试 题 六 （考试时间：120 分钟）

一、单项选择题题（每小题 4 分，共 24 分）

1.设 A, B 是 3 阶方阵，已知 $|A| = -1,\ |B| = 2$，则行列式 $\begin{vmatrix} 2A & A \\ 0 & -B \end{vmatrix} =$（　　）.

（A）16　　（B）-16　　（C）4　　（D）-4

2.已知 ξ_1, ξ_2 是线性方程组 $Ax = b$ 的两个解，则（　　）.

（A）$\xi_1 + \xi_2$ 是 $Ax = 0$ 的解　　（B）$\xi_1 - \xi_2$ 是 $Ax = b$ 的解

（C）$\xi_1 + \xi_2$ 是 $Ax = b$ 的解　　（D）$\xi_1 - \xi_2$ 是 $Ax = 0$ 的解

3.n 阶矩阵 A 有 n 个不同特征值是 A 与对角矩阵相似的（　　）.

（A）充分必要条件　　（B）充分但不必要的条件

（C）必要但不充分的条件　　（D）既不充分也不必要的条件

4.矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征值是（　　）.

（A）1，2，3　　（B）1，1，2　　（C）1，1，3　　（D）1，-1，3

5.设 A 是一个 3 阶实对称矩阵，$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 分别为 A 的 1 阶，2 阶，3 阶顺序主子式，则 A 为负定矩阵的充要条件是（　　）.

（A）$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 < 0$　　（B）$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$

（C）$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$　　（D）$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0$

6.设 $\alpha = (1,2,3,4),\ \beta = (4,-3,2,-1)$，下列命题不成立的是（　　）.

（A）α 与 β 正交　（B）α, β 线性相关.　（C）$(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)^2 = O$　（D）$\|\alpha\| = \|\beta\|$

二、填空题（任选四个小题，每小题 4 分，共 16 分）

1. 若对于任意 n 维列向量 x，均有 $Ax = 0$，则 $A =$________.

2. 如果矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{s\times t}$ 满足 $AB = BA$，则 m, n, s, t 应满足的条件是__________.

3. 若向量组 $\alpha_1 = (1,0,2,3), \alpha_2 = (1,1,3,5), \alpha_3 = (1,-1,a+2,1)$ 的秩为 2，则 $a =$______.

4. 设非齐次线性方程组的系数矩阵的秩 $R(A_{5\times 3}) = 2$，η_1, η_2 是该方程组的两个解且有 $\eta_1 + \eta_2 = (2,6,0)^{\mathrm{T}}$，$2\eta_1 + 3\eta_2 = (10,5,15)^{\mathrm{T}}$，则该方程组的通解为______________.

5. 用 MATLAB 计算矩阵的行列式的程序为[L,U]=lu(A)，dU=diag(U)；$|A|$ =___________.

三、（14 分）设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ ①

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ ②

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

四、（10 分）设 3 阶矩阵 A,B 满足 $A+B=AB$.

（1）证明 $A-E$ 可逆，并求其逆； （2）若 $B=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求矩阵 A.

五、（12 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 经正交变换化成标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$.（1）求 a,b 之值；（2）求出化该二次型为标准形的正交变换.

六、（6 分）设 x 为 n 维列向量, 且 $x^{\mathrm{T}}x=1$， $H=E-2xx^{\mathrm{T}}$, 求证 H 是对称的正交阵.

（在七、八、九题中任选二题）

七、（9 分）计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

八、（9 分）

（1）请叙述程序[U0,ip]=rref(A)的意义及作用.

（2）写出求 3 阶矩阵 A 的特征值与特征向量的程序.

九、（9 分）设 $\mathbb{R}^3$ 中的两组基为 $\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\beta_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$， $\beta_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$， $\beta_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$.

(1)求从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 A.

(2)求向量 $\beta=\beta_1-2\beta_2+\beta_3$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

试题六参考答案

一、单项选择题题（每小题 4 分，共 24 分）

1 设 A,B 是 3 阶方阵，已知 $|A|=-1,\ |B|=2$，则 $\begin{vmatrix} 2A & A \\ 0 & -B \end{vmatrix}=$（ A ）

(A) 16　　(B) -16　　(C) -4　　(D) 4

2. 已知 ξ_1,ξ_2 是线性方程组 $Ax=b$ 的两个解，则（ D ）

(A) $\xi_1+\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的解　　(B) $\xi_1-\xi_2$ 是 $Ax=b$ 的解

(C) $\xi_1+\xi_2$ 是 $Ax=b$ 的解　　(D) $\xi_1-\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的解

3. n 阶矩阵 A 有 n 个不同特征值是 A 与对角矩阵相似的（ B ）

(A) 充分必要条件　　(B) 充分但不必要的条件

(C) 必要但不充分的条件　　(D) 既不充分也不必要的条件

4. 矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征值是（ C ）

(A) 1，2，3　　(B) 1，1，2　　(C) 1，1，3　　(D) 1，-1，3

5. 设 A 是一个 3 阶实对称矩阵，$\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ 分别为 A 的 1 阶，2 阶，3 阶顺序主子式，则 A 为负定矩阵的充要条件是（ C ）.

A) $\Delta_1<0,\Delta_2<0,\Delta_3<0$　　(B) $\Delta_1>0,\Delta_2>0,\Delta_3>0$

(C) $\Delta_1<0,\Delta_2>0,\Delta_3<0$　　(D) $\Delta_1>0,\Delta_2<0,\Delta_3>0$

6. 设 $\alpha=(1,2,3,4),\ \ \beta=(4,-3,2,-1)$，下列命题不成立的是（ B ）

(A) α 与 β 正交　　(B) α,β 线性相关　　(C) $(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)^2=O$　　(D) $\|\alpha\|=\|\beta\|$

二、填空题（任选四个小题，每小题 4 分，共 16 分）

1. 若对于任意 n 维列向量 x，均有 $Ax=0$，则 $A=$____0____.

2. 如果矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{s\times t}$ 满足 $AB=BA$，则 m,n,s,t 应满足的条件是_$m=n=s=t$.

3. 若向量组 $\alpha_1=(1,0,2,3),\alpha_2=(1,1,3,5),\alpha_3=(1,-1,a+2,1)$ 的秩为 2，则 $a=$__-1__.

4. 设非齐次线性方程组的系数矩阵的秩 R（$A_{5\times 3}$）=2，η_1,η_2 是该方程组的两个解且有 $\eta_1+\eta_2=(2,6,0)^{\mathrm{T}}$，$2\eta_1+3\eta_2=(10,5,15)^{\mathrm{T}}$，则该方程组的通解为 $k(1,-2,3)^T+(1,3,0)^T$.

5. 用 MATLAB 计算矩阵的行列式的程序为____det（A）__.

三、（14 分）设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ ①

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ ②

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

【解】联立①，②得 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$ ③ ————2 分

对③的增广矩阵施行行变换，得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{bmatrix}$ ———— 7 分

因①，②有公共解，所以 $(a-1)(a-2)=0$，即 $a=1$ 或 $a=2$ ———— 9 分

当 $a=1$ 时，所求公共解为 $x=k(-1,0,1,)^T$。 ———— 12 分

当 $a=2$ 时，所求公共解为 $x=(0,1,-1)^T$ ———— 14 分

四、（10 分）设 3 阶矩阵 A,B 满足 $A+B=AB$.

（1）证明 $A-E$ 可逆，并求其逆；（2）若 $B=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求矩阵 A.

【解】（1）因 $A+B=AB$，所以 $B=AB-A=A(B-E)$ ————3 分

从而 $(A-E)(B-E)=E$，即 $A-E$ 可逆，其逆为 $B-E$ ———— 5 分

(2) 由（1）知，$B-E$ 可逆，且 $A=E+(B-E)^{-1}$ ————8 分

所以 $A=E+(B-E)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ——-.— 10 分

五、（12 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 经正交变换化成标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$.（1）求 a,b 之值；（2）求出化该二次型为标准形的正交变换。

【解】（1）二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{bmatrix}$，——————2 分

由题设知，A 的特征值为 0，1，2，所以 $|A|=0$，$|E-A|=0$，$|2E-A|=0$，

解得 $a=b=0$ —————— 5 分

（2）当 $\lambda_1=0$ 时，解齐次方程组 $Ax=0$，得基础解系 $\xi_1=(1,0,-1)$，

当 $\lambda_2=1$ 时，解齐次方程组 $(E-A)x=0$，得基础解系 $\xi_2=(0,1,0)$，

当 $\lambda_3=2$ 时，解齐次方程组 $(2E-A)x=0$，得基础解系 $\xi_1=(1,0,1)$.-----8 分

单位化 ξ_1,ξ_2,ξ_3 得，

$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$，$e_2=\xi_2=(0,1,0)$，$e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ —— 10 分

故化该二次型为标准形的正交变换为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$$ —————— 12 分

六、（6 分）设 x 为 n 维列向量，且 $x^{\mathrm{T}}x=1$，$H=E-2xx^{\mathrm{T}}$, 求证 H 是对称的正交阵.

【证】因 $H^T=(E-2xx^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=E-2xx^{\mathrm{T}}=H$，所以 H 是对称的矩阵. ————2 分

又 $$H^TH=(E-2xx^{\mathrm{T}})(E-2xx^{\mathrm{T}})=E-4xx^{\mathrm{T}}+4xx^{\mathrm{T}}xx^{\mathrm{T}}$$ $$=E-4xx^{\mathrm{T}}+4x(x^{\mathrm{T}}x)x^{\mathrm{T}}=E$$ ——————5 分

所以，H 是对称的正交阵. —————— 6 分

（ 在七、八、九题中任选二题）

七、（9 分）计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}$$

【解】

$$D_n=[\frac{n(n+1)}{2}+a]\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}$$ 4 分

$$=[\frac{n(n+1)}{2}+a]\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}$$ —----- 7 分

$$=[\frac{n(n+1)}{2}+a]a^{n-1}$$ ———— 9 分

八、（9 分）

（1）请叙述命令[U0,ip]=rref(A)的意义及作用；

（2）写出求 3 阶矩阵 A 的特征值与特征向量的程序.

【解】（1）[U0,ip]=rref(A)是将矩阵 A 化为行最简阶梯形的命令，ip 指出了矩阵 A 的基准元素（首非零元素）所在的列数。它可以用作解方程组；判断向量组的线性相关性；求向量组的极大无关组；求矩阵的逆；求矩阵的秩等。（5 分）

（2）clear

输入矩阵 A

[V,D]=eig(A) % 矩阵 D 为矩阵 A 的特征值构成的对角阵，矩阵 V 的列向量为矩阵 A 与特征值 D 对应的特征向量 ----9 分

或者 clear

输入矩阵 A

```
f=poly(A), %求特征多项式
r=roots(f), %求特征值
```
---7 分

```
B1=r(1)*eye(3)-A;
              %求特征值向量
P1=null(B1,'r')
B2=r(2)*eye(3)-A;
P2=null(B2,'r')
B3=r(3)*eye(3)-A;
P3=null(B3,'r')
```
----9 分

九、（9 分）设 $\mathbb{R}^3$ 中的两组基为 $\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(1,0,-1)^{\mathrm T}$，$\alpha_3=(1,0,1)^{\mathrm T}$ 和 $\beta_1=(1,2,1)^{\mathrm T}$，$\beta_2=(2,3,4)^{\mathrm T}$，$\beta_3=(3,4,3)^{\mathrm T}$. (1) 求从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 A. (2) 求向量 $\beta=\beta_1-2\beta_2+\beta_3$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

【解】（1）设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$，则

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$$ ————2 分

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$$ ——6 分

（2）已知向量 $\beta=\beta_1-2\beta_2+\beta_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 的坐标 $Y=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$， — —7 分

所以向量 $\beta=\beta_1-2\beta_2+\beta_3$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为

$$\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\-2\end{bmatrix}$$ —------9 分