试 题 五 （考试时间：120 分钟）

一、 判断题（每小题 3 分，共 18 分）

1．设 A、B 均为 n 阶方阵，则 $\left||A|B\right| = |A||B|$. （ ）

2．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解. （ ）

3．n 阶实对称矩阵一定与对角矩阵相似. （ ）

4．已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为 n 维列向量组，A 是 $m\times n$ 矩阵，如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 也线性相关. （ ）

5．实二次型 $f=x^TAx$ 的标准形是唯一的. （ ）

6．已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3)^T$，$\alpha_2=(-1,1,1)^T$，$\alpha_3=(0,3,9)^T$ 线性无关，则向量组 $\beta_1=(1,2,3,a)^T$，$\beta_2=(-1,1,1,b)^T$，$\beta_3=(0,3,9,c)^T$ 也线性无关. （ ）

二、 单项选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1．行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & x & 2x \\ 1 & 1 & x & -1 \\ 0 & x & 2 & 0 \\ x & 0 & -1 & -x \end{vmatrix}$ 中 x^4 项的系数是 （ ）

（A）1 （B）-1 （C）2 （D）-2

2．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，$C=AB^{-1}$，则 C^{-1} 中第 3 行第 2 列元素是 （ ）

（A）1/3 （B）1/2 （C）1 （D）3/2

3．已知 A 为 4 阶非零矩阵，其伴随矩阵 A^* 的秩 $r(A^*)=0$，则秩 $r(A)=$（ ）

（A）1 或 2 （B）1 或 3 （C）2 或 3 （D）3 或 4

4．设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则它的另一个基础解系是（ ）

（A）三个与 ξ_1,ξ_2,ξ_3 等秩的向量组 （B）三个与 ξ_1,ξ_2,ξ_3 等价的向量组

（C）$\xi_1,\xi_2+\xi_3,\xi_1+\xi_2+\xi_3$ （D）$\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$

5．设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+A=0$，则错误结论是 （ ）

（A）$A+2E$ 可逆 （B）$A-2E$ 可逆 （C）$A-E$ 可逆 （D）$A+E$ 可逆

6．已知多项式线性空间 $V=\left\{ax^2+bx+c \,\middle|\, a,b,c\in R\right\}$，$e_1=1,\ e_2=x-1,\ e_3=(x-1)^2$ 是 V 的一组基，则多项式 $f(x)=2x^2-5x+6$ 在该组基下的坐标是 （ ）

（A）$(2,-5,6)$　　（B）$(2,-1,3)$　　（C）$(3,-1,2)$　　（D）$(-1,2,3)$

三、（8 分）设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 n 维列向量，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，…，$\beta_n=\alpha_n+\alpha_1$，方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，如果 $|A|=1003$，求 $|B|$.

四、（10 分）已知 3 阶方阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵 B.

五、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & x\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$ 可对角化，求矩阵 A 的特征值及 x 的值。

六、（12 分）已知向量 $\alpha_1=(1,1,1,1+a)^T$，$\alpha_2=(2,2,2+a,2)^T$，$\alpha_3=(3,3+a,3,3)^T$，$\alpha_4=(4+a,4,4,4)^T$，问 a 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关？当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量由该极大线性无关组线性表示.

七、（12 分）已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有 3 个线性无关解.

(1) 证明：方程组的系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$；(2) 求 a,b 的值及方程组的通解.

八、（6 分）证明：n 元实二次型 $f(x)=x^TAx$ 正定的充分必要条件是它的标准形中 n 个系数全为正.

试题五参考答案

一 判断题（每小题 3 分，共 18 分）

1．设 A、B 均为 n 阶方阵，则 $\big||A|B\big|=|A||B|$. （ × ）

2．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解. （ × ）

3．n 阶实对称矩阵一定与对角矩阵相似. （ √ ）

4．已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为 n 维列向量组，A 是 $m\times n$ 矩阵，如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 也线性相关. （ √ ）

5．实二次型 $f=x^TAx$ 的标准形是唯一的. （ × ）

6. 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3)^T$，$\alpha_2=(-1,1,1)^T$，$\alpha_3=(0,3,9)^T$ 线性无关，则向量组 $\beta_1=(1,2,3,a)^T$，$\beta_2=(-1,1,1,b)^T$，$\beta_3=(0,3,9,c)^T$ 也线性无关. （ √ ）

二 单项选择题题（每小题 4 分，共 24 分）

1.（ C ）　2. （ B ）　3.（ A ）　4.（ B ）　5.（ D ）　6.（ C ）

三 解：$B=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}=BP$

其中 $|P|=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}=\begin{cases}2, & n\text{为奇数}\\0, & n\text{为偶数}\end{cases}$

故 $|B|=\begin{cases}2006, & n\text{为奇数}\\0, & n\text{为偶数}\end{cases}$

四 解： 因为 $|A|=-2\neq 0$，故 A 可逆，又 $AA^*=|A|E=-2E$

所以 $AA^*BAA^{-1}=2ABAA^{-1}-8AA^{-1}$，得 $(A+E)B=4E$

由 $|A+E|=-4\neq 0$，求得 $(A+E)^{-1}=-\dfrac{1}{4}(A+E)^*=-\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-2&-4&6\\0&4&-8\\0&0&-2\end{pmatrix}$

所以 $B=\begin{pmatrix}2&4&-6\\0&-4&8\\0&0&2\end{pmatrix}$

五 解： $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda-2 & -x \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-6)^2(\lambda+2)$

故　　特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6, \lambda_3=-2$

由于 A 可对角化，所以 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 有两个线性无关的特征向量，故 $r(6E-A)=1$

又 $6E-A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，从而 $x=0$

六 解：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4+a \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1+a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4+a \\ 0 & 0 & a & -a \\ 0 & a & 0 & -a \\ a & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$

当 $a=0$ 时，$r(A)=1$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，

α_1 为其一个极大线性无关组，且 $\alpha_2=2\alpha_1, \alpha_3=3\alpha_1, \alpha_4=4\alpha_1$

当 $a\neq 0$ 时，$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4+a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4+a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -10-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9+a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -10-a \end{pmatrix}$，

而 $a=-10$ 时，$r(A)=3<4$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其一个极大线性无关组，且 $\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$，

七 解：（1）设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $Ax=b$ 的 3 个线性无关解，则 $\xi_1-\xi_2,\xi_1-\xi_3$ 是 $Ax=0$ 的 2 个线性无关解，故 $4-r(A)\geq 2,\ r(A)\leq 2$；

又 A 中有一个二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$，$r(A)\geq 2$，所以 $r(A)=2$

（2）$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & 4-2a \end{pmatrix}$

因为 $r(A)=2$，所以 $4-2a=0, 4a+b-5=0$，解得 $a=2, b=-3$

这时 $\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，同解方程组

$\begin{cases} x_1 = 2-2x_3+4x_4 \\ x_2 = -3+x_3-5x_4 \end{cases}$，通解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$（$k_1, k_2$ 是任意常数）

八 证明：设存在正交变换 $x=Cy$，使得 $f=y^T(C^TAC)y=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$

充分性　设 $d_i>0(i=1,\cdots,n)$，则 $\forall x\neq 0 有 y=C^{-1}x=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq 0$，

故 $f(x)=y^T(C^TAC)y=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2>0$，即 $f(x)$ 为正定二次型

必要性（反证法）假设存在 $d_k\leq 0$，若取 $y=e_k=(0,\cdots 0,\underset{\text{第k个}}{1},0,\cdots,0)^T$，则有 $x=Ce_k\neq 0$，

故 $f(Ce^k)=e_k^T(C^TAC)e_k=d_k\leq 0$，与 $f(x)$ 正定相矛盾，所以 $d_i>0(i=1\sim n)$