Un bel tiro al canestro

(sul moto del proiettile)

Un giocatore di basket effettua un tiro verso il canestro quando si trova a distanza 5m dalla verticale del centro del canestro imprimendo al pallone la velocità $\overrightarrow{V_0}$ inclinata rispetto al piano orizzontale di 30°. L'altezza rispetto al pavimento da cui parte il lancio è h=2,7m. Il tiro ha successo con il pallone che entra perfettamente nel cerchio del canestro. Il cerchio del canestro si trova ad altezza 3,05m dal pavimento.

Figura 1-Immagine tratta da internet

Q1-Determinare il modulo della velocità di lancio, il tempo di volo e l'altezza massima raggiunta dal pallone durante la traiettoria seguita.

Q2- Rappresentare la traiettoria sfruttando le equazioni parametriche della stessa.

Soluzione

Q1- La traiettoria seguita dal pallone (assimilato ad un punto) è un arco di parabola, dunque una curva piana. Nel piano della traiettoria assumiamo il sistema di riferimento xOy con l'asse y coincidente con la verticale per il punto di lancio, orientato verso l'alto e con origine sul pavimento di gioco. L'asse x nella direzione punto di lancio- centro del canestro; l'asse sarà giacente sul pavimento di gioco e orientato verso la verticale del canestro. Assumiamo che l'istante di lancio sia t=0s.

Con il sistema di riferimento spazio-temporale indicato il vettore velocità iniziale è

$$\overrightarrow{V_0} = V_{0x}\hat{i} + V_{0y}\,j\text{, con } V_{0x} = V_0 \cdot \cos 30° = V_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } V_{0y} = V_0 \cdot sen30° = \frac{V_0}{2} \qquad (1)$$

Le **componenti scalari del vettore velocità istantanea** del punto materiale durante il moto nell'istante t sono:

$$V_x = V_{0x}, \qquad V_y = -gt + V_{oy}\text{, con } 0 \le t \le t_{volo} \text{ (s);} \qquad (2)$$

Avendo indicato con t_{volo} l'istante in cui il pallone entra nel canestro.

Le leggi orarie della posizione del punto materiale-pallone sono

$$\begin{cases} x(t) = V_{0x}t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0y}t + h \end{cases}, \qquad (3)$$

con h=2,7m e sempre per $0 \le t \le t_{volo}$ in secondi.

Strategia risolutiva per determinare le grandezze cinematiche richieste

Utilizzando la legge oraria dell'ascissa della posizione si determina il tempo di volo in funzione del modulo V_0 della velocità di lancio e della distanza d=5m tra la verticale del punto di lancio e la verticale del centro del canestro; si sostituisce il valor trovato nella legge oraria della quota imponendo che in detto istante la quota del pallone sia y_c=3,05m ottenendo un'equazione nell'incognita V_0 dalla quale si ricava il modulo della velocità di lancio; ciò fatto si potrà determinare effettivamente il tempo di volo.

Per il calcolo dell'**altezza massima raggiunta dal pallone**, poiché il vertice della quota è raggiunto **nell'istante in cui la velocità del pallone ha solo componente orizzontale**, porremo V_y=0 e troveremo l'istante indicato t_v; determineremo la quota massima sostituendo il valore t_v nella legge oraria della quota.

Elaborazioni

$x(t) = V_{0x}t$, che diventa $d = V_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}t$, da cui $t_{volo} = \frac{2d}{\sqrt{3}V_0}$ (4)

Sostituiamo il valore del tempo di volo nella legge della quota del pallone.

$$y_c = -\frac{1}{2}g\left(\frac{2d}{\sqrt{3}V_0}\right)^2 + \frac{V_0}{2}\cdot\frac{2d}{\sqrt{3}V_0} + h; \qquad (5)$$

nell'uguaglianza la quota del cerchio del canestro è indicata con y_c.

Elaborando la (5) si ha

$y_c = -\frac{1}{2}g\cdot\frac{4d^2}{3V_0^2} + \frac{d}{\sqrt{3}} + h$, da cui

$$V_0 = \sqrt{\frac{2gd^2}{3} : \left(\frac{d}{\sqrt{3}} + h - y_c\right)}.$$

Figura 2-Immagine tratta da internet

Sostituendo i valori delle grandezze note ricaviamo

$$V_0 = \sqrt{\frac{2\cdot 9,81\cdot 25}{3} : \left(\frac{5}{\sqrt{3}} + 2,7 - 3,05\right)}\,\frac{m}{s} \approx 8,03\frac{m}{s} \qquad (6)$$

Tempo di volo: $t_{volo} = \frac{2d}{\sqrt{3}V_0} = \frac{2\cdot 5m}{\sqrt{3}\cdot 8,03ms^{-1}} \approx 0,72s$

Determinazione della quota massima

$$V_y = -gt + V_{oy} = 0, \text{ da cui } t = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{V_0}{2g} = \frac{8,03ms^{-1}}{2\cdot 9,81ms^{-2}} \approx 0,41s = t_v.$$

$$y_{max} = y(t_v) = -\frac{1}{2}gt_v^2 + \frac{V_0}{2}t_v + h = \left[-\frac{1}{2}\cdot 9.81(0,41)^2 + \frac{8,03}{2}\cdot 0,41 + 2,70\right](m) \approx 3,52m$$

Ascissa del vertice della traiettoria

$$x_V = x(t_v) = V_{0x} \cdot t_v = \frac{8,03\left(ms^{-1}\right)\cdot\sqrt{3}}{2} \cdot 0,41s \approx 2,85m$$

Q2- Traiettoria

Le leggi orarie della posizione, quella dell'ascissa e quella dell'ordinata, forniscono una rappresentazione parametrica della traiettoria, con parametro il tempo. Si possono sfruttare le equazioni parametriche suddette per ottenere agevolmente la rappresentazione della traiettoria descritta dal (centro del) pallone.

Utilizzando GeoGebra, si inserisce il comando

Curva[8.03*sqrt(3)/2*t, -9.81 (0.5) t² + 8.03 / 2 t + 2.7, t, 0, 0.72]

nella barra della formula.

La traiettoria è riportata nella figura seguente

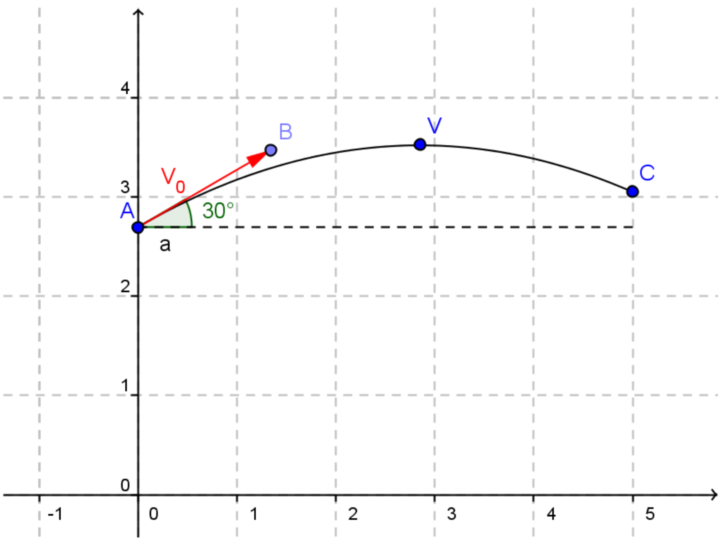

Figura3- Nella figura il punto C indica il centro del canestro e V è il vertice della traiettoria. Risulta V(2,85;3,52) in metri. In figura compare anche il vettore rappresentativo della velocità con cui è lanciato il pallone; il vettore forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse un angolo di 30°.