MODELIZACIÓN

APUNTES DEL CURSO 2019-2020 IMPARTIDO POR RAFAEL ORIVE ILLERA

Rafael Sánchez

Revisión del 4 de febrero de 2020 a las 11:25.

Índice general

Parte I

Primer parcial

Capítulo 1

Análisis dimensional

El análisis dimensional es una herramienta que nos permite simplificar el estudio de cualquier fenómeno que involucre varias magnitudes físicas para tratarlas como variables independientes. Esto nos ayudará a simplificar los modelos matemáticos de lo que queramos estudiar.

Vamos a comenzar con un ejemplo introductorio a la asignatura, con el que se busca de alguna forma introducir conceptos que si bien no son del todo matemáticos o formales serán de utilidad en el desarrollo del curso.

Ejemplo 1 (*Segunda Ley de Newton - Ley física*)

La segunda ley de Newton se puede escribir como la ecuación diferencial:

$$m\ddot{x}(t) = F(x,t), \ t \in [0,T]$$

donde m representa la masa de un objeto, $x(t)$ la posición del mismo respecto del tiempo, $F(x,t)$ la fuerza que se ejerce sobre él y T es el tiempo final.
Para completar el problema daremos un par de condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0 \text{ la posición inicial}$$
$$\dot{x}(0) = v_0 \text{ la velocidad inicial}$$

En el análisis dimensional analizaremos que ***magnitudes*** *entran en juego en la* ***ley****. En este caso tenemos:*

- *m - masa.*
- *x - posición.*
- *F - fuerza.*
- *T - tiempo final.*
- *x_0 - posición inicial.*
- *v_0 - velocidad inicial.*

Por tanto nuestra función final será de la forma:

$$f(m,x,F,T,x_0,v_0) = 0$$

que es otra forma de expresar la ***ley****. Además, querremos ver de qué* ***magnitudes*** *dependen estos 6 parámetros. Esto lo expresaremos con la notación:*

$$\left[p\right] = M$$

donde p representa un parámetro y M una magnitud (también puede ser un producto de ellas). En nuestro caso tenemos:

- *$\left[m\right] = M$. Masa, una magnitud elemental.*
- *$\left[x\right] = L$. Longitud, una magnitud elemental.*
- *$\left[T\right] = \tau$. Tiempo, una magnitud elemental.*
- *$\left[x_0\right] = L$. Longitud.*
- *$\left[v_0\right] = L \cdot \tau^{-1}$. Velocidad, longitud $\times$ tiempo^{-1}.*
- *$\left[F\right] = \left[m \cdot \ddot{x}\right] = M \cdot L \cdot \tau^{-2}$. Fuerza, masa $\times$ longitud $\times$ tiempo^{-2}.*

1.1. Magnitudes. Teorema Π.

Vamos a suponer la existencia de $L_1, \ldots, L_n$ magnitudes elementales con $n < \infty \in \mathbb{N}$, es decir, cada L_i es independiente de cada magnitud de $\mathcal{L} \backslash L_i$. Diremos que una colección de magnitudes conforman un sistema.

Definición 1 (Dimensión de una magnitud)**.** Sea $a \in \mathbb{R}$ una medida de una magnitud A en un sistema $L_1, \ldots, L_n$. Si cambiamos a un sistema $L'_1, \ldots, L'_n$ con $L'_i = \lambda_i L_i$ y sea a' la medida de A en el nuevo sistema, entonces si se cumple que:

$$a' = a \cdot \lambda_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot \lambda_n^{a_n}$$

para una serie de escalares $a_1, \ldots, a_n$, entonces diremos que la magnitud A tiene **dimensión** $L_1^{a_1} \cdots L_n^{a_n}$ y lo expresamos por:

$$\left[A\right] = L_1^{a_1} \cdots L_n^{a_n}$$

Cuando el sistema $L_1, \ldots, L_n$ esté fijado podremos identificar la dimensión de la magnitud A con el vector de escalares $(a_1, \ldots, a_n)$.

Recordando el ejemplo de la segunda ley de Newton, donde teníamos tres magnitudes elementales (L, τ, M), si consideramos que nuestro sistema $L_1, \ldots, L_n$ es dicha 3-tupla, entonces podemos expresar las magnitudes no elementales como 3-tuplas (o vectores de $\mathbb{R}^3$):

- $\left[v_0\right] = L \cdot \tau^{-1} = (1, -1, 0)$
- $\left[F\right] = \left[m\ddot{x}\right] = M \cdot L \cdot \tau^{-1} = (1, -2, 1)$

Ejemplo 2 (*Dimensión de una magnitud*)

Sea $L_1 = \{m\}$ y $L_2 = \{s\}$ un sistema de magnitudes (longitud en metros y tiempo en segundos respectivamente), consideramos la magnitud de la velocidad V que tiene dimensión:

$$\left[V\right] = L_1 \cdot L_2^{-1} = (1, -1)$$

entonces, si tenemos una medida $v = 30 {}^{m}/_{s}$ y queremos ver su medida L' en el sistema:

$$L'_1 = 10^{-3} L_1 \text{ con } L'_1 \text{ longitud en km}$$
$$L'_2 = \frac{1}{3600} L_2 \text{ con } L'_2 \text{ tiempo en h}$$

entonces:

$$v' = v \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2^{-1} = \frac{30 \cdot 3{,}6 \cdot \cancel{10^3}}{\cancel{10^3}} = 108 {}^{km}/_{h}$$

Proposición 1 (Expresión de una magnitud dependiente)**.** Sean A, B dos magnitudes tales que:

$$\left[A\right] = L_1^{a_1} \cdots L_n^{a_n}$$
$$\left[B\right] = L_1^{b_1} \cdots L_n^{b_n}$$

Sea C otra magnitud dependiente de A y B, tal que si a, b son medidas de A, B y C y $\exists p, q, d$ tales que $c = d \cdot a^p + b^q$ con p, q, d independientes de las unidades $L_1, \ldots, L_n$, entonces:

$$\left[C\right] = L_1^{a_1 p + b_1 q} \cdots L_n^{a_n p + b_n q}$$

Demostración. Sean $L'_i = \lambda_i L_i$ un nuevo sistema, entonces:

$$a' = a \cdot \lambda_1^{a_1} \cdots \lambda_n^{a_n}, \quad b' = b \cdot \lambda_1^{b_1} \cdots \lambda_n^{b_n}$$

y por tanto c' es:

$$\begin{aligned} c' &= da'^p + b'^q = d(a\lambda_1^{a_1}\cdots\lambda_n^{a_n})^p + (b\lambda_1^{b_1}\cdots\lambda_n^{b_n}) \\ &= (da^p + b^q)\cdot(\lambda_1^{a_1p+b_1q}\cdots\lambda_n^{a_np+b_nq}) \\ &= c\cdot(\lambda_1^{a_1p+b_1q}\cdots\lambda_n^{a_np+b_nq}) \implies \\ \big[C\big] &= L_1^{a_1p+b_1q}\cdots L_n^{a_np+b_nq} \end{aligned}$$

◊

Definición 2 (Matriz de dimensiones)**.** Dados $q_1,\ldots,q_m$ magnitudes, tales que su dimensión es:

$$\big[q_i\big] = L_1^{a_{i1}}\cdots L_n^{a_{in}}$$

llamamos **matriz de dimensiones** a la matriz $(n\times m)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

que tiene n filas (una por cada *magnitud elemental* L_i) y m columnas (una por cada magnitud del problema q_i)

Observación. Los índices de los elementos de la matriz quedan permutados respecto de la notación habitual.

Retomando el ejemplo de la segunda ley de Newton tendríamos la *matriz de dimensiones*:

$$\begin{array}{c} \\ L \\ \tau \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_0 & v_0 & T & F & M & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Definición 3 (Magnitud adimensional)**.** Una magnitud Π se dice adimensional si $\big[\Pi\big] = 1$.

Hallar magnitudes adimensionales en los distintos problemas nos ayuda a simplificar el estudio de los mismos. Retomemos el ejemplo de la segunda ley de Newton, vamos a intentar reducir la dimensión del problema.

Ejemplo 3 (*Reduciendo la dimensión del ejemplo 1*)

Recordemos que teníamos 6 parámetros (x, x_0, v_0, T, F, m). Una forma de reducir los parámetros es intentar enmascarar *los valores iniciales en nuevas variables.*
Recordemos que tanto x como x_0 tenían la misma dimensión. Gracias a ello podemos definir un nuevo parámetro y sin dimensión:

$$y = \frac{x}{x_0}$$

Además, como $x(0) = x_0$ tendremos que $y(0) = 1$ y como $\dot{x}(0) = v_0$ entonces $\dot{y}(0) = \frac{v_0}{x_0}$.
Podemos también hacer lo mismo con el tiempo, recordemos que en la fórmula original la variable t pertencía a $[0, T]$. Podemos definir entonces:

$$\frac{t}{T} = \tau$$

y por tanto $\tau \in [0, 1]$, con lo que hemos eliminado *T. Sin embargo, cambiar t tiene consecuencias debido que es la variable respecto de la que se diferencia x (y por tanto y), tenemos que ver como afectan estos cambios a nuestras variables.*
Usaremos la notación $\dot{x}$ para referirnos a $\frac{\partial x}{\partial t}$ y x' para referirnos a $\frac{\partial x}{\partial \tau}$.

Entonces obtenemos:

$$y' = \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{1}{x_0}\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{T}{x_0}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{T}{x_0}\dot{x} \implies y'(0) = \frac{T}{x_0}\cdot v_0 = \tilde{q}$$

y de nuevo $\left[\tilde{q}\right] = 1$.

Recordemos que nuestro problema comenzaba con $m\ddot{x} = F$*, vamos a usar esto para encontrar otro parámetro adimensional.*

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x_0}{T}\frac{\partial y}{\partial \tau}$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{x_0}{T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right) = \frac{x_0}{T}\frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{x_0}{T}\cdot y''$$
$$\frac{m x_0}{T^2}\cdot y'' = F \implies y'' = \frac{T^2}{m x_0}\cdot F = f$$

y podemos comprobar que $\left[f\right] = 1$*. Recapitulado, hemos conseguido encontrar nuevos parámetros adimensionales* y*,* $\tilde{q} = y'$*,* $f = y''$ *haciendo algunos cambios en el problema. Con esto, podemos reescribir el problema de valores iniciales con los nuevos parámetros adimensionales:*

$$y'' = f = \frac{T^2}{m x_0}\cdot F$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = \tilde{q} = \frac{T v_0}{x_0}$$

Definición 4 (Ley invariante)**.** Sea una ley $f(q_1, \ldots, q_m) = 0$, se dice que es **invariante** frente al cambio de unidades $L_1' = \lambda_1 L_1, \ldots L_n' = \lambda_n L_n$ si verifica que $f({q'}_1, \ldots, {q'}_m) = 0$ para ${q'}_1, \ldots, {q'}_m$ las medidas de $q_1, \ldots, q_m$ en las nuevas unidades ${L'}_1, \ldots, {L'}_n$. Informalmente:

Una ley es invariante cuando sigue siendo cierta tras el cambio de variables del problema

Teorema 2 (Teorema Π)**.** Sea $f(q_1, \ldots, q_m) = 0$ una ley invariante con $q_1, \ldots, q_m$ magnitudes con matriz de dimensiones:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

tal que $n < m$ y el rango de D es $r \leqslant n$. Entonces existen $m - r$ cantidades $\Pi_1, \ldots, \Pi_{m-r}$ que van a ser magnitudes adimensionales tales que la ley invariante es equivalente a una relación $F(\Pi_1, \ldots, \Pi_{m-r}) = 0$.

Demostración.

(1) Vamos a demostrar que existen $\Pi_1, \ldots, \Pi_{m-r}$ magnitudes adimensionales independientes entre sí. Partimos de la matriz de dimensiones:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} q_1 & \cdots & q_m \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Y entonces tenemos:

$$\left[\Pi\right] = 1 \text{ con } \Pi = q_1^{\alpha_1} \cdots q_m^{\alpha_m}$$

$$\left[\Pi\right] = (L_1^{a_{11}} \cdots L_n^{a_{1n}})^{\alpha_1} \cdot (L_1^{a_{21}} \cdots L_n^{a_{2n}})^{\alpha_2} \cdots (L_1^{a_{m1}} \cdots L_n^{a_{mn}})^{\alpha_m} = L_1^{\alpha_1 a_{11} + \cdot + \alpha_m a_{m1}} \cdots L_n^{\alpha_1 a_{1n} + \cdots \alpha_m a_{m1}}$$

De donde surge el sistema:

$$\begin{aligned}\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots + \alpha_m a_{m1} &= 0\\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_m a_{m2} &= 0\\ (\cdots)\\ \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \cdots + \alpha_m a_{mn} &= 0\end{aligned}$$

Y la demostración se reduce a resolver un sistema homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas. Como la matriz D es de rango r, entonces existen $m - r$ soluciones linealmente independientes.

(2) La demostración de que la ley invariante es equivalente a otra que solo comprende a las magnitudes adimensionales para el caso general resulta muy difícil de escribir. Un caso particular para $m = 4, n = 2$ y $r = 2$ se encuentra en el siguiente ejemplo.

$\diamondsuit$

Ejemplo 4 (*Cálculo de las magnitudes adimensionales y la ley invariante asociada*)

Vamos a hacer un caso particular del sistema de la demostración. Sea $m = 4$, $n = 2$ y $r = 2$, es decir:

$$\begin{aligned}\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \alpha_3 a_{31} + \alpha_4 a_{41} &= 0\\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{32} + \alpha_4 a_{42} &= 0\end{aligned}$$

Como el rango es 2, sin perdida de generalidad puedo suponer que:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = 0$$

Entonces por Rouche-Frobenius existen $C_{34}, C_{32}, C_{41}, C_{42}$ tales que:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\alpha_3 C_{31} - \alpha_4 C_{41} \text{ con } \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = 0\\ \alpha_2 &= -\alpha_3 C_{32} - \alpha_4 C_{42} \text{ con } \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 1\end{aligned}$$

Y entonces puedo encontrar las magnitudes adimensionales:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= q_1^{-C_{31}} q_2^{-C_{32}} q_3^1 q_4^0 \implies q_3 = \Pi_1 q_1^{C_{31}} q_2^{C_{32}}\\ \Pi_2 &= q_1^{-C_{41}} q_2^{-C_{42}} q_3^0 q_4^1 \implies q_4 = \Pi_2 q_1^{C_{41}} q_2^{C_{42}}\end{aligned}$$

Recordemos que partíamos de una ley:

$$f(q_1, q_2, q_3, q_4) = 0$$

Y además, hemos encontrado que:

$$f(q_1, q_2, q_3, q_4) = f(q_1, q_2, \Pi_1 q_1^{C_{31}} q_2^{C_{32}}, \Pi_2 q_1^{C_{41}} q_2^{C_{42}}) = G(q_1, q_2, \Pi_1, \Pi_2)$$

Además, vamos a hacer un cambio del sistema de magnitudes de la forma:

$$L_1' = \lambda_1 L_1,\ L_2' = \lambda_2 L_2$$

para conseguir:

$$\begin{aligned}q_1' &= q_1 \lambda_1^{a_1 1} \lambda_2^{a_1 2}\\ q_2' &= q_2 \lambda_1^{a_2 1} \lambda_2^{a_2 2}\\ \Pi_1' &= \Pi_1\\ \Pi_2' &= \Pi_2\end{aligned}$$

Entonces tenemos una nueva ley invariante al cambio de escala:

$$0 = G(q_1, q_2, \Pi_1, \Pi_2) = G(q_1', q_2', \Pi_1, \Pi_2)$$

Finalmente, querremos hacer un cambio de variables tal que $q_1 = q_2 = 1$ en nuestra nueva ley.

$$L_n q_1 + a_{11} L_n \lambda_1 + a_{12} L_n + \lambda_2 = 0$$
$$L_n q_2 + a_{21} L_n \lambda_1 + a_{22} L_n + \lambda_2 = 0$$

En el sistema anterior hacemos el cambio: $y_i = L_n \lambda_i$ y tomando logaritmos obtenemos:

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 = -\log(q_1)$$
$$a_{21} y_1 + a_{22} y_2 = -\log(q_2)$$

Y sabemos que dichos q_1, q_2 existen porque la matriz es invertible, y por tanto:

$$0 = f(q_1, q_2, q_3, q_4) = G(1, 1, \Pi_1, \Pi_2) = F(\Pi_1, \Pi_2)$$

Ejercicio (H1.4)**.**

a) Magnitudes. Magnitudes elementales. Magnitudes adimensionales.

Nuestras magnitudes q_i serán (h, t, g, R, v). Podemos analizarlas en función de las magnitudes elementales:

- $[h] = L = \{\text{longitud}\}$.
- $[t] = T = \{\text{tiempo}\}$.
- $[g] = LT^{-2}$.
- $[v] = LT^{-1}$.
- $[R] = L$.

Que tiene como matriz de dimensiones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde podemos encontrar las siguientes 3 magnitudes adimensionales (ya que el rango de la matriz es 2):

$$\frac{h}{R},\ \frac{tv}{R},\ \frac{v}{\sqrt{gR}}$$

b) Relación de la altura máxima a alcanzar el proyectil con respecto a v, g, R.

Partimos de $0 = f(h, t, v, g, R)$ y por el teorema Π sabemos que tenemos una ley equivalente:

$$0 = F\left(\frac{h}{R},\ \frac{tv}{R},\ \frac{v}{\sqrt{gR}}\right)$$

Además, sabemos que la altura máxima h_{max} se va a tomar en un tiempo determinado t_{max}. Por tanto tenemos la relación:

$$0 = F\left(\frac{h_{max}}{R},\ \frac{t_{max} v}{R},\ \frac{v}{\sqrt{gR}}\right)$$

Por el Teorema de la función implícita (TFI):

$$\frac{h}{R} = G\left(\frac{tV}{R}, \frac{V}{\sqrt{gR}}\right)$$

Como alcanzamos la altura máxima:

$$h'(t_{max}) = 0 \implies \frac{\partial G}{\partial \Pi_2}\left(\frac{t_{max} V}{R}, \frac{V}{\sqrt{gR}}\right) = 0$$

Aplicando de nuevo el TFI:

$$\frac{t_{max}v}{R} = \varphi\left(\frac{V}{\sqrt{gR}}\right)$$

Y llegamos a la relación que nos pedían:

$$\frac{h_{max}}{R} = G\left(\varphi\left(\frac{V}{\sqrt{gR}}\right), \frac{V}{\sqrt{gR}}\right) = \varphi^{\star}\left(\frac{V}{\sqrt{gR}}\right)$$

c) Identificar las escalas privilegiadas del problema y como se simplifica en dichas escalas:

Vamos a hacer los cambios de variables:

$$\bar{t} = \frac{t}{t_C}$$
$$\bar{h}(\bar{t}) = \frac{h(t_C \cdot \bar{t})}{h_C}$$

y entonces:

$$\dot{\bar{h}}(\bar{t}) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}}(\bar{t}) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left(\frac{h(t_C\bar{t})}{h_C}\right) = \frac{t_C}{h_C}h'(t_C\bar{t})$$
$$\ddot{\bar{h}}(\bar{t}) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left(\frac{t_C h'(t_C\bar{t})}{h_C}\right) = \frac{t_C^2}{h_C}h''(t_C\bar{t})$$
$$\bar{h}(0) = 0$$
$$\dot{\bar{h}}(0) = \frac{t_C}{h_C}h'(0) = \frac{t_C}{h_C}v$$

y por último:

$$h''(t) = \frac{h_C}{t_C^2}\ddot{\bar{h}}(\bar{t}) \text{ y } h(t) = h_C\bar{h}(\bar{t}) \implies \frac{h_C}{t_C^2}\ddot{\bar{h}}(\bar{t}) = -\frac{SR^2}{(h_C\bar{h}(\bar{t}) + R)^2}$$

Vamos a tratar de simplificar el problema con estas escalas de tres formas distintas:

(1)

$$\frac{h}{R};\ h_C = R$$
$$\frac{t}{R/v};\ t_C = \frac{R}{v}$$

De esto, hallamos:

$$\frac{R}{(R/V)^2}\ddot{\bar{h}} = \frac{-SR^2}{(R\bar{h} + R)^2}$$
$$\frac{R^3\ddot{\bar{h}}}{(R/V)^2 gR^2} = -\frac{1}{(1+\bar{h})^2}$$
$$\frac{v^2}{Rg}\ddot{\bar{h}} = -\frac{1}{(1+\bar{h})^2}$$

Y para $R >> 1$ (el radio terrestre), entonces $\epsilon = \frac{v^2}{Rg} << 1$ es casi 0. Donde obtenemos:

$$0 = -\frac{1}{(1+\bar{h})^2}$$

Que no tiene mucho sentido y entonces lo que hemos hecho no nos ha servido, vamos a probar otro cambio.

(2)

$$\frac{h}{R};\ h_C = R$$
$$\frac{t}{\sqrt{R/g}};\ t_C = \sqrt{\frac{R}{g}}$$

De esto hallamos:

$$\frac{R}{R/g}\ddot{\bar{h}} = -\frac{gR^2}{(R\ddot{\bar{h}} + R)^2}$$
$$g\ddot{\bar{h}} = -\frac{g}{(\bar{h}+1)^2}$$
$$\ddot{\bar{h}} = -\frac{1}{(1+\bar{h})^2}$$

Si ahora simplificamos el problema, vemos que $\dot{\bar{h}}(0) = \frac{t_C}{h_C}v = \frac{v}{\sqrt{gR}} = \epsilon << 1$ y obtenemos el sistema:

$$\ddot{\bar{h}} = -\frac{1}{(1+\bar{h})^2}$$
$$h(0) = 0$$
$$h'(0) = \epsilon \simeq 0$$

Y este sistema también carece de sentido físico ya que indica que el proyectil se lanzaría en sentido contrario.

(3)

$$\frac{h}{v^2/g};\ h_C = \frac{v^2}{g}$$
$$\frac{t}{\sqrt{v/g}};\ t_C = \sqrt{\frac{v}{g}}$$

De este obtenemos:

$$\dot{\bar{h}}(0) = \frac{\frac{v}{g}}{\frac{v^2}{g}} = 1$$
$$\frac{\frac{v^2}{g}}{\left(\frac{v}{g}\right)^2}\ddot{\bar{h}}(t) = -\frac{gR^2}{\left(\frac{v^2}{g}\bar{h} + R\right)^2}$$
$$\ddot{\bar{h}}(t) = -\frac{1}{\left(\frac{v^2}{gR}\bar{h} + 1\right)}$$

y con este resultado hallamos el sistema:

$$\bar{h}(0) = 0$$
$$\dot{\bar{h}}(0) = 1$$
$$\ddot{\bar{h}} = -\frac{1}{(t^2h+1)^2}$$

Cuando $t \to 0$ entonces:

$$\ddot{\bar{h}}(\bar{t}) = -1$$
$$\bar{h}(\bar{t}) = \frac{\bar{t}^2}{2} + A\bar{t} + B$$
$$\bar{h}(0) = 0 \implies B = 0 \implies \bar{h}(\bar{t}) = -\bar{t} + A$$

También hallamos:

$$\begin{aligned}
h(\bar{t}) &= -\frac{\bar{t}^2}{2} + \bar{t} \\
\frac{h(t_C\bar{t})}{h_C} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t_C}\right)^2 + \left(\frac{t}{t_C}\right) \\
h(t) &= -\frac{h_C}{2t_C^2}t^2 + \frac{h_C t}{t_C} \\
h(t) &= -\frac{v^2/g}{2\left(v/g\right)^2}t^2 + \frac{v^2/g}{v/g}t = -g\frac{t^2}{2} + vt
\end{aligned}$$

Ejercicio (H1.1)**.** Comenzamos identificando las magnitudes del problema:

$$\begin{aligned}
\left[m\right] &= M \\
\left[\rho\right] &= L \\
\left[V\right] &= L^3 \\
\left[S\right] &= L^2
\end{aligned}$$

Y las magnitudes elementales son L y M. Escribimos la matriz de dimensiones:

$$\begin{array}{c} M \\ L \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A$$

Donde comprobamos que el rango de A es 2 y entonces por el teorema Π existen 2 magnitudes adimensionales independientes $\Pi_1,\ \Pi_2$.

Hallamos entonces $\Pi_1,\ \Pi_2$:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{\rho V}{m} \\
\Pi_2 &= \frac{S}{V^{2/3}} = S \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2/3}
\end{aligned}$$

De aquí hallamos (teniendo en cuenta que $\lambda = \frac{\rho}{m}$):

$$\begin{aligned}
S &= \left(\frac{m}{\rho}\right)^{2/3} \cdot g\left(\frac{\rho V}{m}\right) \\
S &= \lambda^{-2/3} \cdot g(\lambda V)
\end{aligned}$$

Ejercicio (H1.2)**.** Una cantidad de energía térmica e está concentrada inicialmente en un punto y se difunde en una región que inicialmente tiene una temperatura 0. Determinar a tiempo t la siguiente relación de la temperatura u:

$$u = \frac{e}{c}(kt)^{-\frac{3}{2}} g\left(\frac{r}{\sqrt{kt}}\right)$$

donde r es la distancia a la fuente, c es la capacidad calorífica del medio de dimensiones $\left[c\right] = \left[eu^{-1}r^{-3}\right]$ y k la difusidad térmica de dimensiones $\left[k\right] = \left[r^2t^{-1}\right]$.

Solución

Comenzamos expresando la relación a la que queremos llegar de una forma más simple:

$$u(r,t) = \frac{e}{c}(kt)^{-\frac{3}{2}} g\left(\frac{r^2}{kt}\right)$$

Hacemos el análisis de magnitudes:

- $\left[u\right] = u$
- $\left[t\right] = t$
- $\left[r\right] = x$
- $\left[e\right] = e$
- $\left[c\right] = eu^{-1}x^{-3}$
- $\left[k\right] = x^2t^{-1}$

De donde vemos que podemos hallar dos magnitudes adimensionales:

$$\begin{aligned} \left[\Pi_1\right] &= \left[\tfrac{2}{kt}\right] = \frac{x^2}{x^2t^{-1}t} = 1 \\ \left[\Pi_2\right] &= \left[\tfrac{cu}{e(kt)^{-3/2}}\right] = \frac{\left[c\right]\left[u\right]}{\left[e\right]\left[kt\right]^{-3/2}} = \frac{eu^{-1}x^{-3}u}{ex^{-3}} = 1 \end{aligned}$$

Y por tanto podemos sacar la relación:

$$\begin{aligned} g(\Pi_1, \Pi_2) &= 0 \\ \Pi_2 &= g(\Pi_1) \\ u &= \frac{e}{c}(k+1)^{3/2} g\left(\frac{r^2}{kt}\right) \end{aligned}$$

Capítulo 2

Modelos matriciales discretos

2.1. Modelo discreto unidimensional

En esta sección trataremos problemas con ecuaciones en diferencias finitas. Podemos dar un ejemplo con el interés de una tarjeta de crédito.

Ejemplo 5 (*Interés en una tarjeta de crédito*)

Tomamos x_0 la cantidad que debemos, e $i = 2\,\%$ el tipo de interés.
$x(t)$ es la cantidad de dinero que debo cuando han pasado t días. Vamos a intentar dar una expresión para x.

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(1) &= (1+i)\cdot x(0) = x(0) + i\cdot x(0) \\ x(2) &= (1+i)\cdot x(1) = (1+i)^2 \cdot x(0) \end{aligned}$$

y por inducción hallamos:

$$x(k) = (1+i)^k \cdot x(0)$$

Por tanto obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

donde $a = (1+i)$, y estamos ante un sistema de ecuaciones en diferenciadas finitas homogéneas y autónomas.

Parte II

Apéndices

Capítulo 3

Índices

Lista de definiciones

Lista de teoremas

Lista de ejemplos

Lista de ejercicios