Линейным отображением векторного пространства L_K над полем K в векторное пространство (линейным оператором из L_K в K) над тем же полем K называется отображение

$f : L_K \to M_K,$

удовлетворяющее *условию линейности*

$f(x + y) = f(x) + f(y),$

$f(\alpha x) = \alpha f(x)$

для всех $x, y \in L_K$ и $\alpha \in K$

Если определить операции сложения и умножения на скаляр из основного поля K как

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in L_K$
- $(kf)(x) = kf(x) \quad \forall x \in L_K,\ \forall k \in K$

Множество всех линейных отображений из L_K в M_K превращается в векторное пространство, которое обычно обозначается как $\mathcal{L}(L_K, M_K)$

Если векторные пространства L_K и M_K являются линейными топологическими пространствами, то есть на них определены топологии, относительно которых операции этих пространств непрерывны, то можно определить понятие ограниченного оператора: линейный оператор называется ограниченным, если он переводит ограниченные множества в ограниченные (в частности, все непрерывные операторы ограничены). В частности, в нормированных пространствах множество ограничено, если норма любого его элемента ограничена, следовательно, в этом случае оператор называется ограниченным, если существует число N такое что $\forall x \in L_K, ||Ax||_{M_K} \leqslant N||x||_{L_K}$. Можно показать, что в случае нормированных пространств непрерывность и ограниченность операторов эквивалентны. Наименьшая из постоянных N, удовлетворяющая указанному выше условию, называется **нормой оператора**:

$||A|| = \sup\limits_{||x|| \neq 0} \frac{||A_x||}{||x||} = \sup\limits_{||x||=1} ||A_x||.$

Введение нормы операторов позволяет рассматривать пространство линейных операторов как нормированное линейное пространство (можно проверить выполнение соответствующих аксиом для введенной нормы). Если пространство M_K — банахово, то и пространство линейных операторов тоже банахово.

Оператор A^{-1} называется обратным линейному оператору A , если выполняется соотношение: $A^{-1}A = AA^{-1} = 1$

Оператор A^{-1} , обратный линейному оператору A , также является *линейным* непрерывным оператором. В случае если линейный оператор действует из банахового пространства в другое банахово пространство, то по теореме Банаха обратный оператор существует.

Унитарный оператор — оператор, область определения и область значений которого — всё пространство, сохраняющий скалярное произведение $A_x, A_y = (x, y)$, в частности, унитарный оператор сохраняет норму любого вектора $||A_x|| = \sqrt{(A_x, A_x)} = \sqrt{(x, x)} = ||x||$; оператор, обратный унитарному, совпадает с сопряжённым оператором $A^{-1} = A^*$; норма унитарного оператора равна 1; в случае вещественного поля K унитарный оператор называют *ортогональным*;