VARIABLE COMPLEJA

APUNTES DEL CURSO 2019-2020 IMPARTIDO POR JOSE PEDRO MORENO

Rafael Sánchez

Revisión del 5 de marzo de 2020 a las 03:15.

Índice general

Parte I

Primer parcial

Capítulo 1

Números complejos y funciones

1.1. Operaciones aritméticas en el cuerpo de los complejos

En este curso estudiaremos el cuerpo $\mathbb{C}$ formado por el cuerpo de los números complejos.

Definición 1 (Número complejo. Parte real e imaginaria)**.** Diremos que un número z es **complejo** cuando sea una tupla de la forma (a, b) (o equivalentemente $(a + bi)$) con $a, b \in \mathbb{R}$. Llamaremos parte real $\Re(z)$ y parte imaginaria $\Im(z)$ a cada escalar a y b de la tupla respectivamente.

Definición 2 ($\mathbb{C}$)**.** Definimos $\mathbb{C}$ como el *cuerpo* conformado por la estructura $\langle \mathcal{C}, +, \cdot \rangle$, donde $\mathcal{C} = \{(a, b) \mid \forall a, b \ \in \mathbb{R}\}$ y las operaciones $+$, $\cdot$ definidas como:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Proposición 1 ($\mathbb{C}$ es un cuerpo)**.** La estructura $\mathbb{C} = \langle \mathcal{C}, +, \cdot \rangle$ definida anteriormente satisface las condiciones de ser un cuerpo.

Demostración. Se deja al lector. ♢

Ejemplo 1 (*Cálculo de un inverso en* $\mathbb{C}$)

Por construcción el neutro de la suma en $\mathbb{C}$ *es* $(0, 0)$ *y el de la multiplicación es* $(1, 0)$*. Vamos a buscar la expresión del inverso de un complejo* $z = (a, b)$*. Para ello buscamos resolver el sistema:*

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$$

es decir:

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ -bx + ay &= 0 \end{aligned}$$

que tiene solución cuando $a^2 + b^2 \neq 0$*. Finalmente obtenemos:*

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

que como veremos más adelante implica que:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Además, tiene sentido que si construimos $\mathbb{C}$ a partir de tuplas $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entonces $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Nos interesa definir exactamente como, para ello establecemos la *función de inclusión:* ι

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\quad\iota\quad} \mathbb{C} \\ a &\longmapsto (a, 0) \end{aligned}$$

Observación. En ocasiones usaremos indistintamente $(a, 0) \equiv a$ cuando un número complejo solo tenga parte real.

Veremos más adelante que también podemos calcular las raíces de números complejos. En particular para las raíces cuadradas se reduce a resolver el sistema que se deduce de $(x, y)^2 = (a, b)$, es decir:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{aligned}$$

que es un sistema resoluble, sin embargo la expresión no es nada agradable. Usaremos la *representación polar* de los números complejos para simplificar esta tarea.

1.1.1. Conjugación

Definición 3 (Conjugado de un número complejo)**.** Definimos el **conjugado** de un número complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ como $\overline{z} = (a, -b)$.

Definición 4 (Módulo de un número complejo)**.** Definimos el **módulo** de un número complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ como $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.

Proposición 2 (Propiedades del conjugado de un número complejo)**.** Sea $z = (a, b) \in \mathbb{C}$:

(1) $z \cdot \overline{z} = (a^2 + b^2) = |z|^2$

(2) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(4) $\overline{\overline{z}} = z$

(5) $z + \overline{z} = 2 \cdot \Re(z)$

(6) $z - \overline{z} = 2 \cdot \Im(z)$

(7) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

(8) Si $w \neq 0$, $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

Demostración. Consideraremos $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$.

1. $$(a, b) \cdot (a, -b) = (a \cdot a - b \cdot (-b), a \cdot (-b) + b \cdot a) = (a^2 + b^2, 0)$$

2. $$\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= \overline{(ac - bd, ad + bc)} = (ac - bd, -ad - bc) = \\ &= (ac - (-b)(-d), a(-d) + c(-b)) = (a, -b) \cdot (c, -d) = \overline{z} \cdot \overline{w} \end{aligned}$$

3. $$\overline{z + w} = \overline{(a + c, b + d)} = (a + c, -b - d) = (a, -b) + (c, -d) = \overline{z} + \overline{w}$$

4.
$$\overline{\overline{z}} = \overline{(a,-b)} = (a,b) = z$$

5.
$$z + \overline{z} = (a,b) + (a,-b) = (2a,0) = 2\Re(z)$$

6.
$$z - \overline{z} = (a,b) - (a,-b) = (0,2b) = 2\Im(z)$$

7.
$$z = \overline{z} \iff a = a \text{ y } b = -b \iff b = 0 \iff z \in \mathbb{R}$$

8. Vamos a demostrar primero que $\overline{\frac{1}{w}} = \frac{1}{\overline{w}}$:
$$1 = w \cdot \frac{1}{w} \implies 1 = \overline{1} = \overline{w \cdot \frac{1}{w}} = \overline{w} \cdot \overline{\frac{1}{w}}$$
y como $\mathbb{C}$ es un cuerpo sabemos que $\overline{w}^{-1}$ existe, por tanto, multiplicando a ambos lados por $\overline{w}^{-1}$ obtenemos:
$$\frac{1}{\overline{w}} = \overline{\frac{1}{w}}$$
Con este resultado ya es directo demostrar que:
$$\overline{\frac{z}{w}} = \overline{z} \cdot \overline{\frac{1}{w}} = \overline{z}\frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

♢

1.1.2. Desigualdad triangular

En esta sección vamos a ver algunas propiedades de los números complejos así como la desigualdad triangular y su generalización.

Proposición 3 (Propiedades del módulo de un número complejo)**.** De nuevo consideramos $z = (a,b)$, $w = (c,d) \in \mathbb{C}$, $\{z_i = (a_i, b_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$.

1. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
2. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$.
3. $|\Re(z)| \leqslant |z|$ y $|\Im(z)| \leqslant |z|$.
4. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$. (Desigualdad triangular).
5. $|z| - |w| \leqslant |z + w|$.
6. $||z| - |w|| \leqslant |z + w|$.
7. $|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|$. (Desigualdad triangular generalizada).

Demostración. En la gran mayoría de apartados se procede a demostrar la relación de los cuadrados, ya que al ser $f(x) = \sqrt{x}$ una función estrictamente creciente para números positivos, basta tomar raíces a ambos lados y llegamos a relación original.

1.
$$|z \cdot w|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = a^2c^2 \cancel{-2abcd} + b^2d^2 + a^2d^2 + \cancel{2abcd} + b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z|^2 + |w|^2$$

2. Los cuatro términos se pueden abreviar en $\tilde{z} = (\pm a, \pm b)$ y entonces:
$$|\tilde{z}| = \sqrt{(\pm a)^2 + (\pm b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

3. Como $|z|^2 = |\Re(z)|^2 + |\Im(z)|^2$ entonces es claro que:

$$|\Re(z)|^2 \leqslant |\Re(z)|^2 + |\Im(z)|^2 \text{ y } |\Im(z)|^2 \leqslant |\Re(z)|^2 + |\Im(z)|^2$$

4.

$$\begin{aligned}
|z+w| &\leqslant |z| + |w| \\
|z+w|^2 &\leqslant (|z| + |w|)^2 \\
(z+w)\overline{(z+w)} &\leqslant \left|z^2\right| + \left|w^2\right| + 2\,|z|\,|w| \\
(z+w)(\overline{z}+\overline{w}) &\leqslant \left|z^2\right| + \left|w^2\right| + 2\,|z|\,|w| \\
\left|z^2\right| + \left|w^2\right| + z\overline{w} + \overline{z}w &\leqslant \left|z^2\right| + \left|w^2\right| + 2\,|z|\,|w| \\
\cancel{2}\cdot\Re(z\overline{w}) = z\overline{w} + w\overline{z} &\leqslant \cancel{2}\,|z|\,|w| \\
\Re(z\overline{w}) &\leqslant |z|\,|w| = |z|\,|\overline{w}| = |z\overline{w}|
\end{aligned}$$

5.

$$|z| = |z+w-w| \leqslant |z+w| + |-w| = |z+w| + |w| \implies |z| - |w| \leqslant |z+w|$$

Análogamente demostramos la segunda desigualdad expresando $|w| = |w+z-z|$.

6. Directa de la propiedad anterior y la desigualdad triangular.

7. Por inducción sobre el número de términos del sumatorio de la desigualdad triangular. Sabemos que el caso base se cumple ($n = 2$), ahora suponemos que se cumple para n sumandos y lo probamos cierto para $n+1$, es decir, suponemos que es cierto:

$$\left|\sum_{i=1}^{i=n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{i=n} |z_i|$$

y entonces:

$$\left|\sum_{i=1}^{i=n+1} z_i\right| = \left|z_{n+1} + \sum_{i=1}^{i=n} z_i\right| \leqslant |z_{n+1}| + \left|\sum_{i=1}^{i=n} z_i\right| \leqslant |z_{n+1}| + \sum_{i=1}^{i=n} |z_i| = \sum_{i=1}^{i=n+1} |z_i|$$

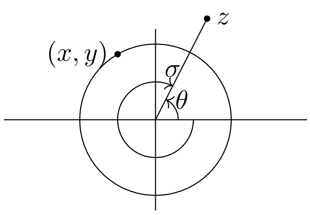
$\diamondsuit$

1.1.3. Representación polar

Los números complejos, al estar construidos como un par ordenado de números reales se pueden representar geométricamente en el plano complejo (similar a $\mathbb{R}^2$). De esta forma, el número $z = a + bi = (a, b)$ se puede representar como el punto (a, b) de $\mathbb{R}^2$.

Además, toman especial importancia los puntos de la circunferencia unidad, (los que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$). Usando un poco de trigonometría podemos obtener fácilmente que los puntos del plano complejo que se corresponden con los de la circunferencia unidad son $(\cos\theta, \sin\theta)$.

Observación. Los números complejos no tienen una expresión única en esta forma ya que $(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos(\theta + 2k\pi), \sin(\theta + 2k\pi))$ con $k \in \mathbb{Z}$.
El $(0, 0)$ no tendría sentido expresarlo de forma polar, lo denominaremos simplemente 0.



De esta forma, cualquier número complejo z podrá expresarse como $z = |z|\,(\cos\theta, \sin\theta)$. Usualmente denominaremos a θ como el argumento de z, es decir, $\theta = \arg(z)$. Además, es común encontrar el módulo expresado con la letra ρ. Con esto podremos expresar z como:

$$z = \rho(\cos\theta, \sin\theta) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Cuando definamos la exponencial compleja veremos que podemos expresar z de la forma $z = \rho e^{i\theta}$.

Observación. Como se aprecia en la figura superior, el argumento de z no es único, tanto σ como θ son el argumento de z (debido a que $\sigma = \theta - 2\pi$).

Debido a que $\arg(z)$ es una función multievaluada (si $\arg(z) = \theta \implies \arg(z) = \{\theta + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$), en ocasiones querremos usar una función que escoja un solo argumento de ellos. La denominamos **argumento principal** (Arg$z$), y la definimos restringiendo la imagen de $\arg z$ al intervalo $[0, 2\pi)$ o $[-\pi, pi)$.

Sin embargo, aun habiendo determinado un argumento principal, en ninguno de los dos casos la función Arg() es continua en todo punto. Se puede ver que no existe una determinación continua del argumento.

Esta forma de representar los números complejos nos simplificará varias tareas, como multiplicarlos o hallar raíces.

Observación. Sea $\rho(\cos\theta, \sin\theta) = z = a + bi \implies \frac{b}{a} = \tan\theta$. Esto no significa que $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ ya que la imagen de $\tan^{-1} \subseteq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

En general, encontrar el argumento de un número complejo no es tarea fácil, sin embargo en ciertos casos puede comprobarse a mano.

Ejemplo 2 (*Hallar la expresión polar de un número complejo. Hallar su inverso*)

Sea $z = 1 - i \in \mathbb{C}$, vamos a hallar su expresión polar.

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Por tanto, $z = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$. Resolviendo el sistema:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Y al resolverlo hallamos $\theta = -\frac{\pi}{4}$ y entonces:

$$z = \sqrt{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right))$$

Si ahora queremos hallar su inverso, vamos a usar la identidad $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Por tanto:

$$z^{-1} = \frac{1}{2}(1 + i)$$

1.1.4. Raíces y potencias

Ya vimos al comienzo del capítulo que la forma de hallar la raíz cuadrada de un número complejo en la primera expresión que dimos del mismo era poco agradable. Podemos ver que la forma polar nos simplifica el cálculo.

Para ello vamos a comenzar observando como se comporta la expresión polar frente a la multiplicación de complejos.

Consideremos $z = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$ y $w = \rho'(\cos\theta', \sin\theta')$. Entonces:

$$z \cdot w = \rho \cdot \rho'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta', \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') = \rho \cdot \rho'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$$

Es decir, cuando multiplicamos dos complejos en forma polar, el resultado es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y el argumento es la suma de los argumentos. Esta propiedad simplifica el cálculo de raíces y potencias.

Ejemplo 3 (*Cálculo de una potencia de un número complejo*)

Sea $z = (\cos\theta, \sin\theta)$, entonces, usando lo que acabamos de ver:

$$z^n = (\cos\theta, \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Esta fórmula se conoce como fórmula de De Moivre.
Si tuviéramos $w = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$, entonces usando la fórmula de De Moivre tenemos:

$$w^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Ejemplo 4 (*Cálculo de las raíces de un número complejo*)

Sean $z, w \neq 0 \in \mathbb{C}$, queremos resolver la ecuación $z^n = w$, es decir, encontrar las raíces n-ésimas de w. Podemos suponer que $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ y $z = r(\cos t + i\sin t)$. Entonces queremos que:

$$z^n = w \implies r^n(\cos(nt) + i\sin(nt)) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

y entonces:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[n]{\rho} \\ \theta + 2\pi k &= nt \end{aligned}$$

Simplificando la última identidad, obtenemos:

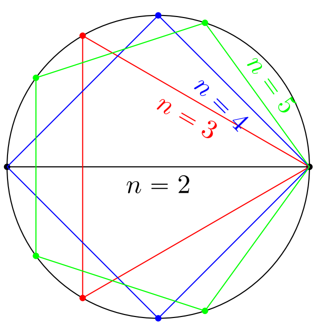
$$t = \frac{\theta}{n} + 2\pi\frac{k}{n}, \ k = 0, \ldots, n-1$$

y por tanto resultan n raíces. (Para $k = n$ el complejo es el mismo que para $k = 0$).

Gracias a esta forma de calcular las raíces de un número complejo, podemos calcular lo que se conoce como *raíces de la unidad*, que serán útiles a lo largo del curso, de esta forma, si $z^n = 1$, entonces:

$$z = (\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2}{n}\right)), \ k = 0, \ldots, 1$$

Que tienen una representación geométrica sobre el círculo unidad.



Ejercicio propuesto 1. Demuestra que $z^2 + 2z + 4 = 0$ no tiene soluciones en el círculo real.

Solución

Basta ver que para que z esté en el círculo real necesitamos que $|z| \leqslant 1$. Supongamos que sí, entonces:

$$0 \leqslant \left|z^2 + 2z\right| \leqslant \left|z^2\right| + |2z| = |z|^2 + 2\,|z| \leqslant 3$$

Y por tanto, no es posible que al sumar 4 a $z^2 + 2z$ resulte 0.

Ejemplo 5 (*Polinomio real*)

Sea $P \in \mathbb{R}[z]$, con $z \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$P(z) : a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} = 0$$
$$P(\overline{z}) : a_0 + a_1 \overline{z} + \cdots + a_{n-1} a^{n-1} = 0$$

y por tanto $P(\overline{z}) = P(z)$, entonces z y $\overline{z}$ son soluciones del polinomio. Es decir, si $\{a_i\}_{\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ entonces las raíces son reales o vienen en parejas $z, \overline{z}$.

Ejercicio propuesto 2. Probar que $1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$.

Solución

Notamos que si $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \neq 1$, entonces $w^n = 1$ y por tanto w es una raíz de la unidad.

$$w^n = 1$$
$$0 = 1 - w^n$$

Podemos factorizar entonces $0 = 1 - w^n$:

$$0 = 1 - w^n = (1 - w)(1 + w + \cdots + w^{n-1})$$

Como $(1 - w) \neq 0$, entonces $(1 + w + \cdots + w^{n-1}) = 0$ y por tanto $\Re(1 + w + \cdots + w^{n-1}) = 0$ y vemos que hemos llegado a lo que queremos demostrar:

$$0 = \Re(1 + w + \cdots + w^{n-1}) = 1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

De aquí podemos hallar también una igualdad de forma análoga con $\Im(1 + w + \cdots + w^{n-1}) = 0$:

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

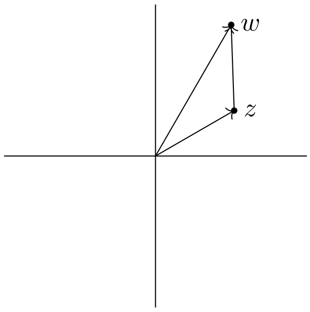
Ejercicio propuesto 3. Demostrar que $\cos nx$ es un polinomio de $\cos x$ de grado n.

Solución

$$\cos 3x = \Re(\cos x + i\sin x)^3 = \Re(\cos^3 x + 3\cos^2(x) i \sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x))$$

1.2. Topolgía del plano complejo

Podemos definir subconjuntos en el plano con los números complejos.



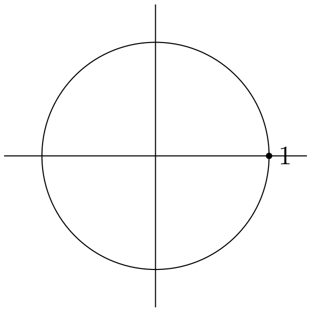
Podemos definir una distancia en $\mathbb{C}$ con el módulo de la siguiente forma:

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \quad \mathrm{dist}(z, w) = |z - w| = ||z - w||_2$$

y es fácil comprobar que cumple las propiedades de una distancia.

1.2.1. Bolas y discos en $\mathbb{C}$

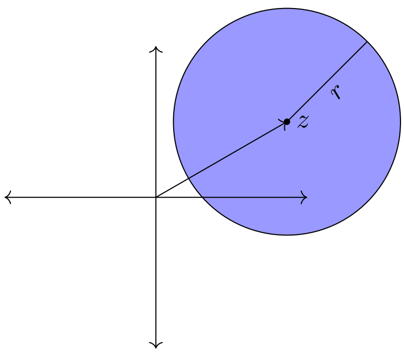
Ya vimos que podemos definir la circunferencia unidad:



que se corresponde con el conjunto:

$$\mathbb{S}^1 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\} = \{\cos t + i \sin t \mid t \in [0, 2\pi)\}$$

También podemos definir otras bolas o discos en el plano, abiertos o cerrados:

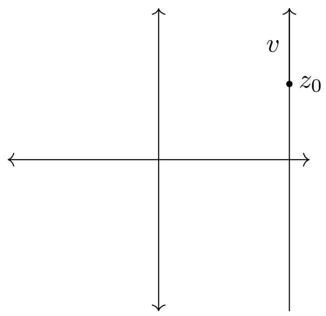


Que son los conjuntos definidos por:

$$\begin{aligned} D_r(z) = B_r(z) = B(z, r) &= \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\} \\ \overline{D_r}(z) = \overline{B_r}(z) = \overline{B}(z, r) &= \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| \leqslant r\} \\ C_r(z) = C(z, r) &= \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| = r\} \end{aligned}$$

1.2.2. Rectas en $\mathbb{C}$

Las rectas en el plano complejo (a partir de la expresión punto pendiente) se definen como:



$$\begin{aligned} L &= \{z = z_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z - z_0 = tv \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{\frac{z - z_0}{v} = t \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \Im\left(\frac{z - z_0}{v}\right) = 0\right\} \end{aligned}$$

Es decir, que una recta vertical S que pase por el punto $(1, 0)$ se puede expresar como:

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = 1\} = \{\Re(z) = 1\}$$

1.2.3. Imágenes de conjuntos en $\mathbb{C}$

Consideremos ahora:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xrightarrow{\ f\ } \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^2 \end{aligned}$$

Sin duda resulta difícil determinar la imagen de S mediante f. Para hallar $f(S)$ necesitamos una descripción algo más detallada de S. Comenzamos con:

$$S = \{z = (1, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{z = 1 + ti \mid t \in \mathbb{R}\}$$

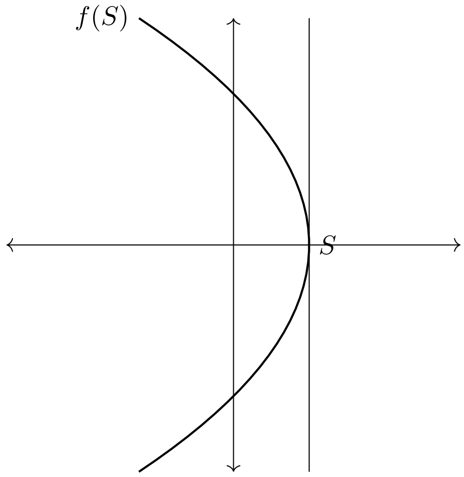
Queremos hallar el conjunto de los cuadrados de los elementos de S, entonces:

$$(1 + ti)^2 = (1 - t^2) + 2ti = x + yi$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - t^2 \\ y(t) &= 2t \\ x &= 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Y esto resulta en:



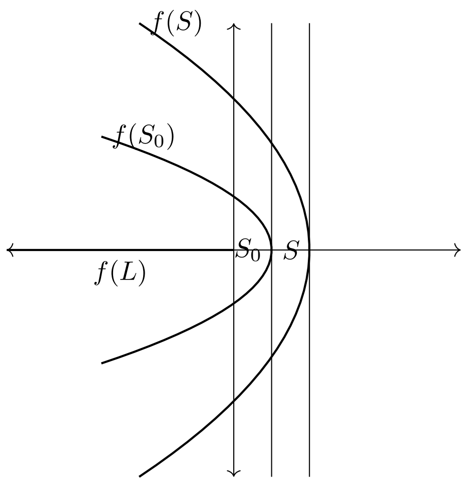
Es fácil ver que para otras rectas verticales cuya parte real es estrictamente positiva, es decir $\{\Re(z) = k > 0 \mid k \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}\}$. Sin embargo, si consideramos:

$$L = \{\Re(z) = 0 \mid z \in \mathbb{C}\}$$

entonces $f(L)$ es:

$$f(L) = \left\{(-t^2, 0) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

es decir, se corresponde con la semirrecta $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$.



Consideremos ahora el semiplano formado por el conjunto de rectas verticales con parte real no negativa $H = \{\Re(z) \geqslant 0\}$. Nos planteamos qué conjunto es $f(H)$. Podemos preguntarnos si $f(H) = \mathbb{C}$, vamos a ver que sí.

$$f(H) = \left\{z^2 \mid \Re(z) \geqslant 0\right\} = \left\{w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in H,\ z^2 = w\right\}$$

Es decir, son los cuadrados de los complejos $z \in H$. Si consideramos $w \notin f(H)$, eso querría decir que si $z^2 = w$ entonces $\Re(z) < 0$. Sin embargo, $(-z)^2 = w$ y $\Re(-z) \geqslant 0$ por tanto, $w \in H$.
Recapitulando, hemos supuesto que existe un $w \in \mathbb{C}$ tal que $w \notin f(H)$ y aún así hemos visto que si pertenece a $\mathbb{C}$. Por tanto $f(H) = \mathbb{C}$

Ejercicio propuesto 4. Describe el subconjunto

$$L = \{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| < 1\}$$

Solución

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| < 1\} &= \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|z^2 - 1\right|^2 < 1\right\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid (z^2 - 1)(\overline{z}^2 - 1) < 1\} \\ &= \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z|^4 - z^2 - \overline{z}^2 < 0\right\} \\ &= \left\{|z|^4 < z^2 + \overline{z}^2\right\} \\ &= \left\{|z|^4 < \Re(z^2)\right\}\end{aligned}$$

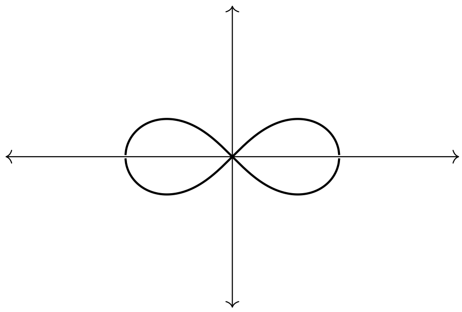
Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ tenemos el conjunto:

$$\{\rho^4 < 2\rho^2 \cos^2 2\theta\}$$

Podemos comprobar que $\rho = 0$ no cumple la condición, por tanto, podemos suponer $\rho > 0$ y dividir por ρ^2:

$$\{\rho^2 < 2\cos^2 2\theta\}$$

Que son los puntos contenidos en una *lemniscata*.



Ejercicio propuesto 5. Describe el subconjunto

$$H = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im\left(\frac{z - z_0}{v}\right) > 0 \right\}$$

con $z_0, v \in \mathbb{C}$

Solución

Ya hemos visto que la expresión de una recta con vector director v y que pasa por el punto z_0 tiene la expresión:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im\left(\frac{z - z_0}{v}\right) = 0 \right\}$$

Por lo que cabría esperar que el conjunto que buscamos tiene alguna relación con la recta, y probablemente sea uno de los dos semiplanos definidos por la misma.
Consideremos $w = \frac{z - z_0}{v} = a + bi$. Entonces podemos reescribir el conjunto H:

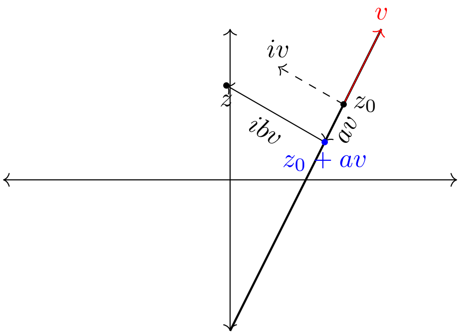
$$H = \left\{ z \mid w = \frac{z - z_0}{v} = a + bi,\ b > 0 \right\}$$

Desarrollamos la igualdad del conjunto:

$$\begin{aligned} z - z_0 &= v(a + bi) \\ z &= z_0 + v(a + bi) \\ &= z_0 + av + i \cdot bv \end{aligned}$$

Es decir, que los z de H son los puntos a los que llegamos de desplazarnos una cantidad en la recta $z_0 + av$ (recordemos que v es vector director de la recta) y además, nos movemos en sentido positivo $(b > 0)$ en la dirección $i \cdot v$, es decir, el giro de $\pi/2$ en sentido positivo de v.

De esta forma, es claro ver que $H \subseteq \Pi$ donde Π es el semiplano *a la izquierda* del vector director v. Faltaría demostrar que $\Pi \subseteq H$.



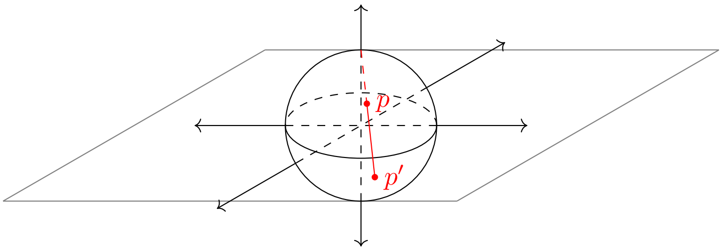
1.3. Esfera de Riemann

En ocasiones nos enfrentaremos a ecuaciones que no tienen solución en $\mathbb{C}$, como:

$$w = \frac{1}{z}$$

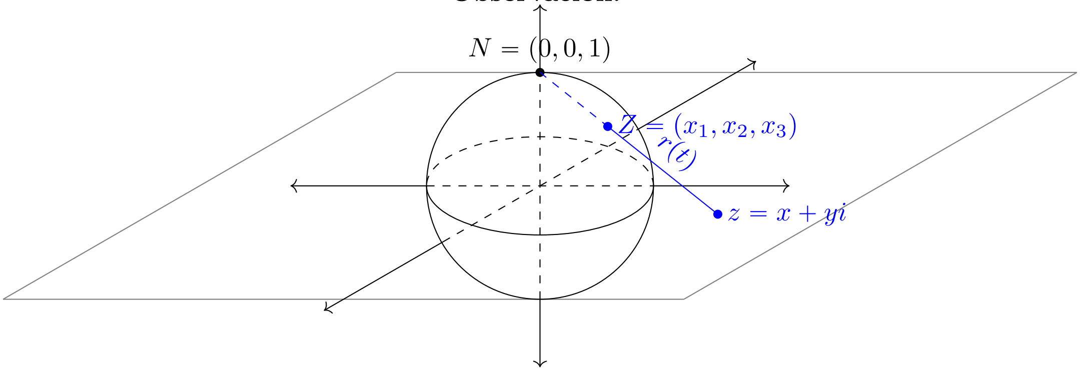
Para solucionar esto, vamos a **completar** $\mathbb{C}$, y vamos a añadir un punto a $\mathbb{C}$ que es la solución a la ecuación superior. Llamaremos a este punto ∞ y denominamos extensión de $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

El plano complejo extendido se puede visualizar gracias a la proyección estereográfica de la esfera sobre el plano.



Vemos que la forma de relacionar $\mathbb{C}$ y $\mathbb{S}^2$ (la esfera unidad) es proyectar cada punto de la superficie de la esfera desde el punto $(0,0,1)$ hacia el plano, es decir, si $p = (x, y, z)$, su proyección p' es la intersección del plano con la recta que une p y $(0,0,1)$.

Observación.



Si queremos encontrar Z en función de z, sea $r(t)$ la recta que une N y z, entonces $r(t)$ interseca a la esfera en Z. La ecuación de esta recta es:

$$\begin{aligned} r &= \{tN + (1-t)Z \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(0,0,1) + (1-t)(x,y,0) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{((1-t)x, (1-t)y, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

y además, sea $r(t)$ el punto de la recta r para un valor de t:

$$\begin{aligned} r(t) \in S &\iff (1-t)^2x^2 + (1-t)^2y^2 + t^2 = 1 \\ &\iff (1-t)^2 |z|^2 + t^2 = 1 \end{aligned}$$

Podemos desarrollar esta última igualdad para hallar las coordenadas de Z:

$$\begin{aligned} (1-t)^2 |z|^2 + t^2 &= 1 \\ (1-t)^2 |z|^2 &= 1 - t^2 \\ (1-t)(1-t)|z|^2 &= (1-t)(1+t) \\ (1-t)|z|^2 &= 1+t \\ |z|^2 - 1 &= t(1+|z|^2) \\ t &= \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \end{aligned}$$

Y hallamos:

$$\begin{aligned} Z &= \left(\tfrac{2x}{|z|^2+1}, \tfrac{2y}{|z|^2+1}, \tfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \\ &= \left(\tfrac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}, \tfrac{-i(z-\overline{z})}{|z|^2+1}, \tfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \end{aligned}$$

Supongamos ahora conocido un punto $Z = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$. ¿Cómo encontramos $z \in \mathbb{C}$ su proyección en el plano complejo?

Como hemos visto, es el punto de corte entre el plano y la recta que une Z y $N = (0,0,1)$, entonces:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) = Z &= t(0,0,1) + (1-t)(x,y,0)\\ x_1 &= (1-t)x\\ x_2 &= (1-t)y\\ x_3 &= t\end{aligned}$$

Basta resolver este sistema con lo que hallamos:

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_1}{1-t} = \frac{x_1}{1-x_3}\\ y &= \frac{x_2}{1-t} = \frac{x_2}{1-x_3}\end{aligned}$$

Ejercicio (H1.2)**.** Calcule los valores:

a) $\left|(2-i)(1+i)^4\right|$

b) $\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{4-3i}\right|$

c) $\sum_{k=1}^{2020} i^k$

Solución

a)

b)

c) Notamos que $i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 + i + 1 = 0$ y por tanto como 2020 es múltiplo de 4

$$\sum_{k=1}^{2020} i^k = \sum_{j=1}^{505} i^{4j} + i^{4j+1} + i^{4j+2} + i^{4j+3} = \sum_{j=1}^{505} 0 = 0$$

Ejercicio (H1.3)**.** Compruebe la identidad $|1 + z\overline{w}|^2 + \left|z - w^2\right| = (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Solución

$$\begin{aligned}|1 + z\overline{w}|^2 + \left|z - w^2\right| &= (1 + z\overline{w})(1 + \overline{z}w) + (z - w)(\overline{z} - \overline{w})\\ &= 1 + \cancel{z\overline{w}} + \cancel{\overline{z}w} + z\overline{z}\overline{w}w + z\overline{z} - \cancel{z\overline{w}} - \cancel{w\overline{z}} + w\overline{w}\\ &= 1 + |z|^2 + |w|^2 + \overline{z}^2\,|w|^2\\ &= (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)\end{aligned}$$

Ejercicio (H1.4)**.** Demuestre la *identidad de Lagrange*: si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son números complejos, entonces

$$\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right) - \left|\sum_{j=1}^n z_j w_j\right|^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |z_i\overline{w_j} - z_j\overline{w_i}|^2$$

Solución

Vamos a comenzar escribiendo la igualdad de otra forma y desarrollando S_1

$$\underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right)}_{S_1} = \underbrace{\left|\sum_{j=1}^n z_j w_j\right|^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |z_i\overline{w_j} - z_j\overline{w_i}|^2}_{S_2}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right) &= \sum_{i=j}^n |z_iw_j|^2 + \sum_{i\neq j}^n |z_iw_j|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |z_iw_i|^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(|z_iw_j|^2 + |z_jw_i|^2\right) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n |z_iw_i|^2}_{P_1} + \underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(|z_iw_j|^2 + |z_jw_i|^2\right)}_{P_2}\end{aligned}$$

Entonces tenemos que ver si S_2 es igual a lo anterior. Vamos a desarrollar un término de S_2

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^n z_jw_j\right|^2 &= (z_1w_1 + \ldots + z_nw_n)(\overline{z_1w_1} + \ldots \overline{z_nw_n}) \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} z_iw_i\overline{z_jw_j} = \sum_{i}^n |z_i|^2 |w_i|^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i\overline{z_j}w_i\overline{w_j} + z_j\overline{z_i} + w_j\overline{w_i} \\ &= P_1 + \underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i\overline{z_j}w_i\overline{w_j} + z_j\overline{z_i} + w_j\overline{w_i}}_{P_3}\end{aligned}$$

Por tanto podemos cancelar P_1 y entonces tenemos que demostrar:

$$P_2 = P_3 + \underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |z_i\overline{w_j} - z_j\overline{w_i}|^2}_{P_4}$$

Y si desarrollamos P_4 obtenemos

$$P_4 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (z_i\overline{w_j} - z_j\overline{w_i})(\overline{z_i}w_j - \overline{z_j}w_i)$$

Que es $P_2 - P_3$ y hemos terminado.

Ejercicio (H1.5)**.** Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $a, b \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}\backslash\left\{-\overline{\left(\frac{a}{b}\right)}\right\}$ con $|z| = 1$, entonces se cumple $\left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right| = 1$

b) Si $|a| < 1$, entonces $|z| < 1$ es equivalente a $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1$

Solución

a)

$$\begin{aligned}|az+b| = \left|\overline{b}z+\overline{a}\right| &\iff |az+b|^2 = \left|\overline{b}z+\overline{a}\right|^2 \\ &\iff (az+b)(\overline{az}+\overline{b}) = (\overline{b}z+\overline{a})(b\overline{z}+a)\end{aligned}$$

Entonces basta demostrar

$$\begin{gathered}(az+b)(\overline{az}+\overline{b}) = (\overline{b}z+\overline{a})(b\overline{z}+a) \\ |a|^2|z|^2 + |b|^2 + \cancel{a\overline{b}z + b\overline{az}} = |b|^2|z|^2 + |a|^2 + \cancel{a\overline{b}z + b\overline{az}}\end{gathered}$$

Y como $|z| = 1$ hemos terminado.

Con esta proyección, todo $\mathbb{C}$ queda cubierto por la proyección de $\mathbb{S}^2\backslash\{(0,0,1)\}$. Por tanto, existe un $F : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2\backslash\{(0,0,1)\}$ homeomorfismo.

Diremos que $\infty \in \mathbb{C}$ es la proyección del punto $(0, 0, 1)$. Llamaremos $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y lo leeremos como $\mathbb{C}$ extendido y ahora tenemos un homeomorfismo $f : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2$.

Nos gustaría además poder definir una distancia en $\overline{\mathbb{C}}$ que induzca en $\mathbb{C}$ la topología usual. Recordamos que sea $Z \in \mathbb{S}^2$ un punto de la esfera unidad y z su proyección en el plano complejo entonces llamamos $f(z)$ a

$$f(z) = Z = \left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}, \frac{-i(z-\overline{z})}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

Vamos a definir la distancia entre $z, z' \in \overline{\mathbb{C}}$ como:

$$d(z, z') = \left|\left|f(z) - f(z')\right|\right|_2$$

es decir, es la distancia en R^3 entre la proyección sobre la esfera unidad del plano complejo extendido.

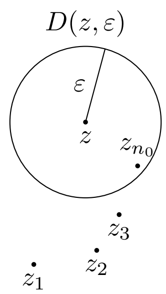
Ejercicio propuesto 6. Encontrar la expresión de $d(z, z')$ y $d(z, \infty)$.

1.4. Sucesiones en $\mathbb{C}$

Cuando tengamos una sucesión de complejos $\{z_n\}$ diremos que

$$\{z_n\} \to z \iff \{|z_n - z|\} \to 0$$

Es decir, que para cada $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Z_n \in D(z, \varepsilon) \forall n \geqslant n_0$



Además, utilizando las propiedades de las normas p, podemos obtener el siguiente resultado.

Proposición 4 (Límite de una sucesión compleja)**.** Sea $\{z_n\}$ una sucesión compleja

$$\{z_n\} \to_{n\to\infty} z \iff \{\Re(z_n)\} \to \Re(z) \text{ y } \{\Im(z_n)\} \to \Im(z)$$

Demostración. Se deja al lector. $\diamondsuit$

Proposición 5 (Condición necesaria y suficiente para el límite de una sucesión compleja)**.** Sea $\{z_n\}$ una sucesión compleja

$$\{z_n\} \to_{n\to\infty} z \iff |z_n - z| \to 0$$

Demostración. Se deja al lector. $\diamondsuit$

Ejercicio propuesto 7. Demostrar que $\{z^n\}$ con z en la circunferencia solo converge si $z = 1$.

Proposición 6 (Convergencia absoluta de una sucesión)**.** Sea $\{z_n\}$ una sucesión compleja

$$\{z_n\} \to z \implies \{|z_n|\} \to z$$

Demostración. Si $\{z_n\} \to z \implies |z_n - z| \to 0$. Además sabemos que:

$$0 \leqslant ||z_n| - |z|| \leqslant |z_n - z|$$

Y tomando límites en cada término de la desigualdad, vemos que:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} ||z_n| - |z|| \leqslant 0$$

Y por tanto por el lema del Sandwich

$$\lim_{n\to\infty} ||z_n| - |z|| = 0 \implies \{|z_n|\} \to |z|$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 6 (*Límite de una sucesión*)

Sea la sucesión $\{z_n\} = \left\{\frac{n}{n+i}\right\}$, *no es descabellado pensar que el límite es* 1, *veámoslo:*

$$\left|\frac{n}{n+i} - 1\right| = \left|\frac{n}{n+i} - \frac{n+i}{n+i}\right| = \left|\frac{-i}{n+i}\right| = \frac{1}{|n+i|} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

y efectivamente $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \to_{n\to\infty} 0 \implies \{z_n\} \to 1$

Observación (Convergencia de una serie)**.** Diremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z \iff \left\{\sum_{n=1}^{m} z_n\right\} \to_{m\to\infty} z$$

Proposición 7 (Convergencia y sucesión de Cauchy)**.** Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$

$$\{z_n\} \text{ es convergente } \iff \{z_n\} \text{ es de Cauchy}$$

Demostración. Se deja al lector. $\diamondsuit$

Proposición 8 (Resultados varios de convergencia)**.**

1) Sean S_1, S_2 dos series convergentes, entonces $S_1 + S_2$ es convergente.
2) Si $\sum z_n$ es convergente, entonces $\{z_n\} \to_{n\to\infty} 0$.
3) Si $\sum |z_n|$ es convergente, entonces $\sum z_n$ es convergente.
4) A compacto $\iff$ A es cerrado y acotado (en $\mathbb{C}$).

Demostración. Se deja al lector. $\diamondsuit$

Ejemplo 7 (*Convergencia de series*)

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2+i}$,

$$\left|\frac{i^k}{k^2+1}\right| = \left|\frac{1}{k^2+i}\right| = \frac{1}{|k^2+i|} = \frac{1}{k^4+1} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

y entonces

$$\sum \frac{1}{k^2} \textit{ converge } \implies \sum \left|\frac{i^k}{k^2+i}\right| \textit{ converge } \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2+i} \textit{ converge}$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+i} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-i}{k^2+1}$.

La parte real $\sum \frac{k}{k^2+1}$ *es comparable a* $\sum \frac{1}{k}$ *que no es convergente, por tanto como su parte real no converge la serie tampoco lo hace.*

1.5. Funciones complejas

En secciones anteriores ya hemos vistos los efectos de la función $f(x) = x^2$ a algunos conjuntos definidos en $\mathbb{C}$. No todas las funciones van a ser objeto de estudio de la asignatura. Comenzamos restringiéndonos al estudio de funciones continuas.

1.5.1. Funciones continuas complejas

Definición 5 (Función continua)**.** Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrario y $\mathcal{U}(z_0)$ un entorno de z_0. Sea $f : \mathcal{U}(z_0) \to \mathbb{C}$ una función compleja, diremos que f es **continua** en z_0 si $\{f(z_n)\} \to f(z_0)$ para toda sucesión $\{z_n\} \to z_0$.

Si f es continua en todo su dominio, se dice simplemente que es continua.

En ocasiones podremos analizar una función f compleja como una función hacia $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} &\xrightarrow{\qquad f \qquad} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ z &\longmapsto (u(z), v(z)) \equiv u(z) + iv(z) \end{aligned}$$

Donde $u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ son funciones escalares. En este caso podemos afirmar el resultado siguiente.

Proposición 9. Sea f una función compleja. Sean u, v funciones escalares tales que $f(z) = (u(z), v(z))$, entonces:

$$f \text{ es continua} \iff u, v \text{ son continuas}$$

Ejercicio (H2.10)**.** Demuestre que

a) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) $\forall \theta \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se cumple

$$\left(\frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}\right)^n = \frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$$

Solución

1.

$$\begin{aligned} z &= \cos(x) + i\sin(x) \\ z^3 &= (\cos(x) + i\sin(x))^3 \implies \sin(3x) = \Im(z^3) \\ &= \cos^3(x) + 3\cos^2(x) i \sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x) \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x) + (3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x))i \end{aligned}$$

Y entonces $\Im(z^3) = 3(1 - \sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$ y como $\Im(z^3) = \sin(3x)$ hemos terminado.

2. Comenzamos observando que el denominador siempre tiene parte real 1, por lo que la división está bien definida. Ahora multiplicamos todo por $\frac{\cos^n\theta}{\cos^n\theta}$.

$$\frac{\cos^n\theta}{\cos^n\theta} \frac{1 + i\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{1 - i\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{(\cos\theta - i\sin\theta)^n} = \frac{(\cos n\theta + i\sin n\theta)}{(\cos n\theta + i\sin n\theta)} = \frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$$

Observación.

a) $\sin(nx)$ no es un polinomio de $\sin(x)$.

b) En el ejercicio (b), hemos usado la fórmula de De Moivre pero con $(\cos\theta - i\sin\theta)$ en lugar de $(\cos\theta + i\sin\theta)$, sin embargo, basta observar que $(\cos\theta - i\sin\theta) = \overline{z}$ y como podemos intercambiar conjugados y potencias

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = (\overline{z})^n = \overline{z^n} = \overline{(\cos\theta + i\sin\theta)^n} = \overline{\cos n\theta + i\sin n\theta} = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

Ejercicio (H2.15)**.** Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación: $\overline{z} = z^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Solución

1) 0 es solución.

2) Si $z \neq 0$, entonces multiplicando todo por z entonces $\overline{z} \cdot z = z^n$, y por tanto $|z|^2 = z^n$ y necesariamente z^n es un número real. Así que podemos escribir:

$$|z|^2 = \left||z|^2\right| = |z^n| = |z|^n$$

Si $n > 2$, entonces dividiendo por $|z|^2$ obtenemos $1 = |z|^{n-2} \implies |z| = 1$. Retomando nuestra igualdad anterior, sustituyendo $|z| = 1$:

$$1 = \overline{z} \cdot z = z^n$$

es decir, z es una raíz n-ésima de la unidad.

Si $n = 2$, entonces estamos en el caso $\overline{z} = z$, es decir, $z \in \mathbb{R}$ y por tanto cualquier $x \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación.

Finalmente, si $n = 0$, tenemos la ecuación $\overline{z} = z^{1-1} = z^0 = 1$, es decir, $\overline{z} = 1 \implies z = 1$.

Proposición 10 (Operaciones de funciones continuas)**.** La suma, el producto y el cociente (allí donde el denominador no se anula) de funciones contínuas, es una función continua.

Demostración.

I)

$$(f_1 + f_2)(z) = f(z) + f_2(z) = (u_1(z) + iv_1(z)) + (u_1(z) + iv_2(z)) = (u_1(z) + u_2(z)) + i(v_1(z) + v_2(z))$$

II)

$$f_1 \cdot f_2 = (u_1(z)v_1(z) - u_2(z)v_2(z)) + i(u_1(z)v_2(z) + u_2(z)v_1(z))$$

III)

$$\frac{f_1}{f_2} = f_1 \cdot f_2^{-1}$$

y f_2^{-1} es continua cuando $f_2 \neq 0$ ya que:

$$f_2^{-1} = \frac{\overline{f_2}}{|f_2|^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} - i\frac{v}{u^2 + v^2}$$

$\diamondsuit$

Definición 6 (Convergencia uniforme)**.** Sea $\{f_n\} : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones complejas, decimos que $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in N$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $n \geqslant n_0$, $\forall z \in D$.

Proposición 11 (Convergencia uniforme. Condición necesaria y suficiente)**.** $\{f_n\} \to f$ uniformemente $\iff \{\Re(f_n)\} \to \Re(f)$ uniformemente y $\{\Im(f_n)\} \to \Im(f)$ uniformemente.

Demostración. Se deja al lector. $\diamondsuit$

Observación (Notación)**.**

$$\left\{\sum_{n=1}^{k} f_n\right\} \to_{k\to\infty} f \text{ se escribe: } \sum_n f_n = f$$

Proposición 12 (M-test)**.** Supongamos $\{f_n\} : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continuas. Si $|f_n(z)| \leqslant M_n \forall z \in D$ y $\sum_n M_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a una función $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua.

Demostración. Fijado $z \in D$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ es convergente porque es absolutamente convergente. $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| < \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.
Denotemos por $f(z)$ al límite $\left\{\sum_{n=1}^{k} f_n(z)\right\}$, es decir, a $\sum_n f_n(z)$. $f : D \subseteq \mathbb{C} \to C$ así definida es continua porque $\sum_{n=1}^{k} f_n(z)$ son continuas y convergen uniformemente a $f(z)$.
Fijo $\varepsilon > 0$, hay que encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\sum_{n=1}^{m} f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ si $m \geqslant n_0$, $\forall z \in D$. Entonces:

$$\left|\sum_{n=1}^{m} f_n(z) - f(z)\right| = \left|\cancel{\sum_{n=1}^{m} f_n(z)} - \cancel{\sum_{n=1}^{m} f_n(z)} - \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z)\right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} M_n$$

Que es la cola de una serie convergente, por lo que se puede hacer tan pequeña como queramos, en nuestro caso $< \varepsilon$. $\diamondsuit$

Observación. El M-test es solo una implicación, no una condición necesaria y suficiente.

Ejemplo 8 (*Aplicación del M-test*)

Sea $\{f_n(z) = nz^n\}$. Intentamos aplicar el M-test. Si $|z| < \frac{1}{2} \implies |nz^n| \leqslant n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2^n}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ es convergente (por el criterio de la raíz), podemos aplicar el M-test, y por tanto $\sum f_n$ converge uniformemente en $\left\{|z| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$

Observación. Recordamos el criterio de la raíz, que es equivalente al caso real. Dada una serie compleja $\sum z_n$, consideramos $\rho = \limsup \sqrt[n]{|z_n|}$. Entonces si $\rho > 1$ la serie diverge, si $\rho < 1$ la serie converge y si $\rho = 1$ no podemos afirmar nada.

1.6. Derivación de funciones complejas

Las funciones complejas son *funciones de z*, es decir, $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Por ejemplo

$$p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n$$

Y como $z = x + iy$, en particular tengo un función de dos variables x, y

$$p(z) = p(x, y) = (\Re(\alpha_0) + \Re(\alpha_1)x - \Im(\alpha_1)y + \cdots)$$

Sin embargo, no es cierto en general que todo polinomio de dos variables sea un polinomio complejo. De hecho, no tiene utilidad ver los polinomios complejos como funciones de dos variables.

Definición 7 (Derivabilidad. Función holomorfa)**.** Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, se dice que f es **derivable** en z si existe el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Cuando dicho límite existe, se denota mediante $f'(z)$ y se llama **derivada** de f en z.
Decimos que $f(z)$ es derivable en el sentido complejo y que f es **holomorfa**.

Ejemplo 9 (*Derivabilidad de funciones*)

1) Sea

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xrightarrow{\;f\;} \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \overline{z} \end{aligned}$$

Es una función que no es derivable en ningún punto. Podemos comprobarlo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\overline{z}} + \overline{h} - \cancel{\overline{z}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h} = \begin{cases} 1 \text{ si } h \in \mathbb{R} \\ -1 \text{ si } \Re(h) = 0 \end{cases}$$

Y es distinto en función de como nos acercamos, por tanto no es derivable.

2) Sea

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xrightarrow{\;g\;} \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

Es una función derivable y además, $g'(z) = nz^{n-1}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{z^n} + \binom{n}{1} z^{n-1}h + \binom{n}{2} z^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - \cancel{z^n}}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} nz^{n-1} + h\left(\binom{n}{2} z^{n-2} + \cdots + h^{n-2}\right)$$

Y como $\binom{n}{2} z^{n-2} + \cdots + h^{n-2}$ *está acotado, el límite existe y vale* $g'(z) = nz^{n-1}$

Proposición 13 (Derivada de suma y producto en $\mathbb{C}$)**.** Si f, g son derivables en z, entonces $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ (allá donde g no se anule) son derivables, siendo además:

- $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
- $(f-g)'(z) = f'(z) - g'(z)$
- $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$
- $(\frac{f}{g})'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$

Demostración. Se deja al lector. ♢

Proposición 14 (Derivabilidad y continuidad)**.** Si f es derivable en $z \implies f$ es continua en z.

Demostración.

$$f \text{ es continua en } z \iff \lim_{h\to 0} f(z+h) - f(z) = 0$$

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \cdot h \implies \\ \lim_{h\to 0} f(z+h) - f(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \cdot h \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} &\cdot \lim_{h\to 0} h = f'(z) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

♢

Ejercicio propuesto 8. Demuestra que el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \wedge \theta \notin \pi\mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{S}^1$.

Solución

Vamos a ver que $\{z^n\}$ nunca repite el mismo valor. Supongamos que sí repite el mismo valor, entonces:

$$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta) = \cos(m\theta)+i\sin(m\theta) \iff n\theta = m\theta+2\pi k \iff (n-m)\theta = 2k\pi \iff \frac{\theta}{\pi} = \frac{2k}{n-m} \in \mathbb{Q}$$

Que entra en contradicción con $\theta \notin \pi\mathbb{Q} \iff \frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

Para ver que es denso, dividimos $\mathbb{S}^1$ en arcos de tamaño $\frac{2\pi}{M}$, de tal forma que los puntos que limitan el arco están a distancia menor que ε. Buscamos encontrar dos potencias en el mismo arco. Si los encontramos, como ε era arbitrario, el conjunto sería denso.
Además, sabemos que hay al menos dos potencias ya que hay un número finito de arcos y **car** $\{z^n\}$ no es finito, por lo que lo podemos asegurar por el Principio del Palomar.

1.6.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Consideremos $z \in \mathbb{C}: \ z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. También $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función derivable (en el sentido complejo), que podemos interpretar como función $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, es decir, $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u, v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Si $h \in \mathbb{R}$:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h, y) + iv(x+h, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h} = u_x + iv_x = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Por otro lado, si $h \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x, y+h) + iv(x, y+h) - u(x, y) - v(x, y)}{ih} = \frac{u_y}{i} + v_y = -iu_y + v_y = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Como f es derivable, ambas expresiones han de ser iguales y por tanto llegamos a la **ecuaciones de Cauchy-Riemann**.

Proposición 15 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)**.** Sea $f(z) = f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ una función compleja, derivable en z en el sentido complejo, entonces:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ v_x &= -u_y \end{aligned}$$

Demostración. Leer el desarrollo anterior. ♢

Observación. El recíproco no es cierto en general. Sea

$$f(z) = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se cumple que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = (0, 0)$, se verifica Cauchy-Riemann y sin embargo, f no es derivable en $z = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Re(h)\Im(h)}{|h|^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2} = \cos(\theta)\sin(\theta)$$

Como el límite por radiales depende de θ, f no es derivable.

Proposición 16. Si todas las derivadas parciales existen, son continuas en z y se verifica Cauchy-Riemann, entonces f es derivable en z.

Demostración. Se deja al lector. $\diamondsuit$

Observación. Si $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en z, entonces también es diferenciable en z. Además, si $f'(z) = a + bi$, entonces:

$$\mathrm{D}f(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Proposición 17 (Regla de la cadena)**.** Sean f, g holomorfas (diferenciables en sentido complejo) en G y Ω respectivamente. Supongamos que $f(G) \subset \Omega$. Entonces $g \circ f : G \to \mathbb{C}$ es holomorfa y además cumple:

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$$

Demostración. Se deja al lector. $\diamondsuit$

Proposición 18 (Derivada de la función inversa)**.** Sea f una función biyectiva. Sean S y T abiertos tales que: $f : S \to T$. Sea $g = f^{-1} : T \to S$ continua en $z_0 \in T$. Entonces si f es derivable en $g(z_0)$ y además $f'(g(z_0)) \neq 0$, se tiene que g es derivable en z_0 y $g'(z_0) = \frac{1}{f'(g(z_0))}$.

Demostración. No podemos aplicar la regla de la cadena porque g no tiene por qué ser derivable. Ahora calculamos ($z \neq z_0$):

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{\frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)}} = \frac{1}{f(g(z)) - f(g(z_0))}$$

Y llegamos a lo que queremos tomando el límite $z \to z_0 \implies g(z) \to g(z_0)$ $\diamondsuit$

Proposición 19 (Función holomorfa constante (1))**.** Si $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (con G abierto y conexo) es holomorfa ($f \in \mathcal{H}(G)$). Si $f = u + iv$ y u es constante $\implies f$ es constante.

Demostración. Hay que probar que v también es constante. Usando Cauchy-Riemann:

$$0 = u_x = v_y$$
$$0 = u_y = -v_x$$

y esto implica (bajo las hipótesis de cómo es G) que v es constante. $\diamondsuit$

Proposición 20 (Función holomorfa constante (2))**.** Sea $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con G abierto y conexo. Sea $f \in \mathcal{H}(G)$. Si $|f|$ es constante entonces f es constante.

Demostración. Si $|f| = 0 \implies f = 0$. Si $|f| = cte \neq 0 \implies u^2 + v^2 = cte$. Usando Cauchy-Riemann, hallamos:

$$uu_x - vu_y = 0$$
$$uu_x + vv_x = 0$$
$$uu_y + vv_y = 0$$
$$vu_x + uu_y = 0$$

De la primera y ultima condición, multiplicando por u y v respectivamente obtenemos:

$$u(uu_x - vv_y) = 0$$
$$v(vu_x + uu_y) = 0$$

Y entonces, sabiendo que $u^2 + v^2 \neq 0$:

$$(u^2 + v^2)u_x = 0 \implies u_x = 0$$

de modo similar hallamos que $u_y = 0$ y por tanto $u = cte \implies f = cte$. $\diamondsuit$

Parte II

Apéndices

Capítulo 2

Índices

Lista de definiciones

Lista de teoremas

Lista de ejemplos

Lista de ejercicios