Resolução de Exercícios Cálculo 2

Lázaro Jośe Rodrigues Júnior

December 26, 2019

1 Lista I

1.1 Substituição Trigonométrica

$$1) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Colocando o 4 em evidência;

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4(1-(\frac{x}{2})^2)}}$$

Seja $\frac{x}{2} = \sin t$, $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t \ dt$;

$$\int \frac{2\cos t \ dt}{(2\sin t)^2\sqrt{4(1-\sin^2 t)}}$$

Como $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$;

$$\int \frac{2\cos t \ dt}{4\sin^2 t \ 2\cos t}$$

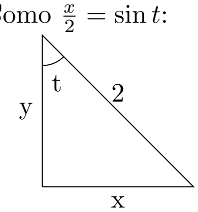
Simplificando;

$$\frac{1}{4}\int \csc^2 t \ dt$$

Integrando;

$$-\frac{1}{4}\cot t + c$$

Como $\frac{x}{2} = \sin t$:



Como precisamos encontrar a cotangente $(\frac{cateto\ adjantece}{cateto\ oposto})$, precisamos encontrar o y, e pelo teorema de pitágoras: $2^2 = x^2 + y^2$, isolando o y: $y = \sqrt{4-x^2}$.

Logo a resposta final é:

$$-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + c$$

$$2) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

Colocando o 4 em evidência;

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4((\frac{x}{2})^2+1)}}$$

Seja $\frac{x}{2} = \tan t$, $x = 2\tan t$, $dx = 2\sec^2 t \ dt$;

$$\int \frac{2\sec^2 t \ dt}{2\tan t\sqrt{4(\tan^2 t+1)}}$$

Como $\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$;

$$\int \frac{2\sec^2 t \ dt}{2\tan t \ 2\sec t}$$

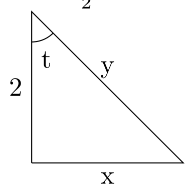
Simplificando; $\frac{1}{2}\int \frac{\sec t}{\tan t} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin t}{\cos t}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin t} =$

$$\frac{1}{2}\int \csc t$$

Integrando;

$$-\ln(\csc t + \cot t) + c$$

Como $\frac{x}{2} = \tan t$:



Como precisamos encontrar a cotangente $(\frac{cateto\ adjantece}{cateto\ oposto})$ e a cosecante $(\frac{hipotenusa}{cateto\ oposto})$, precisamos encontrar o y, e pelo teorema de Pitágoras: $y^2 = x^2 + 2^2$, isolando o y: $y = \sqrt{x^2+4}$.

Logo a resposta final é:

$$-\ln(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + \frac{2}{x}) + c$$

$$3) \int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$$

Colocando o 25 em evidência;

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{25(1-(\frac{x}{5})^2)}}$$

Seja $\frac{x}{5} = \sin t$, $x = 5\sin t$, $dx = 5\cos t\ dt$;

$$\int \frac{5\cos t\ dt}{(5\sin t)\sqrt{25(1-\sin^2 t)}}$$

Como $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$;

$$\int \frac{5\cos t\ dt}{5\sin t\ 5\cos t}$$

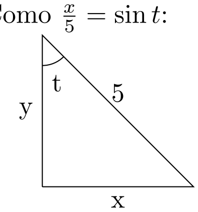
Simplificando;

$$\frac{1}{5}\int \csc t\ dt$$

Integrando;

$$-\frac{1}{5}\ln(\csc t + \cot t) + c$$

Como $\frac{x}{5} = \sin t$:



Como precisamos encontrar a cosecante $(\frac{hipotenusa}{cateto\ oposto})$ e a cotangente $(\frac{cateto\ adjantece}{cateto\ oposto})$, precisamos encontrar o y, e pelo teorema de Pitágoras: $5^2 = x^2 + y^2$, isolando o y: $y = \sqrt{25-x^2}$.

Logo a resposta final é:

$$-\frac{1}{5}\ln(\frac{5}{x} + \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}) + c$$