LÓGICA MATEMÁTICA

APUNTES DEL CURSO 2019-2020 IMPARTIDO POR MARGARITA OTERO

Rafael Sánchez

Revisión del 12 de septiembre de 2019 a las 02:03.

Índice general

Parte I

Sintaxis y semántica de primer orden

Capítulo 1

Estructuras y lenguajes de primer orden

1.1. Introducción

Definición 1 (Estructura)**.** Una **estructura** (de primer orden) $\mathcal{A}$ consta de un conjunto no vacío A (universo) y un conjunto de funciones, relaciones y elementos del universo.

Puede parecer una definición algo abstracta, así que vamos a ver algunos ejemplos:

Ejemplo 1 (*Estructuras. Ejemplos*)

- $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, 1 \rangle$
- $R = \langle \mathbb{R},\ +,\ -,\ \cdot,\ 0,\ 1,\ \leqslant \rangle$
- $R_* = \langle \mathbb{R},\ +,\ -,\ \cdot,\ 0,\ 1,\ \sin|_{[0,1]},\ \exp \rangle$

Definición 2 (Lenguaje)**.** Un **lenguaje** (de primer orden) consta de:

- Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ un conjunto $\mathcal{F}_n$ de símbolos de funciones n-arias.
- Para cada $m \in \mathbb{N}^*$ un conjunto $\mathcal{R}_m$ de símbolos de relaciones m-arias.
- Un conjunto $\mathcal{C}$ de constantes.

Además de conjuntos de símbolos lógicos, variables $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, cuantificadores $(\exists,\ \forall)$, conectores $(\wedge, \vee, \iff, \implies)$, símbolos de igualdad $=$, y paréntesis $()$. No se suelen especificar en la declaración del lenguaje.

Ejemplo 2 (*Lenguajes. Ejemplos*)

- $L = \{*,\ e\}$
- $L = \{\cdot,\ 1\}$
- $L = \{+,\ 0\}$
- $L = \left\{\cdot,\ ^{-1},\ 1\right\}$

Además, para hablar del comportamiento de los reales vamos a usar el lenguaje:

$$L = \{+,\ -,\ \cdot,\ 0,\ 1,\ \leqslant\}$$

Es importante destacar que cuando escribimos $+$ *en la declaración del lenguaje no nos referimos a la función:* $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *si no a un símbolo que luego interpretamos como tal función en la estructura.*

1.2. L-estructuras

Definición 3 (L-estructura)**.** Dado un lenguaje [2] L, una **L-estructura** $\mathcal{A}$ o una **interpretación de L** consta de:

- un universo $A \neq \varnothing$
- una función n-aria $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ para cada símbolo de función $f \in \mathcal{F}_n$
- una relación m-aria $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$ para cada símbolo de relación $R \in \mathcal{R}_m$
- un elemento $e^{\mathcal{A}} \in A$ para cada constante $c \in \mathcal{C}$.

Notación. En la definición anterior:
$L = \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$ (lenguaje), $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{F}_n$ (símbolos de función), $\mathcal{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \mathcal{R}_m$ (símbolos de relación), $\mathcal{C}$ constantes.
Además, para cada símbolo $s \in L$, $s^{\mathcal{A}}$ es la interpretación de s a $\mathcal{A}$.

Ejemplo 3 (*L-estructura. Ejemplos*)

- $R = \langle \mathbb{R},\ +^R,\ -^R,\ \cdot^R,\ \leqslant^R,\ 0^R,\ 1^R \rangle$ *(interpretación del lenguaje de los reales con el universo* $\mathbb{R}$*).*
- $\mathcal{A} = \langle A,\ +^{\mathcal{A}},\ -^{\mathcal{A}},\ \cdot^{\mathcal{A}},\ \leqslant^{\mathcal{A}},\ 0^{\mathcal{A}},\ 1^{\mathcal{A}} \rangle$.

$$+,\ -,\ \cdot \in \mathcal{F}_2 \implies +^{\mathcal{A}},\ -^{\mathcal{A}},\ \cdot^{\mathcal{A}} : A^2 \to A$$

$$\leqslant \in R_2 \implies \leqslant^{\mathcal{A}} \in A^2; \qquad 0, 1 \in \mathcal{C} \implies 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}} \in A$$

Observación. Podríamos intentar interpretar el lenguaje de los reales del ejemplo 2 con el universo $A = \mathbb{C}$, sin embargo, aunque podemos interpretar $+, -, \cdot, 0$ y 1 de la forma habitual, no existe una interpretación de $\leqslant$ en $\mathbb{C}$.

Ejemplo 4 (*Lenguajes comunes*)

- $L_{\varnothing} = \{\}$. *Es el lenguaje vacío, sigue teniendo símbolos generales. Sirve para expresar propiedades tales como: Existen tres elementos* $(\exists x_1, x_2, x_3)$*.*
- $L_{<} = \{<\}$. *Lenguaje para conjuntos ordenados. Con* $< \in R_2$*.*
- $L_{grupos} = \{+, -, 0\}$ *(aditivo),* $\{\cdot, ^{-1}, 1\}$ *(multiplicativo). Lenguaje para grupos. Con* $+, \cdot \in \mathcal{F}_2$*;* $-, ^{-1} \in \mathcal{F}_1$*;* $0, 1 \in \mathcal{C}$*.*
- $L_{cuerpos} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$. *Lenguaje para cuerpos.*
- $L_{aritmtica} = \{+, \cdot, 0, 1, \leqslant\}$. *Lenguaje para la aritmética. También podemos considerar añadir otro símbolo de función* S*, cuya interpretación natural sería la función sucesor.*
- $L_{conj} = \{\in\}$. *Lenguaje para conjuntos. Todo se puede escribir con este lenguaje.*

1.2.1. Subestructuras

Definición 4 (Subestructura de una L-estructura)**.** Sean $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ L-estructuras (con universos B y A respectivamente), decimos que $\mathcal{A}$ es una subestructura de $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$) si:

- $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{B}}\big|_{A^n}$ para cada $f \in \mathcal{F}_n$.
- $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}} \cap A^m$ para cada $R \in R_m$.
- $C^{\mathcal{A}} = C^{\mathcal{B}}$
- $A \subseteq B$

Ejemplo 5 (*Subestructuras. Ejemplos*)

Sean los lenguajes: $L_1 = \{+, 0\}$, $L_2 = \{+, -, 0\}$. *Vamos a considerar las* L_1*-estructuras:*

$$W = \langle \mathbb{N}, +^W, 0^W \rangle; \ Z = \langle \mathbb{Z}, +^Z, 0^Z \rangle$$

Donde es fácil ver que se cumplen las condiciones de subestructura y podemos afirmar que $W \subseteq Z$*. Sin* *embargo, si consideramos las L_2-estructuras:*

$$W' = \langle \mathbb{N}, +^{W'}, -^{W'}, 0 \rangle; \ Z' = \langle \mathbb{Z}, +^{Z'}, -^{Z'}, 0 \rangle$$

Vamos a dar una definición de $-^{W'}$ ya que el opuesto no está bien definido en $\mathbb{N}$. $-^{W'} : n \to 0$. Con esta interpretación es fácil ver que no se cumple que $-^{W'} = f^{Z'}\Big|_{\mathbb{N}}$ ya que:

$$-^{W'}(2) = 0 \text{ y sin embargo } -^{Z'}(2) = -2$$

Observación. Consideremos el lenguaje $L_< = \{<\}$ de conjuntos ordenados, y las L-estructuras $\mathcal{A} = \langle A, < \rangle$, $\mathcal{B} = \langle B, < \rangle$ (que sólo tienen una relación). Es fácil ver que:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff A \subseteq B \text{ (suponemos } <^{\mathcal{A}} = <^{\mathcal{B}} \cap A^2)$$

1.3. Homomorfismos

Definición 5 (Homomorfismo y monomorfismo)**.** Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ L-estructuras y $\varphi : A \to B$ una función, decimos que $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un **homomorfismo** de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ si:

1. $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$ se cumple: $\varphi(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$
2. $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$ se cumple: $(a_1, \ldots, a_m) \in R^{\mathcal{A}} \implies (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m) \in \mathcal{B})$
3. $\forall c \in \mathcal{C}$ se cumple: $\varphi(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$

Además, si la segunda condición resulta ser necesaria y suficiente, φ es un **monomorfismo**.

Ejemplo 6 (*Ejemplo de monomorfismo*)

Sean $\mathcal{A} = \langle A, +, 0 \rangle$, $\mathcal{B} = \langle B, +, 0 \rangle$ y $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$; $\varphi(0) = 0$. Es fácil ver que φ es un homomorfismo. Además, la única relación es la igualdad (que existe aunque no se especifique) y como $\varphi(a) = \varphi(b) \iff a = b$ estamos ante un monomorfismo.

Parte II

Apéndices

Capítulo 2

Índices

Lista de definiciones

Lista de teoremas

Lista de ejemplos

Lista de ejercicios