ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(y-x) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(b-z)-y \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy-cz$$

APUNTES DEL CURSO 2018-2019 IMPARTIDO POR ANTONIO SANCHEZ

Rafael Sánchez

& alii

Revisión del 11 de febrero de 2019 a las 21:49.

Índice general

Capítulo 0

Notación

- $\mathcal{P} \equiv f(x) = g(x)$, $\mathcal{P}$ es una ecuación.
- $\mathbf{y} = f(x)$, $\mathbf{y}$ es una variable dependiente.
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = y_x$, derivada de y respecto de x.

Parte I

Primer parcial

Capítulo 1

Introducción a las ecuaciones diferenciales

1.1. Idea intuitiva

Definición 1 (Ecuación diferencial de primer orden)**.** Sea $\mathbf{y} = f(x)$, una **ecuación diferencial de primer orden** es una ecuación de la forma: $\mathbf{y}' = F(x, \mathbf{y})$.
Sea $g(x)$ una función de x, diremos que es solución cuando la ecuación diferencial se cumpla para $\mathbf{y} = g(x)$.

Veamos unos ejemplos típicos.

Ejemplo 1

Consideramos $\mathcal{P} \equiv x'(t) = 2x(t)$ (o alternativamente $\mathbf{x}' = 2\mathbf{x}$)
Vemos que es una ecuación diferencial de primer orden ya que sigue la definición anterior. Es sencillo ver que $F(t, \mathbf{x}) = 2\mathbf{x} = 2x(t)$. Queremos hallar que funciones resuelven P
Además, observamos que si $x(t) = e^{2t}$, entonces $x'(t) = 2e^{2t} = 2x(t)$ y por tanto $x(t) = e^{2t}$ es una solución de P.
Si pensamos con más cuidado también observamos que $x(t) = 7e^{2t}$ también satisface P.
*Nos interesaría entonces hallar una **solución general**, que con una sola ecuación englobe todas las soluciones. Aunque de momento no podemos justificarlo, si tomamos $x(t) = ae^{2t} \mid a \in \mathbb{R}$ entonces se cumple que $x'(t) = 2ae^{2t} = 2x(t)$ y por tanto es la solución general de P.*

Del ejemplo anterior surgen problemas llamados *problema de valor inicial*, donde hallando la solución general y sabiendo la imagen de un punto t_0 por medio de $x(t)$ podemos determinar el parámetro y encontrar una solución explícitamente. Como continuación al ejemplo anterior consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ x(0) = 8 \end{cases}$$

Para resolverlo, hallamos la solución general $x(t) = ae^{2t}$ y sustituimos la segunda ecuación. $x(0) = ae^0 = 8 \implies a = 8$.

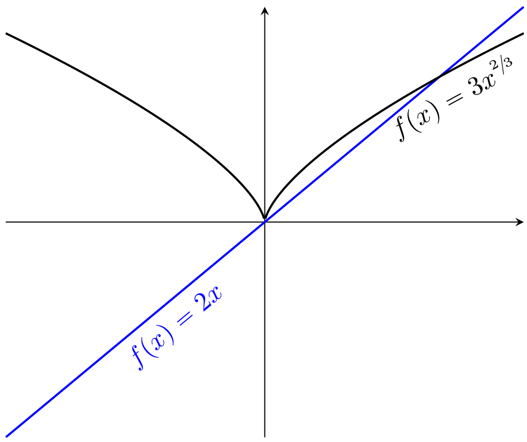
Ejemplo 2

Consideramos $\mathcal{P} \equiv x'(t) = 3(x(t))^{2/3}$., queremos hallar la solución para $x(0) = 0$.
Empezamos hallando soluciones a la ecuación, en este caso $x(t) = t^3$ y $x(t) = 0$ resuelven la ecuación. Nuestro sistema sería:

$$\begin{cases} x'(t) = 3(x(t))^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Sin embargo, tanto $x(t) = t^3 \mid t = 0$ como $x(t) = 0$ resuelven P. No podemos hablar de la solución puesto que hay dos.

En los dos ejemplos anteriores tenemos una ecuación diferencial de la forma $\mathbf{x}' = F(t, \mathbf{x})$, $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ y $f(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}^{2/3}$ respectivamente. Sin embargo, en la segunda tenemos dos soluciones para $x(0) = 0$. Al observar las gráficas de las dos funciones se ve la razón a simple vista, la segunda no es derivable en 0.



Ejemplo 3 (*Crecimiento de una población*)

Consideramos $\mathcal{P} \equiv \mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x}$. ($\lambda$ típicamente es natalidad o mortalidad).
Sabiendo que modela el crecimiento de una población en función del tiempo, podemos aproximar (veremos por qué más adelante) $\frac{\Delta x}{\Delta t} \sim \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathbf{x}'$. Por tanto (como es una tasa, se entiende que el tiempo tiende a 0 para hallarla):

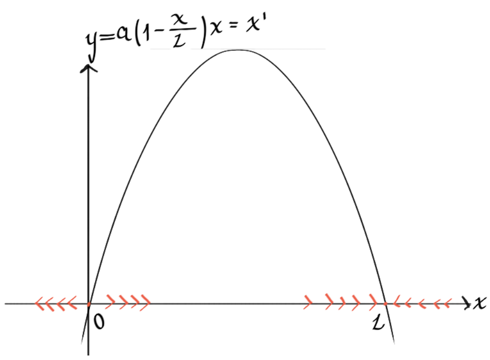
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \sim \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda \cdot \mathbf{x} \implies \lambda = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{x}'}{\mathbf{x}}$$

.

El crecimiento de una población de organismos lo suficientemente grandes no se ve representada por la ecuación anterior debido a la limitación de recursos. Interesaría por tanto modelizar la ecuación teniendo esto en cuenta. Para ello utilizaremos el parámetro L como el límite al que tendería la población con los recursos existentes.

Ejemplo 4 (*Crecimiento de una población con limitación de recursos*)

Consideramos $\mathcal{P} \equiv \mathbf{x}' = a(1 - \frac{\mathbf{x}}{L})\mathbf{x}$ con $a > 0$. De esta forma cuando $\mathbf{x} << L$ o $\mathbf{x} >> L$, tenemos prácticamente la ecuación del ejemplo anterior. Si $\mathbf{x} \sim L$ entonces la población apenas crece/decrece. Para encontrar soluciones a esta ecuación no hace falta resoverla, basta graficarla. Partimos de $\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) = a(1 - \frac{\mathbf{x}}{L})\mathbf{x}$.



Es fácil ver que $\mathbf{x}'$ es una parábola, que corta al eje X en 0 y L. Además, se indica con (») la dirección en la que se mueve $x(t)$ conforme avanza t. Tanto 0 como L son puntos de equilibrio, repulsor (inestable) y atractor (estable) respectivamente.

Habiendo encontrado las soluciones de la funcion anterior, nos preguntamos como varía la población frente al tiempo. Más adelante veremos formalmente como representar $\mathbf{x}$ frente a t. Sin embargo, podemos razonar el aspecto de la función. Sabemos que tiene que corregirse cerca de L, y que si $\mathbf{x} << L$ entonces tiene un crecimiento parecido al exponencial. Por tanto, podría tener el aspecto de la figura 1.1. De este gráfico podemos deducir varias cosas. Para empezar, sabemos que $\mathbf{x}''(t_0) = 0$ tiene solución para la curva c_2 ya que tiene un punto de inflexión. Además, observamos disintos tipos de crecimiento en función del valor de $x(0)$ por lo que tendría sentido intentar determinar para qué valores x_0 obtenemos el crecimiento de c_1 y para cuáles el de c_2.

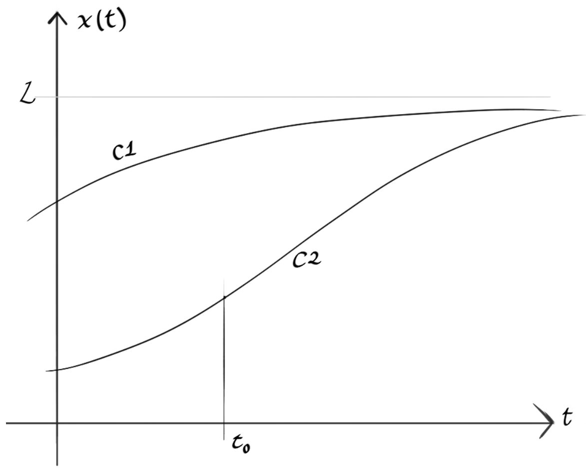


Figura 1.1: Población - Tiempo

> **Ejercicio propuesto 1.** ¿Para qué valores de x_0 se dan los diferentes crecimientos de c_1 y c_2?.
> *Sugerencia*: Considerar el problema de valor inicial con $x''(t_0) = 0$.

1.2. Método de separación de variables

Esta sección trata sobre el primer método de resolución de ecuaciones diferenciales. Antes de definir el método formalmente vamos a ver un ejemplo.

Ejemplo 5 (*Resolución sencilla*)

Sea $\mathcal{P} \equiv \mathbf{y}' = x\mathbf{y}$. Halla las soluciones de la ecuación.
$\mathbf{y}' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$*, con esta igualdad podemos hacer manipulaciones sin justificar (de momento).*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\mathbf{y} \implies \frac{dy}{\mathbf{y}} = x\mathrm{d}x \implies \int \frac{dy}{\mathbf{y}} = \int x\mathrm{d}x \implies \log|\mathbf{y}| = \frac{x^2}{2} + C \implies |\mathbf{y}| = e^{x^2/2 + C} = e^C \cdot e^{x^2/2}$$

$$\mathbf{y} = \pm e^C \cdot e^{x^2/2} = ke^{x^2/2} \mid k \in \mathbb{R}$$

Esta resolución se conoce como método de separación de variables.

> **Ejercicio propuesto 2.** Resolver $\mathcal{P} \equiv \mathbf{x}' = a(1 - {}^{\mathbf{x}}/_{L})\mathbf{x}$ con $x(0) = 0$.

Vamos a generalizar el método por medio de la siguiente proposición.

Proposición 1 (Método de separación de variables)**.** Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ y $G(\mathbf{y})$ una primitiva de $g(\mathbf{y})$, es decir, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$ y $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\mathbf{y}} = g(\mathbf{y})$, con $\mathbf{y} = f(x)$. Y sea una ecuación $\mathcal{P} \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{g(\mathbf{y})}$, entonces las soluciones de $\mathcal{P}$ cumplen:

$$G(y(x)) = F(x) + \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \ \mathit{constante}.$$

Demostración.

Por la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y(x)) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\mathbf{y}}(y(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)$$

Como $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\mathbf{y}} = g(\mathbf{y})$ y $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{g(\mathbf{y})}$ por hipóstesis:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\mathbf{y}}(y(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = g(y(x)) \cdot \frac{f(x)}{g(y(x))} = f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)$$

Es decir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = 0 \implies G(y(x)) - F(x) = \mathcal{C} \implies G(y(x)) = F(x) + \mathcal{C}$$

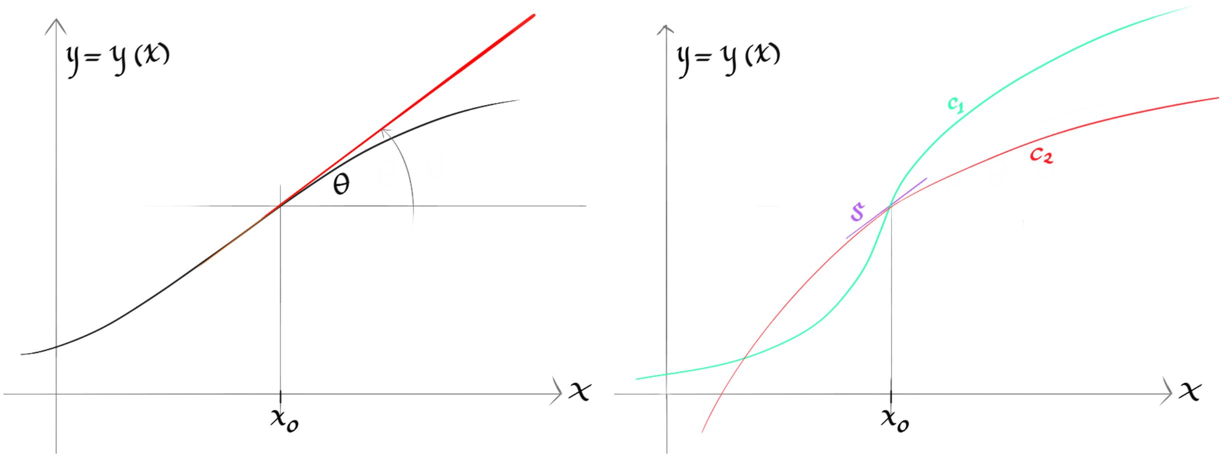
$\diamondsuit$

Observación. La prosposición anterior está incompleta, faltaría ver que condiciones tienen que cumplir $f(x)$ y $g(\mathbf{y})$. Para completarla tenemos que considerar la existencia de primitivas y la condición de que $\mathcal{C}$ sea constante.

- Ya que tenemos que usar que $F(x)$ y $G(\mathbf{y})$ son primitivas, basta pedir que tanto $f(x)$ y $g(\mathbf{y})$ sean continuas. Esto garantiza que $F(x)$ y $G(\mathbf{y})$ son ambas C^1
- Si $h'(x) = 0 \implies h(x)$ constante en cada intervalo en que está definida (pues $\mathbb{R}$ es conexo). Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces $h(x)$ es constante. Como $\mathcal{C}$ surge de integrar 0 a la derecha de la ecuación, podemos afirmar que $\mathcal{C} = h(x)$ y por tanto constante.

1.3. Significado geométrico de la ecuación diferencial ordinaria

Vamos a analizar una ecuación diferencial de forma gráfica para interpretarla geométricamente. Consideramos $\mathbf{y}' = f(x,(y))$. Supongamos que $\mathbf{y}$ tiene la gráfica de la figura 1.2a. Entonces, $\mathbf{y}'(x_0) = \tan\theta$, que



(a) Recta tangente en x_0 conocidas $\mathbf{y}$ y x_0

(b) Curvas dadas el segmento $\mathcal{S}$.

es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $\mathbf{y}$ en x_0. Esto es cálculo elemental, lo que nos interesa es saber algo de la función $\mathbf{y}$ cuando sabemos algo de $\mathbf{y}'$.

Ilustramos en la figura 1.2b entonces la casuística de conocer $\mathcal{P} \equiv \mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$. En este caso, nos preguntamos que aspecto podría tener $\mathbf{y}$ para que fuera solución de $\mathcal{P}$. Como conocemos $y'(x_0)$, podemos considerar que $\mathcal{S}$ es un semento paralelo a la recta tangente de la gráfica en x_0. Es fácil ver que $\mathcal{C}_1$ no puede ser solución de $\mathcal{P}$ pues $\mathcal{C}_1'(x_0) \neq y'(x_0)$. Sin embargo, es evidente que $\mathcal{C}_2$ sí resuelve $\mathcal{P}$.

Si repetimos el procedimiento de determinar como son las pendientes (como acabamos de hacer para x_0) para todos los puntos, hallamos el *campo de pendientes*.

Ejemplo 6 (*Hallar un campo de pendientes*)

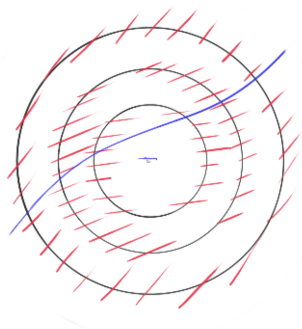
Sea $\mathcal{P} \equiv \mathbf{x}' = t^2 + \mathbf{x}^2$, es decir, $f(t, \mathbf{x}) = t^2 + \mathbf{x}^2$. Si queremos hallar qué pendiente se le asigna al punto $p = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ evaluamos la función f, $f(p) = 1$. Por tanto, la función $\mathbf{x}$ que soluciona $\mathcal{P}$ tiene tangente *con pendiente 1 en* $t = 1/\sqrt{2}$.

De hecho, es lógico pensar que a cualquier punto que cumpla $t^2 + \mathbf{x}^2 = 1$ *se le asignará una pendiente de 1 a su recta tangente. Este conjunto de puntos conforman la* ***isoclina*** *de pendiente 1.*

De forma general, para una constante c dada (en este ejemplo necesariamente no negativa pues $f(t, \mathbf{x})$ *es suma de cuadrados), podemos definir la isoclina de pendiente c:*

$$ISO_c = \{(t, \mathbf{x}) \mid f(t, \mathbf{x}) = c\}$$

Volviendo a nuestro ejemplo, las isoclinas van a ser curvas que cumplan $t^2 + \mathbf{x}^2 = c$ *para un c dado.*



Hemos representado las isoclinas junto con un pequeño segmento de pendiente c para disintos valores de c. Como las isoclinas cumplen que $t^2 + \mathbf{x}^2 = c$*, estas son las circumferencias de radio* $\sqrt{c}$ *con* $c > 0$*. Podemos observar tambien que* $ISO_0 = \{(0,0)\}$ *e* $ISO_{c<0} = \varnothing$.

Llamamos a la gráfica con pequeños segmentos campo de pendientes y por tanto, una función que resuelva $\mathcal{P}$ *tiene que ser tangente al segmento del punto por el que pase.*

Sin embargo, los campos de pendientes permiten ver cómo es la función a grandes rasgos. En nuestro ejemplo parece indicar que $x(t) \uparrow \infty$*, pero no sabemos si lo hace de forma asintótica (*$x(t) \uparrow \infty$ *en t finito), o* $x(t)$ *crece a infinito cuando* $t \to \infty$.
Esto no puede resolverse gráficamente y veremos como resolverlo de forma analítica más adelante.

1.4. Ecuaciones diferenciales y problemas geométricos

Gracias a la relación de la derivada con la tangencia de funciones, podemos plantear problemas geométricos en forma de ecuación diferencial.

1.4.1. Trayectorias ortogonales

De la recta tagente a un punto surge el concepto de recta normal a ese punto, que no es más que la recta perpendicular a la tangente y que pasa por dicho punto. Para ver como se relacionan estas dos rectas vamos a hacer un análisis simple. Diremos que dos curvas son ortogonales si en el punto de cruce las rectas tangentes a cada curva son perpendiculares entre sí.

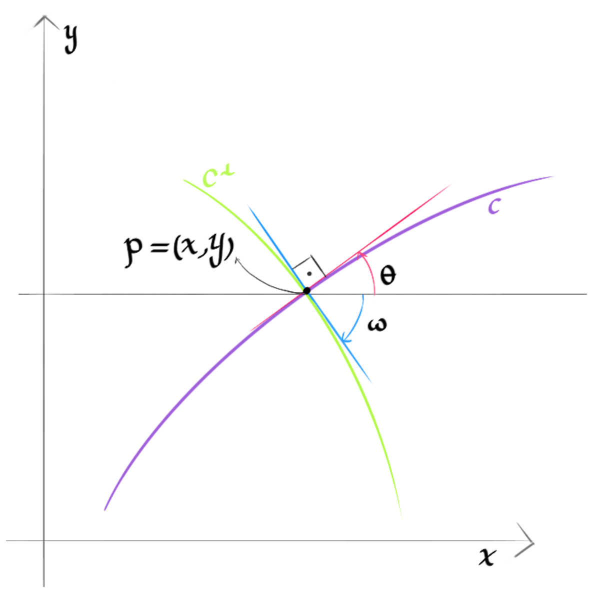


Figura 1.3: Relaciones entre curvas ortogonales

De la figura 1.3 vemos que la pendiente de C es $pend_C = \tan(\theta)$. Asimismo, $pend_{C^{\perp}} = \tan(\omega)$ y $\omega = \theta - \pi/2$. A partir de aquí desarrollamos:

$$\tan(\omega) = \frac{\sin(\theta - \pi/2)}{\cos(\theta - \pi/2)} = \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -\frac{1}{\tan(\theta)}$$

y por tanto,

$$pend_C \cdot pend_{C^{\perp}} = -1 \tag{1.1}$$

Nuestro objetivo es que dada una familia de curvas fam_C, podamos encontrar una (*familia de*) curva que sea ortogonal a todas las de la familia en los puntos de cruce.

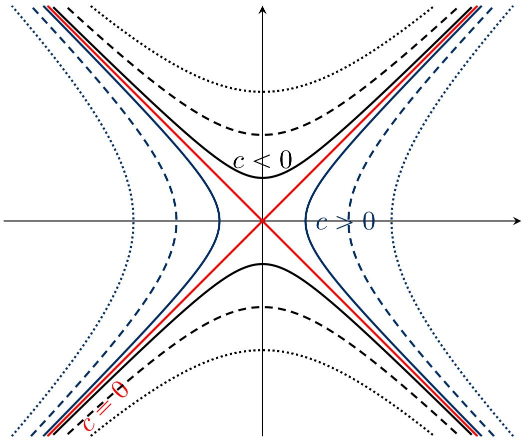
Supongamos que la familia original satisface una ecuación diferencial ordinaria $\mathbf{y_1'} = f(x, \mathbf{y_1})$. Queremos encontrar otra ecuación que defina a la ortogonal.

Como fam_C sigue una EDO (*ecuación diferencial ordinaria*), podemos afirmar que $pend_C = \mathbf{y_1'} = f(x, \mathbf{y_1})$. Usando 1.1, $pend_{C^\perp} = \frac{-1}{f(x,\mathbf{y_1})}$. Pero además, si $C^\perp$ sigue una EDO, está dada por una función $\mathbf{y_2} = y_2(x)$ y entonces $\mathbf{y_2'} = \frac{-1}{f(x,\mathbf{y_1})}$.
Concluimos con que dada fam_C descrita por $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$, podemos encontrar $fam_{C^\perp}$ que satisface:

$$\mathbf{y}' = -\frac{1}{f(x, \mathbf{y})}$$

Ejemplo 7 (*Familia ortogonal a otra dada*)

Consideramos la familia: $x^2 - \mathbf{y}^2 = c \mid c \neq 0$
Para cada c*, eso define* $\mathbf{y}$ *implícitamente en función de* x*.*



$x^2 - y^2 = c$ *para distintos valores de* c*.*
(También puede verse como las curvas de nivel del paraboloide hiperbólico)

Para hallar la familia de curvas ortogonales vamos a seguir una serie de pasos:

1. `Encontrar una EDO que cumplan esas curvas.`

$$x^2 - \mathbf{y}^2 = c \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - y^2 = c) \to 2x - 2\mathbf{y}\mathbf{y}' = 0 \implies \mathbf{y}' = \frac{x}{\mathbf{y}} = f(x, \mathbf{y})$$

2. `Encontrar la EDO para trayectorias ortogonales.`

$$\mathbf{y}' = -\frac{1}{f(x, \mathbf{y})} = -\frac{\mathbf{y}}{x}$$

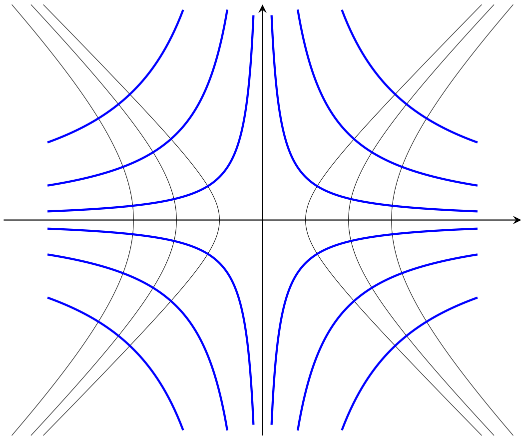
3. `Resolver la ecuación anterior`

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathbf{y}}{x} \implies -\frac{\mathrm{d}y}{\mathbf{y}} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \implies \log|y| = \log|x| + \mathcal{C}$$

es decir,

$$|\mathbf{y}| = \frac{e^{\mathcal{C}}}{|x|} \implies |x\mathbf{y}| = e^{\mathcal{C}} \implies x\mathbf{y} = k : k = e^{\mathcal{C}} \vee k = e^{-\mathcal{C}} \implies \mathbf{y} = \frac{k}{x}$$

Con la solución general podemos representar parte de la familia:



En azul posibles soluciones para disintos valores de k, en negro la familia original
Se observa que son curvas ortogonales a la familia original.

1.4.2. Trayectorias ortogonales en coordenadas polares

Veamos que al igual que encontramos una expresión para la trayectorias ortogonales en coordenadas rectangulares, también lo podemos hacer en coordenadas polares. En este caso partimos de una familia de curvas fam_C descrita por la solución de una EDO $\mathbf{r}' = h(\mathbf{r}, \theta)$. ¿Cuál es la familia ortogonal $fam_{C^\perp}$?.

Para ello tenemos que empezar analizando la expresión de la tangente como ecuación.

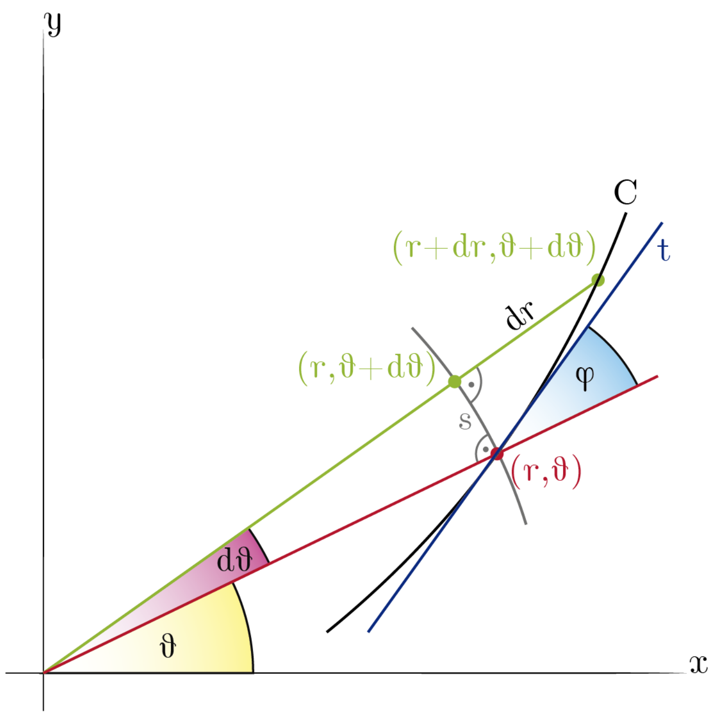


Figura 1.4: Analisis de dr y dθ

En la figura 1.4 hemos trazado una curva arbitraria C. Queremos hallar una ecuación diferencial que describa a la tangente en cierto punto $p = (r, \theta)$. Para ello, hallamos un nuevo punto $q = (r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta) \in C$. Se indica además la cirfumferencia s de radio r con centro en 0, y la recta tangente t al punto original p.

Observamos que s es perpendicular a las rectas que unen el origen con p y q ($\vec{0p}$ y $\vec{0q}$ respectivamente), ya que son trazadas desde el radio de la misma. Además, la intersección de $\vec{0q}$ con s nos marca el punto $q' = (r, \theta + \mathrm{d}\theta)$. Finalmente, denominamos ϕ al ángulo del que queremos hallar la tangente.

El gráfico de la figura 1.4 está distorsionado. Tanto dr como dθ son infinitesimales, es decir, extremadamente pequeños. Debido a ello podemos hacer distintas asunciones.

Para comenzar, el arco de circumferencia que une p y q' tiene longitud $r\mathrm{d}\theta$ y podemos aproximarlo con un segmento que va a ser perpendicular a las rectas $\vec{0p}$ y $\vec{0q}$. Esto hará que $\vec{0p}$ y $\vec{0q}$ sean aproximadamente paralelas, pues comparten un mismo segmento perpendicular a ellas. Además, podemos aproximar el arco de C que une p y q con un segmento de t. Esto se ilustra en la figura 1.5.

Como puede apreciarse en 1.5, el área sombreada se corresponde con un triangulo rectángulo en la aproximación, y de hecho tenemos descritos los catetos, lo que nos permite hallar $\tan\phi'$. Sin embargo, como hemos visto en la aproximación, ambas rectas perpendiculares a ts son paralelas entre sí. Es fácil ver entonces que $\phi = \phi'$ y al describir $\tan\phi'$ hemos descrito $\tan\phi$.

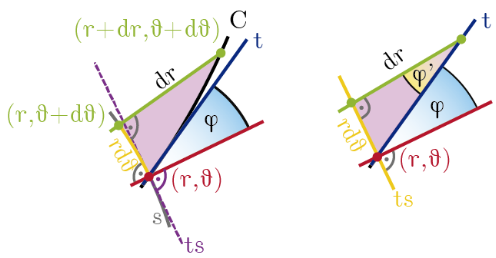


Figura 1.5: Aproximación por infinitesimales

Por tanto, podemos concluir que:

$$\tan\phi = \frac{r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = r\frac{1}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}} = \frac{r}{r'}$$

Una vez hemos descrito la forma que tiene la tangente a una curva C arbitaria en forma de ecuación diferencial $r' = h(r, \theta)$, podemos hallar $fam_{C^\perp}$ que buscábamos al comienzo de la sección. Para ello, vamos a considerar de nuevo una curva arbitraria C y su perpendicular $C^\perp$. Nos interesa especialmente la relación que existe entre los ángulos de las rectas tangentes de cada curva.

En la figura 1.6 se ilustra la relación que buscamos. Supongamos que las dos curvas se cortan en un punto $p = (r, \theta)$ y consideramos la recta $\vec{0p}$. Al igual que en la figura 1.4, definimos ϕ_C como el ángulo existente entre $\vec{0p}$ y la curva C. Siguiendo el mismo procidimiento podemos definir $\phi_{C^\perp}$.
Como por definición $C \perp C^\perp$, entonces el ángulo existente entre ellas es $\pi/2$, por tanto: $\phi_{C^\perp} = \pi/2 + \phi_C$.

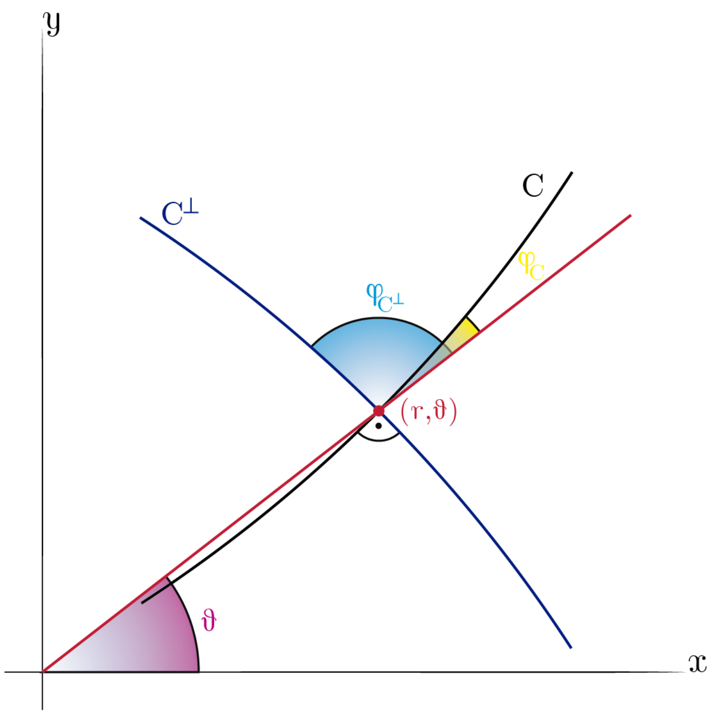


Figura 1.6: Angulos entre curvas ortogonales

Del caso en coordenadas rectangulares recordamos la ecuación:

$$\tan(\phi_{C^\perp}) = -\frac{1}{\tan(\phi_C)}$$

donde a la derecha de la ecuación figura todo lo relacionado con la curva original y a la izquierda lo relacionado con la curva tangente. Como hallamos antes que $\tan\alpha = r/r'$ para un ángulo α que describa a la recta tangente, de la misma forma $\tan(\phi_{C^\perp}) = r/r'$ describe a su recta tangente, que es ortogonal a la curva C original.
Usando esto, la definición $r' = h(r, \theta)$ del comienzo de la sección y la ecuacion anterior obtenemos:

$$\frac{r}{r'} = -\frac{1}{r/r'} = -\frac{1}{r/h(r,\theta)} \implies \frac{r}{r'} = -\frac{h(r,\theta)}{r}$$

Finalmente, de la expreisón anterior hallamos la ecuación diferencial general para describir a $fam_{C^\perp}$ a partir de la función $h(r, \theta)$ que describe a fam_C:

$$r' = -\frac{r^2}{h(r,\theta)}$$

1.5. Ecuaciones homogéneas de grado 0

En esta sección daremos un breve método para resolver ecuaciones homogéneas de grado 0.

Definición 2 (Ecuación homogénea de grado k)**.** Sea $f : KxK \longrightarrow K$, decimos que es **homogénea de grado k** $\iff f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^k \cdot f(x_1, x_2)$

Nos interesarán especialmente las de grado $k = 0$, es decir, aquellas en que $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = f(x_1, x_2)$.

Supongamos que tenemos la EDO $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$, tenemos que $f(x, \mathbf{y}) = f(x, \mathbf{y} \cdot x/x)$. Si f es homogénea de grado 0, y tomamos $\lambda = x$ entonces, $f(x, \mathbf{y} \cdot x/x) = f(\lambda, y \cdot \lambda/x) = \lambda^0 f(1, \mathbf{y}/x)$, es decir:

$$\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y}) = f\left(1, \frac{\mathbf{y}}{x}\right)$$

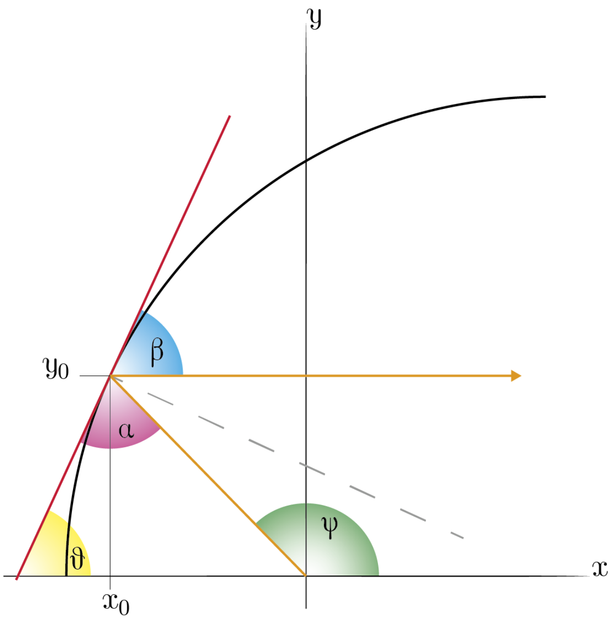
Haciendo el cambio $\mathbf{z} = \mathbf{y}/x$ y desarrollando $\mathbf{z}'$ tenemos:

$$\mathbf{z}' = \frac{\mathbf{y}'}{x} - \frac{\mathbf{y}}{x} = \frac{f\left(1, \frac{\mathbf{y}}{x}\right)}{x} - \frac{1}{x}\frac{\mathbf{y}}{x} = \frac{f(1, \mathbf{z}) - \mathbf{z}}{x}$$

que es una EDO de variables separables.
Veamos un ejemplo con resolución por este método:

Ejemplo 8 (*Espejo parabólico*)

Queremos construir un espejo para los faros de un automóvil. Buscamos que si la luz proviene del origen (la bombilla), ésta salga reflejada paralela al suelo. Vamos a hallar qué forma tiene que tener una sección del espejo (que tiene simetría radial) que cumple nuestro objetivo. Vamos a ejemplificar con la ayuda del diagrama siguiente.



En la figura hemos marcado 4 ángulos: α, β, θ y ψ.
Si nos fijamos con más detenimiento, como la trayectoria del rayo es paralela al eje X los ángulos que forman ambas con la recta tangente en un punto arbitrario del espejo son idénticos, por lo que $\beta = \theta$.
Además, debido a que en la reflexión de un haz de luz el ángulo de reflexión coincide con el de incidencia tenemos que $\alpha = \beta$.
Es fácil ver que el ángulo suplementario a ψ ($\pi - \psi$ rad) forma parte de los ángulos internos de un triángulo, junto con α y θ. Por ello, podemos expresar la igualdad $\alpha + \theta + (\pi - \psi) = \pi$ rad $\implies \psi = \alpha + \theta = 2\theta$.

Como ya viene siendo conocido, $\tan(\theta) = \mathbf{y}'$. Y si nos fijamos en la figura, para cualquier punto $(x, \mathbf{y})$ del espejo $\tan(\psi) = \mathbf{y}/x$. Por tanto:

$$\frac{\mathbf{y}}{x} = \tan(\psi) = \tan(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)} = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} = \frac{2\mathbf{y}'}{1 - \mathbf{y}'^2}$$

es decir,

$$(1 - \mathbf{y}'^2) \cdot \mathbf{y} = 2\mathbf{y}' \cdot x \implies \mathbf{y}' = \frac{-x \pm (x^2 + \mathbf{y}^2)^{1/2}}{\mathbf{y}}$$

de las dos opciones que tenemos, tenemos que ver cuál es válida. Como la pendiente de la recta tangente es positiva, nuestra ecuación diferencial sólo puede ser:

$$\mathbf{y}' = \frac{-x + \sqrt{(x^2 + \mathbf{y}^2)}}{\mathbf{y}}$$

Salta a la vista que no podemos resolverla por el método de separación de variables. Por ello, vamos a considerar un cambio de variables para convertirla en una ecuación de variables separables.

Sea $z(x) = {}^{y(x)}/_{x}$, hallamos la expresión de $\mathbf{z}'$:

$$\mathbf{z}' = \frac{\mathbf{y}'}{x} - \frac{\mathbf{y}}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot (\mathbf{y}' - \mathbf{z}) = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-x + \sqrt{(x^2 + \mathbf{y}^2)}}{\mathbf{y}} - \mathbf{z} \right) = \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{x}{\mathbf{y}} + \sqrt{\left(\frac{x}{\mathbf{y}}\right)^2 + 1} - \mathbf{z} \right)$$

y si del último paso hacemos el cambio ${}^{1}/_{\mathbf{z}} = {}^{x}/_{\mathbf{y}}$ obtenemos:

$$\mathbf{z}' = \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{\mathbf{z}} + \sqrt{\frac{1}{\mathbf{z}^2} + 1} - \mathbf{z} \right)$$

que es de variables separables.

La solución a esta EDO es: $1 - \sqrt{1 + \mathbf{z}^2} = \frac{c}{x}$ y como $\mathbf{z} = {}^{\mathbf{y}}/_{x}$ obtenemos la ecuación que describe la altura de nuestro espejo en función de x y una constante c, a falta de algún dato extra para resolver un PVI.

$$y(x) = \sqrt{c^2 + 2cx}$$

1.6. Ecuaciones lineales de orden I

Vamos a ver un nuevo tipo de ecuaciones que no se pueden resolver por los métodos anteriormente descritos, sin embargo, vamos a comenzar ejemplificando el tipo de ecuación para enunciar una proposición más adelante.

Ejemplo 9 (*Ecuaciones lineales de orden I - Intuición*)

Sea $(\mathcal{EC}) \equiv \mathbf{x}' = \mathbf{x} + t$, vamos a intentar resolverla, es decir, queremos encontrar una expresión para $x(t)$.

1. *Vamos a considerar primero la ecuación sin el término que únicamente depende de $t : \mathbf{x}' = \mathbf{x}$. En este caso es sencillo ver que e^t es solución.*
2. *Consideramos ahora $y(t) = e^{-t}x(t)$, donde $x(t)$ es solución de $(\mathcal{EC})$ (como observación, e^-t es la inversa de la solución encontrada en (1)). Derivando se obtiene que:*

$$y'(t) = -e^{-t} \cdot \mathbf{x} + e^{-t} \cdot \mathbf{x}' = e^{-t} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = t \cdot e^{-t}$$

   Solo queda integrar y despejar $x(t)$ de $y(t) = \int y'(t)$:

$$y(t) = \int y'(t)\mathrm{d}t = \int t \cdot e^{-t}\mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t} + C, \ C \text{ constante}$$

   es decir,

$$e^{-t} \cdot x(t) = -te^{-t} - e^{-t} + C \implies x(t) = Ce^t - 1 - t$$

Con lo que hemos hallado la solución general a nuestra ecuación.

Observación. Veamos ciertos aspectos de lo que hemos hallado.

1. $(-1 - t)$ es una solución particular de $(\mathcal{EC})$ (cuando $C = 0$).
2. e^t es solución de la *ecuación homogénea* $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$.
3. Esa ecuación homogénea es lineal, es decir, la suma de ecuaciones es solución, y por tanto la multipliación por un escalar también lo es.

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} \\ \mathbf{y}' = \mathbf{y} \end{cases} \implies (\mathbf{x} + \mathbf{y})' = \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

   y además, si $x(t)$ es solución, $\lambda x(t)$ también lo es.

4. Todas las solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ (la homogénea) son $x(t) = Ce^t$.
5. $x(t) = Ce^t - 1 - t$ nos dice que la solución general a $(\mathcal{EC})$ es igual a una solución particular $(-1-t)$ más la solución de la homogénea.

Lo que hemos hecho ha sido encontrar una solución de una ecuación del tipo $\mathbf{x}' = \alpha(t)\cdot\mathbf{x} + \beta(t)$ (con $\alpha(t) = 1,\ \beta(t) = t$)). Para resolver este tipo de ecuaciones enunciamos la siguiente proposición:

Proposición 2. Sean $\alpha,\ \beta :\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Y sean:

$$A(t) = \int_a^t \alpha(u)\mathrm{d}u \qquad H(t) = \int_a^t e^{-A(u)}\beta(u)\mathrm{d}u$$

Entonces:

1. $x(t)$ verifica $x'(t) = \alpha(t)x(t) + \beta(t)\ \forall t \in [a,b] \iff \exists c \in \mathbb{R} : x(t) = H(t)\cdot e^{A(t)} + c\cdot e^{A(t)}$
2. Dados $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces $\exists! c : x(t) = H(t)\cdot e^{A(t)} + c\cdot e^{A(t)}$ es solución del PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(t)\cdot x(t) + \beta(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Demostración. Vamos a demostrar 1 y 2 por separado:

1. Tenemos $(\mathcal{EC}) \equiv x'(t) = \alpha(t)x(t) + \beta(t)$ con α, β continuas.
La ecuación homogénea asociada a $(\mathcal{EC})$ es $x'(t) = \alpha(t)x(t)$ que es lineal, es decir, la suma de soluciones es solución. Tenemos:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha(t)x_1(t) \\ x_2'(t) = \alpha(t)x_2(t) \end{cases} \implies (\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2})' = \alpha(t)\cdot(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2})$$

Observación. Si sumo soluciones de $(\mathcal{EC})$ obtengo $(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2})' = \alpha(t)\cdot(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) + 2\beta(t)$

Para hallar la solución general vamos a proceder de forma parecida al ejemplo 9. Sea $A(t)$ tal que $A'(t) = \alpha(t)$, entonces $x(t) = e^{A(t)}$ verifica la ecuación homogénea.

Construimos $y(t) = e^{-A(t)}\cdot\mathbf{x}$, y la igualamos con la integral de su derivada:

$$(e^{-A(t)}\cdot\mathbf{x})' = e^{-A}\mathbf{x}' - e^{-A}\cdot\mathbf{x}\cdot A' = e^{-A}\cdot(\mathbf{x}' - \alpha\mathbf{x}) = e^{-A}\cdot\beta$$

entonces,

$$y(t) = e^{-A(t)}\cdot x(t) = \int e^{-A(t)}\cdot\beta(t)\mathrm{d}t \implies e^{-A(t)}\cdot x(t) = H(t) + C \implies x(t) = e^{A(t)}\cdot(H(t) + C)$$

2. $x_0 = x(t_0) = c\cdot e^{A(t_0)} + e^{A(t_0)}\cdot H(t) \implies \exists! c$ pues $e^{A(t_0)} \neq 0$. Y por tanto, para el PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(t)\cdot x(t) + \beta(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

existe solución y es única.

$\diamondsuit$

Ejemplo 10 (*Resolución ecuación lineal de orden I*)

Sea $y'(x) = x^3 - 2x\cdot y(x)$, donde $\beta(x) = x^3$ y $\alpha(x) = 2x$. Queremos hallar la expresión de todas las posibles soluciones, es decir, la solución general.

1. `Solución general de la homogénea`

   La ecuación de la homogénea es $\mathbf{y}' = -2x\mathbf{y}$. *Es de variables separables, resolviendo obtenemos:*

   $$y(x) = C \cdot e^{-x^2} : C \text{ es constante.}$$

2. `Tomando` e^{-x^2} `una solución de (1)`

   Volvemos a la ecuación $\mathbf{y}' = x^3 - 2x\mathbf{y}$. *Por tanto, podemos reescribir* $\mathbf{y}'$*como* : $2x\mathbf{y} + \mathbf{y}' = x^3$.
   A continuación, hacemos el cambio

   $$z(x) = e^{-(-x^2)}y(x) = e^{x^2}\mathbf{y} \text{ y hallamos } z'(x).$$

   $$\mathbf{z}' = 2x\mathbf{y}e^{x^2} + e^{x^2} = e^{x^2} \cdot (2x\mathbf{y} + \mathbf{y}') = e^{x^2}x^3.$$

   Hallamos $z(x)$ *integrando* $\mathbf{z}'$*:*

   $$z(x) = \int x^3 e^{x^2} \mathrm{d}x = \frac{x^2 - 1}{2} \cdot e^{x^2} + C. \text{ (se resuelve por partes).}$$

   Igualando a nuestra $z(x) = e^{x^2}\mathbf{y}$ *original, despejamos* $y(x)$*:*

   $$y(x) = \frac{x^2 - 1}{2} + Ce^{-x^2}$$

   Donde $\frac{x^2-1}{2}$ *coincide con una solución particular con* $C = 0$, *y* Ce^{-x^2} *es la solución general de la homogénea.*

1.7. Teoremas de existencia y unicidad

En la sección anterior hemos enunciado una preposición que denominamos de existencia y unicidad para ecuaciones lineales de orden I. Nos gustaría dar condiciones más genereales para saber si existen y son únicas ciertas soluciones.
Consideraremos el PVI general:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \\ x(t_0) = t_0 \end{cases}$$

Teorema 3 (Existencia y unicidad global)**.** Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f \in C^1$.
Si $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f_x$ es acotada, es decir:

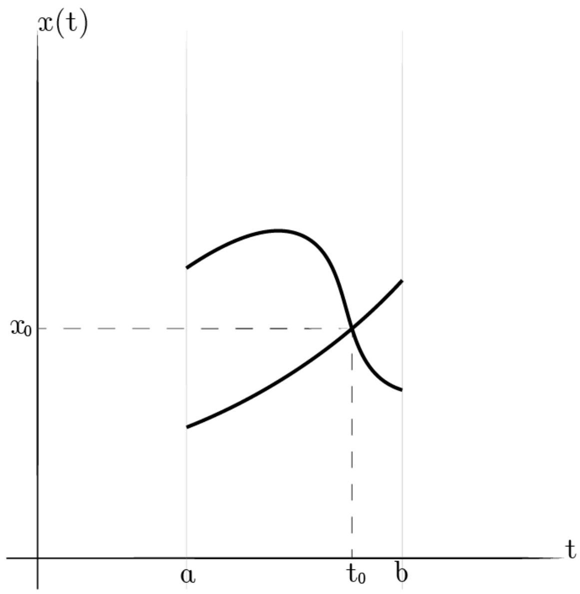
$$\exists L \in \mathbb{R} : |f_x(t, \mathbf{x})| \leqslant L \ \forall t \in [a, b], \ \forall x \in R$$

entonces, el PVI tiene solución y es única.

La demostración la veremos más adelante cuando cosideremos el caso n-dimensional.

Observación. Vamos a ver ciertos aspectos de este resultado.

1. Gráfica de la solución

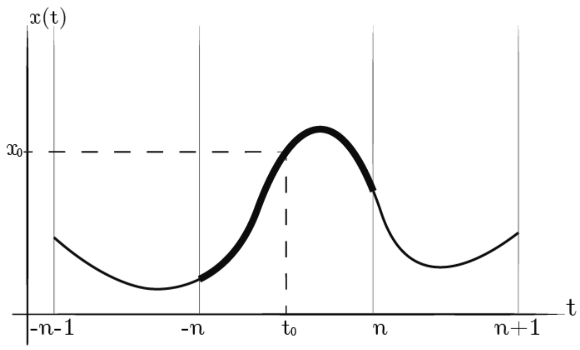


A nivel visual, no puede haber dos soluciones como las de la figura. Si las hubiera, el PVI tendría dos soluciones distintas para t_0 y habíamos dicho que era única.

Analíticamente podemos considerar el gráfico de $x(t)$ como un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$. Si consideramos cada solución de esta forma, digamos S_1, S_2, entonces:

$$S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \iff S_1 = S_2$$

2. Unicidad en la recta real



Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple que $|f_x \leqslant L|$ (su derivada está acotada), entonces el PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

entonces tiene solución y es única $\forall t \in \mathbb{R}$

Si nos fijamos en la imagen de la izquierda, la idea intuitiva surge de tener una solución $x(t)$ definida sobre un intervalo $[-n, n]$. Si podemos extender $x(t)$ a $[-n-1, n+1]$, ésta tiene que coincidir en $[-n, n]$ y por unicidad, la solución es la misma. Podemos hacer esto para cualquier intervalo mayor que $[-n, n]$ y por tanto sobre la totalidad de $\mathbb{R}$.
Formalemente puede intentar demostrarse por inducción sobre el tamaño del intervalo.

Ejercicio propuesto 3. Supongamos que $x(t)$ resuelve $\mathbf{x}' = f(x)$ y $\lim_{t\to\infty} x(t) = a$. ¿Podemos asegurar que $f(a) = 0$?.
Pista: tener en cuenta que el recíproco es cierto. Es decir, si $f(a) = 0$ entonces sabemos que hay ecauciones que se acercan a a conforme avanzan.

La versión global del teorema de existencia y unicidad no es muy útil. Veamos dos situaciones simples en las que no funciona.

Sea el PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x}^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [-2, 2] \text{ no tiene solución.}$$

Si intentamos resolverlo:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathbf{x}^2 \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathbf{x}^2} = \int \mathrm{d}t \implies -\frac{1}{\mathbf{x}} = t + C$$

$$x(0) = 1 \implies C = -1 \implies x(t) = \frac{1}{1-t}$$

que no es solución en $[-2, 2]$ pues no está definida para $t = 1$.

Consideremos ahora el PVI:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x}^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

es facil ver que tanto $x_1(t) = 0$ como $x_2(t) = (\frac{t}{3})^3$ resuelven el PVI. De hecho, si combino trozos de la función puedo hallar más. En la figura se representan ambas soluciones y se resalta una posible combinación.

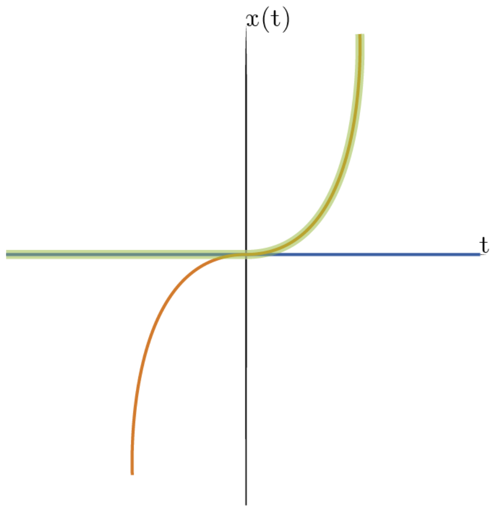


Figura 1.7: Solución no única

Teorema 4 (Existencia y unicidad local)**.** Sean $[a, b] \times [c, d] = A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^1$ y $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in (c, d)$. Entonces:

- Existencia:
  $\exists \delta > 0$ y $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \in C^1$ tal que $\mathbf{x}$ es solución del PVI:
  $$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{con } \delta < \text{mín}(t_0 - a, b - t_0)$$
- Unicidad:
  Si $x_1(t)$, $x_2(t)$ son C^1 en un intervalo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ y satisfacen:
  $$\begin{cases} \mathbf{x_i}' = f(t, \mathbf{x_i}), \ |t - t_0| < \varepsilon \\ x_i(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{con } \varepsilon < \text{mín}(t_0 - a, b - t_0)$$
  entonces $x_1(t) = x_2(t) \ \forall t : |t - t_0| < \varepsilon$.

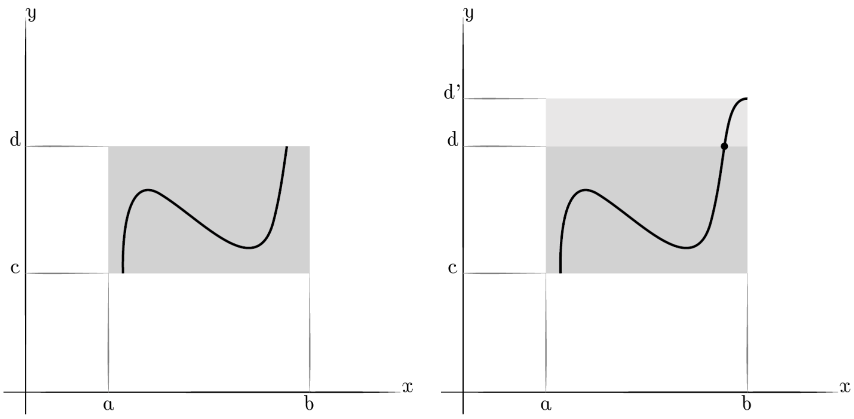
De nuevo, se deja la demostración para cuando enunciemos el caso *n-dimensional.*

Observación. Al igual que en el caso global, vamos a estudiar una serie de implicaciones de este resultado.

1. Unicidad local.
   Podemos expresar la solución analíticamente como:

   Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ soluciones a un PVI. Si $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, entonces $\exists \varepsilon > 0 : x_1(t) = x_2(t), \ \forall t : |t - t_0| < \varepsilon$

2. Prolongación de la solución.



Puede ocurrir que hayamos definido la función sobre un área más pequeña de lo necesario. En la imagen superior se representa esta casuística.
En este caso, podemos prolongar la solución gracias a la unicidad, si existiera otra solución con $t \in [a, b]$ que estuviera definida en todo $[c, d']$, entonces debería coincidir con nuestra solución original por compartir el punto (t, d). Podríamos preguntarnos entonces si existe un intervalo cerrado máximo en el que existe nuestra solución.

3. Acerca de las hipóstesis.
No es necesario pedir que $f \in C^1$. Para la existencia sólo necesitamos que f sea continua, y para la unicidad nos basta con que f_x exista y sea continua. En el caso general veremos que podemos pedir incluso menos para la unicidad.

1.7.1. Regularidad de soluciones

En ocasiones nos va a interesar saber como de buena es la función que resuelve nuestra EDO, entendiendo buena por cómo de suave es. Supongamos que nuestra ecuación diferencial es $x'(t) = f(t, x(t))$ definida en un intervalo, con $f : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $x(t)$ derivable.
Entonces:

$$x(t) \text{ derivable} \implies x(t) \text{ continua.}$$

$$\begin{cases} x(t) \text{ continua} \\ f(t_1, t_2) \text{ continua} \end{cases} \implies [\text{componiendo } f \text{ con } x(t) \text{ como } t_2 = x(t))]\ f(t, x(t)) \text{ es continua} \implies$$

$$\implies x'(t) \text{ es continua} \implies x(t) \in C^1$$

Además, si $f(t_1, t_2) \in C^1$ entonces $f(t, x(t)) \in C^1$, pues:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t, x(t))) = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t)) \cdot x'(t)$$

De donde sabemos que tanto f_t como f_x son continuas pues $f(t_1, t_2) \in C^1$ y $x'(t)$ es continua como acabamos de ver. Y como $x''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x'(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t, x(t)))$ que es continua, entonces $x(t) \in C^2$.

Repitiendo este argumento, concluimos con que: $f(t_1, t_2) \in C^k \implies x(t) \in C^{k+1}$.

1.8. Ecuaciones exactas

Hasta ahora hemos visto como resolver ecuaciones de variables separables, homogéneas de grado 0 y lineales de orden I. Veamos un método más.

Supongamos que $\mathbf{y}$ está definida implicitamente por $g(x, \mathbf{y}) = cte$ con $g \in C^1$. Si derivamos $g(x, \mathbf{y}) = cte$) respecto de x obtenemos:

$$g_x(x, y(x)) + g_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0, \text{ es decir,}$$

$y(x)$ se resuelve a partir de.

$$\mathbf{y}' = -\frac{g_x(x, \mathbf{y})}{g_y(x, \mathbf{y})}$$

Observación. Podemos argumentar a la inversa. Si $y(x)$ verifica la EDO, entonces $g(x, y(x))$ es constante (en intervalos), pues $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x, y(x))) = 0$

Además, la notación habitual para este tipo de ecuaciones es:

$$\mathbf{y}' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{g_x(x, \mathbf{y})}{g_y(x, \mathbf{y})} \implies g_x \mathrm{d}x + g_y \mathrm{d}y = 0$$

Supongamos que tenemos una ecuación $y'(x) = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, es decir, $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$. Nos gustaría saber cuándo existe $g(x, \mathbf{y}) : M = g_x,\ N = g_y$, ya que en ese caso es exacta y y su solución es $g(x, \mathbf{y}) = C \mid C$constante en forma implícita.

Ejemplo 11 (*Ecuación exacta simple*)

Sea $\mathbf{y}' = \frac{-\mathbf{y}}{x}$, *es decir,* $\mathbf{y}\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$ *es una ecuación exacta.*
De hecho la g *necesaria es* $g(x, \mathbf{y}) = xy$ *pues* $g_x = \mathbf{y}$ *y* $g_y = x$. *Y por tanto, la solucion general es:*

$$x\mathbf{y} = C \implies y(x) = \frac{C}{x}$$

De hecho, esta ecuación es de los tres tipos que hemos visto.

Proposición 5 (Condición necesaria de ecuación exacta)**.**

$$\mathcal{EC} \equiv M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y \text{ es exacta y } g(x, \mathbf{y}) \in C^2 \implies M_y = N_x$$

Demostración. Si $\mathcal{EC}$ es exacta, entonces $\exists g : M = g_x,\ N = g_y$. Como $g \in C^2$, sabemos que $g_{xy} = g_{yx}$, entonces:

$$\begin{cases} g_{xy} = (g_x)_y = M_y \\ g_{yx} = (g_y)_x = N_x \end{cases} \implies M_y = N_x$$

$\diamondsuit$

Observación. Sabemos que una ecuación es exacta cuando $(M, N) = g$, sea γ cualquier curva tal que $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces:

$$\int_\gamma M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

Es claro que si la curva es cerrada, $\gamma(a) = \gamma(b)$ y la integral es nula.

Ejemplo 12 (*Ecuación exacta*)

Sea $(\mathcal{EC}) \equiv (\mathbf{y} + x^3)dx + (x + \mathbf{y}^3)dy = 0$ *es facil ver que cumple la condición de* $M_x = N_y$.
Nos gustaría hallar cual sería nuestra g *a partir de que* $g_x = M$ *y* $g_y = N$. *Sabemos que* $g_x = M = y + x^3$. *Si integramos en* x *(suponiendo* $\mathbf{y}$ *constante):*

$$g(x, \mathbf{y} = yx + x^4/4 + C(y) \text{para } C \text{ una constante vista desde } x.$$

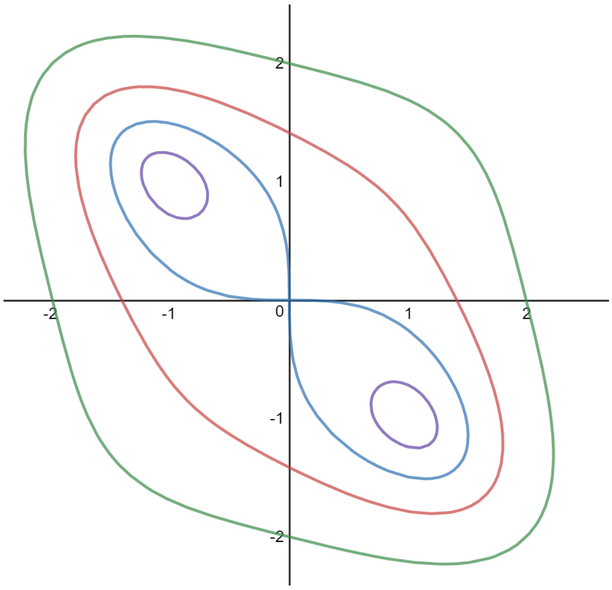
Además,

$$x + \mathbf{y}^3 = N = g_y = x + c'(\mathbf{y}) \implies c'(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^3$$
$$c'(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^3 \implies c(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^4}{4} + cte.$$

Por lo que tenemos: $g(x, \mathbf{y}) = x\mathbf{y} + \frac{x^4+\mathbf{y}^4}{4}$. *Es decir, las soluciones de* $(\mathcal{EC})$ *vienen dadas por* $xy + \frac{x^4+y^4}{4} = C (C \text{ constante})$.

Por ejemplo, una solución particular para C=1 es:

$$xy + \frac{x^4 + y^4}{4} = 1, \text{ que es la curva roja en la imagen siguiente.}$$



Queremos ahora analizar la condición necesaria y suficiente que nos asegure que podamos realizar el procedimiento del ejemplo. Haremos uso de la siguiente proposición.

Proposición 6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto simplemente conexo. Sean $M, N : \Omega \to \mathbb{R}$ con $M, N \in C^1$, entonces:

$$\exists g : \Omega \to \mathbb{R} \text{ con } g \in C^2 \text{ tal que } M = g_x|_\Omega \,, N = g_y|_\Omega \iff M_y|_\Omega = N_x|_\Omega \,.$$

La demostración se deja al lector.

A modo de recordatorio vamos a dar una definición de *abierto simplemente conexo.*

Definición 3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado.
Decimos que Ω es **simplemente conexo** $\iff$ $\Omega^C = \mathbb{R}^2\Omega$ es conexo.

1.9. Factores integrantes

Sea de nuevo $(\mathcal{EC})_1 = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$, pero supongamos ahora que no se cumple la condición $M_x = N_y$ necesaria para encontrar una ecuación exacta. Nos preguntamos si podemos encontrar un $\mu(x, \mathbf{y})$ no trivial de forma que teniendo la ecuación $(\mathcal{EC})_2 = \mu(x,\mathbf{y})M\mathrm{d}x + \mu(x,\mathbf{y})N\mathrm{d}y = 0$ se cumpla:

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \tag{1.2}$$

Llamamos a μ factor integrante de $(\mathcal{EC})_1$. Veremos que siempre existe pero que es dificil de encontrar. Calculando 1.2, obtenemos:

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} + (M_y - N_x)\mu = 0$$
$$\left(M\frac{\partial}{\partial y} - N\frac{\partial}{\partial x}\right)\mu + (M_y - N_x)\mu = 0$$

de donde tendremos que calcular μ. Como suele resultar difícil, habitualmente se intenta que μ solo dependa de una de las dos variables, es decir, $\mu = \mu(y)$ o $\mu = \mu(x)$.

Veamos un ejemplo de ecuacion de factores integrantes

Ejemplo 13 (*Factores integrantes*)

Sea $x\mathbf{y}\ \mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y = 0$, esta claro que $M = x\mathbf{y}$, $N = \mathbf{y}^2$. Para ver si puede ser una ecuación exacta evaluamos si cumple la condición necesaria $M_y = N_x$, sin embargo las derivadas cruzadas son $M_y = x$ y $N_x = 0$ y por tanto no puede ser ecuación exacta.

Nos preguntamos entonces por cual es su factor integrante. Para encontrarlo vamos a intentar que μ dependa solo de una variable (o de una combinación lineal, i.e $z = x + y$).

1. `Intentamos que` μ `dependa de` x.

   Transformamos nuestra ecuación en: $(\mathcal{EC}) \equiv \mu M\ \mathrm{d}x + \mu N\ \mathrm{d}y = 0$. Es decir, tenemos:

   $$\mu(x)\ x\mathbf{y}\ \mathrm{d}x + \mu(x)\ \mathbf{y}^2\ \mathrm{d}y = 0, \text{entonces hallamos las nuevas } M_y \text{ y } N_x \text{ para hallar } \mu$$

   como se tiene que cumplir que $M_y = N_x$

   $$M_y = \mu(x)\ x = \mu'(x)\ \mathbf{y}^2 = N_x \implies \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{x}{\mathbf{y}}$$

   y es claro que no tiene solución, pues la parte de la izquierda no depende de y.
2. `Intentamos que` μ `dependa de` $\mathbf{y}$.

   Repitiendo el mismo procedimiento, hallamos las nuevas M_y y N_x para hallar μ que cumple la condición necesaria. Obtenemos:

   $$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{-1}{y} \implies (log|\mu|) = -log|y| \implies \mu(y) = \frac{1}{y} \text{ es solución.}$$

   Es decir, $(\mathcal{EC}) \equiv x\ \mathrm{d}x + \mathbf{y}\ \mathrm{d}y = 0$. Podemos resolverla por separación de variables y su solución es:

   $$\frac{x^2 + \mathbf{y}^2}{2} = C \implies x^2 + \mathbf{y}^2 = C$$

Observación. Sea la ecuación lineal de primer orden $\mathbf{y}' = a(x) \cdot \mathbf{y} + b(x)$.
Con $A(x) : A'(x) = a(x)\ (e^{A(x)})$. Entonces $e^{-A(x)}$ es un factor integrante de $y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$.

Ejemplo 14 (*Análisis de cotas en una ecuación diferencial*)

Vamos a hacer un aparte para retomar el ejemplo 6. Teníamos que $(\mathcal{EC}1) \equiv \mathbf{x}' = t^2 + \mathbf{x}^2 = f(t, \mathbf{x})$ y llegábamos a la conclusión a través de trazar su campo de pendientes de que $x(t) \uparrow \infty$, pero no sabíamos si lo hacía de forma asintótica o lo alcanza cuando $t \to \infty$, aunque el campo parecía indicar que lo hacía de forma asintótica en $t = 1$ o antes. Vamos a tratarla de forma analítica comparándola con otra ecuación que se asemeja y que ya conocemos.

Sabemos que $|f_x| < L$ no se cumple, pues $2x \to \infty$ si $x \to \infty$ y no podemos aplicar el teorema de existencia y unicidad global.
Vamos a comparar la solución de $(\mathcal{EC}1)$ donde exista con la de:

$$(\mathcal{EC}2) \equiv \begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x}^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Sean $u(t)$ la solución de $(\mathcal{EC}1)$ y $v(t)$ la solución de $(\mathcal{EC}2)$. A primera vista en $t = 0$ ambas tienen la misma pendiente pues $f(0, 1) = 1$. Sabemos tambien que $u(t)$ crece más rapido que $v(t)$ por que en el momento en que $t \neq 0$, crecerá más rápido (pues $t^2 + x(t^2) \geqslant x(t^2)$). Cualitativamente podemos afirmar que $u(t)$ "va por encima"de $v(t)$. Nos gustaría hacer una comparativa cuantitativa de ambas.

Para ello, consideramos $z(t) = u(t) - v(t)$. Ahora, calculamos $z'(t)$:

$$z'(t) = u'(t) - v'(t) = t^2 + u^2 - v^2 = t^2 + (u - v) \cdot (u + v) = t^2 + \mathbf{z} \cdot (u + v).$$

En este caso no conocemos explícitamente $(u(t) + v(t))$, pero podemos afirmar que como $(u(t), v(t))$ son crecientes $\forall t \geqslant 0$ y para $t = 0$ valen 1, entonces $(u + v) \geqslant 2$. Por tanto,

$$\mathbf{z}' \geqslant 2\mathbf{z} + t^2 \implies \mathbf{z}' - 2\mathbf{z} \geqslant t^2.$$

Sea $w(t) = e^{-2t} \cdot z(t)$, entonces $\mathbf{w}' = e^{-2t}(\mathbf{z}' - 2\mathbf{z}) \geqslant e^{-2t}t^2 \geqslant t^2$. Entonces $\mathbf{w}' \geqslant e^{-2t}t^2$ y además $w(0) = z(0) = 1 - 1 = 0$. A partir de esto tenemos:

$$w(t) = w(0) + \int_0^t w'(s)\mathrm{d}s \geqslant \int_0^t s^2 e^{-2s}\mathrm{d}s = e^{-2s} \cdot \frac{2s^2 + 2s + 1}{4}\Bigg|_0^t$$

es decir,

$$w(t) \geqslant \frac{1}{4} - e^{-2t}\frac{2t^2 + 2t + 1}{4}, \text{ y como } w(t) = e^{-2t}z(t) \text{ entonces,}$$

$$z(t) \geqslant \frac{e^{2t} - (2t^2 + 2t + 1)}{4} \implies u(t) - v(t) \geqslant \frac{e^{2t} - (2t^2 + 2t + 1)}{4} \implies u(t) \geqslant v(t) + \frac{e^{2t} - (2t^2 + 2t + 1)}{4}$$

Como vimos en 1.7, $v(t) = \frac{1}{1-t}$ y por tanto $v \to \infty$ cuando $t \to 1$. Y ya que $u(t) \geqslant v(t) + \frac{e^{2t} - (1+2t+2t^2)}{4}$, $u \to \infty$ antes de $t = 1$.

Ejercicio propuesto 4. Encontrar otra ecuacion que sea sencilla de resolver para $u(t) \geqslant x$.

Parte II

Segundo parcial

Parte III

Tercer parcial

Parte IV

Apéndices

Capítulo 2

Índices

Lista de definiciones

Lista de teoremas

Lista de ejemplos

Lista de ejercicios