

Задание 2

Линейным отображением векторного пространства L_K над полем K в векторное пространство M_K (**линейным оператором** из L_K в M_K) над тем же полем называется отображение $f: L_K \rightarrow M_K$,

удовлетворяющее *условию линейности*

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

для всех $x, y \in L_K$ и $\alpha \in K$.

Если определить операции сложения и умножения на скаляр из основного поля K как

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \forall x \in L_K$.
- $(kf)(x) = kf(x) \forall x \in L_K, \forall k \in K$

множество всех линейных отображений из L_K в M_K превращается в векторное пространство, которое обычно обозначается как $\zeta(L_K, M_K)$

Если векторные пространства L_K и M_K являются линейными топологическими пространствами, то есть на них определены топологии, относительно которых операции этих пространств непрерывны, то можно определить понятие ограниченного оператора: линейный оператор называется ограниченным, если он переводит ограниченные множества в ограниченные (в частности, все непрерывные операторы ограничены). В частности, в нормированных пространствах множество ограничено, если норма любого его элемента ограничена, следовательно, в этом случае оператор называется ограниченным, если существует число N такое что $\forall x \in L_K, \|Ax\|_{M_K} \leq N\|x\|_{L_K}$. Можно показать, что в случае нормированных пространств непрерывность и ограниченность операторов эквивалентны. Наименьшая из постоянных N , удовлетворяющая указанному выше условию, называется **нормой оператора**:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Введение нормы операторов позволяет рассматривать пространство линейных операторов как нормированное линейное пространство (можно проверить выполнение соответствующих аксиом для введенной нормы). Если пространство M_K — банахово, то и пространство линейных операторов тоже банахово.

Оператор A^{-1} называется обратным линейному оператору A , если выполняется соотношение: $A^{-1}A = AA^{-1} = 1$

Оператор A^{-1} , обратный линейному оператору A , также является линейным непрерывным оператором. В случае если линейный оператор действует из банахового пространства в другое банахово пространство, то по теореме Банаха обратный оператор существует.

Унитарный оператор — оператор, область определения и область значений которого — всё пространство, сохраняющий скалярное произведение $(Ax, Ay) = (x, y)$, в частности, унитарный оператор сохраняет норму любого вектора $\|A\| = \sqrt{A, A} = \sqrt{x, x} = \|x\|$; оператор, обратный унитарному,

совпадает с сопряжённым оператором $A^{-1}=A^*$; норма унитарного оператора равна 1; в случае вещественного поля K унитарный оператор называют *ортogonalным*;