



**UNIVERSIDAD  
DE GRANADA**

TRABAJO FIN DE GRADO  
INGENIERÍA INFORMÁTICA

# Optimización de Carteras de Inversión con modelos QUBO

---

**Autor**

Luisa María Meseguer Pérez

**Directores**

Pedro Ángel Castillo Valdivieso  
Alejandro Borrallo Rentero



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍAS INFORMÁTICA Y DE  
TELECOMUNICACIÓN

Granada, junio de 2024

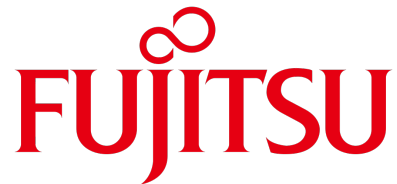








UNIVERSIDAD  
DE GRANADA



# Optimización de Carteras de Inversión con modelos QUBO

---

## **Autor**

Luisa María Meseguer Pérez (alumno)

## **Directores**

Pedro Ángel Castillo Valdivieso (tutor1)

Alejandro Borrallo Rentero (tutor2)



# Optimización de Carteras de Inversión con modelos QUBO

Luisa María Meseguer Pérez (alumno)

**Palabras clave:** qubit, QUBO, dataset, cartera, solver, cuántica, optimización

## Resumen

En un contexto de innovación tecnológica continua y un creciente interés en las aplicaciones de la computación cuántica, este trabajo se centra en la optimización de carteras de inversión utilizando modelos QUBO (Quadratic Unconstrained Binary Optimization). El objetivo principal de este proyecto es explorar diversas aproximaciones existentes de modelos de optimización combinatoria para la optimización de carteras de inversión, realizando un *benchmarking* entre algunas de las aproximaciones más interesantes con diferentes *solvers* de optimización combinatoria.

El desarrollo del proyecto se ha estructurado en varias fases clave. Inicialmente, se realizó una revisión exhaustiva de la teoría de carteras de inversión y de los fundamentos de la computación cuántica. Posteriormente, se diseñó y formuló el problema de optimización de carteras como un modelo QUBO. Este modelo se implementó utilizando diferentes *datasets* para evaluar su eficacia en comparación con los métodos tradicionales. Se exploraron las posibilidades de la computación cuántica para utilizar modelos de optimización combinatoria en simuladores de computadores cuánticos, empleando herramientas y *solvers* cuánticos como los proporcionados por D-Wave y Fujitsu.

Los resultados obtenidos muestran que los modelos QUBO pueden superar en rendimiento a los métodos tradicionales en términos de eficiencia computacional y precisión en la optimización de carteras. En particular, se observó una mejora significativa en la diversificación y maximización de retornos ajustados al riesgo. Los experimentos realizados con diversos datasets demostraron que los solvers cuánticos son capaces de manejar problemas de optimización complejos con una rapidez y eficacia notables.

Este trabajo no solo evidencia el potencial de la computación cuántica en el ámbito financiero, sino que también propone futuras líneas de investigación para expandir estas técnicas a otras áreas de la economía. La incorporación de modelos QUBO en la gestión de carteras podría revolucionar la manera en que se abordan las inversiones, proporcionando herramientas avanzadas para tomar decisiones más informadas y estratégicas.





# Optimization of Investment Portfolios with QUBO models

Luisa María Meseguer Pérez (student)

**Keywords:** qubit, QUBO, dataset, portfolio, solver, quantum, optimization

## Abstract

In a context of continuous technological innovation and a growing interest in quantum computing applications, this work focuses on the optimization of investment portfolios using QUBO (Quadratic Unconstrained Binary Optimization) models. The main objective of this project is to explore various existing approaches of combinatorial optimization models for the optimization of investment portfolios, conducting benchmarking among some of the most interesting approaches with different combinatorial optimization solvers.

The development of the project has been structured in several key phases. Initially, an exhaustive review of investment portfolio theory and the fundamentals of quantum computing was carried out. Subsequently, the portfolio optimization problem was designed and formulated as a QUBO model. This model was implemented using different datasets to evaluate its effectiveness compared to traditional methods. The possibilities of quantum computing for using combinatorial optimization models in quantum computer simulators were explored, employing quantum tools and solvers such as those provided by D-Wave and Fujitsu.

The results obtained show that QUBO models can outperform traditional methods in terms of computational efficiency and precision in portfolio optimization. In particular, a significant improvement was observed in the diversification and maximization of risk-adjusted returns. Experiments conducted with various datasets demonstrated that quantum solvers are capable of handling complex optimization problems with remarkable speed and efficiency.

This work not only highlights the potential of quantum computing in the financial field but also proposes future lines of research to expand these techniques to other areas of the economy. The incorporation of QUBO models in portfolio management could revolutionize the way investments are approached, providing advanced tools for making more informed and strategic decisions.



---

Yo, **Luisa María Meseguer Pérez**, alumna de la titulación Ingeniería Informática de la **Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación de la Universidad de Granada**, con DNI 77766387Y, autorizo la ubicación de la siguiente copia de mi Trabajo Fin de Grado en la biblioteca del centro para que pueda ser consultada por las personas que lo deseen.

Fdo: Luisa María Meseguer Pérez

Granada a julio de 2024.



---

D. **Pedro Ángel Castillo Valdivieso (tutor1)**, Profesor Titular del Departamento de Ingeniería de Computadores, Automática y Robótica de la Universidad de Granada.

D. **Alejandro Borrallo Rentero (tutor2)**, Quantum Computing Lead Scientist en el equipo de Computación Cuántica de Fujitsu España.

**Informan:**

Que el presente trabajo, titulado ***Oprtimización de Carteras de Inversiones con Modelos QUBO***, ha sido realizado bajo su supervisión por **Luisa María Meseguer Pérez**, y autorizamos la defensa de dicho trabajo ante el tribunal que corresponda.

Y para que conste, expiden y firman el presente informe en Granada a X de mes de 2024.

**Los directores:**

**Pedro Ángel Castillo Valdivieso**

**Alejandro Borrallo Rentero**



# Agradecimientos

Gracias a mis tutores Pedro y Alejandro, por su invaluable guía. A mi familia, por su apoyo incondicional, y a mis amigos y compañeros, por su motivación y compañía durante este proceso.





# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>23</b>
1.1. Motivación . . . . .	23
1.2. Definición del Problema . . . . .	25
1.2.1. La complejidad de llevar a cabo una inversión . . . . .	25
1.2.2. Computación cuántica: un cambio de paradigma . . . . .	25
1.3. Objetivos . . . . .	27
1.4. Estructura del Trabajo . . . . .	28
<b>2. Planificación</b>	<b>29</b>
2.1. Requisitos . . . . .	29
2.1.1. Requisitos funcionales . . . . .	29
2.1.2. Requisitos no funcionales . . . . .	29
2.1.3. Requisitos de documentación . . . . .	30
2.2. Presupuesto . . . . .	30
2.3. Planificación Temporal . . . . .	33
<b>3. Introducción a la Teoría de Carteras de Inversión</b>	<b>37</b>
3.1. Tipos de Productos y Carteras . . . . .	38
3.1.1. Elementos de una cartera de inversión . . . . .	39
3.2. Objetivos y Funciones de las Carteras de Inversión . . . . .	39
3.3. Modelos de inversión . . . . .	42
3.4. Tipo de cartera implementada en el proyecto . . . . .	43
<b>4. Introducción a la Computación Cuántica</b>	<b>45</b>
4.1. Contexto Histórico . . . . .	45
4.1.1. Eventos principales . . . . .	46
4.2. Qué es la Computación Cuántica . . . . .	48
4.2.1. Qubit . . . . .	48
4.2.2. Aplicaciones de la computación cuántica . . . . .	50
4.3. Tipos de Computadores Cuánticos . . . . .	51
4.3.1. Computadores cuánticos de puertas lógicas . . . . .	51
4.3.2. Computadores cuánticos adiabáticos . . . . .	54

<b>5. Optimización de Carteras de Inversión con Computación Cuántica</b>	<b>61</b>
5.1. Formulación del problema de optimización de carteras . . . . .	61
5.2. Hamiltoniano para la optimización de carteras . . . . .	62
5.2.1. Diseño del algoritmo cuántico . . . . .	62
5.3. Adaptación del Problema a Diferentes <i>datasets</i> . . . . .	64
5.3.1. Primer <i>dataset</i> . . . . .	64
5.3.2. Segundo <i>dataset</i> . . . . .	69
5.3.3. Tercer <i>dataset</i> . . . . .	70
5.4. Herramientas y <i>solvers</i> cuánticos utilizados . . . . .	71
5.4.1. dadk de Fujitsu . . . . .	72
5.4.2. D-Wave . . . . .	73
<b>6. Experimentos y análisis</b>	<b>77</b>
6.1. Descripción de las Métricas de Evaluación . . . . .	77
6.2. Aplicación y Resultados con el Primer Dataset . . . . .	79
6.2.1. Variables binarias . . . . .	79
6.2.2. Variables enteras . . . . .	80
6.3. Aplicación y Resultados con <i>Datasets</i> Adicionales . . . . .	82
6.3.1. Segundo <i>dataset</i> . . . . .	82
6.3.2. Tercer <i>dataset</i> . . . . .	84
6.4. Visualización de Resultados . . . . .	85
6.4.1. Nubes de puntos de retornos vs volatilidad . . . . .	85
6.4.2. Gráficos de barras de retornos esperados por empresa . . . . .	87
6.4.3. Heatmaps de la covarianza . . . . .	88
6.5. Comparación de <i>Solvers</i> . . . . .	89
6.5.1. Desempeño de dadk . . . . .	89
6.5.2. Desempeño de D-Wave Ocean SDK . . . . .	96
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>101</b>
7.0.1. Líneas de Investigación y Desarrollo Futuras . . . . .	102
7.0.2. Enlace al Repositorio del Trabajo . . . . .	103
<b>Bibliografía</b>	<b>109</b>
<b>A. Formación inicial</b>	<b>111</b>
<b>Glosario</b>	<b>113</b>

# Índice de figuras

2.1. Diagrama de Gantt . . . . .	36
3.1. Simulación de optimización de carteras basada en la frontera eficiente de Markowitz . . . . .	40
4.1. Esfera de Bloch . . . . .	49
4.2. Evolución del Hamiltoniano en el proceso de recocido cuántico. La gráfica muestra cómo el estado inicial del sistema (ground state) debe transicionar al estado final (solución) sin quedar atrapado en mínimos locales. . . . .	56
4.3. Gráfica de energía versus tiempo mostrando la evolución del estado fundamental y la importancia del mínimo gap. Un gap suficientemente grande es crucial para que el sistema permanezca en el estado fundamental durante todo el proceso de recocido cuántico. . . . .	56
5.1. Función <code>build_qubo</code> para el dataset pequeño y variables binarias. . . . .	66
5.2. Función <code>build_qubo</code> para el dataset pequeño y variables enteras. . . . .	69
6.1. Nube de puntos retornos vs volatilidad primer <i>dataset</i> con variables binarias . . . . .	86
6.2. Nube de puntos retornos vs volatilidad primer <i>dataset</i> con variables enteras . . . . .	86
6.3. Nube de puntos retornos vs volatilidad segundo <i>dataset</i> con variables enteras . . . . .	86
6.4. Nube de puntos retornos vs volatilidad tercer <i>dataset</i> con variables enteras . . . . .	86
6.5. <i>Barplot</i> de retornos esperados por empresa primer <i>dataset</i> con variables binarias . . . . .	87
6.6. <i>Barplot</i> de retornos esperados por empresa primer <i>dataset</i> con variables enteras . . . . .	87
6.7. <i>Barplot</i> de retornos esperados por empresa segundo <i>dataset</i> con variables enteras . . . . .	87

6.8. <i>Barplot</i> de retornos esperados por empresa tercer <i>dataset</i> con variables enteras . . . . .	87
6.9. <i>Heatmap</i> de retornos esperados por empresa primer <i>dataset</i> con variables binarias . . . . .	88
6.10. <i>Heatmap</i> de retornos esperados por empresa primer <i>dataset</i> con variables enteras . . . . .	88
6.11. <i>Heatmap</i> de retornos esperados por empresa segundo <i>dataset</i> con variables enteras . . . . .	89
6.12. <i>Heatmap</i> de retornos esperados por empresa tercer <i>dataset</i> con variables enteras . . . . .	89
6.13. Ejecución modelo QUBO con el primer <i>dataset</i> y variables binarias con dadk . . . . .	91
6.14. Ejecución modelo QUBO con el primer <i>dataset</i> y variables enteras con dadk . . . . .	92
6.15. Ejecución modelo QUBO con el segundo <i>dataset</i> y variables enteras con dadk . . . . .	94
6.16. Ejecución modelo QUBO con el tercer <i>dataset</i> y variables enteras con dadk . . . . .	95
6.17. <i>Dashboard</i> del usuario en D-Wave . . . . .	97
6.18. Problemas ejecutados recientemente en D-Wave . . . . .	98

# Índice de tablas

1.1. Estructura del Trabajo de Fin de Grado . . . . .	28
1.2. Estructura del Trabajo de Fin de Grado (II) . . . . .	28
2.1. Listado de Gastos asociados al hardware utilizado . . . . .	31
2.2. Gasto total estimado para el desarrollo del proyecto . . . . .	32
3.1. Clasificación de tipos de productos financieros . . . . .	38
3.2. Componentes de los productos financieros . . . . .	38
3.3. Descripción de la leyenda en la simulación de la frontera eficiente de Markowitz . . . . .	40
3.4. Objetivos y funciones de las carteras de inversión . . . . .	41
3.5. Beneficios y limitaciones de la cartera de inversión seleccionada . . . . .	44
4.1. Comparativa de ventajas y desafíos de los computadores cuánticos adiabáticos . . . . .	59
5.1. Primer <i>dataset</i> . . . . .	65
5.2. Segundo <i>dataset</i> . . . . .	70
5.3. Tercer <i>dataset</i> . . . . .	71
6.1. Resultados de las métricas del modelo QUBO con el dataset pequeño y variables binarias. . . . .	79
6.2. Resultados de las métricas del modelo QUBO con el primer dataset y variables enteras. . . . .	81
6.3. Resultados de las métricas del modelo QUBO con el segundo <i>dataset</i> y variables enteras. . . . .	83
6.4. Resultados de las métricas del modelo QUBO con el tercer <i>dataset</i> y variables enteras. . . . .	84
6.5. Resultados del desempeño del solver híbrido en D-Wave para distintos <i>datasets</i> y tipos de problemas . . . . .	98
6.6. Resultados del desempeño del solver cuántico en D-Wave para distintos <i>datasets</i> y tipos de problemas . . . . .	99
A.1. Programa taller Computación cuántica Eviden . . . . .	112



# Capítulo 1

## Introducción

A lo largo de este capítulo se comentarán los principales retos que emergen en la sociedad relacionados con las carteras de inversión y se llevará a cabo una breve introducción acerca de cómo la Computación Cuántica está a punto de dar lugar a un cambio de paradigma en los problemas de optimización.

### 1.1. Motivación

Durante estos cuatro años de estudio en el Grado en Ingeniería Informática, mis principales motivaciones han sido la inteligencia artificial y el análisis de datos para la resolución de problemas, ya que son, sin duda alguna, una tecnología emergente con un gran potencial para optimizar soluciones ya implementadas, y dar solución a nuevos problemas que hasta ahora no han recibido respuesta.

Uno de los campos que me ha resultado especialmente interesante es el de las inversiones en bolsa. Tradicionalmente, la gestión de carteras de inversión se ha centrado en maximizar el retorno económico [1], balanceando meticulosamente el riesgo y la rentabilidad. Sin embargo, los métodos convencionales a menudo se ven limitados por la capacidad de procesamiento y análisis de datos a gran escala.

Aquí es donde la Computación Cuántica se perfila como un antes y un después. A diferencia de la IA convencional y otros métodos de computación, los ordenadores cuánticos ofrecen una capacidad exponencialmente mayor para analizar variables, reducir la incertidumbre y optimizar los portafolios de inversión con una eficiencia y velocidad inigualables. Esta tecnología no solo promete mejorar los modelos existentes, sino que también tiene el potencial de descubrir patrones y correlaciones que antes eran computacionalmente inaccesibles.

Este interés surgió tras asistir a una ponencia organizada por Fujitsu el pasado 19 de noviembre de 2023 en la E.T.S. de Ingenierías Informática y de Telecomunicaciones de la Universidad de Granada, donde se expuso la complejidad inherente a la gestión de carteras de inversión y cómo la computación cuántica puede abrir un nuevo camino. Este problema captó inmediatamente mi atención, y tras varias conversaciones con profesionales de la empresa, se acordó una colaboración para cotutelar este proyecto.

Fujitsu no solo accedió a proporcionar el acceso a las tecnologías necesarias para su desarrollo, sino que meses después también me ofreció la oportunidad de trabajar con ellos en labores de procesamiento de lenguaje natural y análisis de datos junto con expertos en este sector. Esta experiencia ha enriquecido mi base de conocimiento y ha aumentado mi inquietud con respecto al futuro de la IA y los retos que afronta.

Este Trabajo se centrará, por lo tanto, en explorar cómo la Computación Cuántica puede revolucionar la gestión de carteras de inversión, proponiendo modelos de optimización que superen las limitaciones actuales y abran nuevas vías para la diversificación y maximización de retornos.

Mi motivación para investigar y desarrollar en este ámbito surge de la convicción de que estamos al borde de una nueva era en la ciencia de datos y la inteligencia artificial, una era donde la computación cuántica se convierte en una herramienta crucial para resolver algunos de los problemas más complejos del mundo financiero.



## 1.2. Definición del Problema

La lógica cuántica está emergiendo como una de las principales bases de conocimiento que marcarán el camino para la nueva etapa de la computación. Al mismo tiempo, la complejidad para llevar a cabo inversiones que permitan obtener beneficios está aumentando exponencialmente.

Para poder obtener avances es necesario experimentar nuevas técnicas, analizar y comparar los resultados obtenidos con aquellas que son utilizadas actualmente. Vamos a estudiar los motivos por los cuales la combinación de estos dos campos puede dar lugar a una solución interesante.

### 1.2.1. La complejidad de llevar a cabo una inversión

La toma de decisiones en inversiones se enfrenta a una complejidad creciente en el entorno económico actual. Según Warren Buffet, una de las principales dificultades es la incertidumbre inherente del mercado y la necesidad de un análisis profundo y detallado antes de realizar cualquier inversión significativa. Buffet [2] destaca la importancia de comprender los fundamentos económicos y financieros de cualquier empresa antes de invertir.

Además, las inversiones modernas requieren una comprensión detallada de las tecnologías emergentes y su potencial impacto en los mercados. La integración de nuevas tecnologías como la inteligencia artificial y la computación cuántica en los análisis de inversión puede proporcionar una ventaja competitiva significativa, pero también agrega una capa adicional de complejidad, por lo que presenta riesgos [3] si no se comprenden adecuadamente los fundamentos de las inversiones.

La volatilidad del mercado financiero es otro factor que incrementa la complejidad de las inversiones. Los inversores deben ser capaces de adaptarse rápidamente a las fluctuaciones del mercado y ajustar sus estrategias en consecuencia [4]. Esto requiere una combinación de intuición, experiencia y el uso de herramientas analíticas avanzadas para tomar decisiones informadas.

### 1.2.2. Computación cuántica: un cambio de paradigma

La computación cuántica representa un cambio de paradigma en la forma en que procesamos y analizamos información. A diferencia de la computación clásica, que utiliza bits para representar datos como ceros o unos, la computación cuántica utiliza qubits [5], que pueden existir en múltiples estados simultáneamente debido al fenómeno de la superposición cuántica. Esto permite a los computadores cuánticos realizar múltiples cálculos a la vez, potencialmente optimizando problemas complejos de manera mucho

más eficiente que los computadores clásicos y resolviendo nuevos cuya cantidad de cálculos representarían un cuello de botella para la computación convencional [6].

No obstante, la implementación práctica de la computación cuántica todavía enfrenta varios desafíos técnicos, incluyendo la corrección de errores cuánticos y la necesidad de mantener la coherencia cuántica. Sin embargo, los avances recientes en hardware cuántico y técnicas de corrección de errores están acercando cada vez más la computación cuántica a la realidad comercial. Empresas como Fujitsu, IBM [7] y Google [8] han hecho progresos significativos en la creación de computadores cuánticos funcionales, generando a su vez cierta controversia por qué empresa tiene lidera esta carrera tecnológica.

La combinación de estos avances en computación cuántica con estrategias de inversión podría revolucionar la forma en que analizamos y predecimos el comportamiento del mercado. Dicho de otra forma, la capacidad de procesar y analizar grandes volúmenes de datos de manera eficiente podría proporcionar a los inversores una ventaja sin precedentes [4], permitiéndoles tomar decisiones más informadas y precisas.

### 1.3. Objetivos

La finalidad principal del Trabajo de Fin de Grado es la optimización de carteras de inversión haciendo uso de técnicas de computación cuántica. Para definir cómo se va a verificar que se ha alcanzado el resultado deseado, se ha definido el siguiente listado de subobjetivos:

- **OBJ1.** Entender los principios básicos de las carteras de inversión y conocer las principales técnicas de optimización de beneficios y reducción de riesgos.
- **OBJ2.** Estudiar el funcionamiento de la computación cuántica y técnicas de optimización utilizando computadores adiabáticos.
- **OBJ3.** Aplicar modelos QUBO en la optimización de carteras para evaluar su efectividad y eficiencia comparada con métodos tradicionales.
- **OBJ4.** Desarrollar y validar un conjunto de experimentos utilizando simuladores de computadores cuánticos para resolver problemas de optimización combinatoria en la gestión de carteras.
- **OBJ5.** Explorar las potenciales aplicaciones de la computación cuántica en otras áreas de las finanzas y la economía, y proyectar futuras líneas de investigación y desarrollo tecnológico en este campo.

## 1.4. Estructura del Trabajo

Este Trabajo de Fin de Grado se divide en 7 capítulos, además de un apéndice anexo. El contenido de estos es el siguiente:

Capítulo	Descripción
1	Introducción. Puesta en contexto, definición de motivaciones y objetivos, justificación y estructura general de la memoria.
2	Planificación. Análisis detallado del presupuesto asignado y planificación temporal del proyecto. Incluye los requisitos funcionales, no funcionales y de documentación.
3	Introducción a la Teoría de Carteras de Inversión. Definición de carteras de inversiones, objetivos y funciones, modelos de inversión y el tipo de cartera implementada en el proyecto.
4	Introducción a la Computación Cuántica. Contexto histórico, definición de computación cuántica, tipos de computadores cuánticos y sus aplicaciones.
5	Optimización de Carteras de Inversión con Computación Cuántica. Formulación del problema, adaptación del problema a diferentes <i>datasets</i> y herramientas cuánticas utilizadas.
6	Resultados y análisis. Evaluación del modelo, métricas utilizadas, estudio de casos específicos y comparación con herramientas existentes.
7	Conclusiones y trabajo futuro. Resumen de logros, impacto del proyecto y propuestas para futuras investigaciones.

Tabla 1.1: Estructura del Trabajo de Fin de Grado

Apéndice	Descripción
A	Formación Inicial. Detalles sobre la capacitación y las habilidades técnicas iniciales requeridas antes de comenzar el desarrollo.

Tabla 1.2: Estructura del Trabajo de Fin de Grado (II)

## Capítulo 2

# Planificación

### 2.1. Requisitos

#### 2.1.1. Requisitos funcionales

- **RF1 - Implementación de Modelos QUBO:** Desarrollar y ejecutar modelos QUBO para la optimización de carteras de inversión directamente en un *notebook*.
- **RF2 - Análisis de resultados:** Funciones para analizar y visualizar los resultados de las simulaciones de modelos QUBO, incluyendo comparaciones con modelos tradicionales.
- **RF3 - Exportación de datos:** Permitir la exportación de los resultados de las simulaciones a formatos como CSV para análisis externo.

#### 2.1.2. Requisitos no funcionales

- **RNF1 - Eficiencia computacional:** Optimizar el código para manejar grandes volúmenes de datos y complejas simulaciones sin comprometer el rendimiento.
- **RNF2 - Documentación del código:** Comentarios extensos y documentación en el *notebook* para explicar cómo funciona cada parte del código y cómo se pueden modificar los modelos.
- **RNF3 - Portabilidad:** Asegurar que el *notebook* sea fácilmente ejecutable en diferentes entornos de Google Colab [9] y Jupyter [10] sin necesidad de configuraciones adicionales.

### 2.1.3. Requisitos de documentación

- **RD1 - Guía de usuario para notebook:** Instrucciones detalladas sobre cómo utilizar el notebook, incluyendo cómo ejecutar los modelos y modificar los parámetros.
- **RD1 - Documentación técnica de modelos QUBO:** Explicar los fundamentos teóricos de los modelos QUBO utilizados, con referencias a estudios y publicaciones relevantes.
- **RD1 - Registro de cambios y experimentación:** Documentar los cambios realizados durante el desarrollo y los resultados de las experimentaciones para futuras referencias.

## 2.2. Presupuesto

Este proyecto ha sido llevado a cabo teniendo en cuenta una estimación del coste que tendrían los diferentes componentes que lo componen. Si desglosamos los factores que supondrían gastos en un escenario de investigación realista, encontramos los siguientes elementos:

- Gastos en **Software**: aquellas herramientas y servicios que se han utilizado para el desarrollo del proyecto y la redacción de la memoria.
- Gastos en **Hardware**: dispositivos físicos y servicios de internet y luz para poder trabajar.
- Gastos en **Cómputo Cuántico**: precio equivalente al tiempo invertido en realizar cálculos aritmético-lógicos sobre un computador cuántico.
- Gastos en **Personal Humano**: salario estimado correspondiente a una persona que realice una investigación sobre este área.

Para poder estimar el presupuesto total necesario para llevar a cabo este proyecto, es necesario calcular por separado los costes relativos a cada uno de los elementos anteriores y posteriormente hacer la suma.

### Gastos en software

Empezando por las herramientas Software utilizadas en este proyecto, el gasto ha sido de 0 euros, ya que únicamente se ha hecho uso de aplicaciones o servicios de uso gratuito, como Google Colab para la implementación del modelo QUBO, y Overleaf para la memoria del proyecto.

Asímismo, toda la documentación utilizada para la parte de investigación y cursos de formación sobre Computación Cuántica fueron de libre acceso bien mediante la cuenta institucional de la Universidad de Granada y fuentes públicas de internet, o bien a través de recursos compartidos por Fujitsu, por lo que tampoco supusieron ningún gasto. Esto prueba que para desarrollar este tipo de actividades hay recursos más que suficientes en internet, por lo que simplemente es necesario tener la capacidad de saber buscar la información que se necesita y filtrar entre aquellas fuentes que sean contrastadas y las que no.

### Gastos en hardware

Con respecto a los gastos asociados a los recursos de hardware, será necesario sumar el coste de los dispositivos físicos y de los servicios de luz e internet respectivamente. En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

Elemento	Uds.	Coste unitario	Total
Servicio Luz / mes	6	56,84€	341,04€
Servicio Internet / mes	6	75,40€	452,40€
Ordenador Portátil HUAWEI MATEBOOK X PRO 2021 Intel Core i7-1165G7 1TB NVMe PCIe SSD	1	1.899,00€	1.899,00€
Ordenador Sobremesa Intel Core i7-10700K 3.80 GHz 2x16GB RAM 1TB SSD RTX 3070 OC 8GB GDDR6	1	2.027,15€	2.027,15€
Suma			4.719,59€

Tabla 2.1: Listado de Gastos asociados al hardware utilizado

### Gastos en cómputo cuántico

Para utilizar el simulador de computador cuántico D-Wave [11], es necesario pagar una suscripción durante un período mínimo de tres meses. El precio mensual es de 8.000,00 €, por tanto el coste sería el siguiente:

$$\text{Coste Total} = 8.000,00 \text{ €/mes} \times 3 \text{ meses} = 24.000,00 \text{ €} \quad (2.1)$$

Sin embargo, para este proyecto Fujitsu proporcionó acceso de forma gratuita a una cuenta suscrita a este servicio, por lo que el coste real corrió a cuenta de la empresa.

### Gastos en personal humano

Según lo publicado en el artículo de Glassdoor [12], el salario actual en España asociado a un Quantum Engineer, oscila sobre los 36.912,00€ brutos anuales. Teniendo en cuenta que para llevar a cabo este proyecto se han dedicado unas 360h, vamos a realizar los cálculos pertinentes para averiguar de qué gasto en personal humano se debería de invertir:

$$\text{Salario anual bruto} = 36.912,00 \text{ €}$$

$$\text{Salario mensual} = \frac{\text{Salario anual bruto}}{12 \text{ meses}} = \frac{36.912,00 \text{ €}}{12} = 3.076,00 \text{ € / mes}$$

Ahora, estimando que el horario laboral es de 8 horas diarias repartidas entre 5 días de la semana:

$$\begin{aligned} \text{Salario por hora} &= \frac{\text{Salario mensual}}{8 \text{ horas/día} \times 5 \text{ días/semana} \times 4 \text{ semanas}} \\ &= \frac{\text{Salario mensual}}{160} = \frac{3.076,00 \text{ €}}{160} = 19,23 \text{ € / hora} \end{aligned}$$

Por último multiplicamos las horas invertidas en el proyecto por el precio aproximado por hora:

$$\text{Coste de investigación} = 360 \text{ horas} \times 19,23 \text{ € / hora} = 6.922,80 \text{ €}$$

### Gasto total

Una vez conocemos los gastos de cada tipo de recursos, procedemos a calcular el coste a invertir:

Gasto	Precio Total
Gastos Software	0 €
Gastos en Hardware	4.719,59 €
Gastos en Cómputo Cuántico	24.000,00 €
Gastos en Personal Humano	6.922,80 €
<b>Total</b>	<b>35.642,39 €</b>

Tabla 2.2: Gasto total estimado para el desarrollo del proyecto



## 2.3. Planificación Temporal

El desarrollo del trabajo se ha modularizado a lo largo de estos meses, de modo que se pudieran dividir las tareas en subtareas, y asignando *deadlines* a cumplimentar. Esto facilitó la organización del proyecto y permitió poder avanzar de forma paulatina en todos los objetivos 1.3 a cumplir. Además, se realizaban periódicamente reuniones con los tutores para exponer las actividades desarrolladas y recibir *feedback* del que apoyarse para mejorar tanto la implementación como la redacción de la memoria.

### Diagrama de Gantt

Para ilustrar esta secuencia de actividades, se hizo uso desde el principio de un **Diagrama de Gantt**, que ha ido completándose conforme iban adquiriéndose los resultados previstos. En este pueden verse los estados de desarrollo de cada actividad, el tiempo que ha llevado conseguirlos y otra información de relevancia como el nivel de prioridad asignado.

Entre las tareas realizadas, algunas actividades han sido esenciales para el avance del proyecto. La elección del TFG se realizó en el marco de la Jornada Cátedra "*Tu TFG ó TFM con Fujitsu: Tecnología para las personas*", desarrollada el 5 de octubre de 2023, que marcó el punto de partida para la selección del tema a desarrollar. Posteriormente, el 10 de octubre de 2023, se formalizó el compromiso con los tutores Alejandro y Pedro, y se asignó el proyecto a través de la plataforma SWAD.

La investigación de los fundamentos de la computación cuántica, llevada a cabo entre 23 de octubre y el 20 de noviembre de 2023, me proporcionó las bases teóricas necesarias para el desarrollo del proyecto. Paralelamente, del 28 de octubre al 15 de noviembre de ese mismo año, se realizó el curso "*Qiskit Quantum Global Summer School 2020 de IBM*", que fue fundamental para adquirir conocimientos teóricos y prácticos base en cuanto a computación cuántica respecta.

Otro hito importante fue la investigación acerca de los fundamentos de las Carteras de Inversión y sus principios de optimización, llevada a cabo durante el mes de diciembre. Este período de búsqueda fue de gran ayuda para entender el área financiera aplicada en el proyecto, y se hicieron algunas consultas a expertos del sector sobre cuales eran las funciones objetivo y cuáles eran los cálculos realizados para ello.

La implementación de una DEMO para la demostración del modelo QUBO, realizada la primera quincena de febrero de 2024, sirvió para probar la viabilidad del modelo propuesto. Además, la creación del repositorio de GitHub facilitó un seguimiento más sencillo del código fuente y una mejor gestión del proceso de desarrollo.

La fase de implementación de los *datasets* (pequeño, mediano y grande) culminó el 15 de junio de 2024, marcando el fin de desarrollo práctico del proyecto. Finalmente, la redacción del capítulo *Resultados y Análisis*” de la memoria del proyecto, que documentó los resultados obtenidos y realizó un análisis exhaustivo del trabajo realizado, así como el capítulo de Conclusiones, consolidaron el fin de la memoria.

La planificación de estas actividades y el seguimiento continuo por parte de los tutores han sido determinantes para el cumplimiento de los objetivos establecidos en los plazos previstos. La organización y el avance metódico han garantizado una estructura ordenada y coherente a lo largo de todo el proyecto.



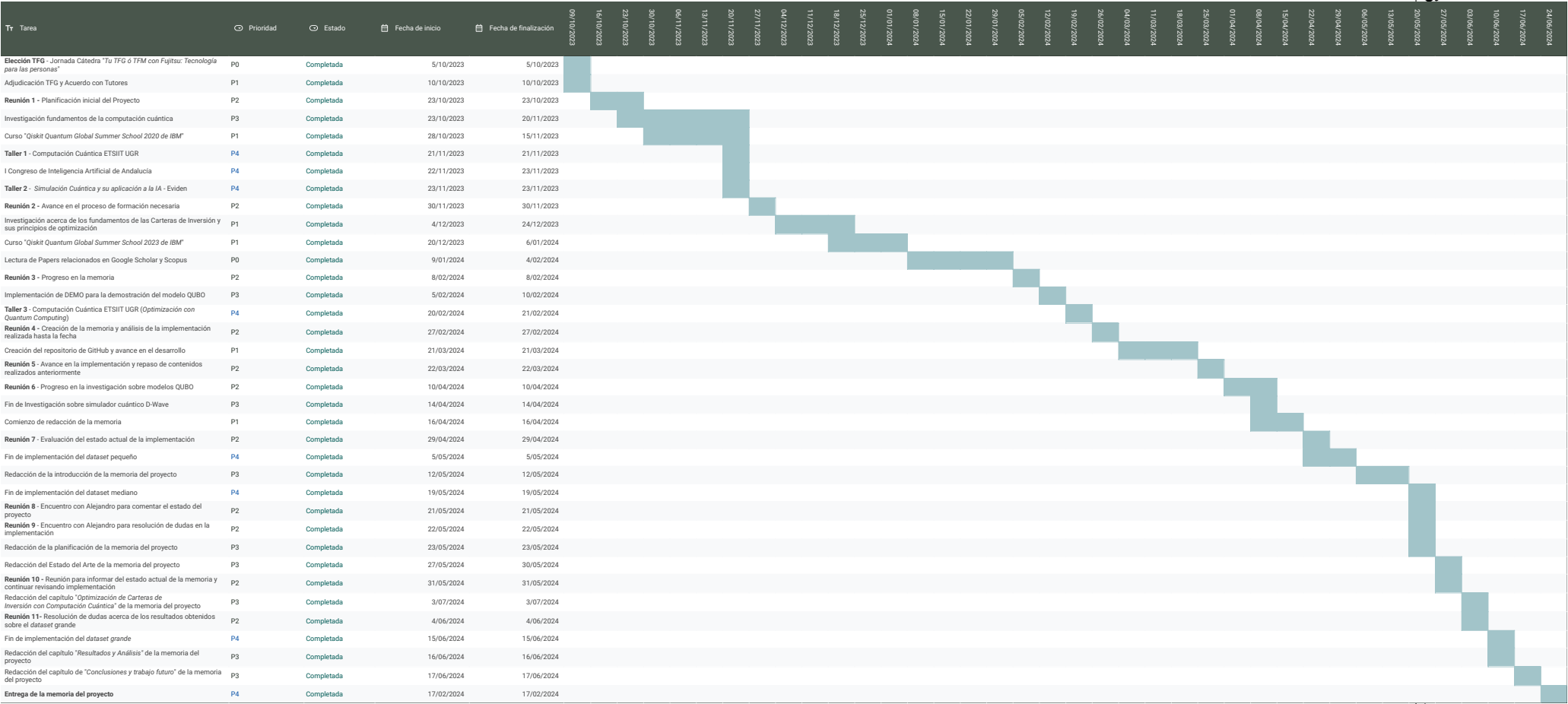


Figura 2.1: Diagrama de Gantt

## Capítulo 3

# Introducción a la Teoría de Carteras de Inversión

Sin duda alguna los acontecimientos históricos han hecho que el sistema monetario y bancario de los países esté en continua mutación, lo que supone que no pueda hablarse de una institución inalterable sino todo lo contrario. Es patente que en las últimas décadas hay lo que ese llama una mayor culturización económica en la que están jugando un gran papel los avances tecnológicos, la facilidad de obtención de información, la idea que a través de los medios se transmite en relación a la globalización que se puede canalizar en inversiones en nuevos mercados, nuevos productos, etc.

Así, al lado de a las operaciones que tienen por finalidad proporcionar financiación a las entidades financieras, existe otro nutrido grupo de operaciones en que lo más importante es el riesgo y el interés percibido, en ocasiones actuando como enlace entre los agentes económicos con distintas necesidades, pero siempre partiendo del hecho de que nos vamos a encontrar con dos palabras sinónimas que son la del ahorro y la de la inversión, aún cuando conceptualmente sean distintas pues los segundos van a tener una capacidad de colocación de recursos superior a sus disponibilidades estando alerta las oportunidades de negocio, a la ampliación de sus actividades, su diversificación o nuevas iniciativas.

En este sentido muchos van a acudir al conocido mercado financiero que no es sino aquel lugar físico o virtual en el que se comercia con activos financieros, esto es, con títulos o anotaciones contables que otorga al comprador o inversor, el derecho a recibir un ingreso futuro procedente del vendedor, buscando siempre y en todo momento generar una rentabilidad, cuando el comprador opte por invertir en distintos activos realizando todo un conjunto de aportaciones que por consiguiente y en la generalidad de los casos y, aunque no siempre obviamente ya que existen carteras de inversión de un solo tipo de activo, se va a diversificar hasta el punto de que en ella incluso

se puede incluir por ejemplo acciones de empresas, oro, divisas, fondos de inversión, esto es, todo tipo de activos financieros que coticen o no en bolsa etc.. Y eso dará lugar a lo que se conoce como una cartera de inversión.

### 3.1. Tipos de Productos y Carteras

Dado que los activos o productos financieros son los que van a constituir el elemento que nos permita lograr ese rendimiento del dinero, básicamente puede decirse porque nos vamos a encontrar con tres tipos con los que poder experimentar en una cartera de inversión.

Ahora bien, a la hora de hablar de los tipos de productos financieros, (Tabla 3.1), nos vamos a encontrar una clasificación a tenor de la cual se puede hablar de productos de ahorro, inversión y financiación, que tendrán que ajustarse al inversor y a la rentabilidad esperada por parte del mismo:

Tipo	Descripción	Ejemplos
Ahorro	Productos en los que se aporta un porcentaje de los ingresos, garantizando un respaldo económico con lo no invertido.	Depósitos, planes de pensiones
Inversión	Productos sin una rentabilidad asegurada debido a su volatilidad financiera.	Fondos, bonos, acciones
Financiación	Productos que aportan capital a través de un bien o interés asegurable que determina el valor a pagar.	Tarjetas de crédito, préstamos

Tabla 3.1: Clasificación de tipos de productos financieros

Sin embargo, como quiera que hay varias maneras de clasificar los productos o activos financieros, con independencia de los tipos a los que se acaba de hacer referencia, también se puede hacer alusión a otra, en el que se va a tener en cuenta otros componentes, como pudieran ser los indicados en la Tabla 3.2.

Componente	Descripción	Ejemplos
Tipo de rentabilidad	Activos de renta fija o de renta variable. El primero implica menor riesgo y menor rentabilidad, mientras que el segundo ofrece mayor riesgo y mayor rentabilidad.	Renta fija: bonos. Renta variable: acciones
Plazo de vencimiento	Dependiendo del plazo en el que se amortice el activo financiero, se hablará de una mayor o menor rentabilidad.	Corto plazo, largo plazo
Titularidad	El activo financiero puede convertir al inversor en titular o propietario o en acreedor de lo adquirido.	Propietario: acciones. Acreedor: bonos
Mercado	Dependiendo del lugar de negociación, se puede hablar de productos financieros del mercado primario o secundario.	Mercado primario, mercado secundario

Tabla 3.2: Componentes de los productos financieros

### 3.1.1. Elementos de una cartera de inversión

Sea como fuere la clasificación de los productos financieros por la que queramos optar, lo cierto es que su variedad es abrumadora, si bien en todo caso todos ellos van a tener unos elementos en común:

- **Rentabilidad:** Lo importante al añadir un producto a una cartera de inversión es la recompensa que se va a obtener, después de que el inversor haya renunciado a su dinero durante un lapso de tiempo y ello se va a expresar a través del tipo de interés, de manera que cuanto más interés aporta el activo mayor es su rentabilidad. Si a mayores se van sumando nuevas aportaciones, se van a generar nuevas ganancias como un nuevo capital sobre las sumas de dinero que inicialmente fueron invertidas.
- **Riesgo:** Íntimamente correlacionado con el anterior y de manera inversa nos encontramos con el riesgo, de tal manera que como existe la posibilidad o probabilidad de que no se cumpla con los compromisos de pago, el riesgo de los activos financieros siempre va a ser mayor y en compensación también la rentabilidad que va a recibir el inversor. Ahora bien, para reducir ese riesgo la inversión tendría que ser a largo plazo pues ello permitiría superar etapas de crisis pero también disfrutar y obtener beneficios en épocas de bonanza. Lo que no sucedería si nos hallamos ante inversiones a corto plazo.
- **Liquidez:** La inversión en activos financieros va unida a que en un determinado momento sea convertible en dinero, por lo que es esencial que cuando ello suceda no vea reducido su valor. En este sentido si hablamos de que un activo es difícil de convertir en dinero va a tener un mayor riesgo, pero también ese factor va a contribuir a que se incremente su rentabilidad.

## 3.2. Objetivos y Funciones de las Carteras de Inversión

Claro que la cuestión se centra en poder determinar lo que entre otros, Harry Markowitz denominó carteras eficientes, ya que lo importante no es la inversión en sí, sino la de poder establecer unas bases que permitan analizar cuando una cartera de inversión es mejor que otra, pero siempre garantizando la obtención de beneficios de cara al inversor, pues está claro que a la hora de invertir nadie quiere perder capacidad económica.

La Figura 3.1 ilustra la simulación de optimización de carteras basada en la frontera eficiente de Markowitz [13]. En esta representación gráfica, el eje horizontal muestra la volatilidad anualizada de las carteras, mientras que el eje vertical indica los retornos anualizados. Cada punto en el gráfico representa una posible configuración de cartera, con el color del punto indicando el ratio de Sharpe, una medida que evalúa el rendimiento ajustado al riesgo de una inversión, donde los colores más cálidos representan ratios más altos. Entre todos estos puntos, destacan los especificados en la Tabla 3.3.

Símbolo	Descripción
Estrella azul	Cartera con el máximo ratio de Sharpe dentro del conjunto simulado, lo cual sugiere que es la cartera que ofrece el mejor equilibrio entre retorno y volatilidad.
Estrella verde	Cartera con la menor volatilidad, adecuada para inversores que priorizan la minimización del riesgo sobre los retornos máximos.

Tabla 3.3: Descripción de la leyenda en la simulación de la frontera eficiente de Markowitz

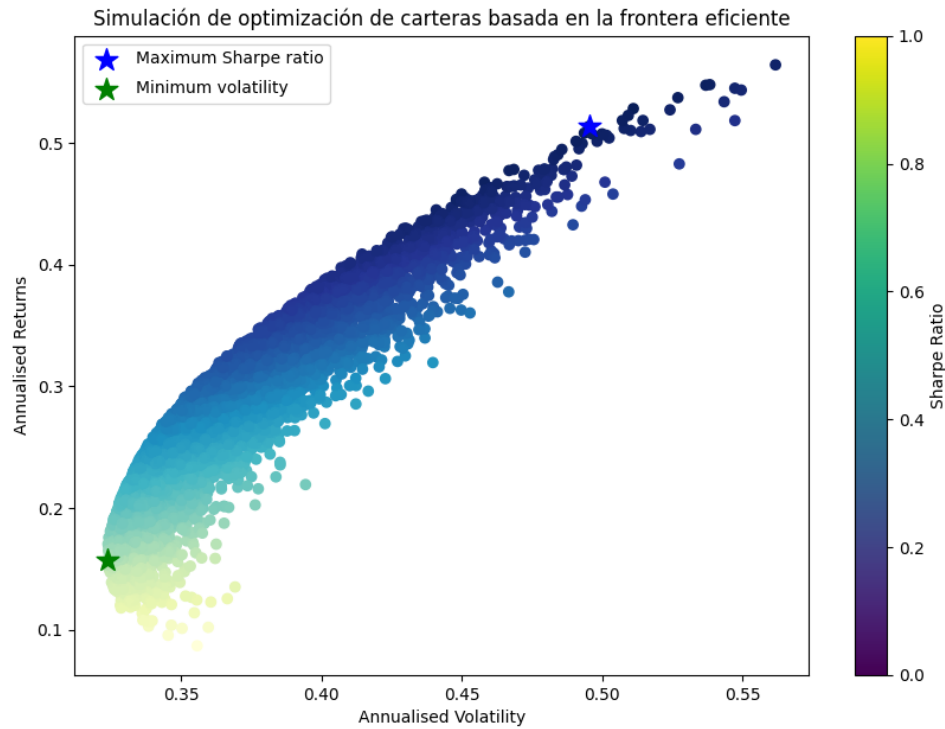


Figura 3.1: Simulación de optimización de carteras basada en la frontera eficiente de Markowitz



La curva que forma el límite superior del conjunto de puntos se conoce como la "frontera eficiente". Las carteras que yacen sobre esta curva representan las combinaciones óptimas de activos que ofrecen la mayor rentabilidad esperada para un nivel dado de riesgo. Optar por una cartera sobre la frontera eficiente significa que no es posible obtener mayores retornos sin aceptar más riesgo, ni reducir el riesgo sin disminuir los retornos esperados, lo cual es crucial para la toma de decisiones estratégicas en inversiones.

También es necesario partir de hecho de que el inversor no siempre va a recurrir al llamado intermediario financiero, esto es, una persona o entidad que desempeña una función económica, como mediador entre los ahorradores y las empresas que precisan financiación, puesto que las carteras de inversión ya no van a ser exclusivas de ningún grupo privilegiado sino que van a estar accesibles a cualquier inversión inversor, en concreto a los llamados inversores minoristas que según la Comisión Nacional del Mercado de Valores son aquéllos que por la menor magnitud de los importes que invierten o por su menor experiencia y conocimientos en los mercados de valores están excluidos de la consideración de profesionales o inversores cualificados.

Por todo ello y estas modificaciones que se han ido produciendo sobre todo en las últimas décadas respecto a la figura del inversor, otro extremo que ha de quedar suficientemente claro es el relativo a los objetivos y las funciones que han de cumplir las denominadas carteras de inversión, especificadas en la Tabla 3.4.

Objetivo/Función	Descripción
Diversificación	Si se invierte solamente en una cartera es obvio que el riesgo se eleva exponencialmente, pero si la inversión se distribuye entre varios activos (p.ej. unos de renta fija y otros de renta variable), el efecto que se va a producir es una reducción del riesgo, mayor si cabe si no hay correlación entre ellos pues las fluctuaciones del mercado no le afectarán a todos por igual porque no existe correlación entre los activos. Es más, se llega incluso a hablar de que tampoco es recomendable cuando se diversifica la inversión, hacerlo solo en un único mercado geográfico.
Equilibrio en la cartera	Si se acaba de hablar de las inversiones diversificadas como forma de obtener una rentabilidad en la que los riesgos sean menores, otro factor a tener en cuenta es que lo ideal sería que pudiese compensarse las inversiones, pues estadísticamente se habla de que cuando la rentabilidad de una está por encima de la media la otra también lo va a hacer, bien cuando una está encima de su media y otra por debajo, se compensarán de tal manera que la rentabilidad de la cartera está más cerca de la media y el riesgo disminuye.

Tabla 3.4: Objetivos y funciones de las carteras de inversión

### 3.3. Modelos de inversión

Hasta ahora y dentro de los límites del estudio que se lleva a cabo en el presente TFG que no permiten un análisis pormenorizado de las carteras de inversión sino una visión global de las mismas, decir que se señaló antes que uno de los motivos por el que se lleva a cabo todo este tipo de inversiones viene dado por el hecho de que quien las lleva a cabo, lo que trata es de obtener un beneficio económico, una utilidad, como pudiera ser complementar la pensión, equilibrar una posible inflación, etc.

Desde este punto de vista y aquel del que se habló un respeto a la personalidad del inversor, permite incluso afirmar que las carteras de inversión también se han de adaptar a éste, a lo que se denomina su perfil de riesgo, pues ello va a derivar en su comportamiento y en definitiva la constitución de una cartera óptima, ya que como ya advirtió la CNMV [14] *“un riesgo inadecuado, ya sea porque no se haya determinado correctamente el perfil, o porque conociendo el perfil los productos no encajen en él, puede provocar más de un disgusto”*. Así, nos vamos a encontrar básicamente con:

1. **Carteras conservadoras**, o como las llamaron Pim van Vliet et. al [15] en su libro, El pequeño libro de los altos rendimientos con bajo riesgo, ‘valores aburridos’. Van a ser todas aquellas constituidas mayoritariamente por inversores que no quieren poner en riesgo su capital, y en todo caso el único tolerable para ellos va a ser aquel que se considere, a lo sumo, muy bajo. De ahí que generalmente invierta en activos de renta fija a largo plazo (deuda pública - letras, pagarés y bonos- e inclusive deuda privada - bonos y pagarés-), el valor seguro que supone la compra de oro, inmuebles, etc, y como mucho destine entre un 15 y un 20 % de su inversión a renta variable.
2. **Carteras moderadas**: Lo que se trata es de lograr un equilibrio entre el mantenimiento del capital propio y un ligero crecimiento patrimonial [16], puesto que en este caso el inversor lo que va a tolerar es una exposición de su patrimonio que se califica de intermedio, de tal manera que por lo que se va inclinar es por activos de renta fija también como en el caso anterior y un porcentaje que suele estimar en un 35 % como activos a largo plazo y de renta variable. Es decir, por una cartera equilibrada que va a permitir hablar de estabilidad del patrimonio del inversor, así como a mostrar una satisfactoria expectativa de rentabilidad ajustada al riesgo [17].

3. **Carteras agresivas:** Este tercer grupo va a estar integrado por inversores, normalmente expertos y que gozan de los conocimientos suficientes del mercado ya que lo que tratan es de lograr la mayor rentabilidad sometiendo su capital a un riesgo elevado [18], ya sea mediante rentas variables o activos similares, pero también diversificando sus inversiones para mitigar el riesgo en cada una de ellas.

### 3.4. Tipo de cartera implementada en el proyecto

Como se expuso anteriormente, al construir un portfolio uno de los principales factores a tener en cuenta es el perfil de riesgo en el que se engloba la capacidad para asumir el mismo, de manera que cuanto más volatilidad de una cartera, más es el riesgo. Volatilidad que se calcula a través de una compleja operación que enfrenta la media de todas las rentabilidades durante un periodo de tiempo y la rentabilidad obtenida en cada sesión. Cuanto mayor sea el periodo en el que se haya tomado la volatilidad, mayor solidez tendrá el indicador y menor será la desviación de la inversión.

Antes se habló de los nuevos desafíos que se han abierto en el ámbito financiero por los cambios producidos en los últimos años, pero claro, también a ello se añade que éste no está excluido de ser asimismo afectado por la IA, por la computación cuántica, por el procesamiento cuántico que proporciona soluciones nuevas, pero que se ha llegado a calificar de que puede llegar a desempeñar un papel altamente disruptivo y transformador de la realidad, pero que también llegará a proporcionar la obtención de resultados satisfactorios para el inversor en un menor espacio de tiempo y con algoritmos de gran profundidad que poco a poco tenderán a ser seguros y eficientes.

#### Razonamiento detrás de la selección

La elección de una cartera de inversión moderada se justifica por el perfil de riesgo de los inversores y la búsqueda de maximización de la rentabilidad ajustada al riesgo. Según la teoría moderna de carteras, una diversificación adecuada puede minimizar el riesgo sin comprometer significativamente la rentabilidad [19]. La formulación de la varianza de una cartera, donde  $w_i$  representa la proporción del activo  $i$  en la cartera y  $\sigma_{ij}$  la covarianza entre los retornos de los activos  $i$  y  $j$ , se expresa como:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

Al utilizar un modelo QUBO para la optimización de este tipo de cartera, puede minimizarse esta varianza sujeta a un retorno deseado, y por tanto maximizar la eficiencia según el perfil de riesgo del inversor [20].

### Beneficios y limitaciones

En un entorno tan cambiante como el mercado financiero, se hace imperativo analizar detalladamente los beneficios y limitaciones de la cartera de inversión seleccionada. A través de la siguiente Tabla 3.5, podemos ver cómo en este contexto resulta ser la mejor elección.

Aspecto	Detalle
Beneficio 1	Diversificación eficiente: permite reducir los riesgos mediante la inversión en una variedad de activos, lo cual ayuda a mitigar las fluctuaciones de mercado negativas [19].
Beneficio 2	Equilibrio riesgo-retorno: combina renta fija y variable para un crecimiento de capital con aversión al riesgo moderada [21].
Beneficio 3	Adaptabilidad tecnológica: compatibilidad con modelos QUBO para optimizar la asignación de activos en tiempo real, respondiendo a las condiciones cambiantes del mercado [20].
Limitación 1	Complejidad operacional: requiere conocimientos avanzados en optimización financiera, representando un esfuerzo extra para un ingeniero en computación cuántica con menor experiencia en el ámbito de las carteras de inversión [20].
Limitación 2	Dependencia de modelos predictivos: los resultados dependen fuertemente de la precisión de estos modelos, pudiendo llevar a decisiones subóptimas si los modelos o supuestos son erróneos [22].
Limitación 3	Costos asociados: el uso incorrecto de esta tecnología y la gestión activa pueden incrementar los costos, reduciendo la rentabilidad neta para los inversores [21].

Tabla 3.5: Beneficios y limitaciones de la cartera de inversión seleccionada

## Capítulo 4

# Introducción a la Computación Cuántica

### 4.1. Contexto Histórico

Nuestro mundo está regido por las leyes de la física, capaces de explicar fenómenos como la caída de una manzana de un árbol o el movimiento de los planetas. Por ello, la física clásica se considera determinista, ya que permite prever el comportamiento de un cuerpo a partir de sus leyes. Sin embargo, a finales del siglo XIX, surgió una crisis en la física debido a la aparición de un fenómeno que no podía ser explicado con sus leyes: la catástrofe ultravioleta [23]. Esta situación planteaba que, según las teorías clásicas, los cuerpos negros a temperatura constante emitirían energía infinita a frecuencias ultravioletas, lo cual es físicamente imposible.

Muchos científicos intentaron resolver este enigma sin éxito hasta que, en el año 1900, Max Planck propuso una solución revolucionaria [24]. Planck sugirió que la energía no es continua, sino que se distribuye en pequeños paquetes llamados cuantos. Esta propuesta fue crucial para resolver el problema de la radiación del cuerpo negro, indicando que la energía emitida o absorbida por los átomos ocurre en unidades discretas.

Posteriormente, experimentos como el efecto fotoeléctrico de Albert Einstein confirmaron la validez de las ideas de Planck, mostrando que existía una física diferente a la tradicional, con leyes propias aplicables al mundo subatómico. En 1913, Niels Bohr propuso el modelo atómico [25] en el cual las órbitas de los electrones alrededor del núcleo tienen energías específicas y cuantificadas. Los electrones pueden cambiar de órbita al absorber o liberar energía, es decir, saltando entre orbitales, tal como lo propuso Planck. Estos descubrimientos marcaron el inicio de una serie de experimentos para comprender el mundo subatómico, el mundo cuántico.

En la década de 1980, con la aparición de los ordenadores personales y sin interfaz gráfica, surgió el concepto teórico de la computación cuántica. Ese mismo año, Paul Benioff propuso un modelo cuántico de la máquina de Turing que utilizaba un bit cuántico, o qubit. Al año siguiente, Richard Feynman publicó el artículo "Simulando Física con Computadoras" [26], en el que argumentaba que las computadoras tradicionales no podían simular los fenómenos del mundo subatómico y proponía el desarrollo de computadoras cuánticas. Este artículo marcó un punto de partida para la teoría y el desarrollo de la computación cuántica, apoyándose en décadas de investigación y experimentación en mecánica cuántica.

#### 4.1.1. Eventos principales

A continuación, se presenta una línea de tiempo con los hitos más relevantes en el desarrollo de la computación cuántica:

- **1900: Max Planck y los cuantos**  
Max Planck resuelve la catástrofe ultravioleta al introducir el concepto de los cuantos [27], estableciendo las bases de la mecánica cuántica.
- **1913: Modelo atómico de Bohr**  
Niels Bohr [25] propone el modelo atómico cuántico, en el cual los electrones giran en órbitas cuantificadas alrededor del núcleo.
- **1927: Principio de incertidumbre de Heisenberg**  
Werner Heisenberg publica el principio de incertidumbre, estableciendo que es imposible conocer simultáneamente la posición y el momento de una partícula cuántica con precisión [28].
- **1980: Modelo cuántico de la máquina de Turing**  
Paul Benioff diseña un modelo cuántico de la máquina de Turing [29], demostrando teóricamente la posibilidad de las computadoras cuánticas.
- **1981: Propuesta de Richard Feynman**  
Richard Feynman propone la construcción de computadoras cuánticas en su artículo "Simulando Física con Computadores" [30], iniciando formalmente la investigación en computación cuántica.
- **1985: Primer algoritmo cuántico**  
David Deutsch presenta el primer algoritmo cuántico, conocido como el algoritmo de Deutsch, mostrando una ventaja teórica sobre los algoritmos clásicos.

- **1992: Algoritmo Deutsch-Jozsa**

David Deutsch y Richard Jozsa [31], presentan un algoritmo cuántico que demuestra que la computación cuántica puede realizar ciertos cálculos más rápidamente que la computación clásica.

- **1994: Algoritmos de Shor y Grover**

Peter Shor [32] presenta un algoritmo cuántico capaz de factorizar grandes números, poniendo en riesgo la seguridad de los cifrados tradicionales. El mismo año, Lov Grover introduce un algoritmo para búsquedas eficientes en bases de datos no ordenadas.

- **1998: Primer computador cuántico de dos qubits**

Investigadores del MIT y de la Universidad de California en Berkeley [33] crean el primer computador cuántico operativo de dos qubits, demostrando la viabilidad experimental de los principios cuánticos en la computación.

- **1999: Fundación de D-Wave Systems**

Se funda D-Wave Systems, la primera empresa dedicada exclusivamente a la computación cuántica, marcando el comienzo de la comercialización en este campo.

- **2011: Primera computadora cuántica comercial**

D-Wave Systems lanza la primera computadora cuántica comercial, la D-Wave One [34], equipada con 128 qubits.

- **2016: IBM Quantum Experience**

IBM introduce la computación cuántica en su plataforma IBM Cloud, permitiendo el acceso remoto a sus procesadores cuánticos.

- **2019: Supremacía cuántica de Google**

Google anuncia haber alcanzado la supremacía cuántica con su procesador Sycamore [8], afirmando que realizó un cálculo en minutos que una supercomputadora clásica tardaría miles de años en completar. IBM cuestiona esta afirmación.

- **2021: Supremacía cuántica de IBM**

IBM anuncia su procesador cuántico Eagle [35], superando por primera vez la barrera de los 100 qubits, con una capacidad de 127, siendo este un avance significativo en la escalabilidad de la computación cuántica.

- **2022: IBM presenta Osprey**

IBM lanza Osprey [36], un procesador cuántico con 433 qubits, avanzando significativamente en la escalabilidad de la computación cuántica.

## 4.2. Qué es la Computación Cuántica

La computación cuántica es una rama de la informática que utiliza los principios de la mecánica cuántica para procesar información de una manera que no es posible con las computadoras clásicas. Surgió como respuesta a la incapacidad de estas últimas para simular fenómenos cuánticos. En los años 1980, se inició formalmente la investigación en este campo con propuestas teóricas de modelos cuánticos de máquinas de Turing y algoritmos cuánticos.

La mecánica cuántica, descubierta a principios del siglo XX, revela que las partículas subatómicas pueden existir en múltiples estados al mismo tiempo (superposición) y pueden estar correlacionadas de manera instantánea a grandes distancias (entrelazamiento). Estos fenómenos son aprovechados por las computadoras cuánticas para realizar cálculos mucho más rápidamente que las computadoras tradicionales.

### 4.2.1. Qubit

Un qubit es la unidad básica de información en un computador cuántico. A diferencia de un bit clásico que toma los valores 0 o 1, un qubit puede tomar esos valores o tomar una combinación de los mismos.

Matemáticamente, un qubit se representa como:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son amplitudes de probabilidad complejas. Estas amplitudes están sujetas a la condición de normalización, que asegura que la suma de las probabilidades de los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  sea igual a 1. Matemáticamente, esto se expresa como  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Esta relación garantiza que el qubit esté en un estado cuántico válido.

La **esfera de Bloch** es una representación gráfica del estado de un qubit, donde cualquier estado de un qubit se puede representar como un punto en la superficie de una esfera de radio una unidad. Los polos de la esfera representan los estados básicos  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , mientras que cualquier otro punto en la superficie de la esfera representa una combinación de estos estados. La representación es:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

donde  $\theta$  y  $\phi$  son los ángulos que definen la posición en la esfera, que son los grados de libertad de un qubit, la latitud y la longitud.



Una característica distintiva de la computación cuántica es que, al medir un qubit, podemos obtener el estado  $|0\rangle$  con una probabilidad de  $|\alpha|^2$  o el estado  $|1\rangle$  con una probabilidad de  $|\beta|^2$ . Después de la medición, el qubit queda en un estado definido y se pierde la superposición inicial de estados, de modo que cualquier medición posterior del mismo qubit dará siempre el mismo resultado.

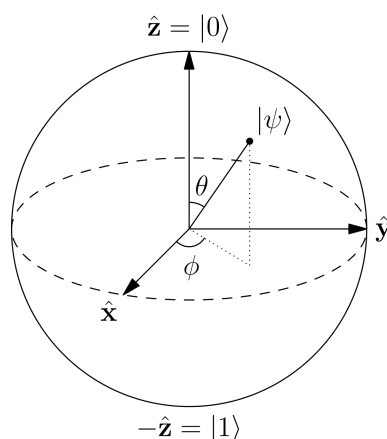


Figura 4.1: Esfera de Bloch

Las propiedades clave de los qubits son las siguientes:

- **Superposición:** Un qubit puede existir en múltiples estados al mismo tiempo. Esto permite a una computadora cuántica procesar una enorme cantidad de posibilidades simultáneamente, proporcionando una capacidad de procesamiento exponencialmente mayor en comparación con las computadoras clásicas.
- **Entrelazamiento:** Dos qubits pueden estar entrelazados de tal manera que el estado de uno depende instantáneamente del estado del otro, independientemente de la distancia que los separa, lo que permite una comunicación y una sincronización extremadamente rápidas entre qubits.
- **Interferencia:** Permite que varias partículas combinen sus estados, afectando así el estado de la partícula resultante. Este fenómeno se utiliza para amplificar las señales correctas y cancelar las incorrectas, mejorando la precisión de los cálculos.
- **Principio de incertidumbre de Heisenberg:** Es imposible conocer con precisión el estado de una partícula cuántica en un momento determinado, ya que al medirla, se modifica su estado.

### 4.2.2. Aplicaciones de la computación cuántica

Son numerosas las aplicaciones que tiene esta tecnología, entre ellas destacan las siguientes:

- **Simulación Molecular y de Materiales:** Las computadoras cuánticas pueden simular el comportamiento de moléculas a nivel cuántico, lo cual es vital para el desarrollo de nuevos medicamentos y materiales. Esta capacidad supera las limitaciones de las simulaciones clásicas, que son incapaces de manejar la complejidad de las interacciones moleculares a gran escala.
- **Optimización:** Problemas de optimización en logística, finanzas y diseño industrial pueden resolverse más eficientemente con algoritmos cuánticos. Esto se debe a que las computadoras cuánticas pueden evaluar múltiples soluciones simultáneamente y encontrar la óptima en menos tiempo.
- **Criptografía Cuántica:** La computación cuántica tiene el potencial de revolucionar la criptografía. Algoritmos como el de Shor pueden factorizar números grandes de manera eficiente, lo que pone en riesgo los sistemas de cifrado actuales basados en la dificultad de esta tarea. Por otro lado, la criptografía cuántica, utilizando principios como el entrelazamiento y la distribución cuántica de claves (QKD), promete comunicaciones ultra seguras que son intrínsecamente resistentes a la interceptación. Esto ha hecho que empresas como Google o Meta ya estén utilizando algunos algoritmos de criptografía post cuántica.
- **Inteligencia Artificial y ML (*Machine Learning*):** La computación cuántica puede acelerar significativamente el entrenamiento de modelos de *machine learning*, permitiendo manejar conjuntos de datos masivos con mayor rapidez y precisión.
- **Meteorología:** Las computadoras cuánticas pueden mejorar significativamente las predicciones meteorológicas y los modelos climáticos al procesar enormes cantidades de datos ambientales de manera más eficiente. Esto podría llevar a una mejor comprensión y respuesta a los fenómenos climáticos extremos.
- **Seguridad *Cloud*:** La seguridad de la nube se puede fortalecer significativamente mediante la aplicación de la física cuántica, especialmente a través de la criptografía cuántica que utiliza la distribución cuántica de claves (QKD). Este método asegura las comunicaciones al hacer que cualquier intento de interceptación altere el estado cuántico de la transmisión, revelando así la intrusión y protegiendo la integridad de los datos.

### 4.3. Tipos de Computadores Cuánticos

Actualmente existen diversos tipos de computadores cuánticos, entre los que se encuentran los computadores de puertas y los adiabáticos.

#### 4.3.1. Computadores cuánticos de puertas lógicas

Los computadores cuánticos de puertas lógicas son dispositivos que utilizan principios de la mecánica cuántica, como la superposición y el entrelazamiento, para realizar cálculos de manera más eficiente. Al igual que los ordenadores clásicos que operan con puertas lógicas clásicas (AND, OR, NOT), estos computadores cuánticos realizan cálculos mediante la aplicación de una secuencia de operaciones cuánticas, conocidas como "puertas cuánticas", sobre qubits. Este modelo es análogo a la computación clásica basada en puertas lógicas.

#### Puertas lógicas cuánticas

Las puertas lógicas cuánticas se representan mediante matrices unitarias que actúan sobre las amplitudes de probabilidad de los qubits. Éstas son matrices cuadradas  $U$  que cumplen la condición  $U^\dagger U = UU^\dagger = I$ , donde  $U^\dagger$  es la conjugada transpuesta de  $U$ , e  $I$  es la matriz identidad. Esta propiedad garantiza que las transformaciones realizadas por las puertas cuánticas sean reversibles y conserven la norma del estado cuántico, una característica esencial para la coherencia y la no pérdida de información en los sistemas cuánticos.

Consideramos la matriz unitaria  $U$  y su conjugada transpuesta  $U^\dagger$ :

$$U = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^\dagger = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### Ejemplos de puertas lógicas cuánticas

A continuación se presentan algunos ejemplos de puertas lógicas cuánticas comunes:

- **Puerta Pauli-X:** La puerta X actúa como una puerta NOT en la computación clásica, invirtiendo el estado del qubit. En la esfera de Bloch, esta puerta equivale a una rotación de  $\pi$  (180 grados) alrededor del eje X. Su representación unitaria es:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y su acción sobre un qubit en estado superpuesto es:

$$\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle \xrightarrow{X} \alpha_1|0\rangle + \alpha_0|1\rangle$$

- **Puerta Pauli-Y:** La puerta Y aplica una rotación de  $\pi$  (180 grados) en el eje Y de la esfera de Bloch. Su representación unitaria es:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

y su acción sobre un qubit en estado superpuesto es:

$$\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle \xrightarrow{Y} i\alpha_1|0\rangle - i\alpha_0|1\rangle$$

- **Puerta Pauli-Z:** La puerta Z aplica una rotación de  $\pi$  (180 grados) en el eje Z de la esfera de Bloch. Cambia de signo la amplitud cuando se aplica al estado del qubit  $|1\rangle$  y lo deja igual cuando se opera con el estado del qubit  $|0\rangle$ . Su representación unitaria es:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y su acción sobre un qubit en estado superpuesto es:

$$\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle \xrightarrow{Z} \alpha_0|0\rangle - \alpha_1|1\rangle$$

- **Puerta Hadamard (H):** La puerta H gira entre los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  respectivamente, es decir, pone al qubit en una superposición igual de ambos estados. En la esfera de Bloch, esta puerta equivale a una rotación de  $\pi/2$  (90 grados) alrededor del eje Y seguida de una rotación de  $\pi$  (180 grados) alrededor del eje X. Su representación unitaria es:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y su acción sobre un qubit en estado  $|0\rangle$  o  $|1\rangle$  es:

$$|0\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|1\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

- **Puerta CNOT (Controlled-NOT):** La puerta CNOT es una puerta de dos qubits que invierte el estado del qubit objetivo si y solo si el qubit de control (que es invariante en la transformación) está en el estado  $|1\rangle$ . En la esfera de Bloch, esta puerta crea entrelazamiento entre dos qubits. Su representación unitaria es:

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y su acción sobre dos qubits en estado  $|a\rangle|b\rangle$  es:

$$|a\rangle|b\rangle \xrightarrow{\text{CNOT}} |a\rangle|a \oplus b\rangle$$

donde  $\oplus$  denota la suma módulo 2.

- **Otras Puertas:** Además de las puertas mencionadas, existen otras puertas lógicas cuánticas como la puerta SWAP, Toffoli y Fredkin, que realizan operaciones más complejas y entrelazan múltiples qubits.

## Medición en computación cuántica

Al final de la computación, los qubits son medidos. Esta acción se representa en los diagramas de los circuitos cuánticos como una puerta especial con símbolo un medidor.



La medición colapsa el estado cuántico de un qubit en uno de los estados base  $|0\rangle$  o  $|1\rangle$ , proporcionando el resultado de la computación. Este colapso es fundamental para obtener resultados concretos de un cálculo cuántico, pues transforma la información que estaba en una forma cuántica (superposición de estados) a una forma clásica que podemos entender y registrar. Así, la medición es el puente entre el mundo cuántico y nuestra realidad clásica, permitiendo que la información procesada cuánticamente sea observada y utilizada en el mundo real.

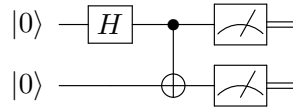
## Ejemplo de circuito cuántico

Un circuito cuántico típico puede incluir las siguientes etapas:

- **Inicialización:** Todos los qubits se inicializan en el estado  $|0\rangle$ .

- **Aplicación de Puertas:** Se aplican diversas puertas lógicas cuánticas a los qubits para manipular su estado. Por ejemplo, aplicar una puerta Hadamard a un qubit para crear una superposición y usar una puerta CNOT para entrelazar dos qubits.
- **Medición:** Finalmente, se miden los qubits para obtener el resultado.

El siguiente diagrama muestra un ejemplo simple de un circuito cuántico:



En este ejemplo:

- El primer qubit pasa por una puerta Hadamard ( $H$ ), creando una superposición.
- Luego, se usa como qubit de control en una puerta CNOT que afecta al segundo qubit, entrelazando ambos qubits.
- Al medir los qubits al final del circuito, se colapsan a un estado clásico basado en las probabilidades definidas por su estado cuántico.

#### 4.3.2. Computadores cuánticos adiabáticos

Los computadores cuánticos adiabáticos son una clase de dispositivos cuánticos que utilizan el principio de adiabaticidad para resolver problemas de optimización y encontrar el estado fundamental de un sistema. A diferencia de los computadores cuánticos de puertas lógicas, que realizan una serie de operaciones discretas en qubits, los computadores cuánticos adiabáticos emplean una evolución continua del sistema cuántico.

##### Principio de adiabaticidad

El principio de adiabaticidad se basa en el concepto de que un sistema cuántico puede mantenerse en su estado fundamental (*ground state*) si cambia lentamente con respecto a su entorno. En el contexto de la computación cuántica, este principio se utiliza para resolver problemas de optimización y otros problemas computacionales.

Según el teorema adiabático, si un Hamiltoniano que depende del tiempo  $H(t)$  varía suficientemente despacio, el sistema permanecerá en su estado fundamental durante la evolución. Matemáticamente, se expresa como:

$$H(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) H_0 + \frac{t}{T} H_f$$

Donde  $H_0$  es el Hamiltoniano inicial,  $H_f$  es el Hamiltoniano final,  $t$  es el tiempo y  $T$  es el tiempo total de evolución.

### Quantum annealing

El *quantum annealing* [37] es una técnica de optimización que utiliza el principio de adiabaticidad (ver Sección 4.3.2). A diferencia del *annealing* simulado clásico, que utiliza fluctuaciones térmicas para escapar de mínimos locales de energía, el *annealing* cuántico aprovecha las fluctuaciones cuánticas. En el *annealing* simulado clásico, se añade energía térmica al sistema para que pueda saltar sobre barreras de energía, pero este método puede ser ineficaz en paisajes de energía complejos debido a la posibilidad de quedar atrapado en mínimos locales.

El *annealing* cuántico, en cambio, utiliza el fenómeno de túnel cuántico, que permite que las partículas atraviesen barreras de energía sin necesidad de energía térmica adicional. Esto significa que el sistema puede explorar diferentes configuraciones y alcanzar el estado fundamental (la solución óptima) incluso en paisajes de energía muy rugosos. Esta capacidad de atravesar barreras energéticas hace que el *annealing* cuántico sea más eficiente para encontrar soluciones óptimas en problemas de optimización complejos.

Comienza con un Hamiltoniano inicial  $H_0$  cuyo estado fundamental (*ground state*) es fácil de preparar y conocido por el dispositivo. Gradualmente, este Hamiltoniano se transforma en uno que codifica el problema de optimización,  $H_f$ . Si el cambio es lo suficientemente lento, se espera que el sistema permanezca en el estado fundamental, proporcionando la solución óptima al problema. El Hamiltoniano inicial y final pueden representarse como:

$$H_0 = - \sum_i \sigma_i^x$$

$$H_f = \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z + \sum_i h_i \sigma_i^z$$

donde  $\sigma_i^x$  y  $\sigma_i^z$  son los operadores de Pauli,  $J_{ij}$  son las interacciones entre qubits y  $h_i$  son los campos locales. Los operadores de Pauli son matrices  $2 \times 2$  que representan las componentes de espín de una partícula cuántica. Específicamente,  $\sigma_x$  y  $\sigma_z$  son dos de los tres operadores de Pauli definidos como:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estos operadores son fundamentales en la descripción de las operaciones cuánticas.

El proceso de transición debe ser suficientemente lento para que el estado fundamental inicial transicione al estado fundamental final sin errores y preservando la existencia del mínimo global, véase Figura 4.2. Si el recocido cuántico se ejecuta demasiado rápido, o si hay uno o más mínimos locales cerca del mínimo global, la computación puede fallar al perder la referencia al mínimo global.

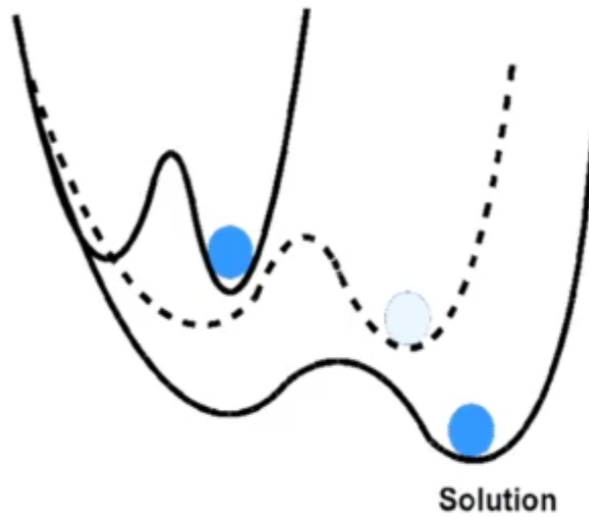


Figura 4.2: Evolución del Hamiltoniano en el proceso de recocido cuántico. La gráfica muestra cómo el estado inicial del sistema (ground state) debe transicionar al estado final (solución) sin quedar atrapado en mínimos locales.

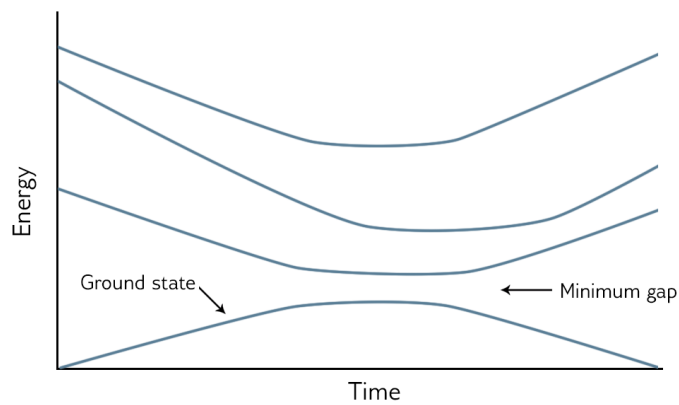


Figura 4.3: Gráfica de energía versus tiempo mostrando la evolución del estado fundamental y la importancia del mínimo gap. Un gap suficientemente grande es crucial para que el sistema permanezca en el estado fundamental durante todo el proceso de recocido cuántico.



**Concepto de Mínimo Gap:** Durante el proceso de recocido cuántico, es crucial que el sistema mantenga una brecha mínima (*minimum gap*) suficiente entre el estado fundamental y los estados excitados. Esta brecha asegura que el sistema permanezca en el estado fundamental y evita transiciones a estados excitados.

### Modelos Binarios Cuadráticos (*Binary Quadratic Models*)

Para encontrar el Hamiltoniano que más se adecúe a un problema, se usan modelos binarios cuadráticos (BQM) [38]. Estos modelos tienen para cada posible configuración de un conjunto de variables binarias un valor subsecuente asociado. Se desea encontrar la configuración que minimice el valor de salida (*ground state*), lo cual equivale a encontrar el *argmin* de la función de coste asociada al BQM.

**Biases Lineales y Cuadráticos:** Los efectos de cada variable binaria en el valor final se determinan por los *biases* lineales y cuadráticos de la función de coste. Los *biases lineales* son coeficientes que afectan individualmente el valor de la función basados en el estado de una sola variable, mientras que los *biases cuadráticos* son coeficientes que determinan la interacción entre pares de variables, afectando el valor de la función basado en el producto de dos variables. El Hamiltoniano del problema se construye de manera que refleje estas interacciones y biases, facilitando la transición del estado fundamental inicial al estado fundamental final que representa la solución óptima del problema de optimización.

### Comparación con computación de puertas lógicas

Los computadores cuánticos de puertas lógicas son más versátiles y pueden implementar una variedad de algoritmos cuánticos complejos. Sin embargo, los computadores cuánticos adiabáticos son especialmente eficientes para resolver problemas de optimización combinatoria. Mientras que las puertas lógicas cuánticas son adecuadas para una amplia gama de aplicaciones, el *quantum annealing* se especializa en problemas de optimización y búsqueda de estados energéticos mínimos.

### Ejemplos de implementaciones

**D-Wave Systems** D-Wave Systems es una de las empresas pioneras en el campo de la computación cuántica adiabática, enfocándose principalmente en el desarrollo de sistemas de recocido cuántico para resolver problemas de optimización combinatoria. Los computadores de D-Wave utilizan una arquitectura de qubits superconductores, donde cada qubit es un bucle de

corriente superconductor que puede mantener un estado de superposición de corriente en ambas direcciones. Estos qubits están interconectados por medio de acopladores ajustables que permiten la configuración del Hamiltoniano del sistema para representar un problema específico. El proceso de *quantum annealing* en los sistemas de D-Wave comienza con un Hamiltoniano inicial, conocido y fácil de preparar, que se transforma lentamente en el Hamiltoniano que representa el problema a resolver. Este proceso debe realizarse de manera suficientemente lenta para que el sistema permanezca en su estado fundamental durante toda la evolución.

**Aplicaciones en problemas de optimización:** D-Wave ha demostrado aplicaciones prácticas en diversas industrias utilizando su tecnología de recocido cuántico. Algunos ejemplos incluyen:

- **Logística:** Optimización de rutas de vehículos para minimizar costos y tiempos de entrega.
- **Finanzas:** Optimización de carteras de inversión para maximizar retornos y minimizar riesgos [39].
- **Bioinformática:** Resolución de problemas de plegamiento de proteínas y alineamiento de secuencias genéticas.

#### Casos de Estudio

- **Volkswagen:** Volkswagen ha colaborado con D-Wave para optimizar el tráfico en las ciudades utilizando recocido cuántico [40]. El objetivo es minimizar los tiempos de espera y reducir la congestión vehicular.
- **BBVA:** El banco BBVA [41] ha utilizado computadores cuánticos de D-Wave para mejorar la optimización de sus carteras de inversión, buscando maximizar los retornos ajustados al riesgo [42].

**Otros Proyectos y Prototipos** Además de D-Wave, existen otros proyectos e iniciativas en el campo de la computación cuántica adiabática. Algunos de los más destacados incluyen:

**Quantum Brilliance:** Esta empresa está desarrollando computadores cuánticos basados en qubits de diamante [43], con el objetivo de crear sistemas más compactos y operativos a temperatura ambiente.

**Nokia Bell Labs:** Nokia Bell Labs está investigando la aplicación de recocido cuántico en la optimización de redes de telecomunicaciones [44], buscando mejorar la eficiencia y reducir los costos operativos.

**USC-Lockheed Martin Quantum Computing Center:** Este centro de investigación [45] se centra en la aplicación del recocido cuántico para resolver problemas complejos en áreas como la aeronáutica y la defensa.

**Ventajas y desafíos** En la Tabla 4.1 se presentan las ventajas y desafíos de los computadores cuánticos adiabáticos en una tabla comparativa:

Ventajas	Desafíos
<b>Especialización en Optimización:</b> Los computadores cuánticos adiabáticos, como los de D-Wave, son especialmente eficientes para resolver problemas de optimización combinatoria.	<b>Limitaciones en Algoritmos:</b> Están restringidos en los tipos de algoritmos que pueden implementarse, principalmente aquellos relacionados con la optimización.
<b>Robustez ante Errores:</b> Tienen una mayor tolerancia a ciertos tipos de errores en comparación con los computadores de puertas lógicas.	<b>Complejidad Técnica:</b> Dificultades técnicas asociadas con el mantenimiento de condiciones adiabáticas y la necesidad de operar a temperaturas extremadamente bajas.

Tabla 4.1: Comparativa de ventajas y desafíos de los computadores cuánticos adiabáticos



## Capítulo 5

# Optimización de Carteras de Inversión con Computación Cuántica

### 5.1. Formulación del problema de optimización de carteras

La optimización de carteras busca seleccionar la combinación óptima de activos financieros que maximicen los retornos esperados y minimicen los riesgos, teniendo en cuenta las restricciones del inversor.

#### Variables involucradas:

- $w_i$  : Peso del activo  $i$  en la cartera.
- $\mu_i$  : Retorno esperado del activo  $i$ .
- $\sigma_{ij}$  Covarianza entre los retornos de los activos  $i$  y  $j$ .

#### Restricciones del problema:

- La suma de los pesos debe ser igual a 1:  $\sum_i w_i = 1$ .
- Los pesos deben ser no negativos:  $w_i \geq 0$ .
- El retorno de la cartera debe alcanzar un retorno deseado  $R$ :  $w^T r = R$ .

## 5.2. Hamiltoniano para la optimización de carteras

En computación cuántica, el Hamiltoniano [46] representa la energía del sistema. Para la optimización de carteras, se utiliza para formular la función objetivo que se desea minimizar o maximizar, incorporando tanto los retornos esperados como los riesgos. Este Hamiltoniano se deriva a partir de la función objetivo de la teoría moderna de carteras de Markowitz, que busca minimizar el riesgo para un nivel dado de retorno esperado. Su formulación matemática es la siguiente:

$$H = \sum_i \mu_i w_i + \sum_i \sum_{j>i} \sigma_{ij} w_i w_j + \lambda$$

Donde:

- $H$ : Hamiltoniano del sistema.
- $\sum_i \mu_i w_i$ : Es el término lineal que representa la suma ponderada de los retornos esperados de los activos seleccionados.
- $\sum_i \sum_{j>i} \sigma_{ij} w_i w_j$ : Es el término cuadrático que representa la matriz de covarianza entre los activos, es decir, lo relacionados que están los activos entre sí.
- $\lambda$ : Representa el factor de penalización, que se encarga de ajustar el peso de las restricciones en la función objetivo.

La derivación matemática del Hamiltoniano involucra la formulación de la función de costo en términos de los qubits, representando tanto los términos lineales como cuadráticos.

### 5.2.1. Diseño del algoritmo cuántico

En la computación cuántica adiabática, el problema de optimización se formula como un problema de QUBO (Quadratic Unconstrained Binary Optimization) [47]. El Hamiltoniano se representa como una matriz QUBO, donde los términos lineales y cuadráticos corresponden a los coeficientes de la función objetivo. Para formular el problema de optimización de carteras, primero se definen los retornos esperados ( $\mu$ ) y la matriz de covarianza ( $\sigma$ ) de los activos.

### Definición de los parámetros financieros

**Retornos Esperados y Matriz de Covarianza:** Los retornos esperados ( $\mu$ ) representan la ganancia media que se espera obtener de cada activo. La matriz de covarianza ( $\sigma$ ) describe las relaciones entre los distintos activos financieros, y su diagonal contiene las varianzas de los retornos de cada activo. Estas métricas son fundamentales para evaluar el rendimiento y el riesgo asociados con cada activo en la cartera.

En el contexto de la optimización de carteras de inversión, la matriz de covarianza desempeña un papel crucial puesto que mide la diversificación del riesgo, que es una estrategia para reducir el riesgo de la cartera. Al incluir activos con bajas o negativas covarianzas se puede disminuir la volatilidad total de la cartera.

**Volatilidades:** Las volatilidades se calculan como la raíz cuadrada de las varianzas (diagonal de la matriz de covarianza). La volatilidad es una medida clave del riesgo, indicando la variabilidad de los retornos de los activos.

### Formulación del problema QUBO

El problema de optimización de carteras se traduce a una función QUBO. La función objetivo incorpora los retornos esperados y la matriz de covarianza para minimizar el riesgo y maximizar los retornos. Además, se incluyen las restricciones del problema, como las limitaciones presupuestarias y el retorno mínimo a obtener.

- **Función Objetivo:** La función objetivo se define para maximizar los retornos esperados y minimizar el riesgo (volatilidad). Esto se logra a través de la construcción de una matriz QUBO donde los términos lineales representan los retornos esperados y los términos cuadráticos representan las covarianzas entre los activos.
- **Variables Slack:** Para manejar desigualdades, se utilizan variables *slack* [48]. Éstas permiten transformar restricciones de desigualdad en restricciones de igualdad, facilitando su incorporación en el modelo QUBO. Las variables *slack* actúan como una especie de “colchón” que ajusta la solución para cumplir con las restricciones impuestas.

### Configuración y ejecución del *solver* QUBO

Una vez formulada la función QUBO, se configura y ejecuta el solucionador cuántico. Se utiliza un *solver* cuántico, como *qadk* o el de D-Wave, para encontrar la configuración de variables que minimiza la energía de la

matriz QUBO. Este proceso implica el uso de técnicas de muestreo cuántico para explorar el espacio de soluciones y encontrar la óptima.

### Evaluación de la solución

Para verificar la validez de la solución, se deben cumplir las restricciones del problema. Principalmente, el valor de la *constraint* debe ser igual a cero, lo que indica que todas las restricciones se han satisfecho adecuadamente. Esto implica revisar que la suma de las inversiones en los activos cumpla con el presupuesto disponible y que las otras restricciones del problema, como la diversificación, se mantengan dentro de los límites permitidos.

## 5.3. Adaptación del Problema a Diferentes *datasets*

Para resolver el problema propuesto y comprobar la eficiencia de la computación cuántica en la resolución de problemas de optimización con *datasets* de distintas dimensiones y formas, se han elaborado manualmente dos conjuntos de datos mediante *scripts* de Python y se ha obtenido otro de internet. La variación en los *datasets* permite evaluar cómo se comporta el algoritmo cuántico en diferentes escenarios de complejidad. Los conjuntos de datos manuales han sido diseñados para representar distintas combinaciones de activos con características variadas, mientras que el conjunto de datos obtenido de internet proporciona una perspectiva más realista y compleja basada en datos del mundo real.

### 5.3.1. Primer *dataset*

Este conjunto de datos contiene un número reducido de activos, 4, con relaciones de covarianza simples. Contiene solamente los precios en euros de las acciones de las empresas durante 10 días en valores enteros. Se utiliza para evaluar la eficiencia del algoritmo en un contexto controlado, donde se pueden observar claramente los efectos de cada parámetro. A continuación se muestran las primeras 7 filas del fichero:

### Modificaciones introducidas: Variables binarias

Para adaptar el problema a este dataset se han realizado varias modificaciones tanto en la formulación del Hamiltoniano como en las restricciones del problema. A continuación se detallan cada uno de los cambios y adaptaciones:



EmpresaA	EmpresaB	EmpresaC	EmpresaD
80	74	45	135
83	74	33	124
83	62	28	129
119	51	29	119
89	88	40	119
99	89	36	114

Tabla 5.1: Primer *dataset*

- **Cálculo de retornos y matriz de covarianza:** Se calcula el cambio porcentual entre días consecutivos para obtener los retornos diarios. A continuación se calcula la matriz de covarianza utilizando el método `cov()` que estima la covarianza entre los retornos de todos los pares de activos.
- **Cálculo de retornos esperados:** Se calculan como la media de los retornos diarios para cada activo. Esto se realiza utilizando el método `mean()` del *DataFrame* de pandas [49], que calcula la media a lo largo del eje de las filas.
- **Restricción de retorno mínimo esperado:** Se añade una penalización adicional para asegurar que la cartera alcance un retorno mínimo esperado. Esta penalización se incorpora ajustando los términos en el modelo QUBO. De este modo se asegura que la cartera seleccionada proporcionará al menos el retorno deseado por el inversor. Para incorporarla al modelo se utiliza una variable *slack* 5.2.1. Esta restricción tiene la siguiente forma:  $R \leq \sum_i x_i \cdot r_i$ .
- **Restricción de invertir en la mitad de las empresas:** Puesto que el *dataset* es muy pequeño se establece esta restricción añadiendo una penalización al modelo QUBO resultante. Esta restricción controla el tamaño de la cartera asegurando que se seleccionen aproximadamente la mitad de los activos disponibles. Matemáticamente se expresa como:  $\sum_i x_i = \frac{N}{2}$ .

Con todas las modificaciones añadidas el hamiltoniano se queda de esta forma:

$$H = H_{\text{cov}} + \lambda (H_{\text{ret}} + H_{\text{half}})$$

Que equivale a:

$$H = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} w_i w_j + \lambda \left( \left( -\sum_i \mu_i w_i - R \right) + \left( \sum_i w_i - \frac{N}{2} \right)^2 \right)$$

```
def build_qubo(cov_matrix, n_assets, factor_penalty, retornos, retorno_min_esperado):
    var_problema = BitArrayShape('x', (n_assets,))

    # Calcular el valor de stop para la variable slack
    slack_stop = calculate_slack_stop(retornos, retorno_min_esperado)

    # Crear la variable slack
    my_var_slack = VarSlack(name='slack_variable', start=0, step=1, stop=slack_stop, slack_type=SlackType.binary)

    var_shape_set = VarShapeSet(var_problema, my_var_slack)
    BinPol.freeze_var_shape_set(var_shape_set)

    # Construir H_cuad utilizando la matriz de covarianza
    H_cuad = BinPol()

    for i in range(n_assets):
        for j in range(n_assets):
            w_ij = cov_matrix[i, j]
            H_cuad.add_term(w_ij, ('x', i), ('x', j))

    # Construir H_slack para representar la restricción del retorno mínimo esperado
    H_slack = BinPol()

    for i in range(n_assets):
        H_slack.add_term(retornos_esperados[i], ('x', i))

    H_slack.add_slack_variable('slack_variable', factor=-1)
    H_slack.add_term(-retorno_minimo, ())

    # Construir H_half para representar la restricción de invertir en la mitad de empresas
    H_half = BinPol()

    for i in range(n_assets):
        H_half.add_term(1, ('x', i))
    H_half.add_term(-n_assets // 2, ())
    H_half.power(2)

    # Combinar los términos para formar el QUBO
    QUBO = H_cuad + (H_half + H_slack) * factor_penalty

    return QUBO, H_half
```

Figura 5.1: Función `build_qubo` para el dataset pequeño y variables binarias.

### Modificaciones introducidas: Variables enteras

Lo siguiente que se ha modificado ha sido el paso de variables binarias a variables enteras. Los cambios llevados a cabo en el código son los siguientes:

- **Presupuesto y unidades de inversión:** En la vida real los inversores tienen un presupuesto total limitado y no pueden invertir fracciones infinitesimales en activos. Este cambio introduce restricciones realistas en la cantidad de dinero que se puede invertir en cada activo. De este modo, mediante la introducción de las variables `presupuesto_total` y `unidad_inversión` se puede calcular el número máximo de unidades invertibles (`max_unidades`) y el número de bits necesarios (`n_bits`) para representar estas unidades. De este modo se permite definir y manejar un presupuesto total de inversión asignando cantidades específicas (múltiplos de una unidad de inversión) a cada activo, lo que hace que el modelo sea más aplicable a situaciones del mundo real.
- **Representación de variables con múltiples bits:** La representación de variables con múltiples permite una mayor granularidad en la

inversión, en lugar de una simple selección binaria de inversión (invertir o no invertir). La variable del problema se define ahora como una matriz de bits (`BitArrayShape('x', (n_assets, n_bits))`), donde cada fila representa un activo y cada columna un bit de la cantidad invertida. Se utilizan múltiples bits para representar las cantidades invertidas en cada activo. Esto permite especificar cantidades exactas invertidas en cada activo, mejorando la precisión y realismo del modelo de inversión.

- **Construcción del modelo QUBO:** Para adaptar el modelo a la nueva representación de inversión y restricciones de presupuesto se realizan las mejoras:
  - **H\_cuad:** Ahora considera las combinaciones de bits y múltiplos de inversión, ajustando los términos de covarianza para reflejar correctamente las contribuciones de las diferentes escalas.
  - **H\_slack:** Representa la restricción del retorno mínimo esperado teniendo en cuenta las cantidades invertidas, no solo la selección de activos.
  - **H\_budget:** Introduce una nueva restricción que asegura que la inversión total no exceda el presupuesto disponible.
- **Preparación y reporte de resultados:** Con las nuevas restricciones y representaciones, las funciones de preparación y reporte deben adaptarse para mostrar correctamente las cantidades invertidas y validar las soluciones obtenidas.
- **Verificación de factibilidad:** Antes de proceder con la construcción del QUBO y la ejecución del *solver*, es importante verificar si el retorno mínimo esperado es alcanzable. Para ello se ha mejorado la función `es_factible` y se ha ajustado para tener en cuenta todas las inversiones posibles para los activos, asegurando que el retorno mínimo esperado sea realmente alcanzable con las nuevas condiciones del modelo.

Estas modificaciones no solo hacen que el modelo sea más realista y aplicable a situaciones del mundo real, sino que también aumenta su flexibilidad y precisión. Al considerar un presupuesto total y permitir múltiples niveles de inversión, el modelo puede capturar una gama más amplia de estrategias de inversión y proporcionar soluciones más detalladas y prácticas.

La nueva formulación del hamiltoniano es la siguiente:

$$H = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{n_{bits}-1} \sum_{l=0}^{n_{bits}-1} \sigma_{ij} \cdot 2^k \cdot 2^l \cdot (u_i^k \cdot u_j^l) \quad (5.1)$$

$$+\lambda \left( \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n_{bits}-1} \mu_i \cdot 2^k \cdot u_i^k - S - R_{min} \right) + \quad (5.2)$$

$$\lambda \left( \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n_{bits}-1} 2^k \cdot u_i^k - \frac{P}{u} \right)^2 \quad (5.3)$$

Donde:

- $\sigma_{ij}$  es la covarianza entre los retornos de los activos  $i$  y  $j$ .
- $\mu_i$  es el retorno esperado del activo  $i$ .
- $u_i^k$  es el  $k$ -ésimo bit para el activo  $i$ .
- $S$  es la variable de slack.
- $R_{min}$  es el retorno mínimo esperado.
- $P$  es el presupuesto total disponible.
- $u$  es la unidad de inversión.
- $\lambda$  es el coeficiente de penalización.

```

def build_qubo(cov_matrix, n_assets, factor_penalty, retornos, retorno_min_esperado, presupuesto, unidad_inversion):
    var_problema = BitArrayShape('x', (n_assets, n_bits))

    # Crear la variable slack
    slack_stop = presupuesto // unidad_inversion
    my_var_slack = VarSlack(name='slack_variable', start=0, step=1, stop=slack_stop, slack_type=SlackType.binary)

    var_shape_set = VarShapeSet(var_problema, my_var_slack)
    BinPol.freeze_var_shape_set(var_shape_set)

    H_cuad = BinPol()

    # Construir H_cuad utilizando la matriz de covarianza
    for i in range(n_assets):
        for j in range(n_assets):
            for k in range(n_bits):
                for l in range(n_bits):
                    w_ij = cov_matrix[i, j] * (2**k) * (2**l) * (unidad_inversion ** 2)
                    H_cuad.add_term(w_ij, ('x', i, k), ('x', j, l))

    # Construir H_slack para representar la restricción del retorno mínimo esperado
    H_slack = BinPol()

    for i in range(n_assets):
        for k in range(n_bits):
            H_slack.add_term(retornos_esperados[i] * (2**k) * unidad_inversion, ('x', i, k))

    H_slack.add_slack_variable('slack_variable', factor=-1)
    H_slack.add_term(-retorno_minimo, ())

    # Construir H_budget para representar la restricción del presupuesto
    H_budget = BinPol()

    for i in range(n_assets):
        for k in range(n_bits):
            H_budget.add_term((2**k) * unidad_inversion, ('x', i, k))
    H_budget.add_term(-presupuesto, ())
    H_budget.power(2)

    # Combinar los términos para formar el QUBO
    QUBO = H_cuad + (H_slack + H_budget) * factor_penalty

    return QUBO, H_cuad, H_slack, H_budget

```

Figura 5.2: Función `build_qubo` para el dataset pequeño y variables enteras.

### 5.3.2. Segundo *dataset*

En este conjunto, se incrementa el número de activos y la complejidad de las relaciones de covarianza. A diferencia del dataset pequeño, este incluye más columnas, proporcionando detalles adicionales como la fecha en la que se han obtenido los datos, el precio de apertura y el precio de cierre durante 15 días para cada empresa. Esta mayor granularidad permite un análisis más detallado y realista, reflejando mejor las fluctuaciones del mercado y las posibles correlaciones entre los activos. Si se observa con cuidado el dataset, se verá que los valores fluctúan demasiado y no se ajusta a lo que sucede en los mercados de valores reales. Esto está hecho así para ver si el modelo actúa bien ante casos extremos. Esto permite analizar cómo escala el algoritmo cuántico cuando se introducen más variables y restricciones.

Nombre de la Empresa	Fecha	Apertura (€)	Cierre (€)
Empresa A	2023-01-01	37.4540	24.9292
Empresa A	2023-01-02	86.6176	92.9698
Empresa B	2023-01-01	95.0714	41.0383
Empresa B	2023-01-02	60.1115	80.8120
Empresa C	2023-01-01	73.1994	75.5551
Empresa C	2023-01-02	70.8073	63.3404
Empresa D	2023-01-01	59.8658	22.8798
Empresa D	2023-01-02	2.0584	87.1461
Empresa E	2023-01-01	15.6019	7.6980
Empresa E	2023-01-02	96.9910	80.3672
Empresa F	2023-01-01	15.5995	28.9751
Empresa F	2023-01-02	83.2443	18.6570
Empresa G	2023-01-01	5.8084	16.1221
Empresa G	2023-01-02	21.2339	89.2559

Tabla 5.2: Segundo *dataset*

### Modificaciones introducidas

**Cálculo de retornos basados en apertura y cierre:** Los retornos ahora se calculan utilizando los precios de apertura y cierre. Éstos se agrupan por nombre de empresa y se calcula la media de los retornos diarios. Además, se calcula la matriz de covarianza basada en estos retornos diarios, reestructurados en un formato pivot.

La función `build_qubo` para este problema permanece igual que la implementación utilizada para el *dataset* pequeño con variables enteras 5.2.

#### 5.3.3. Tercer *dataset*

Este *dataset* fue obtenido de la página de Kaggle [50]. Está compuesto por dos carpetas: una de fondos de inversión ETFs y otra de acciones, *Stocks*. La carpeta de acciones contiene un archivo CSV para cada empresa, que incluye las cotizaciones diarias de varias empresas con sede en EE.UU. que cotizan en la NYSE, NASDAQ y NYSE MKT [51], abarcando desde el 29 de diciembre del año 2000 hasta el 27 de abril de 2018. Para este proyecto, se han seleccionado 15 de estas empresas. El *dataset* incluye numerosos campos; sin embargo, mediante técnicas de procesamiento de datos, se han seleccionado los campos de fecha, precio de apertura y precio de cierre de cada día, así como se han modificado las fechas para que coincidiesen con la fecha de creación del *dataset*. Finalmente, se obtiene un fichero CSV que concatena todos los archivos de la carpeta original, del cual se muestran las primeras

líneas a continuación. Este conjunto de datos es *open source*, ha pasado por un proceso de anonimización y la información es pública, por lo que se cumple el Reglamento General de Protección de Datos (RGPD), aún así, para conservar la homogeneidad en los *datasets*, se han renombrado las empresas. A continuación se muestra un extracto del fichero:

Nombre de la Empresa	Fecha	Apertura (€)	Cierre (€)
Empresa A	2023-11-20	94.3	93.44
Empresa A	2023-11-21	96.25	95.11
Empresa B	2023-11-20	92.42	91.51
Empresa B	2023-11-21	89.4	88.97
Empresa C	2023-11-20	59.61	59.29
Empresa C	2023-11-21	56.48	54.66
Empresa D	2023-11-20	60.35	62.08
Empresa D	2023-11-21	62.4	63.52
Empresa E	2023-11-20	78.5	79.88
Empresa E	2023-11-21	77.93	78.63
Empresa F	2023-11-20	77.26	72.73
Empresa F	2023-11-21	75.25	74.29
Empresa G	2023-11-20	53.51	55.27
Empresa G	2023-11-21	57.48	58.56
Empresa H	2023-11-20	101.25	102.99
Empresa H	2023-11-21	99.52	102.74
Empresa I	2023-11-20	65.4	62.34
Empresa I	2023-11-21	67.65	65.87
Empresa J	2023-11-20	38.74	40.08
Empresa J	2023-11-21	39.31	39.6

Tabla 5.3: Tercer *dataset*

Este *dataset* y el anterior comparten la misma estructura, por lo que la base de su análisis es equivalente, así como el código de la función `build_qubo`.

## 5.4. Herramientas y *solvers* cuánticos utilizados

Para ejecutar el código indicado anteriormente se ha hecho uso de dos *solvers* cuánticos distintos, `dadk` y `D-Wave`.

### 5.4.1. dadk de Fujitsu

El software dadk, que corresponde a Digital Annealer Development Kit de Fujitsu, es una herramienta avanzada diseñada para formular y resolver problemas de optimización complejos mediante la formulación de modelos QUBO. Este kit de desarrollo es especialmente útil para convertir y resolver problemas que pueden ser representados mediante funciones objetivas cuadráticas en variables binarias, sin restricciones explícitas.

#### Formulación de problemas QUBO

El software dadk permite definir y estructurar problemas de optimización en términos de una función objetivo cuadrática donde las variables involucradas son binarias. Esta capacidad es esencial en campos que van desde la logística y la gestión de operaciones hasta las finanzas y la bioinformática, donde problemas complejos necesitan ser simplificados y resueltos eficientemente.

#### Resolución de problemas

- **Simulated Annealing:** dadk implementa su propia versión de *simulated annealing*, una técnica metaheurística para aproximar el mínimo global de una función objetivo. Esta técnica está inspirada en el proceso de *annealing* en metalurgia, donde el material se calienta y luego se enfría lentamente para disminuir defectos, alcanzando un estado de mínima energía interna.
- **Parallel Tempering:** Complementariamente, dadk utiliza *parallel tempering*, otro método de optimización que involucra la ejecución simultánea de varios procesos de *simulated annealing* a diferentes temperaturas. Esto permite una exploración más efectiva del espacio de búsqueda y ayuda a evitar el estancamiento en mínimos locales.

#### Aplicaciones y ventajas

Las principales ventajas de utilizar dadk incluyen:

- **Eficiencia en la resolución de problemas:** Gracias a la implementación especializada de *simulated annealing* y *parallel tempering*, dadk puede encontrar soluciones de manera más rápida y eficiente que otros métodos tradicionales.



- **Flexibilidad en la modelación:** La capacidad de formular problemas como QUBO permite a los usuarios adaptar una amplia variedad de problemas de optimización a este marco, lo que facilita el uso de técnicas de solución avanzadas.
- **Versatilidad:** Su aplicación abarca múltiples sectores, desde la planificación de recursos hasta la optimización de carteras financieras y diseño de fármacos. Por ello, dadk tiene el potencial de mejorar significativamente la toma de decisiones y la eficiencia operativa en diversos sectores.

### Utilidad en la optimización de carteras de inversiones

Es particularmente útil para el problema de optimización de carteras de inversiones. En este contexto, el objetivo es seleccionar un conjunto de activos que minimice el riesgo mientras se maximiza el retorno esperado, un problema que naturalmente se presta al formato QUBO. Los siguientes puntos destacan la utilidad de dadk en este ámbito:

- **Optimización bajo restricciones complejas:** Las carteras de inversiones deben cumplir con múltiples restricciones, como límites de inversión en ciertos activos o categorías; dadk puede modelar eficientemente estas restricciones como parte del problema de optimización.
- **Análisis de riesgo y retorno:** dadk puede ser usado para simular y analizar diferentes configuraciones de cartera bajo diversos escenarios de mercado, ayudando a encontrar la combinación óptima de activos que ofrece el mejor equilibrio entre riesgo y retorno.
- **Ejecución rápida de recálculos:** Los mercados financieros son dinámicos y cambian rápidamente, lo que requiere una recálculo frecuente de las carteras óptimas. La eficiencia de dadk permite realizar estas recálculos de manera más ágil y frecuente.

#### 5.4.2. D-Wave

El solver de D-Wave es una herramienta central en la arquitectura de sus computadoras cuánticas, diseñado para procesar y resolver problemas de optimización formulados como modelos *Ising* [52] o QUBO. Estos modelos son clave para convertir problemas complejos del mundo real en formatos que la computación cuántica puede manejar eficazmente. Aquí exploramos cómo se configura y se ejecuta un problema de modelo binario cuadrático (BQM) a través del solver, utilizando herramientas del D-Wave Ocean SDK.

### Modelo Binario Cuadrático (BQM)

El *Binary Quadratic Model* (BQM) 4.3.2 es una estructura de datos crucial en la programación con D-Wave, permitiendo la representación de problemas en términos de modelos *Ising* o QUBO. Este modelo facilita la especificación de las interacciones entre variables (o *spins*) y sus efectos en la función objetivo del problema de optimización.

### Configuración y muestreo del solver

- **Conversión a BQM:** Los problemas de optimización se convierten en objetos BQM que encapsulan todos los elementos necesarios (coeficientes lineales, cuadráticos y constante de offset) para definir el problema.
- **Muestreo con los *samplers* específicos:** D-Wave proporciona varios tipos de *samplers* tanto para soluciones híbridas como para soluciones puramente cuánticas. En este proyecto se han utilizado los siguientes:
  - **LeapHybridSampler:** Este es un solver híbrido que combina técnicas de computación cuántica y clásica para ofrecer soluciones rápidas y escalables, adecuado para problemas grandes que pueden ser desafiantes para solvers puramente cuánticos.
  - **DWaveSampler:** Un sampler puramente cuántico que opera mediante *quantum annealing*, ideal para problemas que se benefician de la exploración cuántica directa, como aquellos con un paisaje energético complejo.

### Utilidad del *solver* en problemas de optimización

El *solver* de D-Wave es particularmente útil en problemas de optimización debido a su capacidad para manejar grandes espacios de búsqueda y encontrar soluciones de alta calidad en problemas que son computacionalmente demandantes para los solvers clásicos. Esta capacidad se traduce en:

- **Eficiencia en tiempo de ejecución:** La computación cuántica permite procesar grandes conjuntos de soluciones potenciales mucho más rápido que los métodos clásicos, lo que es crucial para problemas con espacios de búsqueda extensos.

- **Calidad de las soluciones:** Gracias a fenómenos cuánticos como el túnel cuántico, el *solver* de D-Wave puede encontrar soluciones que métodos convencionales podrían no alcanzar, al evitar quedar atrapado en mínimos locales.
- **Flexibilidad y escalabilidad:** El uso de BQM y la capacidad de configurar dinámicamente los samplers permiten adaptar la solución a una amplia gama de problemas de optimización, escalando eficientemente a medida que aumenta la complejidad del problema.



## Capítulo 6

# Experimentos y análisis

Poner aquí la descripción del capítulo y los objetivos, que son demostrar la eficiencia de los modelos qubo y solver de dwave.

### 6.1. Descripción de las Métricas de Evaluación

Estas métricas proporcionan una evaluación integral de la eficacia y el riesgo de las carteras de inversión. Permiten a los inversores y gestores de carteras tomar decisiones informadas basadas en el rendimiento ajustado al riesgo y la volatilidad de sus inversiones.

#### Retorno del portfolio

El **Retorno del portfolio** mide el rendimiento total que se espera obtener de todas las inversiones dentro del portafolio. Se calcula como el producto punto de los pesos asignados a cada activo y sus respectivos retornos esperados:

$$\text{Retorno del Portfolio} = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i$$

donde  $w_i$  representa el peso o la proporción del total invertido en el activo  $i$  y  $\mu_i$  es el retorno esperado del activo  $i$ .

#### Varianza del portfolio

La **Varianza del portfolio** es una medida de riesgo que indica la dispersión de los retornos del portafolio respecto a su media. Se calcula basándose en la matriz de covarianza de los retornos de los activos y los pesos de cada

activo en el portafolio:

$$\text{Varianza del Portafolio} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

donde  $w_i$  y  $w_j$  son los pesos de los activos  $i$  y  $j$ , y  $\sigma_{ij}$  es la covarianza entre los retornos de los activos  $i$  y  $j$ .

### Ratio de Sharpe

El Ratio de Sharpe mide el exceso de retorno por unidad de desviación estándar de los retornos de la cartera. Se calcula utilizando la fórmula:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

donde  $R_p$  es el retorno esperado de la cartera,  $R_f$  es el retorno libre de riesgo, y  $\sigma_p$  es la desviación estándar de los retornos de la cartera.

### Ratio de Sortino

El Ratio de Sortino es una modificación del Ratio de Sharpe que solo considera la desviación estándar de los retornos negativos. Su fórmula es:

$$\text{Sortino Ratio} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_d}$$

donde  $\sigma_d$  es la desviación estándar de los retornos negativos de la cartera.

### Ratio de Información

El Ratio de Información mide la habilidad del administrador de la cartera para generar excesos de retorno sobre un benchmark, ajustado por la volatilidad de esos excesos de retorno:

$$\text{Information Ratio} = \frac{R_p - R_b}{\sigma_{pb}}$$

donde  $R_b$  es el retorno del benchmark y  $\sigma_{pb}$  es la desviación estándar de la diferencia entre los retornos de la cartera y el benchmark.

### Máxima Caída (Max Drawdown)

La Máxima Caída mide la mayor caída desde un pico hasta un valle en la cartera durante un período específico, indicando el riesgo de pérdida máxima:

$$\text{Max Drawdown} = \max \left( \frac{\text{Pico} - \text{Valle}}{\text{Pico}} \right)$$

## Diversificación del portfolio

La **Diversificación del portfolio** mide el grado en que los recursos de inversión están esparcidos entre varios activos, lo cual ayuda a mitigar el riesgo:

$$\text{Diversificación} = \frac{\text{Número de Activos Invertidos}}{\text{Número Total de Activos Disponibles}}$$

Este cálculo proporciona una visión de cuántos activos diferentes componen el portafolio, reflejando la estrategia de no "poner todos los huevos en una sola canasta".

## 6.2. Aplicación y Resultados con el Primer Dataset

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar el modelo de optimización de portfolio en el primer dataset considerado. Este modelo utiliza variables enteras para determinar la cantidad de unidades de cada activo en el portfolio. El objetivo principal es maximizar el retorno ajustado al riesgo, mientras se evalúan distintas métricas de desempeño como la varianza del portfolio, el ratio de Sharpe, entre otros.

### 6.2.1. Variables binarias

Los resultados mostrados a continuación reflejan el desempeño del portfolio bajo configuraciones óptimas determinadas por el modelo. Estas métricas son cruciales para evaluar la eficacia y la eficiencia del modelo aplicado, proporcionando una visión clara de la potencial rentabilidad y los riesgos asociados.

Métrica	Valor
Retorno del Portfolio	0.03811
Varianza del Portfolio	0.05077
Ratio de Sharpe	0.16880
Ratio de Sortino	0.85211
Ratio de Información	-0.00837
Máxima Caída	0.0
Diversificación del Portfolio	0.5

Tabla 6.1: Resultados de las métricas del modelo QUBO con el dataset pequeño y variables binarias.

La evaluación del desempeño del portfolio a través del modelo QUBO aplicado a este dataset con variables binarias ofrece varias perspectivas interesantes sobre la eficacia del modelo en un entorno controlado. Aunque el **retorno esperado** de 3.81 % es relativamente modesto, este coincide con la naturaleza del *dataset*, que está compuesto por un número limitado de activos (solo cuatro empresas), lo que restringe las oportunidades de diversificación y potencial de retorno elevado. Sin embargo, este retorno es positivo y estable, lo cual es un indicador favorable en contextos de baja volatilidad.

La **varianza del portfolio**, aunque moderada, refleja adecuadamente la volatilidad inherente a un conjunto tan reducido de activos, proporcionando un equilibrio razonable entre riesgo y retorno. El bajo **Ratio de Sharpe** de 0.1688 resalta una compensación menos favorable entre el retorno obtenido y el riesgo asumido, lo cual podría ser un área de mejora para el modelo. En contraste, el valor infinito del **Ratio de Sortino** sugiere la ausencia de retornos negativos significativos. Esto podría interpretarse como un resultado excepcionalmente bueno para este *dataset*.

El **Ratio de Información** presenta un valor de -0.00837, señalando que el portfolio está rindiendo por debajo del benchmark. Este dato es crucial, ya que implica que el portfolio no está superando al mercado actual, lo cual es generalmente el objetivo de cualquier estrategia de inversión activa. Sin embargo, es comprensible dada la naturaleza del conjunto de datos. Por otro lado, la ausencia de una **máxima caída** y la **diversificación** moderada del portfolio, con un valor de 0.5, son indicativos de un enfoque conservador que evita grandes pérdidas pero también limita las oportunidades de obtener retornos significativos. Este equilibrio podría ser especialmente adecuado para inversores que prefieren una estrategia de menor riesgo, pero podría no ser suficiente para aquellos que buscan maximizar los retornos ajustados al riesgo.

En conjunto, los resultados obtenidos del análisis de este *dataset* pequeño y las métricas evaluadas ofrecen una visión valiosa de las capacidades y limitaciones del modelo QUBO en condiciones controladas. Aunque el modelo muestra estabilidad y una gestión eficaz del riesgo, la capacidad de generar retornos altamente competitivos en comparación con el benchmark y de ofrecer un retorno ajustado al riesgo más atractivo podría mejorarse. Estas conclusiones subrayan la importancia de continuar refinando las estrategias de optimización del portfolio y adaptarlas a diferentes escalas y condiciones de mercado para mejorar su robustez y eficacia.

### 6.2.2. Variables enteras

La transición del modelo QUBO de utilizar variables binarias a enteras representa un cambio significativo que aporta mayor realismo y flexibilidad



al proceso de modelado de inversiones. Las modificaciones introducidas permiten una representación más precisa de las inversiones, reflejando mejor las condiciones reales del mercado y las restricciones presupuestarias de los inversores. Esto se refleja en los resultados obtenidos con el uso de variables enteras, que, aunque muestran diferencias en los valores de las métricas en comparación con el modelo anterior, ofrecen una perspectiva más detallada y ajustada de la gestión de inversiones.

En la aplicación del modelo con variables binarias, cada activo puede ser incluido o excluido del portfolio, representado por valores 0 o 1 respectivamente. Este enfoque de variables enteras permite una selección más clara y directa de los activos, optimizando la configuración del portfolio desde una perspectiva de inclusión/exclusión pura.

Esta metodología es particularmente útil para determinar combinaciones óptimas cuando se busca simplificar las decisiones de inversión, reduciendo el universo de activos a aquellos que directamente contribuyen a mejorar la rentabilidad ajustada al riesgo. Los resultados mostrados en la tabla 6.2 ofrecen un análisis detallado de cómo este enfoque afecta las principales métricas de rendimiento del portfolio.

Métrica	Valor
Retorno del Portfolio	0.03811
Varianza del Portfolio	0.01256
Ratio de Sharpe	0.15942
Ratio de Sortino	0.32446
Ratio de Información	-0.00837
Máxima Caída	0.00
Diversificación del Portfolio	0.50

Tabla 6.2: Resultados de las métricas del modelo QUBO con el primer dataset y variables enteras.

Como se puede observar, la introducción de variables enteras en el modelo QUBO ha generado un impacto notable en las métricas de rendimiento del portfolio. El **retorno** del portfolio ha disminuido ligeramente a 0.0213 desde el 0.0381 obtenido con variables binarias. Esta disminución puede reflejar una distribución más cautelosa de los recursos entre los activos disponibles, que, si bien podría reducir el potencial de ganancias máximas, también minimiza el riesgo de grandes pérdidas, como sugiere la disminución en la **varianza** del portfolio a 0.0126. Esta reducción en la **varianza** es indicativa de un perfil de riesgo más bajo, apropiado para estrategias de inversión conservadoras.

Los ratios financieros, como el **Ratio de Sharpe** y el **Ratio de Sortino**, que han disminuido a 0.1594 y 0.3245 respectivamente, sugieren un rendi-

miento ajustado al riesgo menos favorable. A pesar de esta disminución, la introducción de variables enteras permite una evaluación más precisa del equilibrio entre el retorno y el riesgo, proporcionando una medida más realista de la eficacia de la estrategia de inversión.

Por otro lado, la **Máxima Caída** ha aumentado significativamente, indicando un mayor riesgo de pérdidas sustanciales. Este cambio refleja la posibilidad de comprometer cantidades más significativas de capital en opciones de inversión menos seguras bajo el nuevo modelo, lo cual puede no ser evidente con un enfoque de inversión binario más restrictivo.

Finalmente, la **diversificación** del Portfolio se mantiene en 0.50, lo que indica una constante estrategia de equilibrio entre los diferentes activos, manteniendo el riesgo distribuido de manera uniforme a través del portfolio. Esto es crucial para mitigar el impacto de movimientos adversos en cualquier inversión individual sobre el desempeño general del portfolio.

Estos resultados subrayan la importancia de una adaptación cuidadosa del modelo de inversión a las condiciones y restricciones del mundo real. Aunque la incorporación de variables enteras presenta desafíos en términos de reducción del rendimiento ajustado al riesgo, ofrece ventajas significativas en términos de realismo y aplicabilidad práctica, permitiendo una representación más precisa y granular de las decisiones de inversión.

### 6.3. Aplicación y Resultados con *Datasets* Adicionales

En esta sección se exploran los resultados obtenidos al aplicar el modelo de optimización de portfolio utilizando dos *datasets* más complejos y detallados. Estos conjuntos incluyen una mayor cantidad de activos y profundizan en las dinámicas de mercado con datos adicionales como fechas, precios de apertura y cierre, permitiendo un análisis más exhaustivo de las fluctuaciones del mercado y las interacciones entre activos. El objetivo sigue siendo maximizar el retorno ajustado al riesgo, evaluando meticulosamente cómo el modelo maneja un entorno de mercado más volátil y diversificado.

#### 6.3.1. Segundo *dataset*

La aplicación del modelo con variables enteras en este *dataset* ampliado demuestra la escalabilidad y la capacidad del modelo para adaptarse a condiciones más complejas. El aumento de variables y la complejidad de las interacciones entre estas proporcionan un escenario ideal para observar la robustez del modelo en la captura y manejo de escenarios de mercado extremos. Los resultados presentados a continuación 6.3 reflejan cómo el modelo

QUBO responde a estas condiciones elevadas de volatilidad y diversidad.

Métrica	Valor
Retorno del Portfolio	0.09466
Varianza del Portfolio	0.56632
Ratio de Sharpe	0.11250
Ratio de Sortino	1.14356
Ratio de Información	0.05935
Máxima Caída	0.00995
Diversificación del Portfolio	0.43

Tabla 6.3: Resultados de las métricas del modelo QUBO con el segundo *dataset* y variables enteras.

El análisis de estos resultados muestra que el **retorno del portfolio** ha experimentado un aumento significativo a 0.0947, indicativo de que el modelo ha capitalizado las fluctuaciones extremas en los precios de apertura y cierre. Este incremento refleja la capacidad del modelo para identificar y explotar oportunidades de arbitraje y beneficios a corto plazo, adaptándose eficazmente a las dinámicas del mercado.

La **varianza del portfolio**, que se ha incrementado a 0.5663, señala un aumento considerable en el riesgo. Este aumento es coherente con la mayor volatilidad observada en el *dataset* y subraya la necesidad de considerar la adecuación del modelo para estrategias de inversión que toleren mayores riesgos.

Aunque el **Ratio de Sharpe** sigue siendo bajo (0.1125), el **Ratio de Sortino** ha mejorado notablemente a 1.1436, destacando una gestión eficaz del riesgo que considera únicamente las volatilidades negativas. Esta mejora es crucial en mercados volátiles y valida la capacidad del modelo para manejar de forma efectiva los riesgos a la baja.

El **Ratio de Información** ha pasado a ser positivo (0.0593), lo que implica que el modelo ha superado al benchmark. Este cambio favorable sugiere que las modificaciones realizadas al modelo para manejar un mayor número de activos y tipos de datos han permitido una captura más efectiva de las tendencias y anomalías del mercado.

La **Máxima Caída**, aunque sigue presente, es relativamente baja (0.0099), demostrando la habilidad del modelo para evitar pérdidas significativas incluso bajo condiciones de mercado adversas. Esto es esencial para la confianza en la aplicabilidad del modelo en entornos de inversión reales.

Finalmente, la **diversificación del portfolio** se mantiene en 0.43, lo que indica que el modelo sigue aplicando una estrategia de diversificación efectiva para mitigar los riesgos específicos del sector y del mercado, crucial

en un conjunto de datos con una gama amplia de activos.

En conjunto, estos resultados demuestran que el modelo QUBO, al escalar a situaciones más complejas y variables, no solo mantiene su integridad operativa sino que también exhibe una capacidad mejorada para gestionar y explotar las condiciones del mercado. Esto evidencia la potencial aplicabilidad del modelo en una gama más amplia de escenarios financieros, proporcionando una base sólida para futuras aplicaciones y desarrollos.

### 6.3.2. Tercer *dataset*

La evaluación del tercer *dataset* proporciona una oportunidad adicional para analizar la capacidad del modelo QUBO en un entorno aún más complejo y realista. A diferencia del segundo *dataset*, que fue diseñado para incluir valores extremos y fluctuar drásticamente, este conjunto de datos refleja condiciones de mercado más realistas y menos volátiles. Los resultados obtenidos de este conjunto de datos se presentan en la tabla que hay a continuación 6.4:

Métrica	Valor
Retorno del Portfolio	0.02035
Varianza del Portfolio	9.86398e-05
Ratio de Sharpe	1.04257
Ratio de Sortino	0.92529
Ratio de Información	-0.98492
Máxima Caída	-0.4436
Diversificación del Portfolio	0.43

Tabla 6.4: Resultados de las métricas del modelo QUBO con el tercer *dataset* y variables enteras.

El **retorno del portfolio** es más bajo en este caso (0.02035), lo que puede indicar una menor capacidad del modelo para capitalizar las fluctuaciones del mercado debido a la mayor complejidad y diversidad de los datos.

La **varianza del portfolio** ha disminuido significativamente, sugiriendo una reducción del riesgo asociado al portfolio. Este cambio puede reflejar una estrategia de inversión más conservadora, una mayor eficiencia en la diversificación de las inversiones o una mayor homogeneidad en los datos.

El **Ratio de Sharpe** ha mejorado considerablemente (1.0426), mostrando un mejor retorno ajustado al riesgo en comparación con los resultados del dataset anterior. Sin embargo, el **Ratio de Sortino** es más bajo (0.9253),

indicando que el manejo del riesgo a la baja podría no ser tan efectivo como en el caso anterior.

El **Ratio de Información** de -0.9849, es el más bajo de todas las pruebas realizadas. Esto sugiere que, aunque el rendimiento del portfolio aún está por debajo del benchmark, la diferencia no es tan pronunciada.

La **Máxima Caída** ha aumentado a -0.4436, reflejando un mayor riesgo de pérdidas significativas y posiblemente una gestión de riesgos menos efectiva bajo condiciones de mercado adversas.

La **diversificación del portfolio** se mantiene en 0.43, indicando que la estrategia de diversificación no ha cambiado entre los *datasets*, a pesar de las diferencias en los resultados de rendimiento y riesgo.

Este *dataset* presenta un entorno de mercado más estable y menos volátil. Esto se refleja en la menor varianza y el menor retorno del portfolio. A pesar de la mejora en el **Ratio de Sharpe**, el **Ratio de Información** negativo y la alta **Máxima Caída** sugieren que el modelo enfrenta desafíos en la adaptación a condiciones de mercado más realistas y menos volátiles. Esto subraya la necesidad de continuar refinando el modelo para mejorar su rendimiento en una variedad de escenarios de mercado. La capacidad para ajustar y mejorar el modelo será crucial para su éxito en aplicaciones financieras más amplias y diversas.

## 6.4. Visualización de Resultados

A continuación se muestran tres tipos de gráficas realizadas para cada situación descrita previamente:

### 6.4.1. Nubes de puntos de retornos vs volatilidad

Las nubes de puntos son representaciones gráficas que muestran la relación entre dos variables mediante puntos dispersos en un plano cartesiano. Cada punto en la gráfica representa una observación individual del conjunto de datos, donde la posición en el eje horizontal refleja el valor de una variable (en este caso, la volatilidad) y la posición en el eje vertical refleja el valor de otra variable (en este caso, el retorno esperado).

En el contexto de la optimización de portfolios, estas nubes de puntos se utilizan para visualizar la relación entre la volatilidad (medida como la desviación estándar de los retornos) y los retornos esperados de diferentes configuraciones de portfolios. Esto permite identificar patrones, tendencias y posibles trade-offs entre riesgo y retorno, lo que es crucial para la toma de decisiones en la gestión de inversiones.

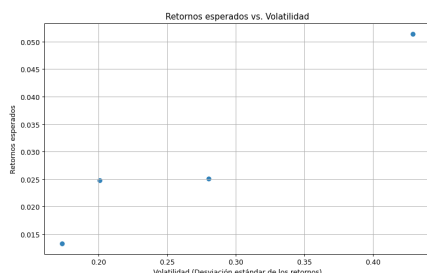


Figura 6.1: Nube de puntos retornos vs volatilidad primer *dataset* con variables binarias

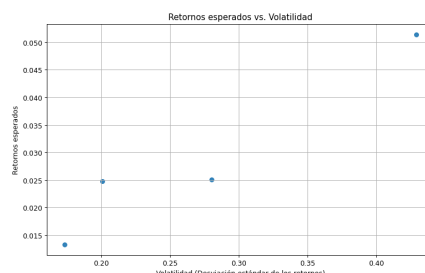


Figura 6.2: Nube de puntos retornos vs volatilidad primer *dataset* con variables enteras

La primera Figura 6.1 muestra una baja dispersión en la volatilidad y retornos moderados. Los puntos están relativamente agrupados, reflejando la estabilidad del primer *dataset*, que contiene un número limitado de activos. La baja volatilidad sugiere un perfil de riesgo conservador, adecuado para inversores que buscan estabilidad en sus retornos.

En la segunda Figura 6.2, aunque la dispersión de los puntos es similar a la de la figura 6.1, los retornos son ligeramente menores. Esto indica que la transición a variables enteras permite una asignación de inversiones más precisa, reduciendo el potencial de ganancias máximas pero también minimizando el riesgo, como se observa en la menor volatilidad.

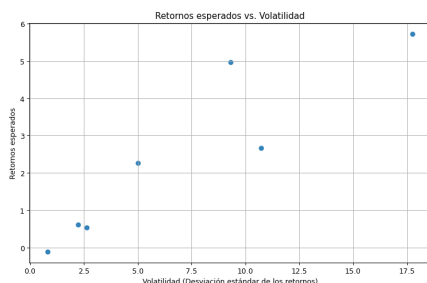


Figura 6.3: Nube de puntos retornos vs volatilidad segundo *dataset* con variables enteras

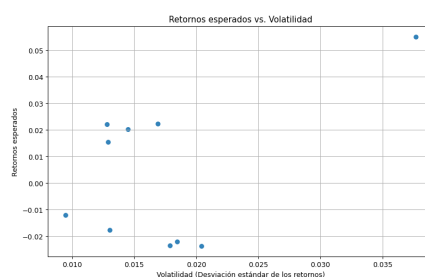


Figura 6.4: Nube de puntos retornos vs volatilidad tercer *dataset* con variables enteras

La tercera Figura 6.3, muestra una mayor dispersión tanto en volatilidad como en retornos esperados, reflejando un entorno de mercado más volátil y con mayores oportunidades de retorno, pero también con mayor riesgo. El modelo parece estar capitalizando las fluctuaciones extremas, resultando en mayores retornos y una mayor varianza.

Por otro lado, la dispersión en la Figura 6.4 es más concentrada en comparación con la del segundo *dataset*. Los puntos reflejan menores volati-

lidades y retornos más estables, alineándose con la naturaleza más realista y menos volátil del tercer conjunto de datos. A pesar de la menor volatilidad, los retornos esperados son moderados, lo que sugiere una gestión eficaz del riesgo.

#### 6.4.2. Gráficos de barras de retornos esperados por empresa

Los gráficos de barra proporcionan una representación visual clara de los retornos esperados para cada empresa en diferentes *dataset* y configuraciones de variables. Esto permite evaluar cómo cada activo individual contribuye al retorno total del portfolio y ayuda a identificar aquellos activos que podrían estar impulsando el rendimiento o introduciendo un mayor riesgo.

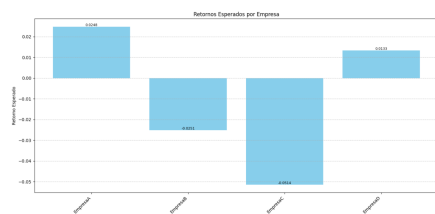


Figura 6.5: Barplot de retornos esperados por empresa primer *dataset* con variables binarias

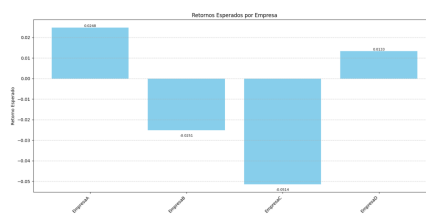


Figura 6.6: Barplot de retornos esperados por empresa primer *dataset* con variables enteras

Las Figuras 6.5 y 6.6 muestran los retornos esperados por cada empresa para el primer *dataset*, utilizando variables binarias y enteras, respectivamente. La EmpresaA tiene un retorno de 0.0248, y la EmpresaD tiene un retorno de 0.0133, ambos positivos, mientras que la EmpresaB y EmpresaC presentan retornos negativos de -0.0251 y -0.0514. Esto sugiere que, bajo el modelo con variables binarias, las empresas con mayores retornos positivos son seleccionadas para optimizar el rendimiento del portfolio. La consistencia entre ambas figuras indica que la transición a variables enteras no ha afectado significativamente la selección de empresas con altos retornos.

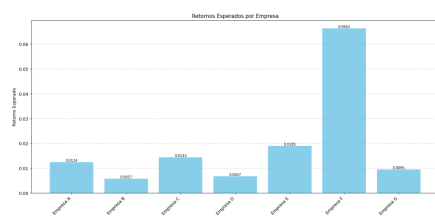


Figura 6.7: Barplot de retornos esperados por empresa segundo *dataset* con variables enteras

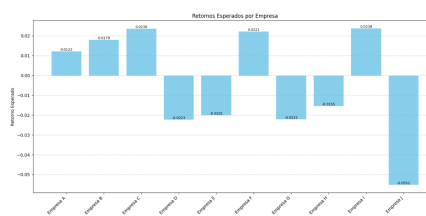


Figura 6.8: Barplot de retornos esperados por empresa tercer *dataset* con variables enteras

La tercera Figura, la Figura 6.7, presenta una mayor variabilidad en los retornos esperados por empresa. EmpresaF muestra un retorno significativamente alto de 0.0663, seguido por EmpresaC con 0.0143. Las demás empresas tienen retornos moderados o bajos, lo que sugiere que la inclusión de un mayor número de activos y la complejidad del *dataset* permiten identificar empresas con alto potencial de retorno, aunque también conlleva un mayor riesgo.

En la Figura 6.8, se observa una distribución más equilibrada de los retornos esperados. EmpresaC y EmpresaJ muestran los retornos más altos de 0.0236 y 0.0738 respectivamente, mientras que EmpresaI presenta un retorno negativo de -0.0552. Esto refleja un entorno de mercado más estable y menos volátil, permitiendo una diversificación más efectiva y un manejo de riesgos más equilibrado.

### 6.4.3. Heatmaps de la covarianza

Los heatmaps son representaciones visuales que utilizan colores para mostrar la intensidad de valores en una matriz. En el contexto de la optimización de portafolios se utilizan para visualizar la matriz de covarianza de los retornos esperados de diferentes activos, lo que permite identificar rápidamente las relaciones entre los activos y cómo estas relaciones afectan el riesgo y el retorno del portafolio.

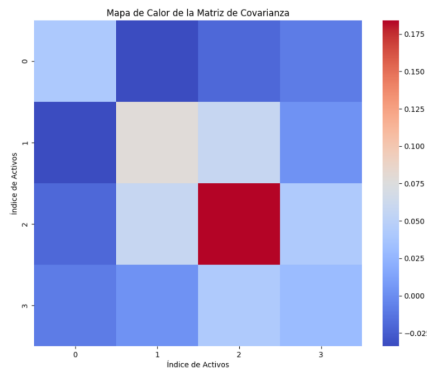


Figura 6.9: *Heatmap* de retornos esperados por empresa primer *dataset* con variables binarias

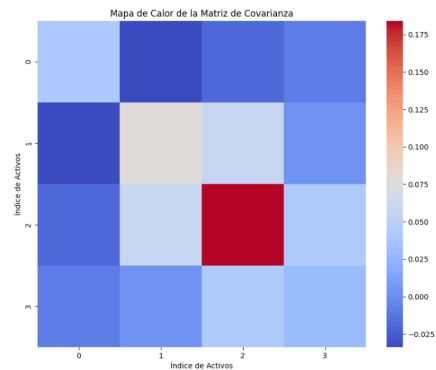


Figura 6.10: *Heatmap* de retornos esperados por empresa primer *dataset* con variables enteras

Los heatmaps de las Figuras 6.9 y 6.10 muestran la matriz de covarianza entre los activos del primer dataset con variables binarias y enteras. Los colores más oscuros indican una mayor covarianza, mientras que los colores más claros indican una menor covarianza. Se observa que la covarianza es más alta entre los activos 1 y 2, lo que sugiere que estos activos tienden a



moverse juntos en el mercado. Nuevamente, el cambio en la representación de las variables no modifica las relaciones entre los activos.

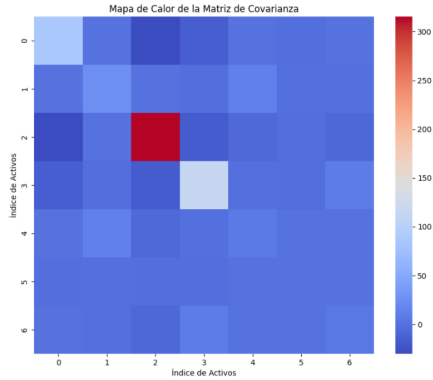


Figura 6.11: *Heatmap* de retornos esperados por empresa segundo *dataset* con variables enteras

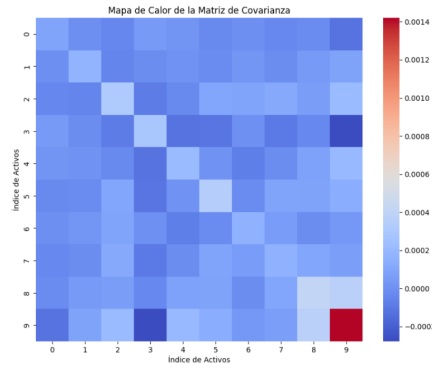


Figura 6.12: *Heatmap* de retornos esperados por empresa tercer *dataset* con variables enteras

El *heatmap* de la Figura 6.11 muestra una matriz de covarianza un poco más compleja debido al aumento en el número de activos que tiene el segundo *dataset*. La mayor variabilidad en los colores indica una mayor dispersión en las covarianzas entre los activos, reflejando un entorno de mercado más volátil. El activo 2 tiene una alta covarianza con varios otros activos, sugiriendo que es un activo clave en este *dataset*.

La Figura 6.12 muestra la matriz de covarianza más compleja puesto que es la que más activos representa. En este caso se observa aún más variabilidad que en la figura 6.11 y refleja un entorno de mercado aún más volátil.

## 6.5. Comparación de *Solvers*

### 6.5.1. Desempeño de dadk

Como se mencionó en el capítulo anterior 5.4.1, el dadk de Fujitsu es un kit de desarrollo que permite a los usuarios acceder y experimentar con la tecnología DA (*Digital Annealer*) de Fujitsu, diseñada para resolver problemas complejos de optimización combinatoria de manera eficiente y rápida. La salida que proporciona tiene el siguiente formato:

1. **Configuración del escalamiento:** Este bloque describe el factor de escala aplicado a las variables y parámetros del modelo QUBO. El escalamiento es fundamental para ajustar las magnitudes de los parámetros y mejorar la eficiencia del algoritmo de optimización.

2. **Valores Efectivos (incluyendo factor de escala):** Estos términos están relacionados con la técnica de *quantum annealing*:

- **temperature\_start:** Es la temperatura inicial del proceso de recocido simulado. Una temperatura alta permite explorar ampliamente el espacio de soluciones.
- **temperature\_end:** Es la temperatura final, más baja, que se enfoca en la explotación local alrededor de las mejores soluciones encontradas.
- **offset\_increase\_rate:** Este parámetro controla la velocidad a la que se ajustan ciertos offsets durante el proceso de recocido, lo que puede influir en la convergencia del algoritmo.
- **duration:** Duración total del proceso de recocido simulado.

3. **Registro de tiempos de procesos:** Se muestran diferentes procesos con sus respectivos tiempos de inicio y fin, así como la duración de cada uno:

- **anneal:** Tiempo dedicado al proceso de recocido, donde el sistema evoluciona buscando minimizar la función objetivo.
- **cpu:** Tiempo de procesamiento puro de la CPU, mostrando cuánto tiempo estuvo activa la CPU trabajando específicamente en tareas del modelo.
- **elapsed:** Tiempo total transcurrido desde el inicio hasta el fin de la operación.
- **execution:** Tiempo durante el cual el algoritmo estuvo ejecutándose, desde la carga del problema hasta la obtención de resultados.
- **prepare\_qubo:** Tiempo tomado para preparar y configurar la formulación QUBO antes de comenzar el recocido.
- **solve:** Tiempo dedicado a resolver efectivamente el QUBO a través del recocido.
- **tuning:** Ajuste de parámetros previos a la ejecución para optimizar el rendimiento del algoritmo.

4. **Resultados:**

- **Valor QUBO:** Indica el valor de la función objetivo alcanzado.
- **Representación de la solución encontrada en formato binario.**
- **Portfolio elegido:** Muestra los elementos seleccionados como solución óptima.
- **Tiempo de ejecución:** Tiempo total que tomó la ejecución del modelo.

### Primer *dataset* con variables binarias

```

*****
Scaling qubo, temperature_start, temperature_end and offset_increase_rate
factor:          109.00000
*****

*****
Effective values (including scaling factor)
temperature_start: 28670.000
temperature_end:   115.500
offset_increase_rate: 1090.000
duration:          0.002 sec
*****

+-----+-----+-----+-----+
| time   | from           | to           | duration    |
+-----+-----+-----+-----+
| anneal | 2024-06-24 17:52:59.968057 | 2024-06-24 17:53:00.111138 | 0:00:00.143081 |
| cpu    | 2024-06-24 17:52:59.967226 | 2024-06-24 17:52:59.967994 | 0:00:00.000768 |
| elapsed | 2024-06-24 17:52:59.960753 | 2024-06-24 17:53:00.111359 | 0:00:00.150606 |
| execution | 2024-06-24 17:52:59.967193 | 2024-06-24 17:53:00.111258 | 0:00:00.144065 |
| prepare_qubo | 2024-06-24 17:52:59.966772 | 2024-06-24 17:52:59.967079 | 0:00:00.000307 |
| solve  | 2024-06-24 17:52:59.967208 | 2024-06-24 17:53:00.111234 | 0:00:00.144026 |
| tuning | 2024-06-24 17:52:59.960800 | 2024-06-24 17:52:59.966717 | 0:00:00.005917 |
+-----+-----+-----+-----+

Valor QUBO: 0
[1, 0, 0, 1]

Portfolio elegido:
['EmpresaA', 'EmpresaD']

Tiempo de ejecución: 0.15 segundos

```

Figura 6.13: Ejecución modelo QUBO con el primer *dataset* y variables binarias con dadk

La ejecución del modelo con el primer *dataset* usando variables binarias revela un rendimiento notablemente eficiente y rápido. El factor de escalamiento aplicado a los parámetros críticos es de 109.00000, lo cual es esencial para optimizar la eficacia del algoritmo. Esta configuración incluye un inicio de temperatura muy alto de 28660.000 para permitir una exploración amplia del espacio de soluciones, y una temperatura final de 115.500 para enfocarse en la explotación de las soluciones potenciales más prometedoras hacia el final del proceso de recocido. Además, la tasa de incremento de desplazamiento se ajusta a 1090.000, modificando la velocidad a la que ciertos parámetros internos cambian durante el recocido.

La duración del proceso es extremadamente corta, solo 0.002 segundos, lo que subraya la capacidad del sistema para ejecutar optimizaciones complejas rápidamente, una característica crucial para aplicaciones que requieren respuestas en tiempo real. Los tiempos registrados para cada proceso individual, como el *anneal* y el *solve*, son prácticamente idénticos y constituyen la mayor parte del tiempo de ejecución, mientras que las fases de preparación

del QUBO y ajuste de parámetros son rápidas y eficientes, lo que demuestra una preparación y optimización efectivas antes del recocido.

Los resultados de la ejecución muestran un Valor QUBO de 0, lo que indica que se ha encontrado una solución óptima para la función objetivo formulada. La solución específica seleccionada incluye 'EmpresaA' y 'EmpresaD', lo que sugiere que esta combinación es la mejor opción dentro del conjunto de posibilidades examinadas. Además, el tiempo total de ejecución del modelo es de solo 0.09 segundos, lo que destaca la rapidez y eficacia del sistema para resolver problemas de optimización.

### Primer *dataset* con variables enteras

```
*****
Scaling qubo, temperature_start, temperature_end and offset_increase_rate
factor:                                0.00512
*****

*****
Effective values (including scaling factor)
temperature_start:                    1942.000
temperature_end:                      68.580
offset_increase_rate:                 269.100
duration:                             0.001 sec
*****
```

time	from	to	duration
anneal	2024-06-24 17:53:35.027301	2024-06-24 17:53:35.551774	0:00:00.524473
cpu	2024-06-24 17:53:35.025723	2024-06-24 17:53:35.027250	0:00:00.001527
elapsed	2024-06-24 17:53:35.021748	2024-06-24 17:53:35.551910	0:00:00.530162
execution	2024-06-24 17:53:35.025690	2024-06-24 17:53:35.551837	0:00:00.526147
prepare_qubo	2024-06-24 17:53:35.025109	2024-06-24 17:53:35.025607	0:00:00.000498
solve	2024-06-24 17:53:35.025705	2024-06-24 17:53:35.551821	0:00:00.526116
tuning	2024-06-24 17:53:35.021781	2024-06-24 17:53:35.025057	0:00:00.003276

```
Valor QUBO: 0
[1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Portfolio elegido:
[('EmpresaA', 30), ('EmpresaD', 70)]

Tiempo de ejecución: 0.53 segundos
```

Figura 6.14: Ejecución modelo QUBO con el primer *dataset* y variables enteras con dadk

Al ejecutar el modelo QUBO con variables enteras en lugar de binarias sobre el mismo conjunto de datos, se observan diferencias significativas tanto en la configuración como en los resultados obtenidos comparado con la ejecución anterior. En la nueva ejecución, el factor de escalamiento es considerablemente menor, sólo 0.00512, lo que sugiere que las variables enteras

requieren un ajuste de escala mucho más fino para adecuarse a los parámetros del algoritmo. Los valores de temperatura inicial y final también se ajustaron a 1942.000 y 68.580 respectivamente, mostrando un rango más estrecho en comparación con la ejecución con variables binarias, lo cual puede reflejar diferencias en la forma en que se manejan las variables enteras durante el proceso de recocido.

La duración total de la ejecución con variables enteras fue de 0.53 segundos, notablemente mayor que los 0.09 segundos de la ejecución binaria. Esto puede ser indicativo de la mayor complejidad computacional que involucra el manejo de variables enteras en comparación con las binarias. Además, la solución obtenida en la ejecución con variables enteras involucra una asignación específica de cantidades para las empresas seleccionadas, en este caso, 30 y 70 unidades para 'EmpresaA' y 'EmpresaD' respectivamente, lo que proporciona una solución más detallada y potencialmente más útil para aplicaciones prácticas que requieren asignaciones cuantitativas precisas en lugar de simplemente seleccionar o descartar opciones.

Segundo *dataset* con variables enteras

```

*****
Scaling qubo, temperature_start, temperature_end and offset_increase_rate
factor:                                0.00512
*****

*****
Effective values (including scaling factor)
temperature_start:                    1927.000
temperature_end:                      100.100
offset_increase_rate:                  343.500
duration:                             0.003 sec
*****

+-----+-----+-----+-----+
| time   | from                               | to                               | duration |
+-----+-----+-----+-----+
| anneal | 2024-06-24 13:41:59.253570       | 2024-06-24 13:41:59.724622     | 0:00:00.471052 |
| cpu    | 2024-06-24 13:41:59.251591       | 2024-06-24 13:41:59.253525     | 0:00:00.001934 |
| elapsed | 2024-06-24 13:41:59.247250       | 2024-06-24 13:41:59.724875     | 0:00:00.477625 |
| execution | 2024-06-24 13:41:59.251557       | 2024-06-24 13:41:59.724689     | 0:00:00.473132 |
| prepare_qubo | 2024-06-24 13:41:59.250753       | 2024-06-24 13:41:59.251460     | 0:00:00.000707 |
| solve  | 2024-06-24 13:41:59.251572       | 2024-06-24 13:41:59.724672     | 0:00:00.473100 |
| tuning | 2024-06-24 13:41:59.247267       | 2024-06-24 13:41:59.250701     | 0:00:00.003434 |
+-----+-----+-----+-----+

Valor QUBO: 0
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1]

Portfolio elegido:
[('Empresa E', 20), ('Empresa F', 70), ('Empresa G', 10)]

Tiempo de ejecución: 0.48 segundos

```

Figura 6.15: Ejecución modelo QUBO con el segundo *dataset* y variables enteras con dadk

La ejecución del modelo con el segundo *dataset* muestra diferencias en los resultados y en los ajustes de los parámetros en comparación con la ejecución anterior sobre un *dataset* menos complejo. A pesar de que el factor de escalamiento se mantuvo igual en 0.00512, se ajustaron ligeramente los valores de temperatura, pasando de 1942.000 a 1927.000 para la temperatura de inicio y de 68.580 a 100.100 para la temperatura final. Esto puede reflejar una necesidad de adaptar el proceso de *quantum annealing* para acomodar las características del nuevo *dataset*. Además, la tasa de incremento del desplazamiento se aumentó de 269.100 a 343.500, posiblemente para manejar mejor la complejidad adicional del problema.

En cuanto a los tiempos de ejecución, el nuevo *dataset* requirió un tiempo ligeramente menor, con una duración total de 0.48 segundos en comparación con los 0.53 segundos del anterior, a pesar de que el nuevo problema era más complejo. Esto sugiere mejoras en la eficiencia del procesamiento o diferencias en la naturaleza de los *datasets* que impactan el rendimiento del

algoritmo.

En los resultados, la solución con el nuevo dataset incluyó la selección de empresas ('Empresa E', 'Empresa F', 'Empresa G') con asignaciones específicas de unidades, lo que indica que el modelo pudo adaptarse bien al nuevo conjunto de datos y proporcionar soluciones detalladas que reflejan las características únicas del mismo. Además, la configuración de la solución [0, 0, 0, ..., 1, 1, 1, 1] el patrón de selección de los nuevos activos.

### Tercer *dataset* con variables enteras

```
*****
Scaling qubo, temperature_start, temperature_end and offset_increase_rate
factor: 0.00512
*****

*****
Effective values (including scaling factor)
temperature_start: 1530.000
temperature_end: 98.870
offset_increase_rate: 316.100
duration: 0.006 sec
*****
```

time	from	to	duration
anneal	2024-06-24 17:27:17.567530	2024-06-24 17:27:18.490220	0:00:00.922690
cpu	2024-06-24 17:27:17.564651	2024-06-24 17:27:17.567443	0:00:00.002792
elapsed	2024-06-24 17:27:17.554779	2024-06-24 17:27:18.490479	0:00:00.935700
execution	2024-06-24 17:27:17.564612	2024-06-24 17:27:18.490314	0:00:00.925702
prepare_qubo	2024-06-24 17:27:17.562475	2024-06-24 17:27:17.564463	0:00:00.001988
solve	2024-06-24 17:27:17.564627	2024-06-24 17:27:18.490290	0:00:00.925663
tuning	2024-06-24 17:27:17.554836	2024-06-24 17:27:17.562398	0:00:00.007562

```
Valor QUBO: 0
[1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]

Portfolio elegido:
['Empresa A', 10], ('Empresa B', 30), ('Empresa C', 20), ('Empresa F', 30), ('Empresa I', 10)]

Tiempo de ejecución: 0.94 segundos
```

Figura 6.16: Ejecución modelo QUBO con el tercer *dataset* y variables enteras con dadk

En la última ejecución del modelo QUBO con variables enteras y un *dataset* más amplio, se mantuvo el factor de escalamiento en 0.00512, pero se ajustaron las temperaturas de inicio y fin a 1530.000 y 98.870 respectivamente, para adaptarse a la mayor complejidad del problema. El tiempo de ejecución aumentó a 0.94 segundos, reflejando la complejidad adicional introducida por el incremento en el número de empresas en el conjunto de datos.

El nuevo *dataset* resultó en una selección diversa de empresas, incluyen-

do 'Empresa A', 'Empresa B', 'Empresa C', 'Empresa F', y 'Empresa I' con asignaciones específicas, demostrando la capacidad del modelo para adaptarse y optimizar en escenarios más complejos y variados. Esta ejecución refleja los ajustes necesarios para manejar un entorno con mayores variables y muestra cómo el aumento en la cantidad de opciones afecta el tiempo y la configuración del proceso de recocido simulado.

### Análisis Comparativo y Desempeño General

- **Ejecución Rápida:** En todos los datasets, el modelo se ejecutó en menos de un segundo, demostrando una alta eficiencia en términos de tiempo de procesamiento.
- **Impacto de la Complejidad:** El tiempo de ejecución aumentó con la complejidad del dataset y la transición de variables binarias a enteras, lo que es esperado debido a la mayor carga computacional. Sin embargo, incluso en el caso más complejo, el tiempo de ejecución de menos de un segundo sigue siendo extremadamente eficiente.
- **Adaptabilidad y Precisión:** La capacidad del modelo para adaptarse y proporcionar resultados precisos en diversos escenarios de mercado, incluyendo aquellos con alta volatilidad, es destacable.
- **Eficiencia en la Diversificación:** La selección de portafolios diversificados en conjuntos de datos más complejos indica una gestión efectiva del riesgo sin comprometer significativamente el tiempo de ejecución.

En resumen, el *dadk* de Fujitsu demostró ser no solo eficiente en términos de tiempo de ejecución, sino también preciso y adaptable en distintos escenarios de mercado, sugiriendo su fuerte potencial para aplicaciones prácticas en la optimización de portafolios.

#### 6.5.2. Desempeño de D-Wave Ocean SDK

En el capítulo anterior 5.4.2 se describió cómo el solver de D-Wave procesa problemas de optimización usando modelos *Ising* y QUBO. Ahora, en esta subsección, se profundizará en la configuración y ejecución de estos modelos a través del Ocean SDK de D-Wave, ilustrando su aplicación práctica en escenarios experimentales.

### Configuración y ejecución de los *solvers* de D-Wave

La configuración comienza creando una función que se encarga de transformar problemas de optimización en modelos binarios cuadráticos (BQM)



5.4.2, el formato estándar requerido por los *solvers* de D-Wave.

Una vez que el problema está correctamente formulado como BQM, se establece la comunicación con el *solver* cuántico a través de una clave API, que es esencial para autenticar y facilitar el acceso al hardware de D-Wave. Seguidamente, se elige el tipo de *solver*: puede ser un **LeapHybridSampler** para un enfoque híbrido que combina técnicas de computación clásica y cuántica, o un **DWaveSampler** para un enfoque puramente cuántico, dependiendo de las necesidades específicas del problema.

El muestreo del problema se lleva a cabo mediante el *sampler* seleccionado. En el caso de utilizar un **DWaveSampler**, es crucial especificar el número de lecturas para garantizar una recopilación de datos amplia y representativa. Posteriormente, los resultados son recolectados y analizados para evaluar tanto la configuración de la solución como su energía, proporcionando *insights* sobre la efectividad del *solver* en encontrar soluciones óptimas.

## Visualización de la plataforma y resultados

En el dashboard de la plataforma se puede interactuar con el sistema, así como ver las ejecuciones realizadas y los distintos solvers disponibles. Esta interfaz es un componente esencial del Ocean SDK que facilita la gestión de proyectos y la visualización del uso del solver.

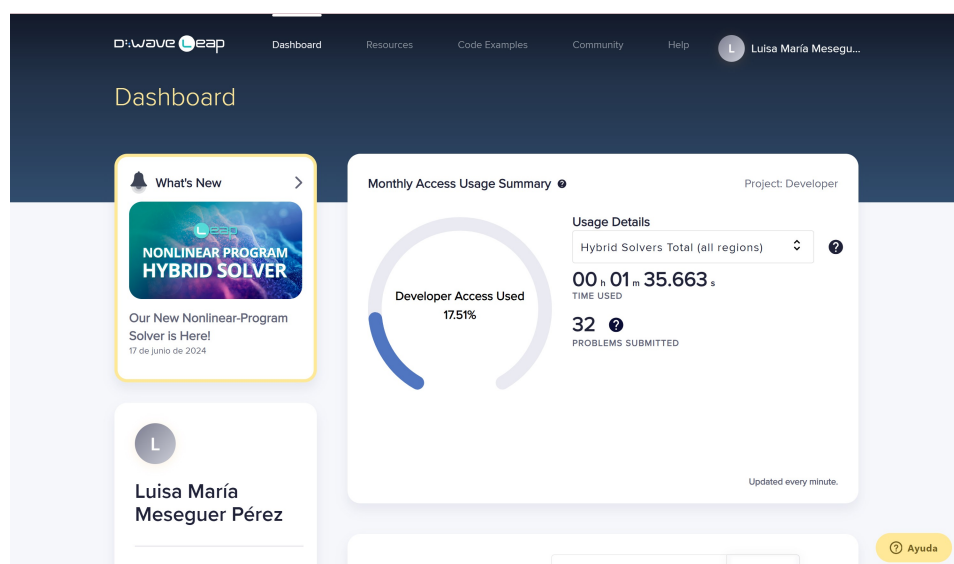


Figura 6.17: *Dashboard* del usuario en D-Wave

Después de lanzar los problemas se puede monitorear su estado a través de la misma interfaz, como se muestra en la Figura 6.18, lo que es vital para

evaluar el desempeño y la completitud de las ejecuciones en tiempo real.

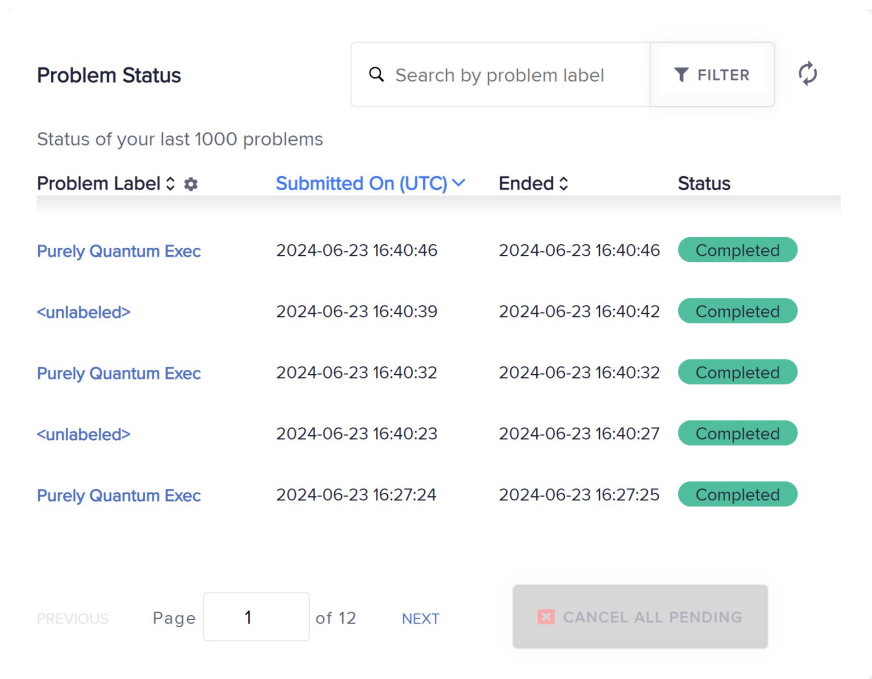


Figura 6.18: Problemas ejecutados recientemente en D-Wave

Resultados obtenidos

Solver Híbrido			
Dataset	Configuración de Solución	Energía	Tiempo de Muestreo (s)
Primer dataset (Variables binarias)	{0: 1, 1: 0, 2: 0, 3: 1}	1.8621	8.269
Primer dataset (Variables enteras)	{0: 0, 1: 1, ..., 15: 1}	-7206.9597	7.603
Segundo dataset (Variables enteras)	{0: 0, 1: 0, ..., 33: 1}	-13059.2716	9.465
Tercer dataset (Variables enteras)	{0: 0, 1: 0, ..., 33: 1}	-13059.2716	7.894

Tabla 6.5: Resultados del desempeño del solver híbrido en D-Wave para distintos *datasets* y tipos de problemas

Solver Cuántico			
Dataset	Configuración de Solución	Energía	Tiempo de Muestreo (s)
Primer dataset (Variables binarias)	{0: 1, 1: 0, 2: 0, 3: 1}	1.8621	4.515
Primer dataset (Variables enteras)	{0: 1, 1: 0, ..., 15: 1}	-6767.4842	3.222
Segundo dataset (Variables enteras)	{0: 1, 1: 0, ..., 33: 1}	-8742.9055	13.538
Tercer dataset (Variables enteras)	{0: 0, 1: 0, ..., 33: 1}	-10685.2747	8.634

Tabla 6.6: Resultados del desempeño del solver cuántico en D-Wave para distintos *datasets* y tipos de problemas

La comparación entre los resultados obtenidos por los *solvers* híbridos y cuánticos en las Tablas 6.5 y 6.5 muestra diferencias notables en términos de tiempos de muestreo y calidad de las soluciones. En general, los *solvers* híbridos tienden a ofrecer soluciones de mayor calidad (menor energía) que sus contrapartes cuánticas, aunque a menudo requieren más tiempo de procesamiento. Este patrón se mantiene constante a través de los tres *datasets* y en las ejecuciones con variables binarias y enteras.

Por otro lado, los *solvers* cuánticos, aunque ofrecen tiempos de muestreo más cortos en algunos casos, no siempre logran alcanzar la calidad de solución que proporcionan los *solvers* híbridos, especialmente en problemas de mayor complejidad. Este hallazgo refuerza la importancia de seleccionar el tipo de *solver* apropiado basado en el tamaño y la complejidad del problema para optimizar tanto la eficiencia como la efectividad del proceso de resolución.



## Capítulo 7

# Conclusiones y trabajo futuro

Este Trabajo de Fin de Grado ha explorado el vasto potencial de la computación cuántica en la optimización de carteras de inversión, logrando identificar un rendimiento superior en términos de eficiencia y capacidad de procesamiento en comparación con métodos convencionales. Las principales conclusiones obtenidas son las siguientes.

### Rendimiento y Eficiencia

La computación cuántica ha demostrado ser significativamente más eficiente en términos de procesamiento y manejo de grandes volúmenes de datos, superando las capacidades de los métodos tradicionales. En cuanto a las limitaciones actuales, la computación cuántica enfrenta desafíos importantes, incluyendo errores cuánticos y problemas de coherencia, así como la limitada escala de los procesadores cuánticos actuales. Además, la actual escala de los procesadores cuánticos limita la aplicabilidad práctica de estos métodos, impidiendo su implementación a gran escala en el sector financiero.

### Beneficios de la Computación Cuántica

La computación cuántica representa una revolución tecnológica con el potencial de transformar el campo de la optimización de carteras de inversión. Entre sus principales beneficios se destacan:

- **Velocidad y Capacidad de Procesamiento:** Los procesadores cuánticos pueden realizar cálculos a velocidades mucho mayores que los ordenadores clásicos, lo que permite analizar grandes volúmenes de datos en tiempo récord.

- **Optimización Avanzada:** La capacidad de los algoritmos cuánticos para explorar múltiples soluciones simultáneamente permite encontrar soluciones óptimas con mayor rapidez y precisión.
- **Innovación y Desarrollo:** La continua investigación y desarrollo en el campo de la computación cuántica promete superar las limitaciones actuales, abriendo nuevas oportunidades en diversas aplicaciones financieras y tecnológicas.

#### 7.0.1. Líneas de Investigación y Desarrollo Futuras

Para seguir avanzando en el campo de la optimización de carteras mediante computación cuántica, se identifican varias líneas de investigación y desarrollo prometedoras y necesarias:

- **Desarrollo de Algoritmos Tolerantes a Errores:** Es fundamental crear algoritmos cuánticos más robustos y capaces de manejar errores cuánticos y problemas de coherencia.
- **Exploración de Nuevas Formulaciones del Problema:** Investigar nuevas formulaciones del problema de optimización que puedan aprovechar al máximo las capacidades de la computación cuántica.
- **Evaluación de la Escalabilidad:** Analizar cómo los modelos cuánticos propuestos se escalan y su impacto en la diversificación y retorno de las carteras.
- **Integración con Métodos Clásicos:** Desarrollar enfoques híbridos que combinen lo mejor de la computación cuántica y clásica para mejorar la eficiencia y efectividad de las soluciones de optimización.
- **Desarrollo Tecnológico Continuo:** Mantener un enfoque en el avance tecnológico para superar las barreras actuales y lograr una mayor aplicabilidad práctica.

En conclusión, aunque la computación cuántica enfrenta desafíos significativos, su potencial para transformar el campo de la optimización de carteras es indudable. Es esencial continuar con la investigación y el desarrollo para abordar estos desafíos y maximizar los beneficios de esta tecnología emergente en el ámbito financiero.

### 7.0.2. Enlace al Repositorio del Trabajo

Para acceder al repositorio oficial de este Trabajo de Fin de Grado debe visitarse el siguiente enlace:

`https://github.com/Lmmp-02/TFG`

El repositorio se ha dividido en varias carpetas para organizar el contenido de manera eficiente y facilitar su comprensión:

- Datasets
- Notebooks
- Requirements





# Bibliografía

- [1] Marcos Roberto Mete. Valor actual neto y tasa de retorno: su utilidad como herramientas para el análisis y evaluación de proyectos de inversión. *Fides et Ratio-Revista de Difusión cultural y científica de la Universidad La Salle en Bolivia*, 7(7):67–85, 2014.
- [2] M. Buffett and D. Clark. *Warren Buffett and the Interpretation of Financial Statements: The Search for the Company with a Durable Competitive Advantage*. Simon & Schuster, 2011.
- [3] J. Smith and L. Anderson. Investment strategies in the era of artificial intelligence and quantum computing. *Journal of Financial Technology*, 12(3):45–62, 2021.
- [4] R. Johnson and M. Patel. Market predictions using quantum computing: A new frontier. *Journal of Quantum Finance*, 7(2):101–119, 2022.
- [5] Daniel FV James, Paul G Kwiat, William J Munro, and Andrew G White. Measurement of qubits. *Physical Review A*, 64(5):052312, 2001.
- [6] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.
- [7] Matthias Steffen, David P DiVincenzo, Jerry M Chow, Thomas N Theis, and Mark B Ketchen. Quantum computing: An ibm perspective. *IBM Journal of Research and Development*, 55(5):13–1, 2011.
- [8] Frank Arute, Kunal Arya, Ryan Babbush, Dave Bacon, Joseph C. Bardin, Rami Barends, Rupak Biswas, Sergio Boixo, Fernando G.S.L. Brandao, David A. Buell, et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. In *Nature*, volume 574, pages 505–510. Nature Publishing Group, 2019.
- [9] Google Colab. Google Colaboratory: A Comprehensive Cloud Notebook Platform. Cloud Notebook Platform, 2024.

- [10] Project Jupyter. *Project Jupyter: Official Documentation and User Guide*. Project Jupyter, 2024. Official documentation of Project Jupyter.
- [11] D-Wave Systems. D-wave systems, 2024.
- [12] Glassdoor. Sueldo: Quantum engineer en españa en 2024 - glassdoor, 2024. Publicación: 11 feb 2024.
- [13] Pablo Molina Panchi, Diego Molina Panchi, and Carlos Flores Tapia. Aplicación de la frontera eficiente de markowitz en la optimización de portafolios de inversiones. *Bolentín de Coyuntura*, (37):32–42, 2023.
- [14] CNMV. Comisión Nacional del Mercado de Valores. Portal Oficial, 2024.
- [15] Pim Van Vliet and Jan de Koning. *El pequeño libro de los altos rendimientos con bajo riesgo: liebres y tortugas en los mercados financieros*. Deusto, 2018.
- [16] Jason Fernando. Balanced Investment Strategy: Definition and Examples, 2022.
- [17] Jianqing Fan and Weng Zhang. Eigen portfolio selection: A Robust Approach to Sharpe Ratio, 2012.
- [18] Realized1031. What is the Average Rate of Return on an Aggressive Portfolio?, 2022.
- [19] Harry Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1):77–91, 1952.
- [20] Edward Farhi, Jeffrey Goldstone, and Sam Gutmann. A quantum approximate optimization algorithm. *arXiv preprint arXiv:1411.4028*, 2014.
- [21] William F. Sharpe. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19:425–442, 1964.
- [22] Fischer Black and Michael Scholes. Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*, 45(3):444–455, 1972.
- [23] LibreTexts. The Ultraviolet Catastrophe. 2021.
- [24] Oxford Academic. Max Planck and the Quantum Hypothesis. 2013.
- [25] Kenneth W. Ford. Niels Bohr’s First 1913 Paper: Still Relevant, Still Exciting, Still Puzzling. *The Physics Teacher*, 56(8):500–502, 2018.

- [26] Søren Toxvaerd. Simulating physics with computers. *arXiv preprint arXiv:2405.20780*, 2024.
- [27] Author Unknown. On the trail of blackbody radiation: Max planck and the physics of his time. *American Journal of Physics*, 91(2):159–162, 2023.
- [28] Author Unknown. Heisenberg and the uncertainty principle. 2024.
- [29] Paul Benioff. Quantum mechanical hamiltonian models of turing machines. *Journal of Statistical Physics*, 29:515–546, 1982.
- [30] Richard P Feynman. Simulating physics with computers. In *Feynman and computation*, pages 133–153. CRC Press, 2018.
- [31] David Collins, KW Kim, and WC Holton. Deutsch-jozsa algorithm as a test of quantum computation. *Physical Review A*, 58(3):R1633, 1998.
- [32] Ray LaPierre and Ray LaPierre. Shor algorithm. *Introduction to Quantum Computing*, pages 177–192, 2021.
- [33] Julian Brown. *Quest for the quantum computer*. Simon and Schuster, 2001.
- [34] Tameem Albash, Troels F Rønnow, Matthias Troyer, and Daniel A Lidar. Reexamining classical and quantum models for the d-wave one processor: the role of excited states and ground state degeneracy. *The European Physical Journal Special Topics*, 224(1):111–129, 2015.
- [35] Jerry Chow, Oliver Dial, and Jay Gambetta. Ibm quantum breaks the 100-qubit processor barrier. *IBM Research Blog*, 2, 2021.
- [36] George Kurian, Qingchuan Shi, Srinivas Devadas, and Omer Khan. Osprey: Implementation of memory consistency models for cache coherence protocols involving invalidation-free data access. In *2015 International Conference on Parallel Architecture and Compilation (PACT)*, pages 392–405. IEEE, 2015.
- [37] Satoshi Morita and Hidetoshi Nishimori. Mathematical foundation of quantum annealing. *Journal of Mathematical Physics*, 49(12), 2008.
- [38] Hilbert J Kappen. Learning quantum models from quantum or classical data. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 53(21):214001, 2020.
- [39] Nada es Gratis. Markowitz y la democratización de las finanzas, 2024.
- [40] Peter Sayer. D-wave lanza su tercer ordenador cuántico a la nube. *Computerworld Spain*, pages NA–NA, 2022.

- [41] BBVA. ¿Qué son los activos financieros?, 2024.
- [42] BBVA México. ¿qué son los productos financieros sostenibles y cuáles son sus beneficios?, 2024.
- [43] Marcus Doherty. Quantum accelerators: a new trajectory of quantum computers. *Digitale Welt*, 5(2):74–79, 2021.
- [44] Iulia Georgescu. Bringing back the golden days of bell labs. *Nature Reviews Physics*, 4(2):76–78, 2022.
- [45] Dan M Davis, Robert F Lucas, and Daniel P Burns. Practical adiabatic quantum computing: A new capability for the test and evaluation community.
- [46] Sevag Gharibian, Yichen Huang, Zeph Landau, Seung Woo Shin, et al. Quantum hamiltonian complexity. *Foundations and Trends® in Theoretical Computer Science*, 10(3):159–282, 2015.
- [47] Fred Glover, Gary Kochenberger, and Yu Du. Quantum bridge analytics i: a tutorial on formulating and using qubo models. *4or*, 17(4):335–371, 2019.
- [48] Tomoko Komiyama and Tomohiro Suzuki. Qubo formulation using inequalities for problems with complex constraints. page 55 – 61, 2024. Cited by: 0.
- [49] Niels Bantilan. pandera: Statistical data validation of pandas dataframes. In *SciPy*, pages 116–124, 2020.
- [50] Boris Marjanovic. Price and Volume Data for all U.S. Stocks & ETFs, 2023. Accessed: 2024-06-14.
- [51] Hendrik Bessembinder and Herbert M Kaufman. A comparison of trade execution costs for nyse and nasdaq-listed stocks. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32(3):287–310, 1997.
- [52] Barry A Cipra. An introduction to the ising model. *The American Mathematical Monthly*, 94(10):937–959, 1987.
- [53] New Scientist. Timeline: A Brief History of Quantum Computing from 1980 to 2100. New Scientist, 2019.
- [54] Inside Quantum Technology. 27 milestones in the History of Quantum Computing. Inside Quantum Technology, 2021.
- [55] Qiskit. Qiskit quantum computing 101, 2022.
- [56] Qiskit. Qiskit textbook videos, 2022.

- 
- [57] D-Wave Systems. Resource library, 2024.
  - [58] Universidad de Granada. Cátedra fujitsu-ugr, 2024.
  - [59] Business Insider España. ¿qué es una cartera de inversión?, 2024.
  - [60] Estrategias de Inversión. Volatilidad, 2024.
  - [61] IBM. Ibm prepara la construcción del primer ordenador cuántico universal para negocio y ciencia, 3 2017.



## Apéndice A

# Formación inicial

Mi interés inicial en la computación cuántica surgió tras asistir a una charla de Fujitsu el 5 de octubre de 2023, realizada en la Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicaciones organizada por la Cátedra Fujitsu-UGR [58]. Este evento fue esencial, ya que no solo introdujo los fundamentos de la computación cuántica, sino que también exploró su aplicación en diversos campos, incluyendo la optimización de carteras de inversión. La posibilidad de aplicar principios cuánticos a problemas financieros me fascinó y motivó la elección de mi tema de proyecto.

Dado que mi conocimiento previo sobre computación cuántica era bastante limitado, emprendí un proceso autodidacta riguroso. Comencé a profundizar en el tema a través de la lectura de artículos especializados y visualización de vídeos. Mi co-tutor en el proyecto me facilitó acceso a un curso de la Universidad Politécnica de Madrid que abarcaba los principios básicos de la computación cuántica adiabática y la formulación de problemas QUBO, componentes que serían cruciales para mi proyecto, donde implementé código destinado a este tipo de computadores.

Posteriormente, el 21 de noviembre de 2023, asistí a un taller de computación cuántica ofrecido por Fujitsu en la Universidad de Granada. Este taller no solo reforzó mi comprensión de la computación cuántica sino que también me permitió profundizar en el funcionamiento y la utilidad de los computadores de puertas lógicas cuánticas.

Al día siguiente, tuve la oportunidad de asistir al I Congreso de Inteligencia Artificial de Andalucía, un evento que reunió a varios de los más destacados profesionales y académicos del área. El congreso fue una plataforma excelente para el networking y para discutir las últimas tendencias y desafíos en la intersección de la inteligencia artificial y la computación cuántica. El taller impartido por Andrés Bravo Montes sobre simulación cuántica y su aplicación en la inteligencia artificial, amplió mi comprensión sobre cómo las

empresas líderes están integrando estas tecnologías para resolver problemas complejos.

El taller tuvo la siguiente estructura:

Módulo	Título	Contenidos
Módulo 1	Quantum Machine Learning	Introducción, Machine Learning vs. Quantum Machine Learning, casos de uso y retos actuales
Módulo 2	Computación Cuántica	Revisión actual de la Computación Cuántica, introducción a la Computación Cuántica y al formalismo matemático
Módulo 3	Qaptiva™	Estrategia cuántica, creación y captación de talento, framework open-source myQLM, descripción de funcionalidades e Instalación de myQLM
Módulo 4	Programación básica con myQLM	Hello Quantum World, estudio de algoritmos variacionales y resolución de algoritmos con QAOA
Módulo 5	Clasificadores Híbridos con myQLM	Redes Neuronales Cuánticas, Quantum Data Encoding, entrenamiento y análisis de resultados
Módulo 6	Clausura del workshop	Documentación y repositorios de myQLM

Tabla A.1: Programa taller Computación cuántica Eviden

En febrero de 2024, asistí a otro taller impartido por Fujitsu en nuestra facultad, centrado en la optimización mediante computación cuántica adiabática. Este taller fue clave para sentar las bases teóricas y resolver problemas de optimización que definirían posteriormente mi modelo QUBO.

A partir de ahí continué formándome por mi cuenta, haciendo el Qiskit Quantum Global Summer School 2020 de IBM [55]. Es un programa intensivo de dos semanas diseñado para dotar a los investigadores y desarrolladores cuánticos del futuro de los conocimientos necesarios para explorar el mundo de la computación cuántica, así como para refrescar y perfeccionar las habilidades de los profesionales del sector. Este curso trata sobre la computación cuántica en general, ofreciéndome una nueva perspectiva sobre conceptos base de la computación cuántica e indagando en conceptos de criptografía, física y química cuántica. Posteriormente realicé el Summer School de 2023 [56], que se centra en los fundamentos de la computación cuántica, más concretamente en el paso de la teoría a la implementación.

Además de las formaciones presenciales, complementé mi aprendizaje a través de recursos disponibles en línea. Uno de los más valiosos fue la serie



de vídeos del Qiskit Quantum Global Summer School de IBM, publicados en YouTube. Los cursos Qiskit Quantum Global Summer School son programas intensivos organizados por IBM, destinados a educar a investigadores y desarrolladores sobre los fundamentos y aplicaciones de la computación cuántica. Los vídeos de las ediciones de 2020 [55] y 2023 [56] fueron fundamentales para mi educación. La edición de 2020 abarcó una amplia gama de temas, desde criptografía hasta física y química cuántica, ofreciéndome una visión integral y multidisciplinaria de la computación cuántica. La serie de 2023 se centró más en los fundamentos de la computación cuántica y la transición de la teoría a la implementación práctica, aspectos cruciales para la ejecución de mi proyecto.

Simultáneamente, dediqué tiempo a investigar sobre la plataforma de simulación cuántica D-Wave [11] [57], que se ha destacado como uno de los principales recursos para la ejecución de algoritmos cuánticos en un entorno controlado. Este estudio fue complementado con una revisión exhaustiva sobre la teoría de carteras de inversión y matemáticas financieras, lo que me permitió diseñar y optimizar modelos financieros mediante la aplicación de técnicas cuánticas.

Este capítulo de formación inicial no solo refleja el desarrollo de mi conocimiento técnico, sino también mi crecimiento como investigadora capaz de integrar diversas disciplinas para abordar retos innovadores en el campo de la computación cuántica.



# Glosario

**BQM** *Binary Quadratic Models*. 57, 74, 75, 96, 97

**CNMV** *National Securities Market Commission*. 42

**CNOT** *Controlled-NOT*. 53, 54

**CSV** *Comma-Separated Values*. 29, 70

**DA** *Digital Annealer*. 89

**dadk** *Digital Annealer Development Kit*. II, IV, 63, 71–73, 89, 91, 92, 94–96

**EE.UU.** *Estados Unidos*. 70

**ETFs** *Exchange-Traded Fund*. 70

**GDDR** *Graphics Double Data Rate*. 31

**IA** *Inteligencia Artificial*. 23, 24, 43

**IBM** *International Business Machines*. 26, 33, 47

**MKT** *Market*. 70

**ML** *Machine Learning*. 50

**NASDAQ** *National Association of Securities Dealers Automated Quotation*. 70

**NVMe** *Non-Volatile Memory Express*. 31

**NYSE** *New York Stock Exchange*. 70

**QKD** *Quantum Key Distribution*. 50

**qubit** *Quantum Bit*. 25, 46–49, 51–55, 57, 58, 62

**QUBO** *Quadratic unconstrained binary optimization.* IV, V, 3, 27, 29, 30, 33, 44, 62–65, 67, 72–74, 79–81, 83, 84, 89, 91, 92, 94–96

**RAM** *Random-Access Memory.* 31

**RGPD** *Reglamento General de Protección de Datos.* 71

**SDK** *Software Development Kit.* 96, 97

**SSD** *Solid State Drive.* 31

**SWAD** *Shared Workspace At a Distance.* 33

