Bestimmung der Messunsicherheit
- Grundbegriffe -

Prof. Dr.-Ing. Matthias Wuschek

Technische Hochschule Deggendorf

Edlmairstr. 6+8

94469 Deggendorf

Tel. 0991-3615-522

matthias.wuschek@th-deg.de

Übersicht

1. Einführung, Begriffe

2. Bestimmung der Messunsicherheit mittels des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes

3. Bestimmung der Messunsicherheit bei zufälligen Messab-weichungen durch statistische Auswertung

1. Einführung, Begriffe

"Man misst eigentlich immer falsch, man muss nur wissen wie viel"

Dave Packard

Grundbegriffe 1

Wahrer Wert x_w **:** Wert der sich bei einer idealen Messung ergeben würde. Der wahre Wert ist in den meisten Fällen nicht bekannt.

Richtiger Wert x_r **:** Ergebnis einer realen Messung, der aufgrund einer Vereinbarung anerkannt wird und mit einer, dem jeweiligen Zweck angemessenen Unsicherheit beaufschlagt ist (manchmal auch "bester Schätzwert" bezeichnet).

Messabweichung: Differenz aus dem Messergebnis x und dem wahren Wert der Messgröße x_w.

$$F = x - x_w$$

Da der wahre Wert meist nicht bekannt ist, wird in der Praxis der richtige Wert x_r als Bezugsgröße benutzt.

Häufig wird die relative Messabweichung F_r angegeben:

$$F_r = F/\,x_w \quad \text{bzw.} \quad F_r = F/\,x_r$$

Messunsicherheit: Schätzwert zur Kennzeichnung eines Wertebereichs, innerhalb dessen der wahre Wert liegt.

Grundbegriffe 2

Wiederholbarkeit ("repeatability") einer Messung:

Ausmaß der Annäherung zwischen den Ergebnissen aufeinanderfolgender Messungen derselben Messgröße, ausgeführt unter folgenden Bedingungen:

- dasselbe Messverfahren
- derselbe Betrachter
- dieselbe Messeinrichtung
- derselbe Messort
- dieselben Anwendungsbedingungen

Die Wiederholbarkeit kann z.B. quantitativ durch die Streuung der Ergebnisse angegeben werden.

Grundbegriffe 3

Reproduzierbarkeit ("reproducibility") einer Messung:

Ausmaß der Annäherung zwischen den Ergebnissen von Messungen derselben Messgröße, wobei die einzelnen Messungen bei unterschiedlichen Bedingungen ausgeführt werden, so etwa bezüglich:

- des Messverfahrens
- des Betrachters
- der Messeinrichtung
- des Messortes
- der Anwendungsbedingungen
- des Zeitpunktes

Die Reproduzierbarkeit kann z.B. quantitativ durch die Streuung der Ergebnisse angegeben werden.

Wird bei allen an der Bestimmung der Reproduzierbarkeit einer Messung beteiligten Laboratorien dasselbe Messverfahren angewendet, spricht man statt von Reproduzierbarkeit von "**Vergleichbarkeit"**.

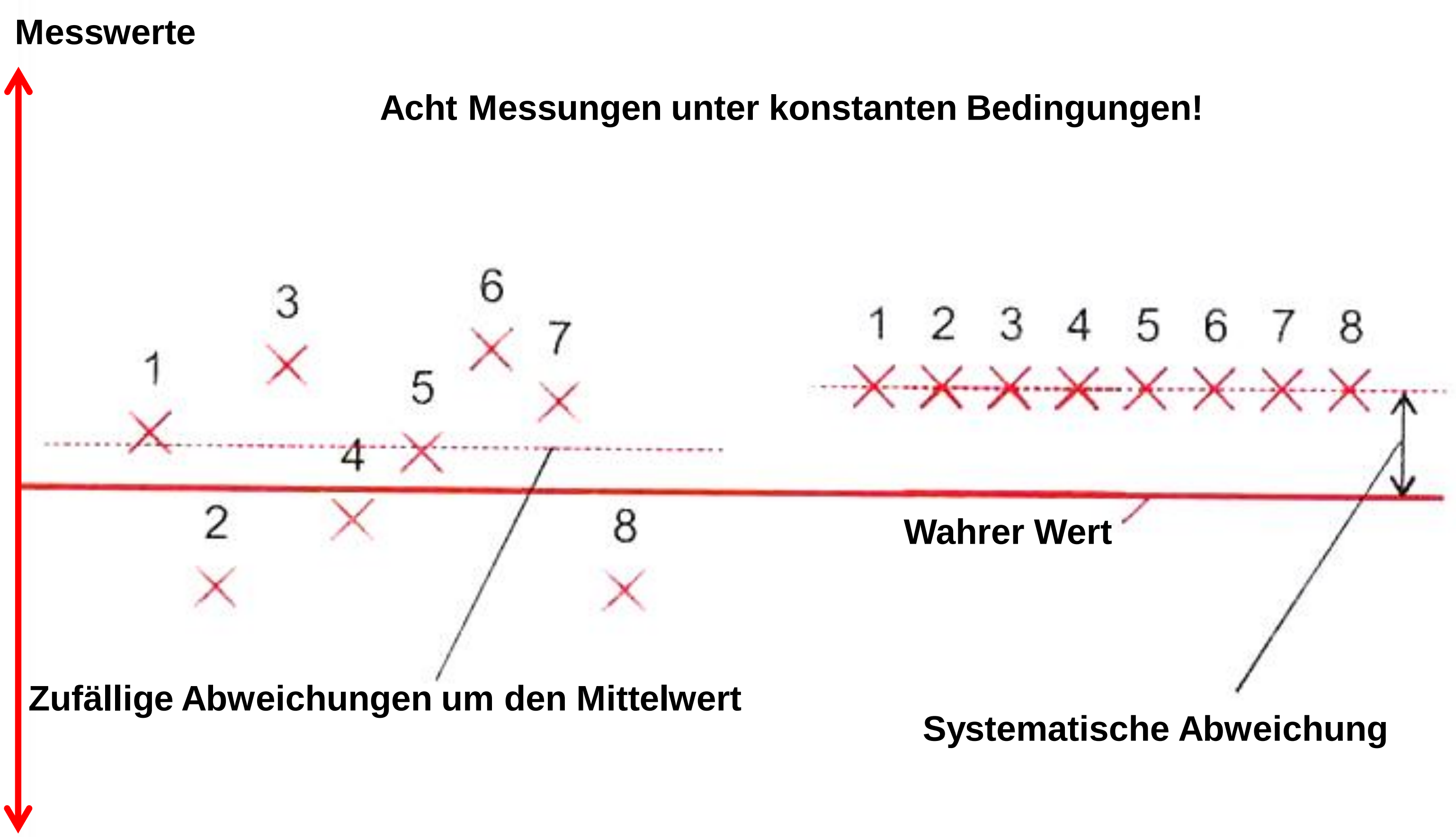
Verschiedene Arten von Messabweichungen:

Grobe Messabweichungen:
Durch falsche Handhabung oder offensichtliche Mängel der Messgeräte verursacht. Vermeidbar!

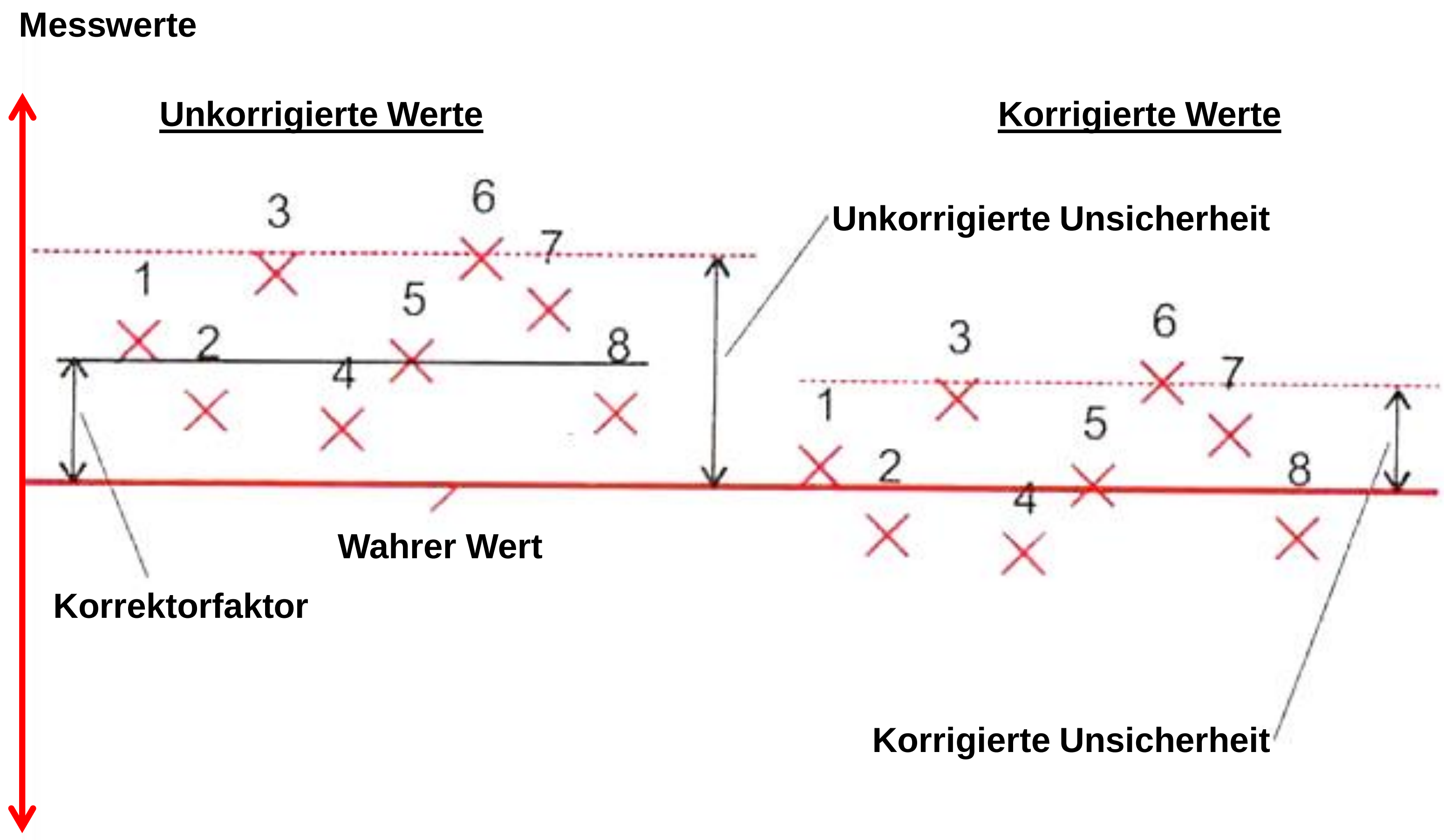
Systematische Messabweichungen:
Anteile an der gesamten Messabweichung, die unter gleichen Messbedingungen immer mit gleichem Betrag und Vorzeichen entstehen. (z.B. durch Belastung des Messobjektes durch das Messgerät). Ein konstanter Korrekturfaktor kann angegeben werden. Nach Durchführung der Korrektur erhält man das **berichtigte Messergebnis**.

Zufällige Messabweichungen:
Sie sind nicht vorhersehbar und daher auch nicht korrigierbar. Sie können allerdings durch häufige Wiederholung des Messvorgangs erkannt und durch Ermittlung der Messunsicherheit beschrieben werden.

Grundbegriffe: Systematische und zufällige Abweichungen



Grundbegriffe: Korrektur einer systematischen Abweichung



2. Bestimmung der Messunsicherheit mittels des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes

(Bestimmung des "Maximalfehlers")

Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz

Gegeben ist eine Größe y, die nicht direkt durch Messungen bestimmt werden, aber aus den messbaren Größen x_1, x_2, x_3,.... x_n errechnet werden kann:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$$

Die einzelnen Messabweichungen Δx_i erzeugen eine zusammengesetzte Messabweichung der Ergebnisgröße y: Δy

Es gilt näherungsweise das **lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz**:

$$\boxed{\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n}$$

Das Fehlerfortpflanzungsgesetz setzt streng genommen systematische Fehler voraus. Bei zufälligen Abweichungen führt die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes zu einer Überschätzung der Messabweichung!

Beispiel: Wegmessung

Gleichförmige Bewegung: $s = v \cdot t$

Δv: Messabweichung von v
Δt: Messabweichung von t

Lineare Fehlerfortpflanzung: $\Delta s \approx t \cdot \Delta v + v \cdot \Delta t$

Multiplikation mit 1/s:

$$\boxed{\frac{\Delta s}{s} \approx \frac{t \cdot \Delta v}{v \cdot t} + \frac{v \cdot \Delta t}{v \cdot t} = \frac{\Delta v}{v} + \frac{\Delta t}{t}}$$

d.h. bei multiplikativer Verknüpfung addieren sich die relativen Abweichungen!

Die maximale Abweichung des Messwertes vom wahren Wert lässt sich also mit Hilfe des **linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes** bestimmen.

Berechnung der Maximalabweichung: Beispiel

Leistungsmessung durch Bestimmung der HF-Spannung an einem 50 Ω-Lastwiderstand

$$\boxed{P = \frac{U^2}{R}}$$

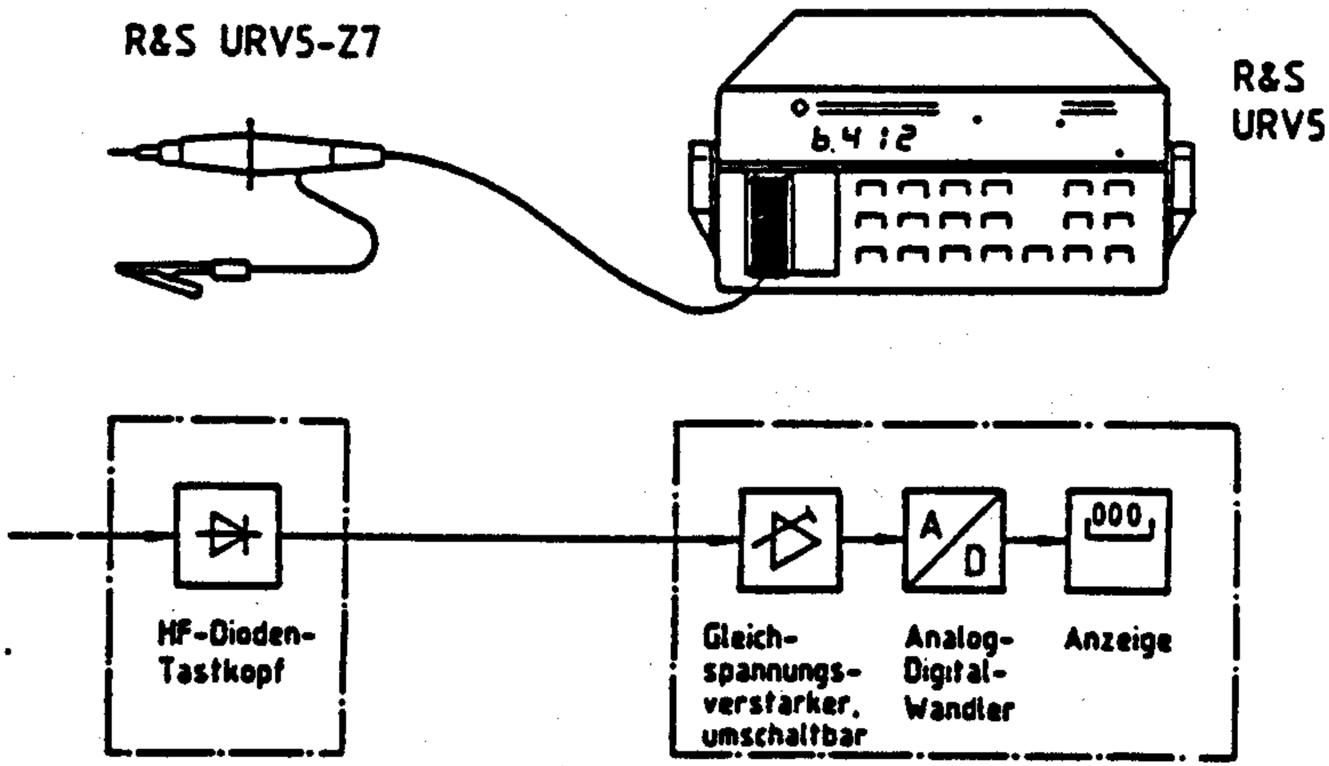
Maximale relative Abweichung:

Summe der Beträge der einzelnen relativen Abweichungen:

$$\boxed{\left|\frac{\Delta P}{P}\right| = \pm\left(2 \cdot \left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{\Delta R}{R}\right|\right)}$$

"Sensitivitätskoeffizient" c

Messkopfvoltmeter mit HF-Diodentastkopf: Aufbau



Berechnung der Maximalabweichung: Beispiel

1. Messgerät: (10V-Tastkopf + 20dB-Vorteiler)

- Ableseunsicherheit: 2% vom Messwert + 2% vom Skalenendwert

  zusätzlich: 2% Frequenzgangunsicherheit

- Teilerunsicherheit: 10% vom Messwert

Hier: P = 100 W, d.h. Anzeige ca. 7 V

(Skalenendwert: 10 V)

$$\boxed{\frac{\Delta U}{U} = \frac{0{,}02 \cdot 7V}{7V} + \frac{0{,}02 \cdot 10V}{7V} = 4{,}8\%}$$

Gesamtunsicherheit des Messgerätes:

$$\boxed{\frac{\Delta U}{U} = 4{,}8\% + 2\% + 10\% = 16{,}8\%}$$

2. Messwiderstand:

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R} = 2\%\,(Datenblatt)}$$

3. Gesamtunsicherheit der Messung:

$$\boxed{\frac{\Delta P}{P} = \pm\left(2 \cdot 0{,}168 + 0{,}02\right) = \pm 35{,}6\%}$$

Berechnung der Maximalabweichung: Schlussfolgerungen

- Die Kalkulation der Maximalabweichung zeigt, ob ein gewähltes Messverfahren mit den gegebenen Messgeräten und -mitteln zu einem brauchbaren Ergebnis führt.

- Es zeigt sich deutlich, welche Komponenten den größten Beitrag liefern, d.h. wo sich genauere Instrumente eventuell lohnen würden. Übertriebene Genauigkeitsanforderungen können verhindert werden.

- Die Kalkulation der Maximalabweichung ist nur richtig, wenn man alle an der Ergebnisbildung beteiligten Einzelabweichungen kennt (z.B. Temperatureinfluss auf den Messwiderstand).

- Sind die Abweichungen der Einzelgrößen zufällig verteilt, führt dieses Verfahren zu einer Überschätzung der resultierenden Abweichung.

3. Bestimmung der Messunsicherheit bei zufälligen Messabweichungen durch statistische Auswertung

Statistische Auswertung der Messunsicherheit

Prinzip: Durchführung von Messreihen. Aus der Verteilung der Ergebnisse können Aussagen über die Größe der zu erwartenden Messunsicherheit hergeleitet werden.

Zufällige Messabweichungen lassen sich in ihrer Gesamtheit durch **Verteilungsfunktionen** und **statistische Kennwerte** erfassen.

Grundlage für die statistische Behandlung zufälliger Messabweichungen ist die Annahme, dass der arithmetische Mittelwert aus einer Reihe von Messungen (bei konstanten Randbedingungen) sehr nahe beim wahren Wert liegt.

Statistische Kennwerte

Arithmetischer Mittelwert x_0:

n = Anzahl der Messwerte

x_i = i-ter Messwert

$$\boxed{x_o = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Standardabweichung σ (Streuung):

x_w = wahrer Wert

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_w\right)^2}}$$

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der Messwerte um den Mittelwert. Das Quadrat der Standardabweichung σ^2 wird **Varianz** bezeichnet

"Empirische" Standardabweichung s:

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_o\right)^2}}$$

Die empirische Standardabweichung s ist ein Schätzwert für die Standardab-weichung σ bei einer begrenzten Anzahl von n Wiederholungen der Messung.

Statistische Kennwerte: Beispiel

Ein 10,000 Ω-Präzisionswiderstand wird n = 100 mal hintereinander mit einem Ohmmeter gemessen. Es ergibt sich:

Ohmmeter 1:	Mittelwert:	10,25 Ω
	Maximalwert:	11,5 Ω
	Minimalwert:	9,1 Ω
	Standardabweichung s_1 :	0,58 Ω
	-> R = 10,25 ± 1,25 Ohm	
Ohmmeter 2:	Mittelwert:	10,08 Ω
	Maximalwert:	10,6 Ω
	Minimalwert:	9,7 Ω
	Standardabweichung s_2 :	0,24 Ω
	-> R = 10,08 ± 0,52 Ohm	

Standardabweichung auf Mittelwert bezogen: *"Variationskoeffizient"*

Zweckmäßig, wenn Messreihen mit verschieden großen Zahlenwerten und/oder unterschiedlichen physikalischen Einheiten verglichen werden.

Variationskoeffizient: $\boxed{V = \frac{\sigma}{x_o}}$ Häufig in % angegeben

Ohmmeter 1: $V_1 = 0{,}58/10{,}25 = 5{,}65\ \%$

Ohmmeter 2: $V_2 = 0{,}24/10{,}08 = 2{,}38\ \%$

Fazit: Bei Ohmmeter 2 ist der Mittelwert näher am wahren Wert des Widerstandes, also ist hier die systematische Abweichung geringer. Die Reproduzierbarkeit der Messung ist ebenfalls bei Ohmmeter 2 besser, da Standardabweichung σ bzw. Variationskoeffizient V kleiner sind.

Quadratisches Fortpflanzungsgesetz

Gegeben ist eine Größe y, die nicht direkt durch Messungen bestimmt werden, aber aus den messbaren Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ errechnet werden kann:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$$

Die einzelnen Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ werden wiederholt gemessen, woraus die Mittelwerte $x_{1o}, x_{2o}, x_{3o}, \ldots x_{no}$ und die Standardabweichungen $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$ resultieren.

Für den Mittelwert der Ausgangsgröße gilt: $y_o = f(x_{1o}, x_{2o}, x_{3o}, \ldots x_{no})$

Für die Varianz der Ausgangsgröße gilt:

$$\boxed{\sigma_y^2 \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \cdot \sigma_n^2}$$

Praxis: Endliche Zahl an Messwerten: Ersetze σ durch s!

<u>Voraussetzungen:</u>
- Die Größen x_i sind statistisch unabhängig (d.h. "unkorreliert")
- $\sigma_i << x_i$

Quadratisches Fortpflanzungsgesetz: Beispiele

1. Summenfunktion:

Es gelte: $y = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3$

Für die Standardabweichung folgt:

$$\boxed{s_y^2 \approx a_1^2 \cdot s_1^2 + a_2^2 \cdot s_2^2 + ... + a_3^2 \cdot s_3^2}$$

Standardabweichung des Messergebnisses = gewichtete quadratische Summe der Einzelstandardabweichungen

2. Multiplikativer Zusammenhang:

Es gelte:

$$\boxed{y = \frac{x_1 \cdot x_3^2}{x_2}}$$

Für die Standardabweichung folgt:

$$s_y^2 \approx \left(\frac{x_3^2}{x_2}\right)^2 \cdot s_1^2 + \left(\frac{-x_1 \cdot x_3^2}{x_2^2}\right)^2 \cdot s_2^2 + \left(\frac{2x_1 \cdot x_3}{x_2}\right)^2 \cdot s_3^2$$

$$\left(\frac{s_y}{y}\right)^2 \approx \left(\frac{x_3^2}{x_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_2}{x_1 \cdot x_3^2}\right)^2 \cdot s_1^2 + \left(\frac{-x_1 \cdot x_3^2}{x_2^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_2}{x_1 \cdot x_3^2}\right)^2 \cdot s_2^2 + \left(\frac{2 \cdot x_1 \cdot x_3}{x_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_2}{x_1 \cdot x_3^2}\right)^2 \cdot s_3^2$$

$$\left(\frac{s_y}{y}\right)^2 \approx \left(\frac{s_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot s_3}{x_3}\right)^2$$

Variationskoeffizient des Messergebnisses = gewichtete quadratische Summe der Einzelvariationskoeffizienten

Für die bisherigen Betrachtungen wurde angenommen, dass im Fall von Wiederholmessungen alle Messwerte mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Das ist aber in der Regel nicht korrekt.

Es sind vielmehr Wahrscheinlichkeitsfunktionen zu berücksichtigen, welche die Verteilung der Messwerte bei wiederholter Messung beschreiben.

In der messtechnischen Praxis unterscheidet man zwei wichtige Gruppen von Verteilungen:

1. Messwertverteilungen die aus mathematischen Überlegungen folgen, wie die wichtigste von allen, die **Normalverteilung**.

2. Messwertverteilungen, die aus Grenzwertbetrachtungen folgen, wie z.B. die **Rechteckverteilung**, die beispielsweise dann auftritt, wenn von einem Messwert lediglich bekannt ist, dass er innerhalb bestimmter Grenzen liegt.

Die Kenntnis der Eigenschaften von wichtigen Verteilungsfunktionen ist notwendig für die richtige Vorgehensweise bei der Messunsicherheitsermittlung.

Die Verteilung von Messergebnissen wird meist durch die **"Wahrscheinlichkeits-dichtefunktion"** $f(x)$ beschrieben.

Stetige Verteilungen

Aus Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen *f(x)* kann die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Messwerten in einem bestimmten Intervall berechnet werden.

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Daher muss gelten:

$$P(-\infty \leq x \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Für den Erwartungswert einer Verteilung, der dem arithmetischen Mittelwert aus allen Messergebnissen entspricht, gilt:

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

Die Varianz errechnet sich zu:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2$$

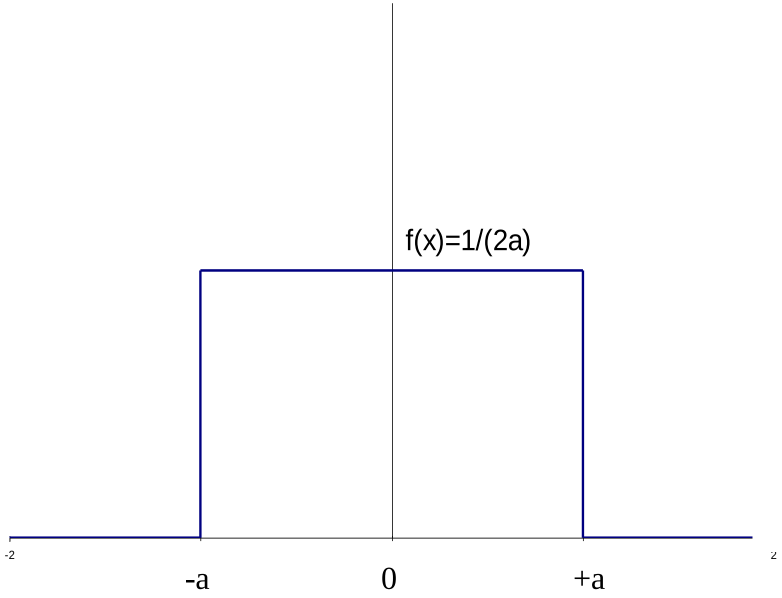
Rechteckverteilung

Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Wertes zwischen bestimmten Grenzen ist konstant (Typische Angabe: ± 5 %).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für} \left(x_o - a\right) \le x \le \left(x_o + a\right) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = x_0$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mu\right)^2 \cdot f(x)\,dx = \frac{a^2}{3}$$

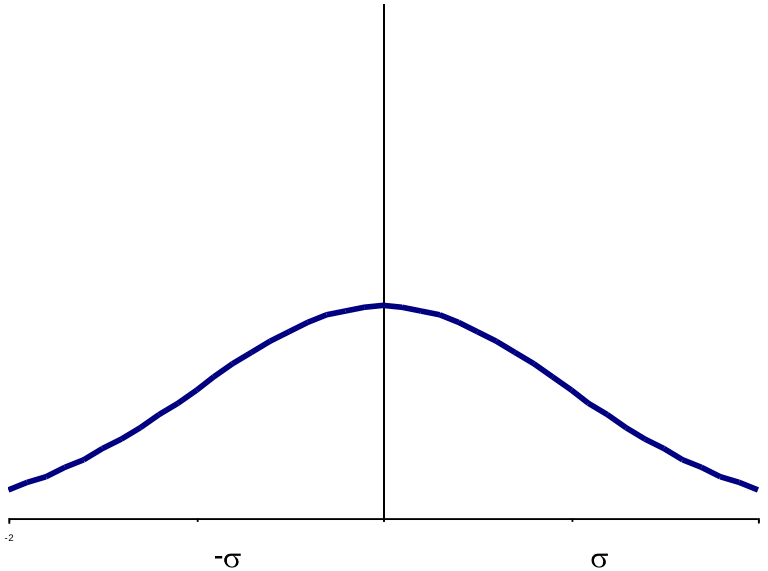


Hier: $x_o = 0$

Normalverteilung 1

Bei konstanten Bedingungen und genügend häufiger Wiederholung einer Messung ergibt sich eine Verteilung der Messresultate, die der **"Normal-verteilung"** entspricht. Die Dichtefunktion ist dann ist die Gaußkurve mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

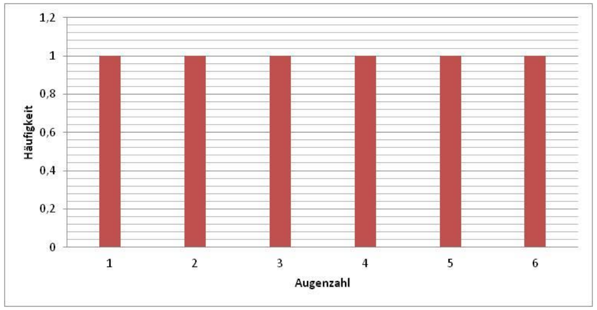


Hier: $\mu = 0$

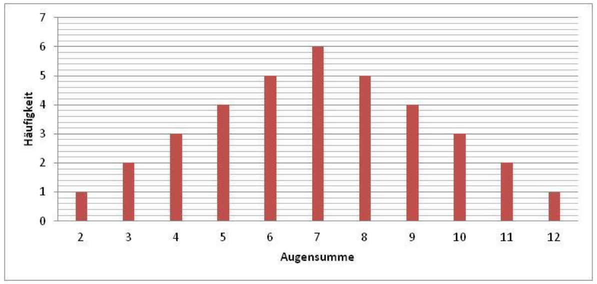
Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Messwertes zwischen x_1 und x_2:

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

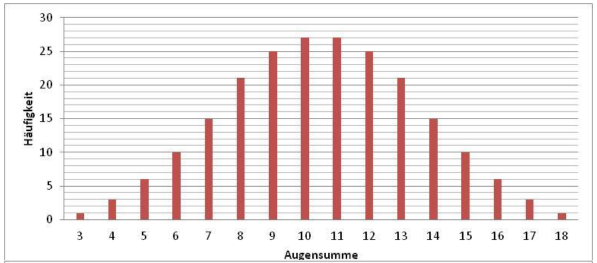
Kombination mehrerer statistisch unabhängiger Experimente: Gaußverteilung



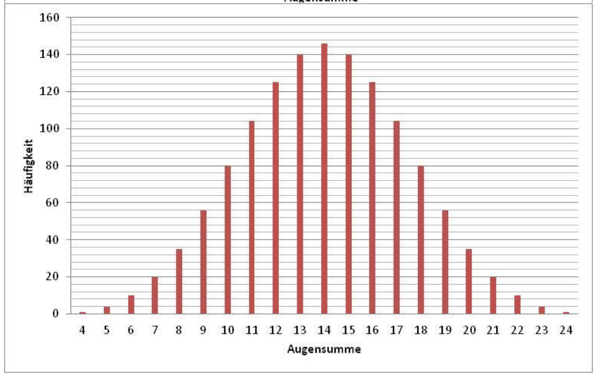
Augenzahl bei einmaligem Würfeln



Augensumme bei zweimaligem Würfeln



Augensumme bei dreimaligem Würfeln



Augensumme bei viermaligem Würfeln

Normalverteilung 2

Das Flächenintegral über die Gaußverteilung ist nicht geschlossen lösbar. Es existieren jedoch Tabellen.

<u>Wichtige Fälle:</u>

Wahrscheinlichkeit in %	**Spanne a bzgl. Mittelwert μ**
50	$\pm 0{,}67 \cdot \sigma$
68,3	$\pm 1 \cdot \sigma$
95	$\pm 1{,}96 \cdot \sigma$
95,5	$\pm 2 \cdot \sigma$
99	$\pm 2{,}576 \cdot \sigma$
99,7	$\pm 3 \cdot \sigma$

Normalverteilung 3

<u>Anwendung:</u>

Vertrauensgrenzen für einen Messwert, d.h. obere bzw. untere Grenze, die ein Messwert mit der statistischen Sicherheit P nicht überschreitet.

Übliche Sicherheit: 95 %, d.h. je 2,5 % der Messwerte liegen über- bzw. unterhalb der Vertrauensgrenze ($P_{95\%}$).

Aus Tabelle: Mit 95 % Sicherheit liegt ein Messwert im Bereich $\mu \pm 2\sigma$.

Aus diesem Zusammenhang leitet sich der **"Erweiterungsfaktor"** ("coverage factor") k = 2 ab, wie er in vielen Dokumenten und Normen verwendet wird ("erweiterte Messunsicherheit: expanded uncertainty").