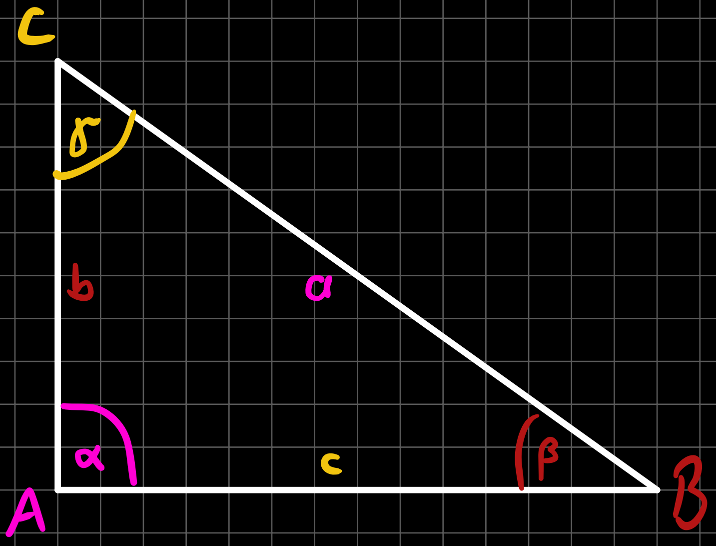
Dreiecke



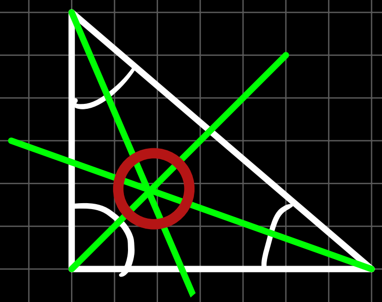
Jedes Dreieck hat 3 Ecken benannt A,B,C mit dazugehörigen und gegenüberliegenden Seiten a,b,c. Die Winkel zwischen den Seiten sind α, β und γ. Abhängig vom aktuell betrachteten Winkel bezeichnet man die Seiten unterschiedlich. Die gegenüberliegende Seite ist die Gegenkathete, die anliegende die Ankathete und die Seite gegenüber eines rechten Winkels ist die Hypotenuse.

Flacheninhalt $A = \frac{1}{2} g \cdot h$

Umfang $U = a + b + c$

Summe aller Winkel: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

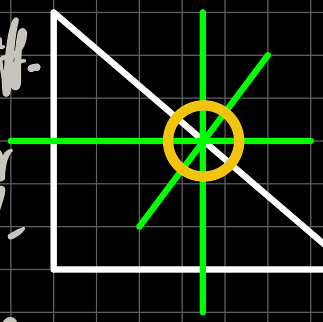
Schwerpunkt



Der Schnittpunkt aller Winkelhalbierenden.

Mittelpunkt

Der Schnittpunkt aller Seitenhalbierenden.



Gleichschenklig

2 gleiche Winkel
2 gleiche Seiten
1 Symmetrieachse

Rechtwinklig

1 rechter Winkel

Gleichseitig

3 gleiche Winkel
3 gleiche Seiten
3 Symmetrieachsen

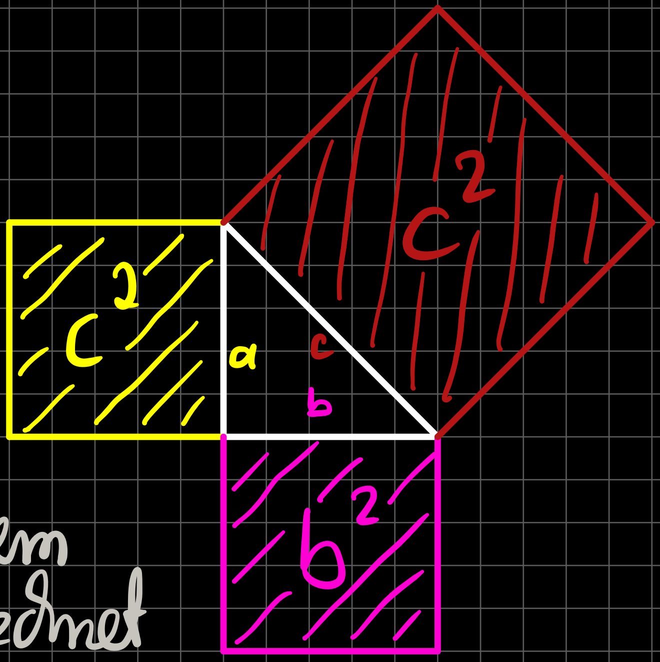
$A=\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}$

$U=3a$

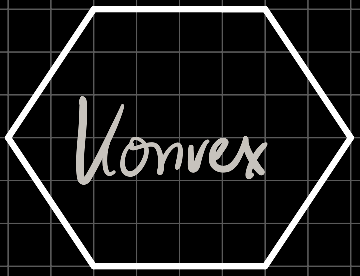
Satz des Pythagoras

$$a^2+b^2=c^2$$

In einem rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras, mit welchem einfach die Seitenlänge berechnet werden kann.

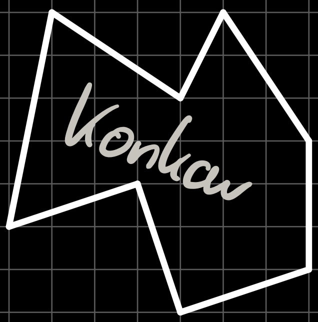


Konvex und Konkav



Alle Innenwinkel sind kleiner als 180°.

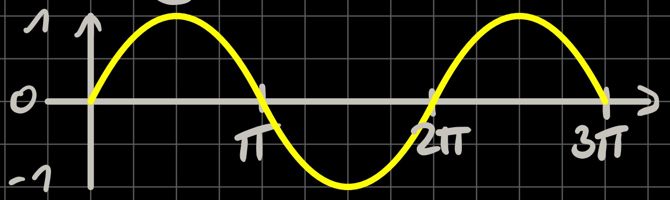
Mindestens ein Innenwinkel ist größer als 180°.



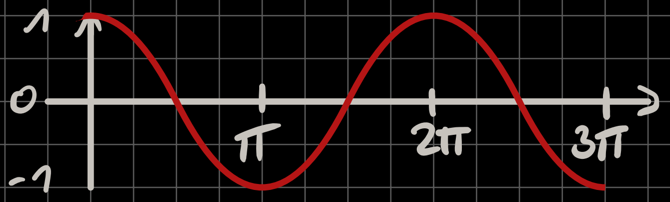
Trigonometrische Funktionen[1]

Im rechtwinkligen Dreieck können Winkel- und Seitenverhältnisse speziell ausgerechnet werden.

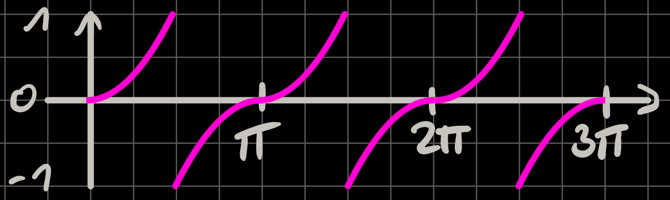
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$



$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$



$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$



Das Ergebnis dieser Gleichungen liegt immer zwischen -1 und 1. Zu jedem Wert gibt es einen zugehörigen Wert und umgekehrt.

$\sin(90^\circ) = \sqrt{2}$; $\sin(180^\circ) = 1$; $\cos(180^\circ) = 0$

Die Umkehrung ist ebenso möglich.

$\sin^{-1}$[2] $(\sqrt{2}) = 90^\circ$; $\sin^{-1}(0,5) = 30^\circ$; $\cos^{-1}(0,25) \approx 75,52^\circ$

[1] Die Werte sind definiert in einer Wertetabelle. Somit ist sin(30°) in jedem Dreieck der gleiche Wert.

[2] Gesprochen arkus/arc, also arkussinus/arcsine.

Weitere Sätze

Sinussatz

Das Verhältnis von Seite zum sinus-Wert des gegenüberliegenden Winkel ist bei allen Seiten und Winkeln identisch.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Kosinussatz

Der Kosinussatz lässt sich als Erweiterung des Satz des Pythagoras betrachten.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Beispiel: $a = 6{,}7\,\text{cm}$; $\alpha = 24{,}3°$; $\beta = 47{,}7°$ gegeben

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$72° + \gamma = 180° \quad | -72°$$

$$\underline{\gamma = 108°}$$

$$\frac{6{,}7\,\text{cm}}{\sin(24{,}3°)} = \frac{b}{\sin(47{,}7°)} \quad | \cdot \sin(47{,}7°)$$

$$\underline{10{,}9 \approx b}$$

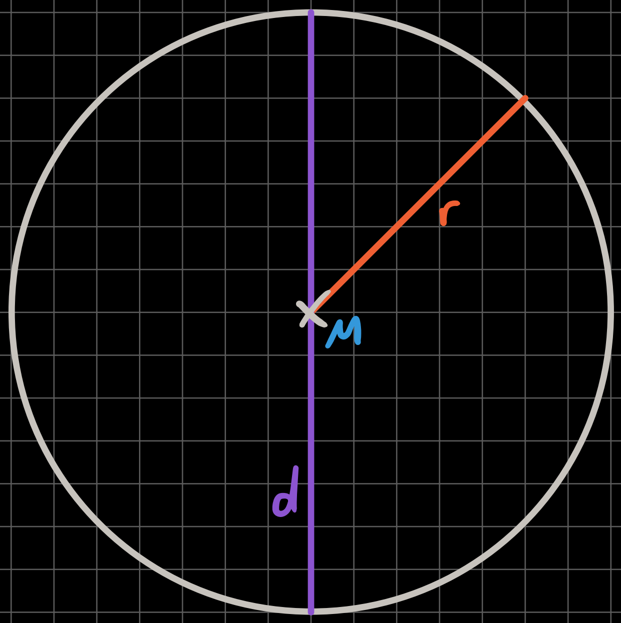
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$
$$= 6{,}7cm^2 + 10{,}9cm^2 - 2(6{,}7cm \cdot 10{,}9cm) \cdot \cos(108°)$$
$$\approx 44{,}89cm^2 + 118{,}81cm^2 - (-54{,}1cm^2)$$
$$\approx 208{,}8cm^2 \mid \sqrt{\ }$$
$$\underline{c \approx 14{,}5\,cm}$$

Somit lassen sich bereits mit wenigen Informationen das gesamte Dreieck berechnen.
Beide Sätze sind in allen Dreiecken anwendbar.

Kreise

Radius r Mittelpunkt M
Durchmesser $d = 2r$

Flächeninhalt $A = \pi$[3]r^2
Umfang $U = 2r\pi$



Mit der Formel

$$(x - M_x)^2 + (y - M_y)^2 = r^2$$

findet man raus, ob ein gegebener Punkt außerhalb, auf oder im Kreis liegt.

[3] Pi (π) ist eine definiert reelle Zahl. In Sprachen und Engines als Konstante definiert.
Annäherung: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

Einheitskreis

$M(0|0)$ $r=1$

Für jeden Punkt $P(x|y)$ gilt: $x^2+y^2=1$

$x=\sin(\alpha)$

$y=\cos(\alpha)$

Beispiell: $\alpha=0^2$; $x=\sin(0°)=0$

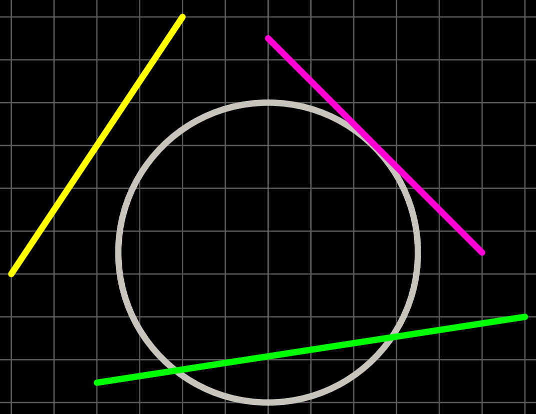
$y=\sin(0°)=1$ $\Rightarrow P(0|1)$

Geraden beim Kreis

Passante (kein Schnittpunkt)

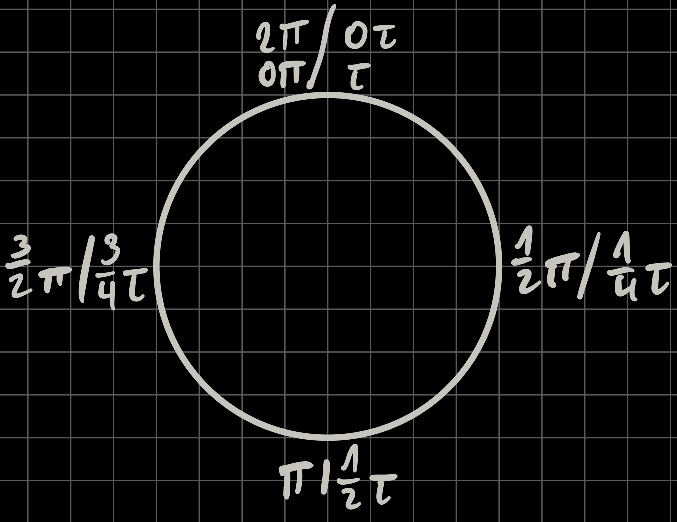
Tangente (einen Schnittpunkt)

Sekante (zwei Schnittpunkte)



Grad und Bogenmaß

$360° = 2\pi$ $(\tau = 2\pi)$

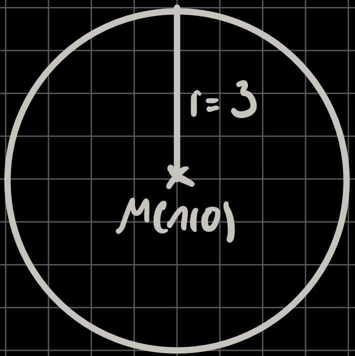


Umrechung:

$$\alpha° = \frac{360°}{2\pi} \cdot \phi$$

$$\phi = \frac{2\pi}{360°} \cdot \alpha$$

Punktkontrolle



$(x-M_x)^2+(y-M_y)^2=r^2$

$P_1(2|3)$

$(2-1)^2+(3-0)^2=3^2$

$1+9=9$

$10=9$ // Punkt liegt außerhalb des Kreises, da $x>r^2$

$P_2(0|0)$

$(0-1)^2+(0-0)^2=3^2$

$1=9$ // Punkt liegt innerhalb des Kreises, da $x<r^2$

Punktbestimmung

Durch Einsetzen von Variablen können Punkte zugehörig eines Wertes einer Achse ermittelt werden.

$P_3(-1|y)$

$(-1-1)^2+(y-0)^2=3^2$

$4+y^2=9 \quad |-4$

$y^2=5 \quad |\sqrt{}$

$y=\sqrt{5} \Rightarrow P_3(-1|\sqrt{5})$