Convolution & Hough Transform

Convolution

1.continuous formula

$$(f*g)(n)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(n-\tau)d\tau$$

2.discrete formula

$$(f*g)(n)=\Sigma_{\tau=-\infty}^{\infty}f(\tau)g(n-\tau)$$

Notice that: $n=\tau+(n-\tau)$

3.example in cv: smoothing

$$f=\begin{bmatrix}a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2}\\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2}\end{bmatrix} g=\begin{bmatrix}b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2}\\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2}\\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2}\end{bmatrix}$$

rotate matrix g 180^o, do simple multiplication, get the new $c_{1,1}$.(g can be simple mean or Gaussian mean)

4.sum:

- 卷积可以理解为瞬时行为的持续性后果。
- 可以理解为先将g翻转，然后滑动叠加。
- cv中作为滤波器(卷积和)

5. Why convolution in deep learning?

- Params sharing: unchanged convolution kernel
- sparsity of connections: output depends only on a small number of inputs(size of convolution kernel)
- translation invariance

6.卷积的意义

- 物理意义可以是：瞬时行为的持续性后果，与Bayes类似，即此时的结果依赖之前的输出\假设
- 卷积的傅里叶变换是函数傅里叶变换的乘积：

$$\text{时 域：}\ F[f(\tau)*g(\tau)]=F(\omega)\cdot G(\omega) \qquad \text{频 域：}\ F[f(\tau)*g(\tau)]=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$$

具有对称性

霍夫变换

1.Params space

直线方程$y=kx+b$ 经极坐标转换后（$k=\frac{-cos\theta}{sin\theta},b=\frac{r}{sin\theta}$），得到：

$$r=xcos\theta+ysin\theta$$

对于点(x_0, y_0)的某个参数（r_0, θ_0），表示通过(x_0, y_0)的一条直线。

则$r = x_0 cos\theta + y_0 sin\theta$表示为通过$(x_0, y_0)$的所有直线,且为正弦函数

$$r = x_0 cos\theta + y_0 sin\theta = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} sin(\theta + \phi), tan\phi = \frac{y}{x}$$

若点(x_1, y_1)的参数方程$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} sin(\theta + \phi), tan\phi = \frac{y}{x}$与$(x_0, y_0)$的参数方程相交于$(r_0, \theta_0)$，则两点间的直线参数为$(r_0, \theta_0)$。

据此可推广，若找出圆、矩形的平面图形，至少需要三点（不共线）的参数方程相交

2.算法原理

（图片需要预处理：抑制噪声、灰度等）

霍夫变换通过accumulator（矩阵）来确定位置参数。accumulator维数等于未知参数的数量（每一'行'表示一个参数）。

因此，对于直线，累加器维度为2，对于圆（平面图形），维度为3.

3.算法优化

- probabilistic Hough transform:

  随机选取点集进行计算（直线检测足够），但要相应降低threshold
- Hough gradient direction：对于平面图形，将累加器降成2维。