试 题 一 （考试时间：120 分钟）

一、填空（每小题 **4** 分，共 **28** 分）

1．已知 **3** 阶矩阵 A 的行列式 $\det A=3$，则 $\det((3A)^{-1}-A^*)=$ ______

2．已知 n 维向量构成的向量空间：$V=\{X\,|\,X=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$, 且$x_1+x_2=0$, $x_1+x_2+x_3=0$, $2x_1+2x_2+x_3=0$, $x_i\in R\}$，则 $\dim V=$ ______

3．已知向量组 α_1，α_2，α_3，α_4 线性无关，而向量组 $\beta_1=4\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+2\lambda\alpha_1$ 线性相关，则 $\lambda=$____。

4．已知三阶方阵 A 的特征值是 **1**，**1**，**2**，方阵 $B=A^2+A-E$，则 B 的特征值是____，且 $\det B=$____。

5．设 **3** 元非齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩为 **2**，已知向量 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量，$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，则该方程组的通解为 ____________

6．设方阵 A 满足 $2003A^2=5A+16E$，则 $(A-E)^{-1}=$ ______ 。

7．设 n 阶实对称矩阵 A 的 n 个特征值为 $1,2,\cdots,n$，则 t 满足 _____时，A^2+tA+E 为正定矩阵。

二、（**10** 分）计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}4&3&\cdots&3&3\\3&4&\cdots&3&3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\3&3&\cdots&4&3\\3&3&\cdots&3&4\end{vmatrix}$

三、（**14** 分）a 为何值时，线性方程组：$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+ax_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+ax_3=3-a \end{cases}$ 有唯一解，无解，有无穷多解？

在有无穷多解的情况下，求通解。

四、（**12** 分）已知两组基 **I:** $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(0,1,1)$，$\alpha_3=(0,0,1)$；

II: $\beta_1=(1,0,1)$，$\beta_2=(1,1,0)$，$\beta_3=(0,1,1)$；

（**1**） 求由基 **II** 到基 **I** 的过渡矩阵。

（2） 如果α关于基 I 的坐标为(-1, 1, 1)，求α关于基 II 的坐标。

五、（**13** 分）已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^{\ 2}+4x_2^{\ 2}+ax_3^{\ 2}-2x_1x_2-2x_2x_3-2bx_1x_3$$

经正交变换化为标准形 $f(y_1,y_2,y_3)=2y_1^{\ 2}+5y_2^{\ 2}+5y_3^{\ 2}$，求参数$a$，$b$及用的正交变换。

六、（**6** 分）已知四阶方阵A，X 满足关系式 $AXA-2A=XA$，且 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$，求 X 。

七、（**6** 分）已知n阶实对称矩阵A的秩为r，且满足$A^2=A$，求$\det(E+A+A^2+\cdots+A^k)$。

八、（**6** 分）已知向量α，β是n阶矩阵A的属于不同特征值的特征向量， 证明： 当$c_1c_2\neq 0$时， $c_1\alpha+c_2\beta$不是A的特征向量。

九、（**5** 分）已知两 n 维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是两个非零的正交向量，

证明：n阶方阵$A=\alpha^T\beta$的特征值全为零，且A不可对角化。

试题一参考答案

一、填空（每小题 4 分，共 28 分）

1．$\underline{-\dfrac{512}{81}}$，2． $\dim V=\underline{n-2}$，3． $\lambda=\underline{2}$，4． $\det B=\underline{5}$，

5．通解 $k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}$，$k$ 任意，6． $(A-E)^{-1}=-\dfrac{2003A+1998E}{1982}$，7． $\underline{t>-2}$ 时。

二 解：

$$D_n \xlongequal[c_1+c_n]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3\\\vdots}} \begin{vmatrix}3n+1&3&\cdots&3&3\\3n+1&4&\cdots&3&3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\3n+1&3&\cdots&4&3\\3n+1&3&\cdots&3&4\end{vmatrix} \xlongequal[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1\\\vdots}} \begin{vmatrix}3n+1&3&\cdots&3&3\\0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}=3n+1$$

三 解：[法 1] $\det A=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$

（1） $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时，有唯一解

（2） $a=-2$ 时， $B=\begin{pmatrix}-2&1&1&2\\1&-2&1&2\\1&1&-2&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&5\\0&-3&3&-3\\0&0&0&9\end{pmatrix}$

因为：$R(A)\neq R(B)$，所以方程组无解。

（3） $a=1$ 时， $B=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\1&1&1&2\\1&1&1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

因为：$R(A)=R(B)$ =1<3，所以方程组有无穷多解。

其通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

[法 2] $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 3-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 3-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & (a-1)(a-2) \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & (a-1)^2 \end{pmatrix}$

（1）$a \neq -2$ 且 $a \neq 1$ 时，有唯一解

（2）$a = -2$ 时，因为：$R(A) \neq R(B)$，所以方程组无解。

（3）$a = 1$ 时，因为：$R(A) = R(B)$ =1<3，所以方程组有无穷多解。

其通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

四 解：（1）[法 1]：$(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3') = (e_1', e_2', e_3')A$，$(\beta_1', \beta_2', \beta_3') = (e_1', e_2', e_3')B$，

或 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3) = (\beta_1', \beta_2', \beta_3')B^{-1}A$，或 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = A^T (B^T)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = (B^{-1}A)^T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$

即由基 II 到基 I 的过渡矩阵 $C = B^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

[法 2]：设 $\begin{cases} \alpha_1 = c_{11}\beta_1 + c_{21}\beta_2 + c_{31}\beta_3 \\ \alpha_2 = c_{12}\beta_1 + c_{22}\beta_2 + c_{32}\beta_3 \\ \alpha_1 = c_{13}\beta_1 + c_{23}\beta_2 + c_{33}\beta_3 \end{cases}$，解出 c_{ij} 即得 C。

［法 3］：$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$，由 $A=C^TB$ 得：$C=(AB^{-1})^T$ 。

（2）［法 1］ $\alpha'=(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=(\beta_1',\beta_2',\beta_3')C\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=(\beta_1',\beta_2',\beta_3')\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

或 $\alpha=(-1,1,1)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=(-1,1,1)C^T\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=(0,-1,1)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$

［法 2］ 由坐标变换公式得：$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$。

［法 3］ $\alpha=x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3$，解得$\begin{cases}x_1=0\\ x_2=-1\\ x_3=1\end{cases}$

故：α 关于基 II 的坐标为 $(0,-1,1)$ 或 $(0,-1,1)^T$ 。

五 解：（1）二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&-1&-b\\ -1&4&-1\\ -b&-1&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\ 0&5&0\\ 0&0&5\end{pmatrix}$ 相似，

则 $\det(A-\lambda E)=\det(B-\lambda E)$

比较上式两边同次幂的系数得：$a=4$，$b=1$

（2）由 $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\ -1&4&-1\\ -1&-1&4\end{pmatrix}$，求得对应于 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=5$ 的特征向量分别为

$P_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，　$P_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，　$P_3=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

规范正交化：$q_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$，$q_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$，$q_3=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

正交变换为：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\text{等}$$

六 解：因 $\det A=1\neq 0$，所以 A 可逆

$AXA-2A=XA$，两边右乘 A^{-1} 得：$AX-2E=X$，$\Rightarrow (A-E)X=2E$

$$X=2(A-E)^{-1}=2\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-5\\-1&1\end{pmatrix}&0\\0&-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\-7&3\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\begin{matrix}-8&20\\4&-4\end{matrix}&0\\0&\begin{matrix}-3&3\\21&-9\end{matrix}\end{pmatrix}$$

七 解：设 $AX=\lambda X$，$X\neq 0$，则有 $A^2X=AX\Rightarrow(\lambda^2-\lambda)X=0$，由 $X\neq 0$，$\lambda(\lambda-1)=0$

$\Rightarrow\lambda=0$ 或 $\lambda=1$

因 A 为实对称矩阵，$P^{-1}AP=\Lambda$ 秩为，由 $R(A)=R(\Lambda)=r$ $\Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$

[法 1]：$\det(E+A+A^2+\cdots+A^k)=\det(P(E+\Lambda+\Lambda^2+\cdots+\Lambda^k)P^{-1})$

$$=\det\begin{pmatrix}(k+1)E_r&0\\0&E_{n-r}\end{pmatrix}=(k+1)^r$$

[法 2]：$\lambda=0$（$n-r$ 重）或 $\lambda=1$（r 重），方阵 $(E+A+A^2+\cdots+A^k)$ 以 $k+1$ 为 r 重、1 为 $n-r$ 重特征根。$\Rightarrow\det(E+A+A^2+\cdots+A^k)=(k+1)^r$

八 证：[反证法] 若 $c_1\alpha+c_2\beta$ 是 A 的特征向量，则 $A(c_1\alpha+c_2\beta)=\lambda(c_1\alpha+c_2\beta)$

设 $A\alpha=\lambda_1\alpha$，$A\beta=\lambda_2\beta$，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 $c_1(\lambda_1-\lambda)\alpha+c_2(\lambda_2-\lambda)\beta=0$

由 α，β 线性无关及 $c_1c_2\neq 0$ 得：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，与已知矛盾。

故 $c_1\alpha+c_2\beta$ 不是 A 的特征向量

九 解：（1）［法 1］无妨设 $a_1\neq 0$，（$\because\ \alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 非零）

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_1b_1-\lambda & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2-\lambda & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$a_1\begin{vmatrix} b_1-\dfrac{\lambda}{a_1} & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2-\lambda & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_1-\dfrac{\lambda}{a_1} & b_2 & \cdots & b_n \\ \dfrac{a_2}{a_1}\lambda & -\lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_1-\dfrac{\lambda}{a_1}+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{a_kb_k}{a_1} & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=a_1(-\lambda)^{n-1}(b_1-\frac{\lambda}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_kb_k}{a_1})=(-\lambda)^{n-1}(-\frac{\lambda}{a_1}+-\frac{\alpha\beta^T}{a_1})=(-\lambda)^n=0\ （\because\ \alpha\beta^T=0）$$

$\Rightarrow\lambda=0$ 为 n 重特征值。

［法 2］ $AX=\lambda X$，$X\neq 0$，$\Rightarrow$ $A^2X=A(AX)=\lambda(AX)=\lambda^2X$

$\because A^2=0$，$\therefore\lambda^2X=0$，又 $X\neq 0\Rightarrow\lambda=0$ 为 n 重特征值。

［法 3］ 设 $AX=\lambda X$，$X\neq 0$，若 $\beta X=0$，则 $AX=\alpha^T\beta X=0=0X$，

即 0 是 A 的特征值。若 $\beta X\neq 0$，则给 $\alpha^T\beta X=\lambda X$（$A=\alpha^T\beta)\alpha^T$ 的两边左乘 β，并

利用$\beta\alpha^T=0$，得$0=\lambda(\beta X)$，即$\lambda=0$，即A的特征值全为 0。

（2） （因$1\le R(A)=R(\alpha^T\beta)\le R(\beta)=1$，即$R(A)=1$），由$(A-\lambda E)X=0\Rightarrow AX=0$（$\because\lambda=0$），由$R(A)=1$，$\Rightarrow AX=0$的基础解系只含有$n-1$个解向量。$\Rightarrow$对应于$n$重特征值 0 只有$n-1$个线性无关的特征向量。

故A不可对角化。