LÓGICA MATEMÁTICA

APUNTES DEL CURSO 2019-2020 IMPARTIDO POR MARGARITA OTERO

Rafael Sánchez

Revisión del 18 de diciembre de 2019 a las 06:44.

Índice general

Parte I

Sintaxis y semántica de primer orden

Capítulo 1

Estructuras y lenguajes de primer orden

1.1. Introducción

Definición 1 (Estructura)**.** Una **estructura** (de primer orden) $\mathcal{A}$ consta de un conjunto no vacío A (universo) y un conjunto de funciones, relaciones y elementos del universo.

Puede parecer una definición algo abstracta, así que vamos a ver algunos ejemplos:

Ejemplo 1 (*Estructuras. Ejemplos*)

- $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, 1\rangle$
- $R = \langle \mathbb{R},\ +,\ -,\ \cdot,\ 0,\ 1,\ \leqslant\rangle$
- $R_* = \langle \mathbb{R},\ +,\ -,\ \cdot,\ 0,\ 1,\ \sin|_{[0,1]},\ \exp\rangle$

Definición 2 (Lenguaje)**.** Un **lenguaje** (de primer orden) consta de:

- Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ un conjunto $\mathcal{F}_n$ de símbolos de funciones n-arias.
- Para cada $m \in \mathbb{N}^*$ un conjunto $\mathcal{R}_m$ de símbolos de relaciones m-arias.
- Un conjunto $\mathcal{C}$ de constantes.

Además de conjuntos de símbolos lógicos, variables $V = \{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, cuantificadores $(\exists,\ \forall)$, conectores $(\wedge, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow)$, símbolos de igualdad $=$, y paréntesis $()$. No se suelen especificar en la declaración del lenguaje.

Ejemplo 2 (*Lenguajes. Ejemplos*)

- $L = \{*,\ e\}$
- $L = \{\cdot,\ 1\}$
- $L = \{+,\ 0\}$
- $L = \left\{\cdot,\ ^{-1},\ 1\right\}$

Además, para hablar del comportamiento de los reales vamos a usar el lenguaje:

$$L = \{+,\ -,\ \cdot,\ 0,\ 1,\ \leqslant\}$$

Es importante destacar que cuando escribimos $+$ en la declaración del lenguaje no nos referimos a la función: $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si no a un símbolo que luego interpretamos como tal función en la estructura.

1.2. L-estructuras

Definición 3 (L-estructura)**.** Dado un lenguaje [2] L, una **L-estructura** $\mathcal{A}$ o una **interpretación de L** consta de:

- un universo $A \neq \emptyset$
- una función n-aria $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ para cada símbolo de función $f \in \mathcal{F}_n$
- una relación m-aria $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$ para cada símbolo de relación $R \in \mathcal{R}_m$
- un elemento $e^{\mathcal{A}} \in A$ para cada constante $c \in \mathcal{C}$.

Notación. En la definición anterior:
$L = \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$ (lenguaje), $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{F}_n$ (símbolos de función), $\mathcal{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \mathcal{R}_m$ (símbolos de relación), $\mathcal{C}$ constantes.
Además, para cada símbolo $s \in L$, $s^{\mathcal{A}}$ es la interpretación de s a $\mathcal{A}$.

Ejemplo 3 (*L-estructura. Ejemplos*)

- $R = \langle \mathbb{R},\ +^R,\ -^R,\ \cdot^R,\ \leqslant^R,\ 0^R,\ 1^R \rangle$ *(interpretación del lenguaje de los reales con el universo $\mathbb{R}$).*
- $\mathcal{A} = \langle A,\ +^{\mathcal{A}},\ -^{\mathcal{A}},\ \cdot^{\mathcal{A}},\ \leqslant^{\mathcal{A}},\ 0^{\mathcal{A}},\ 1^{\mathcal{A}} \rangle$.

$$+,\ -,\ \cdot \in \mathcal{F}_2 \implies +^{\mathcal{A}},\ -^{\mathcal{A}},\ \cdot^{\mathcal{A}} : A^2 \to A$$

$$\leqslant \in R_2 \implies \leqslant^{\mathcal{A}} \in A^2; \qquad 0, 1 \in \mathcal{C} \implies 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}} \in A$$

Observación. Podríamos intentar interpretar el lenguaje de los reales del ejemplo 2 con el universo $A = \mathbb{C}$, sin embargo, aunque podemos interpretar $+, -, \cdot, 0$ y 1 de la forma habitual, no existe una interpretación de $\leqslant$ en $\mathbb{C}$.

Ejemplo 4 (*Lenguajes comunes*)

- $L_{\emptyset} = \{\}$. *Es el lenguaje vacío, sigue teniendo símbolos generales. Sirve para expresar propiedades tales como: Existen tres elementos* $(\exists x_1, x_2, x_3)$.
- $L_{<} = \{<\}$. *Lenguaje para conjuntos ordenados. Con* $< \in R_2$.
- $L_{grupos} = \{+, -, 0\}$ *(aditivo),* $\{\cdot, ^{-1}, 1\}$ *(multiplicativo). Lenguaje para grupos. Con* $+, \cdot \in \mathcal{F}_2$; $-, ^{-1} \in \mathcal{F}_1$; $0, 1 \in \mathcal{C}$.
- $L_{cuerpos} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$. *Lenguaje para cuerpos.*
- $L_{aritmtica} = \{+, \cdot, 0, 1, \leqslant\}$. *Lenguaje para la aritmética. También podemos considerar añadir otro símbolo de función S, cuya interpretación natural sería la función sucesor.*
- $L_{conj} = \{\in\}$. *Lenguaje para conjuntos. Todo se puede escribir con este lenguaje.*

1.2.1. Subestructuras

Definición 4 (Subestructura de una L-estructura)**.** Sean $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ L-estructuras (con universos B y A respectivamente), decimos que $\mathcal{A}$ es una subestructura de $\mathcal{B}$ $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$ si:

- $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{B}}\big|_{A^n}$ para cada $f \in \mathcal{F}_n$.
- $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}} \cap A^m$ para cada $R \in R_m$.
- $C^{\mathcal{A}} = C^{\mathcal{B}}$
- $A \subseteq B$

Ejemplo 5 (*Subestructuras. Ejemplos*)

Sean los lenguajes: $L_1 = \{+, 0\}$, $L_2 = \{+, -, 0\}$. *Vamos a considerar las L_1-estructuras:*

$$W = \langle \mathbb{N}, +^W, 0^W \rangle; \ Z = \langle \mathbb{Z}, +^Z, 0^Z \rangle$$

Donde es fácil ver que se cumplen las condiciones de subestructura y podemos afirmar que $W \subseteq Z$. *Sin* *embargo, si consideramos las L_2-estructuras:*

$$W' = \langle \mathbb{N}, +^{W'}, -^{W'}, 0\rangle; \; Z' = \langle \mathbb{Z}, +^{Z'}, -^{Z'}, 0\rangle$$

Vamos a dar una definición de $-^{W'}$ ya que el opuesto no está bien definido en $\mathbb{N}$. $-^{W'} : n \to 0$. Con esta interpretación es fácil ver que no se cumple que $-^{W'} = f^{Z'}\Big|_{\mathbb{N}}$ ya que:

$$-^{W'}(2) = 0 \text{ y sin embargo } -^{Z'}(2) = -2$$

Observación. Consideremos el lenguaje $L_{<} = \{<\}$ de conjuntos ordenados, y las L-estructuras $\mathcal{A} = \langle A, <\rangle$, $\mathcal{B} = \langle B, <\rangle$ (que sólo tienen una relación). Es fácil ver que:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff A \subseteq B \text{ (suponemos } <^{\mathcal{A}} = <^{\mathcal{B}} \cap A^2)$$

1.3. Homomorfismos

Definición 5 (Homomorfismo y monomorfismo)**.** Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ L-estructuras y $\varphi : A \to B$ una función, decimos que $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un **homomorfismo** de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ si:

1. $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ se cumple: $\varphi(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$
2. $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ se cumple: $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}} \implies (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m) \in \mathcal{B})$
3. $\forall c \in \mathcal{C}$ se cumple: $\varphi(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$

Además, si la segunda condición resulta ser necesaria y suficiente, φ es un **monomorfismo**.

Ejemplo 6 (*Ejemplo de monomorfismo*)

Sean $\mathcal{A} = \langle A, +, 0\rangle$, $\mathcal{B} = \langle B, +, 0\rangle$ y $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$; $\varphi(0) = 0$. Es fácil ver que φ es un homomorfismo. Además, la única relación es la igualdad (que existe aunque no se especifique) y como $\varphi(a) = \varphi(b) \iff a = b$ estamos ante un monomorfismo.

1.4. Lenguaje asociado a una estructura

En ocasiones vamos a querer considerar lenguajes que contengan elementos interpretados de una estructura.

Definición 6 (Lenguaje asociado a una estructura. Extensión de un lenguaje)**.** Sea L un lenguaje, $\mathcal{A}$ una L-estructura, decimos que $L_A = L \cup \{c_a\}_{a \in A}$ es el **lenguaje asociado** a la **estructura** $\mathcal{A}$.

Diremos que L_A es una **extensión** de L. En general, L' es una **extensión** de L (aunque no indiquemos a que estructura está asociado).

Ejemplo 7 (*Ejemplo de extensión de un lenguaje*)

Sea el lenguaje $L = \{\leqslant\}$ y $W = \langle \mathbb{N}, \leqslant\rangle$ una L-estructura, $L_{\mathbb{N}} = \left\{\leqslant, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right\} = \{\leqslant, 0, 1, 2, \dots\}$ es una extensión de L.

Definición 7 (Expansión de una estructura)**.** Sea $\mathcal{A}$ una L-estructura, y $\mathcal{A}'$ una L'-estructura, decimos que $\mathcal{A}'$ es una expansión de $\mathcal{A}$ (o análogamente, $\mathcal{A}$ es un reducto de $\mathcal{A}'$) si:

1. $A' = A$
2. $s^{\mathcal{A}'} = s^{A} \forall s \in L$

Ejemplo 8 (*Ejemplo de expansión de una estructura*)

Se consideran las estructuras: $\mathcal{R}_1 = \langle \mathbb{R}, +\rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \langle \mathbb{R}, +, \cdot\rangle$. Entonces $\mathcal{R}_2$ es una expansión de $\mathcal{R}_1$, o análogamente $\mathcal{R}_1$ es un reducto de $\mathcal{R}_2$.

Observación. Sea L un lenguaje con constantes, $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}}, \dots, R^{\mathcal{A}}, \dots, c^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$ una L-estructura y L_A una extensión de L asociada a $\mathcal{A}$. Podemos considerar la L_A-estructura $\mathcal{A}_A$ como la expansión de $\mathcal{A}$ al lenguaje L_A:

$$\mathcal{A}_A = \langle A, \dots, f^{\mathcal{A}_A}, \dots, R^{\mathcal{A}_A}, c^{\mathcal{A}_A}, \{c_a\}_{a \in A}^{\mathcal{A}_A} \rangle$$

Con la interpretación $f^{\mathcal{A}_A} = f^{\mathcal{A}}$, $R^{\mathcal{A}_A} = R^{\mathcal{A}}$, $c_a^{\mathcal{A}_A} = a$. Donde dos constantes distintas (sintácticamente) pueden ser interpretadas de la misma forma. Veamos un ejemplo:

Sea $L = \{\leqslant, 0\}$ un lenguaje, $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leqslant, 0^{\mathcal{N}} \rangle$ una L-estructura y $L_{\mathbb{N}} = \{\leqslant, 0\} \cup \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una extensión de L, entonces:

$$\mathcal{N}_{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, \leqslant, 0^{\mathcal{N}_{\mathbb{N}}}, c_0^{\mathcal{N}_{\mathbb{N}}}, c_1^{\mathcal{N}_{\mathbb{N}}}, \dots \rangle$$

y en $\mathcal{N}_{\mathbb{N}}$ las constantes: $0^{\mathcal{N}_{\mathbb{N}}}$ y $c_0^{\mathcal{N}_{\mathbb{N}}}$ tienen la misma interpretación, el valor $0 \in \mathbb{N}$, aún siendo constantes distintas.

Capítulo 2

Términos y fórmulas de un lenguaje

2.1. Introducción

Con los elementos de un lenguaje podemos definir sucesiones finitas de símbolos del lenguaje. Pueden ser:

- **Términos**. Que pueden ser *fuonciones* o *elementos*.
- **Fórmulas**. Que pueden ser *propiedades* o *subconjuntos* de un universo.

2.2. Términos

Definición 8 (Términos de un lenguaje)**.** Sea L un lenguaje, y $M(L)$ el conjunto de palabras (sucesiones finitas de elementos de L). El conjunto de **términos** de L, $\text{Ter}(L)$, es el menor subconjunto de $M(L)$ que contiene a las constantes, variables y es cerrado para cada función n-aria $f \in \mathcal{F}_n$ con $n \in \mathbb{N}$, es decir:

$$\text{si } t_1, \ldots, t_n \in \text{Ter}(L) \implies ft_0t_1 \ldots t_n \in \text{Ter}(L)$$

Ejemplo 9 (***Ejemplos de términos***)

- $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$.
  Son términos:
  - $+v_0v_1$
  - 0
  - $+ + v_0v_1 + 1\ v_2$
- $L = \{\cdot, 1\}$.
  Son términos:
  - v_0
  - 1
  - $\cdot v_0v_1$
  - $\cdot \cdot v_0v_1 1$

Observación. Si consideramos el lenguaje $L = \{+, -, 0, 1\}$, vemos que también pertenecen al conjunto de términos los siguientes:

$$0, 1, +1\ 1, + + 1\ 1\ 1, + + 1\ 1 + 1\ 1, \ldots$$

Y por tanto vemos que los enteros son *términos abreviados* del lenguaje. ($2 \equiv +1\ 1$).

Observación (Notación)**.** Durante el curso usaremos:

- x, y, z para referirnos a variables $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.
- a, b, c para referirnos a elementos del universo de una estructura.

- $t(x_1, \dots, x_n)$ para referirnos a un término $t \in \mathrm{Ter}(L)$ donde aparecen algunas variables $x_1, \dots, x_n$. Esto es una abreviatura, formalmente $t \in M(L)$ pero $t(x_1, \dots, x_n) \notin M(L)$

Definición 9 (Función asociada a un término)**.** Sea $t \in \mathrm{Ter}(L)$, y $\mathcal{A}$ una L-estructura, la **función asociada** al término t es $t^{\mathcal{A}}$, donde distinguimos ciertos casos:
1. Si t es $t(x_1, \dots, x_n)$, entonces $t^{\mathcal{A}} : A^n \to A;\ (a_1, \dots, a_n) \mapsto t^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)$.
2. Si t es x_i, entonces $t^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = a_i$.
3. Si t es c, entonces $t^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = c^{\mathcal{A}}$.
4. Si t es $ft_1 \dots t_m$, entonces $t^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n))$.

Observación. Se $t \in \mathrm{Ter}(L)$ no tiene variables, entonces $t^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ es una función constante para cualquier n, es decir:

$$t = t(x_1, x_2) = \cdots = t(x_1, \dots, x_n)$$

Ejemplo 10 (*Ejemplo de funciones asociadas a términos*)

- *Sea* $t : 1 + (1 + 1) \in \mathrm{Ter}(L)$, *y* $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$, *si consideramos* t *como* $t(x_1, \dots, x_n)$, *entonces:*

$$t^{\mathcal{Q}} : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q};\ (a, b, c) \mapsto 3.$$

- *Sea* $t : 1 + x \in \mathrm{Ter}(L)$, *y* $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$, *si consideramos* t *como* $t(x)$, *entonces:*

$$t^{\mathcal{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q};\ 2 \mapsto 3;\ a \mapsto 1 + a$$

Y además, si consideramos que t *es* $t(x, y)$, *entonces:*

$$t^{\mathcal{Q}} : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q};\ (2, 5) \mapsto 3;\ (a, b) \mapsto 1 + a$$

- *Sea el lenguaje* $L_{\mathbb{R}} = \{+, -, \cdot, 0, 1\} \cup \{c_r\}_{r \in \mathbb{R}}$, *y sea* $t : (x \cdot x) + (c_2 \cdot y) + (x \cdot y)$ *(recordamos que* c_2 *se interpreta en* $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$ *como* $2 \in \mathbb{R}$*), entonces la función asociada a* $t(x, y)$ *en la estructura* $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$ *es:*

$$t^{\mathcal{R}_{\mathbb{R}}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (a, b) \mapsto (a \cdot a) + (c_2^{\mathcal{R}_{\mathbb{R}}} \cdot b) + (a \cdot b) = a^2 + 2b + ab$$

2.2.1. Sustitución

Definición 10 (Término sustituido)**.** Sea el término $t : t(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Ter}(L)$. Y sean m términos en los que pueden aparecer las variables $x_1, \dots, x_n$, $s_1 : s_1(x_1, \dots, x_n), \dots, s_m : s_m(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Ter}(L)$ con $m \leqslant n$.

Denotamos por $t({}^{s_1}/_{x_1}, \dots, {}^{s_m}/_{x_m})$ al **término sustituido**.

Ejemplo 11 (*Sustitución en un término*)

Sean los términos $t : x + y$, $s : x + 1$, *el término sustituido* $t({}^{s}/_{x})$ *es:*

$$t({}^{s}/_{x}) = (x + 1) + y$$

Proposición 1 (Sustitución)**.** Sean $x, y_1, \dots, y_m \in V$ variables distintas, y $t : t(x, y_1, \dots, y_m)$, $s : s(x, y_1, \dots, y_m) \in \mathrm{Ter}(L)$ términos, entonces $\forall (a, \mathbf{b}) \in A^{m+1}$ se tiene que:

$$\text{la función asociada a } t({}^{s}/_{x}),\ (t({}^{s}/_{x}))^{\mathcal{A}} \text{ evaluada en } (a, \mathbf{b}) = t^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a, \mathbf{b}), \mathbf{b})$$

Demostración. Para demostrarlo vamos a ver las equivalencias en una tabla:

t	$t^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a,\mathbf{b}),\mathbf{b})$	$t(s/x)$	$t(s/x)^{\mathcal{A}}(a,\mathbf{b})$
x	$s^{\mathcal{A}}(a,\mathbf{b})$	s	$s^{\mathcal{A}}(a,\mathbf{b})$
y_i	b_i	y_i	b_i
c	$c^{\mathcal{A}}$	c	$c^{\mathcal{A}}$
$ft_1 \dots t_n$	$(\star)$	$(\star\star)$	$(\star\star\star)$

$(\star)$

$$f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a,\mathbf{b}),\mathbf{b})),\dots,t_n^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a,\mathbf{b}),\mathbf{b}))$$

$(\star\star)$

$$f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a,\mathbf{b}),\mathbf{b})),\dots,t_n^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a,\mathbf{b}),\mathbf{b}))$$

$(\star\star\star)$

$$f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a,\mathbf{b}),\mathbf{b})),\dots,t_n^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a,\mathbf{b}),\mathbf{b}))$$

y como podemos observar, en todos las filas coinciden la segunda y la cuarta columna, con lo que hemos demostrado que son equivalentes. ♢

2.2.2. Estructura generada por un subgrupo

Sea $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, ^{-}1, 1\rangle$ un grupo, $L = \{\cdot, ^{-}1, 1\}$ un lenguaje y $S \subseteq G$ un subgrupo. Consideramos los $s_1, \dots, s_n$ elementos del subgrupo S, podemos expresar la estructura asociada como:

$$s_1^{m_1}, \dots, s_n^{m_n} = (x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n})^{\mathcal{G}}(s_1, \dots, s_n)$$

Donde definimos $x_i^{m_i}$ como: $x_i \cdot (x_i \cdot \cdots (x_i \cdot x_i))) \dots))$ (el producto de x_i m_i veces).

Observación. Va a ser util definir ciertas abreviaturas para la expresión de los términos:

- $^{-1}t_i$ se abrevia por t_i^{-1}.
- $\cdot t_1 t_2$ se abrevia por $t_1 \cdot t_2$.
- x_i^0 se abrevia por 1.

Una vez establecidas las abreviaturas, podemos definir la estructura generada por un subgrupo.

Definición 11 (Estructura generada por un subgrupo)**.** Sea $\mathcal{G}$ un grupo (como el definido anteriormente), y $S \subseteq G$, la **estructura generada** por el **subgrupo** S es:

$$\langle S\rangle = \left\{t^{\mathcal{G}}(s_1, \dots, s_n) \mid t \in \mathrm{Ter}(L),\ n \in \mathbb{N},\ s_i \in S\right\}$$

De esta noción surge la definición de subestructura generada por un conjunto.

Proposición 2 (Subestructura generada por un conjunto)**.** Sea L un lenguaje, $\mathcal{A}$ una L-estructura, y $X \subseteq A$ un subconjunto. Si $X \neq \varnothing$ o en L hay al menos una constante, el conjunto:

$$\langle X\rangle_{\mathcal{A}} = \left\{t^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \mid t \in \mathrm{Ter}(L); a_1, \dots, a_n \in X \text{ con } n \in \mathbb{N}\right\}$$

es la mínima subestructura de $\mathcal{A}$ que contiene a X.

Demostración. Completar. ♢

2.3. Fórmulas

Sea L un lenguaje, $L = \{f, \ldots, R, \ldots, c, \ldots\}$ además del conjunto de variables $V = \{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y conectores lógicos: $=, \neg, \rightarrow, \forall$. En la sección anterior caracterizamos el conjunto de *términos* del lenguaje. Ahora vamos a caracterizar las *fórmulas*.

Definición 12 (Fórmulas de un lenguaje)**.** Sea L un lenguaje. El conjunto de L-fórmulas, $\mathrm{For}(L)$, es el mínimo subconjunto de $M(L)$ (palabras de L) que contiene a *fórmulas atómicas* y es cerrado por $\neg, \rightarrow$ y $\forall v_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Las *fórmulas atómicas* pueden ser de dos tipos:
- $= t_1 t_2$ con $t_1, t_2 \in \mathrm{Ter}(L)$.
- $R t_1 \ldots t_m$, para todo $t_i \in \mathrm{Ter}(L)$ y $R \in \mathcal{R}_m$.

Observación. Sean $F, G \in \mathrm{For}(L)$, entonces como $\mathrm{For}(L)$ es cerrado para los operadores lógicos:

$$\neg F, \rightarrow FG\ (F \rightarrow G),\ \forall v_i F \text{ también son fórmulas de L}$$

El resto de conectores lógicos los usamos como abreviaturas de $\neg, \rightarrow, \forall$. Por ejemplo:

- $F \vee G$ como abreviatura de $\neg F \rightarrow G$.
- $\exists v_i$ como abreviatura de $\neg \forall v_i \neq F$.

Ejemplo 12 (*Ejemplos de fórmulas*)

Sea $L = \{+, -, \cdot, 0, 1, \leqslant\}$ *y consideramos los términos abreviados de L:* $t_1 : 3x_1 + 2$, $t_2 : x_1 - x_3$, $t_3 : y^2 - 2x + 1$.
- $3x_1 + 2 = x_1 - x_3$, *es una fórmula atómica abreviada* ($= t_1 t_2$).
- $3x_1 + 2 \leqslant x_1 - x_3$, *es una fórmula atómica abreviada* ($\leqslant t_1 t_2$).
- $\forall x \exists y\ x \leqslant y$, *es una fórmula abreviada.*
- $\exists y\ x \leqslant y$, *es una fórmula abreviada* ($\neg \forall v_0 \neg \leqslant v_0 v_1$).
- $\exists y\ y^2 - 2x + 1 = 0$.

Definición 13 (Subfórmula)**.** Una **subfórmula** G de un fórmula $F \in \mathrm{For}(L)$ es una fórmula que aparece en F.

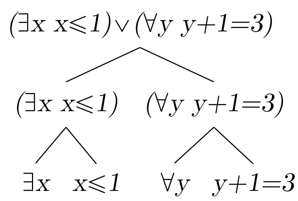
Ejemplo 13 (*Ejemplos de subfórmulas*)

Sea $F \in \mathrm{For}(L), F : \forall x\ \exists y\ x \leqslant y$, *las subfórmulas que aparecen en* F *son:*

$$\forall x\ \exists y\ x \leqslant y,\ \exists y\ x \leqslant y,\ x \leqslant y$$

Ejemplo 14 (*Árbol de decisión de una fórmula*)

Sea $F \in \mathrm{For}(L)$, $F : (\exists x\ x \leqslant 1) \vee (\forall y\ y + 1 = 3)$. *Podemos representar su árbol de decisión, cuyos nodos son las subfórmulas de* F.



2.3.1. Variables libres y ligadas

Sea $F \in \mathrm{For}(L)$ una fórmula en la que aparecen algunas variables, éstas pueden aparecer asociadas, libres o ligadas. Antes de dar una definición veamos un ejemplo.

Ejemplo 15 (*Ejemplos de tipos de variables*)

- *La fórmula* $\forall x\ 0 \leqslant x$ *expresa* 0 *es mínimo. En esta fórmula,* x *aparece dos veces, la primera está asociada al operador, y la segunda es una variable ligada*
- *Consideramos la fórmula:* $(\forall x\ 0 \leqslant x) \vee x = 3$. *En ella* x *aparece tres veces, la primera está asociada al operador, y la segunda es una variable ligada y la última es una aparición libre.*

Definición 14 (Aparición de una variable. Tipos)**.** Sea L un lenguaje, $F \in \mathrm{For}(L)$ una fórmula y $x \in V$ una variable.

1. Decimos que x **aparece** en F si x es algunos de los símbolos de F.
2. Una aparición de x en F está **asociada** a $\forall$ si la aparición va precedida de $\forall$.
3. Una aparición de x en F es **ligada** si x aparece en una subfórmula G de F tal que $\forall xG$ es una subfórmula de F.
4. Una aparición de x en F es **libre** si no está *asociada* a $\forall$ y no es *ligada*.

Observación (Notación)**.** Sea $F \in \mathrm{For}(L)$, escribimos $F(x_1, \ldots, x_n)$ si las variables *libres* de F están en $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Por ejemplo:

- $F(x) : \exists y\ x = 2y$, expresa *x es par.*
- Podemos incluso sustituir variables libres por otros términos, si s es $x + 1$ entonces:

$$F({}^{s}/_{x}) : \exists y\ x + 1 = 2y, \text{ que expresa } \textit{x+1 es par}$$

Sin embargo, hay sustituciones que aunque sintácticamente podemos hacerlas, no tienen sentido semánticamente, por ejemplo:

$$F({}^{y}/_{x}) : \exists y\ y = 2y, \text{ que no expresa } \textit{y es par}$$

Definición 15 (Variable sustituible)**.** Sea L un lenguaje, $F \in \mathrm{For}(L)$, $x \in V$, $s \in \mathrm{Ter}(L)$.

1. x es **sustituible** por s en F si no hay una aparición libre de x en una subfórmula de F de la forma $\forall yG$ donde y es una variable de s.
2. Si x es *sustituible* por s en F, $F({}^{s}/_{x})$ o $F[{}^{s}/_{x}]$ denota la fórmula obtenida de F sustiyendo *simultanemante* las apariciones *libres* de x por s.

Ejemplo 16 (*Ejemplos de sustitución en fórmulas*)

- *Sea* $F : \forall y\ x = z$, $x \in V$ *y* $s : x + 1 \in \mathrm{Ter}(L)$.

$$F[{}^{s}/_{x}] : \forall y\ x + 1 = z$$

- *Sea* $F : (\exists x\ x = z) \vee (x + y = 1)$, $x \in V$ *y* $s : y + 1 \in \mathrm{Ter}(L)$.

$$F[{}^{y+1}/_{x}] : (\exists x\ x = z) \vee (y + 1 + y = 1)$$

Observación. Si $s \in \mathrm{Ter}(L)$ no tiene variables, entonces se puede sustituir en cualquier variable en cualquier fórmula.

Definición 16 (Cierre universal)**.** Sea $F \in \mathrm{For}(L)$, un **cierre universal** de F es una fórmula obtenida precediendo a F con $\forall x_1 \ldots \forall x_n$ si F es $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Ejemplo 17 (*Ejemplo de cierre universal*)

Sea $F : x \leqslant 2$, *cierres universales de* F *pueden ser:* $\forall x\ x \leqslant 2$, $\forall x \forall y \forall z\ x \leqslant 2$.

Definición 17 (Enunciado)**.** Una fórmula se llama **enunciado** (o fórmula cerrada) si no tiene variables libres.

Observación. Los cierres universales de fórmulas son enunciados.

Definición 18 (Fórmula existencial)**.** Una fórmula abreviada es **existencial** si es de la forma $\exists x_1 \ldots \exists x_n F$ con F sin cuantificadores.

Ejemplo 18 (*Ejemplo de fórmula existencial*)

Una fórmula existencial puede tener variables libres. Por ejemplo:

$$F(z) : \exists x_1 \exists x_2 \ (x_1 = x_2 \vee x_1 + 3 = z)$$

Capítulo 3

Relación de satisfacción.

En esta sección vamos a hablar de la satisfacibilidad de fórmulas en distintas estructuras. Como ejemplo introductorio, sea $L = \{\leqslant\}$ un lenguaje, $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$, $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ L-estructuras y $E : \forall x \ 0 \leqslant x$ una L-fórmula.
Vemos que se cumple (formalmente, se *satisface*) en $\mathcal{N}$ pero no en $\mathcal{Z}$, ya que $-1 \in \mathbb{Z}$ no satisface E en $\mathcal{Z}$.

3.1. Satisfacibilidad

Definición 19 (Satisfacibilidad de una fórmula)**.** Sea L un lenguaje, $\mathcal{A}$ una L-estructura, $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{For}(L)$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ y $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Decimos que a **satisface** F en $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \vDash F(\mathbf{a})$), o $\mathcal{A}$ satisface F cuando a la variable $\mathbf{x}$ se le asigna el valor $\mathbf{a}$, o $F(\mathbf{a})$ se satisface en $\mathcal{A}$ si:

- Si F es $Rt_1 \ldots t_l$ y $(t_1^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}), \ldots, t_l^{\mathcal{A}}(\mathbf{a})) \in \mathcal{R}^{\mathcal{A}}$.
- Si F es $\neg G$ y $\mathcal{A} \nvDash G(\mathbf{a})$.
- Si F es $G \to H$ y si $\mathcal{A} \vDash G(\mathbf{a})$ entonces $\mathcal{A} \vDash H(\mathbf{a})$.
- Si F es $\forall v G$ con $v \neq x_i$, $G(v, x_2, \ldots, x_n)$ y $\forall d \in A$ se tiene que: $\mathcal{A} \vDash G(d, \mathbf{a})$, es decir $\forall d \in A$, $\mathcal{A} \vDash G(d, a_2, \ldots, a_n)$.

Ejemplo 19 (***Ejemplo de relación de satisfacción***)

Sea $L = \{+, -, \cdot, 0, 1, <\}$ *y* $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, < \rangle$. *Sea* $F : \exists x (x < 2 \wedge 4 < x^2)$ *una fórmula abreviada, ¿existe* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tales que* $\mathcal{R} \vDash F(a, b)$*?*

F sin abreviar sería:

$$F : \neg \forall x \ (x < 2 \to \neg 4 < x^2)$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} \vDash F(a, b) &\iff \mathcal{R} \nvDash \forall x (x < 2 \to \neg 4 < x^2)(a, b) \\
&\iff \exists d \in \mathbb{R},\ \mathcal{R} \nvDash \forall x (x < 2 \to \neg 4 < x^2)(d, b) \\
&\iff \exists d \in \mathbb{R},\ \mathcal{R} \vDash (x < 2)(d, b) \ y \ \mathcal{R} \nvDash (\neg 4 < x^2)(d, b) \\
&\iff \exists d \in \mathbb{R},\ d < 2 \ y \ \mathcal{R} \vDash (4 < x^2)(d, b) \\
&\iff \exists d \in \mathbb{R},\ d < 2 \ y \ 4 < d^2; \ \textit{se satisface tomando } d = -3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Con lo que concluimos que: $\mathcal{R} \vDash F(-3, b)$.

Proposición 3 ($\vDash$ solo depende de las variables libres)**.** Sea L un lenguaje, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, con $x_i, y_i \in V$ $x_i \neq y_i$. Sean $F \in \mathrm{For}(L)$, $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $\mathcal{A}$ una L-estructura; entonces para todo $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$:

$$\mathcal{A} \vDash F(\mathbf{a}) \iff \text{existe } \mathbf{b} \in A^m : \mathcal{A} \vDash F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \iff \forall \mathbf{b} \in A^m \mathcal{A} \vDash F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Demostración. A completar. ♢

Definición 20 (Satisfacibilidad de un enunciado)**.** Sea $E \in \text{For}(L)$ un enunciado (sin variables libres), $\mathcal{A}$ una L-estructura. Decimos que $\mathcal{A}$ **satisface** E, o E es verdadero en $\mathcal{A}$, o E se satisface en $\mathcal{A}$ si al considerar E como $E(y)$ se tiene que:

$$\mathcal{A} \models E(b) \text{ para todo (algún) } b \in A$$

Lo escribimos como $\mathcal{A} \models E$

Observación. En la definición hablamos de que el enunciado se satisfaga para algún $b \in A$ o todo $b \in A$. Esto es equivalente ya que siendo E un enunciado:

$$\exists b \in A,\ \mathcal{A} \models E(b) \iff \forall b \in A,\ \mathcal{A} \models E(b) \text{ por la proposición 3}$$

3.1.1. Validez de fórmulas

Definición 21 (Fórmula válida)**.** Sea L un lenguaje:
1. Sea F un enunciado de L, decimos que F es una **fórmula válida** si $\mathcal{A} \models F$ para toda L-estructura $\mathcal{A}$.
2. Sea $G \in \text{For}(L)$, G es una fórmula válida si G es $G(x_1, \dots, x_n)$ y $\forall x_1 \dots x_n G$ es un enunciado válido.

3.2. Conjuntos definibles

Definición 22 (Conjunto definible)**.** Sea L un lenguaje, $\mathcal{A}$ una L-estructura:
- Un conjunto $X \subseteq A^n$ para algún n es **definible** (en $\mathcal{A}$) si existe una fórmula $F(x_1, \dots x_n) \in \text{For}(L)$ tal que:
$$X = \{\mathbf{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models F(\mathbf{a})\}$$
- Un conjunto $X \subseteq A^n$ para algún n es **definible con parámetros** si existe una fórmula $F(x_1, \dots x_n) \in \text{For}(L_A)$ tal que:
$$X = \{\mathbf{a} \in A^n \mid \mathcal{A}_A \models F(\mathbf{a})\}$$

Ejemplo 20 (*Ejemplos de conjuntos definibles*)

Sea $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$, $\mathcal{C} = \langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$. Sea $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, entonces:
1. $$X = \{\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n \mid f(\mathbf{a}) = 0\} \text{ es un conjunto definible con parámetros}$$
   La fórmula F sería, $F(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = 0$ con $F \in \text{For}(L_{\mathbb{C}})$.
2. $$X = \left\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid a \cdot b = 1\right\} \text{ es definible en } \mathcal{C} \text{ sin parámetros}$$
3. *¿Es $\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$ definible en $\mathbb{C}$? Sí, la fórmula (abreviada) que lo define es $x^2 = 2$. $(= \cdot\ x\ x\ +\ 1\ 1)$.*

Observación. Si permitimos parámetros, cualquier subconjunto finito de $\mathbb{C}^n$ es definible. Sea el conjunto:

$$X = \{(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn})\} \text{ con } a_{ij} \in \mathbb{C}$$

En el caso $m = 1$, basta considerar la fórmula $F : x_1 = a_{11} \wedge x_2 = a_{12} \wedge \cdots \wedge x_n = a_{1n}$.
En el caso general, $F_i(x_1, \dots, x_n) : x_1 = a_{i1} \wedge x_2 = a_{i2} \wedge \cdots \wedge x_n = a_{in} \in \text{For}(L_a)$. Con esto definimos X como:

$$X = \{\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{C}^n \mid \mathcal{C} \models (F_1 \vee \cdots F_m)(\mathbf{b})\}$$

Ejemplo 21

Sea $L = \{S, +, \cdot, 0, <\}$ y $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, < \rangle$. Podemos definir el conjunto de números pares naturales.

Consideramos la L-fórmula:

$$x \text{ es par } : \exists y\ (x = y + y)$$

entonces, definimos el conjunto X de naturales pares como:

$$X = \{m \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \vDash (\exists y\ (x = y + y))(m)\}$$

Observación. Sea $\mathcal{R}$ el cuerpo de los reales. Sea $F : y = 0$, $G : x = 0$, con $F(x, y)$ y $G(x, y)$. Se consideran los conjuntos:

$$X_1 = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{R} \vDash F(a, b)\right\}$$
$$X_2 = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{R} \vDash G(a, b)\right\}$$

Entonces $X_1 \bigcup X_2$ es definible mediante $F \vee G$.

Proposición 4 (Caracterización de las operaciones de conjuntos)**.** Sea L un lenguaje, $\mathcal{A}$ una L-estructura, $X, Y \subseteq A^n$ definibles mediante $F(x_1, \ldots, x_n)$ y $G(x_1, \ldots, x_m)$ respectivamente. Entonces:

- $X \bigcup Y$ es definible mediante $F \vee G$.
- $X \bigcap Y$ es definible mediante $F \wedge G$.
- $A^n \backslash X$ es definible mediante $\neg F$.
- Sea Z la proyección de X en las primeras $n - 1$ coordenadas:

  $$Z = \left\{(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in A^{n-1} \mid \text{ existe } b \in A : \ (a_1, \ldots, a_{n-1}, b) \in X\right\}$$

  es decir,

  $$Z = \left\{(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in A^{n-1} \mid \mathcal{A} \vDash (\exists x_n F)(a_1, \ldots, a_{n-1})\right\}$$

- Sea $W \subseteq A^m$ definible mediante $H(x_1, \ldots, x_m)$.

  $$X \times W \subseteq A^{n+m} \text{ es definible}$$

  Vamos a necesitar una fórmula de la forma $F \wedge H$, sin embargo, eso definiría la intersección. Notamos que $H' : H({}^{y_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{y_m}/_{x_m})$ también define W. Con ello obtenemos que:

  $$X \times W = \left\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^{n+m} \mid \mathcal{A} \vDash (F \wedge H')(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right\}$$

Demostración. Son propiedades que no se han demostrado en clase. $\diamondsuit$

Proposición 5 (Satisfacibilidad de una sustitución)**.** Sea L un lenguaje, $s \in \mathrm{Ter}(L)$ con s siendo $s(x, y_1, \ldots, y_m)$ e y_i que aparece en s. Sea $F \in \mathrm{For}(L)$, F es $F(x, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_l)$ con $(z_j \neq y_i)$, tal que x es sustituible por s en F. (Es decir, no hay subfórmulas de F de la forma $\forall y_i G$ con x libre en F).

Entonces para toda L-estructura $\mathcal{A}$ y $(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in A^{1+m+l}$ se tiene que:

$$\mathcal{A} \vDash F({}^{s}/_{x})(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \iff \mathcal{A} \vDash F(s^{\mathcal{A}}(a, \mathbf{b}), \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Demostración. A completar. $\diamondsuit$

Corolario 1 (a la proposición 5. Cambio de nombre a una variable ligada.)**.** Sea L un lenguaje, $F(x, \mathbf{z}) \in \mathrm{For}(L)$, $y \in V$ que no aparece en F. Entonces para toda L-estructura $\mathcal{A}$ y $\in A^m$:

$$\mathcal{A} \vDash \forall y(F({}^{y}/_{x}))(\mathbf{b}) \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x F)(\mathbf{b})$$

En particular si F es $F(x)$:

$$\forall y\ F({}^{y}/_{x}) \leftrightarrow \forall x\ F, \text{ es válida.}$$

Demostración. A completar. $\diamondsuit$

Capítulo 4

Tautologías

Recordemos los valores de verdad de algunas construcciones con P, Q variables proposicionales.

P	Q	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \to P$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	1
0	0	0	1	1

El hecho de que en las implicaciones sólo haya un valor falso nos será de utilidad para construir *tautologías*.

Definición 23 (Formulas básica)**.** Sea L un lenguaje, una **formula básica** de L es una formula o *atómica* o de la forma: $\forall x G$ con $G \in \text{For}(L)$.

Definición 24 (Subfórmulas básicas necesarias)**.** Sea L un lenguaje, $F \in \text{For}(L)$, el conjunto de **subfórmulas básicas necesarias** de F, $\text{SBN}(F)$ es:

- Si F es básica: $\text{SBN}(F) = \{F\}$.
- Si F es $\neg G$: $\text{SBN}(F) = \text{SBN}(G)$.
- Si F es $G \to H$: $\text{SBN}(F) = \text{SBN}(G) \bigcup \text{SBN}(H)$.

Observación. Toda fórmula se obtiene de subfórmulas básicas necesarias usando $\neg$ y $\to$.

Definición 25 (Distribución de valores de verdad)**.** Sea L un lenguaje. Una **distribución de valores de verdad** (d.v.v.) de L es una aplicación:

$$\delta : \{F \in \text{For}(L) \mid F \text{ es básica}\} \to \{0, 1\}$$

Definición 26 (Tautología)**.** Una **tautología** de L es una fórmula $F \in \text{For}(L)$ tal que $\bar{\delta}(F) = 1, \forall \delta$ (con δ una d.v.v.) donde $\bar{\delta}$ es la única aplicación $\bar{\delta} : F \to \{0, 1\}$ que extiende a δ y satisface:

- $\bar{\delta}(\neg G) = 1$ si $\bar{\delta}(G) = 0$ y $\bar{\delta}(\neg G) = 0$ si $\bar{\delta}(G) = 1$
- $\bar{\delta}(G \to H) = 0$ si $\bar{\delta}(G) = 0 \wedge \bar{\delta}(H) = 1$ y $\bar{\delta}(G \to H) = 1$ en el resto de casos.

Definición 27 (Fórmulas tautológicamente equivalentes)**.** Sea L un lenguaje, $F, G \in \mathrm{For}(L)$ fórmulas de L. Decimos que F y G son **tautológicamente equivalentes** si:

$$F \leftrightarrow G \text{ es una tautología.}$$

Observación. Para fórmulas abreviadas tomamos $\exists x G$ como fórmula básica también.

Ejemplo 22 (*Comprobación de dos fórmulas tautológicamente equivalentes*)

Sean las fórmulas $G : F_1 \to (F_2 \to F_3)$ y $H : (F_1 \wedge F_2) \to F_3$. Vamos a ver que G y H son tautológicamente equivalentes.

Tenemos que comprobar que $G \leftrightarrow H$ es una tautología. Es decir, $G \to H$ y $H \to G$ son tautologías. Supondremos que no lo son y al asignar los valores de verdad correspondientes llegaremos a una contradicción.

F_1	$\to$	$(F_2$	$\to$	$F_3)$	$\to$	$(F_1$	$\wedge$	$F_2)$	$\to$	F_3
	1				**0**				**0**	
	1				0		**1**		0	**0**
	1				0	**1**	1	**1**	0	0
1	1	**1**		**0**	0	1	1	1	0	0
1	**0**	1	**0**	0	0	1	1	1	0	0

Se marcan en negrita las deducciones en cada paso (fila). Podemos ver que llegamos a una contradicción en el valor de verdad de la primera implicación, con lo que la expresión es una tautología. Se procede de forma análoga para el recíproco.

Proposición 6 (Tautologías y fórmulas válidas)**.** Sea L un lenguaje. Las tautologías de L son fórmulas válidas de L.

Demostración. A completar. ♢

Observación. La propiedad de ser tautología es puramente sintáctica.

$$\forall x F \to F \text{ no es una tautología.}$$

Capítulo 5

Consecuencia semántica

Definición 28 (L-teoría)**.** Sea L un lenguaje. Una **L-teoría** es un conjunto de *enunciados* de L (no tiene por qué ser finito).

Ejemplo 23 (*Ejemplos de L-teorías*)

1. *Sea* $L = \{\cdot, 1\}$ *el lenguaje de grupos. Sean* G_1, G_2, G_3 *los axiomas de grupos.* $T = \{G_1, G_2, G_3\}$ *es una* L*-teoría.*
2. *GADST: (grupos abelianos divisibles sin torsión). Sea* $L = \{+, 0\}$ *y las propiedades:*
   - G_1 : + *es asociativa.*
   - G_2 : 0 *es el neutro.*
   - $G_3 : \forall x \exists y\ x + y = 0$.
   - $G_4 : \forall x \forall y\ x + y = y + x$.
   - $G_{5n} : \forall x \exists y\ x = n \cdot y$ *(n-divisible).* $n \cdot y$ *abrevia* $\sum_1^n y$.
   - $G_{6n} : \forall\ x(n \cdot x = 0 \to x = 0)$.
   - $G_7 : \exists x\ x \neq 0$.

   Entonces $GADST = \{G_1, G_2, G_3, G_3, G_7\} \bigcup \{G_{5n}\}_{n>1,\ n\in\mathbb{N}} \bigcup \{G_{6n}\}_{n>1,\ n\in\mathbb{N}}$.
3. $\{\forall x\ x \neq x\}$ *y* $\{F \wedge \neg F\}$ *son teorías, aunque sean incoherentes.*

Definición 29 (Modelo)**.** Sea L un lenguaje, T una L-teoría. Un **modelo** de T es una L-estructura $\mathcal{A}$ tal que:

$$\mathcal{A} \models F \text{ para toda } F \in T \text{ y se escribe } \mathcal{A} \models T$$

Ejemplo 24 (*Ejemplos de modelos*)

1. T_{grupos} *en* $L = \{\cdot, 1\}$, *sea* $\mathcal{G}$ *una* L*-estructura.* $\mathcal{G}$ *es un modelo de* $T_{grupos} \iff \mathcal{G}$ *es un grupo.*
2. $\mathcal{A} \models GADST \iff \mathcal{A}$ *es un grupo abeliano divisible sin torsión.*
3. $\{\forall x\ x \neq x\}$ *y* $\{F \wedge \neg F\}$ *no tienen modelos.*

Observación (Notación)**.** $\mathrm{Mod}(T)$ designa la clase de todos los modelos de T.

Observación. Sean T_1, T_2 teorías, si $T_1 \subseteq T_2$ entonces $\mathrm{Mod}(T_2) \subseteq \mathrm{Mod}(T_1)$.

Definición 30 (Teoría de una estructura)**.** Sea $\mathcal{A}$ una L-estructura, una **teoría** de $\mathcal{A}$ es el conjunto:

$$\mathrm{te}(\mathcal{A}) = \{F \in \mathrm{For}(L) \mid F \text{ es un enunciado y } \mathcal{A} \models F\}$$

Observación.

- Sea F un enunciado. $\mathcal{A} \models F$ establece una relación semántica entre un objeto semántico $\mathcal{A}$ y otro sintáctico F.
- Sea T una L-teoría (objeto sintáctico), también escribimos $\mathcal{A} \models T$.

Definición 31 (Consecuencia semántica)**.** Sea L un lenguaje, T una L-teoría, y F un L-enunciado. F es **consecuencia semántica** de T ($T \models F$) si $\mathcal{A} \models F$ para toda estructura $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models T$.

Observación.

- Si $T = \varnothing$, escribiremos $\models F$.
- Sea $G \in \mathrm{For}(L)$, G es consecuencia semántica de T ($T \models G$) si $T \models F$ para algún (o todo) cierre universal F de G.
$$T \models \forall x_1 \dots \forall x_n\ G \implies T \models G$$

Definición 32 (Fórmulas equivalentes respecto de una teoría)**.** Sea L un lenguaje, T una L-teoría, $F_1, F_2 \in \mathrm{For}(L)$. Diremos que F_1 y F_2 son **equivalentes respecto de** T si:

$$T \models \forall x_1 \dots \forall x_n\ (F_1 \leftrightarrow F_2)$$

Observación. Si $F_1, F_2 \in \mathrm{For}(L)$ son equivalentes con respecto a T, entonces F_1 y F_2 definen el mismo conjunto en cualquier modelo de T.

Parte II

Sistemas formales de primer orden

Capítulo 6

Consecuencia sintáctica

Hemos visto que sea F un enunciado de un lenguaje L, $\mathcal{A}$ una L-estructura y T una L-teoría, hemos definido relaciones semánticas, tanto entre objetos semánticos y sintácticos ($\mathcal{A} \models F$) como entre objetos puramente sintácticos ($T \models F$).
En este bloque vamos a introducir la *consecuencia sintática*, una relación sintáctica entre objetos sintácticos ($T \vdash F$).

6.1. Sistema formal. Axiomas

Definición 33 (Sistema formal)**.** Nos referimos por **sistema formal** al conjunto $SF = \{L, Ax, RDec, T\}$ donde:

- L es un lenguaje.
- Ax es un conjunto de axiomas.
- $RDec$ es un conjunto de reglas de deducción que nos permiten obtener expresiones del lenguaje a partir de otras.
- T es un conjunto de teoremas, expresiones del lenguaje que se deducen a partir de los axiomas utilizando las reglas de deducción.

En nuestro curso, nuestro SF consta de:

- L un lenguaje de primer orden.
- Ax un conjunto con dos tipos de axiomas, lógicos y específicos de una L-teoría.
- $RDec$ un conjunto con dos reglas de deducción. *Modus Ponens* (deducir G de $F \to G$ y F), y *Generalización* (deducir $\forall x\ F$ de F).

Definición 34 (Axiomas lógicos)**.**

(I) Tautologías

(II) Axiomas de cuantificadores

(2.1) Axioma de $\forall$:

$$\forall v\ (F \to G) \to (F \to \forall v\ G)$$

con $F, G \in \mathrm{For}(L)$ y $v \in V$ que no aparece libre.

(2.2) Axioma de sustitución:

$$\forall v\ F \to F({}^{t}/_{v})$$

con $F \in \mathrm{For}(L)$, $t \in \mathrm{Ter}(L)$, $v \in V$.

(III) Axiomas de igualdad

(3.1) Variables:

$$x = x,\ x \in V$$

(3.2) Funciones:

$$x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to fx_1 \ldots x_n = fy_1 \ldots y_n$$

con $x_i, y_i \in V$, f un símbolo de función n-aria.

(3.3) Relaciones:

$$x_1 = y_1 \to \cdots \to x_m = y_m \to Rx_1 \ldots x_m = Ry_1 \ldots y_m$$

con $x_i, y_i \in V$, R un símbolo de relación m-aria.

Proposición 7 (Consecuencia semántica y consecuencia sintáctica)**.** Sea L un lenguaje, $F \in \mathrm{For}(L)$ un enunciado y T una L-teoría: $T \vdash F \iff T \models F$.

6.2. Demostración formal

Definición 35 (Demostración)**.** Una **demostración** de $F \in \mathrm{For}(L)$ en una L-teoría T es una secuencia finita de fórmulas de L $(F_1, \ldots, F_n)$ tal que F_n es F y donde para cada i con $1 \leqslant i \leqslant n$:

- F_i es un axioma lógico, ó
- F_i se obtiene de F_j, F_k donde F_k es $F_j \to F_i$ mediante *Modus Ponens*, ó
- F_i se obtiene de F_j mediante *Generalización*, es decir, F_i es $\forall v\ F_j$ para $v \in V$.

Definición 36 (Teorema. Consecuencia sintáctica)**.** Un **teorema** de una L-teoría T es una fórmula $F \in \mathrm{For}(L)$, para la que existe una demostración de F en T. Decimos que F es un **teorema** de T, o F es una **consecuencia sintática** de T. ($T \vdash F$).

Observación. Si $(F_1, \ldots, F_n)$ es una demostración de F en T, entonces $(F_1, \ldots, F_i)$ es una demostración de F_i en T.

Definición 37 (Longitud de una demostración)**.** Si $(F_1, \ldots, F_n)$ es una demostración de F en T, n es la **longitud de la demostración**.

Observación.

- Los axiomas lógicos y los elementos de T tienen demostraciones de longitud 1.
- Si $T = \varnothing$ y $T \vdash F$ se dice que F es un teorema del lenguaje L.

Observación (Ayudas para demostraciones)**.**

- Para demostrar $H_1 \leftrightarrow H_2$ basta demostrar $H_1 \to H_2$ y $H_2 \to H_1$. Luego se obtiene la fórmula original por tautologías.

- Para demostrar $H_1 \to \forall x\ H_2$ (con x no libre en H_1) basta demostrar $H_1 \to H_2$. Se obtiene con generalización y el axioma de $\forall$.
- Para demostrar $\forall x \forall y\ F \leftrightarrow \forall y \forall x$ basta demostrar: $\forall x \forall y\ F \to \forall x\ F$ y $\forall y \forall x\ F \to \forall y\ F$.

Definición 38 (Demostración abreviada)**.** Una **demostración abreviada** de $F \in \mathrm{For}(L)$ en T tiene la misma definición que *demostración* excepto que ahora consideramos las consecuencias semánticas de T como parte de T.

Observación. Una demostración abreviada de F en T es una demostración de F en $T' = T \bigcup T_0$ donde $T_0 \subseteq \{G \in \mathrm{For}(L) \mid T \vdash G\}$.

Dada una demostración abreviada de F en T, se puede dar una demostración de F en T. Sustituyendo en las líneas de la demostración de F en $T \bigcup T_0$ cada F_i teorema de T por una demostración de F_i.

Proposición 8 (= como relación de equivalencia)**.** Las fórmulas que expresan que = es una relación de equivalencia son teoremas del lenguaje.

1. $\vdash x = x$.
2. $\vdash x = y \to y = x$.
3. $\vdash x = y \wedge y = z \to x = z$.

Demostración. A completar. ♢

6.3. Coherencia de teorías

Definición 39 (Lenguaje coherente. Lenguaje incoherente.)**.** Sea L un lenguaje, T una L-teoría. Decimos que T es **incoherente** si existe $F \in \mathrm{For}(L)$ tal que $T \vdash F \wedge \neg F$. T es **coherente** si no es *incoherente.*

Proposición 9 (Caracterización de teorías incoherentes)**.** Sea L un lenguaje, T una $L - teora$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. T es incoherente.
2. Existe $F \in \mathrm{For}(L)$ tal que $T \vdash \neg F$ y $T \vdash F$.
3. Para toda $F \in \mathrm{For}(L)$ $T \vdash F$.

Demostración.

(1 $\Longrightarrow$ 2) Sea T incoherente, por definición, $\exists F \in \mathrm{For}(L)$ tal que $T \vdash F \wedge \neg F$. Entonces:

$$\begin{array}{llr} F1: & F \wedge \neg F & (T \vdash) \\ F2: & F \wedge \neg F \to F & (taut.) \\ F3: & F \wedge \neg F \to \neg F & (taut.) \\ F4: & F & (MP(2,1)) \\ F5: & \neg F & (MP(3,1)) \end{array}$$

(2 $\Longrightarrow$ 3) Sea $G \in \mathrm{For}(L)$

$$\begin{array}{llr} F1: & F \to \neg F \to G & (taut.) \\ F2: & F & (T \vdash) \\ F3: & \neg F & (T \vdash) \\ F4: & \neg F \to G & (MP(1,2)) \\ F5: & G & (MP(4,3)) \end{array}$$

($3 \implies 2$) Partimos de $\forall F \in \mathrm{For}(L)$, $T \vdash F$. Como $F \wedge \neg F \in \mathrm{For}(L)$ entonces $T \vdash F \wedge \neg F$. $\diamondsuit$

Capítulo 7

Teoremas de Finitud y de la Deducción.

7.1. Teorema de finitud

Teorema 10 (Teorema de finitud)**.** Sea L un lenguaje, T una L-teoría y $F \in \mathrm{For}(L)$ una fórmula. Si $T \vdash F$ entonces existe $T_0 \subseteq T$ finito tal que $T_0 \vdash F$.

Demostración. Si $T \vdash F \implies$ existe $(F_1, \dots F_n)$ una demostración de F en T. Sea $T_0 = \{F_1, \dots, F_n\} \cap T$, es claro que $T_0 \vdash F$ ya que $(F_1, \dots, F_n) \in T_0$ y era una demostración de F. ♢

Corolario 2 (Corolario primero al teorema 10)**.** Si para $T_0 \subseteq T$, T_0 es coherente, entonces T es coherente.

Demostración. Vamos probar el contrarrecíproco.
Si T es incoherente, entonces $T \vdash F \wedge \neg F$, para alguna $F \in \mathrm{For}(L)$. Por el TF (teorema 10), existe $T_0 \in T$ finito tal que $T_0 \vdash F \wedge \neg F$ y por tanto T_0 es incoherente. ♢

Corolario 3 (Corolario segundo al teorema 10. Unión de teorías coherentes)**.** Sea L un lenguaje, sea $\{T_i, i \in I\}$ una familia de L-teorías, tal que $\forall i, j \in I$, $T_i \subseteq T_j$ o $T_j \subseteq T_i$. Si T_i es coherente, $\forall i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} T_i$ es una L-teoría coherente.

Demostración. Vamos a probar el contrarrecíproco.
Sea $T = \bigcup_{i \in I} T_i$, si T es incoherente entonces existe $F \in \mathrm{For}(L)$ tal que $T \vdash F \wedge \neg F$. Por tanto, $\exists T_0 \in T$ tal que $T_0 \vdash F \wedge \neg F$, y $\exists j \in I$ tal que $T_0 \subseteq T_j$ (por ser una cadena) $\implies T_j \vdash F \wedge \neg F \implies T_j$ es incoherente. ♢

7.2. Teorema de la deducción

Hasta ahora hemos utilizado la *Generalización* y *Modus Ponens* como reglas de deducción. Vamos a ver otro mecanismo para demostrar implicaciones. Por ahora hemos visto:

(1) Si $T \vdash G$ y $T \vdash G \to F$ entonces $T \vdash F$.

(2) Si $T \vdash G \to F$ entonces $T \cup \{G\} \vdash F$.

Vamos a introducir el teorema de la deducción, que es el recíproco de (2).

Teorema 11 (Teorema de la deducción)**.** Sea L un lenguaje, T una L-teoría, F un enunciado de L y $G \in \mathrm{For}(L)$. Si $T \bigcup \{F\} \vdash G$ entonces $T \vdash F \to G$.

Demostración. La demostración sigue por inducción sobre n, siendo n la longitud de la demostración de G en $T \cup \{F\}$. Es decir, si G es una L-fórmula que tiene una demostración de longitud n en $T \cup F$ entonces $T \vdash F \to G$.

$(n = 1)$ Si la longitud es 1, entonces G es o un axioma lógico, o $G \in T$ o G es F.
Si G es un axioma lógico o $G \in T$ basta construir la demostración:

$$G \quad (1)$$
$$G \to F \to G \text{ (tautología)} \quad (2)$$
$$F \to G \quad (3)$$

Si G es F, $F \to G$ es una tautología y por tanto $T \vdash F \to G$.

$(n > 1)$ Sea $(G_1, \ldots, G_n)$ una demostración de G en $T \cup \{F\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que G es G_n.
Si G_n es un axioma lógico o $G_n \in T \cup \{F\}$, como en el caso base obtenemos $T \vdash F \to G_n$.

Si G se obtiene de G_i con $i < n$ por generalización, es decir G_n es $\forall x G_i$, entonces:
Como $\{G_1, \ldots, G_i\}$ es una demostración de G_i en $T \cup \{F\}$, por hipótesis de inducción $T \vdash F \vdash G_i$, y ya vimos que entonces $T \vdash F \vdash \forall x G_i$ (porque x no está libre en F), formalmente:

$F \to G_i$	$(T \vdash)$	(1)
$\forall x(F \to G_i)$	(Gen(1))	(2)
$\forall x(F \to G_i) \to (F \to \forall x G_i)$	Axioma del $\forall$	(3)
$F \to \forall x G_i$	MP(3, 2)	(4)

Si G se obtiene de G_i y G_j mediante MP, digamos $G_i \to G_j$ con $i, j < n$. Por hipótesis de inducción $T \vdash F \to G_i$ y $T \vdash F \to G_j$. Podemos dar una demostración abreviada de G_n en T (notamos que $T \vdash F \to G_j$ es $T \vdash F \to (G_i \to G_n)$):

$F \to G_i$	$(T \vdash)$ $[H_1]$	(1)
$F \to (G_i \to G_n)$	$(T \vdash)$ $[H_2]$	(2)
$H1 \to H2 \to (F \to G_n)$	(tautología)	(3)

Y seguiríamos aplicando *Modus Ponens* para terminar la demostración.

$\diamondsuit$

Corolario 4 (Corolario primero al teorema 11)**.** Sea L un lenguaje, T una L-teoría, F un enunciado de L, entonces:

(1) $T \vdash F \iff T \cup \{\neg F\}$ es incoherente

(2) $T \nvdash F \iff T \cup \{\neg F\}$ es coherente.

Demostración. Es claro que (1) $\iff$ (2), solo tendríamos que demostrar uno de ellos. Vamos a demostrar (1) por reducción al absurdo.

$(\implies)$ $T \vdash F \implies T \cup \{\neg F\} \vdash F$ y $T \cup \{\neg F\} \vdash \neg F \implies T \cup \neg F$ es incoherente.

$(\impliedby)$ $T \cup \{\neg F\}$ es incoherente $\implies T \cup \{\neg F\} \vdash F \implies T \vdash \neg F \to F$. Como $(\neg F \to F) \to F$ es una tautología, $T \vdash F$.

$\diamondsuit$

Corolario 5 (Corolario segundo al teorema 11)**.** El teorema de finitud (teorema 10) es equivalente al corolario primero al teorema de finitud (corolario 2).

Demostración. Que el teorema 10 $\Longrightarrow$ corolario 2 es claro y ya lo hemos demostrado. Vamos a ver el recíproco.
Sea $F \in \text{For}(L)$ tal que $T \vdash F$. Supongamos que $\forall T_0 \subseteq T$ finita se cumple que $T_0 \nvdash F$. Por el corolario 4, $\forall T_0 \in T$, $T_0 \cup \{\neg F\}$ es coherente.
Sea $T' = T \cup \{\neg F\}$ con $T_0' \subseteq T$ si $T_0' \subseteq T_0 \cup \{\neg F\}$ con T_0 finita, entonces T_0' es coherente. Por el corolario 2, T' es coherente $\Longrightarrow T \nvdash F$, y llegamos a una contracción. ♢

Proposición 12 (Extensión mediante constantes nuevas)**.** Sea L un lenguaje, T una L-teoría, F una fórmula, F es $F(x_1, \ldots, x_n)$, y $c_1, \ldots, c_n$ nuevas constantes. Sea $L' = L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ entonces:

$$T \vdash F \iff T \vdash F({}^{c_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{c_n}/_{x_n})$$

Nota: T es una L'-teoría en la parte derecha del condicional.

Demostración.

$\Longrightarrow$ Supongamos $T \vdash F$. Hagamos una demostración abreviada de $F({}^{c_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{c_n}/_{x_n})$ en T como L'-teoría.

F	$(T \vdash)$	(F1)
$\forall x_1 F$	$Gen(1)$	(F2)
$\forall x_1 F \to F({}^{c_1}/_{x_1})$	Ax. sust	(F3)
$\forall F({}^{c_1}/_{x_1})$	$MP(3, 2)$	(F4)
repetir el mismo proceso n veces		$(\cdots)$
$F({}^{c_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{c_n}/_{x_n})$	$MP(3n, 3-1)$	(F3n+1)

$\Longleftarrow$ Dada una demostración de G, (G es $F({}^{c_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{c_n}/_{x_n})$). Sea la demostración $(G_1, \ldots, G_m)$ de $F({}^{c_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{c_n}/_{x_n})$ en T. Para cada $i = 1, \ldots, m$, sea F_i la fórmula obtenida sustituyendo c_j por x_j. Entonces $F_1, \ldots, F_m$ es una demostración de F en T.

♢

Observación.

1. Hay un paso intermedio en la demostración de ($\Longleftarrow$) anterior que es susituir c_j por y_j donde las y_j son las variables nuevas. Luego cambiar el nombre de las variables ligadas y finalmente sustituir y_j por x_j.

2. Los G_i pueden ser $G \in T$ entonces F_i es G_i.
Si G_i es un axioma lógico $\Longrightarrow$ F_i es un axioma lógico del mismo tipo. Si G_i es una tautología $\Longrightarrow$ F_i es una tautología (esto no es trivial, habría que verlo con cuidado)

Capítulo 8

Teorema de Igualdad.

8.1. Teorema de igualdad

En esta sección vamos a ver algunos resultados acerca de igualdades. Vamos a apoyarnos en la proposición 8 por lo que convendría revisarla.

Lema 13 (= en las consecuencias sintácticas)**.** Sea L un lenguaje, $t_i \in \mathrm{Ter}(L)$ con $i = 1, 2, 3$, entonces:

$$\vdash t_1 = t_1$$
$$\vdash t_1 = t_2 \to t_2 = t_1$$
$$\vdash t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 \to t_1 = t_3$$

Demostración. Vamos a proceder con una demostración abreviada haciendo uso de la proposición 8.

$x = x$	Axioma de igualdad 3.1	(1)
$\forall x\ x = x$	Gen(1)	(2)
$\forall x\ x = x \to (x = x)({t_1}/{x})$	Axioma de sustitución	(3)
$(x = x)({t_1}/{x}) : t_1 = t_1$	MP(3, 1)	(4)

$x = y \to y = x$	$\vdash x = y \to y = x$	(1)
$\forall x\ F_1$	Gen(1)	(2)
$\forall x\ F_1 \to (x = y \to y = x)({t_1}/{x})$	Axioma de sustitución	(3)
$t_1 = y \to y = t_1$	MP(3,2)	(4)
$\forall y\ F_4$	Gen(4)	(5)
$\forall y\ F_4 \to F_4({t_2}/{y})$	Axioma de sustitución	(6)
$t_1 = t_2 \to t_2 = t_1$	MP(6, 5)	(7)

$x = y \to y = x$	se demuestra de forma análoga	(1)

$\diamondsuit$

Teorema 14 (Teorema de igualdad)**.** Sea L un lenguaje, $t, s_1, s_2 \in \mathrm{Ter}(L)$, $x \in V$, $F \in \mathrm{For}(L)$ tal que x es sustituible por s_i en F. Sea T una L-teoría. Entonces:
(a) $T \vdash s_1 = s_2 \implies T \vdash t({s_1}/{x}) = t({s_2}/{x})$
(b) $T \vdash s_1 = s_2 \implies T \vdash F({s_1}/{x}) = F({s_2}/{x})$

Demostración.

(a) Se da una demostración abreviada de $t(^{s_1}/_x) = t(^{s_2}/_x)$ en T. Por inducción sobre la complejidad de t.

Si $t \in V$:

- t es $x \implies t(^{s_i}/_x)$ es s_i, y por tanto $T \vdash s_1 = s_2$ por hipótesis.
- t es $v \neq x \implies t(^{s_1}/_x)$ es t, y por tanto $T \vdash t = t$ por el lema 13.
- t es c se demuestra igual que el caso $v \neq x$

Si t es $ft_1 \dots t_m$. Por hipótesis de inducción se cumple que $T \vdash t_i(^{s_1}/_x) = t_i(^{s_2}/_x)$, vamos a dar una demostración abreviada.

$t_1(^{s_1}/_x) = t_1(^{s_2}/_x)$	$T \vdash$	(F_1)
$\vdots$		$(\cdots)$
$t_m(^{s_1}/_x) = t_m(^{s_2}/_x)$	$T \vdash$	(F_m)
$x_1 = y_1 \to \cdots \to x_m = y_m \to fx_1 \dots x_m = fy_1 \dots y_m$	Axioma de igualdad 3.2	(F_{m+1})
$\forall x_1\ F_{m+1}$	Gen(F_{m+1})	(F_{m+2})
$\forall x_1\ F_{m+1} \to F_{m+1}(^{t_1(^{s_1}/_x)}/_{x_1})$	Axioma de sustitución	(F_{m+3})
$F_{m+1}(^{t_1(^{s_1}/_x)}/_{x_1})$	MP$(m+3,\, m+2)$	(F_{m+4})
$\forall y_1\ F_{m+4}$	Gen(F_{m+4})	(F_{m+5})
$\forall y_1\ F_{m+4} \to F_{m+4}(^{t_1(^{s_2}/_y)}/_{y_1})$	Axioma de sustitución	(F_{m+6})
$F_{m+4}(^{t_1(^{s_2}/_y)}/_{y_1})$	MP$(m+6,\, m+5)$	(F_{m+7})
$x_2 = y_2 \to \cdots \to x_m = y_m \to$ $\to ft_1(^{s_1}/_x)x_2 \dots x_m = t_1(^{s_2}/_y)fy_2 \dots y_m$	MP$(m+7,\, 1)$	(F_{m+8})
repetir el proceso m veces		

(b) Demostramos por inducción sobre la complejidad de F. Como F es $Rt_1 \dots t_m$ siendo R un símbolo de relación m-aria (incluyendo =), basta demostrar:

$$T \vdash F(^{s_1}/_x) \to F(^{s_2}/_x) \tag{+}$$

ya que $T \vdash s_1 = s_2 \implies T \vdash s_2 = s_1$. De (+) se obtiene:

$$T \vdash F(^{s_2}/_x) \to F(^{s_1}/_x) \tag{++}$$

y finalmente de (+) y (++) acabamos por obtener:

$$T \vdash F(^{s_1}/_x) \leftrightarrow F(^{s_2}/_x)$$

por tautologías.

- Si F es atómica, la demostración es análoga al apartado (a) usando el axioma de igualdad 3.3 en vez de 3.2.
- Si F es $\neg G$.
  Por hipótesis de inducción $T \vdash s_1 = s_2 \implies T \vdash G(^{s_1}/_x) \leftrightarrow G(^{s_2}/_x)$. De aquí podemos hallar $T \vdash \neg G(^{s_1}/_x) \leftrightarrow \neg G(^{s_2}/_x)$ por tautologías. Como $\neg(G(^{s_1}/_x))$ es $(\neg G)(^{s_1}/_x)$ hemos terminado.
- Si F es $G \to H$, por hipótesis de inducción y observando que $(G \to H)(^{s_i}/_x)$ es $(G(^{s_i}/_x) \to H(^{s_i}/_x))$ habríamos terminado.

- Si F es $\forall yG$ distinguimos dos casos. Si x no aparece libre, entonces $F({}^{s_i}\!/_x)$ es F y $T \vdash F \leftrightarrow F$ es una tautología.
  Si x aparece libre, entonces $x \neg y$ y como x es sustituible por s_i con $i = 1, 2$ también tenemos que y no aparece en s_i.
  Además $(\forall yG)({}^{s_i}\!/_x)$ es $\forall y(G({}^{s_i}\!/_x))$. Por hipótesis de inducción, $T \vdash s_1 = s_2 \implies T \vdash G({}^{s_1}\!/_x) \leftrightarrow G({}^{s_2}\!/_x)$. Y como ya vimos en clase, podemos generalizar a ambos lados del bicondicional, con lo que obtenemos:
  $$T \vdash \forall y(G\,{}^{s_1}\!/_x) \leftrightarrow \forall y(G\,{}^{s_2}\!/_x)$$
  es decir,
  $$T \vdash F \leftrightarrow F$$
  que es lo que queríamos demostrar

$\diamondsuit$

Corolario 6 (al teorema de igualdad (teorema 14))**.** Con las mismas hipótesis que el teorema:

(a') $T \vdash s_1 = s_2 \rightarrow t({}^{s_1}\!/_x) \rightarrow t({}^{s_2}\!/_x)$

(b') $T \vdash s_1 = s_2 \rightarrow F({}^{s_1}\!/_x) \rightarrow F({}^{s_2}\!/_x)$

Demostración. Si $s_1 = s_2$ fuera un enunciado, (a') y (b') se obtienen de (a) y (b) usando el teorema de la deducción (teorema 11). En general, si s_i es $s_i(x_1, \ldots, x_n)$, construimos s_i' como $s_i'(c_1, \ldots, c_n)$ sustituyendo cada x_j por el c_j correspondiente.
Por la proposición 12, sea $L' = L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ y $s_i' \in \mathrm{Ter}(L')$, tenemos que:

$$(\text{a'}) \iff T \vdash s_1' = s_2' \rightarrow t\left({}^{s_1'}\!\middle/_x\right) \rightarrow t\left({}^{s_2'}\!\middle/_x\right)$$

$$(\text{b'}) \iff T \vdash s_1' = s_2' \rightarrow F\left({}^{s_1'}\!\middle/_x\right) \rightarrow F\left({}^{s_2'}\!\middle/_x\right)$$

También sabemos que $T \vdash s_1 = s_2 \iff T \vdash s_1' = s_2'$. Como ahora son enunciados basta aplicar el teorema 11 y obtenemos el resultado que queremos demostrar.
Además, también hemos demostrado que:

$$T \vdash t({}^{s_1}\!/_x) = t({}^{s_2}\!/_x) \implies T \vdash t\left({}^{s_1'}\!\middle/_x\right) = t\left({}^{s_2'}\!\middle/_x\right)$$
$$T \vdash F({}^{s_1}\!/_x) = F({}^{s_2}\!/_x) \implies T \vdash F\left({}^{s_1'}\!\middle/_x\right) = F\left({}^{s_2'}\!\middle/_x\right)$$

$\diamondsuit$

Capítulo 9

Teorema de Validez.

9.1. Introducción

A lo largo del curso hemos estado interesados en las consecuencias semánticas, donde veíamos que $T \models F$ representaba que un enunciado F se satisfacía en todos los modelos de T. A continuación, introdujimos la relación sintáctica ($T \vdash F$) como una versión más potente de la consecuencia semántica ($\vdash F \implies \models F$). Sin embargo, tenemos que comprobar que lo que hemos introducido es válido, es decir, que los teoremas son fórmulas válidas.

En esta sección vamos a ver las herramientas necesarias para demostrar que si F es un teorema de T ($T \vdash F$), es decir, existe una demostración de F en T, entonces F se satisface en T ($T \models F$), es decir, F se satisface en todos los modelos $\mathcal{A}$ de T. Esto se enuncia formalmente con el teorema de validez.

Teorema 15 (Teorema de validez)**.** Sea L un lenguaje, T una L-teoría y $F \in \mathrm{For}(L)$ un enunciado.
Si $T \vdash F \implies T \models F$. Informalmente:
Los teoremas de T, que sean enunciados, se satisfacen en todos los modelos de T.

Demostración. Más adelante. Ir a la demostración. $\diamondsuit$

Recordemos que una lógica consta de dos partes:

- Una parte **sintáctica**: axiomas y teoremas ($T \vdash F$).
- Una parte **semántica**: estructuras y relaciones de satisfacción ($\mathcal{A} \models F$, $T \models F$)

Definición 40 (Validez de una lógica)**.** Decimos que una lógica es **válida** si satisface el teorema de validez (15).

Definición 41 (Completitud de una lógica)**.** Decimos que una lógica es **completa** si satisface el teorema de validez (15) y su recíproco, es decir:

$$T \vdash F \iff T \models F$$

Observación (Conjuntos de enunciados en una lógica completa)**.** Si una lógica es completa, entonces sea F un enunciado:

$$\{F \mid T \vdash F\} = \{F \mid T \models F\}$$

Lema 16 (Validez de los axiomas lógicos)**.** Sea L un lenguaje, los axiomas lógicos de L son fórmulas válidas.

Demostración.

(I) Tautologías
Ya lo vimos en la proposición 6.

(II) Axiomas de cuantificadores

(2.1) Axioma de $\forall$
Sean $F, G \in \mathrm{For}(L)$ fórmulas, F es $F(x_1, \ldots, x_n)$ y G es $G(x_1, \ldots, x_n)$. Si x no está libre en G:

$$H: \ \forall x(G \to F) \to G \to \forall x F$$

Tenemos que ver que H se satisface en cualquier estructura. Queremos llegar a:

$$\mathcal{A} \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n H \text{ para toda } L\text{-estructura } \mathcal{A} \tag{$\star$}$$

$$\begin{aligned}
(\star) &\iff \text{ para todo } a_1, \ldots, a_n \in A \implies \mathcal{A} \vDash H(a_1, \ldots, a_n) \\
&\iff \mathcal{A} \vDash (\forall x G \to F)(a_1, \ldots, a_n) & (1) \\
&\iff \mathcal{A} \vDash (G \to \forall x F)(a_1, \ldots, a_n) & (+) \\
(+) &\iff \text{Si } \mathcal{A} \vDash G(a_1, \ldots, a_n) \text{ entonces } \mathcal{A} \vDash (\forall x F)(a_1, \ldots, a_n)
\end{aligned}$$

Supongamos entonces:

$$\mathcal{A} \vDash G(a_1, \ldots, a_n) \tag{2}$$

y veamos que llegamos a

$$\mathcal{A} \vDash (\forall x F)(a_1, \ldots, a_n) \tag{$+++$}$$

Sea $x \neq x_i$, $(+++) \implies \forall b \in A$, $\mathcal{A} \vDash F(b, a_1, \ldots, a_n)$. Llamemos (3) a $\forall b \in A$, $\mathcal{A} \vDash F(b, a_1, \ldots, a_n)$.
Fijamos $b \in A$, por (1), para este b sabemos $\mathcal{A} \vDash (G \to F)(b, a_1, \ldots, a_n)$.
Por (2), $\mathcal{A} \vDash G(a_1, \ldots, a_n) \implies \mathcal{A} \vDash G(b, a_1, \ldots, a_n)$. Finalmente, como x no aparece libre en G podemos concluir que (3) es cierto y por tanto, (2) $\implies (+++)$ con lo que se satisfacen $(+)$ y $(\star)$.

(2.2) Axioma de sustitución
Sea $F \in \mathrm{For}(L)$, $x \in V$m $t \in \mathrm{Ter}(L)$ y x sustituible por t en F. Sea $\mathcal{A}$ una L-estructura y $a_1, \ldots, a_n \in A$.
Veamos que si $\mathcal{A} \vDash (\forall x F)(a_1, \ldots, a_n)$ entonces $\mathcal{A} \vDash F({}^t/_x)(a_1, \ldots, a_n)$.
Por la proposición 5, $\mathcal{A} \vDash F({}^t/_x)(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathcal{A} \vDash F(t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n)$.
Como $t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in A$, por (1) tenemos que $\mathcal{A} \vDash F(b, a_1, \ldots, a_n)$. En particular, también para $b = t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$.

(III) Axiomas de igualdad

(3.1) Variables

$$\mathcal{A} \vDash (x = x)(a) \ \forall a \in A, \ \text{ entonces para todo } a \in A, \ a = a$$

(3.2) Funciones

$$\mathcal{A} \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \ \ x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to f x_1 \ldots x_n = f y_1 \ldots y_n$$

Entonces es claro que: $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$, $\forall b_1, \ldots, b_n \in A$ si $a_i = b_i$ entonces $f a_1 \ldots a_n = f b_1 \ldots b_n$.

(3.3) Relaciones

$$\mathcal{A} \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_m \forall y_1 \ldots \forall y_m \ \ x_1 = y_1 \to \cdots \to x_m = y_m \to R x_1 \ldots x_m = R y_1 \ldots y_m$$

Entonces es claro que: $\forall b_1, \ldots, b_m \in A$, $\forall b_1, \ldots, b_m \in A$ si $a_i = b_i$ entonces $(a_1, \ldots, a_m) \in R^{\mathcal{A}}$ y $(b_1, \ldots, b_m \in R^{\mathcal{A}}) \implies (a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_m)$.

$\diamondsuit$

9.2. Teorema de validez

Una vez hemos demostrado que los axiomas son fórmulas válidas ya disponemos de las herramientas necesarias para demostrar el teorema de validez (teorema 15).

Demostración al teorema de validez. La demostración sigue por inducción en la longitud de una demostración de F en T.

($n = 1$) Si la longitud de la demostración es 1 o $F \in T$ o F es un axioma lógico.
Si $F \in T \implies \mathcal{A} \vDash F,\ \forall \mathcal{A} \vDash T$ y por tanto $T \vDash F$. Si F es un axioma lógico, por el lema 16 sabemos que $\vDash F$ pues F es una fórmula válida. Entonces $\mathcal{A} \vDash F \forall \mathcal{A} \implies T \vDash F$.

($n > 1$) Supongamos que F_n es F y $(F_1, \ldots, F_n)$ es una demostración de F en T.

- Si $F_n \in T$ o F_n es un axioma lógico (como en $n = 1$) entonces $T \vDash F$.
- Si F_n es $\forall x F_i$ (aplicando *Generalización* a algún F_i), por hipótesis de inducción, $T \vDash F_i(\iff T \vDash \overline{F_i}$ cualquier cierre universal de F_i). Como todo cierre universal de F_i también es cierre universal de $\forall x F_i$ entonces $T \vDash \forall x F_i$.
- Si F_n se obtiene de F_i y $F_j : F_i \to F_n$ aplicando *Modus Ponens*, con $i, j < n$, por hipótesis de inducción:
$$T \vDash F_i T \vDash F_i \to F_n \tag{1}$$
Veamos que $T \vDash F_n$. Sean $F_n :\ F_n(x_1, \ldots, x_n)$ y $F_i :\ F_i(x_1, \ldots, x_n)$, y $\mathcal{A} \vDash T$, vamos a ver que $\mathcal{A} \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n\ F_n$.
Sean $(a_1, \ldots, a_n) \in A$, por (1) tenemos $T \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n F_i$. Para este $(a_1, \ldots, a_n)$ se tiene $\mathcal{A} \vDash F_i(a_1, \ldots, a_n)$. Análogamente $\mathcal{A} \vDash (F_i \to F_n)(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$ entonces $\mathcal{A} \vDash F_n(a_1, \ldots, a_n)$.
Como tenemos el antecedente $\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$, y también $\mathcal{A} \vDash (F_i \to F_n)(a_1, \ldots, a_n)$ por H.I, obtenemos $\mathcal{A} \vDash F_n(a_1, \ldots, a_n)$.

$\diamondsuit$

Corolario 7 (Corolario primero al teorema 15)**.** Sea L un lenguaje, T una L-teoría. Si existe $\mathcal{A} \vDash T$ entonces T es coherente.

Demostración. Si T es incoherente entonces existe un enunciado $F \in \mathrm{For}(L)$ tal que $T \vdash F \wedge \neg F$.
Por el teorema de validez, $T \vDash F \wedge \neg F \implies T$ no puede tener modelos. Esto demuestra el contrarrecíproco. $\diamondsuit$

Corolario 8 (Corolario segundo al teorema 15)**.** El corolario 7 es equivalente al teorema de validez.

Demostración. No se vió. $\diamondsuit$

Parte III

Completitud de la lógica de primer orden

Capítulo 10

Teorías completas y teorema de Lindembaun.

10.1. Introducción

Hasta ahora habíamos visto que una teoría completa era aquella que cumplía el teorema de validez y su recíproco. Podemos enunciar así una primera forma del teorema de Completitud.

> **Teorema 17** (Teorema de completitud. Primera forma.)**.** Sea L un lenguaje, T una L-teoría y $F \in \mathrm{For}(L)$ entonces $T \models F \implies T \vdash F$.

Sin embargo, podemos enunciarlo de otra forma, que es el recíproco al corolario 7, ya que según el corolario 2 al teorema de validez, son equivalentes.

> **Teorema 18** (Teorema de completitud. Segunda forma.)**.** Sea L un lenguaje y T una L-teoría, si T es coherente entonces T tiene un modelo.

Demostración de que las dos formas del teorema de completitud son equivalentes. Vamos a ver que la primera forma del TC $\iff$ la segunda forma del TC.

$\implies$ Vamos a ver que si T no tiene modelos, entonces T es incoherente.
Sea $F \in \mathrm{For}(L)$, F un enunciado entonces, como T no tiene modelos, trivialmente $T \models F \wedge \neq F$.
Por la primera forma (teorema 17) $T \models F \wedge \neq F \implies T \vdash F \wedge \neq F$ y entonces T es incoherente.

$\impliedby$ Vamos a ver que sea $F \in \mathrm{For}(L)$, si $T \nvdash F$ entonces $T \not\models F$, o expresado de otra forma:

$$T \nvdash F \implies T \not\models G, \text{ con } G \text{ el cierre universal de F}$$

Puesto que G es un enunciado podemos hacer uso del corolario 1 al TD. Si $T \nvdash G$ entonces $T \cup \{\neq G\}$ es coherente.
Si es coherente, por la segunda forma (teorema 18) $T \cup \{\neq G\}$ tiene un modelo. Sea $\mathcal{A} \models T \cup \{\neq G\}$, entonces $\mathcal{A} \models T$ y $\mathcal{A} \not\models G \implies T \not\models G \implies T \not\models F$.

$\diamondsuit$

Sin embargo, la demostración del teorema se verá más adelante en el curso.

10.2. Teorías completas

Vamos a ver que para cualquier teoría podemos añadir un conjunto de axiomas que la haga completa. Por ejemplo podemos pasar de la teoría de grupos (que ya vimos que es incompleta) a grupos abelianos divisibles y sin torsión. GADST es una teoría completa.

Ejemplo 25 (*Teorías completas e incompletas*)

(1) *Teoría de grupos:*
La teorías de grupos no es completa. Si $T \vdash \forall x \forall y\ xy = yx \implies T \models \forall x \forall y\ xy = yx$ *por el teorema de validez, sin embargo esto no es cierto. Además, su negación tampoco lo es. Por tanto la teoría de grupos no es completa (no hay modelos).*

(2) $T = \{F \wedge \neq F\}$ *con* F *un enunciado:*
Es una teoría completa. Toda teoría incoherente es trivialmente completa.

(3) *Teoría de una estructura:*
La teoría de una estructura es completa. Sea $\mathcal{A}$ *una* L*-estructura,* $T = \mathrm{te}(\mathcal{A}) = \{F \in \mathrm{For}(L) \mid F$ *enunciado y* $\mathcal{A} \models F\}$. *Sea* $F \in \mathrm{For}(L)$ *un enunciado, entonces* $A \models F$ *o* $A \models \neq F \implies F \in \mathrm{te}(A)$ *o* $\neq F \in \mathrm{te}(A)$ *y por tanto* $\mathrm{te}(A) \vdash F$ *o* $\mathrm{te}(A) \vdash \neq F$ *con una demostración de longitud* 1.

10.3. Teorema de Lindebaum

Parte IV

Apéndices

Capítulo 11

Índices

Lista de definiciones

Lista de teoremas

Lista de ejemplos

Lista de ejercicios