# Appunti di Analisi (prettamente 2)

Luca Tagliavini

Sometime in June 2021

## Indice

# 1 Formule

## 1.1 Formule goniometriche

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\sin(2x)}{2}$$

## 1.2 Prodotto scalare

Presi due vettori $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \overline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ si definisce il loro *prodotto scalare* (o prodotto intero) come:

$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

NOTA: se il prodotto scalare e' nullo i due vettori sono perpendicolari.

## 1.3 Norma euclidea

Dato un vettore $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ definiamo la sua norma come:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

### 1.3.1 Vettore di norma unitaria

Un *vettore di norma unitaria*, o *versore*, e' un vettore la cui norma ha valore 1. Un qualunque vettore puo' essere reso versore dividendolo per la sua norma. Preso $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ scriviamo il vettore di norma unitaria come:

$$v_{uni} = \frac{v}{\|v\|} = (\frac{v_1}{\|v\|}, \frac{v_2}{\|v\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v\|})$$

## 1.4 Gradiente

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$ possiamo definire il *gradiente di* $f$ per un suo generico punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ derivabile in tutte le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ come:

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

NOTA(1): il gradiente in un dato punto calcola il *vettore di direzione di massima crescita* per quella funzione in quel punto.

NOTA(2): un punto in cui vale $\nabla f(\overline{v}) = \overline{0}$ si chiama *punto stazionario* o *punto critico*. Tali punti sranno poi studiati tramite le tecniche elencate di seguito.

## 1.5 Derivata direzionale

Dati $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$ (v di norma unitaria), tali che si possa calcoalre il gradiente di $f$ nel punto $(x_1, x_2, \dots x_n)$, la *derivata direzionale* puo' essere calcolata come:

$$\frac{\delta f}{\delta v}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n), v \rangle$$

## 1.6 Matrice Hessiana

La *Hessiana* di una funzione in piu' variabili $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e' la matrice quadrata $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che:

$$H_f(\overline{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta v_1^2}(\overline{v}) & \frac{\delta^2 f}{\delta v_1 v_2}(\overline{v}) & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta v_1 v_n}(\overline{v}) \\ \frac{\delta^2 f}{\delta v_2 v_1}(\overline{v}) & \frac{\delta^2 f}{\delta v_2^2}(\overline{v}) & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta v_2 v_n}(\overline{v}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta^2 f}{\delta v_n v_1}(\overline{v}) & \frac{\delta^2 f}{\delta v_n v_2}(\overline{v}) & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta v_n^2}(\overline{v}) \end{bmatrix} \text{ con } \overline{v} \in A$$

## 1.7 Determinante

Il *determinante* di una funzione e' un numero univoco associato ad ogni matrice calcolabile tramite varie tecniche. Poiche' lavoreremo quasi sempre con matrici quadrate $2 \times 2$ impariamo il metodo piu semplice:

### 1.7.1 Determinante di matrici $1 \times 1$

Dove $A \in M_1(\mathbb{R})$, ovvero $A$ e' una matrice $1 \times 1$ contenente un solo numero $(a_{1,1})$, vale $det(A) = a_{1,1}$.

### 1.7.2 Determinante di matrici $2 \times 2$

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ il suo determinante e' dato dalla seguente formula, simile a quella del delta per le eqauzioni di secondo grado (non a caso):

$$det(A) = (a \cdot d) - (b \cdot c)$$

## 1.8 Segno di una matrice Hessiana

Data una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di cui si puo' calcolare la matrice Hessiana $H_f(\overline{v}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, si puo' classificare un dato punto $\overline{v}$ in base al valore di $det(H_f(\overline{v}))$:

1. $det(H_f(\overline{v})) > 0, a > 0 \longrightarrow H_f$ **definita positiva** (minimo)
2. $det(H_f(\overline{v})) > 0, a < 0 \longrightarrow H_f$ **definita negativa** (massimo)
3. $det(H_f(\overline{v})) < 0 \longrightarrow H_f$ **indefinita** (sella)
4. $det(H_f(\overline{v})) = 0 \longrightarrow H_f$ **semidefinita** (non possiamo dire nulla)

## 1.9 Studio di punti critici

Dato un punto critico $(x_1, \ldots, x_n)$ e l'Hessiana della funzione $H_f(x_1, \ldots, x_n)$ per determinare il tipo di punto critico possiamo valutare l'Hessiana nel punto dato e studiare il segno della matrice secondo il seguente teorema:

1. $H_f$ definita **positiva** allora $(x_1, \ldots, x_n)$ punto di minimo
2. $H_f$ definita **negativa** allora $(x_1, \ldots, x_n)$ punto di massimo
3. $H_f$ **indefinita** allora $(x_1, \ldots, x_n)$ punto di sella
4. $H_f$ **semidefinita** non possiamo dire nulla

## 1.10 Taylor in due variabili (prim'ordine)

Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe $C^1$ e un punto $(x_0, y_0)$, l'equazione del polinomio di Taylor al prim'ordine per funzioni in due variabili e' come segue:

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

In egual modo, usando la notazione piu' compatta $v = (x, y)$ e $\overline{v} = (x_0, y_0)$:

$$T_1(v) = f(\overline{v}) + \langle \nabla f(\overline{v}), v - \overline{v} \rangle$$

## 1.11 Taylor in due variabili (secondo ordine)

Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$ e un punto $(x_0, y_0)$, l'equazione del polinomio di Taylor al secondo ordine per funzioni in due variabili e' come segue:

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0)\rangle$$
$$+ \frac{1}{2}\langle H_f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0), (x-x_0,y-y_0)\rangle$$

In egual modo, usando la notazione piu' compatta $v = (x,y)$ e $\overline{v} = (x_0,y_0)$:

$$T_2(v) = f(\overline{v}) + \langle \nabla f(\overline{v}), v - \overline{v}\rangle$$
$$+ \frac{1}{2}\langle H_f(\overline{v})(v-\overline{v}), (v-\overline{v})\rangle$$

OSS: L'ultimo prodotto scalare, viene spesso riportato in modo esplicito come segue:

$$\frac{1}{2}\langle H_f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0), (x-x_0,y-y_0)\rangle =$$
$$\frac{1}{2}[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0), f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2]$$

## 1.12 OSS: formule di Taylor

Entrambe i polinomi di Taylor sopra riportati potrebbero essere scritti tramite il teorema di Taylor con resto secondo peano e usando variabili d'incremento $h,k$ tali che $h = x - x_0, k = y - y_0$:

$$T_1(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (h,k)\rangle + o(\|(h,k)\|)$$
$$T_2(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (h,k)\rangle$$
$$+ \frac{1}{2}\langle H_f(x_0,y_0)(h,k), (h,k)\rangle + o(\|(h,k)\|^2)$$

## 2 Teoria - I modulo

### 2.1 Teorema: dell'unicità del limite

Presa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

*Se*:

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow l$ è unico

### 2.2 Teorema: dei due carabinieri

$f, g, h : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dove $\mathbb{I}$ è un intorno di $x_0$

- $\forall x \in \mathbb{I} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$

*Allora*:

$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

### 2.3 Teorema: degli zeri

Presa $f : [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f$ *continua* su $[\,a, b\,]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$ (estremi con segno opposto)

*Allora*:

$\exists c \in \,]\,a, b\,[\, : \quad f(c) = 0$

### 2.4 Teorema: di Weierstrass

Presa $f : [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f$ *continua* su $[\,a, b\,]$

*Allora*:

$\exists x_1, x_2 \in \; [\,a, b\,] \; :$

$f(x_1) = \min_{[a,b]} f, \quad f(x_2) = \max_{[a,b]} f$

*o meglio*:

$f([a, b]) = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$

## 2.5 Teorema: di Fermat

$f : [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $\exists c \in \,]\,a, b\,[$ dove $c$ punto di *max/min* relativo
- $f$ *derivabile* in $c$

*Allora*:
$f'(c) = 0$

## 2.6 Teorema: di Rolle

Presa $f : [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f$ e' *continua* su $[\,a, b\,]$
- $f$ e' *derivabile* in $]\,a, b\,[$
- $f(a) = f(b)$

*Allora*:
$\exists c \in \,]\,a, b\,[ : \quad f'(c) = 0$

## 2.7 Teorema: di Lagrange

Presa $f : [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f$ e' *continua* su $[\,a, b\,]$
- $f$ e' *derivabile* in $]\,a, b\,[$

*Allora*:
$\exists c \in \,]\,a, b\,[ : \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

## 2.8 Teorema: di Cauchy

Presa $f, g : [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f, g$ *continue* su $[\,a, b\,]$
- $f, g$ *derivabili* in $]\,a, b\,[$
- $g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \,]\,a, b\,[$

*Allora*:
$\exists c \in \,]\,a, b\,[ : \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

## 2.9 Teorema: di de l'Hopital

Presa $f, g : ]\, a, b\, [ \to \mathbb{R}$ dove $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

- $f, g$ *derivabili* su $]\, a, b\, [$
- che valga uno:
    1. $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{0}{0}]$ oppure $[\frac{\infty}{\infty}]$
    2. $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{0}{0}]$ oppure $[\frac{\infty}{\infty}]$
- $g' \neq 0 \quad \forall x \in ]\, a, b\, [$

*Allora*:

1. $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
2. $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

# 3 Teoria - II modulo

## 3.1 Def: Somme di Riemann

Presa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f$ continua e i punti $a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ con $n \in \mathbb{N}$ tali che $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}, < x_n = b$.

Scelgo poi la famiglia di punti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ scelti in modo arbitrario, ma tali che

$$\varepsilon_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Ora possiamo definire la *somma di Riemann* $n$-esima relativa alla funzione $f$ come

$$\begin{aligned} S_n &= f(\varepsilon_1)(x_1 - x_0) + f(\varepsilon_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\varepsilon_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

**Teorema** (non dimostrato): la succcessione creata dalla somma di Riemann facendo tendere la $n \to \infty$ converge sermpre ad un numero $k \in \mathbb{R}$.

## 3.2 Def: Integrale di una funzione

Prese $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che $f, g$ continue, l'integrale negli estremi $a$, $b$ rispetta le seguenti proprieta':

1. **Linearita'**: dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale:

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

2. **Additivita'**: presi $a, b, c \in ]a, b[$ tali che $a < c < b$ vale:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

3. *Convenzione*: $a < b$, altrimenti si applica la seguente regola:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

   Si noti come questa convenzione fa valere la proprieta' di additivita' anche qual'ora i punti non siano nell'ordine $a < c < b$.

4. **Monotonia**: se $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ allora:

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$$

## 3.3 Teorema: media integrale

*Enunciato*: Presa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora $\exists z \in [a, b]$ tale che

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

> Per visualizzare, $z$ e' il punto tale che $f(z) \cdot (b - a)$, ovvero l'area di altezza $f(z)$ e base $b - a$ vale esattamente $\int_a^b f(x)\, dx$.

*Dimostrazione*: **uso weierstrass, trovo min e max e so che f(x) e' compreso tra essi, poi uso la proprieta' della monotonia (cambio m, M con gli integrali), infine per il teorema dei valori intermedi arrivo a quello che volevo**.
Da Weierstrass ho che $m = \min_{[a,b]} f, M = \max_{[a,b]} f$, allora $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathcal{D}(f)$. Per la *proprieta' di monotonia* degli integrali ne segue che:

$$\int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\, dx$$

Poiche' $k \in \mathbb{R} \int_a^b k\, dx = k(b - a)$ ho che:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$$
$$\frac{1}{b-a} \cdot m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a) \cdot \frac{1}{b-a}$$
$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M$$

Per il teorema dei valori intermedi ho che

$$\exists z. f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

□

## 3.4 Def: Primitiva

Presa $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ continua e dato $E \subseteq ]a, b[$ si dice che $F : E \to \mathbb{R}$ e' *una primitiva* se vale $F'(x) = f(x) \forall x \in E$

> NOTA: Se $F$ e' una primitiva di $f$ su $E$ allora $\forall k \in \mathbb{R}$ la funzione $G(x) = k + F(x)$ e' ancora una primitiva di $f$ su $E$.

## 3.5 Teorema: caratterizzazione delle primitive di $f$ su un intervallo

*Enunciato*: Se $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono primitive di $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ allora $\exists k \in \mathbb{R}. F(x) - G(x) = k \quad \forall x \in [a, b]$.

*Dimostrazione*: **definisco $H = F - G$ e faccio la derivata nulla**.
Siano $F, G$ primitive di $f$ su $[a, b]$. Definisco la funzione $H(x) = F(x) - G(x)$ e noto che e' costante, poiche' $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ ha derivata uguale a zero ed e' percio' costante. Dunque $\exists k \in \mathbb{R}. F(x) - G(x) = k \quad \forall x \in [a, b]$.

□

## 3.6 Def: Funzione integrale

Sia $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$, dato $c \in ]a, b[$ definiamo $I_c : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ come $I_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ come *funzione integrale di primo estremo c.*

> La funzione descrive come varia l'integrale al cambiare dell'ampiezza dell' intervallo, sempre partendo dal punto $c$.

*Osservazione(1)*: $I_c(c) = \int_c^c f(t)\,dt = 0$
*Osservazione(2)*: presi $c_1 \neq c_2 \in ]a, b[$ la scrittura $I_{c_1}(x) - I_{c_2}(x) = \int_{c_1}^x f - \int_{c_2}^x f = \int_{c_1}^x f + \int_x^{c_2} f = \int_{c_1}^{c_2} f$ per la proprieta' dell'additivita'. La differenza di due funizoni integrali e' dunque sempre costante.

## 3.7 Teorema: fondamentale del calcolo integrale (I)

*Enunciato*: Presa $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ continua, $c \in ]a, b[$, *implica che* la funzione integrale $F(x) = I_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ e' derivabile su $]a, b[$ e vale $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in ]a, b[$, ovvero che $F$ *e' una primitiva di* $f$.

*Dimostrazione*: **applico le def. di derivata e funzione integrale, poi l'additivita', uso una successione per far tendere h a zero e applico il teorema della media itegrale**
Vogliamo mostrare che:

$$\frac{\delta}{\delta x} \int_c^x f(t)\,dt = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left( \int_c^{x+h} f - \int_c^x f \right) =_? f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left( \int_c^{x+h} f + \int_x^c f \right) =_? f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f =_? f(x)$$

Risolvo tramite successioni. Costruisco dunque una successione $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che sia una successione di numeri diversi da zero e con $\lim_{n \to +\infty} h_n = 0$. Riscrivo dunque la mia ipotesi come:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} f =_? f(x)$$

Ora applico il teorema della media integrale su $[x, x+h_n]$ e ottengo:

$$\exists \varepsilon_n \in [x, x+h_n] \quad f(\varepsilon_n) = \frac{1}{x+h_n-x}\int_x^{x+h_n} f \quad \text{ovvero}$$
$$\exists \varepsilon_n \in [x, x+h_n] \quad f(\varepsilon_n) = \frac{1}{h_n}\int_x^{x+h_n} f$$

Dal risultato del teorema noto che $x \leq \varepsilon_n \leq x+h_n$.
Poiche' $n \to \infty$, e per costruzione $h_n \to_{n\to\infty} 0$ si ha che $x \leq \varepsilon_n \leq x$, ovvero $\varepsilon_n \to x$. Ma allora, poiche' $f$ e' continua vale che:
$f(\varepsilon_n) = f(x)$ con $n \to +\infty$. □

## 3.8 Teorema: fondamentale del cacolo integrale (II) o di Toricelli

*Enunciato*: Data $f : ]a_0, b_0[ \to \mathbb{R}$ continua, $[a,b] \subseteq ]a_0, b_0[$. Sia $F$ una primitiva di $f$ su $[a,b]$ allora vale che:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F(b) - F(a)\\ &= [F(x)]_a^b\\ &= [F(x)]_{x=a}^{x=b}\end{aligned}$$

*Dimostrazione*: **Definire un punto c in $[a,b]$, trovare $I_c$ che sappiamo essere primitiva per il teorema fondamentale del calcolo, sfruttare il teorema di caratterizzazione per dire che $I_c = F+k$ poi fare $I_c(b)-I_c(a)$ applicando le definizioni (da un lato abremo $F(b)-F(a)$ e dall'altro due integrali che possiamo unire per la proprieta' di additivita**
Sia $c \in [a,b]$ e $I_c : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Per il teorema fondamentale del calcolo (I) $I_c$ e' una primitiva di $f$ su $]a_0, b_0[$.
Per il teorema della caratterizzazione delle primitive $\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in ]a_0, b_0[ \quad I_c(x) = F(x) + k$.
Ho dunque che $I_c(b) - I_c(a) = (F(b)+k) - (F(a)+k) = F(b) - F(a)$. Espando la definizone di $I_c(x) = \int_c^x$ nell'equazione soprastante e uso la *proprieta' di additivita' degli integrali*:

$$\begin{aligned}\int_c^b f - \int_c^a f &=_? F(b) - F(a)\\ \int_c^b f + \int_a^c f &=_? F(b) - F(a)\\ \int_a^b f &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

□

### 3.9 Def: integrale generalizzato

Presa $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continua, definiamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c \,dx$$

Analogamente presa $f : ]a, b] \to \mathbb{R}$ continua, definiamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b \,dx$$

NOTA: vale per $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

### 3.10 Def: Spazio $\mathbb{R}^n$

Definiamo lo spazio dei punti $\mathbb{R}^n = \{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots . x_n \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$.

### 3.11 Def: prodotto scalare

Presi due vettori $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ si definisce il loro *prodotto scalare* (o prodotto intero) come:

$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n = \sum_{k=1}^{n} u_kv_k$$

NOTA: se il prodotto scalare e' nullo i due vettori sono perpendicolari.

#### 3.11.1 Proprieta: prodotto scalare

1. **simmetria**: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
2. **bilinearita'**: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale:

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle \text{ e}$$
$$\langle z, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha\langle z, x\rangle + \beta\langle z, y\rangle$$

3. **somma quadratica**: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle x, x, \rangle = 0 \iff x_1, \ldots, x_n = 0$
   conseguenza: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle x, 0\rangle = 0$.

### 3.12 Def: Norma euclidea

Dato un vettore $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ definiamo la sua norma come:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2} = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

### 3.12.1 Proprieta': norma euclidea

Preso $\overline{x} \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprieta':

1. **segno**: $\|\overline{x}\| \geq 0$
2. **annullamento**: $\|\overline{x}\| = 0 \iff x = \overline{0}$
3. **omogeneita'**: $\|\lambda\overline{x}\| = \|\lambda\|\|\overline{x}\| \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$
4. **somma**: $\|\overline{x} + \overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$ e anche $\|\overline{x} + \overline{y}\| \geq \|\overline{x}\| - \|\overline{y}\|$

## 3.13 Def: intorni sferici

In $\mathbb{R}^n$, preso $\overline{x} \in \mathbb{R}^n, r > 0$ si definice $B(\overline{x}, r) = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\overline{y} - \overline{x}\| < r\}$.

## 3.14 Def: successioni in $\mathbb{R}^n$

Presa $(\overline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\overline{x}_k = (\overline{x}_k^1, \ldots, \overline{x}_k^n)$ e preso un punto $\overline{c} \in \mathbb{R}^n$ si definisce la successione come:

$$\lim_{k\to+\infty} \overline{x}_k = c \iff \begin{cases} \lim_{k\to+\infty} \overline{x}_k^1 = c_1 & \text{sse il limite converge} \\ \vdots \\ \lim_{k\to+\infty} \overline{x}_k^n = c_n & \text{sse il limite converge} \end{cases}$$

> NOTA: la successione si dice *convergente* sse tutti i suoi limiti convergono.

## 3.15 Def: insieme limitato

Preso un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice che $A$ e' un *insieme limitato* se $\exists r > 0$ tale che $\forall\overline{x} \in A.\, \|x\| < r$, o in altro modo, se si puo' costruire una palla centrata in un centro $\overline{c}$ e di raggio $r$ tale che $A \subseteq B(\overline{c}, r)$.

> OSS: un insieme si dice *illimitato* se non e' limitato.

## 3.16 Def: insieme aperto

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se $\forall\overline{x} \in A\, \exists\varepsilon > 0.\, B(\overline{x}, \varepsilon) \subseteq A$.

In modo intuitivo, indipendentemente da quanto vicino al "bordo" dell'insieme scelto prendiamo il nostro punto $\overline{x}$, esistera' sempre una palla (intorno in $n = 1$) piccola a piacere (grandezza $\varepsilon$).

> NOTA: un insieme si dice *chiuso* quando il suo complementare e' aperto, ovvero:
> Preso $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A$ *si dice chiuso* sse $\mathbb{R}^n \setminus A$ e' aperto.

### 3.17 Def: funzione di piu' variabili

Preso $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q \quad n, q \in \mathbb{N}$, sia $f : A \to B$ dove $f : x \mapsto f(x) \in B$.

### 3.18 Def: insieme di livello

Presa $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}$ si definisce il suo insieme di livello per un dato valore $b \in B$ l'insieme dei punti dato da:

$$I = \{\overline{x} \in A | f(\overline{x}) = b\} = f^{-1}(b)$$

Per visualizzare in $n = 2$ si puo' pensare al disegno di un paraboloide $f(x, y) = x^2+y^2$ intersecato con un piano del tipo $z = b = 1$. Infatti, l'insieme di tali punti sarebbe del tipo$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 = 1\}$, come ci dice la definizione.

### 3.19 Def: funzione continua

Enunciato in $n = 2$ per semplicita' di notazione.

Presa $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$, *si dice che $f$ e' continua* in $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ se presa

$$(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ tale che } \begin{cases} (x_k, y_k) \in A \\ (x_k, y_k) \to (\overline{x}, \overline{y}) \end{cases}$$

risulta $\lim_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) = f(\overline{x}, \overline{y})$.

Oltretutto, $f$ si dice *continua su tutto $A$* sse $f$ e' continua $\forall(\overline{x}, \overline{y}) \in A$.

### 3.20 Def: derivata parziale

Presa $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A$ aperto, dato un punto $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$, definiamo

- *la derivata rispetto a $x$* come $\frac{\delta f}{\delta x}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{h\to0} \frac{f(\overline{x}+h,\overline{y})-f(\overline{x},\overline{y})}{h}$.
- *la derivata rispetto a $y$* come $\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{h\to0} \frac{f(\overline{x},\overline{y}+h)-f(\overline{x},\overline{y})}{h}$.

### 3.21 Def: Gradiente

Definiamo *il gradiente* di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ come:

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = (\frac{\delta f}{\delta x_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_1, \ldots, x_n))$$

## 3.22 Dim: Derivabilita' e continuita'

A differenza del caso unidimensionale, in piu' variabili la *derivabilita* di una funzione, ossia il poter trovare il suo gradiente con le derivate parziali $\frac{\delta f}{\delta x}$, $\frac{\delta f}{\delta x}$ non implica continuita' di $f$.

**Mostriamolo con un contoresempio**: supponiamo che la derivabilita' implichi la continuita' e cerchiamo una funzione $f$ che sia derivabile ma non continua.

Prendiamo quindi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verifichiamo la derivabilita' in $(0,0)$ calcolando sia la derivata parziale rispetto a $x$ che a $y$:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\frac{\delta f}{\delta y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0 \cdot}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Ne segue che la funzione e' derivabile in $(0,0)$, quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Mostriamo ora l'assurdo *provando che $f$ non e' continua in* $(0,0)$. Possiamo fare cio' costruendo $(h_n, k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ che tendono a $(0,0)$ ma non assumono mai tale valore $\forall n \in \mathbb{N}$.
Prendiamo:

$$(h_n, k_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$$
$$(u_n, v_n) = (\frac{1}{n}, 0)$$

Facendo i limiti per $n \to \infty$ di $f(h_n, k_n)$ e $f(u_n, v_n)$ notiamo che essi non convergono allo stesso valore.

$$\lim_{t \to \infty} f(h_n, k_n) \neq \lim_{t \to \infty} f(u_n, v_n) \text{ poiche':}$$
$$f(h_n, k_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} =_{n \to \infty} \frac{1}{2}$$
$$f(u_n, v_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\frac{1}{n^2} \cdot 0^2} = 0 =_{n \to \infty} 0$$

Abbiamo quindi provato l'assurdo e mostrato che $f$ e' derivabile ma non continua in $(0,0)$.

## 3.23 Def: funzione differenziabile

Presa $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A$ aperto, $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$, si dice che $f$ *e' differenziabile* in $(\overline{x}, \overline{y})$ se:

- $\exists \frac{\delta f}{\delta x}(\overline{x}, \overline{y}), \exists \frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x}, \overline{y})$
- Vale la formula di Taylor $f(\overline{x} + h, \overline{y} + k) = f(\overline{x}, \overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)$

  OSS: ponendo $x = \overline{x} + h$, $y = \overline{y} + k$ e levando l'o-piccolo si ottiene il polinomio di Taylor di equazione: $T_1(x, y) = f(\overline{x}, \overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (x - \overline{x}, y - \overline{y}) \rangle$

### 3.23.1 Prop: differenziabilita' e continuita'

*Enunciato*: Presa $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A$ aperto ed $f$ differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$, si ha che $f$ e' continua in $(\overline{x}, \overline{y})$.

> **OSS**: Nel caso $n \geq 2$ e' la differenziabilita' (e non la derivabilita') a implicare la continuita'.

*Dimostrazione*: **NON RICHIESTA**

> Ricordiamo: $u : A \to \mathbb{R}$ si dice continua in $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ se:
>
> $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad |u(x, y) - u(\overline{x}, \overline{y})| < \varepsilon$$
> $$\forall (x, y) \in B((\overline{x}, \overline{y}), \delta_\varepsilon) \cap A$$

Devo mostrare, fissato un $\varepsilon > 0$, che vale:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \quad |f(\overline{x} + h, \overline{y} + k) - f(\overline{x}, \overline{y})| < \varepsilon \quad \forall (h, k) \in B((0, 0)\delta_\varepsilon)$$

Si noti che $(\overline{x} + h, \overline{y} + k) \in A$ e' sempre soddisfatto poiche' $A$ e' un insieme aperto. Poiche' $f$ e' differenziabile e vale la formula di Taylor, so che $f(\overline{x} + h, \overline{y} + k) - f(\overline{x}, \overline{y}) = \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)$. Sostituisco dunque nella disequazione e ottengo:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \quad |\langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)| < \varepsilon$$
$$|\langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k) \rangle| + |o(\|(h, k)\|)| < \varepsilon$$
$$\forall (h, k) \in B((0, 0)\delta_\varepsilon)$$

Divido poi la somma in due disequazioni, che provo entrambe essere $< \frac{\varepsilon}{2}$:

1. Devo provare:

$$|\langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k)\rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Per Cauchy-Shwartz ($|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$) vale che:

$$\|\nabla f(\overline{x}, \overline{y})\|\|(h, k)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Che puo' essere verificata prendendo un opportuno $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2\|\nabla f(\overline{x}, \overline{y}\|}$.

2. Devo provare:

$$|o(\|(h, k)\|)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|o(\|(h, k)\|)| = o(\|(h, k)\|)\|(h, k)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Poiche' $o(\|(h, k)\|)$ implica che $\|(h, k)\| \to 0$ si ha che la disugualianza e' verificata.

$\square$

## 3.24 Extra: polinomio di Taylor e piano tangente

La formula di Taylor generalizzata al caso $n = 2$ usatra per la condizione di differenziabilita', dalla quale si ricavano le variabili $(x, y)$,ha un altro importante significato geometrico. Infatti, il piano di equazione

$$z = T_1(x, y) = f(\overline{x}, \overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (x - \overline{x}, y - \overline{y})\rangle + o(\|(x - \overline{x}, y - \overline{y})\|)$$

rappresenta *il piano tangente* al grafico della funzione $f$ nel punto $(\overline{x}, \overline{y}, f(\overline{x}, \overline{y}))$.

## 3.25 Def: funzioni di classe $C^1$

Preso $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto si dice di *classe* $C^1$ se $f$ e' continua in $A$, se $\frac{\delta f}{\delta x_j}$ esiste ed e' continua $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

**OSS**: tutte le funzioni "elementari" sono di classe $C^1$.

## 3.26 Teorema: differenziabilita' delle fuzioni di classe $C^1$

*Enunciato*: Se ho $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f$ di classe $C^1$, allora $f$ e' differenziabile $\forall \overline{x} \in A$.

*Premessa (Lagrange in $n > 1$ o del valor intermedio)*: **(solo per x) costruire $u(x) = f(x, y)$ con y fissato. espandere la tesi arrivando a dire che $f(b, y) - f(a, y) = \delta_x f(\overline{x}, y)(b - a)$. Calcolare con il limite la derivata di $u$ e usare il teorema di lagrange**

**per trovare $\overline{x}$ e giungere esattamente a cio' che si voleva provare.**
Devo mostrare il teorema di Lagrange in $n = 1$, e lo faro' per la variabile $x$ in quantoo e' analogo per la $y$. Voglio dunque che $\forall a, b \in A$, preso $y$ fissato $\in \mathbb{R}$, $\exists c \in ]a, b[(o]b, a[)$ tale che $f(b, y) - f(a, y) = \delta_x f(c, y)(b-a)$. Costruisco la funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u(x) \mapsto f(x, y)$, e la derivo ottenendo:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ &= \frac{\delta f}{\delta x}(x, y) \end{aligned}$$

Per Lagrange su $u$ in $[a, b](o[b, a])$ ho che $\exists c \in ]a, b[(o]b, a[)$ tale che $u(b) - u(a) = u'(c)(b-a)$, ovvero, rimpiazzando $u$ con la sua definizione e derivata:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(c, y) = \frac{f(b, y) - f(a, y)}{b - a}$$

Questo e' esattamente cio' che si voleva provare. $\square$

*Dimostrazione*: **dobbiamo mostrare l'esistenza delle derivate parziali che e' ovvia per ipotesi, e la validita' di Taylor. Per provare Taylor lo esplicitiamo, sottraiamo e sommiamo $f(\overline{x}+h, y)$ notando che si hanno dunque due risultati del lemma di Lagrange. Raccogliamo $h$ e $k$ e proviamo una delle due ugualgianze con l'o-piccolo rifacendoci alla definizione di o-piccolo e limite**.
Vogliamo mostrare che $f$ e' differenziabile in $\forall x \in A$, fissiamo dunque un generico $(\overline{x}, \overline{x}) \in A$ e mostriamolo per esso. Affinche' una funzione sia differenziabile si ha bisogno che:

1. $\exists \frac{\delta f}{\delta x}, \quad \exists \frac{\delta f}{\delta y}$ ovvio per l'ipotesi che $f$ e' $C^1$.
2. Vale la formula di Taylor per $(\overline{x}, \overline{y})$.

Mostriamo dunque che vale la formula di Taylor ($(h, k) \to 0$):

$$\begin{aligned} f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) &= f(\overline{x}, \overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \\ f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}, \overline{y}) &= \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \\ f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}+h, y) + f(\overline{x}+h, y) - f(\overline{x}, \overline{y}) &= \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \\ [(1) - (2)] + [(3) - (4)] &= \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \end{aligned}$$

Noto che $(1) - (2)$ e $(3) - (4)$ sono i risultati di una eventuale applicazione del lemma di Lagrange dimostrato in precedenza. Allora applico tale lemma due volte, ottenendo:

$$\exists \Theta_1, \Theta_2 \in ]0, 1[$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}(\overline{x} + \Theta h, \overline{y} + k)h + \frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x}, \overline{y} + \Theta_2 k)k = \frac{\delta f}{\delta x}(\overline{x}, \overline{y})h + \frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x}, \overline{y})k + \rangle + o(\|(h, k)\|)$$

Ora raccolgo:

$$h[\frac{\delta f}{\delta x}(\overline{x}+\Theta h,\overline{y}+k)-\frac{\delta f}{\delta x}(\overline{x},\overline{y})]+k[\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y}+\Theta_2 k)-\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y})]=o(\|(h,k)\|)$$

Devo dunque mostrare che $h[\ldots]=o(\|(h,k)\|)\wedge k[\ldots]=o(\|(h,k)\|)$. Svolgo la seconda ma sono analoghe. Espandendo la definizione di o-piccolo devo provare:

$$\lim_{\|(h,k)\|\to 0}|\frac{\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y}+\Theta_2 k)-\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y})}{\|(h,k)\|}|=0$$

Espando la definizione di limite:

$$\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall(h,k)\neq 0\wedge\|(h,k)\|<\delta$$
$$|\frac{\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y}+\Theta_2 k)-\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y})}{\|(h,k)\|}|<\varepsilon$$

Poiche' $\frac{|h|}{\|(h,k)\|}\leq 1$ posso affermare che:

$$|\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y}+\Theta_2 k)-\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y})|\frac{|h|}{\|(h,k)\|}\leq|\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y}+\Theta_2 k)-\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y})|$$

Allora posso ridurmi a dimostrare:

$$\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall(h,k)\neq 0\wedge\|(h,k)\|<\delta$$
$$|\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y}+\Theta_2 k)-\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y})|<\varepsilon$$

Ovvero:

$$\lim_{\|(h,k)\|\to 0}\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y}+\Theta_2 k)=\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x},\overline{y})$$

Che e' ovvio per la continuita' di $f$. $\square$

## 3.27 Def: Derivata direzionale

Presa $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(\overline{x},\overline{y})\in\mathbb{R}^2$ (o $A$ aperto), $v=(v_1,v_2)$ di norma unitaria ($\|(v_1,v_2\|)=1$), definiamo *la derivata direzionale di $f$ in $(\overline{x},\overline{y})$ nella direzione $v$* come segue:

$$\frac{\delta f}{\delta v}(\overline{x},\overline{y})=\lim_{t\to 0}\frac{f(\overline{x}+tv_1,\overline{y}+tv_2)-f(\overline{x},\overline{y})}{t}$$

(quando esiste il limite finito)

> OSS: i casi particolari dove $v=e_1$ e $v=e_2$ sono quelli delle derviate parziali $\frac{\delta f}{\delta x}$ e $\frac{\delta f}{\delta y}$.

### 3.28 Teorema: del gradiente

*Enunciato*: Pesa $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ allora $\forall v \in \mathbb{R}^2, \|v\| = 1$ vale:

$$\begin{aligned}\frac{\delta f}{\delta v}(\overline{x}, \overline{y}) &= \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (v_1, v_2) \rangle \\ &= \frac{\delta f}{\delta x}(\overline{x}, \overline{y})v_1 + \frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x}, \overline{y})v_2\end{aligned}$$

*Dimostrazione*: **partiamo dalla formula di tyalor con $h = tv$ dove $v$ versore. Semplifichiamo fino ad avere solo il prod. scalare con il gradiente in un membro. Si passa ai limiti e si elimina l'o-piccolo per def**
Dobbiamo mostrare che

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x} + tv_1, \overline{y} + tv_2) - f(\overline{x}, \overline{y})}{t} =_? \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (v_1, v_2) \rangle$$

Poiche' $f$ e' differenziabile, per Taylor ho che prso un $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tale che $(\overline{x} + h_1, \overline{y} + h_2) \in A$:

$$\begin{aligned}f(\overline{x} + h_1, \overline{y} + h_2) = f(\overline{x}, \overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h_1, h_2) \rangle + o(\|(h_1, h_2)\|) \\ \text{per } \|(h_1, h_2)\| \to 0\end{aligned}$$

Pongo $h = tv$ dove $v$ e' un versore (di norma unitaria) e ottengo:

$$\begin{aligned}f(\overline{x} + tv_1, \overline{y} + tv_2) = f(\overline{x}, \overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), t(v_1, v_2) \rangle + o(\|t(v_1, v_2)\|) \\ \text{per } \|t(v_1, v_2)\| \to 0\end{aligned}$$

Per la proprieta' di omogeneita' della norma e poiche' $v$ e' un versore ($\|v\| = 1$) ho che

$$\|t(v_1, v_2)\| = \|t\|\|(v_1, v_2)\| = \|t\|$$

Per le proprieta' di omogeneita' del prodotto scalare ho che:

$$\langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), t(v_1, v_2) \rangle = t\langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (v_1, v_2) \rangle$$

Riscrivo dunque l'uguaglianza come segue:

$$\begin{aligned}f(\overline{x} + tv_1, \overline{y} + tv_2) = f(\overline{x}, \overline{y}) + t\langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (v_1, v_2) \rangle + o(\|t\|) \\ \text{per } \|t\| \to 0\end{aligned}$$

Spostiamo al primo membro $f(\overline{x}, \overline{y})$ e dividiamo entrambi per $t$:

$$\begin{aligned}\frac{f(\overline{x} + tv_1, \overline{y} + tv_2) - f(\overline{x}, \overline{y})}{t} = \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (v_1, v_2) \rangle + \frac{o(\|t\|)}{t} \\ \text{per } \|t\| \to 0\end{aligned}$$

Passiamo poi al limite:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\overline{x}+tv_1,\overline{y}+tv_2)-f(\overline{x},\overline{y})}{t}=\lim_{t\to 0}\langle\nabla f(\overline{x},\overline{y}),(v_1,v_2)\rangle+\frac{o(\|t\|)}{t}$$

e notiamo che $\lim_{t\to 0}\frac{o(\|t\|)}{t}=0$ per definizione di o-piccolo.
Ho dunque che:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\overline{x}+tv_1,\overline{y}+tv_2)-f(\overline{x},\overline{y})}{t}=\langle\nabla f(\overline{x},\overline{y}),(v_1,v_2)\rangle$$
$$\forall(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2,\|(v_1,v_2)\||=1$$

Abbiamo mostrato che la derivata nel punto $(\overline{x},\overline{y})$ di direzione $(v_1,v_2)$ e' uguale al prodotto scalare tra $\nabla f(\overline{x},\overline{y})$ e $(v_1,v_2)$. $\square$

## 3.29 Def: curva o cammino

Una *curva o cammino* in $\mathbb{R}^n$ e' una funzione del tipo $f:]a,b[\to\mathbb{R}^n$ (in fisica: la variabile si chiama $t\in]a,b[$).

## 3.30 Def: velocita' o vettore tangente di un cammino

Dato $r:I\to\mathbb{R}^n, r(t)\mapsto(r_1(t),\dots,r_n(t))$ se le funzioni $r_1,\dots,r_n$ sono derivabili in qualche $t$ allora definiamo *il vettore velocita'* di $r$ come:

$$r'(t)=(r_1'(t),\dots,r_n'(t))$$

## 3.31 Def: derviata lungo un cammino

*Enunciato*: Siano $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Sia $r$ *derivabile in* $t\in\mathbb{R}$ e $f$ *differenziabile* in $r(t)$. Allora:

$$\begin{aligned}(f\circ r)'(t)&=\langle\nabla f(r(t)),r'(t)\rangle\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta f}{\delta x_j}(r(t))r_j'(t)\end{aligned}$$

*Dimostrazione*: **riscriviamo df/dt con il limite incrementale, poi applico il teorema della differenziabilita' al numeratore del limite. Ottengo una somma di tre addendi, che analizzo separatamente nel limite**
Proviamo il teorema in $n=2$ per semplicita' di notazione.
Per ipotesi abbiamo $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, dove $r$ e' derivabile in $t$ e $f$ e' differenziabile in $r(t)$. Dobbiamo trovare $\frac{\delta f}{\delta t}(r(t))$ e possiamo farlo tramite il limite incrementale:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(r(t+h))-f(r(t))}{h}=_?\langle\nabla f(r(t)),r'(t)\rangle$$

Lavoriamo sul numertore del limite notando che si puo' usare il teorema della differenziabilita':

$$f(r(t+h)) - f(r(t)) = \langle \nabla f(r(t)), [r(t+h) - r(t)] \rangle + o(\|r(t+h) - r(t)\|)$$

Usiamo poi la formula di Taylor, poiche' $r$ e' derivabile. Vale percio': $r(t+h) - r(t) = r'(t)h + o(h)$. Possiamo dunque riscrivere come:

$$\begin{aligned} f(r(t+h)) - f(r(t)) &= \langle \nabla f(r(t)), [r'(t)h + o(h)] \rangle + o(\|r'(t)h + o(h)\|) \\ &= \langle \nabla f(r(t)), r'(t)h \rangle + \langle \nabla f(r(t)), o(h) \rangle + o(\|r'(t)h + o(h)\|) \\ &= (1) + (2) + (3) \end{aligned}$$

Ora analizzo i limiti $\lim_{h \to 0} \frac{(n)}{h}$ (il limite originale, separando il numeratore):

1. $$\lim_{h \to 0} \frac{h \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle}{h} = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$

2. $$\lim_{h \to 0} \frac{\langle \nabla f(r(t)), o(h) \rangle}{h} = (\dots) \cdot \frac{o(h)}{h} = 0$$

3. $$\lim_{h \to 0} \frac{o(\|r'(t)h + o(h)\|)}{t} = \frac{o(h)}{h} = 0$$

Abbiamo mostrato che il limite restituisce esattamente quello che ci aspettavamo, ovvero $\langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$. $\square$

### 3.32 Def: matrice Jacobiana

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ (o $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto), $f : \overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(\overline{x}), \dots, f_q(\overline{x}))$. Suppongo che ciascuna delle funzioni (scalari) $f_1, \dots, f_q$ sia differenziabile in $\mathbb{R}^n$. Definisco allora la *matrice Jacobiana* come:

$$J_f(\overline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(\overline{x}) & \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(\overline{x}) & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(\overline{x}) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}(\overline{x}) & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(\overline{x}) & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n}(\overline{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_q}{\delta x_1}(\overline{x}) & \frac{\delta f_q}{\delta x_2}(\overline{x}) & \dots & \frac{\delta f_q}{\delta x_n}(\overline{x}) \end{bmatrix} \in M_{q \times n}(\mathbb{R})$$

> OSS(1) le righe corrispondo ai gradienti di $f_1, \dots, f_n$. OSS(2): le colonne corrispondono alle derivate del vettore $f(x)$ rispetto alle variabili.

## 3.33 Teorema: di Fermat

*Enunciato*: Presa $f : A \to \mathbb{R}$ dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ punto di massimo o minimo, $f$ differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y})$, si ha che $\nabla f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{0}$.

*Dimostrazione*: **definisco $h(x) = f(x, \overline{y})$, con $(\overline{x}, \overline{y})$ minimio, derivo con il limite e vedo che e' uguale alla derivata di $f$ tenendo $\overline{y}$ fisso poi sfrutto l'ipotesi che il punto e' di minimo e ho che la derivata di $f$ in $(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ qed**
Sia $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ di minimo locale. Consideriamo $h(x) = f(x, \overline{y})$ definita per $x$ vicino a $\overline{x}$. Noto che $h$ ha un punto di minimo in $\overline{x}$ poiche' chiama a sua volta $f$ che ha questa proprieta'. Se ora calcoliamo la derivata:

$$h'(x) = lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, \overline{y}) - f(x, \overline{y})}{h} = \frac{\delta f}{\delta x}(x, \overline{y}) \forall x \in \mathbb{R}$$

e poiche' $\overline{x}$ e' di minimo per $h$ vale $h'(\overline{x}) = 0$ e per quanto provato prima, vale anche $\frac{\delta f}{\delta x}(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ $(H_1)$.
Posso svolgere una dimostrazione analoga per $y$ tenendo fissa la coordinata $\overline{x}$, dalla quale otterrei $\frac{\delta f}{\delta y}(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ $(H_2)$. Combinando $H_1$ e $H_2$ ottengo dunque $(f_x(\overline{x}, \overline{y}), f_y(\overline{x}, \overline{y})) = (0, 0)$. □

## 3.34 Def: punto di sella

Presa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^n$, $f$ differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y})$ e valga $\nabla f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{0}$. Si dice che $(\overline{x}, \overline{y})$ e' punto di *sella* se $\forall \delta > 0 . \exists P_1 = (\overline{x}^+, \overline{y}^+), P_2 = (\overline{x}^-, \overline{y}^-) \in B((\overline{x}, \overline{y}), \delta)$ tali che $f(\overline{x}^-, \overline{y}^-) < f(\overline{x}, \overline{y}) < f(\overline{x}^+, \overline{y}^+)$.

> NOTA: intuitivamente e' un punto in cui non si puo' dire se sia di massimo o di minimo poiche' cresce rispetto ad un asse e decresce rispetto ad un altro.
> Per questo motivo possiamo individuare due punti in una palla vicina a $(\overline{x}, \overline{y})$ con questa proprieta'.

## 3.35 Def: derivata seconda

Presa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile ovunque, e $\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si considerano le loro derivate seconde:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y, \delta x} = \frac{\delta^2 f}{\delta x, \delta y}, \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}, \quad \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

> OSS: Il teorema di Schwarz ci garantira' che le derivate parziali rispetto a $x$ e a $y$ sono identiche indipendentemente dall'ordine in cui esse vengono derivate.

## 3.36 Def: matrice Hessiana

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$. Preso $\overline{x} \in A$ tale che esistano tutte le derivate parziali per $k, j \in \{1, \dots, n\}$ della forma $\frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_j}(\overline{x})$. Introduciamo allora *la matrice Hessiana di $f$ nel punto $\overline{x}$* $H_f(\overline{x}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che:

$$(H_f(\overline{x}))_{j,k} = \frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_k}$$

## 3.37 Def: funzione di classe $C^2$

Si dice che $f : A \to \mathbb{R}$ e' *di classe $C^2$* su $A$ se tutte le derivate parziali di ordine $\leq 2$ sono continue $\forall j, k \in \{1, \dots, n\}$, ovvero se:

$$\frac{\delta f}{\delta x_j} \text{ e } \frac{\delta f}{\delta x_j \delta x_k} \text{ sono continue } \forall j, k \in \{1, \dots, n\}$$

## 3.38 Teorema: di Schwarz

*Enunciato*: Preso $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$ possiamo dire che $\forall \overline{x} \in A, \forall j, k \in \{1, \dots, n\}$ vale

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_k} = \frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_j}$$

*Dimostrazione*: **Costruisco le funzioni:**$g(x, y) = \frac{f(x,y)-f(x,\overline{y})}{y-\overline{y}}$, $h(x, y) = \frac{f(x,y)-f(\overline{x},y)}{x-\overline{x}}$ **e l'ugualianza:** $\frac{g(x,y)-g(\overline{x},y)}{x-\overline{x}} = \frac{h(x,y)-h(x,\overline{y})}{y-\overline{y}}$**. Applico due volte su ogni funzione il teorema di Lagrange in intervalli di** $]\overline{x}, x[$ **e** $]\overline{y}, y[$ **ottenendo quattro ugualianze che posso sostituire nella uguaglianza originale. A questo punto vedo che quando** $(x, y) \to (\overline{x}, \overline{y})$ **ho la tesi.**
Fissato un generico $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ si ricorda la tesi da mostrare:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\overline{x}, \overline{y})$$

Prendiamo un $\varepsilon > 0$ e un $(x, y) \in B(\overline{x}, \varepsilon)$ tale che $x \neq \overline{x} \wedge y \neq \overline{y}$. Possiamo allora definire le due funzioni:

$$g(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, \overline{y})}{y - \overline{y}}, \quad h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(\overline{x}, y)}{x - \overline{x}}$$

Si nota che vale l'ugualianza ($H_1$):

$$\frac{g(x, y) - g(\overline{x}, y)}{x - \overline{x}} = \frac{h(x, y) - h(x, \overline{y})}{y - \overline{y}}$$

Applichiamo poi il teorema di Lagrange su $g$ in $]\overline{x}, x[$ e abbiamo:

$$\begin{aligned}\exists \varepsilon_1 \in ]\overline{x}, x[. \quad \frac{g(x,y) - g(\overline{x}, y)}{x - \overline{x}} &= \frac{\delta g}{\delta x}(\varepsilon_1, y) \\ &= \frac{\delta_x f(\varepsilon_1, y) - \delta_x f(\varepsilon_1, \overline{y})}{y - \overline{y}}\end{aligned}$$

Applichiamo poi il teorema di Lagrange su $h$ in $]\overline{y}, y[$ e abbiamo:

$$\begin{aligned}\exists \varepsilon_2 \in ]\overline{y}, y[. \quad \frac{h(x,y) - h(x, \overline{y})}{y - \overline{y}} &= \frac{\delta h}{\delta y}(x, \varepsilon_2) \\ &= \frac{\delta_y f(x, \varepsilon_2) - \delta_y f(\overline{x}, \varepsilon_2)}{x - \overline{x}}\end{aligned}$$

Di nuovo per il teorema di Lagrange su $\frac{\delta g}{\delta x}$ in $]\overline{y}, y[$:

$$\exists \varepsilon_3 \in ]\overline{y}, y[. \quad \frac{\delta_x f(\varepsilon_1, y) - \delta_x f(\varepsilon_1, \overline{y})}{y - \overline{y}} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$$

Di nuovo per il teorema di Lagrange su $\frac{\delta h}{\delta y}$ in $]\overline{x}, x[$:

$$\exists \varepsilon_4 \in ]\overline{x}, x[. \quad \frac{\delta_y f(x, \varepsilon_2) - \delta_y f(\overline{x}, \varepsilon_2)}{x - \overline{x}} = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\varepsilon_4, \varepsilon_2)$$

Sostituendo ora le ugualianze nell'ipotesi iniziale ($H_1$) si ha che:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\varepsilon_4, \varepsilon_2)$$

Facendo tendere $(x, y) \to (\overline{x}, \overline{y})$ si ha che $(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \to (\overline{x}, \overline{y})$ e $(\varepsilon_4, \varepsilon_2) \to (\overline{x}, \overline{y})$ a causa degli intervalli a cui appartengono, e si ha dunque:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\overline{x}, \overline{y})$$

$\square$

## 3.39 Def: forma quadratica

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica ($A = A^T$), allora la forma quadratica associata ad $A$ e' data da:

$$\begin{aligned}&q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &q_A : (h) \mapsto \langle Ah, h \rangle \forall h \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Presa $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, $q_A$ forma quadratica associata ad $A$, si puo' dire che:

### 3.39.1 Def: forma quadratica positiva

$A$ viene detta *definita positiva* se vale:

$$\langle Ah, h\rangle > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$

### 3.39.2 Def: forma quadratica negativa

$A$ viene detta *definita negativa* se vale:

$$\langle Ah, h\rangle < 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$

### 3.39.3 Def: forma quadratica indefinita

$A$ viene detta *definita indefinita* se vale: $\exists h^+, h^- \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Ah^-, h^-\rangle < 0 < \langle Ah^+, h^+\rangle$$

### 3.39.4 Def: forme semidefinite

$A$ viene detta *semidefinita positiva* se vale:

$$\langle Ah, h\rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

$A$ viene detta *semidefinita negativa* se vale:

$$\langle Ah, h\rangle \leq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

## 3.40 Teorema: classificazione delle forme quadratiche

*Enunciato*: Se $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e' simmetrica, allora scrivo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora:

1. $q_A$ **e' positiva** sse $\begin{cases} a > 0 \\ det(A) > 0 \end{cases}$
2. $q_A$ **e' negativa** sse $\begin{cases} a < 0 \\ det(A) > 0 \end{cases}$
3. $q_A$ **e' indefinita** sse $\begin{cases} det(A) < 0 \end{cases}$
4. $q_A$ **e' semidefinita** sse $\begin{cases} det(A) = 0 \end{cases}$

*Dimostrazione*: **caso 1: $\Rightarrow$ espandiamo la forma quadratica e facciamo vedere che poiche' e' $> 0$ ha il $\Delta < 0$ dal quale segue esattamente cio che vogliamo. $\Leftarrow$ espandiamo $q_A$ e distinguiamo tra i casi $h_2 = 0 \vee h_1 \neq 0$, nel primo si conclude semplicemente sostituendo, nell'altro raccoglie $h_2^2$ e risolve la disequazione in $\frac{h_1}{h_2}$ e si mostra che il $\Delta < 0$ sse $det(A) > 0$ come da ipotesi**
Dimostriamo il caso (1) gli altri sono analoghi:

- $\Rightarrow$: per ipotesi sappiamo che $q_A$ e' positiva, ovvero:

$$q_A(h) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0,0)$$

  Scelgo $h = (1, 0)$ e ho dunque $a > 0$ (1).
  Invece ponendo $h = (h_1, 1)$ ho $ah_1^2 + 2bh_1 + c > 0 \quad \forall h_1 \in \mathbb{R}$. Affinche' cio' valga $forall h_1$ vogliamo che l'equazione di secondo grado associata abbia $\Delta < 0$, ovvero $4b^2 - 4ac < 0$ e dunque $ac - b^2 > 0$ che possiamo vedere anche come $det(A) > 0$ (2). □

- $\Leftarrow$: per ipotesi sappiamo che $det(A) > 0$ e che $a > 0$, dobbiamo provare che $q_A$ e' positiva, ovvero che:

$$q_A(h) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0,0)$$

  Procedo per casi:

  - se $h_2 = 0$ allora ho $ah_1^2 > 0 \quad \forall h_1 \neq 0$ che e' vero per l'iptesi $a > 0$.
  - se $h_2 \neq 0$ allora devo provare $ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \quad \forall h_1 \neq 0$. Raccolgo $h_2$ (posso poiche' $h_2 \neq 0$) e mostro:

$$h_2^2(a(\frac{h_1}{h_2})^2 + \frac{2bh_1}{h_2} + c) > 0$$

    Dobbiamo dunque mostrare che:

$$a(\frac{h_1}{h_2})^2 + 2b(\frac{h_1}{h_2}) + c > 0 \quad \forall h_1 \neq 0$$

    che vale sse $\Delta < 0$, ovvero:

$$\begin{aligned} 4b^2 - 4ac &< 0 \\ -4(ac - b^2) &< 0 \\ -4det(A) &< 0 \end{aligned}$$

    E poiche' $det(A) > 0$ per ipotesi abbiamo mostrato quanto volevamo.

□

## 3.41 Def: Formula di Taylor di grado secondo

Sia $f$ di classe $C^2$ su $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Allora per ogni $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ vale la formula:

$$T_2(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\overline{x})h, h \rangle + o(\|h\|^2)$$
$$\forall h . \overline{x} + h \in A,\ o(\|h\|^2) \text{ con } h \to \overline{0}$$

*Dimostrazione*: **scrivo $g(t) = f(\overline{x} + th)$ dove $h$ versore e applico Taylor in una variabile su $g$. Notero' che i membri di primo e secondo grado**

**combaciano, in quanto sono entrambi derivate di una funzione lungo una curva**
Vogliamo mostrare che avendo $f$ classe $C^2$ in $A$, $\overline{x} \in A$, $h \in \mathbb{R}^n$ e $\|h\| = 1$ (riscriviamo il vecchio $h$ come $th$ in modo da avere il versore $h$ che indica la direzione e $t$ il valore del modulo) vale:

$$T_2(\overline{x} + th) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), th \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\overline{x}) th, th \rangle + o(\|th\|^2)$$
$$\forall h . \overline{x} + h \in A, \, o(\|th\|^2) \text{ con } t \to 0$$

Scrivo dunque $g(t) = f(\overline{x} + th)$ definita in $t \in I(0, \varepsilon)$.
Poiche' $f$ e' $C^2$ lo e' anche $g$ nelle variabili $t \approx 0$. Allora dal primo semestre posso scrivere la formulad i Taylor al secondo grado per $g$ in 0:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2!} g''(0)t^2 + o(t^2)$$

Analizzo le parti che compongono la formula di Taylor in una variabile per $g$:

1. Noto che $g(0) = f(\overline{x})$

2. Noto che $g'(t)$ sarebbe una derivata lungo una curva, quindi la scrivo come:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \langle \nabla f(\overline{x} + th), \frac{\delta}{\delta t}(\overline{x} + th) \rangle \\ &= \langle \nabla f(\overline{x} + th), h \rangle \end{aligned}$$

   E dunque il secondo membro di Taylor in una variabile $g'(0)t$ diventa:

$$\begin{aligned} g'(0)t &= \langle \nabla f(\overline{x} + 0h), h \rangle t \\ &= \langle \nabla f(\overline{x}), th \rangle \end{aligned}$$

3. Sviluppo infine il secondo membro $g''(t)$ appoggiandomi sul $g'(t)$ calcolato prima:
   (si noti che si puo' derivare ulteriormente in quanto $\nabla f$ e' di classe $C^1$ per le ipotesi)

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{\delta}{\delta t} \sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j} f(\overline{x} + th) h_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\frac{\delta}{\delta t} \delta_{x_j} f(\overline{x} + th)) h_j \end{aligned}$$

In quanto stiamo ancora facendo una derivata lungo una curva possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n}(\langle \nabla(\delta_{x_j} f)(\overline{x}+th), h\rangle)h_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k}\delta_{x_j} f(\overline{x}+th)h_k)h_j \\
&= \sum_{j=1,k=1}^{n} \delta_{x_k}\delta_{x_j} f(\overline{x}+th)h_k h_j
\end{aligned}
$$

Ora espandiamo il membro $\frac{1}{2}g''(0)t^2$ di Taylor in una variabile:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}g''(0)t^2 &= \frac{1}{2}\sum_{j=1,k=1}^{n} \delta_{x_k}\delta_{x_j} f(\overline{x}+0h)h_k h_j\, t^2 \\
&= \frac{1}{2}\langle H_f(\overline{x})h, h\rangle t^2 \\
&= \frac{1}{2}\langle H_f(\overline{x})th, th\rangle
\end{aligned}
$$

4. Notiamo che $o(\|th\|^2) = o(\|t\|^2 \cdot \|h\|^2)$ e poiche' $\|h\| = 1$ per definizione, possiamo riscriverlo come $o(\|t\|^2)$.

Abbiamo dunque provato pezzo per pezzo che le due formule sono equivalenti.

□

## 3.42 Teorema: sulle forme quadratiche positive ($\exists m > 0$)

*Enunciato*: Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica. Suppongo $q_A$ definita positiva. Allora esiste $m > 0$ tale che: $q_A(h) \geq m\|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$.

*Dimostrazione*: **idea**
Dimostro in $n = 2$. Dobbiamo provare che:

$$\exists m > 0. \quad \langle Ah, h\rangle \geq m\|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^2$$

Ho due casi:

1. se $h = \overline{0}$ devo mostrare che: $\exists m > 0.0 \geq 0$, ovvio.

2. quando $h \neq \overline{0}$ devo provare che esiste $m > 0$ tale che:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|h\|^2}\langle Ah, h\rangle \geq m \quad \forall h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\
&\langle A\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\rangle \geq m
\end{aligned}
$$

Osservo che $\frac{h}{||h||}$ e' un versore, dunque:

$$\{\frac{h}{||h||} \mid h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\} = \{(cos\Theta, sin\Theta) \mid \Theta \in [0, 2\pi]\}$$

Devo dunque dimostrare che:

$$\langle A \begin{pmatrix} cos\Theta \\ sin\Theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cos\Theta \\ sin\Theta \end{pmatrix} \rangle \geq m \quad \forall\Theta \in [0, 2\pi]$$

Poniamo $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(\Theta) = \langle A \begin{pmatrix} cos\Theta \\ sin\Theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cos\Theta \\ sin\Theta \end{pmatrix} \rangle$, ovvero $f(\Theta) = a\cos^2\Theta + 2b\cos\Theta\sin\Theta + c\sin^2\Theta$.
Poiche' $q_A$ e' definita positiva sappiamo che $f(\Theta) > 0 \quad \forall\Theta \in [0, 2\pi]$.
Essendo $f$ continua e $[0, 2\pi]$ chiuso e limitato per Weierstrass ho che:

$$\exists\overline{\Theta} \in [0, 2\pi]. \quad f(\overline{\Theta}) \leq f(\Theta) \quad \forall\Theta \in [0, 2\pi]$$
$$m = f(\overline{\Theta}) \quad \text{scelgo } m \text{ proprio come quel minimo}$$

Dunque ho che:

$$m \leq \langle A \begin{pmatrix} cos\Theta \\ sin\Theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cos\Theta \\ sin\Theta \end{pmatrix} \rangle \quad \forall\Theta \in [0, 2\pi]$$

Sostituisco $x - \overline{x}$ con $h$ per semplicita' di notazione: E so che $m > 0$ poiche' $q_A$ e' positiva per ipotesi. □

## 3.43 Teorema: classificazione dei punti critici

Questo teorema offre una **condizione sufficiente**($\Rightarrow$) del second'ordine per determinare massimi/minimi/selle.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, sia $F : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$. Sia $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ punto critico di $f$, allora

1. se $H_f(\overline{x}, \overline{y})$ **e' positiva** allora $(\overline{x}, \overline{y})$ e' un punto di minimo (locale).
2. se $H_f(\overline{x}, \overline{y})$ **e' negativa** allora $(\overline{x}, \overline{y})$ e' un punto di massimo (locale).
3. se $H_f(\overline{x}, \overline{y})$ **e' indefinita** allora $(\overline{x}, \overline{y})$ e' un punto di sella.

OSS: **sono condizioni sufficienti**, quindi $(\overline{x}, \overline{y})$ minimo $\not\Rightarrow H_f(\overline{x}, \overline{y})$ positiva

*Dimostrazione*: **idea**
Dimostriamo in $n = 2$ solo il caso 1.
Sia $\overline{x} \in A$ un punto critico con $H_f(\overline{x}) > 0$. Voglio mostrare che $\overline{x}$ sia un punto di minimo, ovvero:

$$\exists\delta > 0. \quad f(x) \geq f(\overline{x}) \quad \forall x \in B(\overline{x}, \delta)$$
$$f(x) - f(\overline{x}) \geq 0$$

So che vale Taylor di secondo grado nel punto:

$$T_2(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(\overline{x})h, h\rangle + o(\|h\|^2)$$
$$h \to \overline{0}$$

Notiamo che $\langle \nabla f(\overline{x}), h\rangle = 0$ poiche' $\nabla f(\overline{x}) = \overline{0}$ e scriviamo dunque:

$$T_2(\overline{x}+h = x) - f(\overline{x}) = \frac{1}{2}\langle H_f(\overline{x})h, h\rangle + o(\|h\|^2)$$

Lo sostituiamo nella tesi del punto di minimo e dobbiamo dunque mostrare che:

$$\exists\delta > 0. \quad \frac{1}{2}\langle H_f(\overline{x})h, h\rangle + o(\|h\|^2) \geq 0 \quad \forall h \in B(0,\delta)$$

Per concludere mostro che $\exists m > 0$ per cui (dovevmo mostrare $\geq 0$, se mostro per un numero maggiore di zero, a maggior ragione, funziona ugualmente):

$$\frac{1}{2}\langle H_f(\overline{x})h, h\rangle + o(\|h\|^2) \geq \frac{m}{4}\|h\|^2 (1) + (2) \geq \frac{m}{4}\|h\|^2$$

1. Applicando il teorema sulle forme quadratiche positive con $A = H_f(\overline{x})$ ho che ($\exists m > 0. \quad \langle Ah, h\rangle \geq m\|h\|^2$):

$$\begin{aligned} \langle H_f(\overline{x})h, h\rangle &\geq m\|h\|^2 \quad \text{e quindi anche} \\ \frac{1}{2}\langle H_f(\overline{x})h, h\rangle &\geq \frac{m}{2}\|h\|^2 \\ (1) &\geq \frac{m}{2}\|h\|^2 \end{aligned}$$

2. Devo infine mostrare che $o(\|h\|^2) > m\|h\|^2$, ovvero espandendo la definizione di di limite:

$$\forall\varepsilon > 0.\exists\delta > 0. \quad |\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2}| < \varepsilon \quad \forall h \in B(0,\delta)$$

   Scelgo $\varepsilon = \frac{m}{4}$, e ho dunque:

$$\begin{aligned} \exists\delta > 0. \quad |\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2}| &< \frac{m}{4} \\ -\frac{m}{4}\|h\|^2 < o(\|h\|^2) &< \frac{m}{4}\|h\|^2 \quad \text{se } \|h\| < \delta \end{aligned}$$

Dunque se $\|h\| < \delta$($\delta$ e' a nostro piacimento quindi lo sara') ho che:

$$(1) + (2) \geq \frac{m}{2}\|h\|^2 - \frac{m}{4}\|h\|^2 = \frac{m}{4}\|h\|^2$$

□

### 3.44 Prop: condizione necessaria al secondo ordine

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, sia $F : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$. Sia $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ punto di minimo(massimo) di $f$, allora

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{0} \\ H_f(\overline{x}, \overline{y}) \text{ e' } \textbf{semidefinita} \text{ positiva(negativa)} \end{cases}$$

> OSS: e' importante specificare che l'$H_f$ e' **semidefinita** in quanto potrebbe avere $det(H_f) = 0$ ma essere comunque un punto di massimo/minimo.

*Dimostrazione*: **provo con $\overline{x}$ minimo. Costruisco come in Taylor la funzione $g(t) = f(\overline{x} + tv)$ che ha minimo anch'essa in $t = 0$. Ne segue che $g'(0) = 0, g''(0) > 0$ che per come fatto vedere in Taylor equivale a cio' che vogliamo.**
Sia $\overline{x}$ punto di minimo per $f$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|v\| = 1$. Considero $g(t) = f(\overline{x} + tv)$ definita per $t \in I(0, \varepsilon)$.
Poiche' $f$ ha minimo locale in $\overline{x}$, $g$ avra' minimo locale in $t \approx 0$.
Dunque $g'(0) = 0 \quad (1)$ e sopratutto $g''(0) \geq 0 \quad (2)$ il che implica (come visto per Taylor):

$$\begin{cases} \langle \nabla f(\overline{x}), v \rangle = 0 & (1) \\ \langle \frac{1}{2} H_f(\overline{x}) v, v \rangle \geq 0 & (2) \end{cases} \forall v \in \mathbb{R}^n . \|v\| = 1$$

Da cui segue:

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{x}) = 0 \\ H_f(\overline{x}) \geq 0 \end{cases}$$

$\square$

### 3.45 Def: funzione convessa

Presa $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ derivabile. $f$ e' convessa se $\forall \overline{x}, x \in ]a, b[$ vale

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x})$$

> OSS: si noti che in $\overline{x}$ il polinomio di Taylor in una variabile di grado uno vale esattamente $T_1(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x})$.
> La definizoine ci dice dunque che una funzione si dice convessa se maggiore o uguale di ogni sua possibile retta tangente.

### 3.46 Teorema: caratterizzazione funzioni convesse-derivabili

*Enunciato*: Sia $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ derivabile, allora $f$ e' convessa sse $f'$ e' crescente in $]a, b[$ $(x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f')\, x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2))$.

*Dimostrazione*: **Per $\Rightarrow$ uso l'ipotesi di convessita' mettendo $\overline{x} = x_1, x = x_2$ e poi scambiando per ottenere due ipotesi che (invertendo i segni) mi danno una disequazione che altero rimuovendo un numero $> 0$ e qed. Per $\Leftarrow$ separo in casi in base a $\overline{x} > x$ o opposto, e uso lagrange in entrambi con intervallo appropriato.**

1. **Caso** $\Rightarrow$: Per ipotesi so che $f$ e' convessa e derivabile nel suo dominio, dunque devo vedere se e' crescente, ovvero presi $x_1, x_2 \in ]a, b[$ tali che $x_1 < x_2$ mostrare $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Per l'iptesi di convessita' ho che:

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) \qquad \forall x, \overline{x} \in ]a, b[$$

pongo $\overline{x} = x_1, x = x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) \tag{$H_1$}$$

pongo $\overline{x} = x_2, x = x_1$

$$f(x_1) - f(x_2) \geq f'(x_2)(x_1 - x_2) \tag{$H_2$}$$

cambiando i segni a una e unendo

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_1) - f(x_2) \leq f'(x_2)(x_2 - x_1)$$

Ho dunque che $f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f'(x_2)(x_2 - x_1)$ e poiche' $(x_2 - x_1) > 0$ giungo a $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. □

2. **Caso** $\Leftarrow$: Per ipotesi $f$ e' derivabile in $]a, b[$ e crescente. Devo mostrare che $f$ e' convessa, ovvero:

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x})$$

Ho due casi: $\overline{x} < x$ o $x < \overline{x}$. Il caso $\overline{x} = x$ e' ovvio.

   - ipotesi: $\overline{x} < x$. uso lagrange su $[\overline{x}, x]$ per cui $\exists c \in ]a, b[$ tale che $f(x) - f(\overline{x}) = f'(x)(x - \overline{x})$.
   - ipotesi: $x < \overline{x}$. uso lagrange su $[x, \overline{x}]$ per cui $\exists c \in ]a, b[$ tale che $f(\overline{x}) - f(x) = f'(x)(\overline{x} - x)$, ovvero (cambio i segni) $f(x) - f(\overline{x}) = f'(x)(x - \overline{x})$.

□

## 3.47 Teorema: caratterizzazione di funzioni convesse derivabili due volte

*Enunciato*: Se $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ e' derivabile due volte, allora

$$f \text{ e' convessa} \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$$

*Dimostrazione*: **usare il teorema per la caratterizzazione su funzioni derivabili, e poi che la derivata e' crescente se la derivata seconda e'**

$\geq 0$.
Per il teorema di caratterizzazione delle funzioni convesse-derivabili, $f$ e' convessa sse $f'$ e' crescenete. Sappiamo poi che $f'$ e' crescente sse $f''(x) \geq 0$ in $]a, b[$, ovvio per ipotesi. $\square$

## 3.48 Teorema: Taylor secondo ordine con resto secondo Lagrange in $n = 1$

*Enunciato*: Presa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$, allora

$$\forall \overline{x}, h. \overline{x} + h \in [a, b], \exists \Theta \in ]0, 1[$$
$$f(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + \frac{1}{2} f''(\overline{x} + \Theta h)h^2$$

> OSS: anche Lagrange $f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x}+\Theta h)h$ e' una formula di Taylor senza l'o-piccolo

*Dimostrazione*: **idea**
Devo mostrare che $f : C^2$ su $]a_0, b_0[$, preso $[a, b] \subseteq ]a_0, b_0[$, $\exists c \in ]a, b[$ tale che:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + f''(c)\frac{(b - a)^2}{2}$$

Cerco $k \in \mathbb{R}$ tale che:

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b - a) - k\frac{(b - a)^2}{2} = 0 \qquad (H_1)$$

Voglio mostrare $k = f''(c)$ per un opportuno $c \in ]a, b[$.
Definisco $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) \mapsto f(b) - f(x) - f'(x)(b - x) - k\frac{(b-x)^2}{2}$ dove ho sostituito $a = x$ nella formula precedente.
Allora ho che $h(b) = f(b) - f(b) - f'(b)0 - 0 = 0$ e $h(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b - a) - k\frac{(b-a)^2}{2}$ che sappiamo valere 0 per $H_1$. Visto che $h(a) = h(b)$ posso applicare Rolle:

$$\exists c \in ]a, b[. \quad h'(c) = 0$$

Derivando $h$ e inserendola in quanto trovato si ottiene:

$$\begin{aligned}\exists c \in ]a, b[. \quad -f'(c) - f''(c)(b - c) + f'(c) + k(b - c) &= 0 \\ -f''(c)(b - c) + k(b - c) &= 0 \\ \exists c \in ]a, b[. \quad (b - c)(k - f''(c)) &= 0\end{aligned}$$

Poiche' $c > b$ l'unica possibilita' e' che $-f''(c) - k = 0$ ovvero $f''(c) = k$. Abbiamo dunque trovato il $k$ opportuno. $\square$

## 3.49 Teorema: Taylor secondo ordine con resto secondo Lagrange in $n > 1$

*Enunciato*: Sia $f : A \to B$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia $f$ di classe $C^2$ (dunque $f, \delta f, \delta^2 f$ continue), allora:

$$\forall \overline{x}, h \in \mathbb{R}^n . \exists \Theta \in ]0,1[ \text{ tali che}$$
$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\overline{x} + \Theta h) h, h \rangle$$

*Dimostrazione*: **idea**
Dati $\overline{x}, \overline{x}+h \in \mathbb{R}^n$ considero $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$ tale che $h(t) \mapsto f(\overline{x}+th)$. Si ha dunque che:

$$h'(t) = \langle \nabla f(\overline{x}+th), h \rangle = \sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j} f(\overline{x}+h) h_j$$
$$h''(t) = \frac{\delta}{\delta t} \sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j} f(\overline{x}+h) h_j = \langle H_f(\overline{x}+th)h, h \rangle$$

Scrivo poi Taylor "secondo Lagrange" per la funzione $h$ di una variabile, ponendo $\overline{x} = 0, h = 1$:

$$h(1) = h(0) + h'(0)(1-0) + h''(\Theta)\frac{(1-0)^2}{2} \qquad \text{con } \Theta \in ]0,1]$$
$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\overline{x} + \Theta h) h, h \rangle$$

## 3.50 Def: segmento

Definiamo un *segmento tra* $x, y \in \mathbb{R}^n$ con la notazione:

$$[x, y] = \{x + t(y-x) | 0 \leq t \leq 1\}$$

Risulta dunque al variare di $t$:

- $t = 0 \Rightarrow x$.
- $t = 1 \Rightarrow y$.
- $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(x+y)$.

## 3.51 Def: insieme convesso

Si dice che $A$ e' convesso se $\forall x, y \in A$ risulta che $[x, y] \subseteq A$.

> Si puo' pensare ad un insieme convesso, dal quale si prendono due punti e si traccia un segmento che li collega. Se si riesce a trovare un segmento che tale che i suoi punti non appartengono tutti all'insieme scelto, allora esso non e' convesso.

## 3.52 Def: Funzioni convesse in $n > 1$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}^n$ si dice convessa su $A$ se vale per $\forall x, \overline{x} \in A$:

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle$$
$$f(x) \geq T_1(x) \text{ nel punto } \overline{x}$$

Intuitivamente: vogliamo che il $Graf(f)$ sia sopra a $z = T_1$ il piano tangente.

## 3.53 Teorema: caratterizzazione della complessita' con la matrice Hessiana

*Enunciato*: Presa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$, si puo' dire che $f$ *e' convessa* sse $H_f(x)$ e' semidefinita positiva $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

*Dimostrazione*: **idea**

- caso $\Rightarrow$: ipotesi: $f$ convessa, dobbiamo dimostrare che $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n . H_f(\overline{x}) \geq 0$ (semidefinita positiva). Fisso $\overline{x}$ e uso Taylor "secondo Lagrange" in $\overline{x}$. Ho dunque che $\forall h \in \mathbb{R}^n . \exists \Theta \in ]0, 1]$ tale che

$$f(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\overline{x} + \Theta h) h, h \rangle \quad (H_1)$$

  Dalla definizione di $f$ convessa ho $f(\overline{x} + h) \geq f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h \rangle$ $(H_2)$.
  Unendo $H_1$ e $H_2$ ho che $\langle H_f(\overline{x} + \Theta h) h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$.
  Fisso $v \in \mathbb{R}^n \neq \overline{0}$ e mostriamo che $\langle H_f(\overline{x} + \Theta v) v, v \rangle \geq 0$. Faccio cio' costruendo la successione $h_k = \frac{1}{k} v . k \in \mathbb{N}$.
  Noto che $h_k \to_{n \to \infty} 0$. Sostituisco $h_k$ a $v$ e proviamo:

$$\langle H_f(\overline{x} + \Theta h_k) \frac{1}{k} v, \frac{1}{k} v \rangle \geq 0$$
$$(\frac{1}{k})^2 \langle H_f(\overline{x} + \Theta h_k) v, v \rangle \geq 0 \quad \text{noto } h_k \to_{n \to \infty} 0$$
$$\langle H_f(\overline{x}) v, v \rangle \geq 0$$

□

- caso $\Leftarrow$: ipotesi: $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n . H_f(\overline{x}) \geq 0$, devo mostrare che $f$ e' convessa, ovvero

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle.$$

Poiche' $f$ di classe $C^2$ posso scrivere Taylor di secondo ordine con resto secondo Lagrange:

$$\exists \Theta \in ]0,1] \quad f(x) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x)(x - \overline{x}), (x - \overline{x}) \rangle$$

Poiche' $H_f$ e' semidefinita positiva si ha che

$$\frac{1}{2} \langle H_f(x)(x - \overline{x}), (x - \overline{x}) \rangle \geq 0$$

per cui la funzione riscritta secondo Taylor e' sempre maggiore o uguale di

$$f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle$$

□

## 3.54 Def: insiemi $x, y$-semplici

Sia $[a, b]$ un intervallo e siano $h_1, h_2$ due funzioni $[a, b] \to \mathbb{R}$ con la proprieta' $h_1(x) \leq h_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$.
L'insieme individuato viene detto *y-semplice* e scritto come segue:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b] \wedge h_1(x) \geq y \geq h_2(x)\}$$

Sia $[c, d]$ un intervallo e siano $g_1, g_2$ due funzioni $[c, d] \to \mathbb{R}$ con la proprieta' $g_1(y) \leq g_2(y) \quad \forall y \in [c, d]$.
L'insieme individuato viene detto *x-semplice* e scritto come segue:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [c, d] \wedge g_1(y) \geq x \geq g_2(y)\}$$

## 3.55 Prop: formula di riduzione per integrali doppi

Preso un insieme $A$ del tipo $y$-semplice e una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ continua, si ha che:

$$\int_A f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \int_{h_1}^{h_2} f(x, y)\, dy\, dx$$

Preso un insieme $B$ del tipo $x$-semplice e una funzione $u : A \to \mathbb{R}$ continua, si ha che:

$$\int_B u(x, y)\, dxdy = \int_c^d \int_{g_1}^{g_2} u(x, y)\, dx\, dy$$

# 4 Domande secondo parziale

1. Enunciare il **teorema fondamentale del calcolo integrale**.

2. Cosa significa che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e' differenziabile nel punto $(1, 2)$?
   - Esistono le derivate parziali $\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}$.
   - Vale la formula di Taylor: $f(x, y) = f(1, 2) + \langle \nabla f(1, 2), (x-1, y-2\rangle + o(\|(x-1, y-2)\|)$ con $(x, y) \to (1, 2)$.

3. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ scrivere cosa significa che $f = f(x_1, x_2)$ e' derivabile nel punto $\overline{x} = (1, 2)$ rispetto alla direzione $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
   Il seguente limite converge:
   $$\lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{x} + tv) - f(\overline{x})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1 + \frac{t\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{t\sqrt{2}}{2}) - f(1, 2)}{t}$$

4. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale per la funzione $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$.
   Ipotesi: $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, sia $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$.
   Teorema: $G$ e' derivabile, $G'(x) = g(x) \forall x \in [0, 1]$.

5. Enunciare il teorema della media integrale per la funzione $f : [2, 8] \to \mathbb{R}$.

   Ipotesi: $f : [2, 8] \to \mathbb{R}$ continua nel dominio.
   Teorema: $\exists c \in [2, 8] \quad f(c) = \frac{1}{8-2} \int_2^8 f(x)\, dx$

6. Data la funzione $f(x, y) = \ln(1 + \sqrt{x + y^2})$ scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $f$ nel punto $(9, -4, f(9, -4))$ (a). Individuare poi la direzione di massima crescita nel sottostante punto $(9, -4)$ (b). Stabilire poi il valore della derivata parziale in tale direzione (c).

   (a) Il piano tangente e' dato dal polinomio di Taylor ponendo $(\overline{x}, \overline{y})$ uguali al punto dato. Si ha dunque:
   $$\nabla f(x, y) = (\frac{1}{1 + \sqrt{x + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + y^2}}, \frac{1}{1 + \sqrt{x + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + y^2}} \cdot 2y)$$
   $$z = T_1(x, y) = f(\overline{x}, \overline{y}) - \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (x - \overline{x}, y - \overline{y})\rangle$$
   $$z = T_1(x, y) = \ln(6) - \langle (\frac{1}{60}, \frac{-2}{15}), (x - 9, y + 4)\rangle$$
   $$z = T_1(x, y) = \ln(6) - \frac{1}{60}(x - 9) - \frac{2}{15}(y + 4)$$

(b) La direzione massima (che deve essere un versore, e va dunque reso di norma unitaria) e' data dal calcolo del gradiente nel punto dato:

$$\begin{aligned} v_{max} &= \nabla f(9,-4) = \frac{1}{60}(1,-8) \\ \|v_{max}\| &= \sqrt{1^2+(-8)^2} = \sqrt{65} \\ \hat{v}_{max} &= \frac{v_{max}}{\|v_{max}\|} = (\frac{1}{\sqrt{65}}, \frac{-8}{\sqrt{65}}) \end{aligned}$$

(c) La derivata parziale in tale direzione puo' essere calcolata tramite il prodotto scalare tra il gradiente nel punto e il versore direzione:

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta \hat{v}_{max}}(9,-4) &= \langle \frac{1}{60}(1,-8), \frac{1}{\sqrt{65}}(1,-8) \rangle \\ \frac{\delta f}{\delta \hat{v}_{max}}(9,-4) &= \frac{1}{60\sqrt{65}}(1^2+(-8)^2) \\ \frac{\delta f}{\delta \hat{v}_{max}}(9,-4) &= \frac{65}{60\sqrt{65}} = \frac{13}{12\sqrt{65}} \end{aligned}$$

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione in due variabili che soddisfa $f(x,y) = f(y,x) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Usando le definizioni pertinenti verificare che vale $\frac{\delta f}{\delta x}(a,b) = \frac{\delta f}{\delta y}(b,a) \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Applico la definizione di derivata parziale a entrambi i membri dell'equazione:

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(b,a+t)-f(b,a)}{t} = \frac{\delta f}{\delta y}(b,a) \\ \lim_{t\to 0} \frac{f(b,a+t)-f(b,a)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(b,a+t)-f(b,a)}{t} \end{aligned}$$

□

8. Calcolare la derivata della funzione $f(x,y) = x+3y$ lungo la curva $r(t) = (\cos t, \sin t)$ in due modi: scrivendo la funzione composta e derivandola direttamente (a), poi usando il teorema visto in classe (b).

(a)

$$\begin{aligned} (f\circ r)(t) &= f(r(t)) = \cos t + 3\sin t \\ (f\circ r)'(t) &= -\sin t + 3\cos t \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (f\circ r)'(t) &= \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle \\ r'(t) &= (r_1'(t), r_2'(t)) = (-\sin t, \cos t) \\ \nabla f(t) &= (1,3) \\ (f\circ r)'(t) &= \langle (1,3), (-\sin t, \cos t) \rangle \\ &= -\sin t + 3\cos t \end{aligned}$$

9. Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f : (x,y) \mapsto x^2 - xy^2 + y^2 - 3$ trovare i/il vettori/e $v \in \mathbb{R}^2$ di norma unitaria per cui $\frac{\delta f}{\delta v}(2,-2) = -3$:

   Ho due condizioni: (1) $v$ di norma unitaria, deve dunque valere $\|v\| = 1$, (2) $\frac{\delta f}{\delta v}(2,-2) = -3$. Le metto a sistema, scrivendo $v = (x,y)$:

   $$\nabla f(x,y) = (2x - y^2, -2xy + 2y)$$

   $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \langle \nabla f(2,-2), (x,y) \rangle = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \langle (0,4), (x,y) \rangle \quad = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

   $$\begin{cases} y = -\frac{3}{4} \\ x^2 + \frac{9}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{7}{16} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

   Abbiamo trovato i vettori $(\pm\frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{3}{4})$, ora bisogna renderli versori (di norma unitaria):

   $$\|(\pm\frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{3}{4})\| = \sqrt{\frac{7}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{16}{16}} = 1$$

   Notiamo che sono gia' di norma unitaria, e abbiamo dunque gia' trovato i versori di nostro interesse.

10. Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f : (x,y) \mapsto x^2 - xy^2 + y^2 - 3$ srivere il polinomio di Taylor del secondo ordine con punto iniziale in$(2,-2)$.

    Calcolo le parti necessarie per comporre $\nabla f$ e $H_f$ che servono per calcolare il polinomio di Taylor di secondo ordine.

    $$f_x(x,y) = 2x - y^2 \qquad f_y(x,y) = -2xy + 2y$$
    $$f_{xx}(x,y) = 2 \qquad f_{yy}(x,y) = -2x + 2$$

    Applico poi la formula del polinomio di Taylor di secondo grado sostituendo $(\overline{x}, \overline{y}) = (2,-2)$:

    $$T_2(x,y) = f(2,-2) + \langle \nabla f(2,-2), (x-2, y+2) \rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(2,-2)(x-2,y+2), (x-2,y+2) \rangle$$

    $$T_2(x,y) = -3 + \langle (0,4), (x-2,y+2) \rangle + \frac{1}{2}\langle \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+2 \end{pmatrix}, (x-2,y+2) \rangle$$

    $$T_2(x,y) = -3 + 4(y+2)\rangle + \frac{1}{2}\langle (2(x-2) + 4(y+2), 4(x-2) + 2(y+2)), (x-2,y+2) \rangle$$

    $$T_2(x,y) = -3 + 4(y+2)\rangle + \frac{1}{2}\langle (2x + 4y + 4, 4x + 2y - 4), (x-2,y+2) \rangle$$

    ...