

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.5 Dynamisches Verhalten der Messgeräte

Das Ausgangssignal eines Messgeräts kann nicht beliebig schnell dem Eingangssignal folgen, da in dem Messgerät

- Reibungs- und Dämpfungswiderstände überwunden,
- Massen beschleunigt oder abgebremst,
- Ladungen zu- oder abgeführt,
- Energiespeicher gefüllt oder geleert

werden müssen. Ein sich zeitlich änderndes Eingangssignal $x_e(t)$ bedingt ein sich zeitlich änderndes Ausgangssignal $x_a(t)$. Dabei sind auch die Ableitungen der Zeitfunktionen von Bedeutung. So ist, um das dynamische Verhalten eines Messgeräts zu beschreiben, die Differenzialgleichung zwischen dem Eingangs- und dem Ausgangssignal aufzustellen. Die höchste Ableitung des Ausgangssignals bestimmt dann die Ordnung der Differenzialgleichung.

Quelle: Elmar Schräfer, Leonhard M. Reindl, Bernhard Zagar, Elektrische Messtechnik: Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen, Verlag: Carl Hanser Verlag GmbH, 2014, ISBN-10: 3446442081, ISBN-13: 978-3446442085

Kapitel 1.5, Seite 48

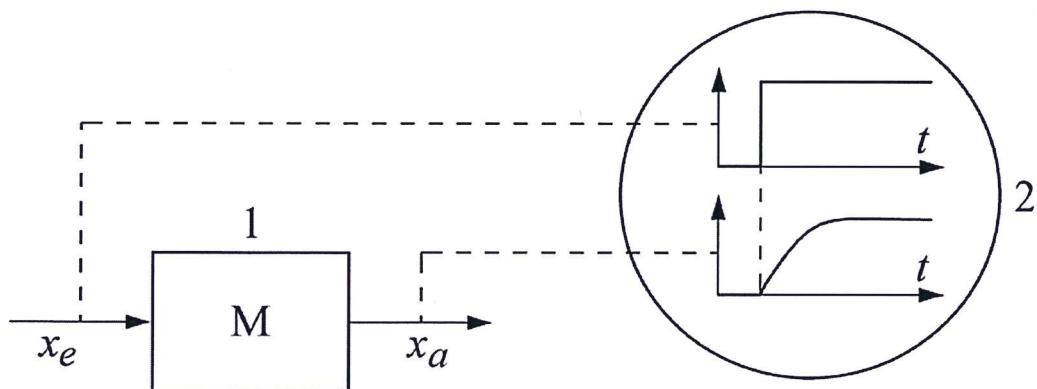
Fakultät Elektrotechnik, Medientechnik und Informatik- Vorlesung - Prof. Dr. László Juhász

75

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.5 Dynamisches Verhalten der Messgeräte



anregende Funktion	Antwortfunktion
Sinusfunktion	Sinusantwort; Amplituden- u. Phasengang; Frequenzgang
Sprungfunktion	Sprungantwort; Übergangsfunktion
Impulsfunktion	Impulsantwort; Gewichtsfunktion

Quelle: Elmar Schräfer, Leonhard M. Reindl, Bernhard Zagar, Elektrische Messtechnik: Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen, Verlag: Carl Hanser Verlag GmbH, 2014, ISBN-10: 3446442081, ISBN-13: 978-3446442085

Kapitel 1.5, Seite 48

Fakultät Elektrotechnik, Medientechnik und Informatik- Vorlesung - Prof. Dr. László Juhász

76

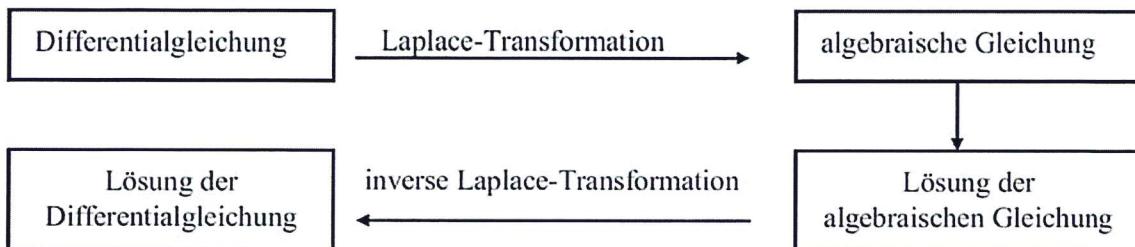
2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.5 Dynamisches Verhalten der Messgeräte

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt,$$

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} X(s) \cdot e^{st} ds.$$



Quelle: Thomas Mühl, Einführung in die elektrische Messtechnik, Verlag: Springer Vieweg; Auflage: 4., 2014, ISBN-10: 3834808997
ISBN-13: 978-3834808998

Kapitel 3.2.1, Seite 43

Tafelschrieb, Herleitung Verzögerungsglied 1. Ordnung

Fakultät Elektrotechnik, Medientechnik und Informatik- Vorlesung - Prof. Dr. László Juhász

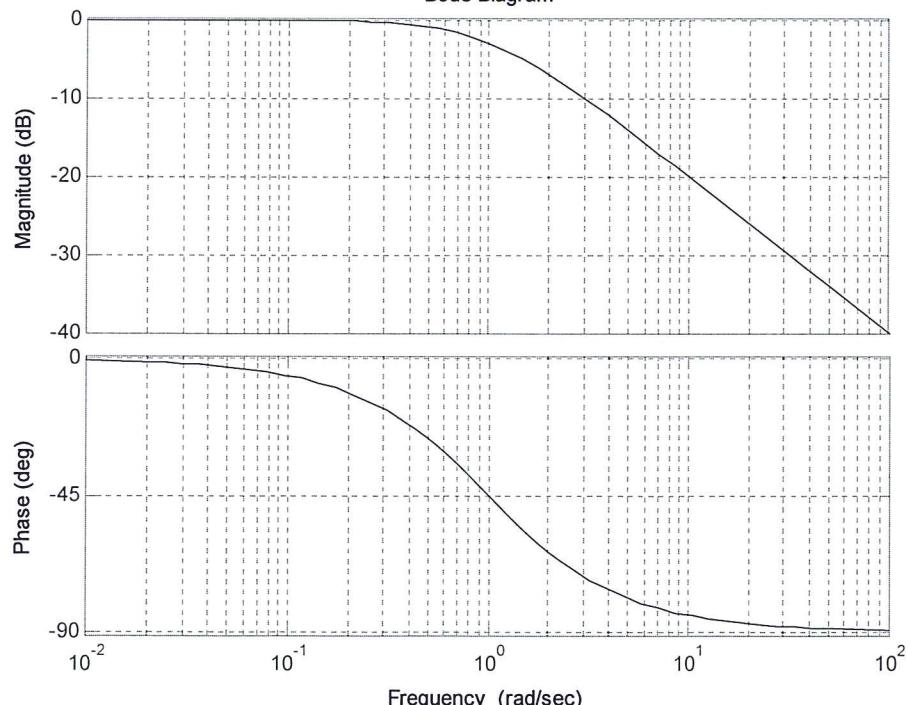
77

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.5 Dynamisches Verhalten der Messgeräte

Bode Diagram



Fakultät Elektrotechnik, Medientechnik und Informatik- Vorlesung - Prof. Dr. László Juhász

78

Verzögerungsglied 1. Ordnung

MESSTECHNIK (1)
Dynamische Brq.

$$(1) a_0 \cdot u_a + a_1 \cdot \dot{u}_a = e_0 \cdot u_e \quad / : a_0$$

u_e - Eingangssignal

u_a - Ausgangssignal

$$\dot{u}_a(t) = \frac{du_a(t)}{dt}$$

$$u_e(t) = \frac{du_e(t)}{dt}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{e_0}{a_0} = k = E \\ \frac{a_1}{a_0} = T \end{array} \right.$$

k-Übertragungsfaktor
oder als E Empfindlichkeit

Zeitkonstante [s]

einsetzen in (2) folgt (3):

$$(3) u_a + T \cdot \dot{u}_a = E \cdot u_e$$

↓ Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-st} dt \quad s \in \mathbb{C}$$

s ist eine komplexe Zahl

$$u_a + T \cdot s \cdot u_a = E \cdot u_e$$

⇒ algebraische Gleichung im
Bildbereich:

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = U_a(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} x(t)\right\} = s \cdot \mathcal{L}\{x(t)\}$$

→ Lösung nach U_a :

$$(4) \quad u_a(1 + s \cdot T) = E \cdot u_e$$

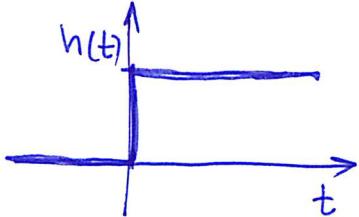
$$u_a = \frac{E \cdot u_e}{1 + sT} = E \cdot \frac{1}{1 + sT} \cdot u_e(s)$$

$$u_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ E \cdot \frac{1}{1 + sT} \cdot u_e(s) \right\} = E \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{1 + sT} \cdot u_e(s) \right\}$$

im Allgemeinen nicht immer trivial, für
einige häufig benutzte $u_e(t)$ aber leicht lösbar

a) Einschaltfunktion / Sprungantwort

$$u_e = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



$$U_e(s) = \int_0^\infty u_e(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

$$U_a(s) = E \cdot \frac{1}{1+sT} \cdot \frac{1}{s} = E \cdot \frac{1}{(s+\frac{1}{T}) \cdot s} \Rightarrow u_a(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ U_a(s) \right\}$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(1+sT) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+sT} = \frac{A \cdot (1+sT)}{(1+sT) \cdot s} + \frac{B \cdot s}{(1+sT) \cdot s}$$

$$\begin{aligned} A \cdot (1+sT) + B \cdot s &= 1 \\ A + A \cdot s \cdot T + B \cdot s &= 1, \forall s \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = 1$$

$$A \cdot T + B = 0$$

$$T + B = 0 \Rightarrow B = -T$$

$$\frac{1}{(1+sT) \cdot s} = \frac{1}{s} - \frac{T}{1+sT}$$

folgt also:

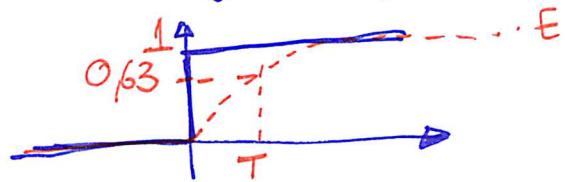
$$U_a(s) = E \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{T}{1+sT} \right)$$

$$u_a(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ U_a(s) \right\} = E \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - T \cdot E \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{1+sT} \right\} \right] =$$

$$\begin{aligned} u_a(t) &= E \cdot h(t) - T \cdot E \cdot \frac{1}{T} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+\frac{1}{T}} \right\} = -\frac{t}{T} \\ &= E \cdot \left(h(t) - e^{-\frac{t}{T}} \cdot h(t) \right) = h(t) \cdot E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \end{aligned}$$

Beispiel: Tiefpass

Schriener, Beispiel 1.6



Messtechnik

Seite (4)

b) Sinusfunktion, Fortsetzung

$$\textcircled{1} \quad f^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right\} = h(t) \cdot e^{-t/T}$$

$$\textcircled{2} \quad f^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+w_e^2}\right\} = h(t) \cdot \cos(w_e \cdot t)$$

$$\textcircled{3} \quad f^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+w_e^2}\right\} = \frac{1}{w_e} \cdot f^{-1}\left\{\frac{w_e}{s^2+w_e^2}\right\} = h(t) \cdot \frac{1}{w_e} \cdot \sin(w_e \cdot t)$$

$$u_a(t) = \left(k_0 \cdot k_1 \cdot \frac{1}{T} \cdot e^{-t/T} + k_0 \cdot k_2 \cdot \cos(w_e \cdot t) + \frac{k_0 \cdot k_3}{w_e} \cdot \sin(w_e \cdot t) \right) \cdot h(t) \quad \text{. Hf}$$

$$u_a(t) = \left(E \cdot w_e \cdot \frac{T^2}{T^2 w_e^2 + 1} \cdot \frac{1}{T} e^{-t/T} + E \cdot w_e \cdot \frac{-T}{T^2 w_e^2 + 1} \cdot \cos(w_e \cdot t) + E \cdot w_e \cdot \frac{1}{w_e} \cdot \frac{1}{T^2 w_e^2 + 1} \cdot \sin(w_e \cdot t) \right) \cdot h(t)$$

Kampf 1
① verschwindet mit der Zeit

②+③:

$$\begin{aligned} u_a(t) &= \left(e^{-t/T} + \frac{E}{T^2 w_e^2 + 1} (\sin w_e \cdot t - T \cdot w_e \cdot \cos w_e \cdot t) \right) h(t) \\ &= \left(e^{-t/T} + \frac{E \cdot T \cdot w_e}{T^2 w_e^2 + 1} \left(\frac{1}{T \cdot w_e} \cdot \sin w_e \cdot t - \cos w_e \cdot t \right) \right) \cdot h(t) \\ &= \sin \sqrt{1 + \frac{1}{T^2 w_e^2}} \cdot \sin(w_e \cdot t - \varphi) \\ \varphi &= \arctg(w_e \cdot T) \end{aligned}$$

Amplitude

$$\begin{aligned} \tilde{u}_a(t) &= \frac{E \cdot T \cdot w_e}{T^2 w_e^2 + 1} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{T^2 w_e^2}} \\ &= E \cdot \frac{1}{T^2 w_e^2 + 1} \cdot \sqrt{T^2 w_e^2 + 1} \end{aligned}$$

$$T \cdot w_e = n$$

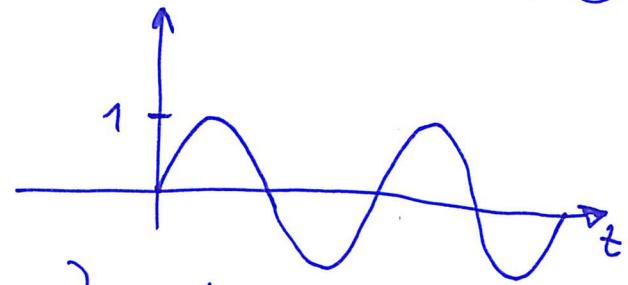
$$\begin{aligned} u_a(t) &= E \cdot \frac{1}{\sqrt{T^2 w_e^2 + 1}} \\ w_e &= \frac{1}{T} \\ w_e &\ll \frac{1}{T} \rightarrow w_e \cdot T \ll 1 \\ w_e &\gg \frac{1}{T} \rightarrow w_e \cdot T \gg 1 \end{aligned}$$

Messtechnik

Seite (5)

b) Sinusfunktion

$$u_e = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \sin(\omega_e t), & t > 0 \end{cases}$$



$$u_e(t) \rightarrow U_e(s)$$

$$U_e(s) = \mathcal{L}\{u_e(t)\} = \frac{\omega_e}{s^2 + \omega_e^2}$$

$$\begin{aligned} U_a(s) &= E \cdot \frac{1}{1+s \cdot T} \cdot \frac{\omega_e}{s^2 + \omega_e^2} \Rightarrow \text{hier wenden wir auch} \\ &= E \cdot \omega_e \cdot \left(\frac{1}{1+s \cdot T} \cdot \frac{1}{s^2 + \omega_e^2} \right) \text{Partialbruchzerlegung an} \\ \Gamma \text{ Partialbruchzerlegung} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+s \cdot T} \cdot \frac{1}{s^2 + \omega_e^2} &= \frac{A}{1+s \cdot T} + \frac{B \cdot s + C}{s^2 + \omega_e^2} \\ &= \frac{A \cdot (s^2 + \omega_e^2)}{(1+s \cdot T) \cdot (s^2 + \omega_e^2)} + \frac{(B \cdot s + C)(1+s \cdot T)}{(1+s \cdot T) \cdot (s^2 + \omega_e^2)} \end{aligned}$$

$s^2 + \omega_e^2$ hat keine reelle Wurzel!

folgt also:

$$A \cdot s^2 + A \cdot \omega_e^2 + B \cdot s + C + B \cdot s^2 \cdot T + C \cdot s \cdot T = 1 + \emptyset \cdot s + \emptyset \cdot s^2$$

$$\begin{aligned} 1: \quad A \cdot \omega_e^2 + C &= 1 \\ s: \quad B + C \cdot T &= 0 \\ s^2: \quad A + B \cdot T &= 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} A, B, C = ? \\ \dots \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \rightarrow B = -C \cdot T \\ \rightarrow A = -B \cdot T = C \cdot T^2 \\ C \cdot T^2 \cdot \omega_e^2 + C = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C = \frac{1}{T^2 \cdot \omega_e^2 + 1} \\ \downarrow B = -\frac{T}{T^2 \cdot \omega_e^2 + 1} \end{array}$$

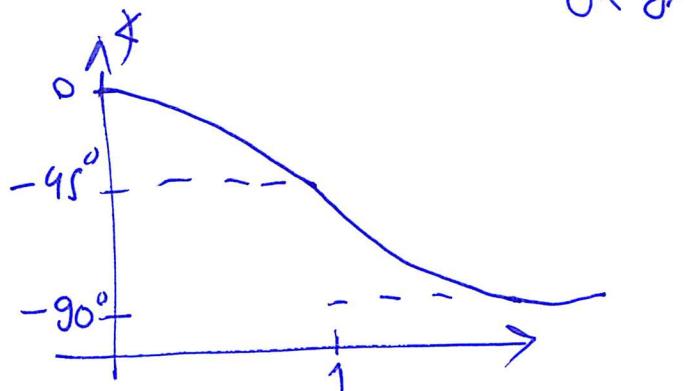
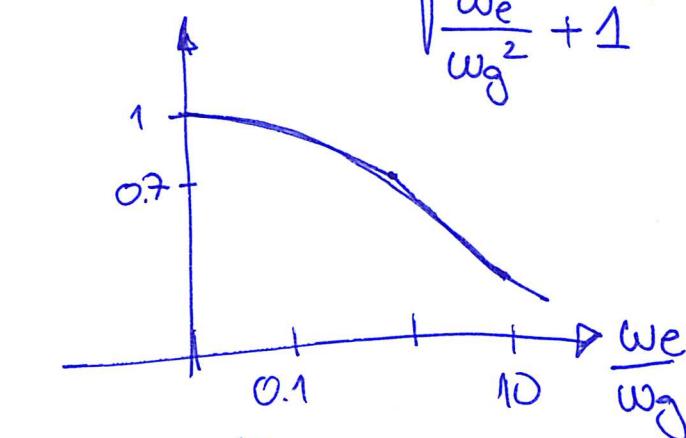
$$U_a(s) = E \cdot \omega_e \cdot \left(\frac{\frac{T^2}{T^2 \cdot \omega_e^2 + 1}}{1+s \cdot T} + \frac{-\frac{T}{T^2 \cdot \omega_e^2 + 1} + \frac{1}{T^2 \cdot \omega_e^2 + 1}}{s^2 + \omega_e^2} \right)$$

$$U_a(s) = k_0 \cdot \left(\frac{k_1}{1+s \cdot T} + \frac{k_2 \cdot s + k_3}{s^2 + \omega_e^2} \right) = k_0 \left(\frac{k_1}{1+s \cdot T} + \frac{k_2 \cdot s}{s^2 + \omega_e^2} + \frac{k_3}{s^2 + \omega_e^2} \right)$$

$$u_a(t) = \int \{U_a(s)\} = k_0 \cdot \frac{k_1}{T} \cdot \int \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right\} + k_0 \cdot k_2 \cdot \int \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega_e^2} \right\} + k_0 \cdot k_3 \cdot \int \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega_e^2} \right\}$$

Messtechnik, ferte 5

Wenn wir nun $\omega_g = \frac{1}{T}$ definieren, ist die Amplitude und die Phase: $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega_e}{\omega_g}\right)$



$$f_g = \frac{\omega_g}{2\pi}$$

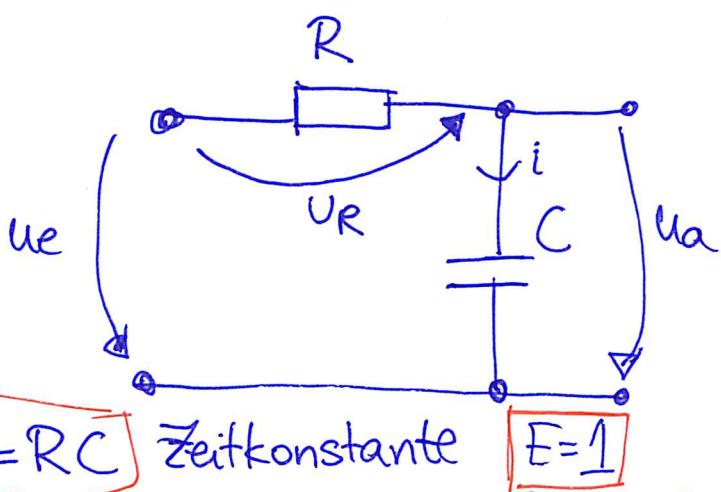
Übertragungsfunktionen $G(s)$

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} \rightarrow U_a(s) = G(s) \cdot U_e(s)$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$G=0$
ermöglicht
Amplif.
Frequenz

Beispiel: RC-Tiefpassfilter



$$U_a + U_R = U_e$$

$$i = C \cdot \frac{dU_c}{dt} = C \cdot \frac{dU_a}{dt}$$

$$U_R = R \cdot i$$

$$R \cdot C \frac{dU_a}{dt} + U_a = U_e$$

$$R \cdot C \cdot \dot{U}_a + U_a = U_e$$

$$U_a (R \cdot C \cdot s + 1) = U_e$$

$$U_a = \frac{U_e}{R \cdot C \cdot s + 1}$$

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{1}{R \cdot C \cdot s + 1}$$

Amplitude
Phase

Messtechnik, Seite 6

Übertragungsfunktion $G(s)$, $s = \sigma + j\omega$

für $\sigma = 0$, bzw. $s = j\omega$

$$\left| G(j\omega) \right| = \sqrt{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \arctg \left(\frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}} \right)$$

} → Amplitudengang
} → Phasengang

Für unser Beispiel mit der RC-Tiefpassfilter

$$G(j\omega) = \frac{1}{R \cdot C \cdot j\omega + 1} = \frac{R \cdot R \cdot j\omega + 1 - R \cdot C \cdot j\omega}{1 + R^2 C^2 \cdot \omega^2}$$

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = \frac{1}{R^2 C^2 \omega^2 + 1}$$

$$\operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = \frac{-R \cdot C \cdot \omega}{1 + R^2 C^2 \omega^2}$$

$$\left| G(j\omega) \right| = \frac{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}{1 + R^2 C^2 \omega^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \arctg \left(\frac{-R \cdot C \cdot \omega}{1} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$$

$$= \arctg \left(\frac{-R \cdot C \cdot \omega}{\cancel{1}} \right) = -\arctg(R \cdot C \cdot \omega)$$

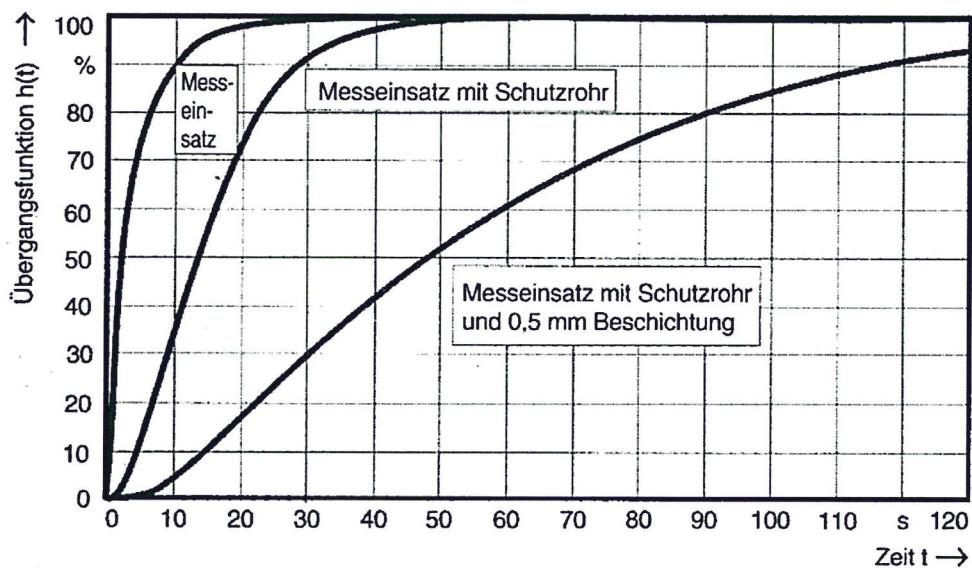
$\frac{1}{\omega_0}$

Durch die Benutzung von ÜF ist eine einfache Analyse der dynamischen Eigenschaften von Messglieder möglich

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.5 Dynamische Kenngrößen (Zeitverhalten, Beispiel)



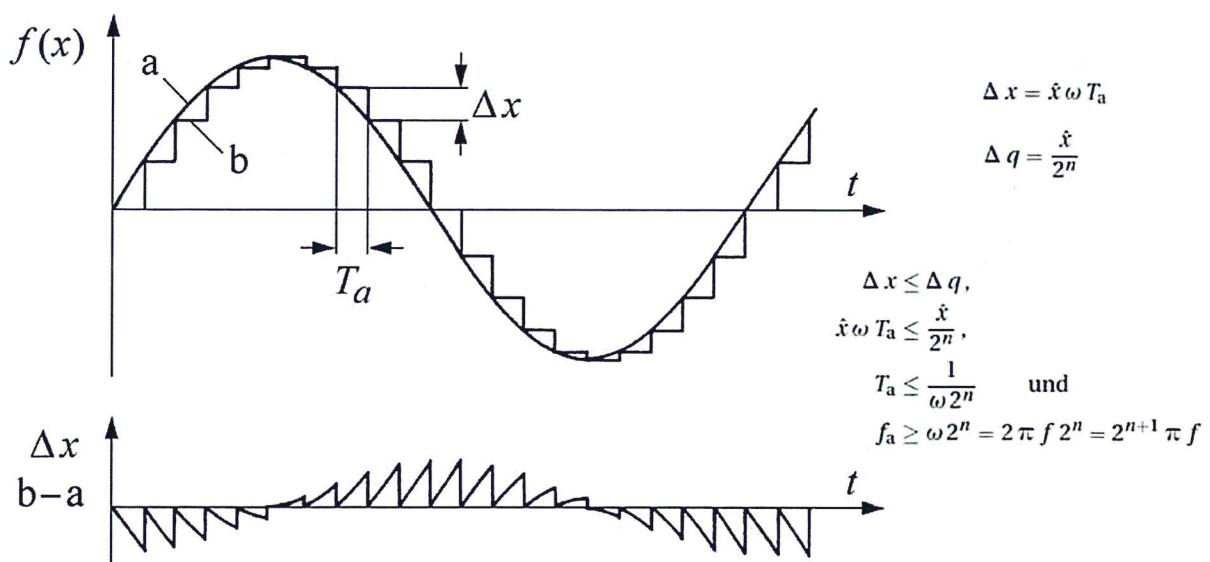
Zeitverhalten von Widerstandsthermometern

(Messbedingungen in Wasser: $v_w = 0,4 \text{ m/s} \pm 0,05 \text{ m/s}$; $\vartheta_w = 25^\circ \text{C}$)
(aus ABB: Praxis der industriellen Temperaturmessung)

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.6 Dynamische Fehlermöglichkeiten

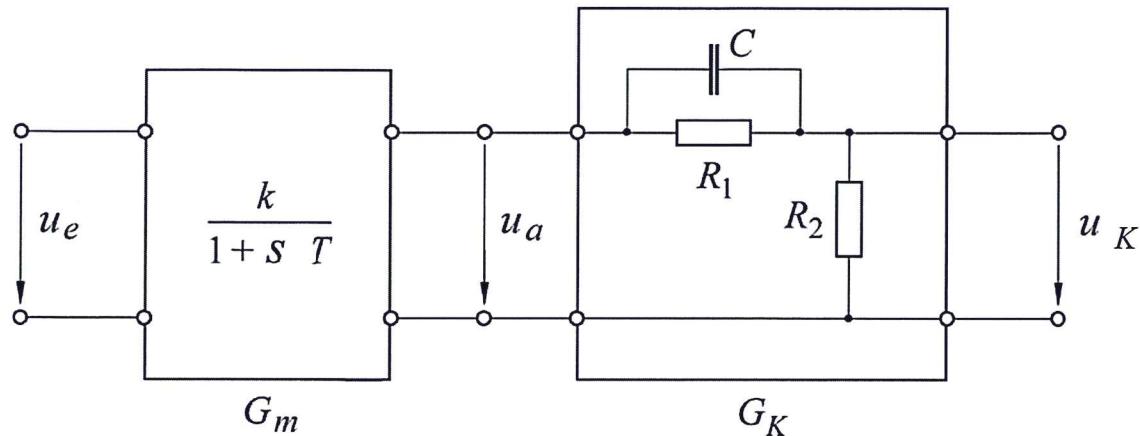


Quelle: Elmar Schräfer, Leonhard M. Reindl, Bernhard Zagar, Elektrische Messtechnik: Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen, Verlag: Carl Hanser Verlag GmbH, 2014, ISBN-10: 3446442081, ISBN-13: 978-3446442085

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.6 Korrektur des dynamischen Fehlers



Quelle: Elmar Schräfer, Leonhard M. Reindl, Bernhard Zagar, Elektrische Messtechnik: Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen, Verlag: Carl Hanser Verlag GmbH, 2014, ISBN-10: 3446442081, ISBN-13: 978-3446442085

Kapitel 1.6.2, Seite 67

Tafelschrieb, Herleitung Kompensation

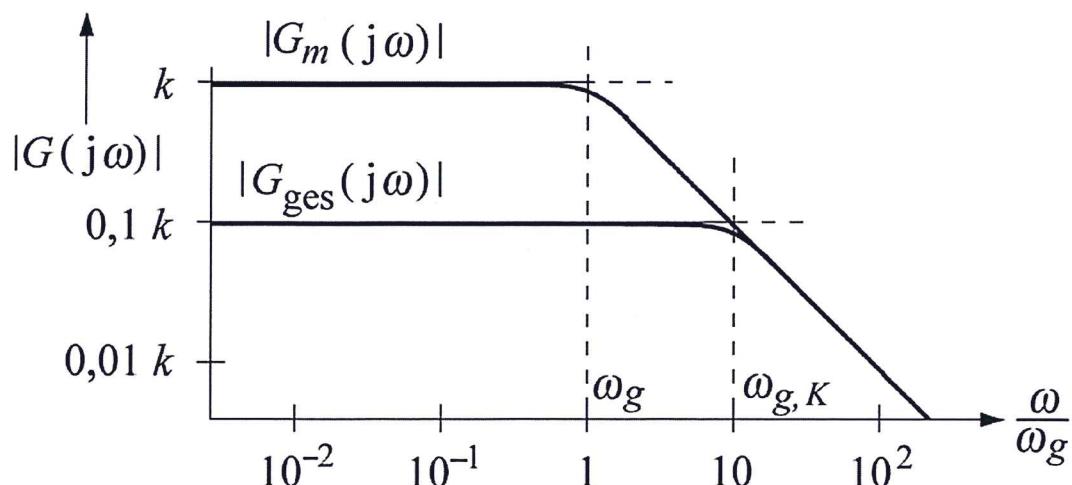
Fakultät Elektrotechnik, Medientechnik und Informatik- Vorlesung - Prof. Dr. László Juhász

81

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.6 Korrektur des dynamischen Fehlers



Quelle: Elmar Schräfer, Leonhard M. Reindl, Bernhard Zagar, Elektrische Messtechnik: Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen, Verlag: Carl Hanser Verlag GmbH, 2014, ISBN-10: 3446442081, ISBN-13: 978-3446442085

Kapitel 1.6.2, Seite 67

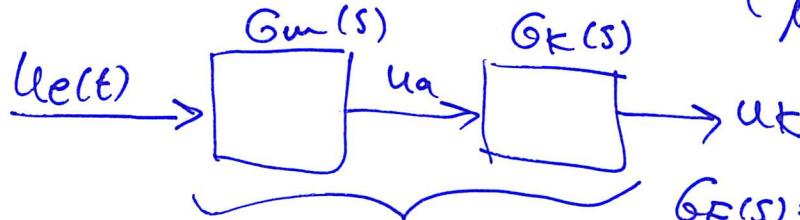
Tafelschrieb, Herleitung Kompensation

Fakultät Elektrotechnik, Medientechnik und Informatik- Vorlesung - Prof. Dr. László Juhász

82

Messtechnik, Seite 7

Korrektur dynam. Fehlers (Schröfer: 1.6.2, Mühl: Beispiel 3. f)



$$G_E(s) = G_m(s) \cdot G_k(s)$$

$$G_m(s) = \frac{k}{1+s \cdot T}$$

$$G_k(s) = \frac{R_2}{R_2 + (R_1 \parallel \frac{1}{s \cdot C})} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{s \cdot R_1 \cdot C + 1}} = \frac{R_2}{s \cdot R_1 \cdot C + 1}$$

$$R_1 \parallel \frac{1}{s \cdot C} = \frac{R_1 \cdot s \cdot C}{R_1 + \frac{1}{s \cdot C}}$$

$$G_k(s) = \frac{R_2 \cdot (s \cdot R_1 \cdot C + 1)}{s \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot C + R_1} = \frac{s \cdot R_2 R_1 C + 1}{s \cdot R_2 R_1 \cdot C + R_1}$$

$$R_1 \cdot C = T_K$$

$$G_k(s) = \frac{s \cdot R_2 \cdot T_K + 1}{s \cdot R_2 \cdot T_K + R_1} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{s \cdot R_2 \cdot T_K + 1}{\frac{s \cdot R_2 \cdot T_K + 1}{R_1}} =$$

$$= \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{s \cdot T_K + 1}{\frac{s \cdot R_2 \cdot T_K + 1}{R_1}}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = a$$

$$G_k(s) = a \cdot \frac{1 + s \cdot T_K}{1 + a \cdot s \cdot T_K}$$

$$G_E(s) = G_m(s) \cdot G_k(s) = \frac{k}{1+s \cdot T} \cdot a \cdot \frac{1 + s \cdot T_K}{1 + a \cdot s \cdot T_K}$$

für $T \neq T_K$ $T_K = T$

$$0 < a < 1$$

$$G_E(s) = \frac{k}{1+s \cdot T} \cdot a \cdot \frac{1 + s \cdot T}{1 + a \cdot s \cdot T} = \frac{a \cdot k}{1 + a \cdot s \cdot T \cdot a}$$

Messfrequenz, Seite 8)

$$\left. \begin{array}{l} \omega_{qm} = \frac{1}{T} \\ \omega_E = \frac{1}{T \cdot a} \end{array} \right\} \quad a = 0.1 \text{ Beispiel 6.10f}$$
$$\left. \begin{array}{l} \omega_E = 10 \cdot \omega_{qm} \\ k_e = \frac{1}{10} k \end{array} \right\}$$

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.6 Strukturen von Messeinrichtungen

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$E = E_1 \cdot E_2$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\Delta E_1}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta E_2}{E_2}\right)^2}$$

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

$$y = G_1(s) \cdot e$$

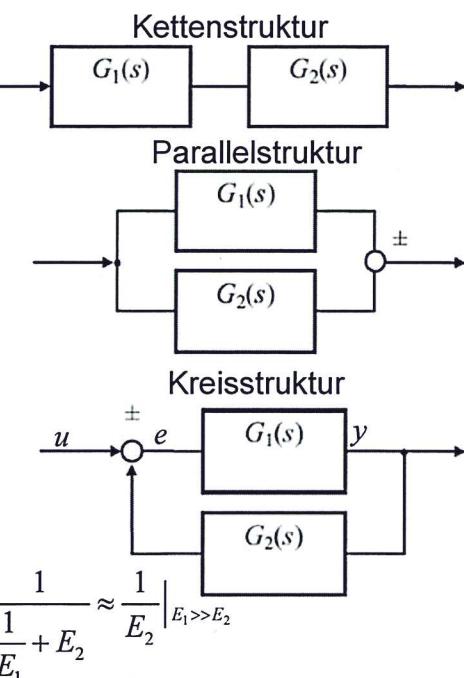
$e = u - G_2(s) \cdot y$ <-- Beispiel negative Rückführung

$$y = G_1(s) \cdot (u - G_2(s) \cdot y) = G_1(s) \cdot u - G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot y$$

$$y \cdot (1 + G_1(s) \cdot G_2(s)) = G_1(s) \cdot u$$

$$G(s) = \frac{y}{u} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

$$E = \frac{E_1}{1 + E_1 \cdot E_2} = \frac{1}{\frac{1}{E_1} + E_2} \approx \frac{1}{E_2} \Big|_{E_1 \gg E_2}$$



Empfohlene Literatur für Kap. 2.3-2.4

Autor	Titel	Verlag
R. Lerch	Elektrische Messtechnik Kapitel 5	Springer Verlag
E. Schrüfer L. Reindl B. Zagar	Elektrische Messtechnik Kapitel 1.3-1.7	Hanser Verlag
T. Mühl	Einführung in die elektrische Messtechnik Kapitel 3.2	Hanser Verlag
R. Felderhoff, U. Freyer	Elektrische und elektronische Messtechnik Kapitel 1.6-1.9 inkl. Übungen	Springer Verlag