试 题 二　（考试时间：120 分钟）

一、填空（每小题 4 分，共 32 分）

1．若矩阵 **A** 相似于矩阵 $diag\{1,-1,2\}$，则 $\left|A^{-1}\right|^3$=_________。

2．设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 是实正交矩阵且 $a_{11}=1$，$b=(1,0,0)^T$，则方程组 **A** $X=b$ 的解为_____

3．设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A+4E=0$，则 $(A+4E)^{-1}$=________。

4．设 A 为 4×3 阶矩阵，且 $R(\mathbf{A})=2$，又 $B=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，则 $R(\mathbf{AB})-R(\mathbf{A})$=______

5．若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+4x_2{}^2+2x_3{}^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，则

t 满足____________。

6．已知三阶方阵 **A** 的特征值为 2，3，4，则 $|2A|$=_______。

7．已知五阶实对称方阵 **A** 的特征值为 0，1，2，3，4，则 $R(\mathbf{A})$=___________。

8．设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ 则 $A^k=$_________。（k 为正整数）。

二、（10 分）计算行列式：$D=\begin{vmatrix}-a_1&a_1&0&\cdots&0&0\\0&-a_2&a_2&\cdots&0&0\\0&0&-a_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-a_n&a_n\\1&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$

三、（10 分）设线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\x_1+3x_2-x_3+4x_4=3\\x_1+2x_2-x_3+\lambda x_4=3\end{cases}$

讨论λ为何值时，方程组无解，有解？在有解的情况下，求出全部解。

四、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$

（1）把二次型 f 写成 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 的形式；

（2）求矩阵 **A** 的特征值和特征向量；

（3）求正交阵 Q，使 f 通过正交变换 $X = QY$ 化为标准形。

五、(10 分)已知向量组 $\alpha_1 = (1,4,0,2)^T$，$\alpha_2 = (2,7,1,3)^T$，$\alpha_3 = (0,1,-1,a)^T$，$\beta = (3,10,b,4)^T$，

试讨论（1）**a,b** 取何值时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3$ 线性表出；

（2）**a,b** 取何值时，β 可以由 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3$ 线性表出。此时写出具体的表达式。

六、(10 分) 设 3 阶实对称矩阵 **A** 的秩为 2，$\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 **A** 的二重特征值， $\alpha_1 = (1,1,0)^T$，

$\alpha_2 = (2,1,1)^T$， $\alpha_3 = (-1,2,-3)^T$ 都是 **A** 的属于特征值 6 的特征向量。

（1）求 **A** 的另一个特征值和对应的特征向量；　（2）求矩阵 **A**。

七、(12 分) 已知 R^3 中两组基 $\varepsilon_1 = (1,0,0)^T$ $\varepsilon_2 = (0,1,0)^T$， $\varepsilon_3 = (0,0,1)^T$；及 $\alpha_1 = (1,0,0)^T$，

$\alpha_2 = (1,1,0)^T$， $\alpha_3 = (1,1,1)^T$。

（1） 求由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3$ 的过渡矩阵 **A**；

（2） 设由基 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 β_1,β_2,β_3；

（3） 已知向量 ξ 在基 β_1,β_2,β_3 的坐标为 $(1,2,3)^T$，求 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3$ 的坐标。

八、设 $A = E - uu^T$，E 为 n 阶单位阵，u 为 n 维非零向量，u^T 为 u 的转置，

证明: （1） $A^2 = A$ 的充要条件是 $u^T u = 1$；

（2）当 $u^T u = 1$ 时，A 是不可逆的。

试题二参考答案

一、填空

1、 $\underline{-1/8}$ 2 、$\underline{(1,0,0)^T}$ 3、 $\underline{-(A-7E)/31}$ 4、$\underline{0}$ 5、$\underline{-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}}$ 6、$\underline{192}$ 7、$\underline{4}$

8、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix}$

二 解:提示,第 i 列加至第 i+1 列,i=1,⋯,n,则 D=$\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}=(-1)^n(n+1)\prod_{i=1}^{n} a_i$.

三 解:增广矩阵 B=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & \lambda & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 & 1 \end{bmatrix}$

(1) 当 λ=4 时,R(B)=3,R(A)=2,所以无解。

(2) 当 $\lambda \neq 4$ 时,R(B)=R(A)=3<4,方程组有无穷解。

令 $x_3=0$,得一特解 $\eta_0=(-\frac{4}{\lambda-4},1,0,\frac{1}{\lambda-4})^T$;易得方程组的基础解系 $\eta=(1,0,1,0)^T$。

所以方程组的通解为 $x=k\eta+\eta_0$。

四 解:(1) $f=x^T Ax=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(2) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$,得 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$。

当 $\lambda_1=1$ 时,得对应的特征向量 $\alpha_1=(0 \quad 1 \quad -1)^T$;

当 $\lambda_2=2$ 时,得对应的特征向量 $\alpha_2=(1 \quad 0 \quad 0)^T$;

当 $\lambda_3=5$ 时,得对应的特征向量 $\alpha_3=(0 \quad 1 \quad 1)^T$;

(3) 将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$正交化后得正交阵 Q=$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$，相应的正交变换为 X=QY,使得

$f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$。

五 解：令 A=($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$),X=$(x_1,x_2,x_3)^T$,B=$\beta$,既讨论方程组 AX=B 是否有解。

由 $(AB)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix}$

(1) 当$b \neq 2$时，方程组无解，故β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线形表出。

(2) 当 b=2 时且$a \neq 1$时方程组有唯一解，且$\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2$，

当 b=2 时且$a = 1$时方程组有无穷解，由$\begin{cases} x_1 = -1 - 2x_3 \\ x_2 = 2 + x_3 \end{cases}$，$x_3 \in R$

得$\beta = (-1-2k)\alpha_1 + (2+k)\alpha_2 + k\alpha_3$。

六 解：(1) 由$\lambda_1 = \lambda_2 = 6$是 A 的 2 重特征值，所以 A 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量有 2 个，由题设可得的一个极大无关组是α_1,α_2,故α_1,α_2为 A 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量。由 R(A)=2 可得|A|=0.所以$\lambda_3 = 0$。

设$\lambda_3 = 0$所对应的特征向量为$\alpha = (x_1,x_2,x_3)^T$,则$\alpha_1^T\alpha = 0, \alpha_2^T\alpha = 0$，即

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 得基础解系$\alpha = (-1,1,1)^T$,所以属于$\lambda_3 = 0$的特征向量为 $c\alpha$.

(2) 令$P = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，所以

$$A=P\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}。$$

七 解：（1）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(2) $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A\ B$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}。$$

所以$\beta_1=(0,1,0)^T$， $\beta_2=(1,0,0)^T$ ，$\beta_3=(0,1,1)^T$。

(3) $\xi=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$

所以ξ在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(-2,1,3)^T$。

八 证明：当ξ是 n 维列向量时，$\xi\xi^T$是 n 阶方阵，$\xi^T\xi$是数。

(1) 因为 $A^2=(I-\xi\xi^T)(I-\xi\xi^T)=I-2\xi\xi^T+\xi\xi^T\xi\xi^T=I-2\xi\xi^T+\xi(\xi^T\xi)\xi^T$

$=I-2\xi\xi^T+(\xi^T\xi)\xi\xi^T$ 。

从而 由 $A^2=A$ 可写为：$I-2\xi\xi^T+(\xi^T\xi)\xi\xi^T=I-\xi\xi^T$，化简得：

$$(\xi^T\xi-1)\,\xi\xi^T=0.$$

因为 ξ是非零向量所以$\xi\xi^T\neq 0$，故 $A^2=A$ 当且仅当$\xi^T\xi=1$。

(2) 用反证法：$\xi^T\xi=1$ 时，由(1)知 $A^2=A$。如果 A 可逆，则有$A^{-1}A^2=A^{-1}A$，从而有 A=I，这与已知矛盾。从而 A 不可逆。