线性代数综合训练

一、填空题

1．已知 3 阶矩阵 A 的行列式 $\det A=3$，则 $\det((3A)^{-1}-A^{*})=$______

2．已知 n 维向量构成的向量空间：$V=\{X|X=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n),\text{且}x_1+x_2=0,$

$x_1+x_2+x_3=0, 2x_1+2x_2+x_3=0, x_i\in R\}$，则 V 的维数 $\dim V=$ ________

3. 已知向量组 α_1，α_2，α_3，α_4 线性无关，而向量组 $\beta_1=4\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，

$\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+2\lambda\alpha_1$ 线性相关，则 $\lambda=$_____。

4．已知三阶方阵 A 的特征值是 1，1，2，方阵 $B=A^2+A-E$，则 B 的特征值是_____，且 $\det B=$_____.

5．设 3 元非齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩为 2，已知向量 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量，$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，则该方程组的通解为 _____

6．设方阵 A 满足 $2003A^2=5A+16E$，则 $(A-E)^{-1}=$ ________ .

7．设 n 阶实对称矩阵 A 的 n 个特征值为 $1,2,\cdots,n$，则 t 满足 ________时，A^2+tA+E 为正定矩阵。

8．若矩阵 A 相似于矩阵 $diag\{1,-1,2\}$，则 $|A^{-1}|^3=$__________.

9．设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 是实正交矩阵且 $a_{11}=1$，$b=(1,0,0)^T$，则方程组 $AX=b$ 的解为______

10．设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A+4E=0$，则 $(A+4E)^{-1}=$_________.

11．设 A 为 4 × 3 阶矩阵，且 $R(A)=2$，又 $B=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，则 $R(AB)-R(A)=$___

12．若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+4x_2^{\ 2}+2x_3^{\ 2}+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，

则 t 满足________.

13. 已知三阶方阵 A 的特征值为 2，3，4，则 $|2A|$=_______.

14. 已知五阶实对称方阵 A 的特征值为 0，1，2，3，4，则 $R(A)$=___________.

15. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ 则 $A^k=$_________。（k 为正整数）.

16. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2|=n$，则 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,2\beta_1-\beta_2|$=__.

17. 已知四阶行列式 D 中第三列元素分别为 1，3，-2，2，它们对应的余子式分别为 3，-2，1，1，则行列式 D=___.

18. 设 A 为 4×3 矩阵，A 的秩 $r(A)$=2，而 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则 $r(AB)$=___.

19. 已知 x 为 n 维单位列向量，$G=x^Tx$，则 $G^2=$ _.

20 . 设 n 阶可逆矩阵 A 满足方程 $A^2-2A=3E$，则 $A^{-1}=$

21. 当 t 满足 _时，二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2\,t\,x_2x_3$ 为正定二次型.

22. 已知三阶方阵 A 的特征值是 1，-1，2，方阵 $B=A^2-E$，则 B 的特征值是____ .

23. 设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩 $r(A_{5\times3})=2$，η_1,η_2 是该方程组的两个解，且有 $\eta_1+\eta_2=(1,3,0)^T,\eta_1+2\eta_2=(2,5,1)^T$，则该方程组的通解______ .

24. 行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$=________________________。

25. 若齐次线性方程组 $\begin{cases}kx+y-2z=0\\ x+ky+2z=0\\ kx+y+kz=0\end{cases}$ 有非零解，且 $k^2\neq1$，则 k 的值为_________。

26. 若 4×4 阶矩阵 A 的行列式 $|A|=3,A^*$ 是 A 的伴随矩阵则 $|A^*|$=____________。

27. A 为 $n \times n$ 阶矩阵，且 $A^2 - 3A + 2E = o$，则 A^{-1} ________________。

28. ξ_1, ξ_2, ξ_3 和 η_1, η_2, η_3 是 R^3 的两组基，且

$\eta_1 = 3\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3, \eta_2 = \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3, \eta_3 = 2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3$，若由基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 到基

η_1, η_2, η_3 的基变换公式为 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ A，则 A=__________

29. 向量 $a = (-1,0,3,-5), \beta = (4,-2,0,1)$, 其内积为________________。

30. 若 3×3 阶矩阵 A 的特征值分别为 $1,-2,3$, 则 A^{-1} 的特征值分别为____________。

31. 矩阵 $A\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$ 为正定矩阵，则 λ 的取值范围是__________________。

32. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ =_________。

33. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n$ =________（n 为正整数）。

34. 设 A=$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $(2A)^{-1}$ = __________。

35. 非齐次线性方程组 $A_{m \times n} X_{n \times 1} = b_{m \times 1}$ 有唯一解的充分必要条件是________。

36. 向量 $a = (3,1)^T$ 在基 $\eta_1 = (1,2)^T, \eta_2 = (2,1)^T$ 下的坐标为_________。

37. 若 n 阶矩阵 A、B、C 有 ABC=E, E 为 n 阶单位矩阵则 C^{-1} =______________。

38. 若 n 阶矩阵 A 有一特征值为 2，则 $|A - 2E|$ =_______________。

39. 若 A、B 为同阶方阵，则 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 的充分必要充分条件是_____________。

40. 正交矩阵 A 如果有实特征值，则其特征值 λ 等于_______________。

41. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是______。

二、 判断题

1. 若n阶方阵A的秩$R(A)<n-1$，则其伴随阵$A^*=O$．（　　）

2. 若 $n\times s$矩阵A和 $s\times n$矩阵 B满足 $AB=O$，则 $R(A)+R(B)<s$．（　　）

3. 实对称阵A与对角阵Λ相似：$P^{-1}AP=\Lambda$，这里 P必须是正交阵.（　　）

4. 初等矩阵都是可逆阵，并且其逆阵都是它们本身.（　　）

5. 若 n阶方阵A满足$A^T=-A$，则对任意 n维列向量x，均有$x^TAx=0$．（　　）

6. 若矩阵 A和B等价，则 A的行向量组与B的行向量组等价.（　　）

7. 若向量α_1,α_3线性无关，向量 α_2,α_3线性无关，则 α_1,α_2也线性无关. （　　）

8. A是 $m\times n$矩阵，则 $R(AA^T)=R(A)$． （　　）

9. 非齐次线性方程组 $Ax=b$有唯一解，则 $x=A^{-1}b$． （　　）

10. 正交阵的特征值一定是实数.（　　）

三、选择题

1. 设A为n阶方阵，A^*是A的伴随矩阵，下列说法不正确的是

 (A) 若$|A|\neq 0$，则$|A^*|\neq 0$； (B) 若A的秩小于$n-1$，则$A^*=O$；

 (C) 若$|A|=5$，则$|A^*|=5^{n-1}$； (D) $AA^*=|A|$。

2. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$等价的向量组为

 (A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$； (B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_1,4\boldsymbol{\alpha}_2$；

 (C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$； (D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

3. 设A为$m\times n$矩阵，齐次线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$仅有零解的充分条件是

 (A) A的列向量线性无关； (B) A的列向量线性相关；

 (C) A的行向量线性无关； (D) A的行向量线性相关。

4. 设矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，则二次型$f=\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\right)^2$的矩阵为

 (A) A； (B) A^2； (C) $A'A$； (D) AA'。

5. 下列结论中不正确的是

 (A) A为正定矩阵，则A^{-1}也为正定矩阵；

 (B) 若A，B都是正定矩阵，则$A+B$也是正定矩阵；

 (C) 若A,B,C,D都是正定矩阵，则$\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$也是正定矩阵；

 (D) 若A，B都是正定矩阵，则$A-B$也是正定矩阵。

6. 设A,B都是n阶非零方阵，且$AB=O$，则A和B的秩

 (A) 必有一个等于零； (B) 都小于n；

(C) 一个小于n；一个等于n；　(D) 都等于n。

7. 二次型$f=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$是

(A) 正定；　(B) 半正定；　(C) 负定；　(D) 半负定。

8. 设A,B都是n阶方阵，且$AB=O$，则下列情况绝对不可能出现的是（　）

(A) $|A|=0,|B|=0$；　(B) $|A|=0,|B|\neq 0$；

(C) A和B的秩都等于n；　(D) A的伴随矩阵A^*非零

9. 设向量组 α,β,γ线性无关， α,β,δ线性相关，则（　）

(A) α必可由β,γ,δ线性表示；(B) β必不可由α,γ,δ线性表示；

(C) δ必可由α,β,γ线性表示；(D) δ必不可由α,β,γ线性表示.

10. 设n元齐次线性方程组的一个基础解系为$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$，则下列各向量组中仍为该齐次线性方程组的基础解系的是（　）

(A) $\eta_1-\eta_2,\eta_2-\eta_3,\eta_3-\eta_4,\eta_4-\eta_1$；　(B) $\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3+\eta_4,\eta_4+\eta_1$；

(C) $\eta_1,\eta_1+\eta_2,\eta_1+\eta_2+\eta_3,\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4$；　(D) $\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3-\eta_4,\eta_4-\eta_1$.

11. 若矩阵A,B相似，则下列结论不正确的是（　）

(A) $|A|=|B|$；　(B) A,B有相同的特征多项式；

(C) $tr(A)=tr(B)$；　(D) A,B有相同的伴随矩阵.

12. 设A为$n\times n$实矩阵，则方程$Ax=0$只有零解是$A'A$为正定矩阵的（　）

(A) 充分条件；　(B) 必要条件；

(C) 充要条件；　(D) 既非充分也非必要条件.

13. 矩阵$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix}$的秩为（　　）

(A). 0　(B). 1　(C). 2　(D). 3

14. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$（　　）

(A). $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(B). $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(C). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　(D). $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

15. 设 A 是 n 阶方阵，且 $A^2=E$，则必有 A=（　　）

(A). E　　(B). −E　　(C). A^{-1}　　(D). A^{*}

四、计算题

1. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$

2. 求向量组 $a_1=(2,1,1,1), a_2=(-1,1,7,10), a_3=(3,1,-1,-2), a_4=(8,5,9,11)$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组线性表示。

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，满足 $AB=A+2B$，求矩阵 B.

4. 已知向量 $\beta=(7,-8,-9)^T$，$\alpha_1=(1,3,2)^T, \alpha_2=(2,-1,1)^T$，$\alpha_3=(0,4,7)^T$（1）证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 中的一组基；（2）求 β 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

5. 设方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2 = 3 \\ 4x_1+7x_2+x_3=10 \\ x_2-x_3=p \\ 2x_1+3x_2+qx_3=4 \end{cases}$，讨论 p,q 取何值时，方程组无解、有唯一解和无穷多解。并在有解时，求其解

6. 当 a 取何值时,线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ x_1+5x_2+10x_3-x_4=5 \\ 3x_1+5x_2+10x_3+7x_4=a \end{cases}$ 有解？在方程组有解时，求出方程组的通解

7. 求一正交变换 $x=Py$，化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 为标准形，并写出其标准形。

8. 已知实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（1）求正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵；（2）求 A^{10}。

9. 设 4 维向量组 $\alpha_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关？当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表出.

10. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1=\left(-1,2,-1\right)^{\mathrm{T}},\alpha_2=\left(0,-1,1\right)^{\mathrm{T}}$是线性方程组$Ax=0$的两个解.

(1) 求A的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵Q和对角矩阵Λ,使得$Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$;

(3) 求A及$\left(A-\dfrac{3}{2}E\right)^6$，其中$E$为 3 阶单位矩阵.

11. 已知下列非齐次线性方程组有 3 个线性无关的解，

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

(1) 证明此方程组的系数矩阵A的秩为 2.

(2) 求 a, b 的值和方程组的通解.

12. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，判别向量组$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$,

$\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_3=5\alpha_1+2\alpha_2+7\alpha_3$的线性相关性。

五、证明题

1. 证明方程组$\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ \cdots \quad \cdots \\ x_{n-1}-x_n=a_{n-1} \\ x_n-x_1=a_n \end{cases}$有解的充分必要条件是$\sum_{i=1}^{n}a_i=0$.

2. 设A是n阶下三角矩阵, 如果$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$, 且至少一个$a_{i_0j_0}\neq 0\ (i_0>j_0)$，证明$A$不可相似对角化。

3. 已知n阶方阵A满足矩阵方程$2A^2+9A+3E=O$，证明$A+4E$可逆，并求其逆矩阵。

4. 设向量组 A： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关, 向量$\beta_1$可由向量组 A 线性表示, 而向量$\beta_2$不能由向量组 A 线性表示. 证明: 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,l\beta_1+\beta_2$必线性无关.

5. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，求$x$和$y$应满足的条件。

6. 设A,B 都是n阶矩阵, 且A可逆, 证明AB与BA有相同的特征值

7. 设列向量α是一个 n 维实向量, 已知α是单位向量. 令矩阵$T=E-2\alpha\alpha^T$

证明: T是一个对称的正交矩阵.