Задание 3

Связанные понятия: 1. Образом подмножества $M \subset L)_K$ относительно линейного отображения A называется множество . 2. Ядром линейного отображения называется подмножество $AM = \{\mathrm{A_x} : \mathrm{x} \in \mathrm{M}\}$ A, которое отображается в нуль: $\ker \mathrm{f} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{A} | \mathrm{f(x)} = 0$

Ядро линейного отображения образует подпространство в линейном пространстве $LargeA$.

3. Образом линейного отображения f называется следующее подмножество $LargeB$: $\mathrm{f} = \{\mathrm{f(x)} \in \mathrm{B} | \mathrm{x} \in \mathrm{A}$

Образ линейного отображения образует подпространство в линейном пространстве B . 4. Отображение $\mathrm{f} : \mathrm{A} \times \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ прямого произведения линейных пространств A и B в линейное пространство C называется билинейным, если оно линейно по обоим своим аргументам. Отображение прямого произведения большего числа линейных пространств $\mathrm{f} : \mathrm{A_1} \times ... \times \mathrm{A_n} \in \mathrm{B}$ называется полилинейным, если оно линейно по всем своим аргументам.

5. Оператор $\tilde{\mathrm{L}}$ называется линейным (или), если он имеет вид $\tilde{\mathrm{L}} = \mathrm{L} + \upsilon$ где — L линейный оператор, а υ — вектор. 6. Пусть $\mathrm{A} : \mathrm{L_K} \to \mathrm{L_K}$. Подпространство $\mathrm{M} \subset \mathrm{L_K}$ называется относительно линейного отображения, если $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{M}, \mathrm{Ax} \in \mathrm{M}$

.

Критерий инвариантности. Пусть $\mathrm{M} \subset \mathrm{L_K}$ — подпространство,такое что X разлагается в прямую сумму: . Тогда M инвариантно относительно линейного отображения A тогда и только тогда, когда $\mathrm{P_M A P_M} = \mathrm{A P_M}$, где $\mathrm{P_M}$ - проектор на подпространство M . 7. — . Пусть $\mathrm{A} : \mathrm{L_K} \to \mathrm{L_K}$ — линейный оператор и пусть M — некоторое инвариантное относительно этого оператора подпространство. Образуем фактор-пространство $\mathrm{L_K}/\sim^{\mathrm{M}}$ по подпространству M . Тогда – называется оператор A^+ действующий на $\mathrm{L_K}/\sim^{\mathrm{M}}$ по правилу: $\forall \mathrm{x}^+ \in \mathrm{L_K}/\sim^{\mathrm{M}}, \mathrm{A}^+\mathrm{x}^+ = [\mathrm{Ax}]$, где [Ax] — класс из фактор-пространства, содержащий Ax. Примеры линейных однородных операторов:

- оператор дифференцирования: $\mathrm{L}\{\mathrm{x}(\dot{})\} = \mathrm{y(t)} = \frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dt}}$;
- оператор интегрирования: $\mathrm{y(t)} = \int\limits_0^{\mathrm{t}} \mathrm{x}(\tau)\mathrm{d}\tau$
- оператор умножения на определённую функцию $\varphi(\mathrm{t}) : \mathrm{y(t)} = \varphi(\mathrm{t})\mathrm{x(t)}$;
- оператор интегрирования с заданным «весом» $\varphi(\mathrm{t}) : \mathrm{y(t)} = \int\limits_0^{\mathrm{t}} \mathrm{x}(\tau)\varphi(\tau)$
- оператор взятия значения функции f в конкретной точке $\mathrm{x_0}$: $\mathrm{L}\{\mathrm{f}\} = \mathrm{f(x_0)}$
- оператор умножения вектора на матрицу: $\mathrm{b} = \mathrm{Ax}$;
- оператор поворота вектора.

Примеры линейных неоднородных операторов:

- Любое аффинное проеобразование;

- $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + \varphi(t)$;
- $y(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau + \varphi(t)$;
- $y(t) = \varphi_1(t)x(t) = \varphi_2(t)$;

где φ, φ_1, φ_2 — вполне определённые функции, а x(t)— преобразуемая оператором функция.