

# Вычислительный эксперимент пологих, гибких прямоугольных в плане оболочек

Иванов И.И., Петров П.П., Федоров Ф.Ф.  
*adress@email.ru*

## Введение:

### 1. Основные уравнения

Для интегрирования уравнений в частных производных используется метод конечных разностей с аппроксимацией  $O(h^2)$  как по временной, так и по пространственной координате.

Для этого область  $D = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  покрывалась прямоугольной сеткой, где  $x_i = x_{i+1} - x_i = h_x = 1/n_x$  ( $n_x$  целое) и  $h_t = t_{j+1} - t_j$ .  $h_z = 1.0/h_z$ . На сетке дифференциальные уравнения приближенно заменяются соответствующими конечно-разностными соотношениями. С целью повышения точности использовались симметричные формулы для производных. После несложных преобразований получаем

$$w_{li,j+1} = \frac{1}{1+\varepsilon_l h_t/2b_l h_l} \left[ 2w_{li,j} + \left(\frac{\varepsilon_l h_t}{2h_l} - 1\right) w_{li,j-1} + \frac{h_t^2}{b_l h_l} A_{li,j} \right],$$

$$u_{ij+1} = \frac{h_t^2}{bh} \left[ \frac{\partial E_{0l}}{\partial x} (u' + \frac{1}{2}(w')^2) + E_{0l}(u'' + w'w'') - \frac{\partial E_{1l}}{\partial x} w'' - E_{1l}w''' \right]_{ij} + 2u_{ij},$$

где

$$A_{li,j} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E_{1l}(u'_l + \frac{1}{2}(w'_l)^2) - E_{2l}w''' \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ w' E_{0l}(u'_l + \frac{1}{2}(w'_l)^2) - E_{1l}w'' \right]_{i,j}$$

Начальные условия:

$$w_{l-1,j} - 2w_{l0,j} + w_{l1,j} = 0, w_{l0,j} = 0, w_{ln-1,j} - 2w_{ln,j} + w_{ln+1,j} = 0, w_{ln,j} = 0; u_{l0,j} = u_{ln,j} = 0,$$

Граничные условия:

$$\frac{w_{li,j+1} - w_{li,j}}{h_t} = F_{li}, w_{li} = f_{li}, u_{li} = u_{l0i},$$

Установлено, что для получения результатов с необходимой степенью точности в МКР достаточно разбить интервал интегрирования  $[0,1]$  на 40 частей. [3] На каждом шаге по времени строится итерационная процедура метода переменных параметров упругости Биргера.

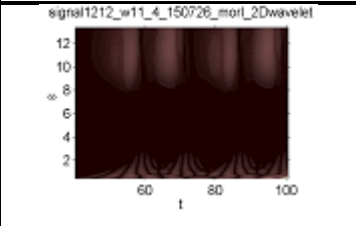
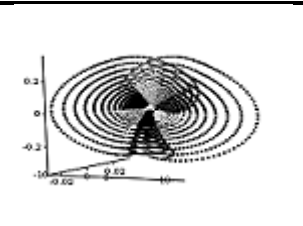
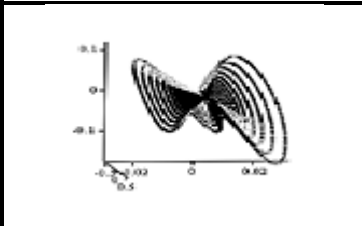
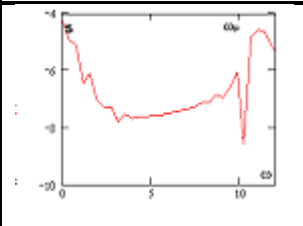
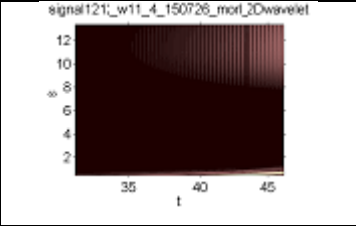
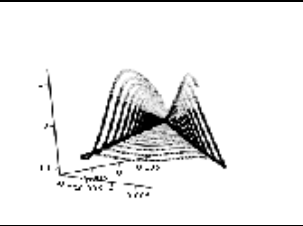
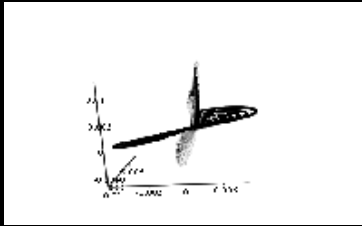
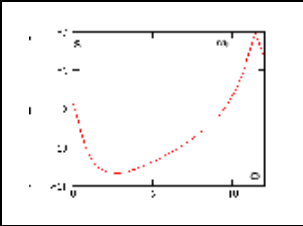
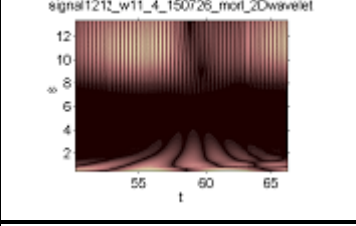
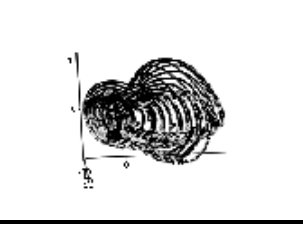
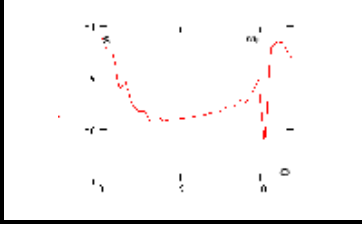
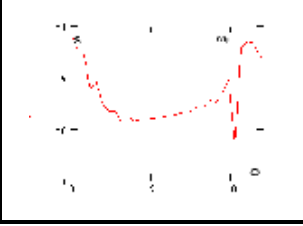
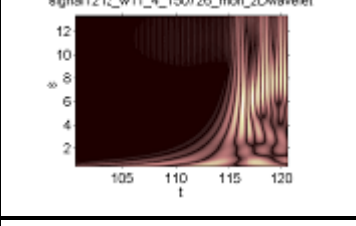
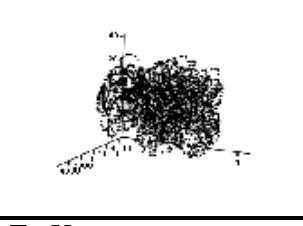
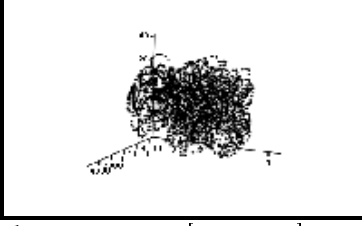
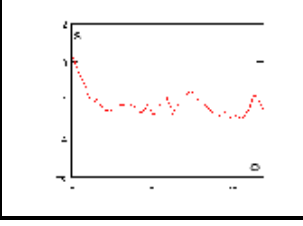
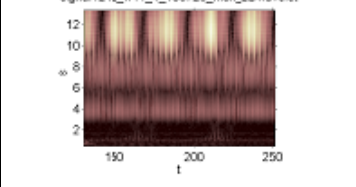
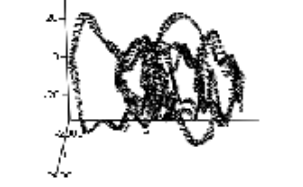
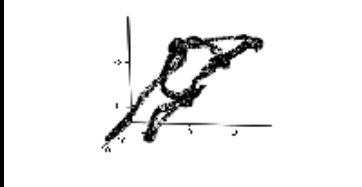
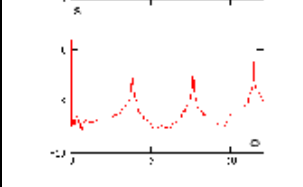
### Результаты и их анализ

Полученный в данном эксперименте сценарий очень интересен, т. к. появление независимой частоты здесь приводит не к жесткому переходу колебаний оболочки в хаотические, а к бифуркации удвоения периода. Удвоение периода колебаний происходит резко не только с увеличением амплитуды сдвиговой силы, но при ее фиксированном значении с течением времени. Дальнейший переход системы к хаосу осуществляется через перемежаемость. Т. е. при движении по амплитуде нагрузки возникает все большее количество хаотических зон, мало того их расположение на ветвях спектра имеет периодический характер. Таким образом с ростом управляющего параметра не только увеличивается количество окон хаоса, но и сокращается период их появления.

Данный сценарий можно назвать модифицированным сценарием Помо – Манневилля (модификации 2).

Таблица 7

Характеристики оболочки  $k_x = k_y = 12$ ,  $\omega_p = \omega_0 = 11.4$ ,  $s_0 = 15.726$  на различных временных интервалах.

А. Характеристики оболочки $t \in [30,109]$			
2-D Вейвлет спектр Морле	Фазовый портрет	3D Модальный портрет 3D	Спектр мощности
			
В. Характеристики оболочки $t \in [30,46]$			
2-D Вейвлет спектр Морле	Фазовый портрет	3D Модальный портрет 3D	Спектр мощности
			
С. Характеристики оболочки $t \in [50,66]$			
2-D Вейвлет спектр Морле	Фазовый портрет	3D Модальный портрет 3D	Спектр мощности
			
D. Характеристики оболочки $t \in [110,126]$			
2-D Вейвлет спектр Морле	Фазовый портрет	3D Модальный портрет 3D	Спектр мощности
			
Е. Характеристики оболочки $t \in [130,258]$			
2-D Вейвлет спектр Морле	Фазовый портрет	3D Модальный портрет 3D	Спектр мощности
			

Было выяснено, что математический аппарат быстрого преобразования Фурье не позволяет в полной мере проанализировать характер подобных колебаний и построить, как это традиционно делалось, сценарии перехода системы в хаос. По этому в работе поведение оболочек исследовалось на основании вейвлет анализа.

Трехмерный Вейвлет спектр указывает на то, что хаос наступает на низких частотах.

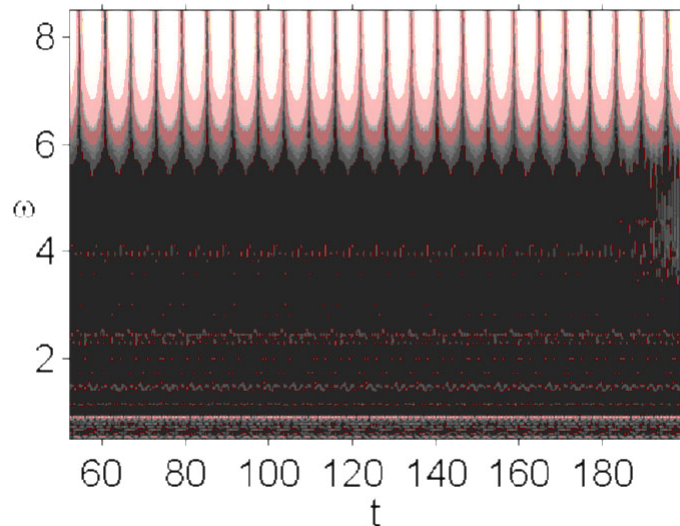


Рис 5. Вейвлет спектр на интервале  $52 \leq t \leq 200$ ,  $s_0 = 18.7$ ,  $\omega_p = 8.7$ .

По средствам вейвлет анализа было выяснено, что характер колебаний оболочки под действием внешней знакопеременной сдвиговой нагрузки, с течением времени, может меняться от гармонического и квазипериодического до хаотического при постоянных значениях амплитуды и частоты воздействия. Также могут наблюдаться кратковременные области хаотических колебаний внутри квазипериодического окна и квазипериодические зоны внутри гармонических областей. Таким образом, происходит потеря устойчивости системы не только при изменении некоторых управляющих параметров, но и при их фиксированных значениях с течением времени, т. е. наблюдается перемежаемость по времени.

В результате численных экспериментов установлено, что единого сценария перехода в хаос для рассматриваемых систем нет. В зависимости от геометрических параметров оболочки и частоты внешней знакопеременной сдвиговой нагрузки сценарии существенно меняются. Было получено несколько сценариев большая часть из которых - новые: сценарий Фейгенбаума (и посчитана константа Фейгенбаума), сценарии Помо – Манневилля трех различных модификаций, сценарии Рюеля - Такенса - Ньюхауса четырех различных модификаций и принципиально новый сценарий (ПНС).

## Литература

1. **Krysko V.A., Awrejcewicz J., Bruk V.M.** On the solution of a coupled thermo-mechanical problem for non-homogeneous Timoshenko-type shells // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. № 273. P. 409-416.
2. **Krysko V.A., Awrejcewicz J., Bruk V.M.** On existence and uniqueness of solutions to coupled thermomechanics problem of non-homogeneous isotropic plates // J. Appl. Anal. 2002. № 8(1). P. 129 – 139.
3. **Вольмир А.С.** Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963, 880 с.
4. **Awrejcewicz J., Krysko V., Narkaitis G.** Bifurcations of Thin Plate – Strip Excited Transversally and Axially. Nonlinear Dynamics, 32, p. 187 - 209, 2003.