试 题 四 （考试时间：120 分钟）

一、填空题 （$6\times 3=18$ 分）

（1）行列式$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$的展开式中，$x$ 的系数是_____.

（2）若 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A-4E=0$ ，则 $A^{-1}=$ _____.

（3）设向量组 $\alpha_1=(1,2,1)$, $\alpha_2=(k,1,1)$, $\alpha_3=(0,2,3)$ 线性相关，则

$k=$_____.

（4）设 $AA^T=E$，且 $|A|<0$，则 $|A+E|=$_____.

（5）已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，1，2，方阵 $B=A^2-E$，则 B 的特征值为_____.

(6) 设 $A_{n\times m}$ 的秩为 r，则方程组 $Ax=0$ 的解空间是_____维.

二、（10 分）计算 n 阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

三、（10 分） 设有向量组 $\alpha_1=(2,\ 1,\ 5,\ 3)$, $\alpha_2=(1,\ -1,\ 2,\ 1)$, $\alpha_3=(0,\ 3,\ 1,\ 1)$, $\alpha_4=(1,\ 2,\ 3,\ 2)$, $\alpha_5=(-1,\ 1,\ -2,\ -8)$，求向量组的秩和它的一个极大线性无关组。

四、（12 分）通过正交变换将二次型

$f = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ 化为标准型，写出正交变换矩阵.

五、（12 分）设 n 阶方阵 $A \neq 0$，证明：存在一个 n 阶非零方阵 B，使得 $AB = 0$ 的充要条件是 $|A| = 0$.

六、（15 分）已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 = 2b \end{cases}$$

讨论 a, b 取何值时，方程组有解、无解；当有解时，求出其通解.

七、（10 分）设 3 阶对称阵 A 的特阵值为 6，3，3，与特征值 6 对应的特征向量为 $p_1 = (1,\ 1,\ 1)^T$，求矩阵 A.

八、（13 分）已知三阶方阵 $B \neq 0$，且解 B 的每一个列向量都是下列方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

（1） 求参数 λ 的值；　　（2）证明：$|B| = 0$.

试题四参考答案

一、填空题 （$6\times3=18$分）

（1）$\underline{2}$＿＿＿.（2）$A^{-1}=\underline{\dfrac{A-3E}{4}}$.　（3）$k=\underline{\dfrac{1}{4}}$ 。（4）$|A+E|=$ ＿0＿＿.

（5）B的特征值为＿0, 0, 3＿＿＿.　(6) $\underline{m-r}$＿维.

二 解：递推公式为$A_n=2A_{n-1}-A_{n-2}$，即$A_n-A_{n-1}=A_{n-1}-A_{n-2}$，

由此得，$A_n-A_{n-1}=\cdots=A_2-A_1=3-2=1$，即$A_n=A_{n-1}+1$，

因此，$A_n=n+1$。

三 解：以$\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T$为列向量作矩阵$A$，并对$A$进行初等行变换：

$$A=\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T\right)=\begin{bmatrix}2&1&0&1&-1\\1&-1&3&2&1\\5&2&1&3&-2\\3&1&1&2&-8\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&3&2&1\\0&3&-6&-3&-3\\0&7&-14&-7&-7\\0&4&-8&-4&-11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&2&1\\0&1&-2&-1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-7\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&-2&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\left(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5\right)$$

显然，向量组的秩为 3。

因为η_1,η_2,η_5为$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5$的一个极大无关组，所以该向量组的一个极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$。

四解：二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，特征多项式

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-1)$，所以 A 的特征值为

$\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$。它们对应的特征向量分别为：

$x_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$x_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，$x_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$。因为 A 是实对称矩阵，且 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$，

所以特征向量 x_1,x_2,x_3 必正交。把 x_1,x_2,x_3 单位化，得

$$p_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\quad p_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\quad p_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}。$$

于是，二次型经正交变换

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},$$

得到的标准型 $f=y_2^2+4y_3^2$。

五 证明：（必要性）设存在一个 n 阶非零方阵 B，使得 $AB=0$，则在 B 中有非零列向量 b 使得 $Ab=0$，即齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解 b，则

$|A|=0$。

（充分性）因为$|A|=0$，则齐次方程组$Ax=0$有非零解b，把b作为矩阵B的第一列，$n-1$个n维零向量作为B其它$n-1$列，这样的矩阵B满足$AB=0$，即存在一个n阶非零方阵B，使得$AB=0$。

六 解：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & a & 1 \\ 1 & -1 & -6 & 2b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & a+6 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 2b \end{pmatrix} \to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & a+6 & 1 \\ 0 & 0 & -2a-16 & 2b-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & a+6 & 1 \\ 0 & 0 & -a-8 & b-1 \end{pmatrix}$$

（1） 当 $a=-8, b\neq 1$时方程组无解；

（2） $a\neq -8$时，方程组有唯一解；

（3） $a=-8, b=1$方程组有无穷多解 ，此时

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & a & 1 \\ 1 & -1 & -6 & 2b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的方程组为 $\begin{cases} x_1 \quad -4x_3 = 1 \\ \quad x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$ 令$x_3=0$，得特解$\eta=(1,-1,0)^T$

对应的齐次方程组为$\begin{cases} x_1 \quad -4x_3 = 0 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 取$x_3=1$，

得基础解系$\xi=(4,-2,1)^T$ 则通解为$x=\eta+k\xi, k\in R$

七 解：由于对称阵A的不同特征值对应的特征向量正交。

设 $p=(x_1,x_2,x_3)^T$ 是 A 的对应于特征值 3 的特征向量，由

$(p,p_1)=x_1+x_2+x_3=0$ 得基础解系为 $p_2=(-1,1,0)^T$，$p_3=(-1,0,1)^T$

它们是 A 对应于特征值 3 的两个线性无关的特征向量。

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$

且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}$，于是 $A=P\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$

八 解：（1）因为非零 B 的每一个列向量都是方程组的解，则方程组有非

零解，则系数行列式等于 0，即 $\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{vmatrix}=0$，则有 1+6 λ -4

-6+4- λ =0, 即 λ =1

（2）方程组系数行列式等于 0，则系数矩阵的秩小于 3，即线性无关的基础解系的向量个数小于 3，而解 B 的每一个列向量都能由基础解系线性表示，故 B 的列向量组成的列向量组的秩必小于 3，故 $|B|=0$。