一填空

1 $\underline{-\frac{512}{81}}$ 2、 $\underline{\text{n-2}}$ 3、$\underline{2}$ 4、$\underline{1，1，5}$ detB=$\underline{5}$ 5、k(0,0,1)^T+(0.5,0.5,1)^T 6、$-\frac{2003A+1998E}{1982}$

7、t>-2 8、 $\underline{-1/8}$ 9 、$\underline{(1,0,0)^T}$ 10、 $\underline{-(A\text{-}7E)/31}$ 11、$\underline{0}$ 12、$\underline{-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}}$ 13、$\underline{192}$

14、$\underline{4}$ 15、$\begin{pmatrix}1&0\\2k&1\end{pmatrix}$ 16 $\underline{2m-n}$ 17 $\underline{\quad 5 \quad}$ 18 $\underline{\quad 2 \quad}$ 19 $\underline{1}$ 20 $\underline{\frac{1}{3}(A-2E)}$ 21 $\underline{-3<t<1}$

22 $\underline{\ 0，\ 0，\ 3}$ 23 $\underline{\eta=k(1,1,2)^T+(1,2,1)^T}$ 24.160 25.-2 26.27 27. $\frac{3}{2}E-\frac{1}{2}A$

28. $\begin{bmatrix}3&1&2\\2&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ 29.-9 30. 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ 31. $-\sqrt{3}<\lambda<\sqrt{3}$ 32.

$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$ 33. $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ 34. $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 35. $r(A)=r(Ab)=n$

36. $(-\frac{1}{3},\frac{5}{3})$ 37.AB 38.0 39.AB=BA 40.1 或-1 41. $t>\frac{3}{5}$

二 判断

1 √ 2× 3× 4× 5 √ 6× 7× 8 √ 9× 10×

四 计算

1 $D_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)!$ （或$(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{2}$ 或$\frac{(-1)^{n-1}}{2}(n+1)!$）

2 $A=\begin{bmatrix}2&-1&3&8\\1&1&1&5\\1&7&-1&9\\1&10&-2&11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&5\\0&-3&1&-2\\0&6&-2&4\\0&9&-3&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{4}{3}&\frac{13}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

a_1,a_2是向量组a_1,a_2,a_3,a_4的一个极大线性无关组

且$a_3=\frac{4}{3}a_1-\frac{1}{3}a_2, a_4=\frac{13}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2$

3 解： $(A-2E)B=A$

因为$|A-2E|=\begin{vmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=2\neq0$，$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-2E)^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&3&3\\-1&1&3\\1&1&-1\end{pmatrix}$

所以 $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}$

4

解：（1）因为 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&2&0\\3&-1&4\\2&1&7\end{vmatrix}=-37\neq 0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 中的一组基

（2）令 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，即 $\begin{cases}x_1+2x_2=7\\3x_1-x_2+4x_3=-8\\2x_1+x_2+7x_3=-9\end{cases}$

$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&7\\3&-1&4&-8\\2&1&7&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&7\\0&1&-4/7&29/7\\0&0&37/7&-74/7\end{pmatrix}$，解得 $x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=-2$

所以 β 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为（1，3，-2）

5 解：$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&p\\2&3&q&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&q-1&p-2\\0&0&0&p-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&q-1&0\\0&0&0&p-2\end{pmatrix}$

（1）$p\neq 2$ 时，$r(A)<r(\overline{A})$，方程组无解；

（2）$p=2,q\neq 1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=3$，方程组有唯一解，其解是 $x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=0$；

$p=2,q=1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，方程组有无穷多解

这时 $\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，同解方程 $\begin{cases}x_1=-1-2x_3\\x_2=2+x_3\end{cases}$，通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

（k 为任意常数）

6 解：

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&2&3&\vdots&1\\1&3&6&1&\vdots&3\\1&5&10&-1&\vdots&5\\3&5&10&7&\vdots&a\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&3&\vdots&1\\0&2&4&-2&\vdots&2\\0&4&8&-4&\vdots&4\\0&2&4&-2&\vdots&a-3\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&3&\vdots&1\\0&2&4&-2&\vdots&2\\0&0&0&0&\vdots&a-5\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&4&\vdots&0\\0&1&2&-1&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&a-5\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$

(1) $a\neq 5$时，无解。

(2) 当 $a=5$时, 方程组有解， 特解 $\gamma_0=(0,1,0,0),^T$ 其导出的基础解系为 $\eta_1=(0,-2,1,0)^T=(-4,1,0,1)^T$, 原方程组的全部解为 $X=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2,k_1,k_2$ 为任意常数。

7 解：矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，则 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$

$\lambda_1=1$时，解 $(E-A)x=0$ 得特征向量 $\xi_1=(0,-1,1)^T$，单位化 $\eta_1=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$

$\lambda_2=2$ 时，解 $(2E-A)x=0$ 得特征向量 $\xi_2=(1,0,0)^T$，单位化 $\eta_2=(1,0,0)^T$

$\lambda_3=5$ 时，解 $(5E-A)x=0$ 得特征向量 $\xi_2=(0,1,1)^T$，单位化 $\eta_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$ 所以正交变换 $x=Py=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}y$，使得

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2.$$

8 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-2)^2$，所以 A 的 4 特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$。对应与特征于 $\lambda_1=0$ 的特征向量 $(1,0-1)^T$，标准正交化 $a_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$；对应于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量 $(1,01)^T$，$(0,1,0)^T$，标准正交化，$a_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$，

$a_3=(0,1,0)^T$ 。

由此可得正交矩阵 $Q=(a_1,a_2,a_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}$,

使得 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=A$ 为对角矩阵。

$$A^{10}=QA^{10}Q^{-1}=\begin{bmatrix}2^9&0&2^9\\0&2^{10}&0\\2^9&0&2^9\end{bmatrix}$$

9 解：记以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列向量的矩阵为 A，则

$$|A|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(10+a)a^3.$$

于是当 $|A|=0$, 即 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

当 $a=0$ 时，显然 α_1 是一个极大线性无关组，且 $\alpha_2=2\alpha_1,\alpha_3=3\alpha_1,\alpha_4=4\alpha_1$；

当 $a=-10$ 时，

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\end{array}\\ A= & \begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\end{array},$$

由于此时 A 有三阶非零行列式 $\begin{vmatrix}-9&2&3\\1&-8&3\\1&2&-7\end{vmatrix}=-400\neq0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为极大线性无关组，且 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$，即 $\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$.

10 解：

（Ⅰ） 因为矩阵 A 的各行元素之和均为 3，所以

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

则由特征值和特征向量的定义知，$\lambda=3$是矩阵A的特征值，$\alpha=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$是对应的特征向量. 对应$\lambda=3$的全部特征向量为$k\alpha$，其中$k$为不为零的常数.

又由题设知 $A\alpha_1=0, A\alpha_2=0$，即$A\alpha_1=0\cdot\alpha_1, A\alpha_2=0\cdot\alpha_2$，而且$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，所以$\lambda=0$是矩阵$A$的二重特征值，$\alpha_1,\alpha_2$是其对应的特征向量，对应$\lambda=0$的全部特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中k_1,k_2为不全为零的常数.

（II） 因为A是实对称矩阵，所以α与α_1,α_2正交，所以只需将α_1,α_2正交.

取 $\beta_1=\alpha_1$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

再将α,β_1,β_2单位化，得

$$\eta_1=\frac{\alpha}{|\alpha|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\eta_2=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\eta_3=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

令 $Q=\left[\eta_1,\eta_2,\eta_3\right]$，则$Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}$，由$A$是实对称矩阵必可相似对角化，得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}=\Lambda.$$

（III）由（II)知 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}=\Lambda$，所以

$$A=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$Q^{\mathrm{T}}\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6 Q=\left[Q^{\mathrm{T}}\left(A-\frac{3}{2}E\right)Q\right]^6=\left(Q^{\mathrm{T}}AQ-\frac{3}{2}E\right)^6$$

$$=\left[\begin{pmatrix}3 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & & \\ & \frac{3}{2} & \\ & & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\right]^6=\begin{pmatrix}\left(\frac{3}{2}\right)^6 & & \\ & \left(\frac{3}{2}\right)^6 & \\ & & \left(\frac{3}{2}\right)^6\end{pmatrix}=\left(\frac{3}{2}\right)^6 E,$$

则$\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6=Q\left(\frac{3}{2}\right)^6 EQ^{\mathrm{T}}=\left(\frac{3}{2}\right)^6 E$.

11 解:① 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$是方程组的 3 个线性无关的解,则$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$是 $AX=0$ 的两个线性无关的解.于是 $AX=0$ 的基础解系中解的个数不少于 2,即 $4-\mathrm{r}(A)\geq 2$,从而 $\mathrm{r}(A)\leq 2$.

又因为 A 的行向量是两两线性无关的,所以 $\mathrm{r}(A)\geq 2$.

两个不等式说明 $\mathrm{r}(A)=2$.

② 对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$(A|\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1\\ a & 1 & 3 & b & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & 4-2a\end{array}\right),$$

由 $\mathrm{r}(A)=2$,得出 $a=2, b=-3$.代入后继续作初等行变换:

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1=2-2x_3+4x_4,\\ x_2=-3+x_3-5x_4,\end{cases}$$

求出一个特解$(2,-3,0,0)^{\mathrm{T}}$和 $AX=0$ 的基础解系$(-2,1,1,0)^{\mathrm{T}}, (4,-5,0,1)^{\mathrm{T}}$.得到方程组的通解:

$(2,-3,0,0)^{\mathrm{T}}+c_1(-2,1,1,0)^{\mathrm{T}}+c_2(4,-5,0,1)^{\mathrm{T}}$, c_1, c_2任意.

12 解: 设有 x_1, x_2, x_3, 使得 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$,

即 $(x_1-x_2+5x_3)\alpha_1+(2x_1+x_2+2x_3)\alpha_2+(3x_1+7x_3)\alpha_3=0$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 \qquad + 7x_3 = 0 \end{cases}$，

又$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$，方程组有非零解，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关。

五 1 证明：

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{第k行加至n行，k=1,}\cdots\text{,n-1}]{\text{第i列加至i+1列，i=1,}\cdots\text{,n-1.}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^{n} a_i \end{bmatrix}$$，所以，方程组有解，充分必要条件是$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$