MODELIZACIÓN

APUNTES DEL CURSO
2019-2020 IMPARTIDO
POR RAFAEL ORIVE ILLERA

Rafael Sánchez

Revisión del 30 de enero de 2020 a las 11:24.

Índice general

Parte I

Primer parcial

Capítulo 1

Análisis dimensional

El análisis dimensional es una herramienta que nos permite simplificar el estudio de cualquier fenómeno que involucre varias magnitudes físicas para tratarlas como variables independientes. Esto nos ayudará a simplificar los modelos matemáticos de lo que queramos estudiar.

Vamos a comenzar con un ejemplo introductorio a la asignatura, con el que se busca de alguna forma introducir conceptos que si bien no son del todo matemáticos o formales serán de utilidad en el desarrollo del curso.

Ejemplo 1 (*Segunda Ley de Newton - Ley física*)

La segunda ley de Newton se puede escribir como la ecuación diferencial:

$$m\ddot{x}(t) = F(x,t), \ t \in [0,T]$$

donde m representa la masa de un objeto, $x(t)$ la posición del mismo respecto del tiempo, $F(x,t)$ la fuerza que se ejerce sobre él y T es el tiempo final.
Para completar el problema daremos un par de condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0 \text{ la posición inicial}$$
$$\dot{x}(0) = v_0 \text{ la velocidad inicial}$$

En el análisis dimensional analizaremos que ***magnitudes*** *entran en juego en la* ***ley****. En este caso tenemos:*

- *m - masa.*
- *x - posición.*
- *F - fuerza.*
- *T - tiempo final.*
- *x_0 - posición inicial.*
- *v_0 - velocidad inicial.*

Por tanto nuestra función final será de la forma:

$$f(m, x, F, T, x_0, v_0) = 0$$

que es otra forma de expresar la ***ley****. Además, querremos ver de qué* ***magnitudes*** *dependen estos 6 parámetros. Esto lo expresaremos con la notación:*

$$\left[p\right] = M$$

donde p representa un parámetro y M una magnitud (también puede ser un producto de ellas). En nuestro caso tenemos:

- *$\left[m\right] = M$. Masa, una magnitud elemental.*
- *$\left[x\right] = L$. Longitud, una magnitud elemental.*
- *$\left[T\right] = \tau$. Tiempo, una magnitud elemental.*
- *$\left[x_0\right] = L$. Longitud.*
- *$\left[v_0\right] = L \cdot \tau^{-1}$. Velocidad, longitud $\times$ tiempo^{-1}.*
- *$\left[F\right] = \left[m \cdot \ddot{x}\right] = M \cdot L \cdot \tau^{-2}$. Fuerza, masa $\times$ longitud $\times$ tiempo^{-2}.*

1.1. Magnitudes. Teorema Π.

Vamos a suponer la existencia de $L_1, \dots, L_n$ magnitudes elementales con $n < \infty \in \mathbb{N}$, es decir, cada L_i es independiente de cada magnitud de $\mathcal{L} \backslash L_i$. Diremos que una colección de magnitudes conforman un sistema.

Definición 1 (Dimensión de una magnitud)**.** Sea $a \in \mathbb{R}$ una medida de una magnitud A en un sistema $L_1, \dots, L_n$. Si cambiamos a un sistema $L'_1, \dots, L'_n$ con $L'_i = \lambda_i L_i$ y sea a' la medida de A en el nuevo sistema, entonces si se cumple que:

$$a' = a \cdot \lambda_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot \lambda_n^{a_n}$$

para una serie de escalares $a_1, \dots, a_n$, entonces diremos que la magnitud A tiene **dimensión** $L_1^{a_1} \cdots L_n^{a_n}$ y lo expresamos por:

$$\left[A\right] = L_1^{a_1} \cdots L_n^{a_n}$$

Cuando el sistema $L_1, \dots, L_n$ esté fijado podremos identificar la dimensión de la magnitud A con el vector de escalares $(a_1, \dots, a_n)$.

Recordando el ejemplo de la segunda ley de Newton, donde teníamos tres magnitudes elementales (L, τ, M), si consideramos que nuestro sistema $L_1, \dots, L_n$ es dicha 3-tupla, entonces podemos expresar las magnitudes no elementales como 3-tuplas (o vectores de $\mathbb{R}^3$):

- $\left[v_0\right] = L \cdot \tau^{-1} = (1, -1, 0)$
- $\left[F\right] = \left[m\ddot{x}\right] = M \cdot L \cdot \tau^{-1} = (1, -2, 1)$

Ejemplo 2 (*Dimensión de una magnitud*)

Sea $L_1 = \{m\}$ y $L_2 = \{s\}$ un sistema de magnitudes (longitud en metros y tiempo en segundos respectivamente), consideramos la magnitud de la velocidad V que tiene dimensión:

$$\left[V\right] = L_1 \cdot L_2^{-1} = (1, -1)$$

entonces, si tenemos una medida $v = 30 {}^{m}\!/\!_{s}$ y queremos ver su medida L' en el sistema:

$$L'_1 = 10^{-3} L_1 \text{ con } L'_1 \text{ longitud en km}$$
$$L'_2 = \frac{1}{3600} L_2 \text{ con } L'_2 \text{ tiempo en h}$$

entonces:

$$v' = v \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2^{-1} = \frac{30 \cdot 3{,}6 \cdot \cancel{10^3}}{\cancel{10^3}} = 108 {}^{km}\!/\!_{h}$$

Proposición 1 (Expresión de una magnitud dependiente)**.** Sean A, B dos magnitudes tales que:

$$\left[A\right] = L_1^{a_1} \cdots L_n^{a_n}$$
$$\left[B\right] = L_1^{b_1} \cdots L_n^{b_n}$$

Sea C otra magnitud dependiente de A y B, tal que si a, b son medidas de A, B y C y $\exists p, q, d$ tales que $c = d \cdot a^p + b^q$ con p, q, d independientes de las unidades $L_1, \dots, L_n$, entonces:

$$\left[C\right] = L_1^{a_1 p + b_1 q} \dots L_n^{a_n p + b_n q}$$

Demostración. Sean $L'_i = \lambda_i L_i$ un nuevo sistema, entonces:

$$a' = a \cdot \lambda_1^{a_1} \cdots \lambda_n^{a_n}, \quad b' = b \cdot \lambda_1^{b_1} \cdots \lambda_n^{b_n}$$

y por tanto c' es:

$$\begin{aligned} c' &= da'^p + b'^q = d(a\lambda_1^{a_1}\cdots\lambda_n^{a_n})^p + (b\lambda_1^{b_1}\cdots\lambda_n^{b_n}) \\ &= (da^p + b^q)\cdot(\lambda_1^{a_1p+b_1q}\cdots\lambda_n^{a_np+b_nq}) \\ &= c\cdot(\lambda_1^{a_1p+b_1q}\cdots\lambda_n^{a_np+b_nq}) \implies \\ \big[C\big] &= L_1^{a_1p+b_1q}\cdots L_n^{a_np+b_nq} \end{aligned}$$

◊

Definición 2 (Matriz de dimensiones)**.** Dados $q_1,\ldots,q_m$ magnitudes, tales que su dimensión es:

$$\big[q_i\big] = L_1^{a_{i1}}\cdots L_n^{a_{in}}$$

llamamos **matriz de dimensiones** a la matriz $(n\times m)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

que tiene n filas (una por cada *magnitud elemental* L_i) y m columnas (una por cada magnitud del problema q_i)

Observación. Los índices de los elementos de la matriz quedan permutados respecto de la notación habitual.

Retomando el ejemplo de la segunda ley de Newton tendríamos la *matriz de dimensiones*:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_0 & v_0 & T & F & M & x \end{array} \\ \begin{array}{c} L \\ \tau \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Definición 3 (Magnitud adimensional)**.** Una magnitud Π se dice adimensional si $\big[\Pi\big] = 1$.

Hallar magnitudes adimensionales en los distintos problemas nos ayuda a simplificar el estudio de los mismos. Retomemos el ejemplo de la segunda ley de Newton, vamos a intentar reducir la dimensión del problema.

Ejemplo 3 (*Reduciendo la dimensión del ejemplo 1*)

Recordemos que teníamos 6 parámetros (x, x_0, v_0, T, F, m). Una forma de reducir los parámetros es intentar enmascarar *los valores iniciales en nuevas variables.*
Recordemos que tanto x como x_0 tenían la misma dimensión. Gracias a ello podemos definir un nuevo parámetro y sin dimensión:

$$y = \frac{x}{x_0}$$

Además, como $x(0) = x_0$ tendremos que $y(0) = 1$ y como $\dot{x}(0) = v_0$ entonces $\dot{y}(0) = \frac{v_0}{x_0}$.
Podemos también hacer lo mismo con el tiempo, recordemos que en la fórmula original la variable t pertencía a $[0, T]$. Podemos definir entonces:

$$\frac{t}{T} = \tau$$

y por tanto $\tau \in [0,1]$, con lo que hemos eliminado *T. Sin embargo, cambiar t tiene consecuencias debido que es la variable respecto de la que se diferencia x (y por tanto y), tenemos que ver como afectan estos cambios a nuestras variables.*
Usaremos la notación $\dot{x}$ para referirnos a $\frac{\partial x}{\partial t}$ y x' para referirnos a $\frac{\partial x}{\partial \tau}$.

Entonces obtenemos:

$$y' = \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{1}{x_0}\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{T}{x_0}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{T}{x_0}\dot{x} \implies y'(0) = \frac{T}{x_0}\cdot v_0 = \tilde{q}$$

y de nuevo $\left[\tilde{q}\right] = 1$.

Recordemos que nuestro problema comenzaba con $m\ddot{x} = F$, *vamos a usar esto para encontrar otro parámetro adimensional.*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x_0}{T}\frac{\partial y}{\partial \tau}\\
&\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{x_0}{T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right) = \frac{x_0}{T}\frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{x_0}{T}\cdot y''\\
&\frac{m x_0}{T^2}\cdot y'' = F \implies y'' = \frac{T^2}{m x_0}\cdot F = f
\end{aligned}$$

y podemos comprobar que $\left[f\right] = 1$. *Recapitulado, hemos conseguido encontrar nuevos parámetros adimensionales* y, $\tilde{q} = y'$, $f = y''$ *haciendo algunos cambios en el problema. Con esto, podemos reescribir el problema de valores iniciales con los nuevos parámetros adimensionales:*

$$\begin{aligned}
&y'' = f = \frac{T^2}{m x_0}\cdot F\\
&y(0) = 1\\
&y'(0) = \tilde{q} = \frac{T v_0}{x_0}
\end{aligned}$$

Definición 4 (Ley invariante)**.** Sea una ley $f(q_1, \ldots, q_m) = 0$, se dice que es **invariante** frente al cambio de unidades $L_1' = \lambda_1 L_1, \ldots L_n' = \lambda_n L_n$ si verifica que $f(q'_1, \ldots, q'_m) = 0$ para $q'_1, \ldots, q'_m$ las medidas de $q_1, \ldots, q_m$ en las nuevas unidades $L'_1, \ldots, L'_n$. Informalmente:

Una ley es invariante cuando sigue siendo cierta tras el cambio de variables del problema

Teorema 2 (Teorema Π)**.** Sea $f(q_1, \ldots, q_m) = 0$ una ley invariante con $q_1, \ldots, q_m$ magnitudes con matriz de dimensiones:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

tal que $n < m$ y el rango de D es $r \leqslant n$. Entonces existen $m - r$ cantidades $\Pi_1, \ldots, \Pi_{m-r}$ que van a ser magnitudes adimensionales tales que la ley invariante es equivalente a una relación $F(\Pi_1, \ldots, \Pi_{m-r}) = 0$.

Demostración.

(1) Vamos a demostrar que existen $\Pi_1, \ldots, \Pi_{m-r}$ magnitudes adimensionales independientes entre sí. Partimos de la matriz de dimensiones:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} q_1 & \cdots & q_m \end{array}\\ \begin{array}{c} L_1\\ \vdots\\ L_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\end{array}$$

Y entonces tenemos:

$$\left[\Pi\right] = 1 \text{ con } \Pi = q_1^{\alpha_1}\cdots q_m^{\alpha_m}$$

$$\left[\Pi\right] = (L_1^{a_{11}}\cdots L_n^{a_{1n}})^{\alpha_1}\cdot(L_1^{a_{21}}\cdots L_n^{a_{2n}})^{\alpha_2}\cdots(L_1^{a_{m1}}\cdots L_n^{a_{mn}})^{\alpha_m} = L_1^{\alpha_1 a_{11}+\cdot+\alpha_m a_{m1}}\cdots L_n^{\alpha_1 a_{1n}+\cdots\alpha_m a_{m1}}$$

De donde surge el sistema:

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots + \alpha_m a_{m1} &= 0 \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_m a_{m2} &= 0 \\ (\cdots) \\ \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \cdots + \alpha_m a_{mn} &= 0 \end{aligned}$$

Y la demostración se reduce a resolver un sistema homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas. Como la matriz D es de rango r, entonces existen $m - r$ soluciones linealmente independientes.

(2) La demostración de que la ley invariante es equivalente a otra que solo comprende a las magnitudes adimensionales para el caso general resulta muy difícil de escribir. Un caso particular para $m = 4, n = 2$ y $r = 2$ se encuentra en el siguiente ejemplo.

♢

Ejemplo 4 (*Cálculo de las magnitudes adimensionales y la ley invariante asociada*)

Vamos a hacer un caso particular del sistema de la demostración. Sea $m = 4$, $n = 2$ y $r = 2$, es decir:

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \alpha_3 a_{31} + \alpha_4 a_{41} &= 0 \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{32} + \alpha_4 a_{42} &= 0 \end{aligned}$$

Como el rango es 2, sin perdida de generalidad puedo suponer que:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = 0$$

Entonces por Rouche-Frobenius existen $C_{34}, C_{32}, C_{41}, C_{42}$ tales que:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha_3 C_{31} - \alpha_4 C_{41} \text{ con } \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 &= -\alpha_3 C_{32} - \alpha_4 C_{42} \text{ con } \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 1 \end{aligned}$$

Y entonces puedo encontrar las magnitudes adimensionales:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= q_1^{-C_{31}} q_2^{-C_{32}} q_3^1 q_4^0 \implies q_3 = \Pi_1 q_1^{C_{31}} q_2^{C_{32}} \\ \Pi_2 &= q_1^{-C_{41}} q_2^{-C_{42}} q_3^0 q_4^1 \implies q_4 = \Pi_2 q_1^{C_{41}} q_2^{C_{42}} \end{aligned}$$

Recordemos que partíamos de una ley:

$$f(q_1, q_2, q_3, q_4) = 0$$

Y además, hemos encontrado que:

$$f(q_1, q_2, q_3, q_4) = f(q_1, q_2, \Pi_1 q_1^{C_{31}} q_2^{C_{32}}, \Pi_2 q_1^{C_{41}} q_2^{C_{42}}) = G(q_1, q_2, \Pi_1, \Pi_2)$$

Además, vamos a hacer un cambio del sistema de magnitudes de la forma:

$$L_1' = \lambda_1 L_1,\ L_2' = \lambda_2 L_2$$

para conseguir:

$$\begin{aligned} q_1' &= q_1 \lambda_1^{a_1 1} \lambda_2^{a_1 2} \\ q_2' &= q_2 \lambda_1^{a_2 1} \lambda_2^{a_2 2} \\ \Pi_1' &= \Pi_1 \\ \Pi_2' &= \Pi_2 \end{aligned}$$

Entonces tenemos una nueva ley invariante al cambio de escala:

$$0 = G(q_1, q_2, \Pi_1, \Pi_2) = G(q_1', q_2', \Pi_1, \Pi_2)$$

Finalmente, querremos hacer un cambio de variables tal que $q_1 = q_2 = 1$ en nuestra nueva ley.

$$L_n q_1 + a_{11} L_n \lambda_1 + a_{12} L_n + \lambda_2 = 0$$
$$L_n q_2 + a_{21} L_n \lambda_1 + a_{22} L_n + \lambda_2 = 0$$

En el sistema anterior hacemos el cambio: $y_i = L_n \lambda_i$ y tomando logaritmos obtenemos:

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 = -\log(q_1)$$
$$a_{21} y_1 + a_{22} y_2 = -\log(q_2)$$

Y sabemos que dichos q_1, q_2 existen porque la matriz es invertible, y por tanto:

$$0 = f(q_1, q_2, q_3, q_4) = G(1, 1, \Pi_1, \Pi_2) = F(\Pi_1, \Pi_2)$$

Ejemplo 5 (*H1.4*)

a) *Magnitudes. Magnitudes elementales. Magnitudes adimensionales.*

Nuestras magnitudes q_i serán (h, t, g, R, v). Podemos analizarlas en función de las magnitudes elementales:

- $[h] = L = \{longitud\}$.
- $[t] = T = \{tiempo\}$.
- $[g] = LT^{-2}$.
- $[v] = LT^{-1}$.
- $[R] = L$.

Que tiene como matriz de dimensiones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde podemos encontrar las siguientes 3 magnitudes adimensionales (ya que el rango de la matriz es 2):

$$\frac{h}{R}, \ \frac{tv}{R}, \ \frac{v}{\sqrt{gR}}$$

b) *Relación de la altura máxima a alcanzar el proyectil con respecto a v, g, R.*

Partimos de $0 = f(h, t, v, g, R)$ y por el teorema Π sabemos que tenemos una ley equivalente:

$$0 = F\left(\frac{h}{R}, \ \frac{tv}{R}, \ \frac{v}{\sqrt{gR}}\right)$$

Además, sabemos que la altura máxima h_{max} se va a tomar en un tiempo determinado t_{max}. Por tanto tenemos la relación:

$$0 = F\left(\frac{h_{max}}{R}, \ \frac{t_{max} v}{R}, \ \frac{v}{\sqrt{gR}}\right)$$

Por el Teorema de la función implícita (TFI):

$$\frac{h}{R} = G\left(\frac{tV}{R}, \frac{V}{\sqrt{gR}}\right)$$

Como alcanzamos la altura máxima:

$$h'(t_{max}) = 0 \implies \frac{\partial G}{\partial \Pi_2}\left(\frac{t_{max} V}{R}, \frac{V}{\sqrt{gR}}\right) = 0$$

Aplicando de nuevo el TFI:

$$\frac{t_{max} v}{R} = \varphi\left(\frac{V}{\sqrt{gR}}\right)$$

Y llegamos a la relación que nos pedían:

$$\frac{h_{max}}{R} = G\left(\varphi\left(\frac{V}{\sqrt{gR}}\right), \frac{V}{\sqrt{gR}}\right) = \varphi^{\star}\left(\frac{V}{\sqrt{gR}}\right)$$

Parte II

Apéndices

Capítulo 2

Índices

Lista de definiciones

Lista de teoremas

Lista de ejemplos

Lista de ejercicios