Связанные понятия:

1. Образом подмножества $M \subset L_k$ относительно линейного отображения A называется множество $AM = \{A_x \colon x \in M\}$

2. *Ядром* линейного отображения $\{f \colon A \to B\}$ называется подмножество A , которое отображается в нуль:

   $Kerf = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$

   Ядро линейного отображения образует подпространство в линейном пространстве A.

3. *Образом* линейного отображения называется следующее подмножество B:

   $\mathrm{Im}\ \mathrm{f} = \{f(x) \in B \mid x \in A\}$

   Образ линейного отображения образует подпространство в линейном пространстве B.

4. Отображение $f \colon A \times B \to C$ прямого произведения линейных пространств A и B в линейное пространство С называется билинейным, если оно линейно по обоим своим аргументам. Отображение прямого произведения большего числа линейных пространств $f \colon A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ называется полилинейным, если оно линейно по всем своим аргументам.

5. Оператор $\widetilde{L}$ называется *линейным неоднородным* (или *аффинным*), если он имеет вид

   $\widetilde{L} = L + u$

   где L — линейный оператор, а u — вектор.

6. Пусть $A \colon L_k \to L_k$. Подпространство $M \subset L_k$ называется *инвариантным* относительно линейного отображения, если $\forall x \in M, Ax \in M$.

   Критерий инвариантности. Пусть $M \subset X$ — подпространство,такое что X разлагается в прямую сумму: $X = M \otimes N$. Тогда M инвариантно относительно линейного отображения A тогда и только тогда, когда $P_M A P_M = A P_M$, где P_M - проектор на подпространство M.

7. **Фактор-операторы**. Пусть $A\colon L_k \to L_k$ — линейный оператор и пусть M — некоторое инвариантное относительно этого оператора подпространство. Образуем фактор-пространство $L_k/^M\sim$ по подпространству M Тогда **фактор-оператором** называется оператор A^+ действующий на $L_k/^M\sim$ по правилу: $\forall x^+ \in L_k/^M\sim, A^+x^+ = [Ax]$, где $[Ax]$ — класс из фактор-пространства, содержащий Ax.

Примеры линейных однородных операторов:

- оператор дифференцирования: $L\{x(\cdot)\} = y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$;
- оператор интегрирования: $y(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$;
- оператор умножения на определённую функцию $\varphi(t)\colon y(t) = \varphi(t)\colon x(t)$;
- оператор интегрирования с заданным «весом» $\varphi(t)\colon y(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\varphi(\tau)d\tau$;
- оператор взятия значения функции f в конкретной точке $x_0 : L\{f\} = f(x_0)$;
- оператор умножения вектора на матрицу: $b = Ax$;
- оператор поворота вектора.

Примеры линейных неоднородных операторов:

- Любое аффинное проеобразование;
- $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + \varphi(t)$;
- $y(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau + \varphi(t)$;
- $y(t) = \varphi_1(t)x(t) + \varphi_2(t)$;

где $\varphi(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ — вполне определённые функции, а x(t) — преобразуемая оператором функция.