期中模拟卷讲评

一、 选择题
（18分，每小题3分）

1. 若随机变量 X 存在正概率点，即存在一点 a，使得 $P\{X=a\}>0$，则 X 为（ C ）。

（A）连续型随机变量　　（B）离散型随机变量

（C）非连续型随机变量　　（D）非离散型随机变量

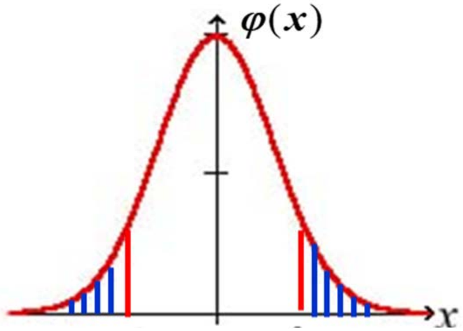
- **连续型随机变量：只在区间上取值，在任何定点的概率为零，且分布函数在实轴上连续；常用概率密度来描述其分布规律，处理工具是微积分**
- **离散型随机变量：其定义域为若干离散点（正概率点），分布函数为阶梯形函数，在间断处右连续；常用分布律来描述其分布规律，处理工具是代数**
- **既不是连续型也不是离散型随机变量，简称为一般类型随机变量：其概率既在区间上取正值，也在定点上取正值，且分布函数有间断点；只能用分布函数来描述其分布规律。**
  - **存在正概率点，不是连续型随机变量，但不能进一步确定是离散型还是一般类型随机变量，只能判定为非连续型随机变量。**

2. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 μ_α 满足 $P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于（ C ）。

上 α 分位点

（A）$u_{\alpha/2}$　　（B）$u_{1-\alpha/2}$

（C）$u_{(1-\alpha)/2}$　　（D）$u_{1-\alpha}$



3. 设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)$，且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，$F(x)$ 为 X 的分布函数，则对任意实数 a，有（ **B** ）。

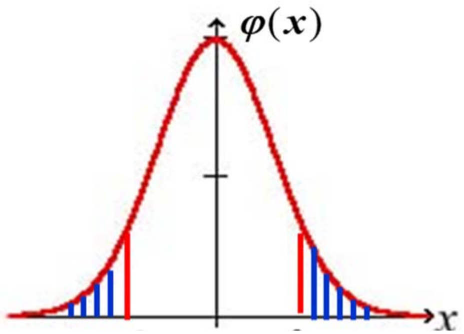
偶函数

（A） $F(-a)=1-\int_0^{\alpha}\varphi(x)\mathrm{d}x$

（B） $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^{a}\varphi(x)\mathrm{d}x$

（C） $F(-a)=F(a)$

（D） $F(-a)=2F(a)-1$



$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-\alpha}\varphi(t)\mathrm{d}t=1-\int_{-\infty}^{a}\varphi(t)\mathrm{d}t=1-\left[\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{\alpha}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]$$

又 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，由对称性有 $\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，

$$F(-a)=1-\left[\frac{1}{2}+\int_0^{a}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}-\int_0^{a}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

4. 已知 $P(A)=0.4, P(B)=0.5$，且 $A \subset B$，则 $P(A|B)=$（ C ）。

（A）0 （B）0.4 （C）0.8 （D）1

- **由于A属于B，所以AB=A，故而 P(A|B)=P(AB)/P(B)=P(A)/P(B)=0.8**

5. 设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布，则（ **D** ）。

（A）$X+Y$ 一定服从正态分布

（B）X 和 Y 不相关与独立等价

（C）(X,Y) 一定服从正态分布

（D）$(X,-Y)$ 未必服从正态分布

- **A不成立，例如，若Y=-X，则X+Y≡0，不服从正态分布。**
- **B也不成，因为“当(X,Y)服从二维正态分布时，X和Y不相关与独立等价”。**
- **C不成立，(X,Y)不一定服从二维正态分布，因为边缘分布一般不能决定联合分布。**
- **D成立，虽然随机变量X和Y都服从正态分布，但因为边缘分布一般不能决定联合分布，故(X,-Y)未必服从正态分布。**

6. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，其分布函数为 $\Phi(x)$，则随机变量 $Y=\min\{X,0\}$ 的分布函数 $F(y)$ 为（ **B** ）。

（A）$F(y)=\begin{cases}1, & y>0,\\ \Phi(y), & y\leqslant 0.\end{cases}$

（B）$F(y)=\begin{cases}1, & y\geqslant 0,\\ \Phi(y), & y<0.\end{cases}$

（C）$F(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \Phi(y), & y>0.\end{cases}$

（D）$F(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \Phi(y), & y\geqslant 0.\end{cases}$

$$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\min(X,0)\leqslant y\}$$
$$=1-P\{\min(X,0)>y\}$$
$$=1-P\{X>y,0>y\}$$

当 $y<0$ 时，$P\{X>y,0>y\}=P\{X>y\},F(y)=1-P\{X>y\}=P\{X\leqslant y\}=\Phi(y)$

当 $y\geq 0$ 时，$P\{X>y,\ 0>y\}=0,\ F(y)=1$

二、 填空题

（18分，每小题3分）

1. 设 A，B，C 是随机变量，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，

则 $P(AB\mid\overline{C})=$________________。

$$P(AB\mid\bar{C})=\frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$$

2. 设 X, Y 是相互独立的随机变量，它们都服从参数为 n, p 的二项分布，则 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$ 服从参数为____________的二项分布。

2n,p 或者 B(2n,p)

3. 设随机变量X服从泊松分布，且$P(X \le 1) = 4P(X = 2)$，则$P(X=3)=$__________。

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}, \quad P(X=2) = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$$

由 $P(X \le 1) = 4P(X=2)$ 知 $e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 2\lambda^2 e^{-\lambda}$

即 $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ 解得 $\lambda = 1$，故

$$P(X=3) = \frac{1}{6} e^{-1}.$$

4. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1 \\ 0, & 其它\end{cases}$，现对 X 进行四次独立重复观察，用 Y 表示观察值不大于 0.5 的次数，则 $EY^2=$______________。

$$Y \sim B(4,\ p),$$

其中 $p=P(X\le 0.5)=\int_0^{0.5} 2x\,dx = x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$,

$$EY=4\times\frac{1}{4}=1,\quad DY=4\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4},$$

$$EY^2=DY+(EY)^2=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}.$$

5. 从数 1、2、3、4 中任取一个数，记为 X，再从 1、2、…、X 中任取一个数记为 Y，则 $P\{Y=2\}=$________________。

解答：本题考查的是全概率公式。

$$P\{Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\}+$$

$$P\{X=2\}P\{Y=2|X=2\}+$$

$$P\{X=3\}P\{Y=2|X=3\}+$$

$$P\{X=4\}P\{Y=2|X=4\}$$

$$=1/4*0+1/4*1/2+1/4*1/3+1/4*1/4=13/48$$

6. 假设某汽车经销商每月的汽车量是一个随机期望为 16，方差为 9 的随机变量，利用切比雪夫不等式给出下月汽车销售量在 10 辆到 22 辆之间概率为________。

$$P\{10 \le X \le 22\} = P\{|X-16| \le 6\}$$

$$=1-P\{|X-16|>6\}$$

$$=1-P\{|X-\mu|>6\}$$

$$=1-P\{|X-\mu|>\varepsilon\}$$

$$\ge 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}=1-\frac{9}{36}=\frac{3}{4}$$

计算题

三、(**10** 分)小明昨晚因为复习期中考太晚了，早 8 的课差点睡过头，急匆匆出门，到了中午才发现钥匙掉了。他想了想，落在宿舍里的概率为 40%，这种情况下找到钥匙的概率为 0.9；落在教室里的概率为 35%，这种情况下找到的概率为 0.3；最惨的是落在路上，概率为 25%，这种情况下找到的概率为 0.1。请同学们帮小明分析分析，他应该去先去哪里找钥匙，找到钥匙的可能性最大？

（1）记 A1，A2，A3 分别为事件钥匙落在宿舍里、落在教室里、落在路上，记 B 为事件找到钥匙，则：

$P(A1)=0.4, P(A2)=0.35, P(A3)=0.25$

$P(B|A1)=0.9, P(B|A2)=0.3, P(B|A3)=0.1$

所以，$P(B)= P(A1)P(B|A1)+ P(A2)P(B|A2)+P(A3)P(B|A3)$

$=0.4\times0.9+0.35\times0.3+0.25\times0.1=0.49$

所以，找到钥匙的概率为 0.49

（2）$P(A1|B)= P(B|A1)P(A1)/P(B)=(0.4\times0.9)/0.49=0.73$

四、（**10 分**）小明昨天在同学们的帮助下，终于找到了钥匙。今天他不敢再晚睡了，早早地就到车站等车到学武楼上课，到了车站发现时间还很早啊，都没人等车，他又实在是懒得走路，于是他看着站牌上的时刻表陷入了沉思。假设公交车起点站于每小时 10 分、30 分、55 分发车，设一小时内乘客到达的时刻为 X，且 $X\sim U(0,60)$，Y 为乘客的候车时间，显然 Y 是随机变量 X 的函数，试求：

（1）Y 与 X 的函数关系式，即 $Y=g(X)$；

（2）乘客候车时间的期望 $E(Y)$。

解析：由于乘客到达车站的时间是随机的，因此如果记乘客到达的时刻为 X，则 X 服从均匀分布，

$$f_X(x)=\frac{1}{60},\quad 0\le x\le 60.$$

设乘客的候车时间为 Y，显然 Y 也是一个与 X 有关的随机变量，即 $Y=g(X)$，

$$g(x)=\begin{cases}10-x, & 0<x\le 10\\ 30-x, & 10<x\le 30\\ 55-x, & 30<x\le 55\\ 70-x, & 55<x\le 60\end{cases}$$

四、（**10 分**）小明昨天在同学们的帮助下，终于找到了钥匙。今天他不敢再晚睡了，早早地就到车站等车到学武楼上课，到了车站发现时间还很早啊，都没人等车，他又实在是懒得走路，于是他看着站牌上的时刻表陷入了沉思。假设公交车起点站于每小时 10 分、30 分、55 分发车，设一小时内乘客到达的时刻为 X，且 $X \sim U(0,60)$，Y 为乘客的候车时间，显然 Y 是随机变量 X 的函数，试求：

（1）Y 与 X 的函数关系式，即 $Y=g(X)$；

（2）乘客候车时间的期望 $E(Y)$。

$$g(x)=\begin{cases}10-x, & 0<x\le 10\\ 30-x, & 10<x\le 30\\ 55-x, & 30<x\le 55\\ 70-x, & 55<x\le 60\end{cases}$$

因此，

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx=\frac{1}{60}\int_0^{60} g(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{60}\left[\int_0^{10}(10-x)\,dx+\int_{10}^{30}(30-x)\,dx+\int_{30}^{55}(55-x)\,dx+\int_{55}^{60}(70-x)\,dx\right]=\frac{625}{60}$$

所以乘客平均候车时间为 10 分 25 秒。

五、（**10 分**）小明的期中考成绩出来了，班级成绩（按百分制计）近似服从正态分布，平均 72 分，且 96 分以上的考生数占 2.3%。求班级考生的成绩在 60 分至 84 分之间的概率。

已知：$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1.25)=0.8944$，$\Phi(1.645)=0.9500$，$\Phi(1.96)=0.9750$，$\Phi(2)=0.9772$

解：设 X 表示考生的外语成绩，且 $X\sim N(72, \sigma^2)$，则

$$P(X>96)=1-P(X\leq 96)=1-\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.023,$$

即 $\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.977$，查表得 $\frac{24}{\sigma}=2$，则 $\sigma=12$，即且 $X\sim N(72, 144)$，

故 $P(60\leq X\leq 84)=P\left(-1\leq \frac{X-72}{12}\leq 1\right)=2\Phi(1)-1=0.682$

六、（12 分）设(X,Y)的概率密度为

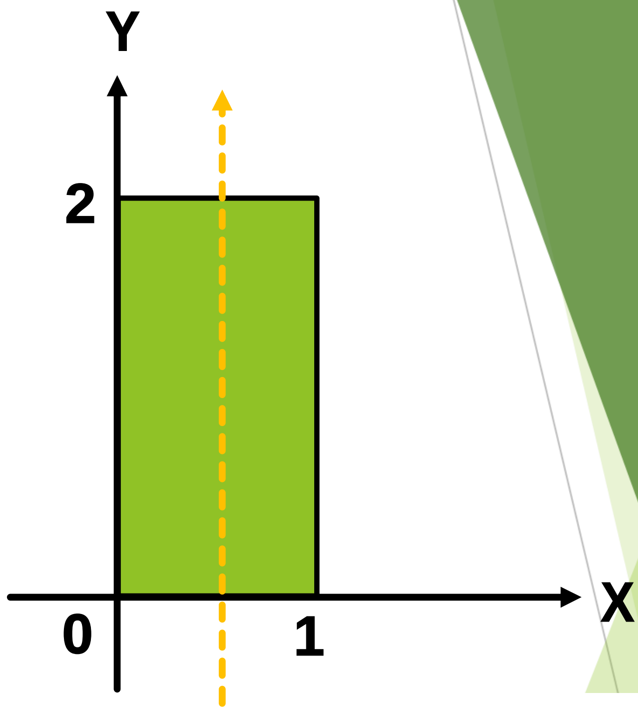
$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+axy, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2, \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

试求：

（1）a 的值；

（2）$P(X+Y\ge 1)$；

（3）X 与 Y 是否相互独立？



解: (1) 由归一性得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2(x^2+axy)\mathrm{d}y=\int_0^1(2x^2+2ax)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}+a\overset{令}{=}1,\ 得\ a=\frac{1}{3}\ 。$$

六、（12 分）设(X,Y)的概率密度为

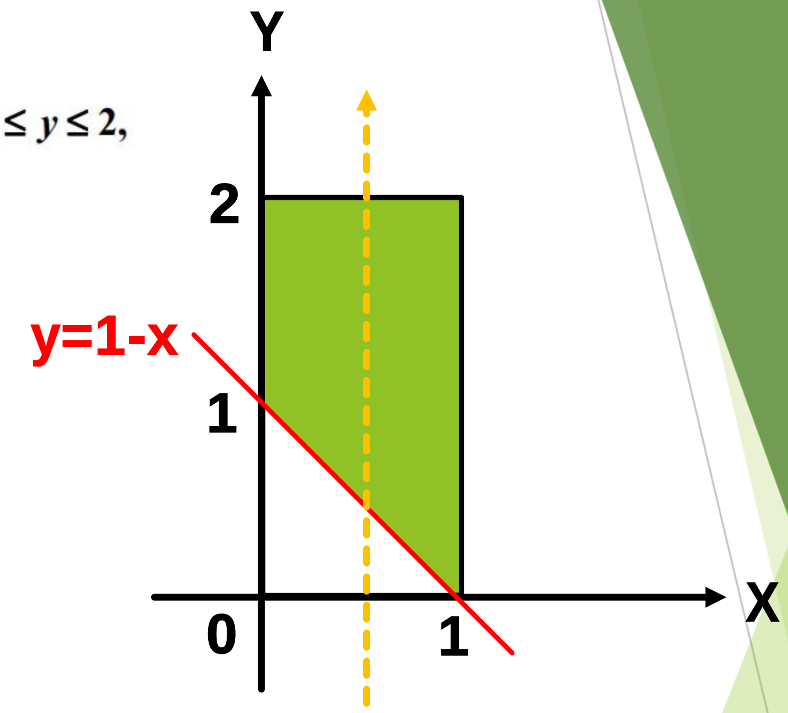
$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+axy\ ,\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2, \\ 0,\ 其它, \end{cases}$$

试求：

（1）a 的值；

（2）$P(X+Y\ge 1)$；

（3）X 与 Y 是否相互独立？



$$(2)\quad P\{X+Y\ge 1\}=\iint\limits_{x+y\ \ge\ 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2}(x^2+\frac{xy}{3})\mathrm{d}y\ =\frac{65}{72}$$

六、（12 分）设(X,Y)的概率密度为

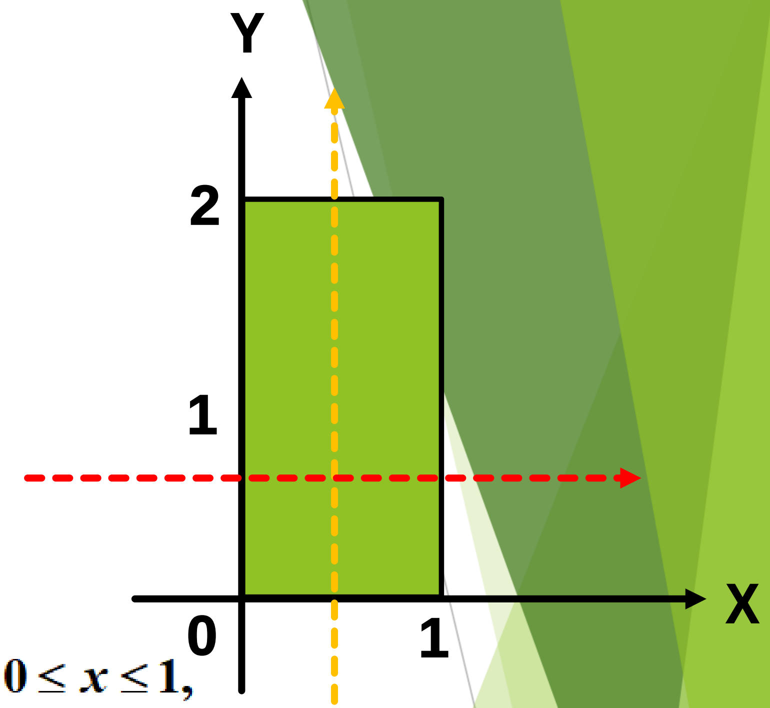
$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+axy, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

试求：

（1）a 的值；

（2）$P(X+Y\ge 1)$；

（3）X 与 Y 是否相互独立？



(3) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} \int_0^2 (x^2+\dfrac{xy}{3})\mathrm{d}y=2x^2+\dfrac{2x}{3}, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} \int_0^1 (x^2+\dfrac{xy}{3})\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}+\dfrac{y}{6}, & 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

在 $f(x,y)$ 的非零区域内 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立。

七、（12 分）假设 $G=\{(x,y):0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$ 是一矩形，随机变量 X 和 Y 的联合分布是区域 G 上的均匀分布．考虑随机变量

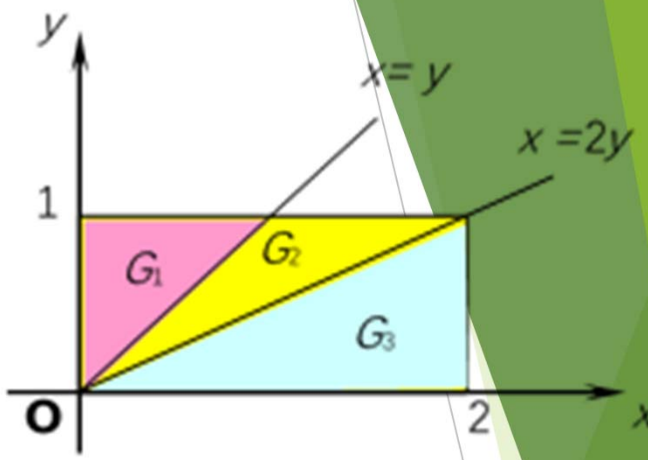
$$U=\begin{cases}0, & 若X\le Y\\ 1, & 若X>Y\end{cases},\qquad V=\begin{cases}0, & 若X\le 2Y\\ 1, & 若X>2Y\end{cases}$$

试求：

（1）二维随机变量 (U,V) 的联合分布律；

（2）$E(U)$ 和 $E(V)$；

（3）U 和 V 的相关系数 ρ.



解 若 $(x,y)\in G$，则 X 和 Y 的联合密度为 $f(x,y)=1/2$，否则 $f(x,y)=0$．直线 $x=y$ 和 $x=2y$ 将矩形 G 分为三部分(见图 4.2): $G_1=\{x<y\},G_2=\{y<x<2y\},G_3=\{x>2y\}$．易见

$$\mathbf{P}\{X<Y\}=\mathbf{P}\{(X,Y)\in G_1\}=\frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}\{Y<X<2Y\}=\mathbf{P}\{(X,Y)\in G_2\}=\frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}\{X>2Y\}=\mathbf{P}\{(X,Y)\in G_3\}=\frac{1}{2}.$$

先求其联合分布．(U,V) 有 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ 等 4 个可能

$$\mathbf{P}\{U=0,V=0\}=\mathbf{P}\{X\le Y,X\le 2Y\}=\mathbf{P}\{X\le Y\}=\frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}\{U=0,V=1\}=\mathbf{P}\{X\le Y,X>2Y\}=0,$$

$$\mathbf{P}\{U=1,V=0\}=\mathbf{P}\{X>Y,X\le 2Y\}=\mathbf{P}\{Y<X\le 2Y\}=\frac{1}{4},$$

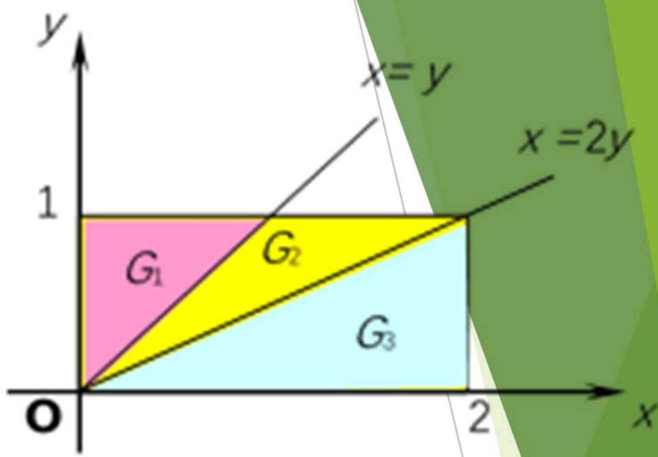
$$\mathbf{P}\{U=1,V=1\}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

由 U 和 V 的联合分布，可得 UV 以及 U 和 V 的分布：

$$UV\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix};\quad U\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix};\quad V\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

七、(12 分) 假设$G=\{(x,y):0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$是一矩形，随机变量 X 和 Y 的联合分布是区域 G 上的均匀分布．考虑随机变量

$$U=\begin{cases}0, & 若X\le Y\\ 1, & 若X>Y\end{cases}, \qquad V=\begin{cases}0, & 若X\le 2Y\\ 1, & 若X>2Y\end{cases}$$



试求：

（1）二维随机变量(U,V)的联合分布律；

（2）$E(U)$和$E(V)$；

（3）U和V的相关系数ρ．

因此，有

$$EU=\frac{3}{4};\ DU=\frac{3}{16};\ EV=\frac{1}{2};\ DV=\frac{1}{4};\ EUV=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{cov}(U,V)=EUV-EU\,EV=\frac{1}{8};$$

$$\rho=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

证明题

八、（5 分）设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1，X_2 的分布函数，且存在点 x_0 使得 $F_1(x_0) > F_2(x_0)$。若 $X_i \sim B(1, p_i)$，$(0 < p_i < 1), i = 1,2$，证明：$p_1 < p_2$。

证明：根据已知条件，$X_i(i=1,2)$ 的分布律为

X_i	0	1
$P\{X_i = k\}$	$1-p_i$	p_i

所以 $X_i(i=1,2)$ 的分布函数为

$$F_i(x)\begin{cases}0, x<0\\1-p_i, 0\le x<1\\1, x\ge 1\end{cases}$$

因为 $F_1(x_0) > F_2(x_0)$，所以 $0 \le x_0 < 1$，且 $1-p_1 > 1-p_2$，所以 $p_1 < p_2$

九、（5 分）设 $P(A)=a$，$P(B)=b$，a,b 均大于 0。证明：$\dfrac{a}{b}\geq P(A|B)\geq\dfrac{a+b-1}{b}$。

证明

$\because\ P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，$P(A)=a$，$P(B)=b$

由概率的性质知 $AB\subset A$ 则

$P(AB)<P(A)=a$

又 $\because\ P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

且 $0\leq P(A\cup B)\leq 1$

$\therefore\ P(AB)\geq a+b-1$

故 $\dfrac{a}{b}\geq P(A|B)\geq[a+b-1]/b$