3. Messung elektrischer Größen:
3.3 Messung von Blindwiderständen: Vorlesungsinhalte

3.3.1 Komplexe Darstellung von Blindwiderständen

3.3.2 Ersatzschaltungen verlustbehafteter Blindwiderstände (Reihenschaltung)

3.3.3 Ersatzschaltungen verlustbehafteter Blindwiderstände (Parallelschaltung)

3.3.4 Blindwiderstandsbestimmung durch Wechselstrom- und Wechselspannungsmessungen

3.3.5 Blindwiderstandsbestimmung durch Vergleich mit Referenzelement

3.3.6 Blindwiderstandsbestimmung durch Resonanzverfahren

3.3.7 Blindwiderstandsbestimmung durch Dreispannungsmessmethode

3.3.8 Blindwiderstandsbestimmung mit Wechselspannungsbrückenschaltungen

3. Messung elektrischer Größen:
3.3.1 Komplexe Darstellung von Blindwiderständen

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

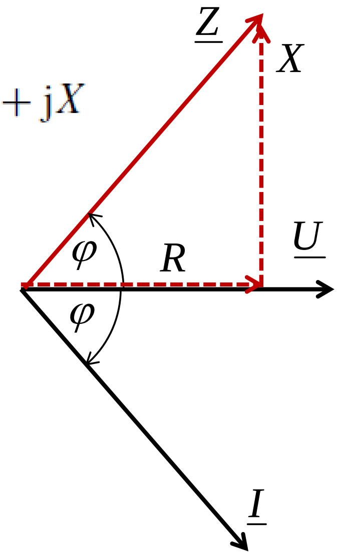
$$\underline{Z} = \mathrm{Re}\,(\underline{Z}) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,(\underline{Z}) = R + \mathrm{j}X$$

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_Z}\,.$$

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U}{I}$$

← *U* und *I* sind Effektivwerte!

$$\varphi = \varphi_z = \varphi_U - \varphi_I$$



$$X = \mathrm{Im}\,(\underline{Z}) \quad \text{und} \quad R = \mathrm{Re}\,(\underline{Z})$$

Blindwiderstand und ohmscher (Wirk-) Widerstand

(aus: T. Mühl: Einführung in die elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:
3.3.1 Komplexe Darstellung von Blindwiderständen

Verlustfaktor tan δ und Güte Q

Der Phasenwinkel φ zwischen Strom und Spannung an einer idealen Blindkomponente beträgt $+90°$ oder $-90°$. Der Verlustwinkel δ beschreibt für eine reale Komponente die Differenz zu $\pm 90°$:

$$\delta = 90° - |\varphi| \,.$$

Der Tangens des Verlustwinkels wird als Verlustfaktor $\tan\delta$ bezeichnet:

$$\tan\delta = \tan\left(90° - |\varphi|\right) = \frac{\mathrm{Re}\,(\underline{Z})}{|\mathrm{Im}\,(\underline{Z})|}\,.$$

Die Güte Q ist definiert als Kehrwert des Verlustfaktors

$$Q = \frac{1}{\tan\delta}\,.$$

(aus: T. Mühl: Einführung in die elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:
3.3.1 Komplexe Darstellung von Blindwiderständen

Verlustfaktor tan δ und Güte Q

Der Phasenwinkel φ zwischen Strom und Spannung an einer idealen Blindkomponente beträgt $+90°$ oder $-90°$. Der Verlustwinkel δ beschreibt für eine reale Komponente die Differenz zu $\pm 90°$:

$$\delta = 90° - |\varphi| \,.$$

Der Tangens des Verlustwinkels wird als Verlustfaktor $\tan\delta$ bezeichnet:

$$\tan\delta = \tan\left(90° - |\varphi|\right) = \frac{\mathrm{Re}\,(\underline{Z})}{|\mathrm{Im}\,(\underline{Z})|}\,.$$

Die Güte Q ist definiert als Kehrwert des Verlustfaktors

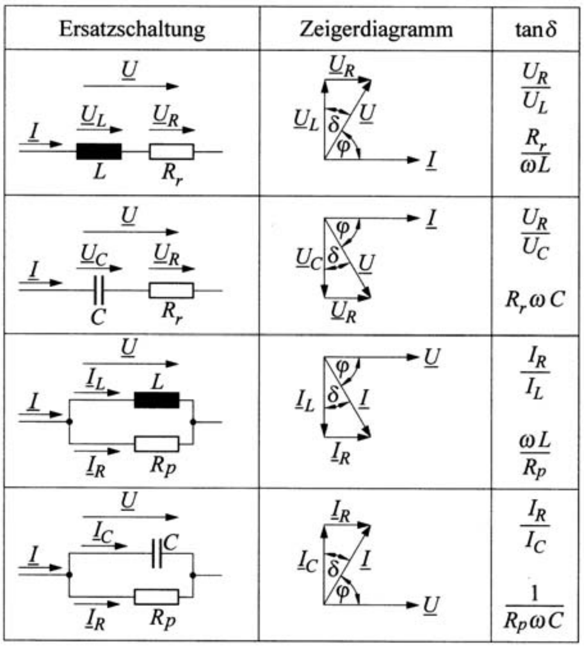
$$Q = \frac{1}{\tan\delta}\,.$$

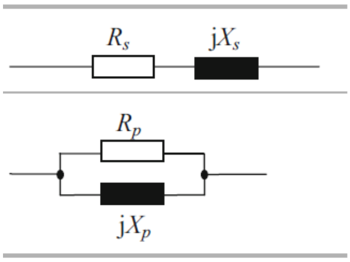
(aus: T. Mühl: Einführung in die elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:

3.3 Messung von Blindwiderständen:

3.3.2,3 Ersatzschaltungen verlustbehafteter Wirkwiderstände





Reihenersatzschaltung	$\underline{Z} = R_s + \mathrm{j}X_s$
Parallelersatzschaltung	$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{\mathrm{j}X_p}$

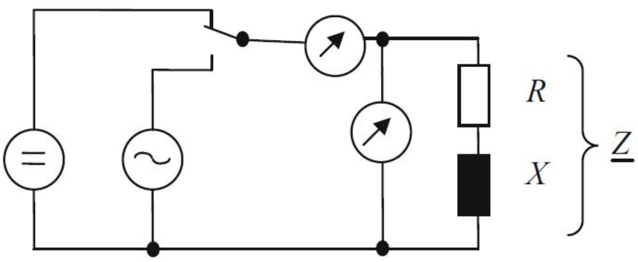
Reihen- und Parallel-Ersatzschaltungen verlustbehafteter Wirkwiderstände

(E. Schrüfer: Elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:

3.3 Messung von Blindwiderständen:

3.3.4 Blindwiderstandsbestimmung durch Wechselstrom- und Wechselspannungsmessungen



Messung der Gleich- und Effektivwerte

$$R = \frac{U_=}{I_=} \quad \text{und} \quad |\underline{Z}| = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}}$$

$$|\underline{Z}|^2 = R^2 + X^2$$

$$X^2 = |\underline{Z}|^2 - R^2$$

(aus: T. Mühl: Einführung in die elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:

3.3 Messung von Blindwiderständen:

3.3.5 Blindwiderstandsbestimmung durch Vergleich mit Referenzelement

Steht ein Referenzelement zur Verfügung, so kann der gesuchte Bindwiderstand bei gegebener Spannung aus einer Strommessung und bei gegebenem Strom aus einer Spannungsmessung ermittelt werden (Bild 4.2).

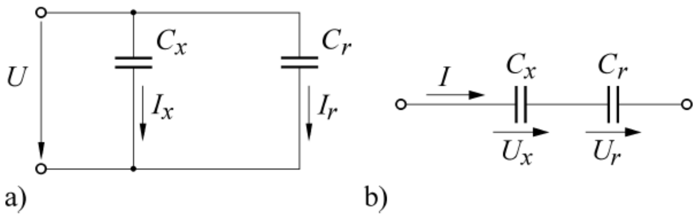


Bild 4.2 Bestimmung einer Kapazität C_x mit Hilfe einer Vergleichskapazität C_r durch
a) Strommessung und
b) Spannungsmessungen

Die Eingangsgröße und ihre Frequenz gehen dabei nicht in das Ergebnis ein. Für einen Kondensator als Beispiel folgt für den Fall a mit $U = U_x = U_r$:

$$\frac{I_x}{\omega C_x} = \frac{I_r}{\omega C_r}; \qquad C_x = C_r \frac{I_x}{I_r} \tag{4.5}$$

und für den Fall b mit $I = I_x = I_r$:

$$\omega C_x U_x = \omega C_r U_r; \qquad C_x = C_r \frac{U_r}{U_x}. \tag{4.6}$$

(aus: E. Schrüfer, L. Reindl,B. Zagar: Elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:

3.3 Messung von Blindwiderständen:

3.3.5 Blindwiderstandsbestimmung durch Vergleich mit Referenzelement

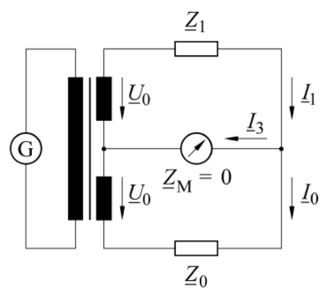


Bild 4.3 Kontinuierliche Messung von Impedanzunterschieden; Transformatorbrücke

Der Transformator enthält zwei sehr genau ausgeführte Sekundärwicklungen, die zwei gleiche Sekundärspannungen $\underline{U}_0$ liefern. Die erste Spannung liegt an dem zu messenden Scheinwiderstand $\underline{Z}_1$, die zweite an dem bekannten Scheinwiderstand $\underline{Z}_0$. Gemessen wird der Strom $\underline{I}_3$ in der gemeinsamen Leitung. Die Maschengleichungen liefern

$$\underline{U}_0 - \underline{I}_1 \underline{Z}_1 = 0 \qquad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_1},$$

$$\underline{U}_0 - \underline{I}_0 \underline{Z}_0 = 0 \qquad \underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0}$$

und der gesuchte Strom $\underline{I}_3$ ergibt sich aus der Knotenpunktgleichung zu

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_0.$$

Für einen Kondensator als Beispiel mit $Z_1 = 1/\omega C_1$ und $Z_0 = 1/\omega C_0$ ist I_3 ein Maß für die Kapazitätsdifferenz:

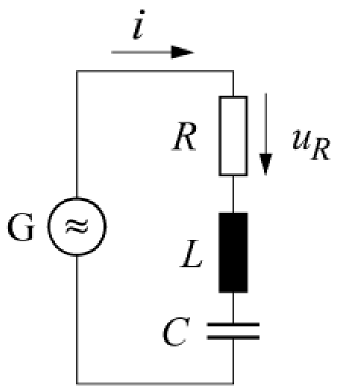
$$\underline{I}_3 = \omega U_0 (C_1 - C_0). \tag{4.7}$$

(aus: E. Schrüfer, L. Reindl,B. Zagar: Elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:

3.3 Messung von Blindwiderständen:

3.3.5 Blindwiderstandsbestimmung durch Vergleich mit Referenzelement



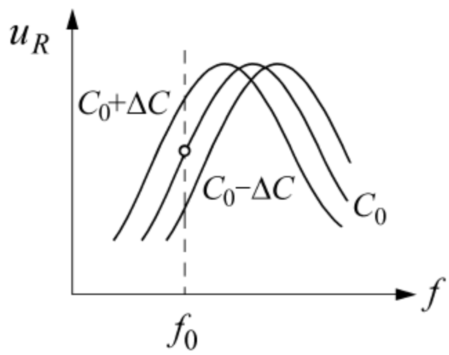
$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\omega_\mathrm{r} L = \frac{1}{\omega_\mathrm{r} C} \quad \text{bzw.} \quad f_\mathrm{r} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}\,.$$

$$L \cdot C = \frac{1}{(2\cdot\pi\cdot f_R)^2} = \frac{1}{4\cdot\pi^2\cdot f_R^2}$$

$$L = \frac{1}{C\cdot 4\cdot\pi^2\cdot f_R^2}$$ bei bekanntem C, oder

$$C = \frac{1}{L\cdot 4\cdot\pi^2\cdot f_R^2}$$ bei bekanntem L

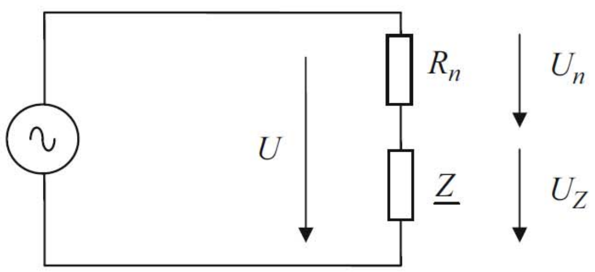


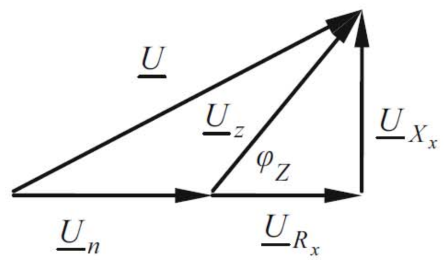
(aus: E. Schrüfer, L. Reindl,B. Zagar: Elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:

3.3 Messung von Blindwiderständen:

3.3.7 Drei-Spannungsmesser-Methode





Messaufbau und Zeigerdiagramm

$$Z = \frac{U_Z}{I} = \frac{U_Z}{U_n/R_n} = R_n \cdot \frac{U_Z}{U_n}.$$

$$R_x = Z\cdot\cos\varphi_Z = R_n\cdot\frac{U_z}{U_n}\cdot\cos\varphi_Z.$$

$$|X_x| = Z\cdot\sin\varphi_Z = R_n\cdot\frac{U_z}{U_n}\cdot\sin\varphi_Z$$

$$U^2 = U_n^2 + U_Z^2 - 2\cdot U_n\cdot U_Z\cdot\cos\left(180^\circ - \varphi_Z\right)$$

$$|\varphi_Z| = \arccos\left(\frac{U^2 - U_n^2 - U_z^2}{2\cdot U_n\cdot U_z}\right)$$

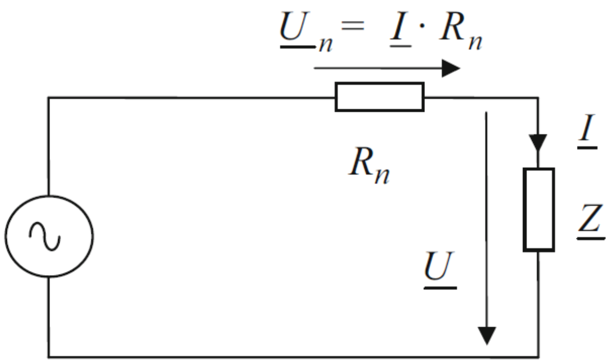
(aus: T. Mühl: Einführung in die elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:

3.3 Messung von Blindwiderständen:

3.3.7 Messung von Strom, Spannung und Phasenwinkel

- Messung der Effektivwerte und Phasendifferenz
- Genauigkeit bis 1%
- Problematisch beim der Messung von Komponenten sehr hohe Güte (Q>500)



Impedanzmessung durch Strom- und Spannungsmessung nach Betrag und Phase

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

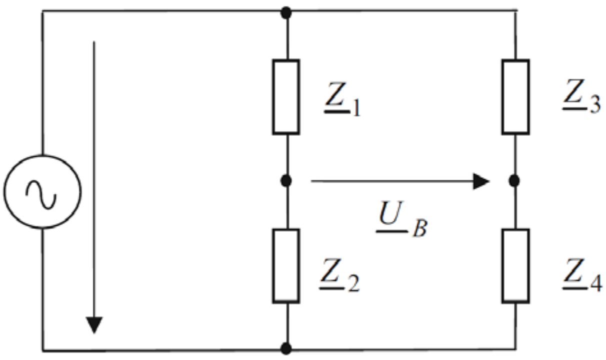
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_n}{R_n} \Rightarrow \underline{Z} = R_n \cdot \frac{\underline{U}}{\underline{U}_n} = R_n \cdot \frac{U}{U_n} \cdot e^{j(\varphi_U - \varphi_{Un})}$$

(aus: T. Mühl: Einführung in die elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:

3.3 Messung von Blindwiderständen:

3.3.8 Blindwiderstandsbestimmung mit Wechselstrombrückenschaltungen



Abgleichmessbrücken:

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3$$

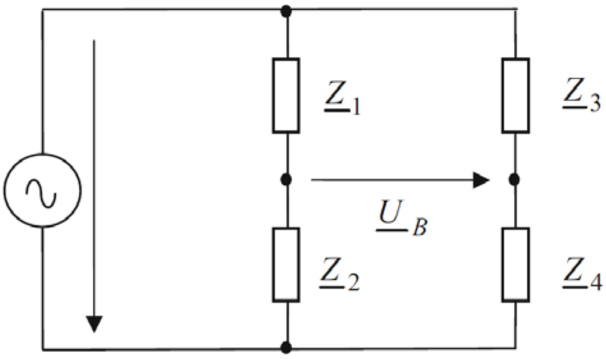
$$\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_4 = \underline{Y}_2 \cdot \underline{Y}_3$$

$$\underline{U}_B = \underline{U}_0 \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} - \underline{U}_0 \cdot \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \underline{U}_0 \cdot \frac{\underline{Z}_2 \cdot (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) - \underline{Z}_4 \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)},$$

$$\underline{U}_B = U_0 \cdot \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \cdot (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}.$$

(aus: T. Mühl: Einführung in die elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:
3.3 Messung von Blindwiderständen:
3.3.8 Blindwiderstandsbestimmung mit Wechselstrombrückenschaltungen



Abgleichmessbrücken:

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3$$

$$\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_4 = \underline{Y}_2 \cdot \underline{Y}_3$$

Mit: $\underline{Z}_i = R_i + j \cdot X_i$ folgt:

$$R_2 \cdot R_3 - X_2 \cdot X_3 = R_1 \cdot R_4 - X_1 \cdot X_4$$

$$X_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot X_3 = X_1 \cdot R_4 + R_1 \cdot X_4$$

Oder $\underline{Z}_i = \left|\underline{Z}_i\right| \cdot e^{j\varphi_{Zi}}$ dann folgt:

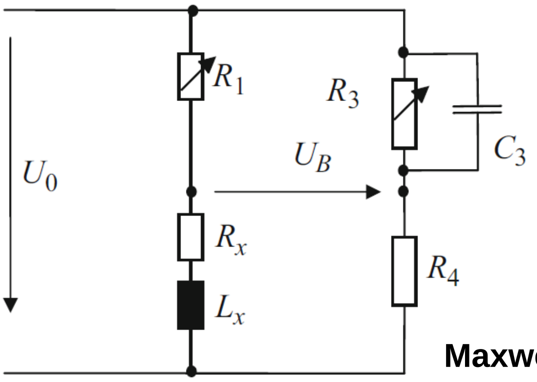
$$|\underline{Z}_1| \cdot |\underline{Z}_4| = |\underline{Z}_2| \cdot |\underline{Z}_3|$$

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$$

(aus: T. Mühl: Einführung in die elektrische Messtechnik)

Benötigt werden zwei unabhängig einstallbare Komponenten!

3. Messung elektrischer Größen:
3.3 Messung von Blindwiderständen:
3.3.8 Blindwiderstandsbestimmung mit Wechselstrombrückenschaltungen



$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3$$

Maxwell-Wien Brücke

$$(R_x + \mathrm{j}\omega L_x)\,\frac{R_3 \cdot \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}}{R_3 + 1/\mathrm{j}\omega C_3} = R_1 \cdot R_4,$$

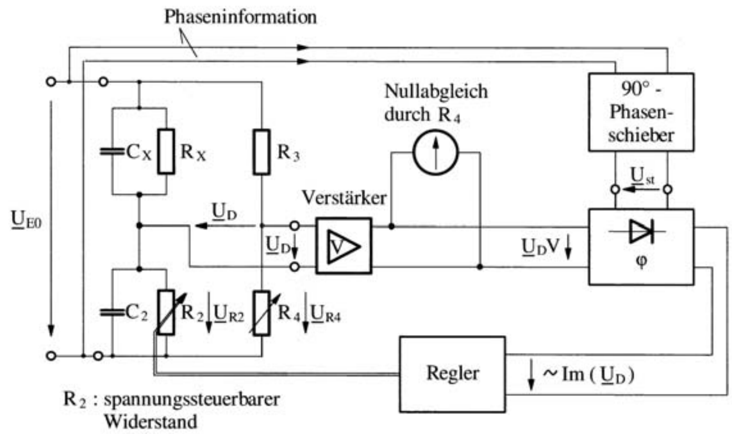
$$(R_x + \mathrm{j}\omega L_x)\,\frac{R_3}{1 + \mathrm{j}\omega R_3 C_3} = R_1 \cdot R_4 \quad \text{bzw.}$$

$$(R_x + \mathrm{j}\omega L_x) \cdot R_3 = R_1 \cdot R_4 \cdot (1 + 1\mathrm{j}\omega R_3 C_3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_x &= \frac{R_4}{R_3} \cdot R_1 \\ L_x &= R_1 \cdot R_4 \cdot C_3 \end{aligned}}$$

(aus: T. Mühl: Einführung in die elektrische Messtechnik)

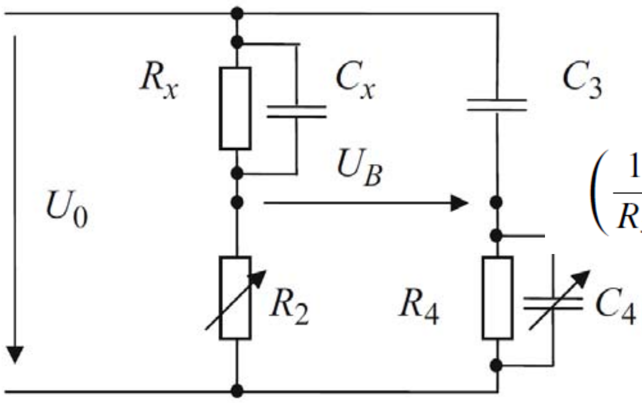
3. Messung elektrischer Größen:
3.3 Messung von Blindwiderständen:
3.3.8 Blindwiderstandsbestimmung mit Wechselstrombrückenschaltungen / 3.3.8.1 Abgleich-Widerstandsmessbrücken



Halbautomatisch abgleichbare Wien-Brücke

(R. Lerch: Elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:
3.3 Messung von Blindwiderständen:
3.3.8 Blindwiderstandsbestimmung mit Wechselstrombrückenschaltungen



Schering-Brücke

$$\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_4 = \underline{Y}_2 \cdot \underline{Y}_3$$

$$\left(\frac{1}{R_x} + \mathrm{j}\omega C_x\right) \cdot \left(\frac{1}{R_4} + \mathrm{j}\omega C_4\right) = \frac{1}{R_2} \cdot \mathrm{j}\omega C_3$$

$$\frac{1}{R_x \cdot R_4} - \omega^2 C_x C_4 = 0$$

$$\frac{\omega C_x}{R_4} + \frac{\omega C_4}{R_x} = \frac{\omega C_3}{R_2}$$

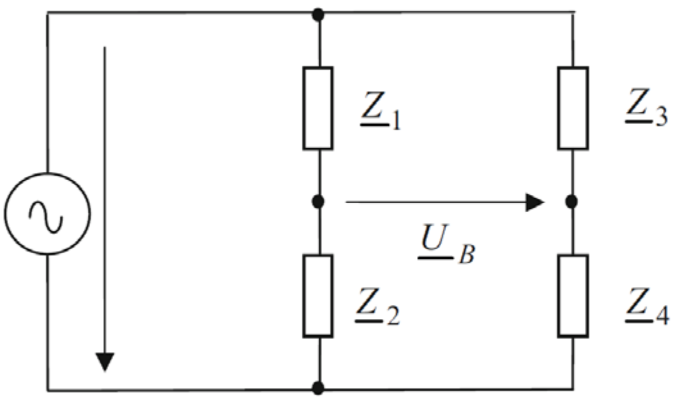
$$\boxed{C_x = C_3 \cdot \frac{R_4}{R_2 \cdot \left(1 + (\omega R_4 C_4)^2\right)}}$$ und $$\boxed{\tan\delta = \frac{1}{\omega R_x C_x} = \omega R_4 C_4}$$

(aus: T. Mühl: Einführung in die elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:

3.3 Messung von Blindwiderständen:

3.3.8 Blindwiderstandsbestimmung mit Wechselstrombrückenschaltungen



Ausschlagmessbrücke

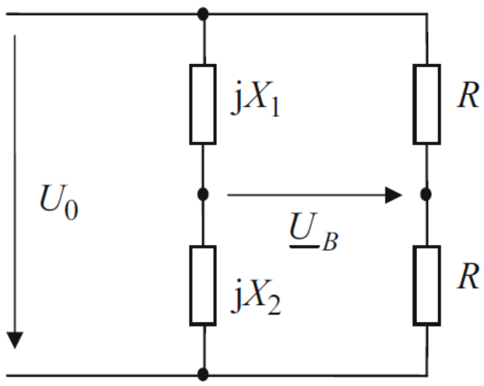
$$\underline{U}_B = U_0 \cdot \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \cdot (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}$$

(aus: T. Mühl: Einführung in die elektrische Messtechnik)

3. Messung elektrischer Größen:

3.3 Messung von Blindwiderständen:

3.3.8 Blindwiderstandsbestimmung mit Wechselstrombrückenschaltungen



Ausschlagmessbrücke als Halbbrücke

$$\underline{U}_B = U_0 \cdot \frac{j\,(X_2 - X_1) \cdot R}{j\,(X_2 + X_1) \cdot 2R} = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{X_2 - X_1}{X_2 + X_1}$$

Als Viertelbrücke:

$$X_1 = X, \quad X_2 = X + \Delta X$$

$$U_B = \frac{U_0}{2} \frac{\Delta X}{2X + \Delta X} \approx \frac{U_0}{4X} \Delta X$$

Als Halbbrücke mit zwei gegenläufigen Sensoren:

$$X_1 = X - \Delta X, \quad X_2 = X + \Delta X$$

$$\underline{U}_B = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{(X + \Delta X) - (X - \Delta X)}{(X + \Delta X) + (X - \Delta X)} = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{2 \cdot \Delta X}{2X} = \frac{U_0}{2X} \cdot \Delta X$$

(aus: T. Mühl: Einführung in die elektrische Messtechnik)

Literatur für Kap 3.3

Autor	Titel	Verlag
R. Lerch	Elektrische Messtechnik **Kapitel 6.3**	Springer Verlag
E. Schrüfer L. Reindl B. Zagar	Elektrische Messtechnik **Kapitel 4**	Hanser Verlag
T. Mühl	Einführung in die elektrische Messtechnik **Kapitel 6.2 (bitte Beispiel 6.5 nachrechnen und Aufgaben 6.2 und 6.3 lösen)**	Hanser Verlag