试 题 三 （考试时间：120 分钟）

一、 填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1．若 n 阶方阵 A 的特征值为 $0,1,2,\cdots,n-1$，且方阵 B 与 A 相似，则 $|B+E|=$__________

2．设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$g(x)=\begin{vmatrix}x & -1\\ -3 & x+2\end{vmatrix}$，则 $g(A)=$_______________.

3. 向量 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$ 是 R^3 的一组基，则向量 $\xi=(3,4,3)^T$ 在该基下的坐标为____________.

4. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是______________.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$

6. 设 n 维行向量 $\alpha=(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2})$，矩阵 $A=E-\alpha^T\alpha,B=E+2\alpha^T\alpha$，其中 E 为 n 阶单位阵，则 $AB=$_______.

7．设 A 是 4×3 阶矩阵，且 A 的秩 $r(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则 $r(AB)=$_______

8．设 α,β,γ 为 3 维列向量，记矩阵 $A=(\alpha,\beta,\gamma),B=(\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha)$，若 $|A|=3$，则 $|B|=$______.

二、（10 分）计算 n 阶行列式的值

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & & 0 & 0\\ & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n\end{vmatrix}$$

三、（12 分）问 a, b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \ \ x_4 = 3; \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 + 15x_4 = 3; \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = b. \end{cases}$$

无解？有唯一解？有无穷多解？有无穷多解的情况下，求其通解.

四、（12 分） 设 $\xi = (1,1,-1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量.（1）试确定参数 a, b 及特征向量 ξ 所对应的特征值；

（2）问 A 能否相似于对角阵，试说明理由.

五、（12 分）已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2

（1） 求 a 的值；（2）求正交变换 $X = QY$，把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形.

六、（10 分）设 3 阶方阵 A, B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$，，求矩阵 B. 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

七、（12 分）（选做一题）

（1）设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系，向量 β 满足 $A\beta \neq 0$.

证明：向量组 $\beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_r, \beta$ 线性无关。

（2）已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ $(k \geq 3)$ 线性无关，试讨论向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \cdots, \alpha_k + \alpha_1$ 的线性相关性.

试题三参考答案

一．填空题

1．$n!$　　2．$\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　　3．$(1,1,2)^T$　　4．$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$　　5．$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6．E　　7．2　　8．6

二 解 $D_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)!$　（或$(-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)!}{2}$　或$\dfrac{(-1)^{n-1}}{2}(n+1)!$）

三 解：$\overline{A}\xrightarrow{\text{初等行}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \text{b+5} \end{array}\right)=\overline{A_1}$

（1） 当$a\neq 2$时，$r(A)=r(\overline{A})=4$，方程组有唯一解；

（2） 当$a=2$时，$\overline{A_1}\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)=\overline{A_2}$

1°．若$a=2$且$b\neq 1$时，$r(A)=3<4=r(\overline{A})$，方程组无解；

2°．若$a=2$且$\text{b}\neq 1$时，则

$$\overline{A_2}\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

得基础解系为$\alpha_1=(0,-2,1,0)^T$，特解$\eta_0=(-8,3,1,2)^T$，

故通解为$\eta=k\alpha_1+\eta_0$　（k为任意常数）.

四 解：(1) 设ξ所对应的特征值为λ，由$A\xi=\lambda\xi$，即$(\lambda E-A)\xi=0$得：

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda-a & -3 \\ 1 & -b & \lambda+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad 即 \begin{cases} \lambda-2+1+2=0 \\ -5+\lambda-a+3=0 \\ 1-b-\lambda-2=0 \end{cases}$$

解得：$a=-3,\ b=0,\ \lambda=-1$.

(2) 由 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 得 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3$，

故 $\lambda_1=-1$ 为 A 的三重特征值.

解 $(\lambda_1 E-A)X=0$．因 $-E-A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得其基础解系中只含一个解向量 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，从而属于 $\lambda_1=-1$ 的线性无关的特征向量只含一个解向量，不等于 λ_1 的重数 3，故 A 不可对角化.

五 解：(1) 二次型 f 所对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 由 f 的秩为 2 知 $r(A)$=2.

所以有 $\begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+a & 1-a \end{vmatrix}=-4a=0$，得 $a=0$.

(2) 当 $a=0$ 时，$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 则 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\lambda$

故 A 的特征值 $\lambda_1=2$（二重），$\lambda_2=0$

当 $\lambda_1=2$ 时，由 $\left(\lambda_1 E-A\right)X=0$ 得线性无关的特征向量为

$$\alpha_1=\left(1,1,0\right)^T, \quad \alpha_2=\left(0,0,1\right)^T$$

同理，当 $\lambda_2=0$ 时，得线性无关的特征向量为 $\alpha_3=\left(-1,1,0\right)^T$.

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化得 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1,1,0\right)^T$，$\eta_2=\left(0,0,1\right)^T$，$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1,1,0\right)^T$

记$Q=\left(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3\right)$，则$Q$为正交矩阵.

令 $X=QY$ 则有 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2{y_1}^2+2{y_2}^2$

六．解：对矩阵方程$A^{-1}BA=6A+BA$两端右乘A^{-1}得

$A^{-1}B=6E+B$．故$B=6A+AB$ 即$(E-A)B=6A$

则

$$B=6(E-A)^{-1}A=6\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0&0\\0&\frac{3}{4}&0\\0&0&\frac{6}{7}\end{pmatrix}^{-1}A=6\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&0\\0&\frac{4}{3}&0\\0&0&\frac{7}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

七．（1） 证明：考察$k_1(\alpha_1+\beta)+k_2(\alpha_2+\beta)+......+k_r(\alpha_r+\beta)+k\beta=0$

即$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+......+k_r\alpha_r+(k_1+k_2+...+k_r+k)\beta=0$ （*）

对（*）式两端左乘A，且由题设$A\alpha_i=0$ $(i=1,2,....,r)$得

$(k_1+k_2+...+k_r+k)A\beta=0$

而$A\beta\neq 0$，故$k_1+k_2+...+k_r+k=0$

代入（*）式得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+......+k_r\alpha_r=0$

又因为$\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_r$是$AX=0$的基础解系，

从而有$k_1=k_2=...=k_r=0$ 故$k=0$.

即 $\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,.....,\beta+\alpha_r,\beta$线性无关.

⑵ 设$l_1(\alpha_1+\alpha_2)+l_2(\alpha_2+\alpha_3)+......+l_k(\alpha_k+\alpha_1)=0$

则有$(l_1+l_k)\alpha_1+(l_1+l_2)\alpha_2+(l_2+l_3)\alpha_3+...+(l_{k-1}+l_k)\alpha_k=0$

由题设$\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_k \quad (k\geq 3)$线性无关知

$$\begin{cases} l_1+l_k=0 \\ l_1+l_2=0 \\ l_2+l_3=0 \\ \cdots \\ l_{k-1}+l_k=0 \end{cases}$$

考虑这个一次线性方程组的系数矩阵A的行列式的值

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{k\times k} = 1\times 1^{k-1}+(-1)^{k+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{(k-1)\times(k-1)}$$

$=1+(-1)^{k+1}$

当k为奇数时，$|A|=2\neq 0$，方程组只有零解，

当k为偶数时，$|A|=0$，方程组有非零解.

故

当k为奇数时，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,......,\alpha_k+\alpha_1$线性无关；

当k为偶数时，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,......,\alpha_k+\alpha_1$线性相关.