VARIABLE COMPLEJA

APUNTES DEL CURSO 2019-2020 IMPARTIDO POR JOSE PEDRO MORENO

Rafael Sánchez

Revisión del 29 de enero de 2020 a las 23:09.

Índice general

Parte I

Primer parcial

Capítulo 1

Números complejos y funciones

1.1. Operaciones aritméticas en el cuerpo de los complejos

En este curso estudiaremos el cuerpo $\mathbb{C}$ formado por el cuerpo de los números complejos.

Definición 1 (Número complejo. Parte real e imaginaria)**.** Diremos que un número z es **complejo** cuando sea una tupla de la forma (a, b) (o equivalentemente $(a + bi)$) con $a, b \in \mathbb{R}$. Llamaremos parte real $\Re(z)$ y parte imaginaria $\Im(z)$ a cada escalar a y b de la tupla respectivamente.

Definición 2 ($\mathbb{C}$)**.** Definimos $\mathbb{C}$ como el *cuerpo* conformado por la estructura $\langle \mathcal{C}, +, \cdot \rangle$, donde $\mathcal{C} = \{(a, b) \mid \forall a, b \in \mathbb{R}\}$ y las operaciones $+$, $\cdot$ definidas como:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Proposición 1 ($\mathbb{C}$ es un cuerpo)**.** La estructura $\mathbb{C} = \langle \mathcal{C}, +, \cdot \rangle$ definida anteriormente satisface las condiciones de ser un cuerpo.

Demostración. Se deja al lector. $\diamondsuit$

Ejemplo 1 (*Cálculo de un inverso en* $\mathbb{C}$)

Por construcción el neutro de la suma en $\mathbb{C}$ *es* $(0, 0)$ *y el de la multiplicación es* $(1, 0)$*. Vamos a buscar la expresión del inverso de un complejo* $z = (a, b)$*. Para ello buscamos resolver el sistema:*

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$$

es decir:

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ -bx + ay &= 0 \end{aligned}$$

que tiene solución cuando $a^2 + b^2 \neq 0$*. Finalmente obtenemos:*

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

que como veremos más adelante implica que:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Además, tiene sentido que si construimos $\mathbb{C}$ a partir de tuplas $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entonces $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Nos interesa definir exactamente como, para ello establecemos la *función de inclusión:* ι

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\quad\iota\quad} \mathbb{C} \\ a &\longmapsto (a, 0) \end{aligned}$$

Observación. En ocasiones usaremos indistintamente $(a, 0) \equiv a$ cuando un número complejo solo tenga parte real.

Veremos más adelante que también podemos calcular las raíces de números complejos. En particular para las raíces cuadradas se reduce a resolver el sistema que se deduce de $(x, y)^2 = (a, b)$, es decir:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{aligned}$$

que es un sistema resoluble, sin embargo la expresión no es nada agradable. Usaremos la *representación polar* de los números complejos para simplificar esta tarea.

1.1.1. Conjugación

Definición 3 (Conjugado de un número complejo)**.** Definimos el **conjugado** de un número complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ como $\overline{z} = (a, -b)$.

Definición 4 (Módulo de un número complejo)**.** Definimos el **módulo** de un número complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ como $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.

Proposición 2 (Propiedades del conjugado de un número complejo)**.** Sea $z = (a, b) \in \mathbb{C}$:

(1) $z \cdot \overline{z} = (a^2 + b^2) = |z|^2$

(2) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(4) $\overline{\overline{z}} = z$

(5) $z + \overline{z} = 2 \cdot \Re(z)$

(6) $z - \overline{z} = 2 \cdot \Im(z)$

(7) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

(8) Si $w \neq 0$, $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

Demostración. Consideraremos $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$.

1.
$$(a, b) \cdot (a, -b) = (a \cdot a - b \cdot (-b), a \cdot (-b) + b \cdot a) = (a^2 + b^2, 0)$$

2.
$$\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= \overline{(ac - bd, ad + bc)} = (ac - bd, -ad - bc) = \\ &= (ac - (-b)(-d), a(-d) + c(-b)) = (a, -b) \cdot (c, -d) = \overline{z} \cdot \overline{w} \end{aligned}$$

3.
$$\overline{z + w} = \overline{(a + c, b + d)} = (a + c, -b - d) = (a, -b) + (c, -d) = \overline{z} + \overline{w}$$

4.
$$\overline{\overline{z}} = \overline{(a, -b)} = (a, b) = z$$

5.
$$z + \overline{z} = (a, b) + (a, -b) = (2a, 0) = 2\Re(z)$$

6.
$$z - \overline{z} = (a, b) - (a, -b) = (0, 2b) = 2\Im(z)$$

7.
$$z = \overline{z} \iff a = a \text{ y } b = -b \iff b = 0 \iff z \in \mathbb{R}$$

8. Vamos a demostrar primero que $\overline{\frac{1}{w}} = \frac{1}{\overline{w}}$:

$$1 = w \cdot \frac{1}{w} \implies 1 = \overline{1} = \overline{w \cdot \frac{1}{w}} = \overline{w} \cdot \overline{\frac{1}{w}}$$

y como $\mathbb{C}$ es un cuerpo sabemos que $\overline{w}^{-1}$ existe, por tanto, multiplicando a ambos lados por $\overline{w}^{-1}$ obtenemos:

$$\frac{1}{\overline{w}} = \overline{\frac{1}{w}}$$

Con este resultado ya es directo demostrar que:

$$\overline{\frac{z}{w}} = \overline{z} \cdot \overline{\frac{1}{w}} = \overline{z}\frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

$\diamondsuit$

1.1.2. Desigualdad triangular

En esta sección vamos a ver algunas propiedades de los números complejos así como la desigualdad triangular y su generalización.

Proposición 3 (Propiedades del módulo de un número complejo)**.** De nuevo consideramos $z = (a, b)$, $w = (c, d) \in \mathbb{C}$, $\{z_i = (a_i, b_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$.

1. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
2. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$.
3. $|\Re(z)| \leqslant |z|$ y $|\Im(z)| \leqslant |z|$.
4. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$. (Desigualdad triangular).
5. $|z| - |w| \leqslant |z + w|$.
6. $||z| - |w|| \leqslant |z + w|$.
7. $|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|$. (Desigualdad triangular generalizada).

Demostración. En la gran mayoría de apartados se procede a demostrar la relación de los cuadrados, ya que al ser $f(x) = \sqrt{x}$ una función estrictamente creciente para números positivos, basta tomar raíces a ambos lados y llegamos a relación original.

1.
$$|z \cdot w|^2 = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 = a^2c^2\cancel{-2abcd}+b^2d^2+a^2d^2+\cancel{2abcd}+b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z|^2+|w|^2$$

2. Los cuatro términos se pueden abreviar en $\tilde{z} = (\pm a, \pm b)$ y entonces:

$$|\tilde{z}| = \sqrt{(\pm a)^2 + (\pm b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

3. Como $|z|^2 = |\Re(z)|^2 + |\Im(z)|^2$ entonces es claro que:

$$|\Re(z)|^2 \leqslant |\Re(z)|^2 + |\Im(z)|^2 \ \text{ y } \ |\Im(z)|^2 \leqslant |\Re(z)|^2 + |\Im(z)|^2$$

4.

$$\begin{aligned}
|z+w| &\leqslant |z| + |w| \\
|z+w|^2 &\leqslant (|z| + |w|)^2 \\
(z+w)\overline{(z+w)} &\leqslant \left|z^2\right| + \left|w^2\right| + 2\,|z|\,|w| \\
(z+w)(\overline{z}+\overline{w}) &\leqslant \left|z^2\right| + \left|w^2\right| + 2\,|z|\,|w| \\
\left|z^2\right| + \left|w^2\right| + z\overline{w} + \overline{z}w &\leqslant \left|z^2\right| + \left|w^2\right| + 2\,|z|\,|w| \\
\cancel{2}\cdot\Re(z\overline{w}) = z\overline{w} + w\overline{z} &\leqslant \cancel{2}\,|z|\,|w| \\
\Re(z\overline{w}) &\leqslant |z|\,|w| = |z|\,|\overline{w}| = |z\overline{w}|
\end{aligned}$$

5.

$$|z| = |z + w - w| \leqslant |z+w| + |-w| = |z+w| + |w| \implies |z| - |w| \leqslant |z+w|$$

Análogamente demostramos la segunda desigualdad expresando $|w| = |w + z - z|$.

6. Directa de la propiedad anterior y la desigualdad triangular.

7. Por inducción sobre el número de términos del sumatorio de la desigualdad triangular. Sabemos que el caso base se cumple ($n = 2$), ahora suponemos que se cumple para n sumandos y lo probamos cierto para $n+1$, es decir, suponemos que es cierto:

$$\left|\sum_{i=1}^{i=n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{i=n} |z_i|$$

y entonces:

$$\left|\sum_{i=1}^{i=n+1} z_i\right| = \left|z_{n+1} + \sum_{i=1}^{i=n} z_i\right| \leqslant |z_{n+1}| + \left|\sum_{i=1}^{i=n} z_i\right| \leqslant |z_{n+1}| + \sum_{i=1}^{i=n} |z_i| = \sum_{i=1}^{i=n+1} |z_i|$$

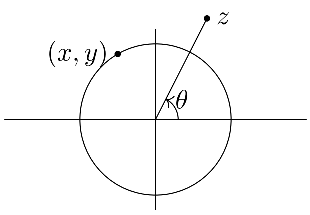
$\diamondsuit$

1.1.3. Representación polar

Los números complejos, al estar construidos como un par ordenado de números reales se pueden representar geométricamente en el plano complejo (similar a $\mathbb{R}^2$). De esta forma, el número $z = a + bi = (a,b)$ se puede representar como el punto (a,b) de $\mathbb{R}^2$.

Además, toman especial importancia los puntos de la circunferencia unidad, (los que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$). Usando un poco de trigonometría podemos obtener fácilmente que los puntos del plano complejo que se corresponden con los de la circunferencia unidad son $(\cos\theta, \sin\theta)$.

Observación. Los números complejos no tienen una expresión única en esta forma ya que $(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos(\theta + 2k\pi), \sin(\theta + 2k\pi))$ con $k \in \mathbb{Z}$.



De esta forma, cualquier número complejo z podrá expresarse como $z = |z|\,(\cos\theta, \sin\theta)$. Usualmente denominaremos a θ como el argumento de z, es decir, $\theta = \arg(z)$. Además, es común encontrar el módulo expresado con la letra ρ.

Esta forma de representar los números complejos nos simplificará varias tareas, como multiplicarlos o hallar raíces.

1.1.4. Raíces y potencias

Parte II

Apéndices

Capítulo 2

Índices

Lista de definiciones

Lista de teoremas

Lista de ejemplos

Lista de ejercicios