Задание 2

Линейным отображением векторного пространства L_K над полем K в векторное пространство M_K (**линейным оператором** из L_K в M_K) над тем же полем называется отображение $\mathrm{f}\colon L_\mathrm{K} \to M_\mathrm{K}$,

удовлетворяющее *условию линейности*

$\mathrm{f(x+y)=f(x)+f(y)}$,

$\mathrm{f(\alpha x)=\alpha f(x)}$.

для всех $x, y \in L_K$ и $\alpha \in K$.

Если определить операции сложения и умножения на скаляр из основного поля K как

- $\mathrm{(f+g)(x)=f(x)+g(x)}\forall \in L_\mathrm{K}$.
- $\mathrm{(kf)(x)=kf(x)}\forall \mathrm{x} \in L_\mathrm{K}, \forall \mathrm{k} \in K$

множество всех линейных отображений из L_K в M_K превращается в векторное пространство, которое обычно обозначается как $\zeta(L_\mathrm{K}, M_\mathrm{K})$

Если векторные пространства L_K и M_K являются линейными топологическими пространствами, то есть на них определены топологии, относительно которых операции этих пространств непрерывны, то можно определить понятие ограниченного оператора: линейный оператор называется ограниченным, если он переводит ограниченные множества в ограниченные (в частности, все непрерывные операторы ограничены). В частности, в нормированных пространствах множество ограничено, если норма любого его элемента ограничена, следовательно, в этом случае оператор называется ограниченным, если существует число N такое что $\forall \mathrm{x} \in L_\mathrm{K}, \|\mathrm{Ax}\|_{M_\mathrm{K}} \le \mathrm{N}\|\mathrm{x}\|_{L_\mathrm{K}}$. Можно показать, что в случае нормированных пространств непрерывность и ограниченность операторов эквивалентны. Наименьшая из постоянных N, удовлетворяющая указанному выше условию, называется **нормой оператора**:

$\|\mathrm{A}\| = \sup\limits_{\|\mathrm{x}\|\neq 0} \frac{\|\mathrm{A_x}\|}{\|\mathrm{x}\|} = \sup\limits_{\|\mathrm{x}\|=1} \|\mathrm{A_x}\|$

Введение нормы операторов позволяет рассматривать пространство линейных операторов как нормированное линейное пространство (можно проверить выполнение соответствующих аксиом для введенной нормы). Если пространство M_K — банахово, то и пространство линейных операторов тоже банахово.

Оператор A^-1 называется обратным линейному оператору A , если выполняется соотношение:$\mathrm{A}^-1A = AA^-1 = 1$

Оператор A^-1 , обратный линейному оператору A , также является линейным непрерывным оператором. В случае если линейный оператор действует из банахового пространства в другое банахово пространство, то по теореме Банаха обратный оператор существует.

Унитарный оператор — оператор, область определения и область значений которого — всё пространство, сохраняющий скалярное произведение $(Ax, Ay) = (x, y)$, в частности, унитарный оператор сохраняет норму любого вектора $\|\mathrm{A}\| = \sqrt{\mathrm{A, A}} = \sqrt{\mathrm{x, x}} = \|\mathrm{x}\|$; оператор, обратный унитарному, совпадает с сопряжённым оператором $A^-1=A^*$; норма унитарного оператора равна 1; в случае вещественного поля K унитарный оператор называют *ортогональным*; **Задание 3**

Связанные понятия: 1. Образом подмножества $M \subset L)_K$ относительно линейного отображения A называется множество . 2. Ядром линейного отображения называется подмножество $AM = \{A_x : x \in M\}$ A, которое отображается в нуль: $\ker f = \{x \in A|f(x) = 0$

Ядро линейного отображения образует подпространство в линейном пространстве *LargeA*.

3. Образом линейного отображения f называется следующее подмножество *LargeB*: $f = \{f(x) \in B|x \in A$

Образ линейного отображения образует подпространство в линейном пространстве B . 4. Отображение $f : A \times B \to C$ прямого произведения линейных пространств A и B в линейное пространство C называется билинейным, если оно линейно по обоим своим аргументам. Отображение прямого произведения большего числа линейных пространств $f : A_1 \times ... \times A_n \in B$ называется полилинейным, если оно линейно по всем своим аргументам.

5. Оператор $\tilde{L}$ называется линейным (или), если он имеет вид $\tilde{L} = L + \upsilon$ где — L линейный оператор, а υ — вектор. 6. Пусть $A : L_K \to L_K$. Подпространство $M \subset L_K$ называется относительно линейного отображения, если $\forall x \in M, Ax \in M$

.

Критерий инвариантности. Пусть $M \subset L_K$ — подпространство,такое что X разлагается в прямую сумму: . Тогда M инвариантно относительно линейного отображения A тогда и только тогда, когда $P_M A P_M = A P_M$, где P_M - проектор на подпространство M . 7. – . Пусть $A : L_K \to L_K$ — линейный оператор и пусть M — некоторое инвариантное относительно этого оператора подпространство. Образуем фактор-пространство $L_K/\sim^M$ по подпространству M . Тогда – называется оператор A^+ действующий на $L_K/\sim^M$ по правилу: $\forall x^+ \in L_K/\sim^M, A^+x^+ = [Ax]$, где [Ax] — класс из фактор-пространства, содержащий Ax. Примеры линейных однородных операторов:

- оператор дифференцирования: $L\{x(\dot{)}\} = y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$;
- оператор интегрирования: $y(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$
- оператор умножения на определённую функцию $\varphi(t) : y(t) = \varphi(t)x(t)$;
- оператор интегрирования с заданным «весом» $\varphi(t) : y(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\varphi(\tau)$
- оператор взятия значения функции f в конкретной точке x_0: $L\{f\} = f(x_0)$
- оператор умножения вектора на матрицу: $b = Ax$;
- оператор поворота вектора.

Примеры линейных неоднородных операторов:

- Любое аффинное проеобразование;
- $\mathrm{y(t)} = \frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dt}} + \varphi(\mathrm{t})$;
- $\mathrm{y(t)} = \int\limits_0^{\mathrm{t}} \mathrm{x}(\tau)\mathrm{d}\tau + \varphi(\mathrm{t})$;
- $\mathrm{y(t)} = \varphi_1(\mathrm{t})\mathrm{x(t)} = \varphi_2(\mathrm{t})$;

где φ, φ_1, φ_2 — вполне определённые функции, а x(t)— преобразуемая оператором функция.

Задание 4

Рассмотрим систему линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Эта система состоит из линейных m уравнений относительно n неизвестных. Она может быть записана в виде следующего матричного уравнения: $Ax = b$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Матрица A — это матрица коэффициентов системы линейных уравнений, вектор-столбец x — вектор неизвестных, а вектор-столбец b — некоторый заданный вектор. Для того, чтобы система имела решение (хотя бы одно), необходимо и достаточно, чтобы вектор b был линейной комбинацией столбцов A , и тогда вектор x — это вектор, содержащий коэффициенты разложения вектора b по столбцам матрицы A .

Матрица размера $m \times 1$ называется **вектор-столбцом** и имеет специальное обозначение:

Матрица размера $1 \times n$ называется вектор-строкой и имеет специальное обозначение:

$$colon(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m)^T$$

Матрица размера $1 \times n$ называется **вектор-строкой** и имеет специальное обозначение:
$row(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$

Если необходимо дать развёрнутое представление матрицы в виде таблицы, то используют запись вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Тело кватернионов $\mathbb{H}$ может быть (изоморфно) промоделировано над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел:

$$Q = \begin{pmatrix} t & x & y & -z \\ -x & t & -z & -y \\ -y & z & t & x \\ z & y & -x & t \end{pmatrix}$$

для $q = t + ix + jy + kz \in \mathbb{H}$ матричный аналог , где $t, x, y, z \in \mathbb{R}$.

CKM-матрица, матрица Кабиббо—Кобаяши—Маскавы

$$\begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \\ |b\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \\ |b'\rangle \end{bmatrix}$$

Слева мы видим CKM-матрицу вместе с вектором сильных собственных состояний кварков, а справа имеем слабые собственные состояния кварков. ККМ-матрица описывает вероятность перехода от одного кварка q к другому кварку $q^{‘}$; . Эта вероятность пропорциональна $|V_{qq'}|^2$