VARIABLE COMPLEJA

APUNTES DEL CURSO 2019-2020 IMPARTIDO POR JOSE PEDRO MORENO

Rafael Sánchez

Revisión del 5 de febrero de 2020 a las 10:27.

Índice general

Parte I

Primer parcial

Capítulo 1

Números complejos y funciones

1.1. Operaciones aritméticas en el cuerpo de los complejos

En este curso estudiaremos el cuerpo $\mathbb{C}$ formado por el cuerpo de los números complejos.

Definición 1 (Número complejo. Parte real e imaginaria)**.** Diremos que un número z es **complejo** cuando sea una tupla de la forma (a, b) (o equivalentemente $(a + bi)$) con $a, b \in \mathbb{R}$. Llamaremos parte real $\Re(z)$ y parte imaginaria $\Im(z)$ a cada escalar a y b de la tupla respectivamente.

Definición 2 ($\mathbb{C}$)**.** Definimos $\mathbb{C}$ como el *cuerpo* conformado por la estructura $\langle \mathcal{C}, +, \cdot \rangle$, donde $\mathcal{C} = \{(a, b) \mid \forall a, b \ \in \mathbb{R}\}$ y las operaciones $+$, $\cdot$ definidas como:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Proposición 1 ($\mathbb{C}$ es un cuerpo)**.** La estructura $\mathbb{C} = \langle \mathcal{C}, +, \cdot \rangle$ definida anteriormente satisface las condiciones de ser un cuerpo.

Demostración. Se deja al lector. ♢

Ejemplo 1 (*Cálculo de un inverso en* $\mathbb{C}$)

Por construcción el neutro de la suma en $\mathbb{C}$ *es* $(0, 0)$ *y el de la multiplicación es* $(1, 0)$*. Vamos a buscar la expresión del inverso de un complejo* $z = (a, b)$*. Para ello buscamos resolver el sistema:*

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$$

es decir:

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ -bx + ay &= 0 \end{aligned}$$

que tiene solución cuando $a^2 + b^2 \neq 0$*. Finalmente obtenemos:*

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

que como veremos más adelante implica que:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Además, tiene sentido que si construimos $\mathbb{C}$ a partir de tuplas $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entonces $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Nos interesa definir exactamente como, para ello establecemos la *función de inclusión:* ι

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\quad\iota\quad} \mathbb{C} \\ a &\longmapsto (a, 0) \end{aligned}$$

Observación. En ocasiones usaremos indistintamente $(a, 0) \equiv a$ cuando un número complejo solo tenga parte real.

Veremos más adelante que también podemos calcular las raíces de números complejos. En particular para las raíces cuadradas se reduce a resolver el sistema que se deduce de $(x, y)^2 = (a, b)$, es decir:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{aligned}$$

que es un sistema resoluble, sin embargo la expresión no es nada agradable. Usaremos la *representación polar* de los números complejos para simplificar esta tarea.

1.1.1. Conjugación

Definición 3 (Conjugado de un número complejo)**.** Definimos el **conjugado** de un número complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ como $\overline{z} = (a, -b)$.

Definición 4 (Módulo de un número complejo)**.** Definimos el **módulo** de un número complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ como $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.

Proposición 2 (Propiedades del conjugado de un número complejo)**.** Sea $z = (a, b) \in \mathbb{C}$:

(1) $z \cdot \overline{z} = (a^2 + b^2) = |z|^2$

(2) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(4) $\overline{\overline{z}} = z$

(5) $z + \overline{z} = 2 \cdot \Re(z)$

(6) $z - \overline{z} = 2 \cdot \Im(z)$

(7) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

(8) Si $w \neq 0$, $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

Demostración. Consideraremos $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$.

1.
$$(a, b) \cdot (a, -b) = (a \cdot a - b \cdot (-b), a \cdot (-b) + b \cdot a) = (a^2 + b^2, 0)$$

2.
$$\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= \overline{(ac - bd, ad + bc)} = (ac - bd, -ad - bc) = \\ &= (ac - (-b)(-d), a(-d) + c(-b)) = (a, -b) \cdot (c, -d) = \overline{z} \cdot \overline{w} \end{aligned}$$

3.
$$\overline{z + w} = \overline{(a + c, b + d)} = (a + c, -b - d) = (a, -b) + (c, -d) = \overline{z} + \overline{w}$$

4. $$\overline{\overline{z}} = \overline{(a,-b)} = (a,b) = z$$

5. $$z + \overline{z} = (a,b) + (a,-b) = (2a,0) = 2\Re(z)$$

6. $$z - \overline{z} = (a,b) - (a,-b) = (0,2b) = 2\Im(z)$$

7. $$z = \overline{z} \iff a = a \text{ y } b = -b \iff b = 0 \iff z \in \mathbb{R}$$

8. Vamos a demostrar primero que $\overline{\frac{1}{w}} = \frac{1}{\overline{w}}$:

$$1 = w \cdot \frac{1}{w} \implies 1 = \overline{1} = \overline{w \cdot \frac{1}{w}} = \overline{w} \cdot \overline{\frac{1}{w}}$$

y como $\mathbb{C}$ es un cuerpo sabemos que $\overline{w}^{-1}$ existe, por tanto, multiplicando a ambos lados por $\overline{w}^{-1}$ obtenemos:

$$\frac{1}{\overline{w}} = \overline{\frac{1}{w}}$$

Con este resultado ya es directo demostrar que:

$$\overline{\frac{z}{w}} = \overline{z} \cdot \overline{\frac{1}{w}} = \overline{z}\frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

$\diamondsuit$

1.1.2. Desigualdad triangular

En esta sección vamos a ver algunas propiedades de los números complejos así como la desigualdad triangular y su generalización.

Proposición 3 (Propiedades del módulo de un número complejo)**.** De nuevo consideramos $z = (a,b)$, $w = (c,d) \in \mathbb{C}$, $\{z_i = (a_i, b_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$.

1. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
2. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$.
3. $|\Re(z)| \leqslant |z|$ y $|\Im(z)| \leqslant |z|$.
4. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$. (Desigualdad triangular).
5. $|z| - |w| \leqslant |z + w|$.
6. $||z| - |w|| \leqslant |z + w|$.
7. $|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|$. (Desigualdad triangular generalizada).

Demostración. En la gran mayoría de apartados se procede a demostrar la relación de los cuadrados, ya que al ser $f(x) = \sqrt{x}$ una función estrictamente creciente para números positivos, basta tomar raíces a ambos lados y llegamos a relación original.

1. $$|z \cdot w|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = a^2c^2 \cancel{-2abcd} + b^2d^2 + a^2d^2 + \cancel{2abcd} + b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z|^2 + |w|^2$$

2. Los cuatro términos se pueden abreviar en $\tilde{z} = (\pm a, \pm b)$ y entonces:

$$|\tilde{z}| = \sqrt{(\pm a)^2 + (\pm b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

3. Como $|z|^2 = |\Re(z)|^2 + |\Im(z)|^2$ entonces es claro que:

$$|\Re(z)|^2 \leqslant |\Re(z)|^2 + |\Im(z)|^2 \text{ y } |\Im(z)|^2 \leqslant |\Re(z)|^2 + |\Im(z)|^2$$

4.

$$\begin{aligned}
|z+w| &\leqslant |z| + |w| \\
|z+w|^2 &\leqslant (|z| + |w|)^2 \\
(z+w)\overline{(z+w)} &\leqslant \left|z^2\right| + \left|w^2\right| + 2\,|z|\,|w| \\
(z+w)(\overline{z}+\overline{w}) &\leqslant \left|z^2\right| + \left|w^2\right| + 2\,|z|\,|w| \\
\left|z^2\right| + \left|w^2\right| + z\overline{w} + \overline{z}w &\leqslant \left|z^2\right| + \left|w^2\right| + 2\,|z|\,|w| \\
\cancel{2} \cdot \Re(z\overline{w}) = z\overline{w} + w\overline{z} &\leqslant \cancel{2}\,|z|\,|w| \\
\Re(z\overline{w}) &\leqslant |z|\,|w| = |z|\,|\overline{w}| = |z\overline{w}|
\end{aligned}$$

5.

$$|z| = |z + w - w| \leqslant |z+w| + |-w| = |z+w| + |w| \implies |z| - |w| \leqslant |z+w|$$

Análogamente demostramos la segunda desigualdad expresando $|w| = |w + z - z|$.

6. Directa de la propiedad anterior y la desigualdad triangular.

7. Por inducción sobre el número de términos del sumatorio de la desigualdad triangular. Sabemos que el caso base se cumple ($n = 2$), ahora suponemos que se cumple para n sumandos y lo probamos cierto para $n+1$, es decir, suponemos que es cierto:

$$\left|\sum_{i=1}^{i=n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{i=n} |z_i|$$

y entonces:

$$\left|\sum_{i=1}^{i=n+1} z_i\right| = \left|z_{n+1} + \sum_{i=1}^{i=n} z_i\right| \leqslant |z_{n+1}| + \left|\sum_{i=1}^{i=n} z_i\right| \leqslant |z_{n+1}| + \sum_{i=1}^{i=n} |z_i| = \sum_{i=1}^{i=n+1} |z_i|$$

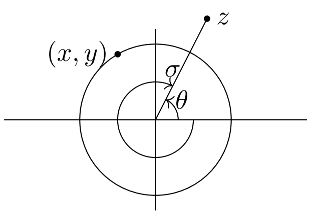
$\diamondsuit$

1.1.3. Representación polar

Los números complejos, al estar construidos como un par ordenado de números reales se pueden representar geométricamente en el plano complejo (similar a $\mathbb{R}^2$). De esta forma, el número $z = a + bi = (a, b)$ se puede representar como el punto (a, b) de $\mathbb{R}^2$.

Además, toman especial importancia los puntos de la circunferencia unidad, (los que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$). Usando un poco de trigonometría podemos obtener fácilmente que los puntos del plano complejo que se corresponden con los de la circunferencia unidad son $(\cos\theta, \sin\theta)$.

Observación. Los números complejos no tienen una expresión única en esta forma ya que $(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos(\theta + 2k\pi), \sin(\theta + 2k\pi))$ con $k \in \mathbb{Z}$.
El $(0, 0)$ no tendría sentido expresarlo de forma polar, lo denominaremos simplemente 0.



De esta forma, cualquier número complejo z podrá expresarse como $z = |z|(\cos\theta, \sin\theta)$. Usualmente denominaremos a θ como el argumento de z, es decir, $\theta = \arg(z)$. Además, es común encontrar el módulo expresado con la letra ρ. Con esto podremos expresar z como:

$$z = \rho(\cos\theta, \sin\theta) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Cuando definamos la exponencial compleja veremos que podemos expresar z de la forma $z = \rho e^{i\theta}$.

Observación. Como se aprecia en la figura superior, el argumento de z no es único, tanto σ como θ son el argumento de z (debido a que $\sigma = \theta - 2\pi$).

Debido a que $\arg(z)$ es una función multievaluada (si $\arg(z) = \theta \implies \arg(z) = \{\theta + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$), en ocasiones querremos usar una función que escoja un solo argumento de ellos. La denominamos **argumento principal** (Arg$z$), y la definimos restringiendo la imagen de $\arg z$ al intervalo $[0, 2\pi)$ o $[-\pi, pi)$.

Sin embargo, aun habiendo determinado un argumento principal, en ninguno de los dos casos la función Arg() es continua en todo punto. Se puede ver que no existe una determinación continua del argumento.

Esta forma de representar los números complejos nos simplificará varias tareas, como multiplicarlos o hallar raíces.

Observación. Sea $\rho(\cos\theta, \sin\theta) = z = a + bi \implies \frac{b}{a} = \tan\theta$. Esto no significa que $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ ya que la imagen de $\tan^{-1} \subseteq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

En general, encontrar el argumento de un número complejo no es tarea fácil, sin embargo en ciertos casos puede comprobarse a mano.

Ejemplo 2 (*Hallar la expresión polar de un número complejo. Hallar su inverso*)

Sea $z = 1 - i \in \mathbb{C}$, vamos a hallar su expresión polar.

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Por tanto, $z = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$. Resolviendo el sistema:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Y al resolverlo hallamos $\theta = -\frac{\pi}{4}$ y entonces:

$$z = \sqrt{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right))$$

Si ahora queremos hallar su inverso, vamos a usar la identidad $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Por tanto:

$$z^{-1} = \frac{1}{2}(1 + i)$$

1.1.4. Raíces y potencias

Ya vimos al comienzo del capítulo que la forma de hallar la raíz cuadrada de un número complejo en la primera expresión que dimos del mismo era poco agradable. Podemos ver que la forma polar nos simplifica el cálculo.
Para ello vamos a comenzar observando como se comporta la expresión polar frente a la multiplicación

de complejos.

Consideremos $z = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$ y $w = \rho'(\cos\theta', \sin\theta')$. Entonces:

$$z \cdot w = \rho \cdot \rho'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta', \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') = \rho \cdot \rho'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$$

Es decir, cuando multiplicamos dos complejos en forma polar, el resultado es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y el argumento es la suma de los argumentos. Esta propiedad simplifica el cálculo de raíces y potencias.

Ejemplo 3 (*Cálculo de una potencia de un número complejo*)

Sea $z = (\cos\theta, \sin\theta)$, entonces, usando lo que acabamos de ver:

$$z^n = (\cos\theta, \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Esta fórmula se conoce como fórmula de De Moivre.
Si tuvieramos $w = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$, entonces usando la fórmula de De Moivre tenemos:

$$w^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Ejemplo 4 (*Cálculo de las raíces de un número complejo*)

Sean $z, w \neq 0 \in \mathbb{C}$, queremos resolver la ecuación $z^n = w$, es decir, encontrar las raíces n-ésimas de w. Podemos suponer que $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ y $z = r(\cos t + i\sin t)$. Entonces queremos que:

$$z^n = w \implies r^n(\cos(nt) + i\sin(nt)) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

y entonces:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[n]{\rho} \\ \theta + 2\pi k &= nt \end{aligned}$$

Simplificando la última identidad, obtenemos:

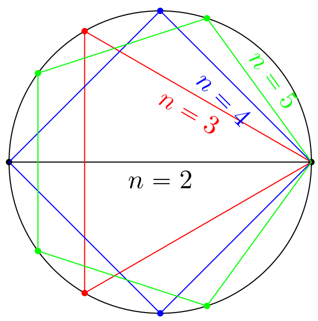
$$t = \frac{\theta}{n} + 2\pi\frac{k}{n}, \; k = 0, \ldots, n-1$$

y por tanto resultan n raíces. (Para $k = n$ el complejo es el mismo que para $k = 0$).

Gracias a esta forma de calcular las raíces de un número complejo, podemos calcular lo que se conoce como *raíces de la unidad*, que serán útiles a lo largo del curso, de esta forma, si $z^n = 1$, entonces:

$$z = (\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2}{n}\right)), \; k = 0, \ldots, 1$$

Que tienen una representación geométrica sobre el círculo unidad.



Ejercicio propuesto 1. Demuestra que $z^2 + 2z + 4 = 0$ no tiene soluciones en el círculo real.

Solución

Basta ver que para que z esté en el círculo real necesitamos que $|z| \leqslant 1$. Supongamos que sí, entonces:

$$0 \leqslant \left|z^2 + 2z\right| \leqslant \left|z^2\right| + |2z| = |z|^2 + 2\,|z| \leqslant 3$$

Y por tanto, no es posible que al sumar 4 a $z^2 + 2z$ resulte 0.

Ejemplo 5 (*Polinomio real*)

Sea $P \in \mathbb{R}[z]$, con $z \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$P(z) : a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} = 0$$
$$P(\overline{z}) : a_0 + a_1 \overline{z} + \cdots + a_{n-1} a^{n-1} = 0$$

y por tanto $P(\overline{z}) = P(z)$, entonces z y $\overline{z}$ son soluciones del polinomio. Es decir, si $\{a_i\}_{\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ entonces las raíces son reales o vienen en parejas $z, \overline{z}$.

Ejercicio propuesto 2. Probar que $1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$.

Solución

Notamos que si $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \neq 1$, entonces $w^n = 1$ y por tanto w es una raíz de la unidad.

$$w^n = 1$$
$$0 = 1 - w^n$$

Podemos factorizar entonces $0 = 1 - w^n$:

$$0 = 1 - w^n = (1 - w)(1 + w + \cdots + w^{n-1})$$

Como $(1 - w) \neq 0$, entonces $(1 + w + \cdots + w^{n-1}) = 0$ y por tanto $\Re(1 + w + \cdots + w^{n-1}) = 0$ y vemos que hemos llegado a lo que queremos demostrar:

$$0 = \Re(1 + w + \cdots + w^{n-1}) = 1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

De aquí podemos hallar también una igualdad de forma análoga con $\Im(1 + w + \cdots + w^{n-1}) = 0$:

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

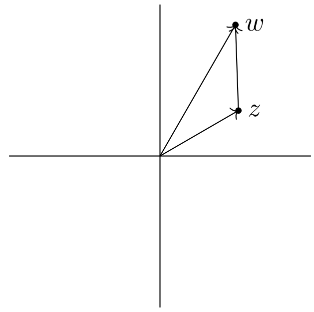
Ejercicio propuesto 3. Demostrar que $\cos nx$ es un polinomio de $\cos x$ de grado n.

Solución

$$\cos 3x = \Re(\cos x + i\sin x)^3 = \Re(\cos^3 x + 3\cos^2(x) i \sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x))$$

1.2. Topolgía del plano complejo

Podemos definir subconjuntos en el plano con los números complejos.



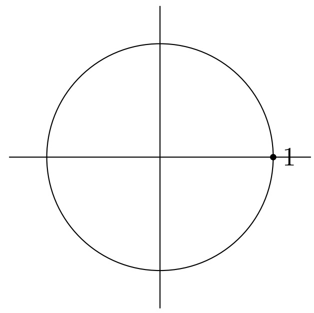
Podemos definir una distancia en $\mathbb{C}$ con el módulo de la siguiente forma:

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{dist}(z, w) = |z - w| = ||z - w||_2$$

y es fácil comprobar que cumple las propiedades de una distancia.

1.2.1. Bolas y discos en $\mathbb{C}$

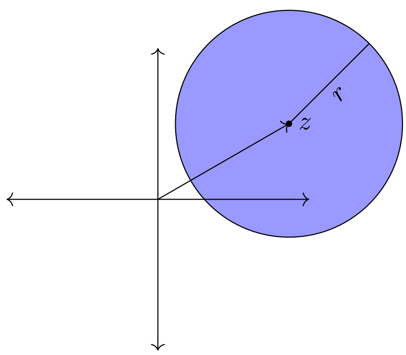
Ya vimos que podemos definir la circunferencia unidad:



que se corresponde con el conjunto:

$$\mathbb{S}^1 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\} = \{\cos t + i \sin t \mid t \in [0, 2\pi)\}$$

También podemos definir otras bolas o discos en el plano, abiertos o cerrados:

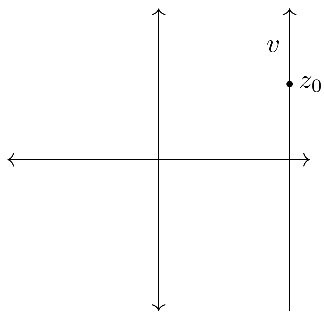


Que son los conjuntos definidos por:

$$\begin{aligned} D_r(z) = B_r(z) = B(z, r) &= \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\} \\ \overline{D_r}(z) = \overline{B_r}(z) = \overline{B}(z, r) &= \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| \leqslant r\} \\ C_r(z) = C(z, r) &= \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| = r\} \end{aligned}$$

1.2.2. Rectas en $\mathbb{C}$

Las rectas en el plano complejo (a partir de la expresión punto pendiente) se definen como:



$$
\begin{aligned}
L &= \{z = z_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z - z_0 = tv \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ \frac{z - z_0}{v} = t \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im\left(\frac{z - z_0}{v}\right) = 0 \right\}
\end{aligned}
$$

Es decir, que una recta vertical S que pase por el punto $(1, 0)$ se puede expresar como:

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = 1\} = \{\Re(z) = 1\}$$

1.2.3. Imágenes de conjuntos en $\mathbb{C}$

Consideremos ahora:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C} &\xrightarrow{\;\;f\;\;} \mathbb{C} \\
z &\longmapsto z^2
\end{aligned}
$$

Sin duda resulta difícil determinar la imagen de S mediante f. Para hallar $f(S)$ necesitamos una descripción algo más detallada de S. Comenzamos con:

$$S = \{z = (1, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{z = 1 + ti \mid t \in \mathbb{R}\}$$

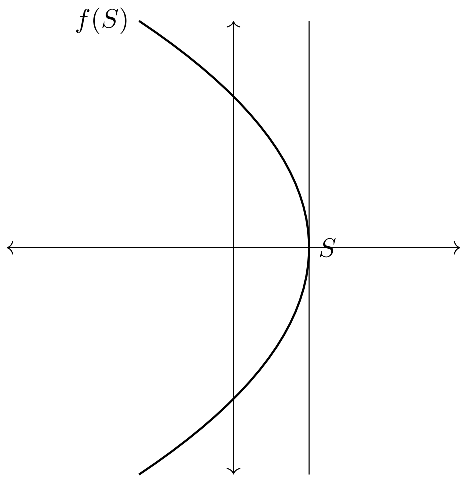
Queremos hallar el conjunto de los cuadrados de los elementos de S, entonces:

$$(1 + ti)^2 = (1 - t^2) + 2ti = x + yi$$

de donde obtenemos:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 1 - t^2 \\
y(t) &= 2t \\
x &= 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Y esto resulta en:



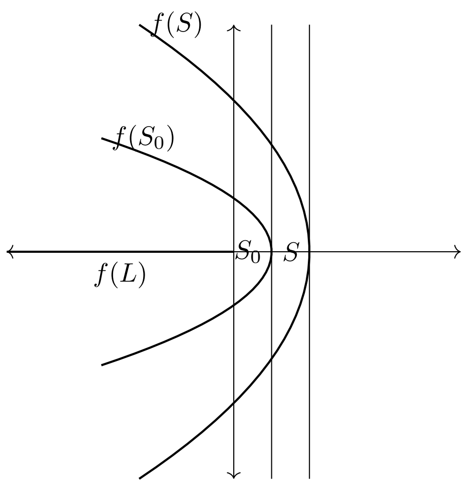
Es fácil ver que para otras rectas verticales cuya parte real es estrictamente positiva, es decir $\{\Re(z) = k > 0 \mid k \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}\}$. Sin embargo, si consideramos:

$$L = \{\Re(z) = 0 \mid z \in \mathbb{C}\}$$

entonces $f(L)$ es:

$$f(L) = \left\{(-t^2, 0) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

es decir, se corresponde con la semirrecta $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$.



Consideremos ahora el semiplano formado por el conjunto de rectas verticales con parte real no negativa $H = \{\Re(z) \geqslant 0\}$. Nos planteamos qué conjunto es $f(H)$. Podemos preguntarnos si $f(H) = \mathbb{C}$, vamos a ver que sí.

$$f(H) = \left\{z^2 \mid \Re(z) \geqslant 0\right\} = \left\{w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in H,\ z^2 = w\right\}$$

Es decir, son los cuadrados de los complejos $z \in H$. Si consideramos $w \notin f(H)$, eso querría decir que si $z^2 = w$ entonces $\Re(z) < 0$. Sin embargo, $(-z)^2 = w$ y $\Re(-z) \geqslant 0$ por tanto, $w \in H$.
Recapitulando, hemos supuesto que existe un $w \in \mathbb{C}$ tal que $w \notin f(H)$ y aún así hemos visto que si pertenece a $\mathbb{C}$. Por tanto $f(H) = \mathbb{C}$

Ejercicio propuesto 4. Describe el subconjunto

$$L = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|z^2 - 1\right| < 1\right\}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|z^2 - 1\right| < 1\right\} &= \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|z^2 - 1\right|^2 < 1\right\} \\
&= \left\{z \in \mathbb{C} \mid (z^2 - 1)(\overline{z}^2 - 1) < 1\right\} \\
&= \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z|^4 - z^2 - \overline{z}^2 < 0\right\} \\
&= \left\{|z|^4 < z^2 + \overline{z}^2\right\} \\
&= \left\{|z|^4 < \Re(z^2)\right\}
\end{aligned}$$

Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ tenemos el conjunto:

$$\left\{\rho^4 < 2\rho^2 \cos^2 2 * \theta\right\}$$

Podemos comprobar que $\rho = 0$ no cumple la condición, por tanto, podemos suponer $\rho > 0$ y dividir por ρ^2:

$$\left\{\rho^2 < 2\cos^2 2 * \theta\right\}$$

Que son los puntos contenidos en una *lemniscata*.

Ejercicio propuesto 5. Describe el subconjunto

$$H = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im\left(\frac{z - z_0}{v}\right) > 0 \right\}$$

con $z_0, v \in \mathbb{C}$

Solución

Ya hemos visto que la expresión de una recta con vector director v y que pasa por el punto z_0 tiene la expresión:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im\left(\frac{z - z_0}{v}\right) = 0 \right\}$$

Por lo que cabría esperar que el conjunto que buscamos tiene alguna relación con la recta, y probablemente sea uno de los dos semiplanos definidos por la misma.
Consideremos $w = \frac{z-z_0}{v} = a + bi$. Entonces podemos reescribir el conjunto H:

$$H = \left\{ z \mid w = \frac{z - z_0}{v} = a + bi,\ b > 0 \right\}$$

Desarrollamos la igualdad del conjunto:

$$\begin{aligned} z - z_0 &= v(a + bi) \\ z &= z_0 + v(a + bi) \\ &= z_0 + av + i \cdot bv \end{aligned}$$

Es decir, que los z de H son los puntos a los que llegamos de desplazarnos una cantidad en la recta $z_0 + av$ (recordemos que v es vector director de la recta) y además, nos movemos en sentido positivo ($b > 0$) en la dirección $i \cdot v$, es decir, el giro de $\pi/2$ en sentido positivo de v.

De esta forma, es claro ver que $H \subseteq \Pi$ donde Π es el semiplano *a la izquierda* del vector director v. Faltaría demostrar que $\Pi \subseteq H$.

1.3. Esfera de Riemann

En ocasiones nos enfrentaremos a ecuaciones que no tienen solución en $\mathbb{C}$, como:

$$w = \frac{1}{z}$$

Para solucionar esto, vamos a **completar** $\mathbb{C}$, y vamos a añadir un punto a $\mathbb{C}$ que es la solución a la ecuación superior. Llamaremos a este punto ∞ y denominamos extensión de $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

El plano complejo extendido se puede visualizar gracias a la proyección estereográfica de la esfera sobre el plano. Vemos que la forma de relacionar $\mathbb{C}$ y $\mathbb{S}^2$ (la esfera unidad) es proyectar cada punto de la superficie de la esfera desde el punto $(0, 0, 1)$ hacia el plano, es decir, si $p = (x, y, z)$, su proyección p' es la intersección del plano con la recta que une p y $(0, 0, 1)$.
Además, notamos que todos los puntos contenidos en el disco unidad son la proyección del hemisferio sur de la esfera. De esta forma, todo $\mathbb{C}$ queda cubierto por la proyección de $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$. Diremos que $\infty \in \mathbb{C}$ es la proyección del punto $(0, 0, 1)$.

Observación. Supongamos conocido un punto $Z = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$. ¿Cómo encontramos $z \in \mathbb{C}$ su proyección en el plano complejo?

Como hemos visto, es el punto de corte de la recta que une Z y $(0,0,1)$ y el plano, entonces:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= Z = \lambda(0,0,1) + (1-\lambda)(x,y,0)\\ x_1 &= (1-\lambda)x\\ x_2 &= (1-\lambda)y\\ x_3 &= \lambda\end{aligned}$$

Parte II

Apéndices

Capítulo 2

Índices

Lista de definiciones

Lista de teoremas

Lista de ejemplos

Lista de ejercicios