambio de variables para convertirla en una ecuación de variables separables.

Sea  $z(x) = y(x)/x$ , hallamos la expresión de  $\mathbf{z}'$ :

$$\mathbf{z}' = \frac{\mathbf{y}'}{x} - \frac{\mathbf{y}}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot (\mathbf{y}' - \mathbf{z}) = \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{-x + \sqrt{(x^2 + \mathbf{y}^2)}}{\mathbf{y}} - \mathbf{z} \right) = \frac{1}{x} \cdot \left( -\frac{x}{\mathbf{y}} + \sqrt{\left(\frac{x}{\mathbf{y}}\right)^2 + 1} - \mathbf{z} \right)$$

y si del último paso hacemos el cambio  $1/\mathbf{z} = x/\mathbf{y}$  obtenemos:

$$\mathbf{z}' = \frac{1}{x} \cdot \left( -\frac{1}{\mathbf{z}} + \sqrt{\frac{1}{\mathbf{z}^2} + 1} - \mathbf{z} \right)$$

que es de variables separables.

La solución a esta EDO es:  $1 - \sqrt{1 + \mathbf{z}^2} = \frac{c}{x}$  y como  $\mathbf{z} = \mathbf{y}/x$  obtenemos la ecuación que describe la altura de nuestro espejo en función de  $x$  y una constante  $c$ , a falta de algún dato extra para resolver un PVI.

$$y(x) = \sqrt{c^2 + 2cx}$$

## 2.2. Ecuaciones lineales de orden I

Vamos a ver un nuevo tipo de ecuaciones que no se pueden resolver por los métodos anteriormente descritos, sin embargo, vamos a comenzar ejemplificando el tipo de ecuación para enunciar una proposición más adelante.

### Ejemplo 9 (Ecuaciones lineales de orden I - Intuición)

Sea  $(\mathcal{E}\mathcal{C}) \equiv \mathbf{x}' = \mathbf{x} + t$ , vamos a intentar resolverla, es decir, queremos encontrar una expresión para  $\mathbf{x}(t)$ .

1. Vamos a considerar primero la ecuación sin el término que únicamente depende de  $t$ :  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ . En este caso es sencillo ver que  $e^t$  es solución.
2. Consideramos ahora  $y(t) = e^{-t}x(t)$ , donde  $x(t)$  es solución de  $(\mathcal{E}\mathcal{C})$  (como observación,  $e^{-t}$  es la inversa de la solución encontrada en (1)). Derivando se obtiene que:

$$y'(t) = -e^{-t} \cdot \mathbf{x} + e^{-t} \cdot \mathbf{x}' = e^{-t} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = t \cdot e^{-t}$$

Solo queda integrar y despejar  $x(t)$  de  $y(t) = \int y'(t) dt$ :

$$y(t) = \int y'(t) dt = \int t \cdot e^{-t} dt = -te^{-t} - e^{-t} + C, \quad C \text{ constante}$$

es decir,

$$e^{-t} \cdot x(t) = -te^{-t} - e^{-t} + C \implies x(t) = Ce^t - 1 - t$$

*Con lo que hemos hallado la solución general a nuestra ecuación.*

**Observación.** Veamos ciertos aspectos de lo que hemos hallado.

1.  $(-1 - t)$  es una solución particular de  $(\mathcal{EC})$  (cuando  $C = 0$ ).
2.  $e^t$  es solución de la *ecuación homogénea*  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ .
3. Esa ecuación homogénea es lineal, es decir, la suma de ecuaciones es solución, y por tanto la multiplicación por un escalar también lo es.

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} \\ \mathbf{y}' = \mathbf{y} \end{cases} \implies (\mathbf{x} + \mathbf{y})' = \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

y además, si  $x(t)$  es solución,  $\lambda x(t)$  también lo es.

4. Todas las solución de  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$  (la homogénea) son  $x(t) = Ce^t$ .
5.  $x(t) = Ce^t - 1 - t$  nos dice que la solución general a  $(\mathcal{EC})$  es igual a una solución particular  $(-1 - t)$  más la solución de la homogénea.

Lo que hemos hecho ha sido encontrar una solución de una ecuación del tipo  $\mathbf{x}' = \alpha(t) \cdot \mathbf{x} + \beta(t)$  (con  $\alpha(t) = 1$ ,  $\beta(t) = t$ ). Para resolver este tipo de ecuaciones enunciamos la siguiente proposición:

**Proposición 2.** Sean  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas. Y sean:

$$A(t) = \int_a^t \alpha(u) du \quad H(t) = \int_a^t e^{-A(u)} \beta(u) du$$

Entonces:

1.  $x(t)$  verifica  $x'(t) = \alpha(t)x(t) + \beta(t) \forall t \in [a, b] \iff \exists c \in \mathbb{R} : x(t) = H(t) \cdot e^{A(t)} + c \cdot e^{A(t)}$
2. Dados  $t_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  entonces  $\exists! c : x(t) = H(t) \cdot e^{A(t)} + c \cdot e^{A(t)}$  es solución del PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(t) \cdot x(t) + \beta(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*Demostración.* Vamos a demostrar 1 y 2 por separado:

1. Tenemos  $(\mathcal{EC}) \equiv x'(t) = \alpha(t)x(t) + \beta(t)$  con  $\alpha, \beta$  continuas.

La ecuación homogénea asociada a  $(\mathcal{EC})$  es  $x'(t) = \alpha(t)x(t)$  que es lineal, es decir, la suma de soluciones es solución. Tenemos:

$$\begin{cases} x'_1(t) = \alpha(t)x_1(t) \\ x'_2(t) = \alpha(t)x_2(t) \end{cases} \implies (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)' = \alpha(t) \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$$

**Observación.** Si sumo soluciones de  $(\mathcal{EC})$  obtengo  $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)' = \alpha(t) \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + 2\beta(t)$

Para hallar la solución general vamos a proceder de forma parecida al ejemplo 9. Sea  $A(t)$  tal que  $A'(t) = \alpha(t)$ , entonces  $x(t) = e^{A(t)}$  verifica la ecuación homogénea.

Construimos  $y(t) = e^{-A(t)} \cdot \mathbf{x}$ , y la igualamos con la integral de su derivada:

$$(e^{-A(t)} \cdot \mathbf{x})' = e^{-A} \mathbf{x}' - e^{-A} \cdot \mathbf{x} \cdot A' = e^{-A} \cdot (\mathbf{x}' - \alpha \mathbf{x}) = e^{-A} \cdot \beta$$

entonces,

$$y(t) = e^{-A(t)} \cdot x(t) = \int e^{-A(t)} \cdot \beta(t) dt \implies e^{-A(t)} \cdot x(t) = H(t) + C \implies x(t) = e^{A(t)} \cdot (H(t) + C)$$

2.  $x_0 = x(t_0) = c \cdot e^{A(t_0)} + e^{A(t_0)} \cdot H(t) \implies \exists! c$  pues  $e^{A(t_0)} \neq 0$ . Y por tanto, para el PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(t) \cdot x(t) + \beta(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

existe solución y es única.



#### Ejemplo 10 (*Resolución ecuación lineal de orden I*)

Sea  $y'(x) = x^3 - 2x \cdot y(x)$ , donde  $\beta(x) = x^3$  y  $\alpha(x) = 2x$ . Queremos hallar la expresión de todas las posibles soluciones, es decir, la solución general.

##### 1. Solución general de la homogénea

La ecuación de la homogénea es  $y' = -2xy$ . Es de variables separables, resolviendo obtenemos:

$$y(x) = C \cdot e^{-x^2} : C \text{ es constante.}$$

##### 2. Tomando $e^{-x^2}$ una solución de (1)

Volvemos a la ecuación  $y' = x^3 - 2xy$ . Por tanto, podemos reescribir  $y'$  como:  $2xy + y' = x^3$ . A continuación, hacemos el cambio

$$z(x) = e^{(-x^2)} y(x) = e^{x^2} y \text{ y hallamos } z'(x).$$

$$z' = 2xye^{x^2} + e^{x^2} = e^{x^2} \cdot (2xy + y') = e^{x^2} x^3.$$

Hallamos  $z(x)$  integrando  $z'$ :

$$z(x) = \int x^3 e^{x^2} dx = \frac{x^2 - 1}{2} \cdot e^{x^2} + C. \text{ (se resuelve por partes).}$$

Igualando a nuestra  $z(x) = e^{x^2} y$  original, despejamos  $y(x)$ :

$$y(x) = \frac{x^2 - 1}{2} + Ce^{-x^2}$$

Donde  $\frac{x^2 - 1}{2}$  coincide con una solución particular con  $C = 0$ , y  $Ce^{-x^2}$  es la solución general de la homogénea.

## 2.3. Teoremas de existencia y unicidad

En la sección anterior hemos enunciado una proposición que denominamos de *existencia y unicidad* para ecuaciones lineales de orden I. Nos gustaría dar condiciones más generales para saber si existen y son únicas ciertas soluciones.

Consideraremos el PVI general:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \\ x(t_0) = t_0 \end{cases}$$

**Teorema 3** (Existencia y unicidad global). Sea  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f \in C^1$ . Si  $\frac{df}{dx} = f_x$  es acotada, es decir:

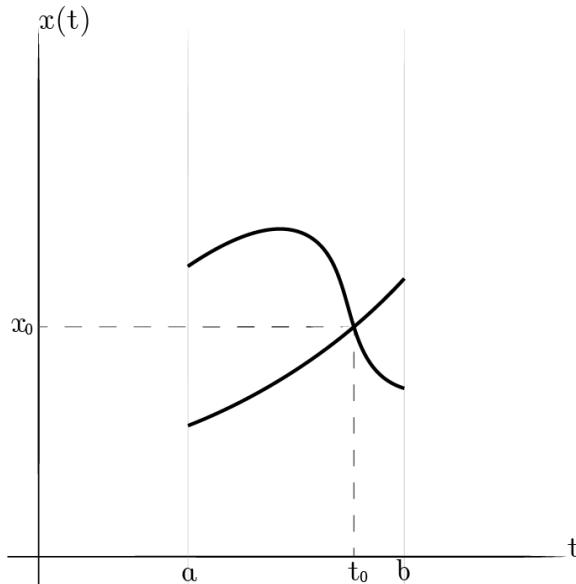
$$\exists L \in \mathbb{R} : |f_x(t, \mathbf{x})| \leq L \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in R$$

entonces, el PVI tiene solución y es única.

La demostración la veremos más adelante cuando consideremos el caso *n-dimensional*.

**Observación.** Vamos a ver ciertos aspectos de este resultado.

1. Gráfica de la solución



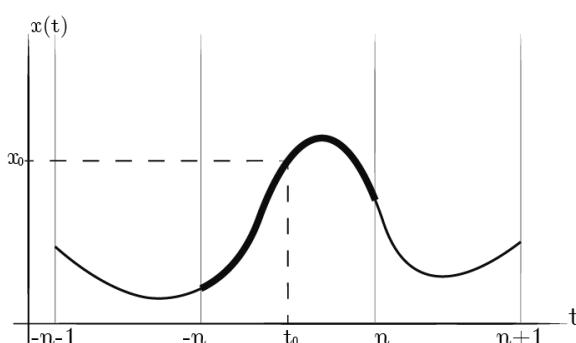
A nivel visual, no puede haber dos soluciones como las de la figura. Si las hubiera, el PVI tendría dos soluciones distintas para  $t_0$  y habíamos dicho que era única.

Analíticamente podemos considerar el gráfico de  $x(t)$  como un subconjunto del plano  $\mathbb{R}^2$ . Si consideramos cada solución de esta forma, digamos  $S_1, S_2$ , entonces:

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \iff S_1 = S_2$$

2. Unicidad en la recta real

Sea  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cumple que  $|f_x| \leq L$  (su derivada está acotada), entonces el PVI:



$$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

entonces tiene solución y es única  $\forall t \in \mathbb{R}$

Si nos fijamos en la imagen de la izquierda, la idea intuitiva surge de tener una solución  $x(t)$  definida sobre un intervalo  $[-n, n]$ . Si podemos extender  $x(t)$  a  $[-n-1, n+1]$ , ésta tiene que coincidir en  $[-n, n]$  y por unicidad, la solución es la misma. Podemos hacer esto para cualquier intervalo mayor que  $[-n, n]$  y por tanto sobre la totalidad de  $\mathbb{R}$ .

Formalmente puede intentar demostrarse por inducción sobre el tamaño del intervalo.

**Ejercicio propuesto 3.** Supongamos que  $x(t)$  resuelve  $\mathbf{x}' = f(x)$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a$ . ¿Podemos asegurar que  $f(a) = 0$ ?

*Pista:* tener en cuenta que el recíproco es cierto. Es decir, si  $f(a) = 0$  entonces sabemos que hay ecuaciones que se acercan a  $a$  conforme avanzan.

La versión global del teorema de existencia y unicidad no es muy útil. Veamos dos situaciones simples en las que no funciona.

Sea el PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x}^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [-2, 2] \text{ no tiene solución.}$$

Si intentamos resolverlo:

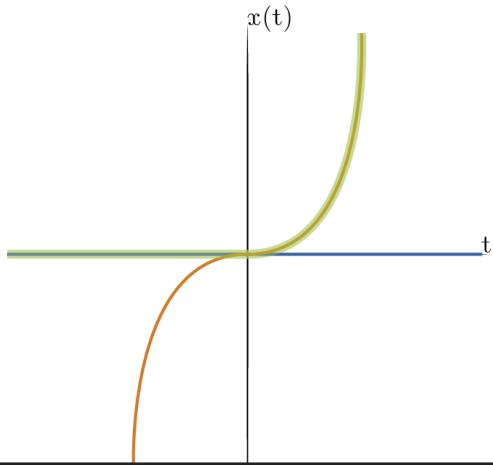
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = x^2 &\implies \int \frac{dx}{x^2} = \int dt \implies -\frac{1}{x} = t + C \\ x(0) = 1 &\implies C = -1 \implies x(t) = \frac{1}{1-t}\end{aligned}$$

que no es solución en  $[-2, 2]$  pues no está definida para  $t = 1$ .

Consideremos ahora el PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x}^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

es fácil ver que tanto  $x_1(t) = 0$  como  $x_2(t) = (\frac{t}{3})^{3/2}$  resuelven el PVI. De hecho, si combino trozos de la función puedo hallar más. En la figura se representan ambas soluciones y se resalta una posible combinación.



**Teorema 4** (Existencia y unicidad local). Sean  $[a, b] \times [c, d] = A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f \in C^1$  y  $t_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 \in (c, d)$ . Entonces:

■ Existencia:

$\exists \delta > 0$  y  $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in C^1$  tal que  $\mathbf{x}$  es solución del PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{con } \delta < \min(t_0 - a, b - t_0)$$

■ Unicidad:

Si  $x_1(t), x_2(t)$  son  $C^1$  en un intervalo  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  y satisfacen:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_i = f(t, \mathbf{x}_i), |t - t_0| < \varepsilon \\ x_i(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{con } \varepsilon < \min(t_0 - a, b - t_0)$$

entonces  $x_1(t) = x_2(t) \forall t : |t - t_0| < \varepsilon$ .

De nuevo, se deja la demostración para cuando enunciemos el caso *n-dimensional*.

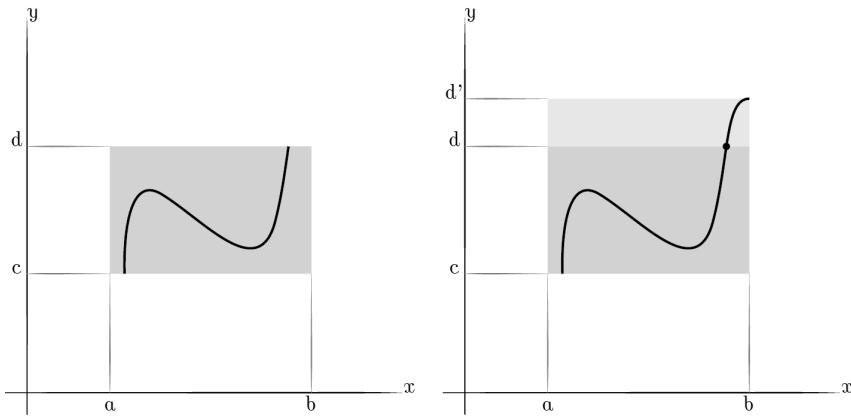
**Observación.** Al igual que en el caso global, vamos a estudiar una serie de implicaciones de este resultado.

1. Unicidad local.

Podemos expresar la solución analíticamente como:

Sean  $x_1(t), x_2(t)$  soluciones a un PVI. Si  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ , entonces  $\exists \varepsilon > 0 : x_1(t) = x_2(t), \forall t : |t - t_0| < \varepsilon$

2. Prolongación de la solución.



Puede ocurrir que hayamos definido la función sobre un área más pequeña de lo necesario. En la imagen superior se representa esta casuística.

En este caso, podemos prolongar la solución gracias a la unicidad, si existiera otra solución con  $t \in [a, b]$  que estuviera definida en todo  $[c, d']$ , entonces debería coincidir con nuestra solución original por compartir el punto  $(t, d)$ . Podríamos preguntarnos entonces si existe un intervalo cerrado máximo en el que existe nuestra solución.

### 3. Acerca de las hipótesis.

No es necesario pedir que  $f \in C^1$ . Para la existencia sólo necesitamos que  $f$  sea continua, y para la unicidad nos basta con que  $f_x$  exista y sea continua. En el caso general veremos que podemos pedir incluso menos para la unicidad.

#### 2.3.1. Regularidad de soluciones

En ocasiones nos va a interesar saber como de buena es la función que resuelve nuestra EDO, entendiendo buena por cómo de suave es. Supongamos que nuestra ecuación diferencial es  $x'(t) = f(t, x(t))$  definida en un intervalo, con  $f : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $x(t)$  derivable.

Entonces:

$$x(t) \text{ derivable} \implies x(t) \text{ continua.}$$

$$\begin{cases} x(t) \text{ continua} \\ f(t_1, t_2) \text{ continua} \end{cases} \implies [\text{componiendo } f \text{ con } x(t) \text{ como } t_2 = x(t)] f(t, x(t)) \text{ es continua} \implies x'(t) \text{ es continua} \implies x(t) \in C^1$$

Además, si  $f(t_1, t_2) \in C^1$  entonces  $f(t, x(t)) \in C^1$ , pues:

$$\frac{d}{dt}(f(t, x(t))) = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t)) \cdot x'(t)$$

De donde sabemos que tanto  $f_t$  como  $f_x$  son continuas pues  $f(t_1, t_2) \in C^1$  y  $x'(t)$  es continua como acabamos de ver. Y como  $x''(t) = \frac{d}{dt}(x'(t)) = \frac{d}{dt}(f(t, x(t)))$  que es continua, entonces  $x(t) \in C^2$ .

Repitiendo este argumento, concluimos con que:  $f(t_1, t_2) \in C^k \implies x(t) \in C^{k+1}$ .

## 2.4. Ecuaciones exactas

Hasta ahora hemos visto como resolver ecuaciones de variables separables, homogéneas de grado 0 y lineales de orden I. Veamos un método más.

Supongamos que  $\mathbf{y}$  está definida implícitamente por  $g(x, \mathbf{y}) = cte$  con  $g \in C^1$ . Si derivamos  $g(x, \mathbf{y}) = cte$  respecto de  $x$  obtenemos:

$$g_x(x, y(x)) + g_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0, \text{ es decir,}$$

$y(x)$  se resuelve a partir de.

$$\mathbf{y}' = -\frac{g_x(x, \mathbf{y})}{g_y(x, \mathbf{y})}$$

**Observación.** Podemos argumentar a la inversa. Si  $y(x)$  verifica la EDO, entonces  $g(x, y(x))$  es constante (en intervalos), pues  $\frac{d}{dx}(g(x, y(x))) = 0$

Además, la notación habitual para este tipo de ecuaciones es:

$$\mathbf{y}' = \frac{dy}{dx} = -\frac{g_x(x, \mathbf{y})}{g_y(x, \mathbf{y})} \implies g_x dx + g_y dy = 0$$

Supongamos que tenemos una ecuación  $y'(x) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ , es decir,  $M dx + N dy = 0$ . Nos gustaría saber cuándo existe  $g(x, \mathbf{y}) : M = g_x, N = g_y$ , ya que en ese caso es exacta y su solución es  $g(x, \mathbf{y}) = C$  |  $C$  constante en forma implícita.

### Ejemplo 11 (Ecuación exacta simple)

Sea  $\mathbf{y}' = \frac{-y}{x}$ , es decir,  $y dx + x dy = 0$  es una ecuación exacta.

De hecho la  $g$  necesaria es  $g(x, \mathbf{y}) = xy$  pues  $g_x = y$  y  $g_y = x$ . Y por tanto, la solución general es:

$$xy = C \implies y(x) = \frac{C}{x}$$

De hecho, esta ecuación es de los tres tipos que hemos visto.

**Proposición 5** (Condición necesaria de ecuación exacta).

$$\mathcal{EC} \equiv M dx + N dy \text{ es exacta y } g(x, \mathbf{y}) \in C^2 \implies M_y = N_x$$

*Demostración.* Si  $\mathcal{EC}$  es exacta, entonces  $\exists g : M = g_x, N = g_y$ . Como  $g \in C^2$ , sabemos que  $g_{xy} = g_{yx}$ , entonces:

$$\begin{cases} g_{xy} = (g_x)_y = M_y \\ g_{yx} = (g_y)_x = N_x \end{cases} \implies M_y = N_x$$

◇

**Observación.** Sabemos que una ecuación es exacta cuando  $(M, N) = \nabla g$ , sea  $\gamma$  cualquier curva tal que  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ . Entonces:

$$\int_{\gamma} M dx + N dy = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

Es claro que si la curva es cerrada,  $\gamma(a) = \gamma(b)$  y la integral es nula.

### Ejemplo 12 (Ecuación exacta)

Sea  $(\mathcal{EC}) \equiv (\mathbf{y} + x^3)dx + (x + \mathbf{y}^3)dy = 0$  es fácil ver que cumple la condición de  $M_x = N_y$ .

Nos gustaría hallar cual sería nuestra  $g$  a partir de que  $g_x = M$  y  $g_y = N$ . Sabemos que  $g_x = M = y + x^3$ . Si integramos en  $x$  (suponiendo  $y$  constante):

$$g(x, \mathbf{y}) = yx + x^4/4 + C(y) \text{ para } C \text{ una constante vista desde } x.$$

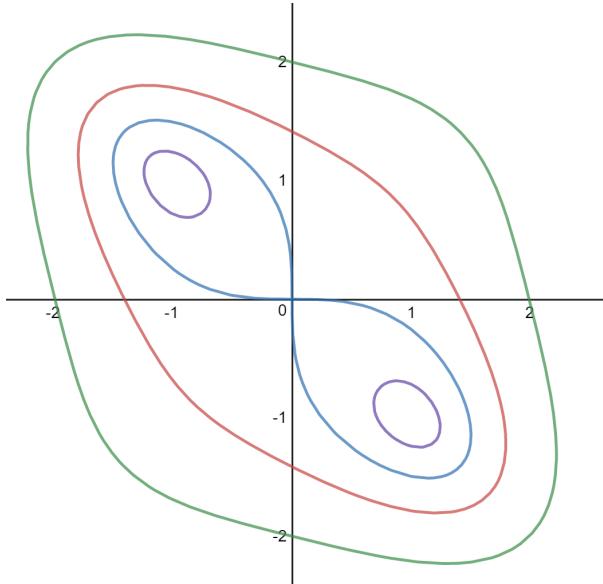
Además,

$$\begin{aligned} x + \mathbf{y}^3 &= N = g_y = x + c'(\mathbf{y}) \implies c'(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^3 \\ c'(\mathbf{y}) &= \mathbf{y}^3 \implies c(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^4}{4} + \text{cte.} \end{aligned}$$

Por lo que tenemos:  $g(x, \mathbf{y}) = xy + \frac{x^4 + \mathbf{y}^4}{4}$ . Es decir, las soluciones de  $(\mathcal{EC})$  vienen dadas por  $xy + \frac{x^4 + \mathbf{y}^4}{4} = C$  ( $C$  constante).

Por ejemplo, una solución particular para  $C=1$  es:

$$xy + \frac{x^4 + y^4}{4} = 1, \text{ que es la curva roja en la imagen siguiente.}$$



Queremos ahora analizar la condición necesaria y suficiente que nos asegure que podamos realizar el procedimiento del ejemplo. Haremos uso de la siguiente proposición.

**Proposición 6.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un abierto simplemente conexo. Sean  $M, N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con  $M, N \in C^1$ , entonces:

$$\exists g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } g \in C^2 \text{ tal que } M = g_x|_{\Omega}, N = g_y|_{\Omega} \iff M_y|_{\Omega} = N_x|_{\Omega}.$$

La demostración se deja al lector.

A modo de recordatorio vamos a dar una definición de *abierto simplemente conexo*.

**Definición 3** (Conjunto simplemente conexo). Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un abierto acotado. Decimos que  $\Omega$  es **simplemente conexo**  $\iff \Omega^C = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  es conexo.

## 2.5. Factores integrantes

Sea de nuevo  $(\mathcal{EC})_1 = Mdx + Ndy = 0$ , pero supongamos ahora que no se cumple la condición  $M_x = N_y$  necesaria para encontrar una ecuación exacta. Nos preguntamos si podemos encontrar un  $\mu(x, y)$  no trivial de forma que teniendo la ecuación  $(\mathcal{EC})_2 = \mu(x, y)Mdx + \mu(x, y)Ndy = 0$  se cumpla:

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \tag{2.1}$$

Llamamos a  $\mu$  factor integrante de  $(\mathcal{EC})_1$ . Veremos que siempre existe pero que es difícil de encontrar. Calculando 2.1, obtenemos:

$$\begin{aligned} M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} + (M_y - N_x)\mu &= 0 \\ \left( M \frac{\partial}{\partial y} - N \frac{\partial}{\partial x} \right) \mu + (M_y - N_x)\mu &= 0 \end{aligned}$$

de donde tendremos que calcular  $\mu$ . Como suele resultar difícil, habitualmente se intenta que  $\mu$  solo dependa de una de las dos variables, es decir,  $\mu = \mu(y)$  o  $\mu = \mu(x)$ .

Veamos un ejemplo de ecuación de factores integrantes

**Ejemplo 13 (Factores integrantes)**

Sea  $xy \, dx + y^2 \, dy = 0$ , esta claro que  $M = xy$ ,  $N = y^2$ . Para ver si puede ser una ecuación exacta evaluamos si cumple la condición necesaria  $M_y = N_x$ , sin embargo las derivadas cruzadas son  $M_y = x$  y  $N_x = 0$  y por tanto no puede ser ecuación exacta.

Nos preguntamos entonces por cual es su factor integrante. Para encontrarlo vamos a intentar que  $\mu$  dependa solo de una variable (o de una combinación lineal, por ejemplo  $z = x + y$ ).

1. Intentamos que  $\mu$  dependa de  $x$ .

Transformamos nuestra ecuación en:  $(\mathcal{EC}) \equiv \mu M \, dx + \mu N \, dy = 0$ . Es decir, tenemos:

$$\mu(x) \, xy \, dx + \mu(x) \, y^2 \, dy = 0, \text{ entonces hallamos las nuevas } M_y \text{ y } N_x \text{ para hallar } \mu$$

como se tiene que cumplir que  $M_y = N_x$

$$M_y = \mu(x) \, x = \mu'(x) \, y^2 = N_x \implies \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{x}{y}$$

y es claro que no tiene solución, pues la parte de la izquierda no depende de  $y$ .

2. Intentamos que  $\mu$  dependa de  $y$ .

Repetiendo el mismo procedimiento, hallamos las nuevas  $M_y$  y  $N_x$  para hallar  $\mu$  que cumple la condición necesaria. Obtenemos:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{-1}{y} \implies (\log|\mu|) = -\log|y| \implies \mu(y) = \frac{1}{y} \text{ es solución.}$$

Es decir,  $(\mathcal{EC}) \equiv x \, dx + y \, dy = 0$ . Podemos resolverla por separación de variables y su solución es:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = C \implies x^2 + y^2 = C$$

**Observación.** Sea la ecuación lineal de primer orden  $y' = a(x) \cdot y + b(x)$ .

Con  $A(x) : A'(x) = a(x)$  ( $e^{A(x)}$ ). Entonces  $e^{-A(x)}$  es un factor integrante de  $y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$ .

**Ejemplo 14 (Análisis de cotas en una ecuación diferencial)**

Vamos a hacer un aparte para retomar el ejemplo 6. Teníamos que  $(\mathcal{EC}1) \equiv \mathbf{x}' = t^2 + \mathbf{x}^2 = f(t, \mathbf{x})$  y llegábamos a la conclusión a través de trazar su campo de pendientes de que  $x(t) \uparrow \infty$ , pero no sabíamos si lo hacía de forma asintótica o lo alcanza cuando  $t \rightarrow \infty$ , aunque el campo parecía indicar que lo hacía de forma asintótica en  $t = 1$  o antes. Vamos a tratarla de forma analítica comparándola con otra ecuación que se asemeja y que ya conocemos.

Sabemos que  $|f_x| < L$  no se cumple, pues  $2x \rightarrow \infty$  si  $x \rightarrow \infty$  y no podemos aplicar el teorema de existencia y unicidad global.

Vamos a comparar la solución de  $(\mathcal{EC}1)$  donde existe con la de:

$$(\mathcal{EC}2) \equiv \begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x}^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Sean  $u(t)$  la solución de  $(\mathcal{EC}1)$  y  $v(t)$  la solución de  $(\mathcal{EC}2)$ . A primera vista en  $t = 0$  ambas tienen la misma pendiente pues  $f(0, 1) = 1$ . Sabemos también que  $u(t)$  crece más rápido que  $v(t)$  por que en el momento en que  $t \neq 0$ , crecerá más rápido (pues  $t^2 + x(t^2) \geq x(t^2)$ ). Qualitativamente podemos afirmar que  $u(t)$  "va por encima" de  $v(t)$ . Nos gustaría hacer una comparativa cuantitativa de ambas.

Para ello, consideramos  $z(t) = u(t) - v(t)$ . Ahora, calculamos  $z'(t)$ :

$$z'(t) = u'(t) - v'(t) = t^2 + u^2 - v^2 = t^2 + (u - v) \cdot (u + v) = t^2 + \mathbf{z} \cdot (u + v).$$

En este caso no conocemos explícitamente  $(u(t) + v(t))$ , pero podemos afirmar que como  $(u(t), v(t))$  son crecientes  $\forall t \geq 0$  y para  $t = 0$  valen 1, entonces  $(u + v) \geq 2$ . Por tanto,

$$\mathbf{z}' \geq 2\mathbf{z} + t^2 \implies \mathbf{z}' - 2\mathbf{z} \geq t^2.$$

Sea  $w(t) = e^{-2t} \cdot z(t)$ , entonces  $\mathbf{w}' = e^{-2t}(\mathbf{z}' - 2\mathbf{z}) \geq e^{-2t}t^2 \geq t^2$ . Entonces  $\mathbf{w}' \geq e^{-2t}t^2$  y además  $w(0) = z(0) = 1 - 1 = 0$ . A partir de esto tenemos:

$$w(t) = w(0) + \int_0^t w'(s)ds \geq \int_0^t s^2 e^{-2s} ds = e^{-2s} \cdot \frac{2s^2 + 2s + 1}{4} \Big|_0^t$$

es decir,

$$w(t) \geq \frac{1}{4} - e^{-2t} \frac{2t^2 + 2t + 1}{4}, \text{ y como } w(t) = e^{-2t}z(t) \text{ entonces,}$$

$$z(t) \geq \frac{e^{2t} - (2t^2 + 2t + 1)}{4} \implies u(t) - v(t) \geq \frac{e^{2t} - (2t^2 + 2t + 1)}{4} \implies u(t) \geq v(t) + \frac{e^{2t} - (2t^2 + 2t + 1)}{4}$$

Como vimos en 2.3,  $v(t) = \frac{1}{1-t}$  y por tanto  $v \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow 1$ . Y ya que  $u(t) \geq v(t) + \frac{e^{2t} - (1+2t+2t^2)}{4}$ ,  $u \rightarrow \infty$  antes de  $t = 1$ .

**Ejercicio propuesto 4.** Encontrar otra ecuación que sea sencilla de resolver para  $u(t) \geq x$ .

## 2.6. Ecuaciones reducibles de orden II

Hasta ahora hemos estudiado distintas ecuaciones de orden I. Vamos a ver un nuevo tipo de ecuaciones que involucra la segunda derivada y hay diversos ejemplos en el estudio de la Física.

**Definición 4** (Ecuaciones de orden II). Sea  $\mathbf{x} = f(t)$ , una **ecuación diferencial de segundo orden** es una ecuación de la forma:  $\mathbf{x}'' = F(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$

**Observación.** La ecuación  $\mathbf{x}'' = 5\mathbf{x}'$  es de orden 2 sólo formalmente, ya que se resuelve como una de primer orden. Con  $y(t) = 5y, y' = 5y \implies y(t) = ce^{5t} \implies x(t) = \int Ce^{5t} = a + be^{5t}$ . Sin embargo tenemos dos parámetros, para determinarlos necesitamos añadir dos condiciones. El PVI entonces sería del tipo:

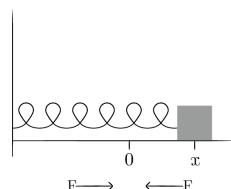
$$\begin{cases} \mathbf{x}'' = 5\mathbf{x}' \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Con esto hallaríamos  $a + b = 1, b = 0$ .

Sin embargo, podemos tener otro tipo de condiciones que no serían un PVI, por ejemplo, dar dos condiciones para  $x(t)$  y ninguna para  $x'(t)$ . Estas no tienen aseguradas existencia y unicidad y lo veremos más adelante.

Como fuente de ejemplos para esta sección utilizaremos la segunda ley de Newton  $F = m \cdot a$ .

### Ejemplo 15 (Muelles)



Consideramos que  $x = 0$  corresponde a la situación de equilibrio, es decir totalmente parado. Además vamos a suponer que:

- no hay fricción con la superficie ni con el aire.

- tenemos movimientos oscilatorios desde la situación de equilibrio.
- la masa es puntual.

La fuerza por tanto se expresa como  $F = -kx$ , donde  $k$  es la constante del muelle y es negativa por que va en sentido contrario al vector posición con origen en  $x = 0$ .

La ecuación diferencial de este modelo es:

$$m\mathbf{x}'' = -k\mathbf{x} \implies \mathbf{x}'' = -\frac{k}{m} \cdot \mathbf{x}$$

Consideramos que  $x = 0$  corresponde a la situación de equilibrio, es decir totalmente parado. Además vamos a suponer que:

- no hay fricción con la superficie ni con el aire.
- tenemos movimientos oscilatorios desde la situación de equilibrio.
- la masa es puntual.

La fuerza por tanto se expresa como  $F = -kx$ , donde  $k$  es la constante del muelle y es negativa por que va en sentido contrario al vector posición con origen en  $x = 0$ .

La ecuación diferencial de este modelo es:

$$m\mathbf{x}'' = -k\mathbf{x} \implies \mathbf{x}'' = -\frac{k}{m} \cdot \mathbf{x}$$

Vamos a hallar sus soluciones. Definimos  $y(t) = x(\alpha t)$  (para esconder el parámetro  $\frac{k}{m}$ ), vamos a ver cual es este  $\alpha$ :

$$\mathbf{y}'' = \alpha^2 \cdot \mathbf{x}''(\alpha t) = \alpha^2 \left( -\frac{k}{m} \cdot x(\alpha t) \right) = -\frac{k}{m} \alpha^2 \cdot y(t)$$

Eligiendo  $\alpha = \sqrt{\frac{m}{k}}$  tenemos  $\mathbf{y}'' = -\mathbf{y}$ . Vemos fácilmente que:

1.  $\sin(t)$  y  $\cos(t)$  son soluciones.
2.  $\mathbf{y}'' = \mathbf{y}$  es lineal.

Es decir, si  $y_1(t), y_2(t)$  son solución, entonces:

$$\alpha_1 \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \mathbf{y}_2 \text{ es solución } \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Entonces con  $\mathbf{y}_1 = \sin$ ,  $\mathbf{y}_2 = \cos$  sabemos que:

$$\alpha_1 \sin(t) + \alpha_2 \cos(t) \text{ es solución.}$$

A priori no sabemos si estas son todas las soluciones. Podemos asegurar que sí con el teorema 7 que se enuncia tras este ejemplo.

Dados cualquier  $y_0, y_1$  entonces:

$$\exists \alpha, \beta : \mathbf{y}_{\alpha, \beta} = \alpha \sin(t) + \beta \cos(t)$$

que cumplen:

$$\beta = y_{\alpha, \beta}(0) = y_0, \alpha = y'_{\alpha, \beta}(0) = y_1.$$

es decir,  $\alpha, \beta$  forman el vector  $(\alpha \beta) = (y_1 y_0)$ . Por tanto, en el momento en que sepamos el valor  $y(0), y'(0)$  lo hemos resuelto pues  $y(t) = y(0) \cos(t) + y'(0) \sin(t)$ .



# Capítulo 3

## Ecuaciones de orden superior

### 3.1. Ecuaciones lineales de orden II

**Teorema 7** (Existencia y unicidad para ecuaciones lineales de orden II). Sean:  
 $(\mathcal{EC}) \equiv \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = r(t)$  con  $p, q, r : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas y  $t_0 \in [a, b]$ ,  $x_0, x_1 \in R$  entonces existe una solución y es única al PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = r(t), \quad \forall t \in [a, b]. \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

La demostración de nuevo se deja para el caso general.

Vamos a enunciar ciertas **propiedades**.

1. Es lineal, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial.

Sean  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  soluciones de la homogénea,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies \alpha_1\mathbf{x}_1(t) + \alpha_2\mathbf{x}_2(t)$  es solución de la homogénea.

2. Ese espacio vectorial tiene dimensión 2.

*Demostración. (de las propiedades)*

1. Se demuestra como en el ejemplo.
2. Sea  $x_1$  la solución del PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0 \\ x(a) = 1 \\ x'(a) = 0 \end{cases}$$

y sea  $x_2$  la solución del PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0 \\ x(a) = 0 \\ x'(a) = 1 \end{cases}$$

Por existencia y unicidad,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  existen en  $[a, b]$ . Además, ninguna es un múltiplo de la otra, es decir, son linealmente independientes pues:

- Cualquier  $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1$  cumple  $x'(a) = 0$  pero  $x'_2(a) \neq 0$ .
- Cualquier  $\mathbf{x} = \beta\mathbf{x}_2$  cumple  $x(a) = 0$  pero  $x_1(a) \neq 0$ .

Por tanto, la dimensión del espacio de soluciones es al menos 2. Para ver que es justo dos se sigue:

Dada cualquier solución  $x(t)$  de la ecuación

$$x(t) = x(a) \cdot x_1(t) + x'(a) \cdot x_2(t)$$

por unicidad, el término de la derecha es solución con:

$$\begin{cases} \text{valor en } a \text{ igual a } x(a) \\ \text{derivada en } a \text{ igual a } x'(a) \end{cases}$$

◇

**Observación.** Como vimos en el ejemplo 15, para resolver  $\mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0$  basta encontrar dos soluciones linealmente independientes.

#### Ejemplo 16 (*Ecuaciones de orden II como sistemas*)

Consideramos ( $\mathcal{EC} \equiv f(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ). Sea  $\mathbf{y} = \mathbf{x}'$ , entonces podemos resolverla resolviendo un sistema de ecuaciones. Para ello consideraremos el vector  $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ . Si derivamos:

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ f(t, x, x') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ f(t, x, y) \end{bmatrix} = F(t, X)$$

Con lo que llegamos a la expresión:

$$X'(t) = F(t, X) \text{ que representa un sistema de ecuaciones}$$

**Proposición 8** (Estructura de soluciones de la ( $\mathcal{EC} \equiv \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = r(t)$ )). Vamos a matizar las propiedades descritas en 3.1 en forma de proposición.

- Sean  $p, q, r : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas, el conjunto de soluciones de la EDO homogénea ( $\mathcal{ECH} \equiv \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0$ ) es un espacio vectorial de dimensión 2. Es decir, existen 2 soluciones linealmente independientes  $x_1(t), x_2(t)$ .

Además, todas las soluciones son de la forma  $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$  con  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

Este par  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  se obtiene, por ejemplo, resolviendo los PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0 & \begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0 \\ x(t_0) = 1 \end{cases} \\ x(t_0) = 1 & \begin{cases} x(t_0) = 0 \\ x'(t_0) = 1 \end{cases} \\ x'(t_0) = 0 & \end{cases}$$

- Sea  $x_p(t)$  una solución particular de ( $\mathcal{EC}$ ) entonces cualquier solución se escribe:

$$x(t) = x_p(t) + \alpha_1 \cdot x_1(t) + \alpha_2 \cdot x_2(t)$$

*Demostración.* La prueba de cada apartado:

- Visto en la demostración de las propiedades 3.1.
- Si  $x(t)$  resuelve la EDO, entonces  $x(t) - x_p(t)$  resuelve la EDO homogénea asociada. Por tanto  $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : x(t) - x_p(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ .

◇

**Observación.** El procedimiento habitual es resolver primero la ecuación homogénea y luego buscar la solución particular de la EDO original. Se dice que la solución general de la EDO original = solución particular + solución general de la homogénea.

### 3.1.1. Ecuaciones lineales de orden 2 con coeficientes constantes.

Consideramos  $\mathbf{x}'' + a\mathbf{x}' + b\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . Vamos a ver distintos ejemplos para la resolución de este tipo de ecuaciones.

#### Ejemplo 17 (Ecuación lineal de orden 2: $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + 2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ )

- Intentamos  $x(t) = e^{\lambda t}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Que sea solución quiere decir que  $(\lambda^2 + 3\lambda + 2) \cdot e^{\lambda t} = \mathbf{0}$ , entonces  $e^{\lambda t}$  es solución  $\iff \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = -1 \text{ o } \lambda = -2$ . De esta forma podemos hallamos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t} \\ x_2(t) &= e^{-2t} \end{aligned}$$

son soluciones.

- Por tanto, como son linealmente independientes  $\implies x(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{-2t}$  es la solución general.

#### Ejemplo 18 (Ecuación lineal de orden 2: $\mathbf{x}'' + a\mathbf{x}' + b\mathbf{x} = \mathbf{0}$ )

Volviendo a intentar  $x(t) = e^{\lambda t}$ , tenemos que  $e^{\lambda t}$  es solución  $\iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ . De aquí deducimos distintos casos:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \iff (a^2 - 4b > 0)$ , las soluciones son:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= e^{\lambda_1 t} \\ \mathbf{x}_2 &= e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \notin \mathbb{R} \iff (a^2 - 4b < 0)$ .

Como los coeficientes  $a, b \in \mathbb{R} \implies \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ . Si  $\lambda_1 = \mu + i\omega \implies \lambda_2 = \mu - i\omega$ , y con  $\omega \neq 0 \implies (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ . Entonces:

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\mu t + i\omega t} = e^{\mu t} e^{i\omega t} = e^{\mu t} \cdot (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) = e^{\mu t} \cos(\omega t) + i e^{\mu t} \sin(\omega t)$$

Afirmamos entonces que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= e^{\mu t} \cos(\omega t) \\ \mathbf{x}_2 &= e^{\mu t} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

son soluciones y linealmente independientes.

- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \iff (a^2 - 4b = 0)$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) &= t e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

son solución y linealmente independientes.

**Ejercicio propuesto 5.** Comprobar en el caso 3 del ejemplo anterior que  $x_2(t) = t e^{\lambda_1 t}$  es solución y linealmente independiente de  $x_1$ .

#### Ejemplo 19 (Ecuación lineal de orden 2: $\mathbf{x}'' + \mathbf{x}' + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ )

Siguiendo el ejemplo 18, es una ecuación del caso 2.  $\lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \implies \mu = -\frac{1}{2}$ ,  $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Y nuestra solución es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= e^{-1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \mathbf{x}_2 &= e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{aligned}$$

**Ejemplo 20 (Ecuación lineal de orden 2:  $\mathbf{x}'' + 2\mathbf{x}' + \mathbf{x} = 0$ )**

Es fácil ver que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Siguiendo 18, las soluciones son:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^t \\x_2(t) &= te^t\end{aligned}$$

**Ejemplo 21 (Ecuación lineal de orden 2:  $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + 2\mathbf{x} = te^t$ )**

Intentamos ver si  $x(t) = e^t(\alpha + \beta t)$  es solución. Entonces:

$$\begin{aligned}x'(t) &= e^t(\alpha + \beta + \beta t) \\x''(t) &= e^t(\alpha + 2\beta + \beta t)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + 2\mathbf{x} = e^t(6\beta t + 6\alpha + 5\beta) \text{ entonces,}$$

$$e^t(6\beta t + 6\alpha + 5\beta) = te^t \implies \begin{cases} 6\beta = 1 \\ 6\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$$

que es fácil de resolver para  $\alpha$  y  $\beta$ .

**Ejemplo 22 (Ecuación lineal de orden 2:  $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + 2\mathbf{x} = te^{-t}$ )**

Si intentamos hacerlo como en el ejemplo 21 no podremos resolverlo.

Vamos a intentar el cambio  $x(t) = e^{-t}(\alpha + \beta t + \gamma t^2)$ , donde veremos que  $\alpha$  sobra y que  $\gamma$  es necesario. Entonces la ecuación queda como:

$$\mathbf{x}' = e^{-t}(-\alpha - \beta t - \gamma t^2 + \beta + 2t) \implies \dots \implies \mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + 2\mathbf{x} = e^{-t}(4\gamma + 2\beta + 2\gamma t)$$

Vemos que no aparece el término  $\alpha$ , esto es porque  $e^{-\lambda t}$  cuando  $\lambda$  es un autovalor de la ecuación homogénea es solución. Es decir,

$$x(t) = e^{-t}\left(t - \frac{t^2}{2}\right) \text{ es una solución particular.}$$

**Ejemplo 23 (Ecuación lineal de orden 2:  $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + \mathbf{x} = te^{-t}$ )**

En este caso, si intentamos que  $x(t) = e^{\lambda t}$  sea solución de la homogénea  $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + \mathbf{x} = 0$ , tenemos que resolver para  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ , de donde obtenemos la solución doble:  $\lambda = -1$ .

Se puede comprobar que dos soluciones independientes de la homogénea son  $e^{-t}$ ,  $te^{-t}$ . Para buscar una solución particular de la ecuación original tomamos:

$$x(t) = (\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3)e^{-t}$$

De donde veremos que  $\alpha + \beta t$  sobrarán. La idea subyacente es que tenemos que añadir tantos grados al polinomio  $x(t)$  como la multiplicidad de las raíces.

**Observación.** Lo que hemos hecho para la resolución ha sido tomar:

$$x(t) = e^{\gamma t} \cdot \text{pol}(t) \implies x'(t) \text{ es del mismo tipo que } e^{\gamma t} \cdot \hat{\text{pol}}(t)$$

Nos gustaría saber que familias cumplen la propiedad anterior.

1.  $e^{\gamma t} \text{pol}(t)$ , con  $\text{pol}(t)$  un polinomio de cualquier grado. Si  $\gamma$  es una solución de intentar  $e^{\gamma t}$  como solución a la homogénea, entonces tenemos que añadir tantos grados al polinomio como multiplicidad de  $\gamma$  en la ecuación que resuelve. Como caso particular si  $\gamma = 0$ , nuestra expresión son sólo polinomios.

2.  $e^{\gamma t}(\text{pol}_1(t) \sin(\alpha t) + \text{pol}_2(t) \cos(\alpha t))$ . Análogo con los complejos.

### 3.1.2. Ecuaciones lineales de orden 2 con coeficientes no constantes.

Vamos a comentar algunos resultados para el caso general de ecuaciones lineales de orden 2. Es decir, para la ecuación:

$$\mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = r(t), \text{ con } p, q, r : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas.}$$

y por tanto, tenemos existencia y unicidad para el PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = r(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases}$$

**Proposición 9** (Método de variación de constantes). Vamos a enunciar un método para encontrar soluciones particulares a partir de la solución de la ecuación homogénea:

1. Si se tiene una solución  $x_1(t)$  de la homogénea ( $\mathcal{ECH}$ )  $\equiv \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0$  y  $x_1(t) \neq 0 \forall t \in [\alpha, \beta]$  se puede encontrar una segunda linealmente independiente de la primera, de la forma:  $x_2(t) = u(t)x_1(t)$  con  $u(t)$  apropiada.
2.  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  linealmente independientes y soluciones de la homogénea (con  $r(t) = 0$ ), se puede encontrar una solución particular  $\mathbf{x}_p$  de  $\mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = r(t)$  de la forma:

$$\mathbf{x}_p = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$$

*Demostración.* Se considera que  $x_1(t)$  es suficientemente buena como para no tener ningún caso crítico durante el desarrollo de la prueba.

1. Sea  $x(t) = u(t)x_1(t) \implies \mathbf{x}' = \mathbf{u}'\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}\mathbf{x}_1'$  y  $\mathbf{x}'' = \mathbf{u}''\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{u}'\mathbf{x}_1' + \mathbf{u}\mathbf{x}_1''$ . Entonces:

$$\mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_1'' + p(t)\mathbf{x}_1' + q(t)\mathbf{x}_1) + \mathbf{u}'(2\mathbf{x}_1' + p\mathbf{x}_1) + \mathbf{u}\mathbf{x}_1'' = 0$$

y por tanto,  $u(t) \cdot x_1(t)$  es solución de la homogénea  $\iff \mathbf{u}''\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}(2\mathbf{x}_1' + p(t)\mathbf{x}_1) = 0$  pues  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_1'' + p(t)\mathbf{x}_1' + q(t)\mathbf{x}_1) = 0$ .

Si llamamos  $y(t) = u'(t)$  entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= -\frac{2\mathbf{x}_1' + p(t)\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1} \cdot y = \left(-\frac{2\mathbf{x}_1'}{\mathbf{x}_1} + p(t)\right)y \implies \\ &\implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-2\mathbf{x}_1'}{\mathbf{x}_1} - p(t)dt \implies \\ &\implies \mathbf{y} = \frac{e^{-P(t)}}{x_1^2(t)} \text{ donde } P'(t) = p(t) \end{aligned}$$

por tanto, como  $\mathbf{u}' = \mathbf{y} \implies u(t) = \int \frac{\mathbf{u}^{-P}}{\mathbf{x}_1^2}$

Entonces,  $x_2(t) = u(t)x_1(t)$  con  $u(t)$  una primitiva de  $\frac{\mathbf{u}^{-P}}{\mathbf{x}_1^2}$  es solución de la homogénea y es linealmente independiente de  $\mathbf{x}_1$  pues basta ver que  $u(t) \neq \text{constante}$ . Y esto es cierto pues es la primitiva de una exponencial, que nunca se anula.

2. Sea  $\mathbf{x} = x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$  una solución particular. Entonces:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}_1\mathbf{x}_1' + \mathbf{u}_2\mathbf{x}_2' + \mathbf{u}_1'\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_2'\mathbf{x}_2$$

donde pedimos que

$$\mathbf{u}'_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{u}'_2 \mathbf{x}_2 = 0 \quad (3.1)$$

Además:

$$\mathbf{x}'' = (\mathbf{u}_1 \mathbf{x}_1' + \mathbf{u}_2 \mathbf{x}_2')' = \mathbf{u}_1 \mathbf{x}_1'' + \mathbf{u}_2 \mathbf{x}_2'' + \mathbf{u}'_1 \mathbf{x}_1' + \mathbf{u}'_2 \mathbf{x}_2'$$

Y sustituyendo en nuestra EDO original:

$$\mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_1'' + p(t)\mathbf{x}_1' + q(t)\mathbf{x}_1) + \mathbf{u}_2(\mathbf{x}_2'' + p(t)\mathbf{x}_2' + q(t)\mathbf{x}_2) + \mathbf{u}'_1 \mathbf{x}_1' + \mathbf{u}'_2 \mathbf{x}_2' = r(t)$$

Donde los dos primeros sumandos son nulos pues  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  son soluciones de la homogénea, así hallamos la condición  $\mathbf{u}'_1 \mathbf{x}_1' + \mathbf{u}'_2 \mathbf{x}_2' = r(t)$ . Y por la condición que pedimos en 3.1,  $\mathbf{u}'_1 \mathbf{x}_1' + \mathbf{u}'_2 \mathbf{x}_2'$  es solución de  $x(t) = \mathbf{u}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_2 \mathbf{x}_2 \iff$  se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{u}'_2 \mathbf{x}_2 = 0 \\ \mathbf{u}'_1 \mathbf{x}_1' + \mathbf{u}'_2 \mathbf{x}_2' = r(t) \end{cases} \text{ es decir } \begin{bmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x'_1(t_0) & x'_2(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1(t_0) \\ u'_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix}$$

Donde llamamos a la primera matriz  $W(t)$ , el «wronskiano» de  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ .

Para ayudarnos con la demostración vamos a hacer uso del lema 10 que se enuncia posteriormente. Este lema nos dice que si  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  son linealmente independientes entonces  $W(t) \neq 0 \forall t \in [\alpha, \beta]$ .

Sabiendo esto,  $W(t)$  es invertible y entonces:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \end{bmatrix} = W^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \mathbf{u}'_1 = \frac{-x_2(t)r(t)}{W(t)} \\ \mathbf{u}'_2 = \frac{x_1(t)r(t)}{W(t)} \end{cases}$$

y finalmente hallamos  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  como primitivas de lo anterior:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \int_u^t \frac{-x_2(s)r(s)}{W(s)} ds \\ \mathbf{u}_2 &= \int_u^t \frac{x_1(s)r(s)}{W(s)} ds \end{aligned}$$

◊

**Proposición 10** (Linealmente independiente  $\implies$  wronskiano no nulo en todo punto). Sean  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  soluciones linealmente independientes. Sea

$$W(t) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x'_1(t_0) & x'_2(t_0) \end{bmatrix}$$

entonces,  $W(t) \neq 0 \forall t \in [\alpha, \beta]$

*Demostración.* Demostraremos el contrarrecíproco, es decir, si  $W(t_0) = 0$  en algún punto entonces  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  son linealmente dependientes.

Si  $\exists t_0 \in [\alpha, \beta] : W(t_0) = 0$  entonces las columnas de

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x'_1(t_0) & x'_2(t_0) \end{bmatrix}$$

son linealmente dependientes, es decir, una es un múltiplo de la otra. Digamos que:

$$\begin{bmatrix} x_2(t_0) \\ x'_2(t_0) \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x'_1(t_0) \end{bmatrix}$$

Entonces,  $\mathbf{x}_2$  y  $c\mathbf{x}_1$  satisfacen las mismas condiciones iniciales y por unicidad de soluciones del PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

se tiene por tanto que  $x_2(t) \equiv c \cdot x_1(t) \forall t \in [\alpha, \beta]$ , con lo que hemos demostrado el contrarrecíproco. ◊

**Proposición 11** (Wronskiano no nulo en un punto  $\implies$  linealmente independientes). Si  $W(t_0) \neq 0$  para algún  $t_0 \in [\alpha, \beta]$  entonces  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  son linealmente independientes. Como consecuencia,  $W(t) \neq 0 \ \forall t \in [\alpha, \beta]$ .

*Demostración.* Directamente (si  $W(t_0) \neq 0$ ) entonces:

$$\begin{bmatrix} x_2(t_0) \\ x'_2(t_0) \end{bmatrix} \neq c \cdot \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x'_1(t_0) \end{bmatrix} \forall c \text{ constante} \implies x_2(t) \neq cx_1(t) \ \forall c \text{ constante.}$$

◊

**Ejercicio propuesto 6.** Resolver la demostración anterior justificando primero que  $W(t)$  satisface que  $W'(t) + p(t)W(t) = 0$ , y por tanto  $W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}$ . Esta expresión es siempre 0 o siempre  $\neq 0$ .

Como comentarios a este desarrollo:

**Observación.** 1. Puede ser útil la expresión de la derivada del determinante de una matriz de funciones:

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{vmatrix}$$

2. Este método también es útil para coeficientes constantes si  $r(t)$  no es de las familias:

$$\begin{aligned} & \exp \cdot \text{pol} \\ & \exp \cdot (\text{pol}_1 \cdot \sin + \text{pol}_2 \cdot \cos) \end{aligned}$$

3. Estas propiedades están enunciadas sobre intervalos compactos, se pueden ir ampliando los intervalos hasta llenar  $\mathbb{R}$ .

#### Ejemplo 24 (Resolución de la ecuación homogénea de orden II a partir de una solución)

Sea  $(1 - x^2)\mathbf{y}'' - 2x\mathbf{y}' + 2\mathbf{y} = 0$  con  $x \in (-1, 1)$ .

Es fácil ver que  $y_1(x) = x$  es solución. Vamos a encontrar todas la soluciones de la ecuación.

1. Como es una ecuación homogénea de orden 2 basta encontrar  $y_2(x)$  linealmente independiente de  $y_1$ , ya que  $\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$ .

2. Buscamos  $y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x) = x \cdot u(x)$ . Derivando obtenemos que:

$$y_2 \text{ es solución} \iff \frac{\mathbf{u}''}{\mathbf{u}'} = \frac{4x^2 - 2}{x - x^3}$$

3. Por tanto:

$$\log |\mathbf{u}'| = \int \frac{4x^2 - 2}{x - x^3} dx = \int \frac{3x^2 - 1}{x - x^3} dx + \int \frac{x^2 - 1}{x - x^3} dx$$

Como resultado obtenemos:

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \\ \mathbf{y}_2 &= -1 + \frac{x}{2} \log \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

Podemos observar que  $\mathbf{y}_2 = -1 + \frac{x}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$  es solución en los dos intervalos de  $|x| > 1$ , aunque explota en  $x = \pm 1$ .

$$\mathbf{y}'' - \frac{2x}{1-x^2}\mathbf{y}' + \frac{2}{1-x^2}\mathbf{y} = 0$$

#### Ejemplo 25 (Resolución de una ecuación lineal de orden II por variación de las constantes)

Sea  $(\mathcal{ED}) \equiv \mathbf{y}'' - \mathbf{y} = e^{2x}$  que cumple  $y(0) = 0$ .

La ecuación homogénea es:  $(\mathcal{ED}_h) \equiv \mathbf{y}'' - \mathbf{y} = 0 \implies \lambda^2 - 1 = 0$ . Por tanto,  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = e^{-x}$  resuelven  $(\mathcal{ED}_h)$  y entonces:

$$\mathbf{y}_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Además, la solución general de  $(\mathcal{ED})$  es la suma de una solución particular de  $(\mathcal{ED})$  más la solución general de  $(\mathcal{ED}_h)$ , que ya la sabemos. Vamos a hallarla por variación de las constantes. Llamamos  $y_p(x)$  a una solución particular de  $(\mathcal{ED})$ . Entonces:

$$y_p(x) = \mathbf{u}_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{u}_2 \mathbf{y}_2 \implies \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}'_1 & \mathbf{y}'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema, hallamos:  $2\mathbf{u}'_1 e^x = e^{2x}$ , es decir,  $\mathbf{u}'_1 = \frac{e^x}{2} \implies \mathbf{u}_1 = \frac{e^x}{2}$ . Sabiendo esto, hallamos  $\mathbf{u}_2 = -\frac{e^{3x}}{6}$ . Por tanto:

$$\mathbf{y}_p = \frac{e^x}{2} e^x + \left( -\frac{e^{3x}}{6} \right) e^{-x} = \frac{1}{3} e^{2x}$$

Y entonces nuestra solución general  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$  es:

$$y(x) = \frac{e^{2x}}{3} + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

y para nuestro caso concreto, como  $y(0) = 0$ , podemos hallar que:

$$c_2 = -\frac{1}{3} - c_1$$

**Observación.** Sea  $\mathbf{y}'' - \mathbf{y} = e^{2x} + x e^{5x}$ , si  $\mathbf{y}_j$  es solución de:

$$\mathbf{y}'' + p(x)\mathbf{y}' + q(x)\mathbf{y} = r_j(x), \text{ con } j = 1, 2$$

entonces  $\alpha_1 \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \mathbf{y}_2$  es solución de:

$$\mathbf{y}'' + p(x)\mathbf{y}' + q(x)\mathbf{y} = r(x) \text{ con } r(x) = \alpha_1 r_1(x) + \alpha_2 r_2(x)$$

### Ejemplo 26 (Resonancia. Oscilador armónico simple.)

Sea  $\mathbf{x}'' + \omega_0^2 \mathbf{x} = 0$  con  $\omega_0 \neq 0$  un sistema físico. Es un ejemplo conocido pues es el oscilador armónico simple, y la solución general es:

$$\mathbf{x} = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t)$$

es decir, son soluciones periódicas, de periodo  $2\pi/\omega_0$  y por tanto de frecuencia  $\omega_0/2\pi$ . Vamos a aplicarle al sistema una fuerza externa periódica. Entonces nuestra ecuación es de la forma:

$$\mathbf{x}'' + \omega_0^2 \mathbf{x} = \cos(\omega t)$$

Para resolverla, vamos a diferenciar dos casos.

Caso  $\omega \neq \omega_0$ .

Probamos  $x(t) = a \cos(\omega t)$ . ( $\cos(\omega t)$  no es solución de la homogénea pues  $\omega \neq \omega_0$ ). Probando:

$$x(t) = a \cos(\omega t) \text{ hallamos } a = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \text{ es decir, la solución general de la } \mathcal{ED} \text{ es:}$$

$$\frac{\cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} + \alpha \sin(\omega_0 t) + \beta \cos(\omega_0 t)$$

Caso  $\omega = \omega_0$  (resonancia).

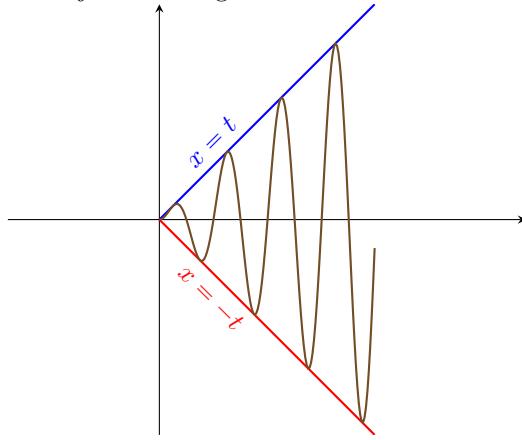
Ahora  $\cos(\omega_0 t) = \cos(\omega t)$ . Por tanto, tenemos que resolver la ecuación homogénea. En este caso, intentamos una solución particular del tipo  $\mathbf{x} = at \cos(\omega_0 t) + bt \sin(\omega_0 t)$  (como ayuda para saber de donde sale esto, ver el ejemplo 21). Desarrollando, hallamos:

$$\mathbf{x}'' + \omega_0^2 \mathbf{x} = \cos(\omega_0 t)$$

Eso requiere que  $a = 0$ ,  $2\omega_0 b = 1$ , es decir,  $b = \frac{1}{2\omega_0}$ . Lo que implica que la solución particular es:  $x_p(t) = \frac{t \sin(\omega_0 t)}{2\omega_0}$  y por tanto la solución general:

$$x(t) = \frac{t \sin(\omega_0 t)}{2\omega_0} + \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$$

Cuya representación gráfica es semejante a la siguiente:



**Observación.** Como comentario, es más sencillo resolver las ecuaciones usando  $e^{i\omega t}$ ,  $e^{-i\omega t}$  y luego separando la parte real e imaginaria.

### Ejemplo 27 (Oscilador armónico amortiguado)

Vamos a empezar considerando el muelle. En el oscilador armónico simple, teníamos  $\mathbf{x}'' = -\omega_0^2 \mathbf{x}$  (donde  $-\omega_0^2 \mathbf{x}$ ) era la fuerza de recuperación.

Ahora, vamos a considerar el caso en el que exista el rozamiento. Sabemos que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad (para velocidades no muy grandes) en dirección contraria al movimiento. Es decir, tenemos:  $(ED) \equiv \mathbf{x}'' = -\omega_0^2 \mathbf{x} - \mu \mathbf{x}' \implies \mathbf{x}'' + \mu \mathbf{x}' + \omega_0^2 \mathbf{x} = 0$ , que es una ecuación lineal homogénea. Por tanto su solución general es de la forma:

$$x(t) = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 : \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \text{ son linealmente independientes.}$$

Para hallar  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  resolvemos las raíces del polinomio característico:  $\lambda^2 + \mu\lambda + \omega_0^2 = 0$ . Distinguimos distintos casos:

- Caso  $\mu/2 > \omega_0$

$$\lambda = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \implies \begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_+ = e^{\lambda_+ t} \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_- = e^{\lambda_- t} \end{cases} \quad \text{con } \lambda_- < \lambda_+ < 0$$

Y entonces,  $\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+ \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

- Caso  $\mu/2 = \omega_0$

Tenemos una raíz doble y las soluciones son:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= e^{-\mu/2 t} \\ \mathbf{x}_2 &= t e^{-\mu/2 t} \end{aligned}$$

- Caso  $\mu/2 < \omega_0$

$$-\frac{\mu}{2} \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2} = -\frac{\mu}{2} \pm i\omega_\mu$$

y entonces, resolviendo la ecuación tenemos las soluciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= e^{-\mu/2 t} \cos(\omega_\mu t) \\ \mathbf{x}_2 &= e^{-\mu/2 t} \sin(\omega_\mu t) \end{aligned}$$



## **Parte II**

# **Segundo parcial**



## Capítulo 4

# Sistemas lineales de orden I

### 4.1. Introducción a sistemas

En esta sección vamos a ver como resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de orden I. Estos sistemas son del tipo:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases}$$

y habitualmente los escribiremos:

$$X' = F(t, X)$$

Donde:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$
$$F(t, X) = \begin{pmatrix} f(t, x, y) \\ g(t, x, y) \end{pmatrix}$$

#### Ejemplo 28 (*Sistema lineal de orden I a partir de una ecuación de orden II*)

Sea  $x'' + \mu \cdot (1 - x^2)x' + x = 0$ , vamos a estudiarla como sistema.

Consideramos  $y = x'$ . Tenemos:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$x' = y = f(t, x, y)$$
$$y' = (x'') = -x - \mu(1 - x^2)y = g(t, x, y)$$

entonces obtenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -x - \mu(1 - x^2)y \end{pmatrix}$$

Como hemos visto, podemos transformar una ecuación diferencial de orden II en un sistema de ecuaciones de orden I. De hecho, podremos transformar cualquier EDO en un sistema de orden I.

**Observación.** Cualquier sistema se puede convertir en un sistema autónomo, es decir, no depende de la variable  $t$ .

Sea nuestro sistema:  $X' = F(t, X)$  con  $X : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F : (\alpha, \beta) \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Podemos tomar:

$$Y = \begin{pmatrix} t \\ X \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} 1 \\ F(t, X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ F(Y) \end{pmatrix} = G(Y)$$

Y de esta forma hemos transformado nuestro sistema  $X' = F(t, X)$  en uno autónomo  $Y' = G(Y)$ .

## 4.2. Unicidad, existencia y estructura de soluciones.

Consideraremos a partir de ahora el sistema:

$$X' = \mathbb{A}(t)X + B(t)$$

con  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , y  $X, B \in \mathbb{R}^n$

**Teorema 12** (Teorema de existencia, unicidad y estructura). Sean  $\mathbb{A} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ambas continuas. Y sea  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ ,  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ . Entonces:

1. Existe una solución  $X(t)$  del PVI:

$$\begin{cases} X' = \mathbb{A}(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

es decir,  $\exists X : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que cumple el PVI y esa solución es única.

2. Para la ecuación homogénea asociada  $(\mathcal{EDL}_h) \equiv X' = \mathbb{A}(t) \cdot X$ :

- Existen  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  linealmente independientes, que son soluciones de  $(\mathcal{EDL}_h)$  en  $t \in [\alpha, \beta]$ .
- Si  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  son soluciones linealmente independientes de  $(\mathcal{EDL}_h)$ , entonces:

$$X(t) \text{ es solución de } (\mathcal{EDL}_h) \text{ en } [\alpha, \beta] \iff \exists c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R} : X(t) = c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t)$$

3. Si  $X_p(t)$  es una solución de  $(\mathcal{EDL})$ , entonces  $X(t)$  es solución de  $(\mathcal{EDL})$  (en  $[\alpha, \beta]$ )  $\iff$

$$\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} : X = X_p + \sum_{j=1}^n c_j X_j$$

donde  $\sum_{j=1}^n c_j X_j$  es la solución general de la homogénea.

*Demostración.* Veamos la demostraciones de cada punto:

1. Lo veremos más adelante.
2. Elegimos  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ . Sea  $X_j(t)$  la solución del PVI con

$$X_j(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_j \text{ vector } j\text{-ésimo de la base canónica.}$$

Afirmamos que son linealmente independientes pues

$$\sum c_j X_j(t) = 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta] \implies \sum c_j X_j(t_0) = 0 \implies c_i = 0 \quad \forall i$$

Entonces:

$X_1, \dots, X_n$  son soluciones de  $(\mathcal{EDL}_h)$  linealmente independientes. La implicación ( $\iff$ ) está demostrada, pues si  $X = \sum c_j X_j$  entonces  $X$  es solución. Vamos a ver la implicación ( $\implies$ ), que la resolveremos por reducción al absurdo.

Elegimos  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ . Entonces  $X_1(t_0) + \dots + X_n(t_0)$  son linealmente independientes. Si no lo fueran, existirían  $c_1, \dots, c_n : \exists c_i \neq 0$  y que  $c_1X_1(t_0) + \dots + c_nX_n(t_0) = 0$ . Y esto haría que:

$$c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t)$$

resuelve:

$$\begin{cases} X' = \mathbb{A}(t)X \\ X(t_0) = 0 \end{cases} \implies X(t) = 0 \text{ también es solución.}$$

Por unicidad es una contradicción.

Además, si  $X(t)$  es solución de  $(\mathcal{EDL}_h)$ , entonces acabamos de ver que  $\exists c_1, \dots, c_n$  tal que  $X(t_0) = \sum c_j X_j(t_0)$  (donde  $X_j$  forman una base de  $\mathbb{R}^n$ ). Por unicidad:

$$X(t) = \sum_{j=1}^n c_j X_j(t) \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$$

3. Vamos a ver que si tenemos dos soluciones que resuelven el sistema, entonces la resta es solución de la homogénea. Es decir, si  $X(t)$  resuelve  $X' = \mathbb{A}(t) + B(t)$ , sea:

$$Y(t) \equiv X(t) - X_p(t)$$

entonces:

$$Y' = X' - X'_p = (\mathbb{A}(t)X + B(t)) - (\mathbb{A}(t)X_p + B(t)) = \mathbb{A}(t)X - \mathbb{A}(t)X_p = \mathbb{A}(t)Y \implies Y = c_1 X_1 + \dots + c_n X_n$$

◇

**Observación.** El apartado 2 nos dice que el conjunto de soluciones de la  $(\mathcal{EDL}_h)$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ .

Durante la demostración del apartado 2 vimos aproximadamente el siguiente lema:

**Proposición 13.** Sean  $X_1(t) + X_2(t) + \dots + X_n(t)$  solucion de la  $(\mathcal{EDL}_h)$  son equivalentes:

1.  $X_1, \dots, X_n$  son linealmente independientes como funciones, es decir,

$$\sum c_j X_j(t) = 0 \text{ con } t \in [\alpha, \beta] \implies c_j = 0 \quad \forall j$$

2.

$\exists t_0 \in [\alpha, \beta] : X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)$  son vectores linealmente independientes.

3.

$\forall t \in [\alpha, \beta]$ , entonces  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  son vectores linealmente independientes.

*Demostración.* En la demostración del apartado 2 del teorema 12 vimos que 1  $\iff$  2 y 3 se sigue sin dificultad. ◇

**Observación.** ▀ El enunciado del lema sigue siendo cierto si hay  $m \leq n$  soluciones con  $n$  la dimensión del espacio de soluciones.

- ▀  $X_1(t_0) \dots X_n(t_0)$  son linealmente independientes  $\iff \det \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \neq 0$

**Definición 5** (Wronskiano). El **wronskiano** de  $X_1, \dots, X_n$  es la función:

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

Tras ver esta definición del wronskiano, lo que dice parte del lema 13 es que:

$$W(t) \neq 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta] \iff \exists t_0 \in [\alpha, \beta] : W(t_0) \neq 0$$

Más adelante veremos que  $W(t)$  satisface la ecuación:

$$\begin{aligned} W'(t) &= a(t)W(t) : t \in [\alpha, \beta] \\ a(t) &= \text{Traza}(\mathbb{A}(t)) \end{aligned}$$

De ahí  $W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$  y se ve que  $W(t) = 0$  ó  $W(t) \neq 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$

### 4.3. Sistema lineal con coeficientes constantes.

Vamos a considerar sistemas lineales de ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes no son una variable del problema.

#### Ejemplo 29 (*Sistemas lineales con coeficientes constantes - Idea básica*)

Vamos a considerar:

$$X'(t) = \mathbb{A}X(t), \text{ con } \mathbb{A}_{n \times n} \text{ constante.}$$

Procediendo de forma similar a como lo hacíamos en el caso de ecuaciones lineales de segundo orden, vamos a probar  $X(t) = e^{\lambda t}V : V \in \mathbb{R}^n$ ,  $V$  constante como solución. Vamos a ver como hallamos  $\lambda$  y  $V$ .

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t}V \equiv \mathbb{A}X(t) = \mathbb{A}e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}\mathbb{A}V$$

por tanto:

$$X' = \mathbb{A}X \iff e^{\lambda t}(\mathbb{A}V - \lambda V) = 0 \iff \mathbb{A}V = \lambda V$$

es decir:

$V$  es autovector de  $\mathbb{A}$  con autovalor  $\lambda$

#### Ejemplo 30 (*Sistema lineal con matriz diagonalizable*)

Sea

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

entonces es fácil ver que los autovalores de  $\mathbb{A}$  son 1, 1, 2. Con sus correspondientes autovectores:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con lo que tenemos tres soluciones:

$$X_1(t) = e^t V_1$$

$$X_2(t) = e^t V_2$$

$$X_3(t) = e^{2t} V_3$$

que son base del espacio de soluciones de  $X' = \mathbb{A}X$

Hemos podido hacer esto por que la matriz es diagonalizable, es decir

$$\exists \mathbb{B} : \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

donde la diagonal son los autovalores.

**Ejemplo 31 (Sistema lineal con matriz no diagonalizable)**

Sea

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X = \mathbb{A}X$$

De aquí hallamos que los autovalores son 2, 2. Entonces:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

donde hallamos:

$$2a + b = 2a \quad (4.1)$$

$$2b = 2b \quad (4.2)$$

$$b = 0 \quad (4.3)$$

Entonces hemos hallado un autovector:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies X_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para buscar otra solución intentamos:

$$X(t) = e^{2t}(C + tD)$$

donde  $C, D \in \mathbb{R}^2$ . Entonces:

$$X' = e^{2t}(2C + D + 2tD) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X = e^{2t}(\mathbb{A}C + t\mathbb{A}D)$$

es decir, se necesita:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}D = 2D &\implies D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ por ejemplo.} \\ \mathbb{A}C = 2C + D & \end{aligned}$$

es decir,  $(\mathbb{A} - 2I)C = D$  con  $I$  la identidad. Tenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies b = 1, \text{ vale cualquier valor para } a.$$

entonces:

$$\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies a = 0$$

Por tanto podemos hallar  $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $D$  era  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Por tanto nuestras dos soluciones son:

$$X_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_2(t) = e^{2t} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

## 4.4. Exponencial de una matriz

Para esto, vamos a construir la exponencial de una matriz.

Sea  $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{d \times d}$ . Vamos a intentar construir la exponencial de la misma forma que hace Taylor cuando trabajamos con escalares.

**Proposición 14.** La serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!}$$

converge (sea cual sea  $\mathbb{A}$ )

*Demostración.* Empezamos viendo ciertos aspectos.

1. Definimos:

$$\|\mathbb{A}\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\|y\|_2=1} \|Ay\|_2$$

con  $x, y \in \mathbb{C}^d$  y  $\|z\|_2 = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_d|^2}$  la norma euclídea.

Se puede comprobar que lo que acabamos de definir es una norma y tiene una propiedad importante:

$$\|\mathbb{AB}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{B}\| \text{ y en particular } \|\mathbb{A}^n\| \leq \|\mathbb{A}\|^n$$

2. Es fácil ver que:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\mathbb{A}\|^n}{n!} \text{ y esta última converge.}$$

Entonces,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!}$  converge y:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\mathbb{A}\|^n}{n!}$$

◇

**Definición 6** (Exponencial de una matriz). Definimos la exponencial de una matriz  $\mathbb{A}$  como:

$$e^{\mathbb{A}} = \exp(\mathbb{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!}$$

Vamos a ver ciertas propiedades:

**Proposición 15** (Exponencial de una matriz - propiedades). 1. Si  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{B}$  conmutan ( $\mathbb{AB} = \mathbb{BA}$ ) entonces:

$$e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}} = e^{\mathbb{A}} e^{\mathbb{B}}$$

2. Si  $\mathbb{A}$  es diagonal ( $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ ), entonces:

$$e^{\mathbb{A}} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots)$$

3. Si  $\mathbb{A} = \mathbb{S}\mathbb{B}\mathbb{S}^{-1}$ , entonces:

$$e^{\mathbb{A}} = \mathbb{S}e^{\mathbb{B}}\mathbb{S}^{-1}$$

4. Si  $\mathbb{B}$  es una matriz de bloques diagonales:

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbb{B}_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbb{B}_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \text{ con } \mathbb{B}_i \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

entonces:

$$\mathbb{B}^n = \text{diag}_b(\mathbb{B}_1^n, \mathbb{B}_2^n, \dots, \mathbb{B}_m^n)$$

y por tanto:

$$e^{\mathbb{B}} = \text{diag}_b(e^{\mathbb{B}_1}, e^{\mathbb{B}_2}, \dots, e^{\mathbb{B}_n})$$

5.

$$e^{(t+s)\mathbb{A}} = e^{t\mathbb{A}} e^{s\mathbb{A}}$$

6.

$e^{t\mathbb{A}}$  es invertible y su inversa es  $e^{-t\mathbb{A}}$

*Demostración.* Vamos a demostrar cada propiedad:

1.  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$  conmutan entonces:

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B})^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \mathbb{A}^k \mathbb{B}^{m-k}$$

Por tanto:

$$e^{\mathbb{A}} e^{\mathbb{B}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{B}^k}{k!} = (\dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\mathbb{A} + \mathbb{B})^m = e^{\mathbb{A} + \mathbb{B}}$$

2.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d^m \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathbb{S} \mathbb{B} \mathbb{S}^{-1} \\ \mathbb{A}^2 &= \mathbb{S} \mathbb{B} \mathbb{S}^{-1} \mathbb{S} \mathbb{B} \mathbb{S}^{-1} = \mathbb{S} \mathbb{B}^2 \mathbb{S}^{-1} \\ \mathbb{A}^m &= \mathbb{S} \mathbb{B}^m \mathbb{S}^{-1} \implies \sum \frac{\mathbb{A}^m}{m!} = \mathbb{S} \frac{\mathbb{B}^m}{m!} \mathbb{S}^{-1} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{B}_2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_1^2 & 0 \\ 0 & \mathbb{B}_2^2 \end{bmatrix}$$

5.  $t\mathbb{A} = s\mathbb{A}$  conmutan

6. Por la propiedad anterior:

$$I = e^{0\mathbb{A}} = e^{(t-t)\mathbb{A}} = e^{t\mathbb{A}} e^{-t\mathbb{A}}$$

◇

**Proposición 16.** Sea  $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{d \times d}$

$$\frac{d}{dt} e^{t\mathbb{A}} = \mathbb{A} e^{t\mathbb{A}} = e^{t\mathbb{A}} \mathbb{A}$$

*Demostración.* A completar

◇

#### 4.4.1. $e^{\mathbb{A}t}$ y la forma de Jordan

Diremos que una matriz  $\mathbb{A}$  está expresada en forma canónica de Jordan cuando se encuentra expresada de la forma:

$$\mathbb{A} = \mathbb{S} \mathbb{J} \mathbb{S}^{-1}$$

Donde  $\mathbb{J}$  es una matriz de bloques, de la forma:

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbb{J}_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbb{J}_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \text{ con } \mathbb{J}_i \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

Vamos a ver la expresión en forma canónica de Jordan de  $e^{\mathbb{A}t}$ , con  $\mathbb{A} = \mathbb{S} \mathbb{J} \mathbb{S}^{-1}$ .

1. Como vimos en las propiedades de la exponencial matricial:

$$e^{\mathbb{A}t} = \mathbb{S}e^{\mathbb{J}t}\mathbb{S}^{-1} = S \begin{bmatrix} t\mathbb{J}_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & t\mathbb{J}_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & t\mathbb{J}_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \mathbb{S}^{-1}$$

2. Si el bloque  $\mathbb{B} = \mathbb{J}_i$  es de la forma:  $\mathbb{B} = \text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$  entonces:

$$e^{t\mathbb{B}} = \text{diag}(e^{t\lambda}, e^{t\lambda}, \dots, e^{t\lambda}) = e^{t\lambda}I$$

3. Si  $\mathbb{B} = \mathbb{J}_i$  es de la forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \implies \mathbb{B} = \lambda I + \mathbb{N}$$

con

$$\mathbb{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

y se puede comprobar que si  $\mathbb{N}$  es  $m \times m$  entonces

$$\mathbb{N}^m = 0$$

Por tanto,

$$t\mathbb{B} = \lambda tI + t\mathbb{N} \implies e^{t\mathbb{B}} = e^{\lambda tI + t\mathbb{N}} = e^{\lambda t}Ie^{t\mathbb{N}} = e^{\lambda t}e^{t\mathbb{N}}$$

y a partir del desarrollo de la exponencial:

$$e^{t\mathbb{N}} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t\mathbb{N})^k}{k!}$$

ya que los términos con  $k \geq m$  son nulos pues  $\mathbb{N}^k : k \geq m$  se anula.

Tenemos por tanto que:

$$e^{t\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots \\ 0 & \ddots & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

### Ejemplo 32 (Matriz de Jordan dada $\mathbb{A}$ )

Sea  $\mathbb{A}$  una matriz

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -8 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \implies P(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda I)$$

Tras calcular, obtenemos los autovalores:

$$\begin{array}{c} -1 \text{ triple} \\ 3 \end{array}$$

y los autovectores:  $[0 \ 0 \ 0 \ -1]^T$  del autovalor 3, y  $[1 \ 1 \ 0 \ 1]^T$ ,  $[1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$  del autovalor -1. Es decir, necesitamos un autovalor generalizado para -1 pues solo tenemos 3 autovectores.

Para ello, tenemos que calcular  $(\mathbb{A} - \lambda I)^m$  con  $m > 1$  y lo más próximo al numero de autovectores que nos faltan, es decir  $m = 2$ . Como necesitamos generalizar para el autovalor  $\lambda = -1$ , entonces calculamos:

$$(\mathbb{A} + I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -32 & 16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

El autovector  $v$  generalizado tendrá que cumplir:

$$(\mathbb{A} + I)^2 v = 0 \text{ y } (\mathbb{A} + I)v \neq 0 \implies v = [1 \ 0 \ 1 \ 1]^T$$

Con esto, hemos hallado  $\mathbb{J}$  y  $\mathbb{S}$ :

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{S} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_{-1} & v_3 & v_1 & v_{gen} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y finalmente:

$$e^{t\mathbb{A}} = \mathbb{S} e^{t\mathbb{J}} \mathbb{S}^{-1}$$

## 4.5. Matriz fundamental

**Definición 7** (Matriz fundamental). Llamamos **matriz fundamental** a :

$$F(t) = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

con  $X_1, \dots, X_n$  son soluciones linealmente independientes y cuyo determinante es el wronskiano, según vimos en la definición 5.

**Observación.** Sea  $(\mathcal{EL}_h) \equiv X' = \mathbb{A}X$  con  $\mathbb{A}$  una matriz  $d \times d$ . Sea  $\mathbb{F}$  la matriz fundamental.

- La solución general de  $(\mathcal{EL}_h)$  es  $\mathbb{F}(t) \cdot C$  con:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^d c_j X_j(t)$$

- Esto vale para  $X' = \mathbb{A}(t)X$ . Por tanto, podemos afirmar que:

$$\mathbb{F}'(t) = \mathbb{A}\mathbb{F}(t) \text{ con } \det(\mathbb{F}(t)) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X'_1(t_0) & \cdots & X'_n(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \mathbb{A} \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{A}X_1(t_0) & \cdots & \mathbb{A}X_n(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

En general, vamos a buscar una  $\mathbb{F}$  especial; la que cumple que  $\mathbb{F}(0) = I$ . Vamos a ver que esta  $\mathbb{F}$  es de la forma:

$$\mathbb{F}(t) = e^{t\mathbb{A}}$$

**Proposición 17** (Matriz fundamental principal). Sea  $X' = \mathbb{A}X$ , afirmamos que  $e^{t\mathbb{A}}$  es una matriz fundamental que además cumple que su valor en  $t = 0$  es  $I_n$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{t\mathbb{A}} &= \mathbb{A}e^{t\mathbb{A}} \\ e^{0\mathbb{A}} &= I((e^{t\mathbb{A}})^{-1} = e^{-t\mathbb{A}})\end{aligned}$$

◊

A modo de recordatorio, hemos visto en 1 que si  $\mathbb{F}(t)$  es una matriz fundamental, la solución general de  $X' = \mathbb{A}X$  es:

$$\mathbb{F}(t) \cdot C : C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^d c_j X_j(t)$$

### Ejemplo 33 (Cálculo de $e^{\mathbb{A}t}$ , la matriz fundamental principal)

Podemos afrontar el cálculo de diversas formas:

- Pasando a forma canónica de Jordan. (Muy costoso).
- Encontrar directamente las  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  que forman  $\mathbb{A}$ . Es decir:
  1. Se calculan los autovalores de  $\mathbb{A}$ , es decir, calcular los  $\lambda_i$ :

$$\det(\mathbb{A} - \lambda I) = 0$$

La fórmula anterior también se denomina **polinomio característico** de la matriz  $\mathbb{A}$ .

2. Buscar tantas soluciones de  $X' = \mathbb{A}X$  (con datos iniciales apropiados) como el tamaño de  $\mathbb{A}$ . En caso de que  $\lambda$  sea un autovalor con multiplicidad  $m$  necesitamos  $m$  vectores linealmente independientes asociados a este autovalor. Encontramos todas las soluciones posibles de la forma:

$$e^{\lambda t} = V$$

donde  $V$  es el autovector de  $\mathbb{A}$  con autovalor  $\lambda$ , luego si tenemos multiplicidad sobre  $\lambda$ , todas las soluciones posibles independiente de la anterior es de la forma:  $e^{\lambda t}(V_1 + tV_2)$ . Si es necesario se continua con  $e^{\lambda t}(V_1 + tV_2 + t^2V_3)$  y así sucesivamente.

Vamos a ver distintos usos que podemos darle a la matriz:  $e^{t\mathbb{A}}$ .

1. Se usa como solución del PVI:

$$\begin{cases} X' = \mathbb{A}X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Donde la solución general como hemos visto es:  $\mathbb{F}(t)C$ , entonces:

$$\begin{aligned}X(t) = e^{t\mathbb{A}}C &\implies X_0 = X(t_0) = e^{t_0\mathbb{A}}C \implies C = (e^{t_0\mathbb{A}})^{-1}X_0 = e^{-t_0\mathbb{A}}X_0 \text{ es decir,} \\ X(t) &= e^{(t-t_0)\mathbb{A}}X_0\end{aligned}$$

2. Para encontrar una solución particular de  $X' = \mathbb{A}X + B(t)$ , por variación de las constantes:

$$\begin{aligned}X(t) &= e^{t\mathbb{A}}U(t) \implies X'(t) = (\frac{d}{dt}e^{t\mathbb{A}})U(t) + e^{t\mathbb{A}}\frac{d}{dt}U(t) = \mathbb{A}e^{t\mathbb{A}}U(t) + e^{t\mathbb{A}}U'(t) \text{ entonces} \\ \mathbb{A}X + B(t) &= X'(t) = \mathbb{A}e^{t\mathbb{A}}U(t) + e^{t\mathbb{A}}U'(t) \implies e^{t\mathbb{A}}U'(t) = B(t)\end{aligned}$$

De esta implicación se sigue:

$$U'(t) = e^{-t\mathbb{A}}B(t) \implies U(t) \text{ es una primitiva de } e^{-t\mathbb{A}}B(t)$$

Por ejemplo:

$$U(t) = \int_{t_0}^t e^{-s\mathbb{A}}B(s)ds$$

Y por tanto, la solución particular sería:

$$X(t) = e^{t\mathbb{A}}U(t) = e^{t\mathbb{A}} \int_{t_0}^t e^{-s\mathbb{A}}B(s)ds$$

3. La solución del PVI:

$$\begin{cases} X' = \mathbb{A}X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

es entonces:

$$X(t) = e^{(t-t_0)\mathbb{A}}X_0 + e^{t\mathbb{A}} \int_{t_0}^t e^{-s\mathbb{A}}B(s)ds$$

4. Lo mismo se puede hacer para el caso general  $X' = \mathbb{A}(t)X + B$ .

Si  $\mathbb{F}$  es matriz fundamental:

$$\text{PVI} \equiv \begin{cases} X' = \mathbb{A}X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

entonces:

$$X(t) = \mathbb{F}(t)C \quad (4.4)$$

$$X_0(t) = \mathbb{F}(t_0)C \quad (4.5)$$

$$C = \mathbb{F}^{-1}(t_0)X_0 \implies X(t) = \mathbb{F}(t)\mathbb{F}(t_0)^{-1}X_0 \quad (4.6)$$

5. De la misma forma, la solución particular de  $X = \mathbb{A}(t)X + B(t)$  es:

$$\mathbb{F}'(t) = \int_{t_0}^t \mathbb{F}^{-1}(s)B(s)ds$$

y la solución del PVI es:

$$X(t) = \mathbb{F}(t)\mathbb{F}^{-1}(t_0)X_0 + \mathbb{F}(t) \int_{t_0}^t \mathbb{F}^{-1}(s)B(s)ds$$

#### Ejemplo 34 (Cálculo de la matriz fundamental principal $e^{t\mathbb{A}}$ )

Sea:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

para el sistema  $X' = \mathbb{A}X$ .

1. Encontramos los autovalores:

$$0 = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -3 \\ 0 & 3 & 7 - \lambda \end{bmatrix} \implies \lambda = 2, \lambda = 4 \text{ (doble)}$$

2. Encontramos los autovectores asociados:

Para  $\lambda = 2$ , hallamos el autovector  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ , por tanto:

$$X_1(t) = e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ es solución de } X' = \mathbb{A}X$$

Para  $\lambda = 4$ , hallamos el autovector resolviendo  $V$  para:  $(\mathbb{A} - 4I)V = 0$ . Obtenemos:

$$X_2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pero  $\lambda = 4$  solo contribuye una solución con autovectores, nos falta otra.

3. Buscamos otras soluciones si es necesario:

Planteamos una solución del tipo:

$$X = e^{4t}(U_1 + tU_2) \text{ con } U_2 \neq 0 \text{ pues entonces } U_1 = V$$

Calculamos  $X'$ :

$$X' = e^{4t}(4U_1 + U_2 + 4tU_2) = \mathbb{A}X = \mathbb{A}(e^{4t}(U_1 + tU_2))$$

De esta igualdad se sigue:

$$\begin{cases} \mathbb{A}U_1 = 4U_1 + U_2 \\ \mathbb{A}U_2 = 4U_2 \end{cases} \implies \begin{cases} (\mathbb{A} - 4I)U_1 = U_2 \\ (\mathbb{A} - 4I)U_2 = 0 \end{cases}$$

y como necesitamos que  $U_2 \neq 0$ , entonces buscamos  $U_1$  que cumple:

$$\begin{cases} (\mathbb{A} - 4I)^2U_1 = 0 \\ (\mathbb{A} - 4I)U_1 \neq 0 \end{cases}$$

Calculamos  $(\mathbb{A} - 4I)^2$

$$(\mathbb{A} - 4I)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y entonces cualquier  $U_1 = [0 \ a \ b]^T$  cumple la primera ecuación. Como necesitamos que  $(\mathbb{A} - 4I)U_1 \neq 0$ , obtenemos por ejemplo  $U_1 = [0 \ 1 \ 0]^T$ .

Como ya hemos hallado  $U_1$  calculamos  $U_2 = (\mathbb{A} - 4I)U_1 = [0 \ -3 \ 3]^T$  y con esto obtenemos:

$$X_3(t) = e^{4t} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-3t)e^{4t} \\ 3te^{4t} \end{bmatrix}$$

4. Calculamos la matriz fundamental  $\mathbb{F}$

$$\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ X_1(t_0) & X_2(t_0) & X_3(t_0) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & (1-3t)e^{4t} \\ 0 & -e^{4t} & 3te^{4t} \end{bmatrix}$$

Tendríamos que ver si  $e^{t\mathbb{A}} = \mathbb{F}(t)$ , que no es cierto pues  $\mathbb{F}(0) \neq I$

5. Corección de la matriz fundamental  $\mathbb{F}$  para obtener la fundamental principal Como se verá en la proposición 18, hay que encontrar  $\mathbb{B} : \mathbb{F}(0)\mathbb{B} = I \implies B = \mathbb{F}(0)^{-1}$ , entonces:

$$\mathbb{B} = \mathbb{F}(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y finalmente:

$$e^{t\mathbb{A}} = \mathbb{F}(t)\mathbb{B} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-3t)e^{4t} & -3te^{4t} \\ 0 & 3te^{4t} & (1+3t)e^{4t} \end{bmatrix}$$

Es fácil comprobar que esta última matriz es  $I$  con  $t = 0$ .

**Observación.** Si en el ejemplo 34 estuviésemos en dimensión más alta buscaríamos todas las soluciones del tipo:

$$e^{4t}(U_1 + tU_2) : U_2 \neq 0$$

So no hay tantas soluciones a la ecuación anterior como multiplicidad del autovalor, buscamos el mayor número posible de la forma:

$$e^{4t}(U_1 + tU_2 + \frac{t^2}{2!}U_3) : U_3 \neq 0$$

y así sucesivamente.

**Proposición 18** (Matriz fundamental como producto de una fundamental y otra matriz). Si  $\mathbb{F}(t)$  es una matriz fundamental y  $\mathbb{B}$  es invertible, entonces  $\mathbb{F}(t)\mathbb{B}$  también es una matriz fundamental.

*Demostración.*

$$(\mathbb{F}(t)\mathbb{B})' = \mathbb{F}'(t)\mathbb{B} = (\mathbb{A}\mathbb{F}(t))\mathbb{B} = \mathbb{A}(\mathbb{F}(t)\mathbb{B}) \implies \text{las columnas de } \mathbb{F}(t)\mathbb{B} \text{ son soluciones}$$

y además,

$$\mathbb{F}(t_0) \text{ invertible} \implies \mathbb{F}(t_0)\mathbb{B} \text{ es invertible}$$

◇

**Proposición 19** (EDO que satisface el determinante de una matriz de soluciones). Sea  $X' = \mathbb{A}(t)X$  con  $\mathbb{A}$  de tamaño  $d \times d$ .

Sean  $X_1, \dots, X_d$  soluciones no necesariamente linealmente independientes,  $w(t) = \det \mathbb{F}$  con  $\mathbb{F}(t)$ :

$$\mathbb{F}(t) = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1(t_0) & \cdots & X_d(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

entonces,  $w(t)$  satisface la EDO  $w'(t) = a(t)w(t)$  donde  $a(t) = \text{traza}(\mathbb{A}(t))$ .

Como consecuencia:

$$w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$$

$$w(t) = 0 \text{ (en su intervalo de definición), o bien } w(t) \neq 0$$

*Demostración.* La demostración sigue de forma directa, desarrollando la derivada del  $\det \mathbb{F}$  y sabiendo que  $\mathbb{F}' = \mathbb{A}\mathbb{F}$ . Terminamos hallando que  $\frac{d}{dt} \det \mathbb{F} = (\sum a_{ii}) w(t)$  ◇



# Capítulo 5

## Teorema general de existencia y unicidad

Vamos a considerar el PVI:

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Donde definimos  $F$  como:

$$F : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

donde  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  es abierto y  $t_0 \in [a, b]$ . Vamos a considerar entonces:

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t X'(s) ds \text{ y si } X(t) \text{ cumple el PVI, entonces } X(t_0) + \int_{t_0}^t X'(s) = X(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, X(s)) ds \equiv G(X)(t)$$

Entonces hay que resolver:

$$X = G(X) \text{ con } G : \text{espacio de funciones} \rightarrow \text{espacio de funciones}$$

Intentamos:

$$\begin{cases} X_0(t) = X_0 \\ X_{n+1}(t) = G(X_n)(t) \end{cases}$$

Y nuestro objetivo es ver que  $X_n$  converge a una función  $X$ , y además que:

$$X_n \rightarrow X \implies G(X_n) \rightarrow X \text{ es decir, } G \text{ es continua.}$$

Para ello vamos a ver un par de secciones de recordatorio de análisis. Tras ello escribiremos ciertas propiedades previas para terminar por demostrar el teorema.

### 5.1. Espacio vectorial de funciones.

En esta sección vamos a hablar de funciones  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I \subset \mathbb{R}$ .

**Definición 8** (Convergencia puntual y convergencia uniforme). Sea  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

1.  $f_n$  converge a  $f$  puntualmente (o punto a punto)  $\iff f_n(t) \rightarrow f(t) \forall t \in I$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
2.  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  si y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in I \quad \forall n \geq N$$

**Observación.** Algunos comentarios:

- En (1), la convergencia se puede expresar formalmente como:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t \in I \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

La diferencia principal es que  $N$  en (1) depende de  $t$  y  $\varepsilon$ , pero en (2)  $N$  sólo depende de  $\varepsilon$ .

- Claramente,  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \implies f_n \xrightarrow{\text{pp}} f$

### Ejemplo 35 (Convergencia de una función)

Sea  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = 1 + x^n$ . Entonces:

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} \equiv f$$

Entonces es fácil ver que:  $f_n \xrightarrow{\text{pp}} f$

Vamos a ver que:  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$  en  $[0, 1]$ . Tenemos que hallar  $N$  para que se cumpla:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, n \geq N$$

Si  $x < 1$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon = |x^n| < \varepsilon \iff n \log x < \log \varepsilon \quad (\text{digamos } \varepsilon < 1) \implies n > \frac{\log \varepsilon}{\log x}$$

Cuando  $x \rightarrow 1_-$ ,  $\log x \rightarrow 0 \implies \frac{\log \varepsilon}{\log x} \rightarrow \infty$ , entonces:

$$N \geq \frac{\log \varepsilon}{\log x} \implies N \text{ tiene que depender de } x \implies N = \frac{\log \varepsilon}{\log x} + 1$$

Sin embargo, se puede comprobar que  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$  en  $[0, a]$  con  $a < 1$ , ya que basta tomar  $N = \frac{\log \varepsilon}{\log a}$ .

**Observación.** Otra forma de expresar  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$  es la siguiente:

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in I \text{ si } n \geq N$$

Entonces, podemos hablar de:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$$

**Definición 9** (Norma infinito). Sea  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Llamamos **norma infinito** de  $g$  al resultado:

$$\|g\|_\infty = \sup_{t \in I} |g(t)|$$

que puede ser  $+\infty$  si  $g$  no está acotada.

**Proposición 20** (Propiedades de  $\|\cdot\|_\infty$ ). La norma infinito tiene las siguientes propiedades:

1.

$$\|f(t)\|_\infty = 0 \iff f = 0 \quad \forall t \text{ en su dominio}$$

2.

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty, \lambda \in \mathbb{R}$$

3.

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

*Demostración.* (1), y (2) son directas, vamos a ver la demostración de (3).

$$|f(t) + g(t)| \geq |f(t)| + |g(t)| \geq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \implies \|f + g\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t) + g(t)| \geq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

◇

**Observación.** De la demostración observamos que:

- $+\infty + a = +\infty$
- $f_n \rightarrow_\infty f \iff \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$

### Ejemplo 36 (*Espacios de funciones*)

Algunos espacios de funciones son:

1.

$$B(I) = \{g : I \rightarrow \mathbb{R}, g \text{ acotada}\}$$

es decir,  $\exists L_g \in \mathbb{R} : |g(t)| < L_g \forall t \in I$

Entonces,  $B(I)$  es un espacio vectorial y  $\|\cdot\|_\infty$  es una norma en él.

### Ejemplo 37 (*Determinación de convergencia uniforme*)

Sea  $f_n$ :

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x} \text{ en } [0, 1]$$

Vamos a ver si converge uniformemente a algo. Reescribimos  $f_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ :

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Por la definición, queremos ver si se cumple:

$$\forall \varepsilon \exists N = N(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in [0, 1]$$

Entonces, tenemos que hallar  $N$  tal que:

$$\left| \frac{x}{1 + n^2x} \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Distinguimos dos casos:

- Caso  $0 \leq x < \varepsilon$ :

$$\frac{x}{1 + n^2x} \leq x < \varepsilon$$

- Caso  $\varepsilon \leq x \leq 1$ :

$$\frac{1}{1 + n^2x} \leq \frac{1}{1 + n^2\varepsilon} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{1 + n^2x} < \varepsilon \iff n^2\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \implies n \geq \sqrt{\frac{(1/\varepsilon - 1)}{\varepsilon}} = N(\varepsilon)$$

**Ejercicio propuesto 7.** Resolver el ejemplo anterior hallando que  $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$ .

**Proposición 21** (Sucesión de funciones continuas). Sean  $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ . Si  $f_n$  es continua para todo  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $f$  es continua.

*Demostración.* Sea  $t_0 \in I$ , queremos ver si  $f$  es continua en  $t_0$ .

Decimos que  $f$  es continua si:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \text{si } |t - t_0|_{t \in I} < \delta \implies |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

Desarrollamos:

$$|f(t) - f(t_0)| = |f(t) - f_n(t) + f_n(t) - f_n(t_0) + f_n(t_0) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t_0) - f(t_0)| + |f_n(t) - f_n(t_0)|$$

Como  $f_n \xrightarrow{unif} f$ ,  $\exists N : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/3$ . Fijamos  $n = N$ , entonces:

$$\begin{aligned} |f(t) - f_n(t)| &< \varepsilon/3 \\ |f_n(t_0) - f(t_0)| &< \varepsilon/3 \\ |f_n(t) - f_n(t_0)| &= |f_N(t) - f_N(t_0)| \end{aligned}$$

Como  $f_N$  es continua:

$$\exists \delta > 0 : |f_N(t) - f_N(t_0)| < \varepsilon/3 \implies |f(t) - f(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

◊

**Corolario 1.**

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{pp} f \\ f_n \text{ continua } \forall n \\ f \text{ no continua} \end{cases} \implies f_n \xrightarrow{unif} f$$

Sin embargo, todo este desarrollo requiere que conozcamos el límite de  $f_n$  en caso de que converja. Vamos a ver como podemos comprobar que  $f_n$  converge uniformemente sin conocer su (posible) límite.

**Definición 10** (Sucesión de Cauchy de funciones). Sean  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  son una sucesión de Cauchy para  $\|\cdot\|_\infty \iff \|f_n - f_m\|_\infty \rightarrow 0_{n,m \rightarrow \infty}$ , es decir:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

**Proposición 22** (Sucesión de Cauchy y convergencia uniforme). 8 Si  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy, entonces:

$$\exists f : I \rightarrow \mathbb{R} : f_n \xrightarrow{unif} f$$

*Demostración.* Vamos a ver ciertas afirmaciones:

1.  $f_n(x)$  converge  $\forall x \in I$ . Sea  $x \in I$ , entonces:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{y \in I} |f_n(y) - f_m(y)| = \|f_n - f_m\|_\infty$$

Entonces para  $x$  fijo,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R} \implies f_n(x)$  converge a un punto de  $\mathbb{R}$ . Llamemos  $f(x)$  a ese punto:  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

◊

**Ejercicio propuesto 8.** El recíproco de la proposición también es cierto. Demuéstraloo.

Debido a que hemos definido la norma  $\|\cdot\|_\infty$ , esto nos permite definir una distancia  $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ . Y como hemos definido una norma para el espacio vectorial de funciones, entonces lo llamamos *espacio vectorial normado* y tiene ciertas propiedades.

**Proposición 23.** El espacio vectorial de funciones  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy converge a un elemento de ese espacio.

*Demostración.* Sea  $f_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones del espacio vectorial.

1. Cauchy  $\implies$  converge uniformemente ( $af$ ).

2.

$$\begin{cases} f_n \text{ cont.} \\ f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \end{cases} \implies f \text{ cont. (y } ||f_n - f|| \rightarrow 0)$$

◊

**Proposición 24** (Límite de la integral de una sucesión de funciones). Sean  $f_n, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrables y tal que  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$  en  $[a, b]$ , entonces:

$$\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$$

**Corolario 2.**

$$\begin{cases} f_n \in C_1([a, b]) \\ f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \implies f \in C_1([a, b]) \end{cases} \implies \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$$

*Demostración.*

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty \cdot (b - a) \rightarrow 0$$

Es decir,

$$|f_n(x) - f(x)| < \|f_n - f\|_\infty$$

◊

## 5.2. Series de funciones

Como recordatorio:

1. Sea  $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $\sum a_n$  converge  $\iff s_n = \sum_{m=0}^n a_m \iff \{s_n\}$  es de Cauchy  $\iff \sum_{k=m}^n a_k$  converge a 0.
2. Sea  $a_n \geq 0$ , si:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum a_n \text{ converge}$$

Consideremos ahora  $f_m : I \rightarrow \mathbb{R}$ , y sea  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  entonces podemos definir:

$(\sum f_n) \xrightarrow{\text{pp}} g \implies S_n(x) \xrightarrow{\text{pp}} g(x) \forall x \in I$  pues las sumas parciales convergen.

$$(\sum f_n) \xrightarrow{\text{unif}} g \implies S_n(x) \xrightarrow{\text{unif}} g(x) \forall x \in I.$$

**Proposición 25** (Criterio de Cauchy).

$$\sum f_n \xrightarrow{\text{unif}} g \iff \{S_n\} \text{ es sucesión de Cauchy para } \|\cdot\|_\infty$$

*Demostración.* Se deja al lector. No la vimos en clase. ◊

**Proposición 26** (Criterio de Weierstrass). Sea  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  y supongamos que  $\|f_n\|_\infty \leq M_n \in \mathbb{R}$  y que  $\sum_{n=1}^\infty M_n < \infty$ . Entonces:

$\sum f_n$  converge uniformemente en  $I$  y su límite se denota  $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$

*Demostración.* Partimos de:

$$\sum f_n \xrightarrow{\text{unif}} g = S_n \xrightarrow{\text{unif}} g \text{ donde } S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

además:

$$S_n \xrightarrow{\text{unif}} g \iff \{S_n\} \text{ es Cauchy en } \|\cdot\|_\infty, \text{ es decir } \|S_n - S_m\| \rightarrow 0$$

y como,

$$S_n(x) - S_m(x) = \sum_{k=m+1}^n f_k(x)$$

tomando  $\|\cdot\|_\infty$ :

$$\|S_n(x) - S_m(x)\|_\infty = \left\| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right\|_\infty \leq \sum_{k=m+1}^n \|f_k\| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k \rightarrow 0 \text{ pues } M_k \text{ converge.}$$

◇

### Ejemplo 38 (Convergencia uniforme por el criterio de Weierstrass)

Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ , ¿converge uniformemente en  $|x| \leq r < 1$ ?

$$f_n(x) = x^n, I = [-r, r] \implies |x^n| \leq |x|^n \leq r^n$$

Además, sabemos que  $\sum r^n$  converge si  $r < 1$ . Por el criterio de Weierstrass:

$$\sum x^n \text{ converge uniformemente en } |x| \leq r, \text{ como } S_n = \sum_{k=1}^n x^k \text{ es continua y } S_n(x) \xrightarrow{\text{unif}} \sum_{m=1}^{\infty} x^m$$

entonces:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x^m \text{ es continua en } I = [-r, r] \text{ y por tanto en } |x| < 1$$

### Ejemplo 39 (Convergencia uniforme de la función Zeta de Riemann)

Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ , veamos que converge uniformemente en  $x \geq a > 1$ .

### Ejemplo 40 (Convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(3^n x)/2^n$ )

Vamos a ver que converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

$$\left\| \frac{\cos(3^n x)}{2^n} \right\|_\infty = \frac{1}{2^n} \text{ y } \sum \frac{1}{2^n} < \infty$$

entonces, por el criterio de Weierstrass la serie converge.

Como curiosidad, esta función fue el primer ejemplo de función continua pero no derivable en ningún punto. Se conoce como función de Weierstrass.

**Proposición 27** (De la convergencia uniforme de una función y su derivada). 9 Sean  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f_n \in C^1$ . Supongamos que:

$$f'_n \xrightarrow{\text{unif}} g \text{ y que } \exists t_0 \in [a, b] : f_n(t_0) \text{ converge.}$$

Entonces:

$$\exists f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } f \in C^1 : \begin{cases} f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \\ f' = g \end{cases}$$

**Ejercicio propuesto 9.** La demostración de la proposición se deja como ejercicio.

**Ejemplo 41 (Técnica habitual para probar convergencia uniforme de funciones)**

Para comprobar que  $f_n$  converge uniformemente a algo, se puede pasar a una serie de funciones (ya que tenemos más herramientas para probar convergencia de funciones):

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1 \\ g_2 &= f_2 - f_1 \\ g_n &= f_n - f_{n-1} \end{aligned}$$

Entonces:

$$f_n = \sum_{m=1}^n g_m \text{ es decir, } f_n \text{ converge uniformemente} \iff \sum g_m \text{ lo hace.}$$

**Observación.** Veamos ciertos aspectos de lo que hemos visto:

- Todo lo visto para funciones con valores en  $\mathbb{R}$  es válido para funciones  $I \rightarrow \mathbb{C}$  ( $|\cdot|$  = módulo)
- También para funciones  $I \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $I \rightarrow \mathbb{C}^d$ . Si tenemos el vector:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{bmatrix} \implies |v| = \sum_{j=1}^d |v_j| \text{ (o cualquier otra norma)}$$

### 5.3. Teorema de existencia y unicidad

Vamos a ver enunciado preciso, demostración y algunos usos. Comenzamos con un previo al teorema.

**Definición 11** (Función Lipschitz). Sea  $A \in \mathbb{R}^m$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Diremos que  $f$  es **Lipschitz**  $\iff$

$$\exists L \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in A$$

**Observación.** Una función Lipschitz siempre es continua. Para verlo basta coger  $\varepsilon = L/\delta$  en la definición de continuidad.

**Proposición 28** (Derivadas parciales acotadas implica Lipschitz). Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^m$  un abierto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  con  $f \in C^1$ .

1. Si  $\Omega$  es convexo y  $\exists C \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq C \quad \forall x \in \Omega; \forall i = 1, \dots, d; \forall j = 1, \dots, m \implies f \text{ es Lipschitz.}$$

2. Si  $A \in \Omega$  es compacto y convexo,  $f$  es Lipschitz en  $A$ .

*Demostración.* Vamos a ver la demostración de la proposición:

1. Como  $\Omega$  es convexo, consideramos  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\gamma(t) = x + t(y - x)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

$$f(y) - f(x) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt$$

Tomando valores absolutos llegamos a:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum \int_0^1 \left( \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \gamma(t) \right| \cdot |y_j - x_j| \right) dt \\ (*) &\leq \int_0^1 C \cdot d \sum |y_j - x_j| dt = C \cdot d |y - x| = L |y - x| \end{aligned}$$

(\*) se cumple pues  $|\partial f / \partial x_j| = \sum_{k=1}^d \left| \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right| \leq C \cdot d$  por hipótesis.

2. Igual que en 1, usando que al ser  $A$  compacta y  $\frac{\partial f_i}{\partial x}$  continua,  $\exists C$  como en 1.

◊

**Corolario 3.** Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^m$  abierto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  con  $f \in C^1$ . Entonces  $f$  es *localmente Lipschitz*, es decir, si  $x_0 \in \Omega$  y  $\bar{B}(x_0, \delta) \in \Omega$ , se tiene que  $f$  es Lipschitz en  $\bar{B}(x_0, \delta)$ .

*Demostración.* Sea  $A = \bar{B}(x_0, \delta)$  en un compacto, convexo en  $\Omega$ .

◊

**Observación.** Estos van a ser los casos que usemos pero:

1.  $f(x) = |x|$  es Lipschitz en  $\mathbb{R}$ .
2. Si  $f(x) = \int_0^x g(u) du$ , con  $g$  integrable y acotada en  $[-a, a]$ , es Lipschitz.

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y g(u) du \right| \leq \|g\|_\infty |y - x|$$

### 5.3.1. Teorema de existencia y unicidad global

**Teorema 29** (Unicidad y existencia global). Sea  $F : [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua, tal que:

$$|F(t, X) - F(t, Y)| \leq L |X - Y| \quad \forall t \in [a, b]$$

es decir,  $F$  es Lipschitz en  $t \in [a, b]$ . Sea  $t_0 \in [a, b]$  u  $X_0 \in \mathbb{R}^d$ , entonces:

$$\exists X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ con } X \in C^1 : \begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) \quad \forall t \in [a, b] \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

esa  $X(t)$  es única.

*Demostración.* Dividiremos en la prueba en distintos pasos.

1. 2 Sea  $h > 0$ , con  $h < 1/L$  ( $Lh < 1$ ). Entonces, veremos que existe  $X(t) \in C^1$  definida sobre  $I = [t_0 - h, t_0 + h] \cap [a, b]$  y tal que:

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \text{ en } I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

- a) Definimos recursivamente:

$$\begin{cases} X_0(t) = X_0, \quad t \in [a, b] \\ X_{n+1} = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X_n(s)) ds, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

- b) Vamos a ver que  $X_n$  es continua y está definida para todo  $t \in [a, b]$  por inducción en  $n$ . El caso base se cumple ( $X_0$  es continua). Vamos a ver si es cierto para cualquier  $n$ .

$$\begin{aligned} X_n \text{ continua} &\implies F(s, X_n(s)) \text{ es continua por composición de continuas} \implies \\ &\implies \int_{t_0}^t F(s, X_n(s)) ds \text{ continua} \implies X_{n+1} \text{ continua.} \end{aligned}$$

c) 1d Ahora vamos a ver que  $\|X_{n+1} - X_n\|_\infty \leq (Lh)^n \|X_1 - X_0\|_\infty$  Por inducción:

$$\text{Para } t \in I, X_{n+1}(t) - X_n(t) = \int_{t_0}^t F(s, X_n(s))ds - \int_{t_0}^t F(s, X_{n-1}(s))ds$$

entonces:

$$\begin{aligned} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t [F(s, X_n(s)) - F(s, X_{n-1}(s))]ds \right| \\ (\text{F es Lipschitz}) \quad &\leq \left| \int_{t_0}^t |X_n(s) - X_{n-1}(s)| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|X_n - X_{n-1}\|_\infty ds \right| \end{aligned}$$

Entonces:

$$\left| \int_{t_0}^t L \|X_n - X_{n-1}\|_\infty ds \right| = L \|X_n - X_{n-1}\|_\infty |t - t_0| \leq Lh \|X_n - X_{n-1}\|_\infty$$

Tomando  $\max_{t \in I}$ , llegamos a  $\|X_{n+1} - X_n\|_\infty \leq (Lh)^n \|X_1 - X_0\|_\infty$ .

d) Veamos que  $X_n(t)$  converge uniformemente en  $I$ .

Sea  $D_n = X_n - X_{n-1}$ , entonces  $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n D_i$ . Por lo tanto  $X_n$  converge  $\iff \sum D_n$  lo hace.

Por :

$$\|D_n\|_\infty \leq (Lh)^{n-1} \|D_1\|_\infty$$

Si  $Lh < 1$  la serie  $\sum (Lh)^k$  converge por el Criterio de Weierstrass. Por tanto:

$$\sum D_n \text{ converge uniformemente en } I \implies X_n \xrightarrow{\text{unif}} X$$

e) Veamos que  $X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s))ds, t \in I$ .

Pasamos al límite en:

$$X_{n+1} = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X_n(s))ds$$

Para ello necesitamos que ambos sumandos converjan uniformemente. Tenemos que ver:

$$F(t, X(t)) \xrightarrow{\text{unif}} F(t, X(t))$$

Es decir:

$$\begin{aligned} |F(t, X(t)) - F(t, X_n(t))| &\leq L|X(t) - X_n(t)| \leq L \|X - X_n\|_\infty \\ \|F(\cdot, X(\cdot)) - F(\cdot, X_n(\cdot))\|_\infty &\leq L \|X - X_n\|_\infty \rightarrow 0 \implies \\ \implies F(t, X_n(t)) &\xrightarrow{\text{unif}} F(t, X(t)) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t F(s, X_n(s))ds = \int_{t_0}^t F(s, X(s))ds \end{aligned}$$

Y por tanto:  $X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s))ds, t \in I$

f) Como  $X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s))ds, t \in I$ . Se cumple que:

- $X(t_0) = X_0 + 0$

- $X'(t_0) = \left( \int_{t_0}^t F(s, X(s))ds \right)' = F(t, X(t))$

g) Veamos que  $X$  es única, es decir, que si  $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ , con  $Y \in C^1$  satisface:

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)), & t \in I \\ Y(t_0) = X_0 \end{cases}$$

entonces  $X(t) = Y(t) \forall t \in I$

$$\text{Como } Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, Y(s))ds \implies Y(t) - X(t) = \int_{t_0}^t [F(s, Y(s)) - F(s, X(s))]ds$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $t_0 < t$ . Entonces: Entonces:

$$\|Y - X\|_\infty \leq Lh \|Y - X\|_\infty$$

Pero  $Lh < 1$ , por tanto  $\|Y - X\|_\infty = 0 \implies Y(t) = X(t)$ . Es decir, nuestra solución es única

2. La solución encontrada en se puede extender (*prolongar*) a todo el intervalo  $[a, b]$ . Supongamos que podemos extender la solución a  $[\alpha, \beta]$  y ese  $\beta$  es el máximo con esa propiedad, entonces vamos a ver que  $\beta = b$ .

Si  $\beta < b$ , sea  $h = 1/2L$ , sea  $\hat{t}_0 = \beta - h/2$  y  $\hat{X}_0 = X(\hat{t}_0)$ , por aplicado da una solución  $\hat{X}$  definida en  $[\hat{t}_0 - h, \hat{t}_0 + h] \cap [a, b]$ . Sea:

$$X_{nueva}(t) = \begin{cases} X(t), & t \leq \beta \\ \hat{X}(t), & t \geq \hat{t}_0 - h \end{cases}$$

Como  $X$  y  $\hat{X}$  están definidas en todo  $[\hat{t}_0 - h, \hat{t}_0 + h]$  y cumplen la EDO y  $X(\hat{t}_0) = \hat{X}(\hat{t}_0)$ , por la unicidad de  $X(t) = \hat{X}(t)$  para  $t \in [\hat{t}_0 - h, \hat{t}_0 + h] \cap [a, b]$ . Entonces  $X_{nueva}$  es solución de la EDO hasta  $\beta + \frac{h}{L}$  (o  $\min(\beta + h/2, b)$ ), es decir, para  $t < \beta$  usamos  $X$  y para  $\beta - h/2 < t$  usamos  $\hat{X}$ . Entonces, con  $X_{nueva}(t_0) = X_0 = X(t_0)$  lo que contradice nuestra hipótesis de  $\beta < b$ .

Para demostrar que podemos prolongar la solución también a  $a$  se repite el argumento.

3. Hemos visto que la solución existe en todo el intervalo  $[a, b]$ . Vamos a ver también que tenemos unicidad en  $[a, b]$ .

- a)  $C$  es no vacío:

$$C = \{t \in [a, b] : X(t) = Y(t)\}$$

entonces  $C \neq \emptyset$  ya que  $t_0 \in C$ .

- b)  $C$  es cerrado en  $[a, b]$ :

Basta ver que si  $t_n \in C \forall n$  y  $t_n \rightarrow t$  entonces  $t \in C$ . Si  $t_n \rightarrow t$

$$X(t_n) = Y(t_n) \implies X(t) = Y(t) \implies t \in C \implies C \text{ es cerrado.}$$

- c)  $C$  es abierto en  $[a, b]$ :

Tenemos que ver que  $\forall \bar{t} \in C \exists \delta > 0$  tal que  $(\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta) \cap [a, b] \subset C$ . Es decir:

$$X(\bar{t}) = Y(\bar{t}) \text{ pues } \bar{t} \in C$$

Además,  $X, Y$  son soluciones de:

$$\begin{cases} Z' = F(t, Z) \\ Z(\bar{t}) = X(\bar{t}) = Y(\bar{t}) \end{cases}$$

Por unicidad local en  $[\hat{t}_0 - h, \hat{t}_0 + h] \cap [a, b]$ ,  $X = Y$  en ese intervalo.

- d) Veamos que  $C$  es el total:

Como  $C$  es abierto en  $[a, b]$ , cerrado en  $[a, b]$ ,  $C \neq \emptyset$  y  $[a, b]$  es conexo, entonces  $C = [a, b]$ .

◇

**Corolario 4.** Sean  $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $B : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  continuas,  $t_0 \in [a, b]$ ,  $X_0 \in \mathbb{R}^d$ . Entonces existe una solución (y es única)  $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  de:

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Además, si  $p, q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in [a, b]$ ,  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ , entonces existe solución y es única  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  del problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t), & \forall t \in [a, b] \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = y_0 \end{cases}$$

*Demostración.* Sabemos que  $X'(t) = F(t, X(t))$ ,  $F(t, X) = \mathbb{A}(t)X + B(t)$ .

$$\mathbb{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1d}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(t) & \cdots & a_{dd}(t) \end{bmatrix}$$

Como  $a_{ij} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces  $F$  es continua. Queremos ver ahora que  $F$  satisface una condición de Lipschitz uniforme en  $t$ . Es decir, tenemos que ver que:

$$\exists k : \sum_{j=1}^d |a_{ij}(t)| \leq k, \quad \forall t \in [a, b]$$

Si la suma es una función continua en  $[a, b] \implies f$  es acotada. Entonces:

$$|F(t, Y) - F(t, X)| = |A(t)(Y - X)|$$

Además:

$$A(t)(Y - X) = \sum_{j=1}^d a_{ij}(Y_j - X_j)$$

Por tanto:

$$|F(t, Y) - F(t, X)| \leq \sum_{j=1}^d |a_{ij}(t)| |Y_j - X_j| \leq \left( \sum_{j=1}^d |a_{ij}(t)| \right) |Y - X| \leq k |Y - X|$$

Y por tanto, es Lipschitz y cumple las condiciones del teorema de existencia y unicidad.

En el caso de la EDO:  $x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t)$  entonces es como si tuviéramos el sistema:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

Y por consecuencia de lo que acabamos de ver, tomando:

$$\mathbb{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix} \text{ y } \mathbb{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

Existe solución y es única.  $\diamond$

**Observación.** Aunque no lo hemos enunciado así, hemos demostrado:

$$\exists! X : I \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ tal que } X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s))ds, \quad t \in I$$

Donde llamamos  $I = [t_0 - h, t_0 + h] \cap [a, b]$  y  $G(x) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s))ds$

Con  $G : C(I) \rightarrow C(I)$  funciones continuas en  $I \rightarrow C(I)$  y  $G(X) = X$ . Es decir,  $G$  tiene un único **punto fijo**. Se puede ver usando:

$$\|G(X) - G(Y)\|_\infty \leq \alpha \|X - Y\|_\infty \text{ con } \alpha = Lh < 1$$

## 5.4. Teorema de existencia y unicidad local

**Teorema 30** (Teorema de existencia y unicidad local). Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  abierto,  $F : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua y uniformemente Lipschitz en  $t$ , es decir:

$$\exists L : |F(t, X) - F(t, Y)| \leq L|X - Y| \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall X, Y \in \Omega$$

Sean  $t_0 \in [a, b]$ ,  $X_0 \in \Omega$ . Si  $\delta$  es suficientemente pequeño, entonces:

Existe  $X : I \rightarrow \Omega$ ,  $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [a, b]$  con  $X \in C^1$ , que cumple:

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) & \forall t \in I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Y esa solución es única.

*Demostración.* La demostración es como en el caso  $\Omega = \mathbb{R}^d$ . Definimos:

$$\begin{cases} X_0(t) = X_0 \text{ y, recursivamente,} \\ X_n + 1(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X_n(s))ds \end{cases}$$

Para que las  $X_n$  estén bien definidas hay que asegurarse de que  $X_n(t) \in \Omega \quad \forall t \in I$ . Tenemos que ver cómo elegir  $\delta$  para que eso ocurra.

1.

$$\begin{cases} \Omega \text{ abierto} \\ X_0 \in \Omega \end{cases} \implies \exists r > 0 : \bar{\mathbb{B}}(X_0, r) \subset \Omega$$

Como  $[a, b] \times \bar{\mathbb{B}}(X_0, r)$  es compacto, y  $F|_{[a, b] \times \bar{\mathbb{B}}}$  es continua, es decir,  $\exists M(r) : |F(t, X)| \leq M$  si  $t \in [a, b]$  y  $X \in \bar{\mathbb{B}}(X_0, r)$

2. Si  $\delta < \frac{r}{M}$  entonces:

$$X_n(t) \in \bar{\mathbb{B}}(X_0, r) \text{ si } t \in I, \quad n \in \mathbb{N}$$

Se demuestra por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 0$  tenemos  $X_0(t) = X_0$  y por tanto se cumple. Veamos el paso inductivo.

$$\begin{aligned} |X_{n+1}(t) - X_0| &= \left| \int_{t_0}^t F(s, X_n(s))ds \right| \leq \int_{t_0}^t |F(s, X_n(s))|ds \\ &\leq \int_{t_0}^t Mds = M(t - t_0) \leq M\delta \leq r \implies \delta < \frac{r}{M} \end{aligned}$$

Con esto demostramos que las  $X_n$  están bien definidas. Ahora simplemente se procede como en el caso global para demostrar convergencia, para lo que se necesita  $L\delta < 1$ . Es decir, vamos a necesitar que  $\delta < \min(r/M(r), 1/L)$   $\diamond$

**Proposición 31** (Regularidad de las soluciones). Con las hipótesis del Teorema de existencia y unicidad local, si  $F$  es  $C^m([a, b] \times \Omega)$  entonces:

$$X \in C^{m+1}(I)$$

*Demostración.* Por inducción sobre  $m$ :

Caso  $m = 1 \implies X$  es  $C^2$ .

$X$  es  $C^1$  por la proposición.  $X'(t) = F(t, X(t)) \implies X' \in C^1$  por la regla de la cadena, es decir,  $X' \in C^1 \implies X \in C^2$ . Se sigue la prueba recursivamente.  $\diamond$

### 5.4.1. Prolongabilidad de soluciones

En el caso de existencia y unicidad global veíamos que si teníamos una solución definida en un intervalo  $I$  podíamos extenderlo a todo un intervalo  $[a, b]$  simplemente por unicidad de la solución. Vamos a ver que en el caso de existencia y unicidad local puede que no lleguemos a cubrir todo el intervalo  $[a, b]$  debido a que el  $\delta$  que define la bola abierta donde existe la solución no es fijo y puede ir haciéndose cada vez más pequeño.

**Proposición 32** (Intervalo máximo de existencia-unicidad local). Con las misma hipótesis del teorema de existencia y unicidad local (véase el teorema 30), existe un intervalo máximo en el que está definida la solución. Ese intervalo es uno de los siguientes tipos:

$$[a, b], [a, \beta), (\alpha, b], (\alpha, \beta)$$

Donde  $a \leq \alpha < \beta \leq b$ .

Además, si es de la forma  $*, \beta)$  entonces  $\forall k \in \Omega$  compacto  $\exists t_K < \beta$  tal que  $X(t) \notin K$ ,  $t_K < t < \beta$ . Algo similar pasa para los intervalos de la forma  $(\alpha, *$

**Observación.** En palabras más simples y menos precisas, el enunciado establece que:

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \beta]{} \delta\Omega \text{ o } |X(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \beta]{} \infty$$

#### Ejemplo 42 (*No unicidad formalmente*)

Retomando el ejemplo :

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x}^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Se ve que  $F(t, \mathbf{x})$  no es Lipschitz cerca del 0, (en 0 la derivada es  $\infty$ ). De hecho podemos encontrar dos soluciones:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0 \\ x_2(t) &= at^3, \quad a \neq 0 \end{aligned}$$

#### Ejemplo 43 (*Existencia local e intervalo maximal*)

Sea el PVI:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}^2, \quad t \in [-1, 1], \quad x(0) = 1$$

Resolviendo el PVI hallamos:

$$x(t) = \frac{1}{1-t} \quad \text{que sólo existe si } t < 1$$

Por tanto el intervalo de existencia es:  $[-1, 1)$ .

Vemos que si no nos restringiéramos inicialmente a  $[a, b] = [-1, 1]$ , está definida en  $(-\infty, 1)$ . Decimos que éste es su intervalo maximal.

Vemos que  $F(t, \mathbf{x})$  no es Lipschitz en  $x \in \mathbb{R}$  pues  $\frac{\partial F}{\partial x} = 2\mathbf{x}$  no está acotada en  $\mathbb{R}$ , pero si en  $[-A, A]$  para  $A \in \mathbb{R}^+$ . Es decir, es Lipschitz uniformemente en  $t$  si la restringimos a  $\mathbb{R} \times [-A, A]$  (la constante de Lipschitz es  $L = 2A$ ).

**Observación.** Para el caso autónomo se pueden tomar  $[a, b]$  cada vez más grandes hasta que llenen  $\mathbb{R}$ .

#### Ejemplo 44 (*Aplicación del teorema de existencia y unicidad en $\mathbf{x}'' = \cos(tx)$* )

Sea el PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' = \cos(tx) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Pasamos a forma matricial:

$$(y = x') \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y \\ \cos(tx) \end{bmatrix} = F(t, X)$$

Entonces vamos a ver si podemos aplicar el teorema de existencia y unicidad:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t \sin(tx) \end{bmatrix}$$

Donde vemos que ambas derivadas parciales están acotadas si y sólo si  $t$  lo está. Por tanto, en  $[a, b] \times \mathbb{R}^2$ , las derivadas parciales de  $F$  con respecto a  $x$  e  $y$  están acotadas, lo que quiere decir que se puede utilizar el Teorema de existencia y unicidad global.

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \leq \max(|a|, |b|)$$

Por tanto,  $\exists! \text{sol} \in [a, b]$ . Entonces, para  $n \in N$  podemos definir:

$$[a, b] = [-n, n] \implies \exists! X_n : [-n, n] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Además:

$$X_{n+1}|_{[-n, n]} = X_n \text{ por unicidad} \implies \exists! X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Y por tanto existe solución  $\forall t \in \mathbb{R}$  para el PVI.

#### Ejemplo 45 (*Existencia y unicidad de solución del péndulo simple*)

La ecuación del péndulo simple (sin resistencia del aire) sigue el PVI:

$$\begin{cases} \theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta, \text{ con } l \text{ la longitud del péndulo} \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = v_0 \end{cases}$$

Donde podemos ver que tiene solución en  $t \in \mathbb{R}$  y es única. Pasando a sistema:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{bmatrix} = F(t, \theta, v)$$

Si hallamos sus derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{l} \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde ambas están acotadas en  $[\theta, v]^T \in \mathbb{R}^2$  y por tanto existe solución y es única.

## 5.5. Dependencia de parámetros.

Consideremos una ecuación diferencial como:  $X'(t) = F(t, X(t))$ ,  $X(t_0) = \xi$ , donde  $X(t, \xi)$  es "la" solución para cada valor de  $\xi$  (supondremos que se cumplen las hipótesis necesarias para asegurar existencia y unicidad).

En ocasiones nos va a interesar saber si cuando se mueve  $\xi$  ligeramente, la nueva solución es similar a la original o no.

Por otro lado, podría ser que  $F$  dependiera de un parámetro  $\lambda$ , es decir:

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t), \lambda) \\ X(t_0) = \xi \end{cases} \quad \text{con solución } X(t, \xi, \lambda)$$

Nos volvemos a preguntar si cuando se mueve  $\lambda$  ligeramente, la nueva solución es similar a la original o no.

**Observación.** Podría parecer que en ambos casos la pregunta es la misma, pero existe un procedimiento para transformar la segunda en la primera de la siguiente manera, definiendo una  $Y(t)$ :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ \lambda \end{bmatrix} \implies Y' = \begin{bmatrix} X' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t, X, \lambda) \\ 0 \end{bmatrix} = G(t, Y) \text{ y } Y(t_0) = [\xi, \lambda]$$

Por último, supongamos que tenemos  $\hat{F}(t, X) \approx F(t, X)$ , donde  $\hat{F}$  es una aproximación de  $F$ . Para cada función con su respectivo PVI hallaríamos una solución, ( $\hat{X}$  resuelve  $\hat{F}$  y  $X$  resuelve  $F$ ). Nos preguntamos entonces si  $\hat{X} \approx X$ .

**Ejemplo 46 (Motivación: aproximación del péndulo simple)**

Sea  $\theta'' = -\frac{g}{l} \sin(\theta) = F$ , aproximamos a través de  $\hat{F} = -\frac{g}{l}$ , con  $|\theta| < 1$  y  $\sin(\theta) \approx \theta$ . Nos preguntamos si la solución de cada ecuación se parecen o no ya que resolver  $\hat{F}$  es más sencillo que resolver  $F$ .

La base del desarrollo formal de esta sección se basará en el siguiente lema.

**Lema 33** (de Gronwall). Sean  $u, f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas, y  $g \geq 0$ . Supongamos que:

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)u(s)ds$$

Entonces:

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s)e^{\int_s^t g(u)du}ds$$

*Demostración.* Sea  $z(t) = \int_a^t g(s) \cdot u(s)ds$ , como  $g$  y  $u$  son continuas,  $z'(t) = g(t) \cdot u(t)$ , entonces por hipótesis:

$$z'(t) \leq g(t) \cdot (f(t) + z(t)) = g \cdot f + g \cdot z \quad (g \geq 0)$$

Sea  $G(t)$  una primitiva de  $g(t)$ , es decir,  $G'(t) = g(t)$  (por ejemplo,  $G(t) = \int_a^t g(u)du$ ), entonces:

$$\begin{aligned} z'(t) - g(t) \cdot z(t) &\leq f(t)g(t) \\ e^{-G(t)}(z'(t) - g(t) \cdot z(t)) &\leq f(t)g(t)e^{-G(t)} \\ \frac{d}{dt}(e^{-G(t)}z(t)) &\leq f(t)g(t)e^{-G(t)} \implies (\text{integrando entre } a \text{ y } t) \\ \int_a^t (e^{-G(s)}z(s))' ds &\leq \int_a^t f(s)g(s)e^{-G(s)}ds \end{aligned}$$

Desarrollando la primera parte de la desigualdad:

$$(e^{-G(s)}z(s)) \Big|_{s=a}^{s=t} = e^{-G(t)}z(t) - e^{-G(a)}z(a) = (\text{como } z(a) = 0) e^{-G(t)}z(t)$$

Es decir:

$$\begin{aligned} e^{-G(t)}z(t) &\leq \int_a^t f(s)g(s)e^{-G(s)}ds \implies \\ z(t) &\leq e^{G(t)} \int_a^t f(s)g(s)e^{-G(s)}ds \\ &= \int_a^t f(s)g(s)e^{G(t)-G(s)}ds \end{aligned}$$

y como  $G(t) - G(s) = \int_s^t G'(u)du = \int_s^t g(u)du$ , es decir,  $z(t) = \int_a^t f(s)g(s)e^{\int_s^t g(u)du}$  basta observar que:

$$\begin{aligned} u(t) &\leq f(t) + \int_a^t g(s)u(s)ds = f(t) + z(t) \\ &\leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s)e^{\int_s^t g(u)du} \end{aligned}$$

◇

**Observación.** Vamos a ver unos casos particulares:

1.  $f = M$  constante.

$$u(t) \leq M e^{\int_a^t g(s) ds}$$

2.  $f = M, g = L$  constantes:

$$u(t) \leq M e^{L(t-a)}$$

**Proposición 34** (Diferencia de soluciones de una ecuación. Cotas.). Sea  $\Omega$  abierto en  $\mathbb{R}^d$ ,  $F : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua y tal que:

$$|F(t, \xi) - F(t, \eta)| \leq L|\xi - \eta| \text{ con } \xi, \eta \in \Omega, t \in [a, b], L \in \mathbb{R}, L > 0.$$

Sean  $X_1, X_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$  y sean  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  tal que:

$$|X'_j(t) - F(t, X_j(t))| \leq \varepsilon_j \implies \|X'_j - F(t, X_j)\|_{\infty} \leq \varepsilon_j$$

Entonces:

$$|X_1(t) - X_2(t)| \leq |X_1(a) - X_2(a)|e^{L(t-a)} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{L(t-a)} - 1}{L}$$

*Demostración.* Dividiremos la prueba en partes:

1. Sea  $u(t) = |X_1(t) - X_2(t)|$ , con:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= X_1(a) + \int_a^t X'_1(s) ds \\ X_2(t) &= X_2(a) + \int_a^t X'_2(s) ds \end{aligned}$$

Como el valor absoluto de la integral es menor igual que la integral del valor absoluto, restando llegamos a que:

$$u(t) \leq |X_1(a) - X_2(a)| + \int_a^t |X'_1(s) - X'_2(s)| ds$$

2.

$$\begin{aligned} |X'_1 - X'_2| &\leq |X'_1 - F(s, X_1)| + |X'_2 - F(s, X_2)| + |F(s, X_1) - F(s, X_2)| \\ &\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + L|X_1 - X_2| \end{aligned}$$

3. Entonces:

$$u(t) \leq |X_1(a) - X_2(a)| + \int_a^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + Lu(s)) ds \leq |X_1(a) - X_2(a)| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t-a) + \int_a^t Lu(s) ds$$

Entonces  $u(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)u(s) ds$ .

4. Aplicando en  $LG$ :

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t Lf(s)e^{L(t-s)} ds$$

e integrando por partes llegamos a la estimación del enunciado.

◇

### 5.5.1. Algunas consecuencias de la diferencia acotada de soluciones.

Vamos a ver consecuencias de la proposición 34.

Es claro que si  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  (es decir, son soluciones) y  $X_1(a) = X_2(a)$  entonces  $X_1 = X_2$  en  $[a, b]$  (por unicidad).

**Proposición 35** (Dependencia continua de condiciones iniciales). Sea  $F$  que cumple las hipótesis de unicidad y existencia local. Sea  $X(t, \xi)$  la solución (local) a:

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) \text{ para } (\xi \in \Omega) \\ X(a) = \xi \end{cases}$$

Supongamos que  $\xi_0 \in \Omega$ . Entonces:

1. Existen  $r > 0$ ,  $\delta > 0$  tal que  $\exists X(t, \xi)$  tal que:

$$X(t, \xi) : [a, a + \delta] \times \bar{B}(\xi_0, r/2) \rightarrow \bar{B}(\xi_0, r) \text{ es solución}$$

- 2.

$$|X(t, \xi) - X(t, \eta)| \leq |\xi - \eta| e^{L(t-a)} \text{ con } \eta, \xi \in \bar{B}(\xi_0, r/2), a \leq t \leq t + \delta$$

3. Más generalmente, si  $M$  es una cota superior de  $|F(t, \xi)|$  con  $(t, \xi) \in [a, b] \times \bar{B}(\xi_0, r)$  y  $F$  es continua entonces:

$$|X(t, \xi) - X(\bar{t}, \eta)| \leq M|\bar{t} - t| + |\xi - \eta| e^{L(\min(t, \bar{t}) - a)}$$

En particular,  $X$  es continua en ambas variables y  $C^1$  en  $t$ .

*Demostración.* Demostraremos cada apartado:

1. Directo por el teorema de existencia y unicidad local.
2. Por la proposición 34 con  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  y  $\xi = X_1(a)$ ,  $\eta = X_2(a)$ , entonces:

$$X_1(t) = X(t, \xi) \quad X_2(t) = X(t, \eta)$$

3. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $t < \bar{t}$ , entonces:

$$|X(t, \xi) - X(\bar{t}, \eta)| \leq |X(t, \xi) - X(t, \eta)| + |X(t, \eta) - X(\bar{t}, \eta)|$$

Donde

$$|X(t, \xi) - X(t, \eta)| < |\xi - \eta| e^{L(t-a)}$$

y además:

$$|X(t, \eta) - X(\bar{t}, \eta)| = \left| \int_t^{\bar{t}} X'(s, \eta) ds \right| \leq \left| \int_t^{\bar{t}} F(s, X(s, \eta)) ds \right| \leq \int_t^{\bar{t}} |F(s, X(s, \eta))| ds \leq M(\bar{t} - t) = M|t - \bar{t}|$$

Y uniendo las dos desigualdades hallamos la desigualdad que queríamos demostrar.

◇

**Corolario 5.** Si  $F = F(t, \xi, \lambda)$  es Lipschitz en  $(\xi, \lambda)$ , pasando al problema:

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} X' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

y usando el resultado anterior, vemos que la solución de  $X(t, \xi, \lambda)$  de:

$$\begin{cases} X' = F(t, X, \lambda) \\ X(a) = \xi \end{cases}$$

es continua en todas las variables.

**Proposición 36** (Cota de error en aproximación de soluciones). Sea  $\hat{F} : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  Lipschitz. Sea  $\hat{X}(t)$  la solución de:

$$\begin{cases} \hat{X}'(t) = \hat{F}(t, \hat{X}(t)) \\ \hat{X}(a) = \xi_a \end{cases}$$

y  $X$  la de:

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) \\ X(a) = \xi_a \end{cases}$$

Supongamos que

$$|\hat{F}(t, \hat{X}(t)) - F(t, \hat{X}(t))| \leq \varepsilon$$

Entonces:

$$|X(t) - \hat{X}(t)| \leq \varepsilon \cdot \frac{e^{L(t-a)} - 1}{L}$$

donde  $L$  es la constante de Lipschitz de  $F$

*Demostración.* Decimos que  $\hat{X}$  es casi solución para  $F$ , es decir:

$$|\hat{X}'(t) - F(t, \hat{X}(t))| \leq \varepsilon$$

ya que:

$$\begin{aligned} \hat{X}'(t) &= \hat{F}(t, \hat{X}(t)) \\ |\hat{X}'(t) - F(t, \hat{X}(t))| &= |\hat{F}(t, \hat{X}(t)) - F(t, \hat{X}(t))| \leq \varepsilon \text{ por hipótesis} \end{aligned}$$

Además, con:

$$X_1 = X, \quad X_2 = \hat{X}, \quad |X_1(a) - X_2(a)| = 0$$

es decir,

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad \text{y } X_1(a) = X_2(a) = \xi_a$$

Entonces:

$$|X(t) - \hat{X}(t)| = |X_1(t) - X_2(t)| \leq \varepsilon \frac{e^{L(t-a)} - 1}{L}$$

◇

#### Ejemplo 47 (Péndulo simple. Aproximación de soluciones)

Sea la EDO  $\theta'' = -\frac{g}{l} \sin(\theta)$  donde  $l$  es la longitud del péndulo. Transformamos la ecuación a su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{bmatrix} = F(\theta, v)$$

Observamos que para  $\theta$  pequeño,  $\sin(\theta) \approx \theta$ . Entonces construimos nuestro problema aproximado:

$$\hat{P} \equiv \theta'' = -\frac{g}{l} \theta \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \theta \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{g}{l} \theta \end{bmatrix} = \hat{F}$$

Este problema es más sencillo de resolver y hallamos que la solución a  $\hat{P}$  es:

$$\hat{\theta}(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \text{ con } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Es decir, nuestra solución  $\hat{X}$  es:

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \cos(\omega t) \\ -\omega \theta_0 \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

Donde además,  $|\theta(t)| \leq |\theta_0|$ . Nos gustaría comparar entonces  $F$  y  $\hat{F}$  en la solución  $\hat{X}$ .

$$\begin{aligned} |\hat{F}(\hat{\theta}(t), \hat{v}(t)) - F(\hat{\theta}(t), \hat{v}(t))| &= \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{g}{l}(\hat{\theta}(t) - \sin(\hat{\theta}(t))) \end{array} \right] = \\ &= \frac{g}{l} |\hat{\theta}(t) - \sin(\hat{\theta}(t))| \stackrel{(*)}{\leq} \frac{g}{l} \frac{|\hat{\theta}(t)|^3}{6} \end{aligned}$$

(\*) este último paso se debe al lema 37. Como  $\theta - \sin \theta$  es impar,  $|\theta - \sin \theta| = |\theta| - \sin(|\theta|) \leq \frac{|\theta|^3}{6}$

Entonces:

$$|\hat{F}(\hat{\theta}(t), \hat{v}(t)) - F(\hat{\theta}(t), \hat{v}(t))| \leq \frac{g}{l} \cdot \frac{|\hat{\theta}|^3}{6} \leq \frac{g}{l} \cdot \frac{|\theta_0|^3}{6}$$

Como consecuencia:

$$|X(t) - \hat{X}(t)| \leq |\theta(t) - \hat{\theta}(t)| + |\theta'(t) - \hat{\theta}'(t)| \leq \frac{g}{l} \frac{|\theta_0|^3}{6} \cdot \frac{e^{Lt} - 1}{L}$$

Nos faltaría encontrar el valor de  $L$ . Para ello desarrollamos:

$$F = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{g}{l} \sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial F}{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{l} \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Y de aquí, si  $\left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right| \leq L$  en  $[a, b] \times \Omega$  con  $\Omega$  convexo entonces:  $|F(t, \xi) - F(t, \eta)| \leq L|\xi - \eta|$  con  $\xi, \eta \in \Omega$ , y de aquí obtenemos:

$$L = \max \left( 1, \frac{g}{l} \right)$$

**Lema 37** (Cota del seno de un ángulo positivo). Si  $\theta \geq 0$ , entonces:

$$\theta - \frac{\theta^3}{3!} \leq \sin(\theta) \leq \theta$$

*Demostración.* Se deja al lector. Se basa en la serie de potencias del seno.  $\diamond$

### 5.5.2. Diferenciabilidad con respecto a parámetros y datos iniciales

Vamos a considerar  $F(t, X, \lambda) : (a, b) \times \Omega \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ , con  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Delta$  abierto en  $\mathbb{R}^m$ . Además, denominaremos  $D_x F$  a la matriz de las derivadas parciales, donde cada elemento  $(i, j)$  es de la forma:  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ . De la misma forma  $D_\lambda F$  es la matriz de derivadas parciales, donde cada elemento  $(i, k)$  es de la forma:  $\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_k}$ . Además, sea  $(t_0, \xi_0, \lambda_0) \in V$ , supongamos que  $F$  es continua y las derivadas parciales son continuas en  $V$ .

**Teorema 38** (Diferenciabilidad en ecuaciones de orden 1). Si  $\exists \delta > 0$  : si  $|\xi - \xi_0| < \delta$ , y  $|\lambda - \lambda_0| < \delta$  entonces existe una solución (que es única) del problema:

$$\mathcal{P}_{\xi, \lambda} \begin{cases} X'(t) = F(t, X(t), \lambda) \\ X(t_0) = \xi \end{cases} \quad \text{en } [t_0, t_0 + \delta]$$

Esa solución  $X(t, \xi, \lambda)$  es  $C^1$  y sus derivadas con respecto a  $\lambda_k$  o  $\xi_j$  satisfacen una EDO.

Por ejemplo, si  $Y(t) = \frac{\partial X}{\partial \lambda_k}(t, \xi, \lambda)$ , entonces  $Y$  satisface:

$$Y'(t) = D_x F(t, X(t, \xi, \lambda), \lambda) \cdot Y(t) + \frac{\partial F}{\partial \lambda_k}(t, X(t, \xi, \lambda), \lambda)$$

Donde si :

$$A(t) = D_x F(t, X(t, \xi, \lambda), \lambda), \quad \text{y } B(t) = \frac{\partial F}{\partial \lambda_k}(t, X(t, \xi, \lambda), \lambda)$$

entonces reescribimos:

$$Y'(t) = A(t)Y + B(t)$$

Además, en términos de matrices si  $M(t) = D_\lambda X(t, \xi, \lambda)$  entonces:

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t) + D_\lambda F(t, X(t, \xi, \lambda), \lambda) \\ M(t_0) = 0 \end{cases}$$

y si  $N(t) = DX$  entonces:

$$\begin{cases} N' = A(t)N \\ N(0) = I \end{cases}$$



# **Parte III**

## **Tercer parcial**



# Capítulo 6

## Sistemas autónomos

En este capítulo vamos a considerar únicamente los sistemas de la forma:  $X'(t) = F(X(t))$ , es decir,  $F$  no depende de  $t$ , solo de  $X$ . Por ejemplo, el sistema de Lorenz es un sistema de este tipo:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= \beta z + xy, \text{ es decir,} \\ F(x, y, z) &= \begin{bmatrix} \sigma(y - x) \\ \rho x - y - xz \\ \beta z + xy \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Este tipo de sistemas tienen relación con los sistemas mecánicos de la física clásica.

### Ejemplo 48 (*Sistema autónomo simple - Intuición*)

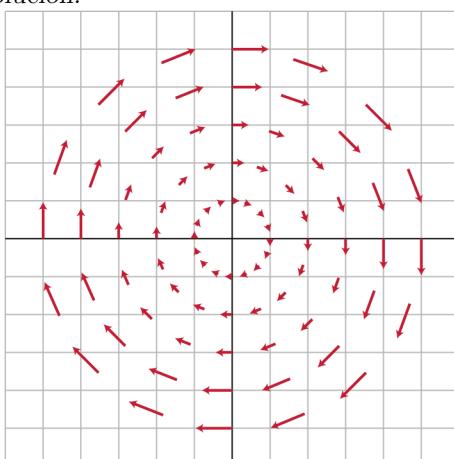
Consideramos el sistema:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = F(x, y)$$

Entonces podemos expresar nuestra solución como una curva  $\gamma(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  con velocidad  $\gamma'(t) = F(x(t), y(t))$ .

Por tanto, podemos interpretar  $F : \Omega \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como un campo vectorial donde si  $\gamma'(t) = F(\gamma(t))$ , entonces la curva es tangente al vector  $F$  asociado al punto  $\gamma(t)$ .

Entonces, representando el vector  $F$  asociado a cada punto del plano  $(x, y)$ , podemos obtener una intuición de qué curva describe nuestra solución.



A partir del campo vectorial podemos ver que nuestra solución describe una circunferencia, es decir, conforme avanzamos en  $t$  vamos a seguir dando vueltas en una circunferencia fija.

## 6.1. Sistemas autónomos en el plano.

**Definición 12** (Trayectoria del sistema). Una **trayectoria** del sistema  $X' = F(X)$  es la curva que describe la solución, sin tener en cuenta la parametrización, es decir, es el subconjunto del plano descrito por la solución.

En general es más sencillo encontrar las trayectorias que resolver el sistema. Veamos un ejemplo:

### Ejemplo 49 (*Cálculo de las trayectorias de un sistema simple*)

Retomando el ejemplo anterior, consideramos el sistema:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = F(x, y)$$

Las derivadas parciales son:  $\frac{dx}{dt} = y$ ,  $\frac{dy}{dt} = -x$ , y afirmamos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-x}{y}$$

Que es la ecuación exacta  $y dy + x dx = 0$  con solución:  $\frac{x^2+y^2}{2} = C$ . Con lo que hemos hallado la ecuación que siguen las trayectorias de nuestro sistema original.

En general, las trayectorias de:

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

son las soluciones de  $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$  siempre que  $g(x, y) \neq 0$ , o alternativamente,  $\frac{dx}{dy} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$  siempre que  $f(x, y) \neq 0$ . Por tanto, haremos lo primero cerca de puntos  $(x, y)$  donde  $g(x, y) \neq 0$  y lo segundo donde  $f(x, y) \neq 0$ .

**Definición 13** (Punto crítico). Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y), \text{ con } f, g \in C^1 \text{ en un abierto} \end{aligned}$$

Un punto crítico (o de equilibrio) del sistema es un  $(x_0, y_0)$  que cumple que  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ .

**Observación.** Sea  $(x_0, y_0)$  un punto crítico, entonces:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \\ y(t) &= y_0 \end{aligned}$$

es una solución del sistema y la trayectoria de esa solución es el punto  $x_0, y_0$ .

**Proposición 39** (Soluciones con trayectorias iguales). Sea el sistema autónomo:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

con  $f, g \in C^1(\Omega)$  y  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces:

1. Si  $(x(t), y(t))$  es solución del sistema entonces:

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = x(t+a) \\ \bar{y}(t) = y(t+a) \end{cases}$$

también lo es y describe la misma trayectoria.

2. Si dos soluciones describen la misma trayectoria, entonces están relacionadas como en 1

*Demostración.* Demostraremos cada apartado por separado, el primero es directo:

1.

$$x'(t) = x'(t+a) = f(x(t+a), y(t+a)) = f(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$$

pues  $f$  no depende de  $t$ . Entonces:

$$f(t+a, x(t+a), y(t+a)) = f(t+a, \bar{x}(t), \bar{y}(t))$$

2. Sabemos que  $(x(t), y(t))$  y  $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$  son dos soluciones con la misma trayectoria. Supongamos que  $p = (x(0), y(0))$ . Entonces  $\exists a : (\bar{x}(a), \bar{y}(a)) = p$ . Sea:

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = x(t+a) \\ \hat{y}(t) = y(t+a) \end{cases}$$

Entonces  $(\hat{x}, \hat{y})$  es solución por 1, y  $(\hat{x}(0), \hat{y}(0)) = p = (x(0), y(0))$ .

Por unicidad,  $\hat{x}(t) = x(t)$ ,  $\hat{y}(t) = y(t)$  en el intervalo del sistema y por tanto:

$$\begin{cases} x(t) = \bar{x}(t+a) \\ y(t) = \bar{y}(t+a) \end{cases}$$

◇

Vamos a ver una versión del enunciado de existencia y unicidad en el caso de trayectorias, que se convierte en la siguiente proposición:

**Proposición 40** (Existencia y unicidad de trayectorias). Sea  $F \in C^1(\Omega)$ , se tienen las siguientes alternativas para 2 trayectorias de un sistema  $\mathcal{S}$ .

1. son disjuntas
2. son la misma

*Demostración.* Si 2 trayectorias tienen un punto  $p$  en común, entonces  $p = X_1(t_0)$  para una solución  $X_1$  de  $\mathcal{S}$  y también  $p = X_2(\bar{t}_0)$  donde  $X_2$  es una solución de  $\mathcal{S}$  que da lugar a la segunda trayectoria.

Vimos que  $\bar{X}_2(t) = X_2(t + \bar{t}_0 - t_0)$ . Como  $X_1$  y  $\bar{X}_2$  son soluciones de  $\mathcal{S}$  con dato inicial  $X_1(t_0) = p = \bar{X}_2(t_0) = X_2(\bar{t}_0)$ .

Por unicidad,  $X_1 = \bar{X}_2$  y entonces dan lugar a las mismas trayectorias (aquí hemos usado que si  $X(t)$  es solución de  $\mathcal{S}$  también lo es  $\bar{X}(t) = X(t+a)$ , en este caso  $a = \bar{t}_0 - t_0$ ). ◇

**Observación.** Este resultado tiene relevancia cuando estamos en  $\mathbb{R}^2$ . Una curva en  $\mathbb{R}^2$  nos distingue dos regiones en el espacio. En general una trayectoria nos divide  $\mathbb{R}^d$  en dos regiones disjuntas:  $R_1$ ,  $R_2$ . Si tenemos una trayectoria  $T$  que pase por  $p \in R_i$  podemos asegurar que  $T \subset R_i$ .

#### Ejemplo 50 (*Trayectorias de la segunda Ley de Newton*)

La segunda ley de newton sigue la EDO  $x'' = f(x)$ . Vamos a transformarlo en un sistema:

$$\begin{cases} x'' = f(x) \\ y = x' \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = f(x) \end{cases}$$

Una vez escrito el sistema, hallamos la ecuación de las trayectorias:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(t) \\ \frac{dy}{dt} = f(x(t)) \end{cases}$$

Para expresar la trayectoria tenemos que expresar  $y = \text{función de } x$ . Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = (*) \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f(x)}{y}$$

(\*) - Si  $\frac{dx}{dt} \neq 0$

Entonces:

$$y dy = f(x) dx \rightsquigarrow \int y = \int f(x)$$

Sea  $U(x)$  una primitiva de  $f(x)$ , hallamos:

$$\frac{y^2}{2} + U(x) = \text{cte}, \text{ que define } y \text{ implícitamente como función de } x.$$

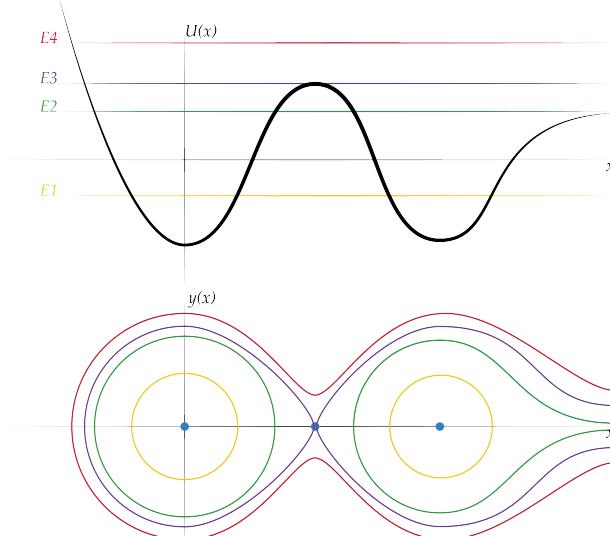
Con esto hemos hallado la expresión de un sistema conservativo:

$$E_c + U = E$$

Donde:

1.  $E_c$  es la energía cinética con la unidad de masa  $\equiv \frac{y^2}{2}$ .
2.  $U$  es la energía potencial  $\equiv U(x)$ .
3.  $E$  es la energía del sistema, que permanece constante.

A continuación, vamos a representar  $U(x)$  frente a  $x$ , representaremos las trayectorias  $y$  en función de  $x$  y haremos un breve análisis de ellas y de los puntos críticos. Supongamos que la gráfica de  $U(x)$  es la superior de la siguiente imagen.



Desarrollando la expresión anterior podemos despejar  $y$  en función de  $x$ . Como  $E_c = \frac{y^2}{2}$ , entonces:

$$y = \pm \sqrt{2(E_i - U(x))}$$

es decir, la gráfica de  $y$  frente a  $x$  es función de la distancia de la gráfica de  $U(x)$  a un nivel de energía fijo  $E_i$ , es por ello que cada nivel de energía  $E_i$  da lugar a unas trayectorias distintas.

El hecho de que las trayectorias sean cerradas no es trivial, si hacemos un análisis en profundidad de la expresión de  $y$  frente a  $x$  en los puntos en los que se anula  $y$  veremos que su pendiente coincide, y por esto podemos afirmar que las dos partes definidas por el  $\pm$  de la raíz unen bien.

Como el sistema es:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x) = -U'(x) \end{cases}$$

los puntos críticos son aquellos que cumplen  $x' = 0, y' = 0$ , es decir, aquellos valores  $x_0$  que simultáneamente cumplen:  $y(x_0) = 0, -U'(x_0) = 0$ . Los hemos representado en la gráfica con un punto azul y se corresponden con aquellos valores de  $x$  que hacen nula la derivada de  $U(x)$ .

El valor  $E_3$  toca un máximo de  $U(x)$ , sin embargo, por unicidad, la trayectoria que surge de este valor no puede tocar el punto crítico. Observamos que a partir de esta trayectoria se producen un cambio en la forma de las mismas. Si estamos en  $\mathbb{R}^2$  llamaremos a este tipo de trayectorias **separatrices**.

**Definición 14** (Integral primera de un sistema). Una **integral primera** de un sistema es una función que es constante sobre cada solución o trayectoria.

**Observación.** Vamos a hacer un comentario acerca del ejemplo 50.

- Para ejemplificar la definición 14,  $\frac{y^2}{2} + U(x)$  es una integral primera del sistema:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x) = -U'(x) \end{cases}$$

En dimensión 2 corresponde (esencialmente) a una ecuación implícita para las trayectorias y se pueden encontrar intentando resolver la EDO de las trayectorias:

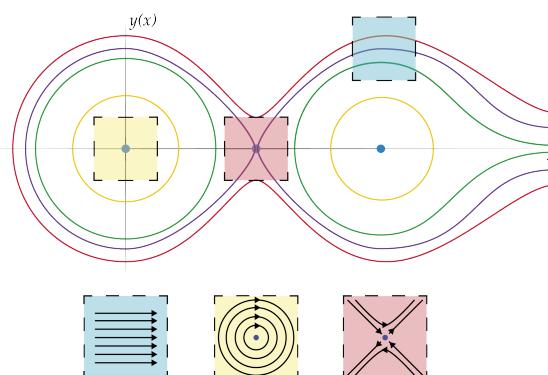
$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = f \\ y' = g \end{cases}$$

En dimensiones más altas, una integral primera solo da una hipersuperficie en la que están las trayectorias o soluciones. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^3$  sea el sistema:

$$\begin{cases} x' = (...) \\ y' = (...) \\ z' = (...) \end{cases}$$

Diremos que  $h(x, y, z)$  es una integral primera  $\iff h(x(t), y(t), z(t)) = cte$ , es decir, la trayectoria es el conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h(x, y, z) = cte\}$ . Ese conjunto es una superficie regular en los puntos en los que  $\nabla h \neq 0$  (se puede despejar una variable en términos de las otras dos).

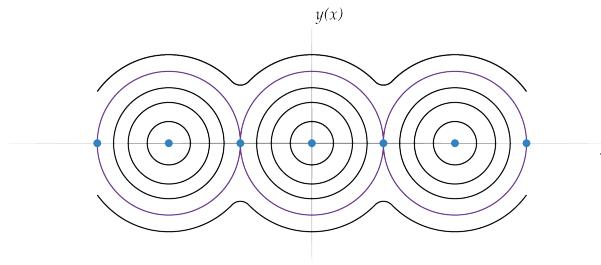
- En el ejemplo aparecen trayectorias cerradas. Veremos que corresponden a soluciones periódicas.
  - También hemos visto que hay trayectorias que *convergen* a un punto crítico (como la línea correspondiente a  $E_3$  en el gráfico).
- Veremos que si  $X(t)$  es una solución de  $X' = F(x)$  y  $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} p$ , entonces  $p$  es crítico. Basta que exista la sucesión  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  tal que  $X(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ .
- Si ampliamos con un *super-zoom* zonas del diagrama de fases, fuera del punto crítico se obtiene un gráfico como la zona azul de la siguiente imagen, que se corresponde a las tangentes a las trayectorias en esa zona; mientras que en un punto crítico obtenemos las otras dos. Se puede entender como el comportamiento lineal en esos puntos.



**Ejercicio propuesto 10.** Sea el problema:  $\theta'' = -\frac{g}{L} \sin(\theta)$ , su representación como sistema es:

$$\begin{cases} x = \theta \\ y = \theta' \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{g}{L} \sin(x) \end{cases}$$

Y su diagrama de fases es:



- Comprueba que la figura se corresponde con su diagrama de fases.
- ¿Cuáles son los puntos críticos marcados?
- Da dirección a las trayectorias.

### 6.1.1. Sistemas conservativos en dimensión mayor que 1

**Definición 15** (Sistema conservativo). Consideramos el sistema que surge de la EDO  $X'' = F(X)$ , con  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  regular.

Diremos que el sistema es un **sistema conservativo** cuando  $F = -\nabla U$ .

**Proposición 41.** Sea el sistema  $X'' = F(X)$  conservativo, entonces:

$$\frac{\|X'(t)\|_2^2}{2} + U(X(t)) = cte, \text{ es decir, } \frac{\|y\|_2^2}{2} + U(x) \text{ es integral primera}$$

*Demostración.*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\|X'(t)\|_2^2}{2} + U(X(t)) \right) = \frac{2X' \cdot X''}{2} + (\nabla U(X(t))) \cdot X'(t) = X'(X'' + \nabla U(X(t))) = X'(X'' - F(X(t))) = 0$$

◇

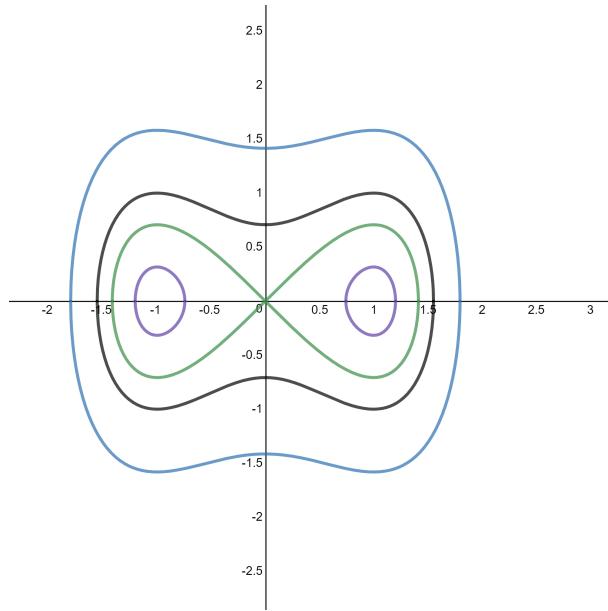
#### Ejemplo 51 (*Trayectorias de un pozo doble*)

Sea la EDO  $x'' = x - x^3 = f(x)$ . Como viene siendo habitual en sistemas mecánicos,  $f(x) = -U'(x)$  y por tanto  $U(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ . Entonces nuestro sistema es:

$$\begin{cases} x' = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \\ y' = x - x^3 = -U'(x) \end{cases}$$

Como los puntos críticos cumplen  $y = 0$ ,  $y' = x(1 - x^2) = 0$ , entonces:  $x = 0$ ,  $x = \pm 1$ . Por tanto, los puntos críticos son:  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ .

Sabemos que  $\frac{y^2}{2} + U(x)$  se conserva en las trayectorias, es decir, las trayectorias están descritas por  $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = cte$  (notamos que es la integral de  $y' = -U'(x)$ ). Por tanto, fijando distintas constantes hallamos el gráfico de las trayectorias:



**Observación.** La simetría con respecto al eje X tiene que ver con reversibilidad en  $t$ , es decir, si  $x(t)$  es solución de la EDO, entonces  $\bar{x}(t) = x(-t)$  también lo es.

**Proposición 42.** Sea  $X' = F(X)$  con  $F \in C^1(\Omega)$  y  $\Omega$  abierto en  $\mathbb{R}^d$ . Si  $X(t)$  es una solución que da lugar a una trayectoria cerrada, entonces es periódica.

*Demostración.* Dividiremos la prueba en distintos pasos:

1. Si la trayectoria  $X(t)$  es cerrada, entonces por definición  $\exists t_1 < t_2 : X(t_1) = X(t_2)$ .
  2. Sea  $T = t_2 - t_1$  y sea  $\bar{X}(t) = X(t + T)$  entonces  $\bar{X}$  es una solución del sistema, pues  $\bar{X}'(t) = X'(t + T) = F(X(t + T)) = F(\bar{X}(t))$ .
- Por otro lado,  $\bar{X}(t_1) = X(t_1 + t_2 - t_1) = X(t_2) = X(t_1)$ , es decir,  $X, \bar{X}$  resuelven el PVI:

$$\begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(t_1) = X(t_1) = \bar{X}(t_1) \end{cases}$$

y por unicidad  $\bar{X} = X$ .

◇

**Ejercicio propuesto 11.** Demostrar que si  $X(t) \neq cte$  (es decir, su trayectoria no es un punto crítico), entonces  $X$  tiene un periodo mínimo.

## 6.2. Linealización y clasificación de puntos críticos

Supongamos que tenemos un sistema como:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

y supongamos además que  $(x_0, y_0)$  es un punto crítico, es decir,  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ . Vamos a ampliar el gráfico de las trayectorias lo suficiente como para aproximar las tangentes a la trayectorias. Hacer esto formalmente es aproximar por Taylor.

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R(x, y)$$

donde (supongamos que  $f \in C^2$ ):  $R(x, y)$  es  $R(x, y) = O((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$ . Para simplificar nuestro resultado, hacemos el cambio  $u = x - x_0$  y  $v = y - y_0$ , con lo que obtenemos:

$$u' = au + bv + O(u^2 + v^2)$$

Haciendo lo mismo con  $g$ , obtenemos:

$$v' = cu + dv + O(u^2 + v^2)$$

Donde

$$\begin{aligned} a &= f_x(x_0, y_0) \\ b &= f_y(x_0, y_0) \\ c &= g_x(x_0, y_0) \\ d &= g_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Este sistema es aproximadamente (si  $|u| \ll 1$  y  $|v| \ll 1$ ):

$$\begin{cases} u' = au + bv \\ v' = cu + dv \end{cases} \quad \text{y lo denominamos sistema linealizado en el punto crítico}$$

Vamos a suponer que:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0, \text{ es decir, el punto crítico es } \textit{no degenerado}.$$

Esto tiene como consecuencia que el punto crítico es aislado, es decir, en un entorno de  $(x_0, y_0)$  no hay otro punto crítico. Sea  $H$  la función que aplica:  $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$ , si el punto es aislado entonces:  $\det(DH(x_0, y_0)) \neq 0$ , es decir,  $H$  es invertible cerca de  $(x_0, y_0)$ . Está claro que  $u = 0, v = 0$  es el único punto crítico del sistema lineal:

$$\begin{cases} u' = au + bv \\ v' = cu + dv \end{cases}$$

y vamos a estudiar cómo son sus trayectorias.

### 6.2.1. Clasificación de puntos críticos

Sea el sistema lineal:

$$\mathcal{S} \equiv \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

y sea  $(x_0, y_0)$  un punto crítico.

**Definición 16** (Punto crítico estable). Diremos que  $(x_0, y_0)$  es un punto crítico estable si y sólo si:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \text{si } (x(t), y(t)) \text{ es solución de } \mathcal{S}, \text{ con } (x(t_0), y(t_0)) \in \mathbb{B}((x_0, y_0), \delta) \text{ entonces } (x(t), y(t)) \text{ existe } \forall t \geq t_0 \text{ y } (x(t), y(t)) \in \mathbb{B}((x_0, y_0), \varepsilon)$

**Definición 17** (Punto crítico asintóticamente estable.). Diremos que  $(x_0, y_0)$  es un punto crítico asintóticamente estable si y sólo si:  $\exists \delta > 0 : \text{si } (x(t), y(t)) \text{ es solución de } \mathcal{S}, \text{ con } (x(t_0), y(t_0)) \in \mathbb{B}((x_0, y_0), \delta) \text{ entonces } (x(t), y(t)) \text{ existe } \forall t \geq t_0 \text{ y converge a } (x_0, y_0)$ .

Vamos a desarrollar la clasificación de distintos puntos críticos.

Sea el sistema:

$$\mathcal{S}\mathcal{I} \equiv \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

con  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  invertible. El único punto crítico es  $(0, 0)$ . Vamos a clasificarlo:

## 1. Caso de autovalores reales:

Sean  $\lambda_1, \lambda_2$  los autovalores de  $\mathbb{A}$ .

a)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Si  $V_j$  es autovector de  $\lambda_j$ ,  $V_1, V_2$  forman una base.  
las soluciones de  $\mathcal{S}\mathcal{I}$  son:

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

Pasamos a coordenadas  $(z, w) \in \mathbb{R}^2$  tal que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = zV_1 + wV_2, \text{ es decir, cambio de base de } \{e_1, e_2\} \text{ a } \{V_1, V_2\}$$

En esas coordenadas las soluciones son:

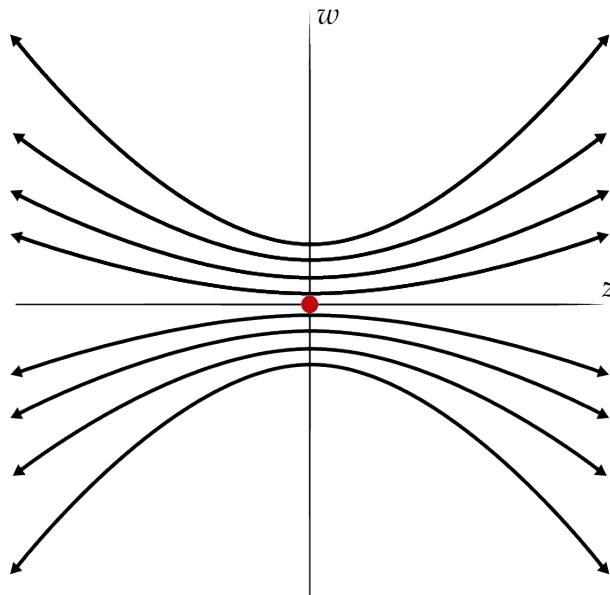
$$\begin{cases} z = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ w = \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

1)  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ .

Digamos que  $\alpha_1, \alpha_2 > 0 \implies z, w > 0$ . Entonces las trayectorias son:

$$w = \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = \alpha_2 (e^{\lambda_1 t})^{\lambda_2 / \lambda_1} = \alpha_2 \left( \frac{z}{\alpha_1} \right)^{\lambda_2 / \lambda_1}$$

es decir,  $w \equiv Cz^{\lambda_2 / \lambda_1}$  y  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ . Podemos representarlas en las variables  $z, w$ , lo que nos da como resultado un punto **inestable**:



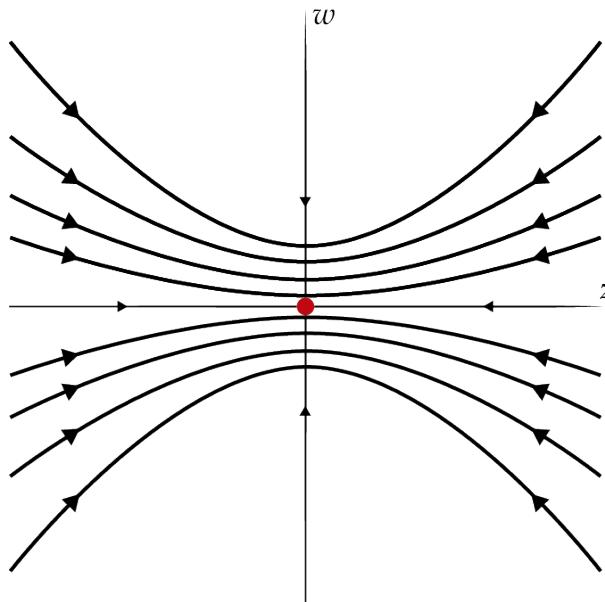
Si quisieramos representarlas en las variables originales  $x, y$  tendríamos que deshacer el cambio.  $V_2$  es el autovector que corresponde al autovalor de mayor tamaño  $|\lambda_2|$ .

Las trayectorias son tangentes a la recta de autovector con autovalor  $\lambda_i$  con valor absoluto más bajo, en este caso  $\lambda_1$ .

2)  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . El desarrollo del apartado anterior nos sirve para este caso también, es decir, las trayectorias siguen siendo:

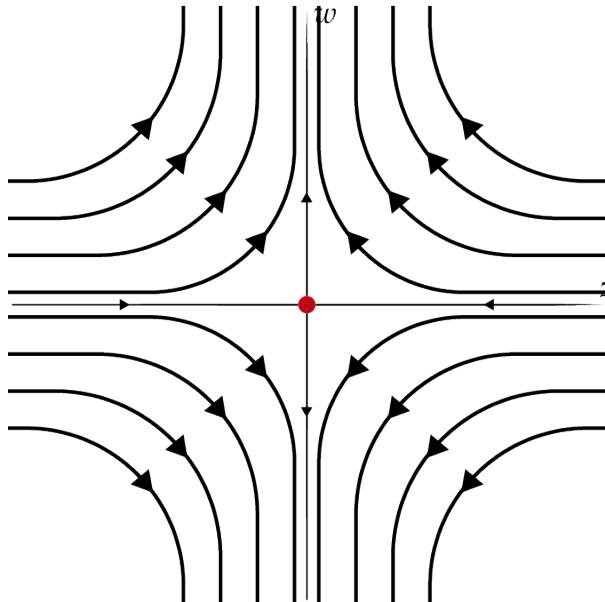
$$w = C(z)^{\lambda_2 / \lambda_1}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1.$$

Y su representación gráfica sería un punto **asintóticamente estable**:



Las trayectorias son tangentes a la recta de autovector con autovalor  $\lambda_i$  con valor absoluto más bajo, en este caso  $\lambda_1$ .

- 3)  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Entonces  $z = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \downarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y  $w = \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \uparrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Entonces el punto crítico es un **punto de silla** y sus trayectorias son:

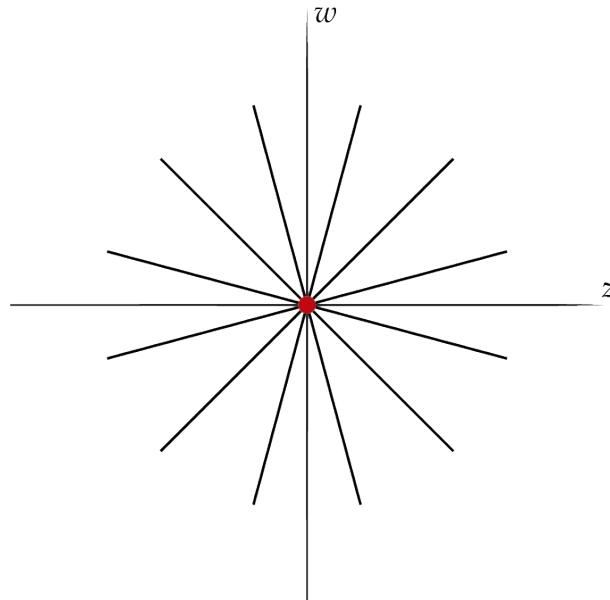


- b)  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ . Ahora no tenemos garantías de tener 2 autovectores independientes.

- 1)  $\exists V_1, V_2$  autovectores independientes. En este caso es:

$$\begin{cases} z = \alpha_1 e^{\lambda t} \\ x = \alpha_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Entonces, dependiendo del signo de  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$  tendremos un **punto crítico inestable**  $\lambda > 0$  o asintóticamente estable  $\lambda < 0$ .



- 2)  $\#V_1, V_2$  autovectores independientes, es decir, la dimensión del subespacio de autovectores es 1.

Sea  $V_1$  el autovector que encontramos, entonces la base de las soluciones es:

$$e^{\lambda t}V_1, e^{\lambda t}(V_2 + tV_1)$$

Donde  $V_2$  es un autovector generalizado, es decir,  $(\mathbb{A} - \lambda I)V_2 = V_1$ . Entonces la solución general es:

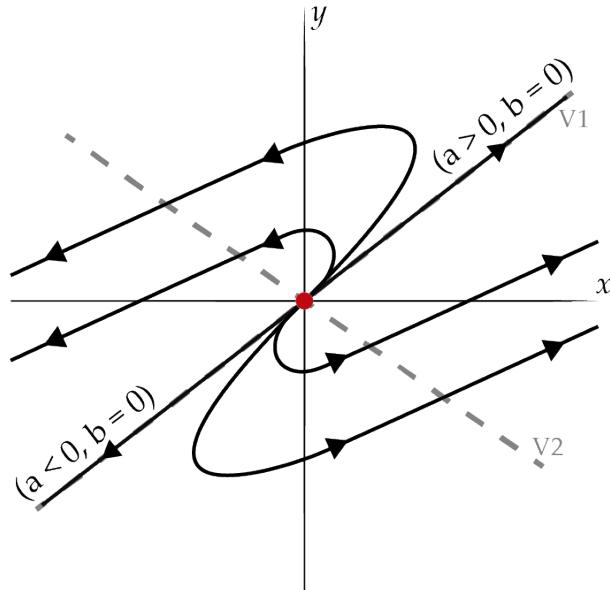
$$ae^{\lambda t}V_1 + be^{\lambda t}(V_2 + tV_1) = (a + bt)e^{\lambda t}V_1 + be^{\lambda t}V_2$$

$V_1, V_2$  forman una base de  $\mathbb{R}^2$ , y en coordenadas  $z, w$ :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = zV_1 + wV_2$$

Vamos a representar las trayectorias  $x, y$  para distintos casos, siempre con  $\lambda > 0$ .

- $b = 0 \rightsquigarrow z = ae^{\lambda t}, w = 0$ .
- $b = 1, a = 0 \rightsquigarrow z = te^{\lambda t}, w = e^{\lambda t}$ . Y su representación muestra un **nodo degenerado inestable** (si  $\lambda < 0$  tendríamos un nodo degenerado asintóticamente estable).



## 2. Caso autovalores complejos.

Tendremos  $\lambda \pm = \alpha \pm i\beta$ , con  $\beta > 0$ . Llamaremos  $\lambda$  a  $\lambda = \alpha + i\beta$ .

- a)  $\Re(\lambda) = 0$ , es decir  $\alpha = 0$  y  $\lambda \pm$  son imaginarios puros.

Entonces,  $\lambda = \alpha + i\beta$  tiene como autovector  $W = V_1 + iV_2$  y  $\lambda - = \alpha - i\beta$  tiene como autovector  $\bar{W} = V_1 - iV_2$ .

Su solución general es:

$$aRe(e^{i\beta t}W) + bIm(e^{i\beta t}W)$$

Y como:

$$e^{i\beta t}W = \cos(\beta t)V_1 - \sin(\beta t)V_2$$

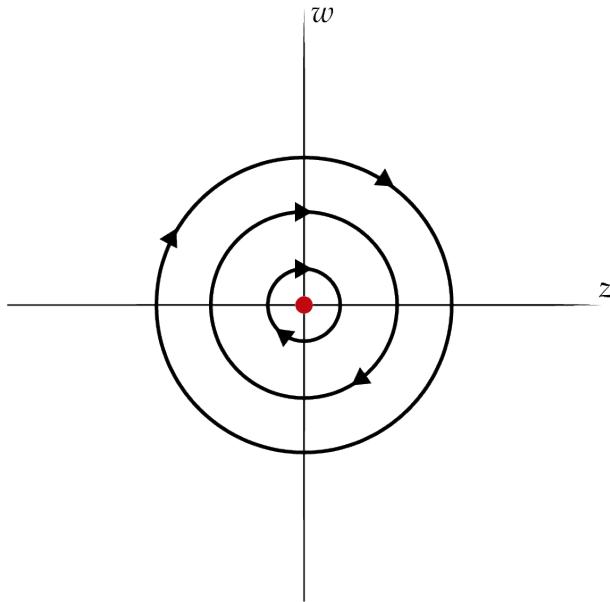
podemos reescribir la solución general como:

$$(a \cos(\beta t) + b \sin(\beta t))V_1 + (b \cos(\beta t) - a \sin(\beta t))V_2$$

Por tanto, en coordenadas  $z, w$ :

$$\begin{cases} z = a \cos(\beta t) + b \sin(\beta t) \\ w = b \cos(\beta t) - a \sin(\beta t) \end{cases}$$

Esto quiere decir que como  $z^2 + w^2 = a^2 + b^2$ , tenemos círculos de radio  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . En  $x, y$  serían elipses. Su representación geométrica da lugar a un **centro** (que es estable).



Es fácil ver que si cambia el signo de  $\beta$ , cambia el sentido de las trayectorias.

- b)  $Re(\lambda \neq 0)$ .

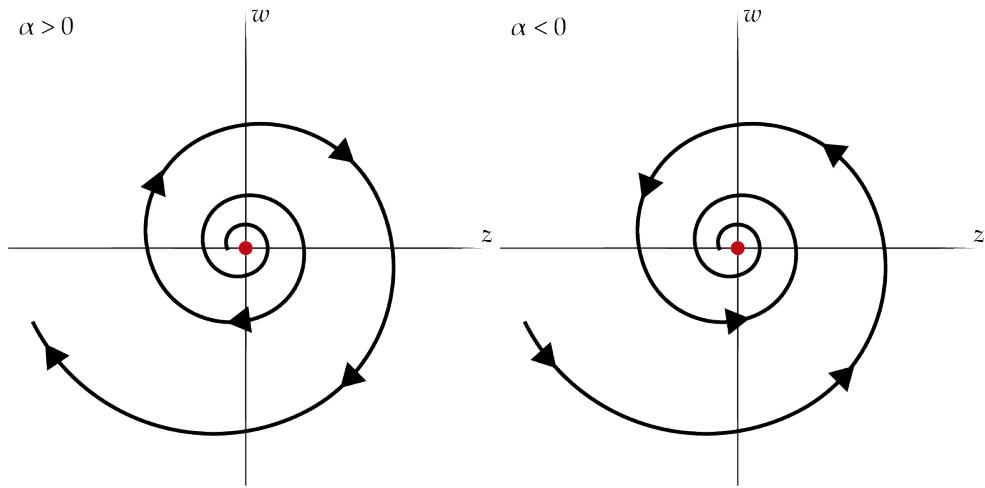
Repitiendo el mismo cálculo que en la sección anterior, esta vez con la solución general:

$$aRe(e^{\alpha t}e^{i\beta t}W) + bIm(e^{\alpha t}e^{i\beta t}W)$$

Obtendríamos en coordenadas  $z, w$ :

$$\begin{cases} z = e^{\alpha t}(a \cos(\beta t) + b \sin(\beta t)) \\ w = e^{\alpha t}(b \cos(\beta t) - a \sin(\beta t)) \end{cases}$$

Y su representación en  $z, w$  da lugar a una espiral. Representamos dos casos, con  $\alpha > 0$  obtenemos una espiral inestable, y con  $\alpha < 0$  una espiral asintóticamente estable. De nuevo,  $\beta$  da el sentido del giro.



### Criterios para distinguir puntos críticos

Sin embargo, lo que hemos visto en la sección anterior puede resultar tedioso, por lo que vamos a ver otra forma de distinguir los diferentes casos utilizando la traza y el determinante de la matriz:  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Es claro que los autovalores  $\lambda_i$  siguen la ecuación:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

o lo que es lo mismo, sea  $T = \text{traza}(\mathbb{A})$  y  $D = \det(\mathbb{A})$  entonces la ecuación es:

$$0 = \lambda^2 - T\lambda + D = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2), \text{ es decir:}$$

$$\begin{cases} T = \lambda_1 + \lambda_2 \\ D = \lambda_1 \lambda_2 \end{cases}$$

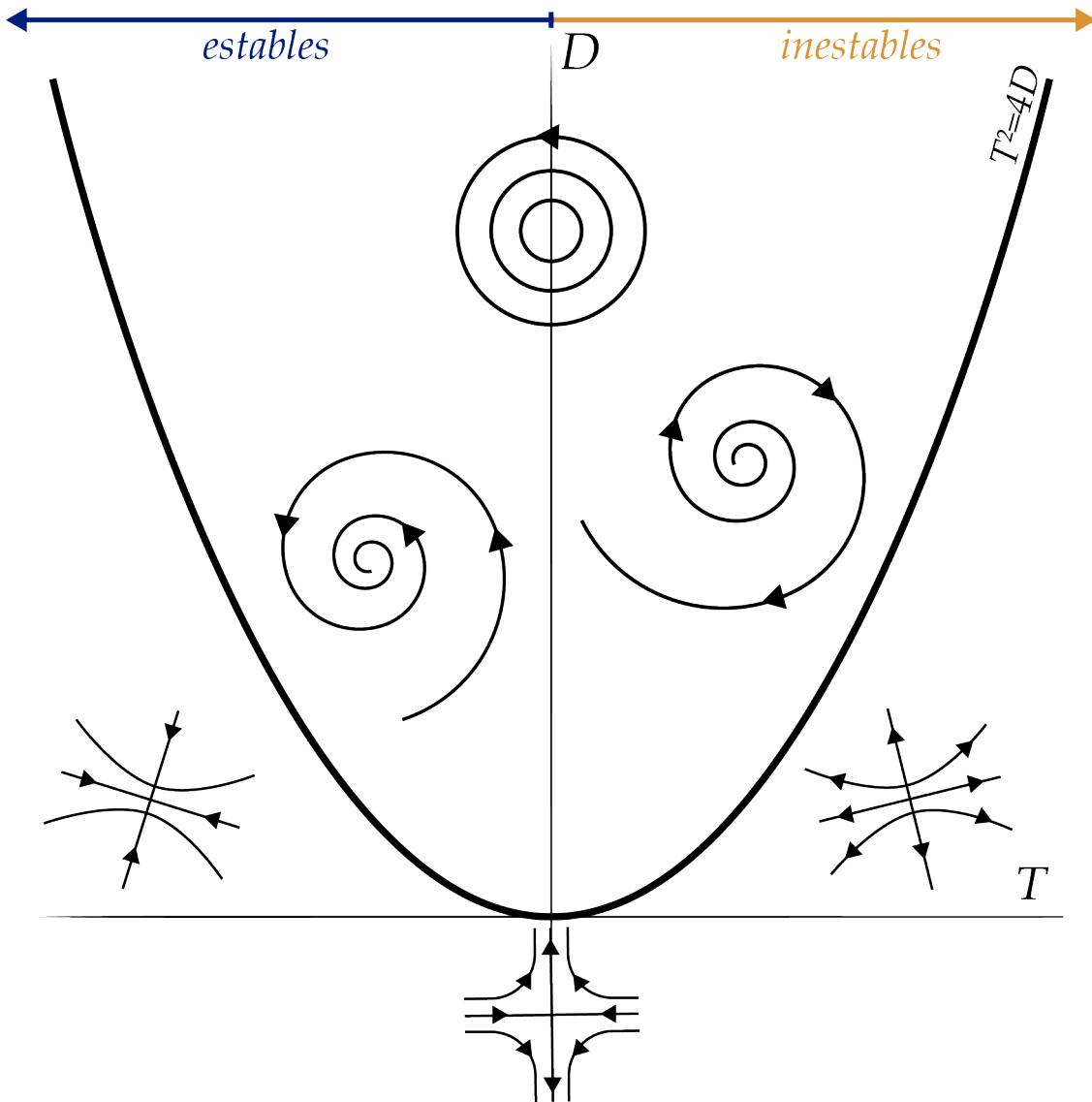
**Proposición 43** (Clasificación de puntos críticos en función del determinante y la traza). Sea el sistema:

$$\mathcal{S}\mathcal{I} \equiv \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

y sea  $T = \text{traza}(\mathbb{A})$  y  $D = \det(\mathbb{A})$  entonces:

- $T^2 - 4D < 0 \implies$  los autovalores son complejos. **Espirales**.
- $T^2 - 4D < 0$  y  $T = 0 \implies$  los autovalores son complejos con  $\text{Re}(\lambda) = 0$ . **Centros**.
- $T^2 > 4D \implies$  autovalores reales y distintos. **Nodos**.
- $D < 0 \implies$  autovalores reales con distinto signo. **Puntos de silla**.
- $T^2 = 4D \implies$  autovalores reales iguales. **Nodos degenerados**.

El siguiente dibujo resume lo visto:



*Demostración.* Se sigue de forma directa de la introducción de esta subsección.  $\diamond$

**Proposición 44** (Relación de puntos críticos con el sistema lineal asociado). Si  $(x_0, y_0)$  es un punto crítico propio de  $\mathcal{SI}$ , es decir:

$$\det \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \neq 0$$

entonces el aspecto de las trayectorias de  $\mathcal{SI}$  cerca de  $(x_0, y_0)$  es el mismo que el del sistema lineal asociado  $\mathcal{SL}$  en  $(0, 0)$  salvo en los casos:

- $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$
- $Re(\lambda_i) = 0, (Im(\lambda_i) \neq 0)$ .

**Observación.** No se proporciona demostración de la proposición pero vamos a hacer algunos comentarios.

- En el caso  $\lambda_1 = \lambda_2$  puede quedarse igual o convertirse en el aspecto de un  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , la estabilidad o no permanece.
- En el caso  $Re = 0$ , es decir  $\lambda_i$  es un complejo puro, se puede quedar igual (centro), o pasar a un comportamiento en espiral (estable o inestable).

**Ejemplo 52 (Análisis de puntos críticos. Sistema de presa/depredador simple.)**

| Si quisieramos modelizar las poblaciones de presa( $x$ ) y depredador( $y$ ) podríamos expresarlo por medio

del sistema:

$$\begin{cases} x' = 2x - \frac{1}{2}xy = f(x, y) \\ y' = -3y + 5xy = g(x, y) \end{cases}$$

Vamos a analizar los puntos críticos.

Resolvemos:

$$\begin{cases} f = x(2 - \frac{y}{2}) = 0 \\ g = y(-3 + 5x) = 0 \end{cases}$$

De  $f$  hallamos  $x = 0$  o  $y = 4$ , y de  $g$  hallamos  $y = 0$  o  $x = \frac{3}{5}$ . Así que los puntos críticos son:  $(0, 0)$  y  $(\frac{3}{5}, 4)$ .

Ahora calculamos:

$$f_x = 2 - \frac{1}{2}y, \quad f_y = -\frac{x}{2}, \quad g_x = 5y, \quad g_y = -3 + 5x$$

Y por tanto, la matriz de la aproximación lineal  $\begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$  queda en  $(\frac{3}{5}, 4)$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{-3}{10} \\ 20 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda = \pm \sqrt{6}i$$

y por tanto es un centro en la aproximación lineal. Queremos saber que ocurre en el sistema original.

La ecuación de las trayectorias:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{f} = \frac{y(-3 + 5x)}{x(2 - y/2)}$$

que es de variables separables y tras resolverla llegamos a:

$$y^2 x^3 = \pm e^C e^{5x} x e^{\frac{y}{2}}$$

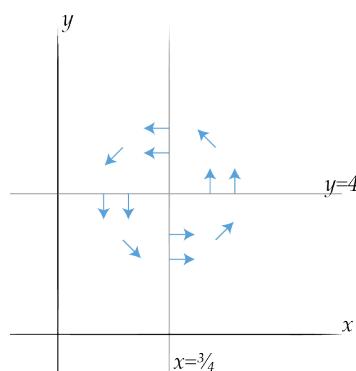
y escogiendo el signo en función de  $x$  para que preserve el valor absoluto obtendríamos:

$$y^2 e^{-\frac{y}{2}} = k \frac{e^{5x}}{x^3}$$

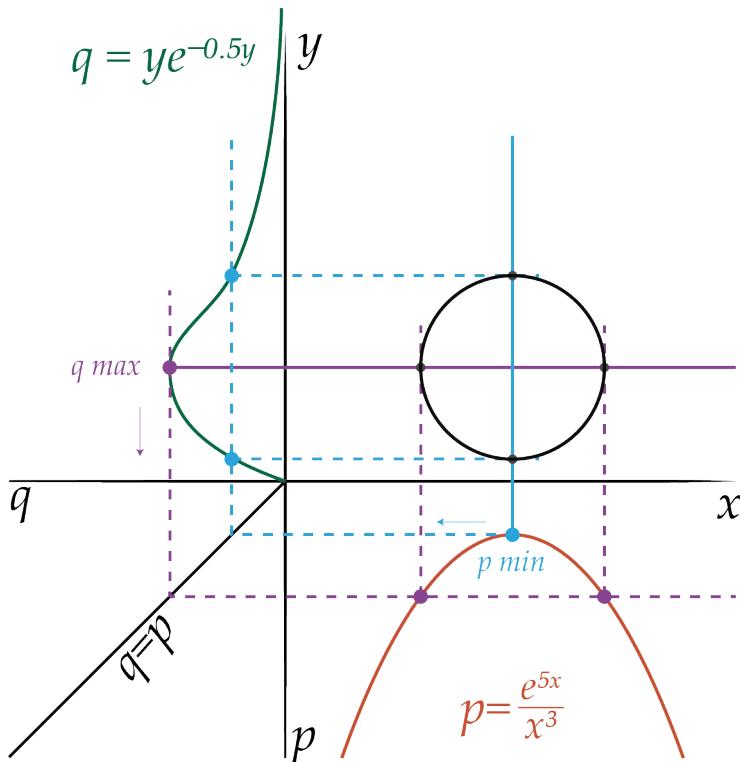
Y al representarlo veríamos que es una curva cerrada. Para dibujar las trayectorias puede ayudarnos dibujar el campo vectorial asociado al problema.

Consideramos entonces el campo vectorial definido por la aplicación  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que lleva  $(x, y)$  a  $(f(x, y), g(x, y))$ .

Las curvas en las que  $h$  es horizontal son aquellas en las que  $g(x, y) = 0$ , de la misma forma  $h$  es vertical si  $f(x, y) = 0$ . Con esto hallamos donde están los vectores puramente verticales u horizontales, y para dar sentido a los vectores simplemente calculamos su valor de  $h$ .



Además del campo vectorial, que nos permite esbozar las trayectorias, podemos dibujarlas directamente a partir de la ecuación implícita de las mismas. Para ello vamos a usar que  $q \equiv y^2 e^{-\frac{y}{2}} = k \frac{e^{5x}}{x^3} \equiv p$ , y vamos a representar en cada cuadrante una función distinta,  $y$  frente a  $x$  en el primer cuadrante,  $q$  frente a  $y$  en el segundo,  $q$  frente a  $p$  en el tercero y  $p$  frente a  $x$  en el cuarto.



Y en este caso vemos que el centro del sistema lineal es también un centro en el sistema original.

**Ejercicio propuesto 12.** Prueba analíticamente que las trayectorias del ejemplo anterior son curvas cerradas.

### Ejemplo 53 (*Sistemas con centro en sistema lineal pero espirales en el original*)

Sean los sistemas:

$$\mathcal{I} = \begin{cases} x' = -y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$\mathcal{II} = \begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2) \\ y' = x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Comparten el mismo sistema lineal:

$$\mathcal{SL} = \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

que expresado de forma matricial en  $(0, 0)$  tiene como matriz de coeficientes:  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Usando el criterio de traza y determinante podemos determinar fácilmente que es un centro. Sin embargo, podríamos ver que el  $(0, 0)$  de  $\mathcal{I}$  es una espiral estable y en  $\mathcal{II}$  es una espiral inestable.

Para verlo analíticamente pasamos a polares y estudiamos la ecuación para  $r(t)$ . Visualmente podemos representar el campo vectorial de los sistemas originales con lo que veríamos como se comportan ambas espirales. Se deja al lector.

**Observación.** Como hemos visto, en los ejemplos 53 y 52 hallábamos un centro en el sistema lineal pero se puede transformar en espirales o seguir siendo un centro en el sistema original.

**Ejemplo 54 (Sistema de poblaciones competitivas con limitación de recursos compartidos.)**

Sea el sistema:

$$\begin{cases} x' = x(2 - x) - xy \equiv f \\ y' = y(3 - y) - 2xy \equiv g \end{cases}$$

Entonces la matriz del sistema lineal en cada punto crítico  $(x_0, y_0)$  es:

$$\begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Los puntos críticos son los que cumplen que  $f = g = 0$  y obtenemos para cada punto su matriz lineal y su interpretación con el criterio de la traza y el determinante:

$$P1: (0, 0) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \equiv \text{nodo inestable.}$$

$$P2: (0, 3) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \equiv \text{nodo asintóticamente estable.}$$

$$P3: (2, 0) \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \equiv \text{nodo asintóticamente estable.}$$

$$P4: (1, 1) \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \equiv \text{punto de silla.}$$

Además, en los tres primeros puntos las trayectorias son tangentes al autovector  $v_1$ , de autovalor de menor tamaño (en valor absoluto).

Los autovectores son:

$$P1: v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P2: v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P3: v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

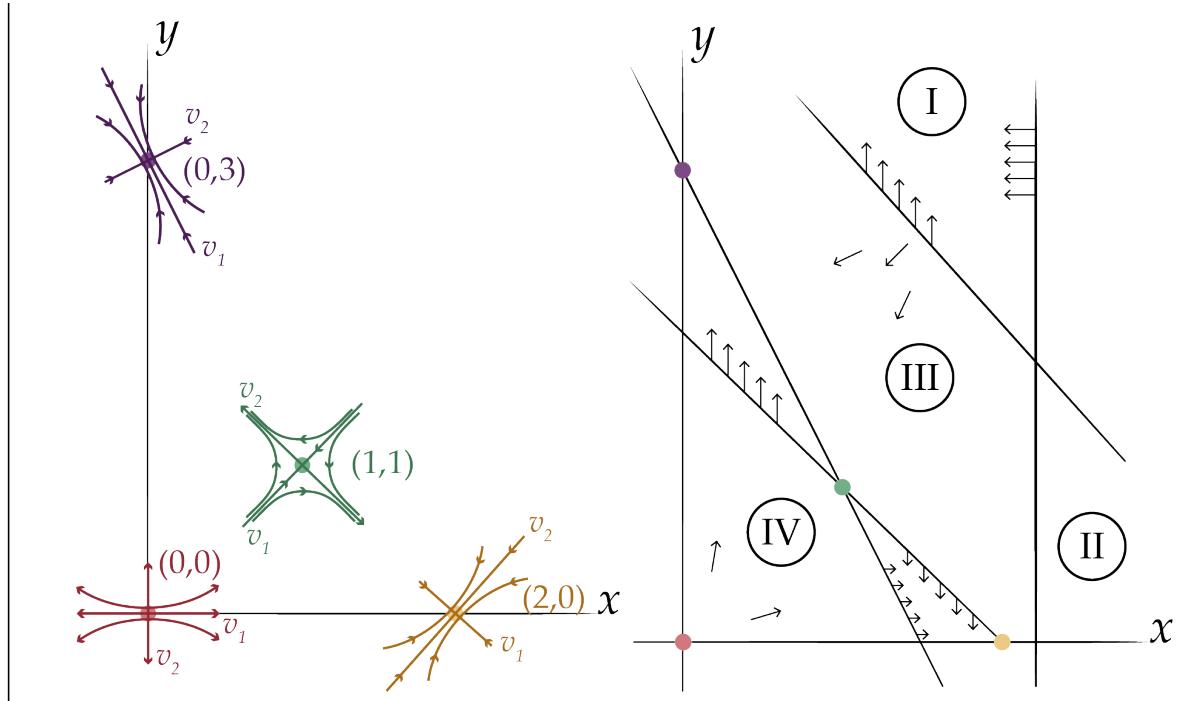
$$P4: v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Entonces, en los puntos críticos podemos saber como van a comportarse la aproximación lineal de las trayectorias, que como no son ningún centro, tienen el mismo comportamiento que las trayectorias originales. Además, para seguir esbozando podemos trazar el campo vectorial  $V$  sobre las curvas en las que o bien  $f = 0$  o bien  $g = 0$ . Entonces, sea  $V$ :

$$V = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(2 - x - y) \\ y(3 - y - 2x) \end{bmatrix}$$

Estas curvas nos definen regiones en el espacio y siguiendo la dirección del campo vectorial podemos analizar a qué regiones vamos a poder volver o de cuales no vamos a poder salir.

Se aporta una representación de las trayectorias en los puntos críticos y el campo vectorial en distintas regiones:



### 6.3. Estabilidad de puntos críticos

Consideraremos el sistema  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{S} = \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Y recordamos que  $p = (x_0, y_0)$  es un punto crítico si  $f(p) = g(p) = 0$ .

**Definición 18** (Punto crítico no singular). Diremos que un punto  $p = (x_0, y_0)$  es singular en un sistema:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

si y sólo si:

$$\det \begin{bmatrix} f_x(p) & f_y(p) \\ g_x(p) & g_y(p) \end{bmatrix} = 0$$

Vamos a ver como estudiar la **estabilidad** de un punto crítico  $p$  no-singular en  $\mathcal{S}$ .

Para los casos en que el  $\mathcal{SL}$  sea el sistema lineal asociado a  $\mathcal{S}$  en  $p$  tiene el mismo aspecto que el de  $\mathcal{S}$  (es decir, la parte real de los autovalores es no nula), podemos concluir estabilidad en los casos pertinentes.

1. Si  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ ,  $i \in \{1, 2\} \implies p$  estable
2. Si un autovalor (al menos) tiene parte real  $> 0$ , entonces es inestable.

Sin embargo, en caso de que  $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ , ya vimos que tenemos un centro para  $\mathcal{SL}$ , y que en el sistema original podemos tener o bien un centro o bien una espiral. En este caso vamos a ver un enfoque que mira directamente a  $\mathcal{S}$ .

Para realizar este análisis, vamos a intentar encontrar una función  $E(x, y)$  que se comporte como una *energía* en la que  $p$  es el punto de *energía mínima*, y tal que la *energía* se mantiene o decrece a lo largo de las trayectorias cercanas a  $p$ .

**Definición 19** (Signo de definición de una función). Sea  $p = (x_0, y_0)$  un punto crítico para  $\mathcal{S}$  y sean  $f, g \in C^1$  en un entorno de  $p$ .

Sea una función  $E \in C^1$ ,  $E(p) = 0$  y además:

$$\exists r_0 > 0 \text{ tq } E : \mathbb{B}(p, r_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

Entonces, sea  $q \neq p$  diremos que  $E$  es:

1. **definida positiva** si y sólo si  $E(q) > 0$ .
2. **semidefinida positiva** si y sólo si  $E(q) \geq 0$ .
3. **definida negativa** si y sólo si  $E(q) < 0$ .
4. **semidefinida negativa** si y sólo si  $E(q) \leq 0$ .

**Observación.** Vamos a dar algunos ejemplos de funciones definidas positivamente:

1.  $E(x, y) = x^2 + y^2$  es definida positiva para  $(0, 0)$
2.  $E(x, y) = [x \ y] \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , es definida positiva si la matriz  $2 \times 2$  lo es.

**Definición 20** (Función de energía). Las funciones de *energías* que comentábamos anteriormente son las funciones definidas positivamente para  $p$ . Además, la *energía* se mantiene o decrece en las trayectorias. ¿En qué se convierte esta idea?

$$\text{Sea } e(t) = E(x(t), y(t))$$

Diremos que la energía se mantiene o decrece si:  $\frac{de}{dt} \leq 0$ . Por tanto, desarrollando con la regla de la cadena obtenemos:

$$\frac{de}{dt} = E_x(x(t), y(t))x'(t) + E_y(x(t), y(t))y'(t) = (E_x f + E_y g)(x(t) + y(t)) \leq 0$$

Y para que esto se cumpla basta que  $E_x f + E_y g \leq 0$  para cualquier punto  $(x, y)$  cerca de  $p$ .

**Proposición 45** (Estabilidad). Si existe  $E$  una función definida positiva en  $p$ , y además  $E_x f + E_y g$  es semidefinida negativa en  $p$  con ( $E \in C^2$ ), entonces  $p$  es **estable** para  $\mathcal{S}$ .

Recordemos que un punto  $p$  es estable si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|(x(t_0), y(t_0)) - p\| < \delta$$

entonces:

$$\|(x(t), y(t)) - p\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

*Demostración.* Sea  $E : \mathbb{B}(p, r_0) \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , vamos a ver que existe un  $\delta$  como en el enunciado. Podemos suponer  $\varepsilon < r_0$ .

1. Sea  $m = \min_{\delta \mathbb{B}(p_0, \varepsilon)} E$ , que existe por ser  $E$  continua y  $\delta \mathbb{B}(p_0, \varepsilon)$  un compacto, y  $m > 0$  pues  $E$  solo se anula en  $p$  y es  $> 0$  fuera, en particular en la frontera de  $\mathbb{B}$  (por ser definida positiva).
2.  $E(p) = 0$  y continua  $\implies \exists \delta > 0$  tal que  $E(q) < m$  si  $\|q - p\| < \delta$ .
3. Si  $(x(t_0), y(t_0)) \in \mathbb{B}(p, \delta)$  entonces  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{B}(p, \varepsilon) \quad \forall t > t_0$ , vamos a ver esto.

Si fuera falso, esto querría decir que:

$$\exists \bar{t} > t_0 : (x(\bar{t}), y(\bar{t})) \notin \mathbb{B}(p, \varepsilon)$$

y por tanto:

$$e(\bar{t}) = E(x(\bar{t}), y(\bar{t})) \geq m$$

Por otro lado:

- $e(t_0) \leq \frac{m}{2}$

- $\frac{de}{dt} = E_x f + E_y g \leq 0$

Por tanto,  $e(t)$  decrece y  $e(t) \leq e(t_0) \leq \frac{m}{2} < m \forall t \leq t_0$

Y como hemos visto que  $e(t) \geq m$  y  $e(t) < m$ , entonces tenemos una contradicción lo hemos probado.

◊

**Definición 21** (Función de Lyapunov débil). Una función como  $E$  en la proposición 45 se denomina **función de Lyapunov débil** para un sistema  $\mathcal{S}$  (como al comienzo de la sección) en  $p$ .

**Proposición 46** (Estabilidad asintótica). Si en las hipótesis del resultado de la proposición 45 cambiamos  $E_x f + E_y g$  semidefinida negativa por definida negativa entonces  $p$  es asintóticamente estable, es decir:

$$\exists \delta_0(x(t_0), y(t_0)) \in \mathbb{B}(p, \delta_0) \implies (x(t), y(t)) \text{ converge a } p \text{ cuando } t \rightarrow +\infty$$

*Demostración.* Tomamos  $\varepsilon_0$  tal que las hipótesis sobre  $E$ ,  $E_x f + E_y g$  se cumplen en  $\bar{\mathbb{B}}(p, \varepsilon_0)$ . Por la proposición anterior:

$$\exists \delta_0 : (x(t_0), y(t_0)) \in \mathbb{B}(p, \delta_0) \implies (x(t), y(t)) \in \mathbb{B}(p, \varepsilon_0)$$

Con  $e(t)$  como antes,  $e(t) \downarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  pues de lo contrario pasaría lo siguiente:

- $e(t)$  decrece.
- Si  $e(t)$  no converge a 0 entonces la trayectoria se queda en un anillo.
- Como  $E_x f + E_y g$  es continua, no se anula en el anillo y es  $< 0$  en él (pues es definida negativa), entonces:

$$\exists r > 0 : E_x f + E_y g \leq -\delta_0 \text{ en el anillo}$$

Entonces si  $t > t_0$ :

$$e(t) = e(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{de}{dt}(s) ds \leq e(t_0) - \gamma(t - t_0) \downarrow -\infty \text{ cuando } t \rightarrow +\infty$$

◊

**Definición 22** (Función de Lyapunov fuerte). Una función  $E$  como en la proposición 46 se llama **función de Lyapunov fuerte**

### 6.3.1. Interpretación geométrica

Vamos a intentar dar una interpretación geométrica de las proposiciones anteriores para visualizar la estabilidad de un punto crítico. Volvamos a considerar:

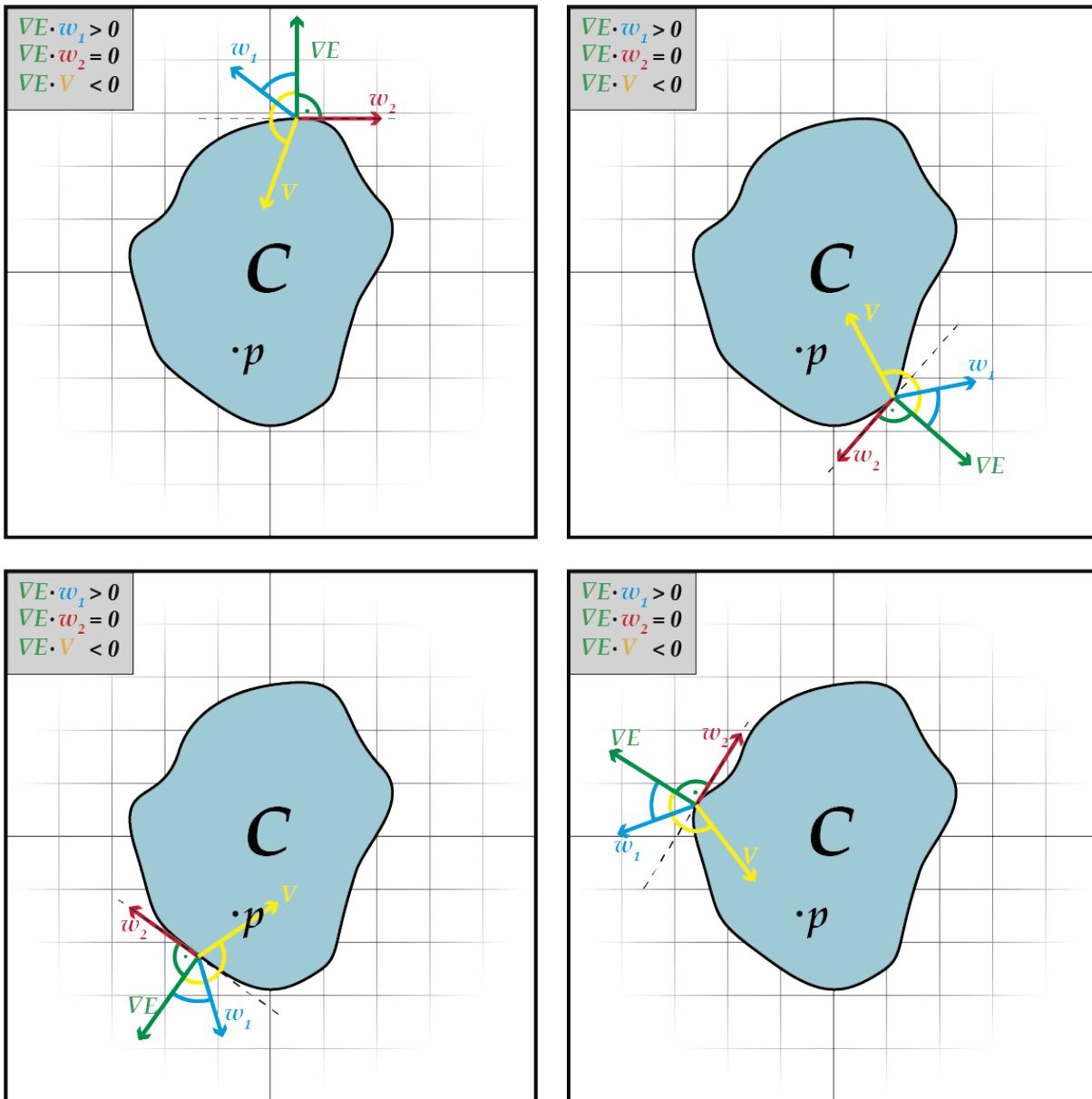
$$\mathcal{S} = \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Sea  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de *energa*<sup>20</sup> (es decir, con derivada no positiva), y sea  $\mathcal{C} \equiv \{(x, y) : E(x, y) = h\}$  un conjunto de nivel de la misma. Además, es trivial ver que  $\nabla E$  es normal al conjunto de nivel. Sabemos por su definición que  $E_x f + E_y g \leq 0$ , que en forma matricial:

$$E_x f + E_y g = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \nabla E \leq 0$$

Además, recordemos que si  $V = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ , entonces  $V$  es tangente a una solución del sistema (por ser el vector formado por  $x', y'$ ).

Ahora supongamos como en la proposición 45 que  $E_x f + E_y g < 0$ . Por tanto, sabemos que  $V \cdot \nabla E < 0$ , lo que quiere decir que todos los vectores  $V$  de  $\mathcal{C}$  apuntan al interior del conjunto, pues de lo contrario el producto escalar debería ser positivo (el ángulo comprendido entre  $\nabla E$  y  $V$  sería menor que  $\pi/2$ ). Como todos los  $V$  asociados a los puntos  $p \in \mathcal{C}$  apuntan al interior del conjunto y son tangentes a las trayectorias, éstas van a ir adentrándose en el conjunto  $\mathcal{C}$ , convergiendo a  $p$  y siendo entonces  $p$  un punto estable.



En caso de tener  $E_x f + E_y g \leq 0$  estaríamos en el caso de la proposición 46. En este caso  $V$  puede apuntar hacia dentro del conjunto  $\mathcal{C}$  o puede ser tangente a él. En cualquier caso nunca va a alejarse del conjunto y decimos entonces que es asintóticamente estable. Diremos que una trayectoria está en la cuenca de atracción de  $p$  si alguno de sus puntos se encuentra en  $\mathcal{C}$ .

**Ejercicio propuesto 13.** Usando las mismas ideas, en especial que  $e(t) = e(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{de}{dt}(s)ds$ , donde  $\frac{de}{dt} = E_x f + E_y g$ , demostrar que si suponemos que  $E$  está definida en todo  $\mathbb{R}^2$  y cumple las hipótesis de la proposición 46 y además  $E(q) \rightarrow +\infty$  entonces todas las trayectorias convergen a  $p$ .

**Ejemplo 55**

Encontrar  $\alpha$  tal que  $x^2 + \alpha y^2$  es una función de Lyapunov (fuerte) en el punto  $(0, 0)$  para el sistema:

$$\begin{cases} x' = y - \sin^3(x) \\ y' = -4x - \sin^3(y) \end{cases}$$

*Analizamos la matriz del sistema lineal asociado*

La matriz del sistema lineal asociado tiene como matriz:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ , que tiene autovalores  $\pm \sqrt{2i}$  y por tanto es un centro. Como es un centro en el sistema lineal asociado, no podemos asegurar que lo sea en el sistema original, ya que podría ser un centro o una espiral (estable o inestable).

*Hacemos un análisis más en profundidad del sistema original*

Cuando  $\alpha > 0 \implies x^2 + \alpha y^2$  es definida positiva. Además:

$$E_x f + E_y g = 2x(y - \sin^3(x)) + 2\alpha y(-4x + \sin^3(y)) = (2 - 8\alpha)xy - 2x\sin^3(x) - 2\alpha y\sin^3(y)$$

Como  $\sin^3(x) \sim x^3$  y  $\sin^3(y) \sim y^3$  cerca de  $(0, 0)$ , entonces basta encontrar un  $\alpha$  tal que  $2 - 8\alpha = 0 \implies \alpha = \frac{1}{4}$ . Por tanto:

$$E_x f + E_y g = -2x^4 \left( \frac{\sin(x)^3}{x} \right) - \frac{1}{2}y^4 \left( \frac{\sin(y)^3}{y} \right)$$

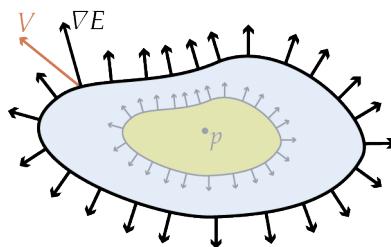
y de nuevo, como  $\frac{\sin(u)}{u} \sim 1$  cerca de  $u = 0$ , tenemos:

$$E_x f + E_y g \leq -c(x^4 + y^4)$$

Que es definida negativa y por tanto, hemos hallado el  $\alpha$  que hace que la función  $E$  sea una función de Lyapunov fuerte.

**Observación.** Veamos algunas observaciones sobre el ejemplo anterior:

- Si el comportamiento se corresponde con:



el punto es inestable. Es decir:

Si  $E$  es definida positiva en  $p$  y  $E_x f + E_y g$  definida positiva en  $p$  entonces  $\langle \nabla E, V \rangle > 0$  lo que implica que las trayectorias se alejan.

Sin embargo, esto es pedir demasiado para que el punto sea inestable, de hecho, lo anterior sólo recoge el caso del nodo inestable, donde todas las trayectorias se alejan del punto. Bastaría pedir que  $E \in C^1$  y que  $E_x f + E_y g > 0$  en  $\mathbb{R}$ .

- Si existe una curva cerrada simple tal que  $V = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$  apunta hacia dentro, entonces las trayectorias permanecen en la región delimitada por la curva.

## 6.4. Trayectorias cerradas

En esta sección vamos a ver ciertos resultados sobre trayectorias cerradas de un sistema de ecuaciones. Es decir, las que corresponden a soluciones periódicas. Vamos a considerar el sistema:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \text{con } f, g \in C^1 \text{ en una bola abierta de } \mathbb{R}^2$$

**Proposición 47** (Criterio de Bendixson). Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es abierto, conexo y simplemente conexo. Si  $(f_x + g_y)(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in \Omega$ , entonces no existe ninguna trayectoria cerrada de  $\mathcal{S}$  que esté completamente contenida en  $\Omega$ .

*Demostración.* Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos que existe dicha trayectoria  $C = (x(t), y(t))$  cerrada y por tanto, una solución periódica.  $C$  tiene que ser una curva cerrada simple, y por estar definida en  $\mathbb{R}^2$  define una región  $R$  en su interior.

1. Afirmamos que:

$$\int_R (f_x + g_y) dx dy \neq 0$$

Como  $(f_x + g_y)$  continua, y  $R \subset \Omega$  es conexo, entonces  $f_x + g_y$  no se anula en  $R$ , y por tanto  $(f_x + g_y)$  no cambia de signo y la integral no se anula.

2. Además:

$$\int_C (f dy - g dx) = \pm \int_R (f_x + g_y) dx dy \neq 0$$

3. La integral de línea sobre  $C = (x(t), y(t))$  (*periodica*) es:

$$\int_C f dy - g dx = \int_0^T (f(x(t), y(t))) y'(t) dt - g(x(t), y(t)) x'(t) dt = \int_0^T (fg - gf) dt = 0$$

Con lo que llegamos a la contradicción que estábamos buscando.

◇

**Observación.** Se puede dar una versión del criterio de Bendixson (proposición 47) más general pero igual de difícil de aplicar.

Si  $h(x, y)$  no se anula, las trayectorias de:

$$\begin{cases} x' = f \\ y' = g \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x' = hf \\ y' = hg \end{cases}$$

son las mismas.

Eso quiere decir que en las condiciones del criterio, si  $\exists h \in C^1$  que no se anula en  $\Omega$  y  $(hf)_x + (hf)_y$  tampoco se anula, y por tanto el sistema no tiene trayectorias cerradas contenidas en  $\Omega$ .

**Proposición 48** (Poincaré - Bendixson). Sean  $f, g \in C^1(\Omega)$ ,  $\Omega$  dominio región en  $\mathbb{R}^2$  abierto y conexo. Sea el sistema:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Entonces:

1. Si  $\Omega$  es simplemente conexo y  $C \subset \Omega$  es una trayectoria cerrada, entonces  $C$  encierra un punto crítico de  $\mathcal{S}$
2. Sea  $R \subset \Omega$  cerrado y acotado, tal que:

- $R$  no contiene puntos críticos de  $\mathcal{S}$

- existe una trayectoria  $C$  que comienza en  $R$  y se mantiene en  $R$ , es decir tenemos una solución de  $\mathcal{S}$  que cumple:

$$(x(t), y(t)) \in R \forall t : t_0 \leq t < \infty$$

Entonces ocurre una de las siguientes cosas:

- $C$  es una trayectoria cerrada.
- $C$  converge en espiral a una trayectoria cerrada (que se denomina ciclo límite)

*Demostración.* Vamos a ver la idea subyacente en la demostración en ambos resultados, la demostración escapa de los contenidos del curso.

- Siguiendo las figuras,  $V$  es tangente a  $C$  pues es una solución del sistema. Podemos ver como cambia la dirección del vector  $V$  conforme recorremos la curva. Si llevamos el vector  $V$  al origen vemos que ha completado una vuelta.

Si ahora tomamos una curva cerrada cualquiera dentro de  $C$ , ahora no tiene por qué ser tangente a la nueva curva, pues no tiene por qué ser solución del sistema. Sin embargo, si lo llevamos al origen volvemos a ver que el vector a lo largo de la nueva curva completa una vuelta.

Si vamos reduciendo la longitud de la curva cerrada, acabamos llegando a un punto crítico, pues no existe una dirección definida para dicho punto ya que a lo largo de la curva el vector sigue dando una vuelta.

- El candidato a trayectoria cerrada del segundo resultado es:

$$L = \{q \in R : \exists t_k \rightarrow \infty t q (x(t_k), y(t_k)) \rightarrow q\}$$

Donde se denomina *conjunto límite* de  $C$ .  $L$  es la trayectoria cerrada.

◊

**Observación.** Vamos a ver una forma habitual de aplicar el segundo resultado de 48.

Vamos a buscar una región  $R$  tal que el vector  $V = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$  que nos indica hacia dónde se mueven las trayectorias, tal que el vector  $V$  siempre apunte hacia *dentro* de la región  $R$ .

### Ejemplo 56

Sea el sistema:

$$\begin{cases} x' = y + \frac{x}{4}(1 - 2(x^2 + y^2)) \\ y' = -x + \frac{y}{2}(1 - (x^2 + y^2)) \end{cases}$$

#### Clasificación de puntos críticos

Hallamos que el único punto crítico es el  $(0, 0)$ . Para hallar de qué tipo es, vemos el sistema lineal asociado en  $(0, 0)$  que es:

$$\begin{cases} x' = y + \frac{x}{4} \\ y' = -x + \frac{y}{2} \end{cases}$$

donde la matriz del sistema es:  $\begin{bmatrix} 1/4 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$ .

Si hallamos los autovalores vemos que son de la forma:  $\alpha \pm i\beta$ ,  $\alpha > 0$ , que corresponde a una espiral inestable. Faltaría ver la orientación de la espiral

#### Comportamiento en las regiones definidas por las trayectorias cerradas

Para ver que ocurre en la región existente entre las dos trayectorias cerradas, vamos a expresar el sistema

en coordenadas polares utilizando el cambio:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \\ \begin{cases} rr' = xx' + yy' \\ r^2\theta' = xy' - yx' \end{cases} \end{aligned}$$

Nota: este cambio solo permite estudiar puntos no cercanos al origen

Si sustituimos y desarrollamos todo acabamos obteniendo:

$$\begin{cases} r' = \frac{r \cos^2(\theta)}{4}(1 - 2r^2) + \frac{r \sin^2(\theta)}{2}(1 - r^2) \\ \theta' = -1 + \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{4} = -1 + \frac{\sin(2\theta)}{8} \end{cases}$$

Al hacer el cambio de coordenadas, podemos calcular de nuevo los puntos críticos ( $r' = 0, \theta' = 0$ ) y en este caso no hay pues  $\theta' \leq \frac{-7}{8}$ . Como el ángulo tiene derivada negativa, entonces  $\theta$  va de  $+\infty$  a  $-\infty$ , y por tanto todas las trayectorias giran en sentido de las agujas del reloj. Tendríamos que analizar el valor de  $r'$  para ver si la espiral es estable (el radio decrece) o inestable (el radio crece).

### Ejemplo 57

Sea el sistema en coordenadas polares:

$$r' = r(1 - r^2)[r^2 \sin^2(\theta) + (r^2 \cos^2(\theta) - 1)^2]\theta' = r^2 \sin^2(\theta) + (r^2 \cos^2(\theta) - 1)^2$$

Se deja como ejercicio escribir el sistema en función de las variables  $(x, y)$ . Recordemos que  $rr' = xx' + yy'$  y  $r^2\theta' = xy' - yx'$ .

#### Análisis de puntos críticos ignorando el origen

Como analizamos en coordenadas polares ignoramos el origen. Los puntos críticos son los que hacen que  $r' = 0, \theta' = 0$ . Vemos fácilmente que del factor de  $r'$ :  $(1 - r^2)$ , hallamos los puntos  $(1, \theta)$  y  $(-1, \theta)$ . Faltaría ver cuando se anula  $\theta'$  es decir:

$$r^2 \sin^2(\theta) + (r^2 \cos^2(\theta) - 1)^2 = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} r \sin(\theta) = 0 \\ (r \cos(\theta))^2 = 1 \end{cases} \implies \theta = n\pi, r = \pm 1.$$

Por tanto, los puntos críticos en  $(r, \theta)$  son  $(\pm 1, n\pi)$ , que corresponden a  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$  en  $(x, y)$ . A estos añadimos el origen que puede ser un punto crítico en  $(x, y)$  ya que el análisis en polares puede eliminarlo.



# **Parte IV**

## **Apéndices**



## Capítulo 7

# Índices



# **Lista de definiciones**

1.	Definición (Ecuación diferencial de primer orden) . . . . .	9
2.	Definición (Ecuación homogénea de grado k) . . . . .	17
3.	Definición (Conjunto simplemente conexo) . . . . .	26
4.	Definición (Ecuaciones de orden II) . . . . .	28
5.	Definición (Wronskiano) . . . . .	45
6.	Definición (Exponencial de una matriz) . . . . .	48
7.	Definición (Matriz fundamental) . . . . .	51
8.	Definición (Convergencia puntual y convergencia uniforme)	57
9.	Definición (Norma infinito) . . . . .	58
10.	Definición (Sucesión de Cauchy de funciones) . . . . .	60
11.	Definición (Función Lipschitz) . . . . .	63
12.	Definición (Trayectoria del sistema) . . . . .	80
13.	Definición (Punto crítico) . . . . .	80
14.	Definición (Integral primera de un sistema) . . . . .	83
15.	Definición (Sistema conservativo) . . . . .	84
16.	Definición (Punto crítico estable) . . . . .	86
17.	Definición (Punto crítico asintóticamente estable.) . . . . .	86
18.	Definición (Punto crítico no singular) . . . . .	96
19.	Definición (Signo de definición de una función) . . . . .	97
20.	Definición (Función de energía) . . . . .	97
21.	Definición (Función de Lyapunov débil) . . . . .	98
22.	Definición (Función de Lyapunov fuerte) . . . . .	98



# Listado de teoremas

1.	Proposición (Método de separación de variables)	11
3.	Teorema (Existencia y unicidad global)	21
4.	Teorema (Existencia y unicidad local)	23
5.	Proposición (Condición necesaria de ecuación exacta)	25
7.	Teorema (Existencia y unicidad para ecuaciones lineales de orden II)	31
8.	Proposición (Estructura de soluciones de la $(\mathcal{EC}) \equiv \mathbf{x}'' + p(t)\mathbf{x}' + q(t)\mathbf{x} = r(t)$ )	32
9.	Proposición (Método de variación de constantes)	35
10.	Proposición (Linealmente independiente $\implies$ wronskiano no nulo en todo punto)	36
11.	Proposición (Wronskiano no nulo en un punto $\implies$ linealmente independientes)	37
12.	Teorema (Teorema de existencia, unicidad y estructura)	44
15.	Proposición (Exponencial de una matriz - propiedades)	48
17.	Proposición (Matriz fundamental principal)	52
18.	Proposición (Matriz fundamental como producto de una fundamental y otra matriz)	55
19.	Proposición (EDO que satisface el determinante de una matriz de soluciones)	55
20.	Proposición (Propiedades de $\ \cdot\ _\infty$ )	58
21.	Proposición (Sucesión de funciones continuas)	59
22.	Proposición (Sucesión de Cauchy y convergencia uniforme)	60
24.	Proposición (Límite de la integral de una sucesión de funciones)	61
25.	Proposición (Criterio de Cauchy)	61
26.	Proposición (Criterio de Weierstrass)	61
27.	Proposición (De la convergencia uniforme de una función y su derivada)	62
28.	Proposición (Derivadas parciales acotadas implica Lipschitz)	63
29.	Teorema (Unicidad y existencia global)	64
30.	Teorema (Teorema de existencia y unicidad local)	68
31.	Proposición (Regularidad de las soluciones)	68
32.	Proposición (Intervalo máximo de existencia-unicidad local)	69
33.	Lema (de Gronwall)	71
34.	Proposición (Diferencia de soluciones de una ecuación. Cotas.)	72
35.	Proposición (Dependencia continua de condiciones iniciales)	73
36.	Proposición (Cota de error en aproximación de soluciones)	73
37.	Lema (Cota del seno de un ángulo positivo)	75
38.	Teorema (Diferenciabilidad en ecuaciones de orden 1)	75
39.	Proposición (Soluciones con trayectorias iguales)	80
40.	Proposición (Existencia y unicidad de trayectorias)	81
43.	Proposición (Clasificación de puntos críticos en función del determinante y la traza)	91
44.	Proposición (Relación de puntos críticos con el sistema lineal asociado)	92
45.	Proposición (Estabilidad)	97
46.	Proposición (Estabilidad asintótica)	98
47.	Proposición (Criterio de Bendixson)	101
48.	Proposición (Poincaré - Bendixson)	101



# Listado de ejemplos

1.	Ejemplo (Resolución no formal de una ecuación ordinaria de primer orden) . . . . .	9
2.	Ejemplo (No unicidad en soluciones informalmente) . . . . .	9
3.	Ejemplo (Crecimiento de una población) . . . . .	10
4.	Ejemplo (Crecimiento de una población con limitación de recursos) . . . . .	10
5.	Ejemplo (Resolución sencilla) . . . . .	11
6.	Ejemplo (Hallar un campo de pendientes) . . . . .	12
7.	Ejemplo (Familia ortogonal a otra dada) . . . . .	14
8.	Ejemplo (Espejo parabólico) . . . . .	18
9.	Ecuaciones lineales de orden I - Intuición) . . . . .	19
10.	Ejemplo (Resolución ecuación lineal de orden I) . . . . .	21
11.	Ejemplo (Ecuación exacta simple) . . . . .	25
12.	Ejemplo (Ecuación exacta) . . . . .	25
13.	Ejemplo (Factores integrantes) . . . . .	27
14.	Ejemplo (Análisis de cotas en una ecuación diferencial) . . . . .	27
15.	Ejemplo (Muelles) . . . . .	28
16.	Ejemplo (Ecuaciones de orden II como sistemas) . . . . .	32
17.	Ecuación lineal de orden 2: $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + 2\mathbf{x} = 0$ ) . . . . .	33
18.	Ejemplo (Ecuación lineal de orden 2: $\mathbf{x}'' + a\mathbf{x}' + b\mathbf{x} = 0$ ) . . . . .	33
19.	Ejemplo (Ecuación lineal de orden 2: $\mathbf{x}'' + \mathbf{x}' + \mathbf{x} = 0$ ) . . . . .	33
20.	Ejemplo (Ecuación lineal de orden 2: $\mathbf{x}'' + 2\mathbf{x}' + \mathbf{x} = 0$ ) . . . . .	34
21.	Ejemplo (Ecuación lineal de orden 2: $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + 2\mathbf{x} = te^t$ ) . . . . .	34
22.	Ejemplo (Ecuación lineal de orden 2: $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + 2\mathbf{x} = te^{-t}$ ) . . . . .	34
23.	Ejemplo (Ecuación lineal de orden 2: $\mathbf{x}'' + 3\mathbf{x}' + \mathbf{x} = te^{-t}$ ) . . . . .	34
24.	Ejemplo (Resolución de la ecuación homogénea de orden II a partir de una solución) . . . . .	37
25.	Ejemplo (Resolución de una ecuación lineal de orden II por variación de las constantes) . . . . .	37
26.	Ejemplo (Resonancia. Oscilador armónico simple.) . . . . .	38
27.	Ejemplo (Oscilador armónico amortiguado) . . . . .	39
28.	Ejemplo (Sistema lineal de orden I a partir de una ecuación de orden II) . . . . .	43
29.	Ejemplo (Sistemas lineales con coeficientes constantes - Idea básica) . . . . .	46
30.	Ejemplo (Sistema lineal con matriz diagonalizable) . . . . .	46
31.	Ejemplo (Sistema lineal con matriz no diagonalizable) . . . . .	47
32.	Ejemplo (Matriz de Jordan dada $\mathbb{A}$ ) . . . . .	50
33.	Ejemplo (Cálculo de $e^{\mathbb{A}t}$ , la matriz fundamental principal) . . . . .	52
34.	Ejemplo (Cálculo de la matriz fundamental principal $e^{t\mathbb{A}}$ ) . . . . .	53
35.	Ejemplo (Convergencia de una función) . . . . .	58
36.	Ejemplo (Espacios de funciones) . . . . .	59
37.	Ejemplo (Determinación de convergencia uniforme) . . . . .	59
38.	Ejemplo (Convergencia uniforme por el criterio de Weierstrass) . . . . .	62
39.	Ejemplo (Convergencia uniforme de la función Zeta de Riemann) . . . . .	62
40.	Ejemplo (Convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(3^n x)/2^n$ ) . . . . .	62
41.	Ejemplo (Técnica habitual para probar convergencia uniforme de funciones) . . . . .	63
42.	Ejemplo (No unicidad formalmente) . . . . .	69

43. Ejemplo (Existencia local e intervalo maximal) . . . . .	69
44. Ejemplo (Aplicación del teorema de existencia y unicidad en $\mathbf{x}'' = \cos(t\mathbf{x})$ ) . . . . .	69
45. Ejemplo (Existencia y unicidad de solución del péndulo simple) . . . . .	70
46. Ejemplo (Motivación: aproximación del péndulo simple) . . . . .	71
47. Ejemplo (Péndulo simple. Aproximación de soluciones) . . . . .	74
48. Ejemplo (Sistema autónomo simple - Intuición) . . . . .	79
49. Ejemplo (Cálculo de las trayectorias de un sistema simple) . . . . .	80
50. Ejemplo (Trayectorias de la segunda Ley de Newton) . . . . .	81
51. Ejemplo (Trayectorias de un pozo doble) . . . . .	84
52. Ejemplo (Análisis de puntos críticos. Sistema de presa/depredador simple.) . . . . .	92
53. Ejemplo (Sistemas con centro en sistema lineal pero espirales en el original) . . . . .	94
54. Ejemplo (Sistema de poblaciones competitivas con limitación de recursos compartidos.) .	95

# **Lista de ejercicios**