



Modul O-60: Räumliche Bezugssysteme und Positionierung

Dr. rer. nat. Patrick Reidelstürz (Diplom Forstwirt)

03

Räumliche Bezugssysteme und Positionierung **Entfernung und Höhe**

Dr. Patrick Reidelstürz



3.1 Normierte Maße

Zur Definition von Positionen innerhalb eines Bezugssystems

→ benötigt man normierte Maße:

Maße für:

Strecke

Fläche

Raum

Zeit

3.1 Normierte Maße

Zu allen Zeiten hat man Maße normiert.

Durch Verschneidung und Überlappung von Kulturen (z.B. Handel)
gab es immer wieder **Normierungskonflikte**.

Beispiele vormetrischer Längeneinheiten

- [Megalithisches Yard](#)
- [Nippur-Elle A1](#)
- [Salamis-Elle A4](#)
- [pes Romanus, pes monetalis, Handelselle C](#)
- [pes Drusianus G](#)
- [Nippur-Fuß, Wasserfuß, Erdfuß A1 und A2](#)
- [Baumaß A3](#)
- [attisch-olympischer Fuß H1](#)
- [Milesischer Fuß I 4](#)
- [Ägyptische Königselle B1](#)
- [Große Ägyptische Königselle, Schaku B2](#)
- [Vitasti, Maß von Tiahuanako B3](#)
- [Gudea-Fuß ideal und real, Philetärischer Fuß D1, D2](#)
- [Große Ptolemäische Elle, Englischer Fuß E1](#)
- [Großer Ptolemäischer Fuß E2](#)
- [oskisch-umbrischer Fuß E3](#)
- [Maß von Abydos J2](#)
- [Punischer Fuß F1](#)
- [Kleiner Ptolemäischer Fuß I 3](#)
- [Tschi T](#)
- [Vindonissa-Fuß F3](#)
- [Kompromiss-Elle F2](#)
- [Kretisch-Äginetischer Fuß G](#)
- ['spätbyzantinischer Fuß' G2](#)
- [samisch-ionischer Fuß I 2](#)
- ['Neue Elle' J1](#)
- [gemeingriechischer Fuß J1](#)
- [Pied de Roi I 1](#)
- ['Äginetischer Fuß' H2](#)
- [Byzantinischer Fuß J3](#)
- [Pythischer Fuß P](#)
- [Indus-Maß K](#)
- [zwei exotische Maßstäbe](#)

Sogar unterschiedliche Untereinheiten vormetrischer Längeneinheiten!

1) A1		Nippur-Elle 30 digitii
2) A1		Nippur-Elle 28 digitii
3) C		pes Romanus 16 digitii
4) G		pes Drusianus 18 digitii
5) A1		Nippur-Fuß 16 digitii
6) A1		Wasserfuß 12 unciae
7) A2		Erdfuß 10 unciae
8) A2		Erdfuß 16 digitii
9) A3		Pygon zum Erdfuß 20 unciae
10) A3		"Baumaß" 16 digitii
11) H1		attisch-olympischer Fuß 16 digitii
12) I4		milesische Elle 30 digitii
13) I4		milesische Elle 28 digitii
14) I4		milesischer Fuß 16 digitii
15) A4		Salamis-Elle 24 digitii

Problem nicht genormter Maße im Mittelalter

„Nehmen wir das Fuß. Es schwankte zwischen 25 und 35 cm.
Die Rute zwischen 2,67 Metern und fast 5 Metern.
Die Elle zwischen knapp 50 und über 80 cm.
Ein Scheffel zwischen knapp 20 und über 200(!) Litern.“

Der Silbergehalt der Pfennige schwankte um bis zu 30%, gleichzeitig schwankte aber auch deren Gewicht um bis zu 50%, auch wenn ausnahmsweise nicht an ihnen herumgeschabt worden war. Niemand kann heute also wirklich noch sagen, wie viel Silber ein Mensch damals tatsächlich in den Händen hielt, wenn er dem Bäcker einen Pfennig für ein Roggenbrot gab. Denn auch hier gilt: Münze ist nicht gleich Münze!“





Maß-Chaos in Frankreich

Im Frankreich des 18. Jahrhunderts existierten zirka 800 verschiedene Namen von Maßen, die je nach Region und Ware für über 250.000 Maßeinheiten stehen konnten. Aber auch in Paris herrschte das Maß-Chaos: In Versailles und Saint-Denis existierten zwei unterschiedlich schwere Eichmaße für ein- und dieselbe Gewichtseinheit. Beide Versionen waren auf dem Pariser Markt im Gebrauch.

Französische Revolution: Ballhausschwur (1791)



Französische Revolution: Ballhausschwur (1791)



Interessante Hintergründe:

Frankreich im Jahr 1792:

Die Revolution tobt im vierten Jahr. Während der bewaffnete Mob den Tod des Königs fordert und ausländische Heere die Grenzen überqueren, machen sich zwei Astronomen auf, mit der "Erfindung" des Meters das Maßsystem weltweit zu revolutionieren.

In der Erklärung der Menschen- und Bürgerrechte 3 Jahre zuvor (1789) hatten die revolutionären Verfasser neben Freiheit und Brüderlichkeit vor allem Gleichheit propagiert. Ungleichheit repräsentierte für viele die adelige Willkürherrschaft und war überall im Land zu finden:

Vor der Justiz, im Heer, oder aber auch im Maß-System: Mehr als 250.000 unterschiedliche Maßeinheiten galten nebeneinander und gleichberechtigt im vorrevolutionären Frankreich. Dieses **Maß-Chaos zu ordnen war Delambres und Méchains Aufgabe.**

Erster Urmeter

Am 26. März 1791 beschloss die verfassunggebende Versammlung in Paris auf Vorschlag der Académie des sciences (Akademie der Wissenschaften) die Einführung einer universellen Längeneinheit.

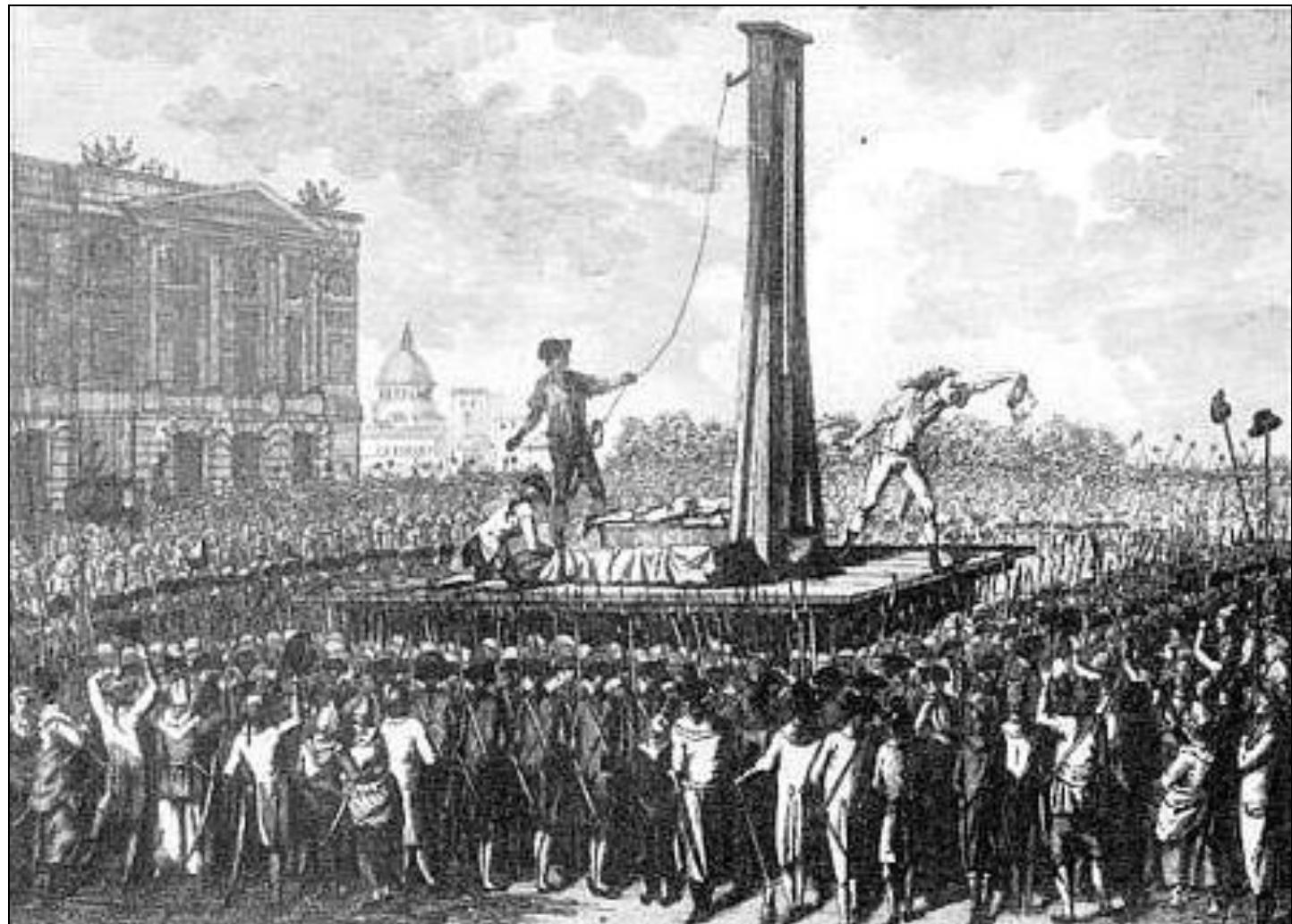
Das neue, noch nicht „Meter“ genannte Längenmaß solle der zehnmillionste Teil des Erdmeridianquadranten (Strecke vom Pol zum Äquator) sein.

Dazu sollte der Meridianbogen von Dünkirchen bis Barcelona von zwei französischen Astronomen, Jean-Baptiste Joseph Delambre und Pierre Méchain, neu vermessen werden, was sich allerdings in den Wirren der französischen Revolution bis 1798 hinzog.

1791 wurde ein anderer Definitionsverschlag Talleyrands und Jeffersons, basierend auf einem Sekundenpendel, verworfen, da diese Methode von lokalen Unterschieden der Erdbeschleunigung beeinflusst worden wäre.

Am 1. August 1793, unter der Terrorherrschaft, wurde dieses Längenmaß – auf Vorschlag Borda's Meter genannt – im Nationalkonvent gesetzlich eingeführt, allerdings mit einem provisorischen Wert von 443,440 Pariser Linien, was knapp 1000,325 Millimetern entspricht. Auf Grundlage dieses Wertes wurde 1795 ein erster Messing-Prototyp hergestellt.

Trauriges Ende Ludwigs des XVI.
hingerichtet den 21. Jan. 1793 auf
dem Platz Ludwigs XV. der
Revolutionssplatz genannt



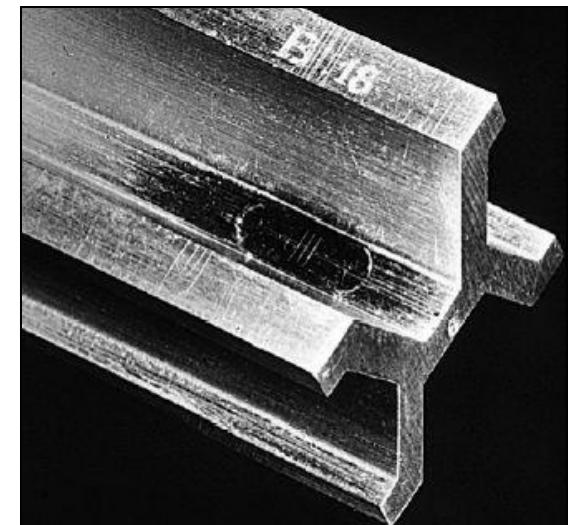
Zweiter „definitiver“ Urmeter

Nach Abschluss der Triangulationen zwischen Dünkirchen und Barcelona wurde 1799 ein zweites sogenanntes definitives Urmeter aus Platin hergestellt und am 22. Juni 1799 im französischen Nationalarchiv in einem Stahlschrank verschlossen. Heute wird es in einem Tresor des Internationalen Büros für Maß und Gewicht (BIPM) in Sèvres bei Paris aufbewahrt.

Allerdings ist dessen Genauigkeit – bezüglich des angestrebten zehnmillionsten Teils der Distanz vom Äquator zum Pol – mit definierten 443,296 Pariser Linien, noch geringer als die des sogenannten „provisorischen Meters“, da diese Distanz nach dem WGS84 etwa 10001,966 km beträgt. **Die Übernahme dieses Urmeters als Maßeinheit wurde am 20. Mai 1875 in der „internationalen Meterkonvention“ von siebzehn Staaten beschlossen.**

Internationaler Meterprototyp von 1889 (drittes Urmeter)

Am 26. September 1889 wurde das Urmeter von der Generalkonferenz für Maß und Gewicht durch einen Meterprototypen aus einer Legierung aus 90 % Platin und 10 % Iridium ersetzt. Auf diesem 102 cm langen Normal mit X-förmigem Querschnitt (20×20 mm) repräsentierten Strichgruppen die Länge von einem Meter. Definiert wurde er über den Abstand der Mittelstriche dieser Strichgruppen – aufgrund der Wärmeausdehnung des Materials bei einer Temperatur von 0 °C. Diese Längendefinition besaß eine Genauigkeit von 10^{-7} und war damit um drei Größenordnungen genauer als das Urmeter von 1799. Kopien dieses Meterprototyps wurden an die Eichinstitute in vielen Ländern vergeben



Besitz offizieller Kopien des Prototyps von 1889 in Deutschland

Gleichzeitig mit dem Pariser Urmeter von 1889, sozusagen der Nummer Null, wurden noch dreißig nummerierte Kopien des dritten Urmeters hergestellt. Diese wurden an die Mitgliedsstaaten verlost. Deutschland erhielt die Kopie Nr. 18. Da das Königreich Bayern 1870, noch vor der Reichsgründung, als eigenständiges Mitglied beigetreten war, nahm es auch an der Verlosung teil und erhielt die Kopie Nr. 7. Während des Dritten Reiches musste Bayern sein Exemplar an die Physikalisch-Technische Reichsanstalt (PTR) Berlin abgeben. Weil die meisten PTR-Laboratorien 1943 von Berlin vor allem nach Weida in Thüringen verlagert worden waren, blieben auch beide Spezimen zwischen 1949 und 1990 im Besitz der DDR. Da Westdeutschland nun ohne Prototyp dastand, erwarb es 1954 die Kopie Nr. 23 von Belgien, das auch zwei Kopien (für Flandern und Wallonien) erhalten hatte. Alle drei Exemplare, die im Fachjargon despektierlich auch „Knüppel“ genannt werden, befinden sich heute in der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt in Braunschweig.



Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Urmeter>

Neudeinitionen des Meters aufgrund Optik und Zeitmessung

Der Meterprototyp wurde erst **1960 abgelöst**, als die Generalkonferenz für Maß und Gewicht den Meter als das 1.650.763,73 fache der Wellenlänge der von Atomen des Nuklids Krypton-86 beim Übergang vom Zustand $5d^5$ zum Zustand $2p10$ ausgesandten, sich im Vakuum ausbreitenden Strahlung definierte. Damit wurden **Genauigkeiten von 10^{-8}** erreicht.

1 Meter ist jene Strecke,
die das Licht im Vakuum
in $1 / 299.792.458$ Sekunden
zurücklegt.

Der „krumme“ Wert für die fest definierte Vakuumlichtgeschwindigkeit wurde gewählt, um die Abweichungen zum alten System möglichst gering zu halten.

Reduziertes Einheitenchaos heute

alte Einheit	*	Faktor	=	neue Einheit		alte Einheit	*	Faktor	=	neue Einheit
Metrische Maßeinheiten										
m	*	0,001	=	km (Kilometer)		km	*	1000	=	m
m	*	0,01	=	hm (Hektometer)		hm	*	100	=	m
m	*	0,1	=	dam (Dekameter)		dam	*	10	=	m
m	*	10	=	dm (Dezimeter)		dm	*	0,1	=	m
m	*	100	=	cm (Zentimeter)		cm	*	0,01	=	m
m	*	1000	=	mm (Millimeter)		mm	*	0,001	=	m
m	*	1000000	=	µm (Mikrometer)		µm	*	0,000001	=	m
m	*	$1 \cdot 10^9$	=	nm (Nanometer)		nm	*	$1 \cdot 10^{-9}$	=	m
m	*	$1 \cdot 10^{10}$	=	Å (Angström)		Å	*	$1 \cdot 10^{-10}$	=	m
m	*	$1 \cdot 10^{12}$	=	pm (Pikometer)		pm	*	$1 \cdot 10^{-12}$	=	m
m	*	$1 \cdot 10^{15}$	=	fm (Femtometer)		fm	*	$1 \cdot 10^{-15}$	=	m
m	*	$1 \cdot 10^{18}$	=	am (Attometer)		am	*	$1 \cdot 10^{-18}$	=	m
m	*	$1 \cdot 10^{21}$	=	zm (Zeptometer)		zm	*	$1 \cdot 10^{-21}$	=	m

Reduziertes Einheitenchaos heute

Britisch/Amerikanisch Maßeinheiten

m	*	39,3700787	=	in (inch - 1" - Zoll)
m	*	3,2808399	=	ft (foot - 1')
m	*	1,0936133	=	yd (yard)
m	*	0,000621371	=	mi (Landmeile)
m	*	0,004971	=	Achtelmeile
m	*	39370,079	=	mil
m	*	39370,079	=	thou
m	*	2846,03518	=	pp (Printer Point)
m	*	4,9709695	=	li (link)
m	*	0,1889	=	rod = 5,5 yd
m	*	0,497	=	chain
m	*	0,00495	=	furlong

in	*	0,0254	=	m
ft	*	0,3048	=	m
yd	*	0,9144	=	m
mi	*	1609,344	=	m
Achtelmeile	*	201,168	=	m
mil	*	0,0000254	=	m
thou	*	0,0000254	=	m
pp	*	0,000351366	=	m
li	*	0,201168	=	m
rod	*	5,292	=	m
chain	*	2,0117	=	m
furlong	*	201,17	=	m

Nautische Maßeinheiten

m	*	0,000539954	=	Seemeile
m	*	0,5468066	=	Klafter
m	*	0,5468066	=	fm (Faden)

Seemeile	*	1852,01	=	m
Klafter	*	1,8288	=	m
fm	*	1,8288	=	m

Astronomische Maßeinheiten

m	*	0,006684587*10 ⁻⁹	=	AE
m	*	3,240779*10 ⁻¹⁷	=	pc (Parsec)
m	*	1,0570008*10 ⁻¹⁶	=	Lj (Lichtjahr)
m	*	3,335642*10 ⁻⁹	=	Lichtsekunde

AE	*	149,597870691*10 ⁹	=	m
pc	*	3,085677857*10 ¹⁶	=	m
Lj	*	9,460730473*10 ¹⁵	=	m
Lichtsekunde	*	299792363,8	=	m

Reduziertes Einheitenchaos heute

Japanische Maßeinheiten

m	*	33000	=	Mo		Mo	*	0,00003030	=	m
m	*	3300	=	Rin		Rin	*	0,0003030	=	m
m	*	330	=	Bu		Bu	*	0,003030	=	m
m	*	33	=	Sun		Sun	*	0,03030	=	m
m	*	3,3	=	Shaku		Shaku	*	0,303030	=	m
m	*	0,55	=	Ken		Ken	*	1,818181	=	m
m	*	0,33	=	Jo		Jo	*	3,030303	=	m
m	*	0,009166	=	Cho		Cho	*	109,090909	=	m

Sonstige Maßeinheiten

m	*	0,000408163	=	Leuga keltisch		Leuga	*	2450	=	m
m	*	390,9304	=	Linie Feinmechanik		Linie	*	0,002558	=	m
m	*	2666,66666	=	dp (Didot Punkt)		dp	*	0,000375	=	m
m	*	0,1988388	=	R (metr. Rute)		R	*	5,0	=	m
m	*	0,00025463	=	Ri		Ri	*	3927,2727	=	m
m	*	0,00093738	=	Werst russisch		Werst	*	1066,8	=	m

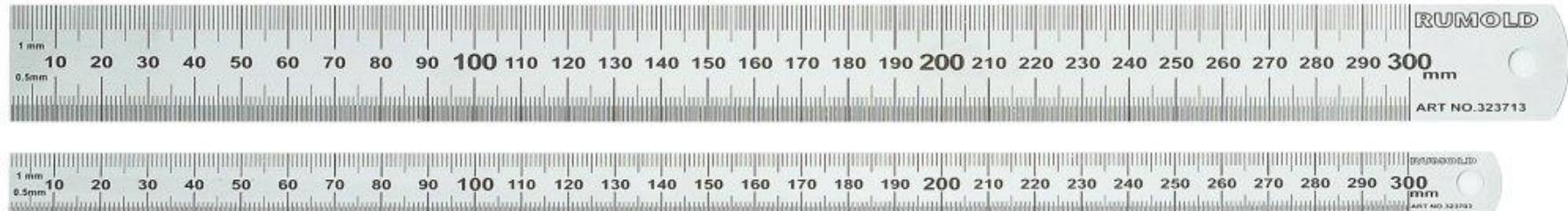
gängige heutige Entfernungsmäße neben dem „Meter“

Foot (Feet)	= 0,3048 m
Yard	= 0,9144 m
Englische Meile	= 1609,34 m
Seemeile	= 1852,01 m
Faden (Lotungstiefe)	= 1,82 m
Chain (Kette)	= 20,1168 m

Quelle: http://www.schweizer-fn.de/umrech/v2_laenge.htm

3.2

Methoden der Streckenmessung



Lineal/Metermaß



Straßenmessrad



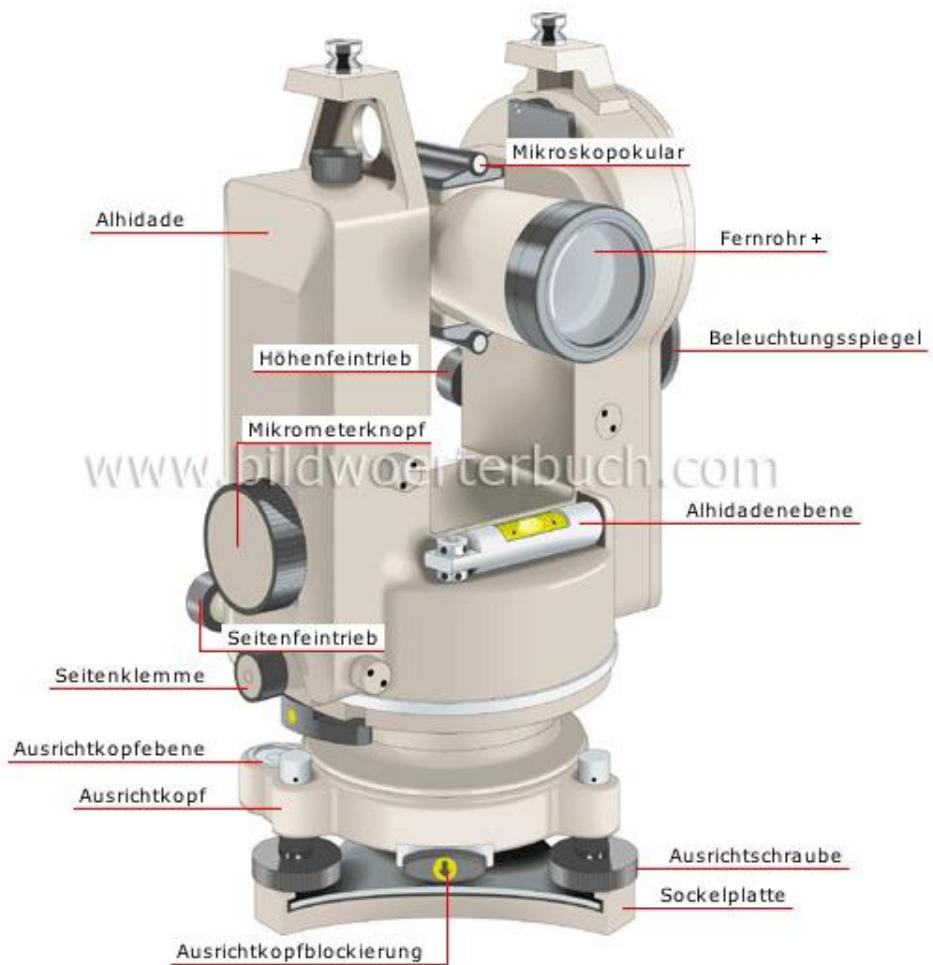
Schrittzähler

Quelle: <http://bildwoerterbuch.pons.eu/wissenschaft/messinstrumente/entfernungsmessung.php>



Laserentfernungsmeßgeräte

Quelle: <http://heimwerkerlexikon.selbermachen.de/system/images/article/images/large/23/laser-entfernungsmeßgeräte.jpg?1278579663>



Theodolit

Quelle: <http://bildwoerterbuch.pons.eu/wissenschaft/messinstrumente/winkelmessung/theodolit.php>

Tachymeter/Totalstation:

Theodolit mit
direkter
Entfernungs-
messung



Theodolit

Quelle: <http://bildwoerterbuch.pons.eu/wissenschaft/messinstrumente/winkelmessung/theodolit.php>

Quelle: http://www.messwerkzeuge24.de/images/product_images/popup_images/a1200_0.jpg

Die Auswahl der Messmethode richtet sich nach:

**der erforderlichen
Genauigkeit**

**der Größe des
Aufnahmegebietes**

**den topographischen
Gegebenheiten**

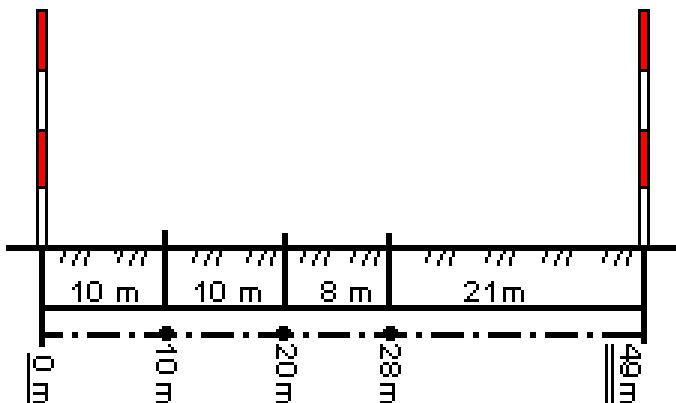
Methoden der Streckenmessung

- (1) mechanische Streckenmessung
- (2) optische Streckenmessung
- (3) elektrooptische Streckenmessung
- (4) Streckenmessung mit Hilfe von GPS

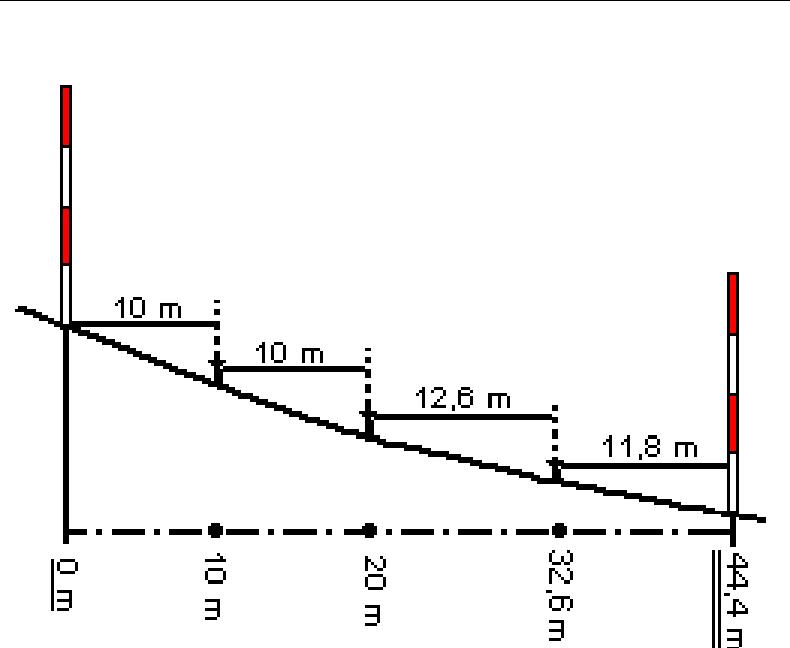
(1) Mechanische Streckenmessung

Mechanische Messinstrumente:

z.B.: Maßband, Zollstock, ...



Horizontalmessung



Staffelmessung

Fehlerkorrektur bei Maßbandmessung:

Ein frei hängendes Messband nimmt durch sein Eigengewicht die Form einer Kettenlinie an. Dadurch wird grundsätzlich eine zu große Strecke abgelesen. Die an der abgelesenen Strecke anzubringende Korrektur r_d dieses Fehlers kann man in guter Näherung nach der folgenden Formel errechnen (dabei sind d_a die abgelesene Streckenlänge und p der Betrag des Durchhangs):

$$r_d = -\frac{8}{3} \cdot \frac{p^2}{d_a} \quad d_a = \text{abgelesene Bandlänge} \quad p = \text{Durchhang} \quad (3-5)$$

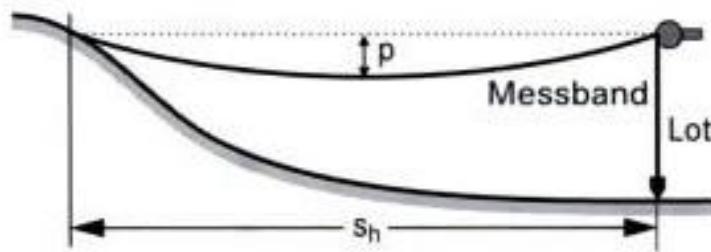


Abb. 3.19: Durchhang

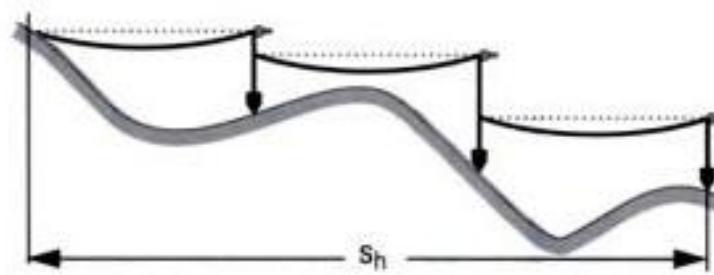


Abb.3.20: Staffelmessung

Näherungsformel zur Fehlerkorrektur bei durchhängendem Maßband:

$$r_d = -\frac{8}{3} \cdot \frac{p^2}{d_a}$$

r_d = Fehlerkorrektur

d_a = abgelesene Bandlänge

p = Durchhang

Fehlerkorrekturwert mit Messergebnis verrechnen!

Beispielaufgabe:

Mit einem Maßband wird eine Strecke von genau 20m gemessen.
Dabei hängt das Maßband 20cm durch.

Wie lange ist die gemessene Strecke wirklich?

Berechne die Fehlerkorrektur r_d der Distanzmessung d_a .

Lösung:

$$r_d = -\frac{8}{3} \cdot \frac{p^2}{d_a} \quad d_a = \text{abgelesene Bandlänge} \quad (3-5)$$

$p = \text{Durchhang}$

Quelle: Handbuch Bauwerksvermessung: Geodäsie, Photogrammetrie, Laserscanning von Albert Wiedemann

Beispiel: Die Strecke, welche mit einem in der Mitte 20 cm durchhängenden 20 m Messband gemessen wird, ist effektiv nur 19,995 m lang.

$$r_d = -\frac{8}{3} \cdot \frac{p^2}{d_a} = -\frac{8}{3} \cdot \frac{0,20^2 \text{ m}^2}{20 \text{ m}} = -\frac{8}{3} \cdot 0,002 \text{ m} = -0,005 \text{ m}$$

Beispielaufgabe B:

Mit einem Maßband wird eine Strecke von genau 20m gemessen.
Dabei hängt das Maßband **2m** durch.

Wie lange ist die gemessene Strecke wirklich?

Berechne die Fehlerkorrektur r_d der Distanzmessung d_a .

Lösung:

$$r_d = -\frac{8}{3} \cdot \frac{p^2}{d_a} \quad d_a = \text{abgelesene Bandlänge} \quad p = \text{Durchhang} \quad (3-5)$$

Quelle: Handbuch Bauwerksvermessung: Geodäsie, Photogrammetrie, Laserscanning von Albert Wiedemann

Weitere Korrekturen:

- Maßbandkalibrierung
- Temperaturkorrektur
- Spannkraftkorrektur

Für genaue Messungen müssen mehrere zusätzliche Korrekturen angebracht werden, und zwar eine Korrektur auf der Basis einer Kalibrierung des Messbandes k_k , die Temperaturkorrektur k_t eine Spannkraftkorrektur k_F .

$$s = d_a + k_k + k_t + k_F \quad d_a = \text{abgelesene Bandlänge} \quad (3-6)$$

Die Kalibrierkorrektion kann angebracht werden, wenn das Messband auf einem Komparator oder einer Vergleichsstrecke geeicht wurde:

$$k_k = \frac{d_{ist} \cdot d_a}{d_0} \quad (3-7)$$

d_{ist} = Ist-Länge Bandlänge, tatsächliche Länge durch Kalibrierung bestimmt
 d_0 = Solllänge des Bandes unter Normalbedingungen (Nennmaß)

(2) Optische Streckenmessung

Messung der Strecke aus einem Dreieck, bei dem 3 Größen bekannt sind!

a, b Katheten schließen den rechten Winkel bei **C** ein
c Hypotenuse längste Strecke, verbindet beide Katheten zwischen **A** und **B**

a = Ankathete Schenkel des Winkels **α**
b = Gegenkathete liegt dem Winkel **α** gegenüber

$$\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1} = \text{konst}$$

die Dreiecke sind ähnlich

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ Winkelsumme im Dreieck (rechtwinklig $\gamma = 90^\circ$)

$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$	$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$
$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a}$	$\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{a}{b}$

Quelle: http://www.elektroniktutor.de/mathe/ma_pict/winkel9.gif

(2) Optische Streckenmessung

Einführung bekannter Parameter:

- Basislatte mit bekannter Länge (b)
(muss senkrecht auf der zu messenden Strecke stehen)
 - Messung des Parallaktischen Winkels
(Winkeldifferenz zwischen den Winkeln am Ende der Basislatte)
- Ableitung der Strecke (s)

(2) Optische Streckenmessung

Einführung bekannter Parameter:

- Basislatte mit bekannter Länge (b)
(muss senkrecht auf der zu messenden Strecke stehen)
 - Messung des Parallaktischen Winkels
(Winkeldifferenz zwischen den Winkeln am Ende der Basislatte)
- Ableitung der Strecke (s)

$$s_s = \frac{b}{2} \cdot \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (3-10)$$

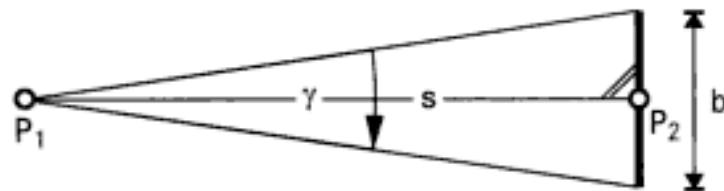


Abb. 3.21: Prinzip der Basislattenmessung
(Grundrissdarstellung)

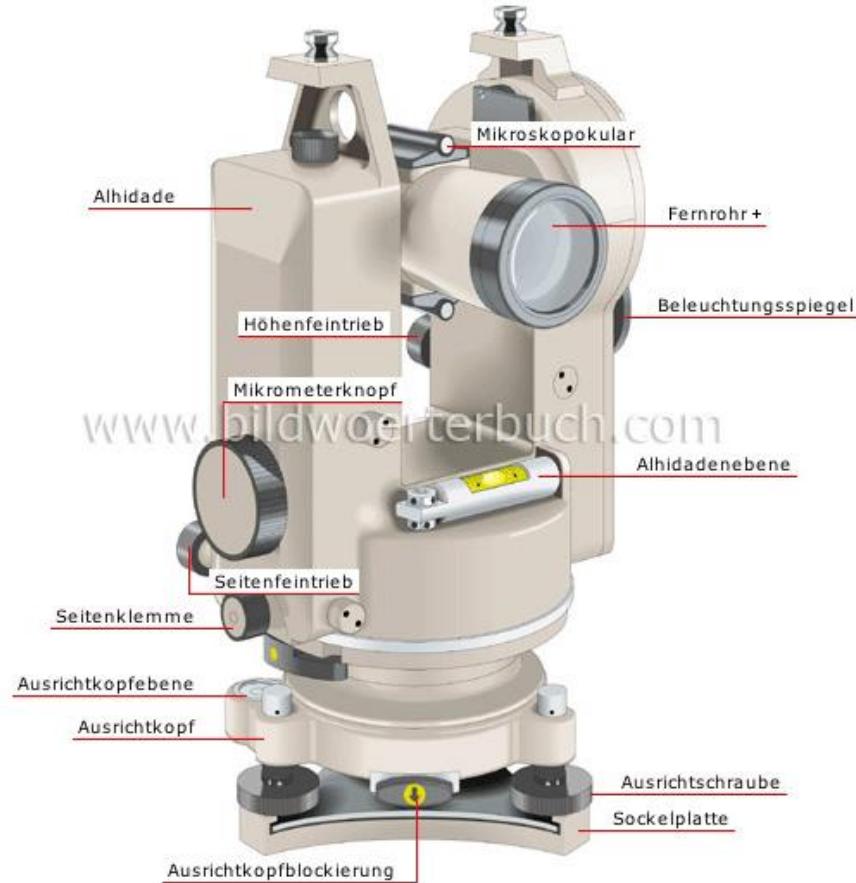


Abb. 3.22: Basislatte auf einem Stativ

Quelle: Handbuch Bauwerksvermessung: Geodäsie, Photogrammetrie, Laserscanning von Albert Wiedemann

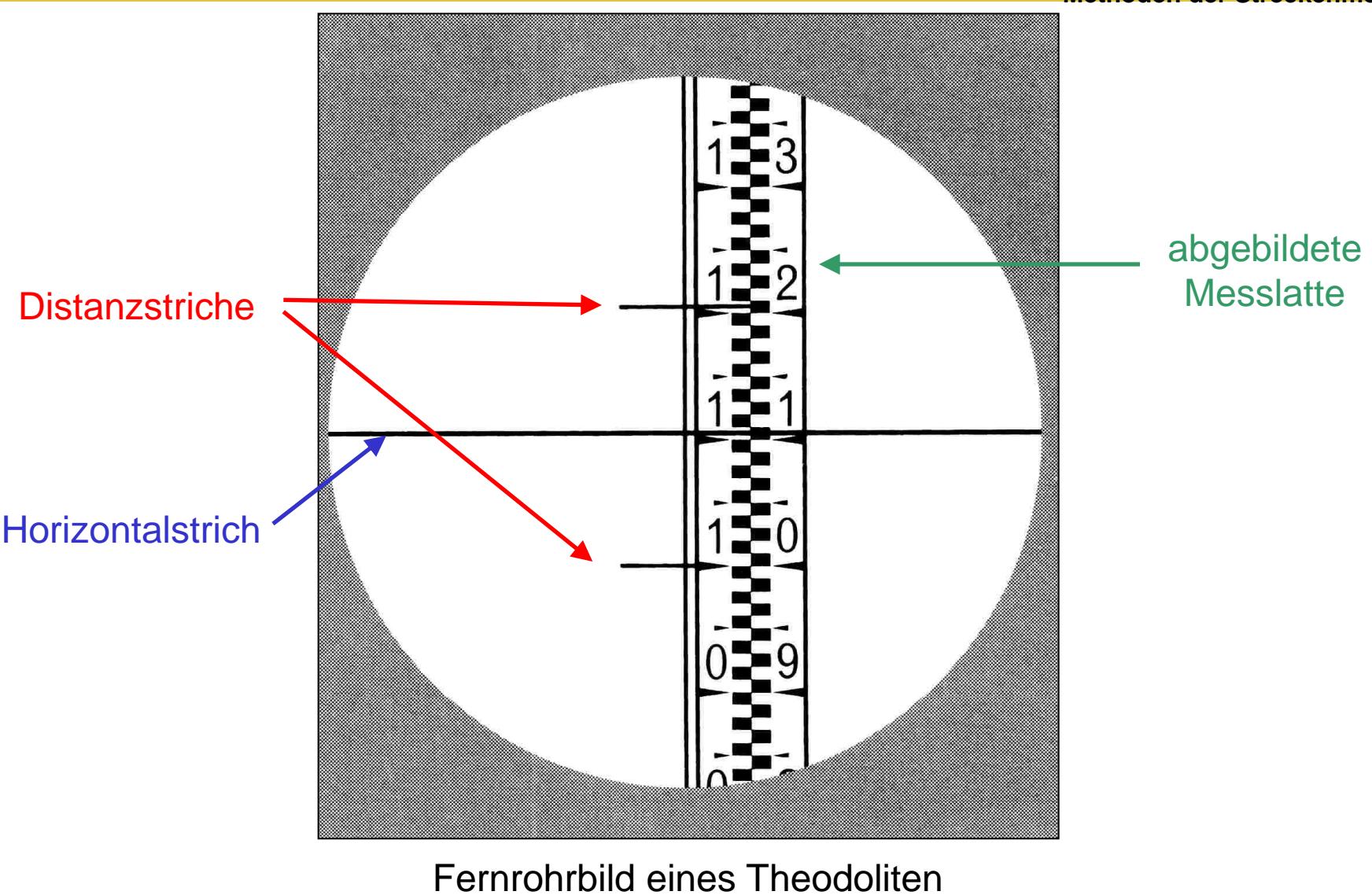
Durchführung

Distanzmessung mit Reichenbach'schen Distanzfäden durch einen Theodoliten
(Verfahren mit variabler Basis und konstantem parallaktischem Winkel)



Theodolit

Quelle: [http://bildwoerterbuch.pons.eu/wissenschaft/
messinstrumente/winkelmessung/theodolit.php](http://bildwoerterbuch.pons.eu/wissenschaft/messinstrumente/winkelmessung/theodolit.php)



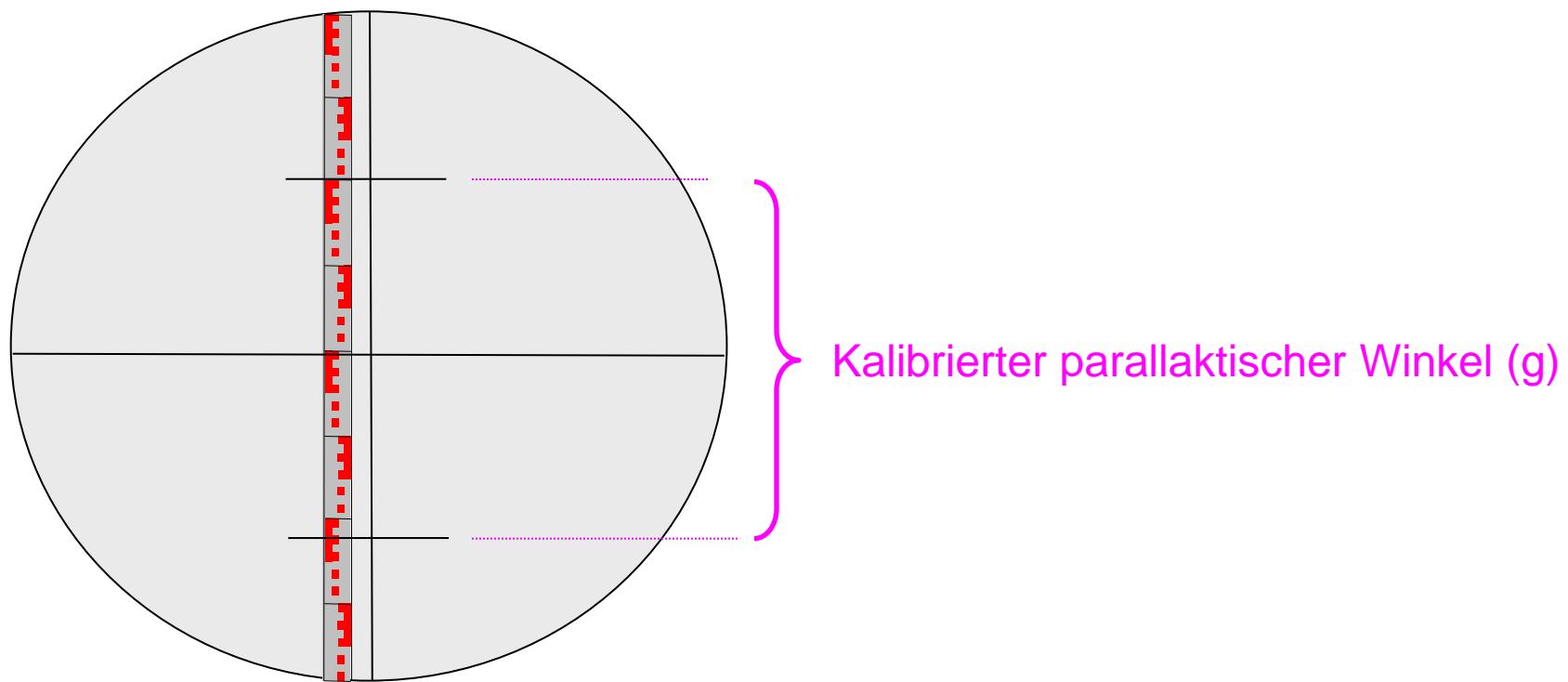
Quelle: http://www.history-of-geodesy.ch/images/upload/Distanzstriche_204.jpg

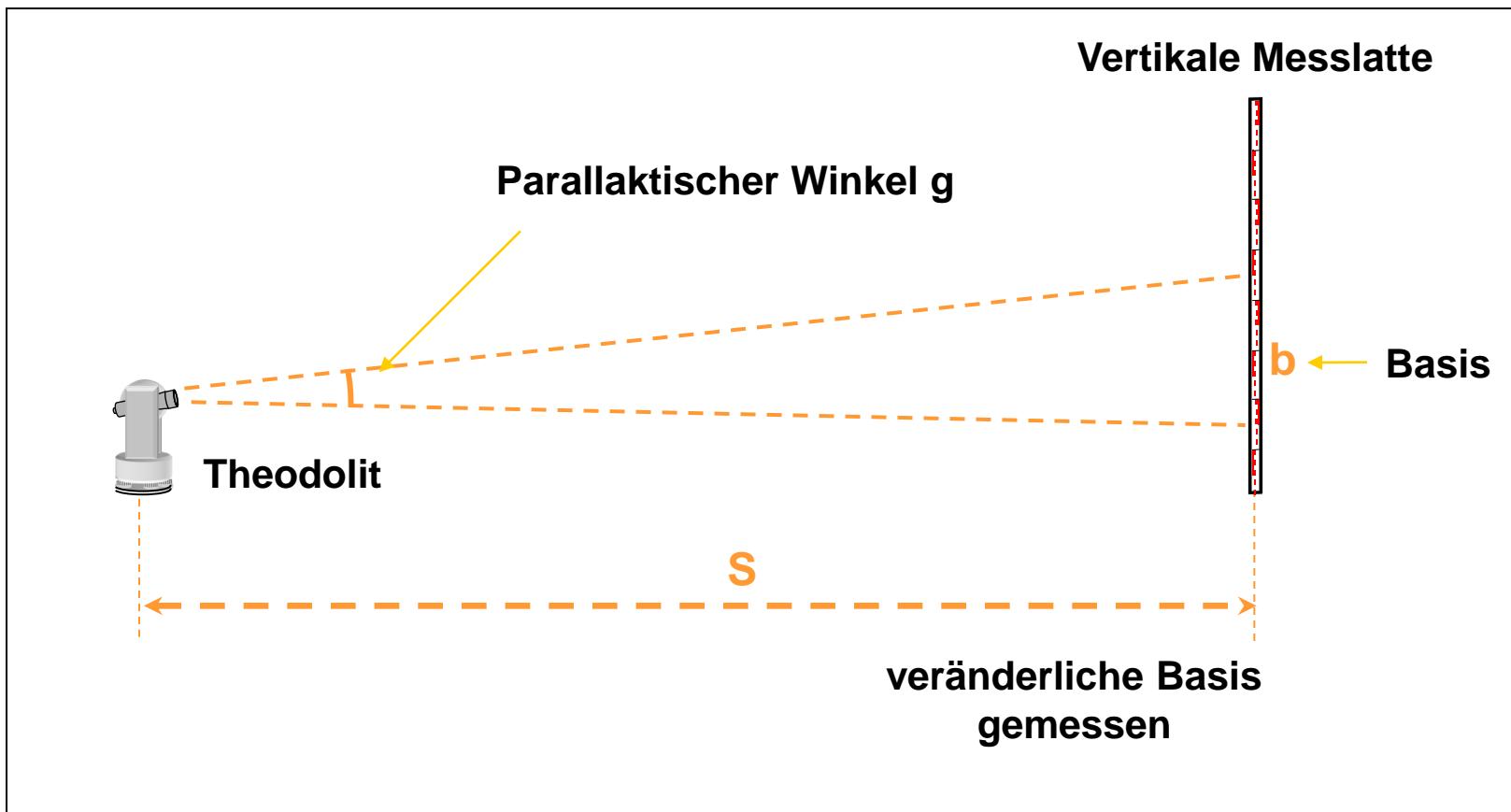
patrick.reidelstuerz@th-deg.de

Reichenbachsche Distanzfäden:

Parallel zum Horizontalstrich: zwei zusätzliche Striche in einem Messfernrohr;

Beide Striche definieren einen **kalibrierten parallaktischen Winkel (g)**;





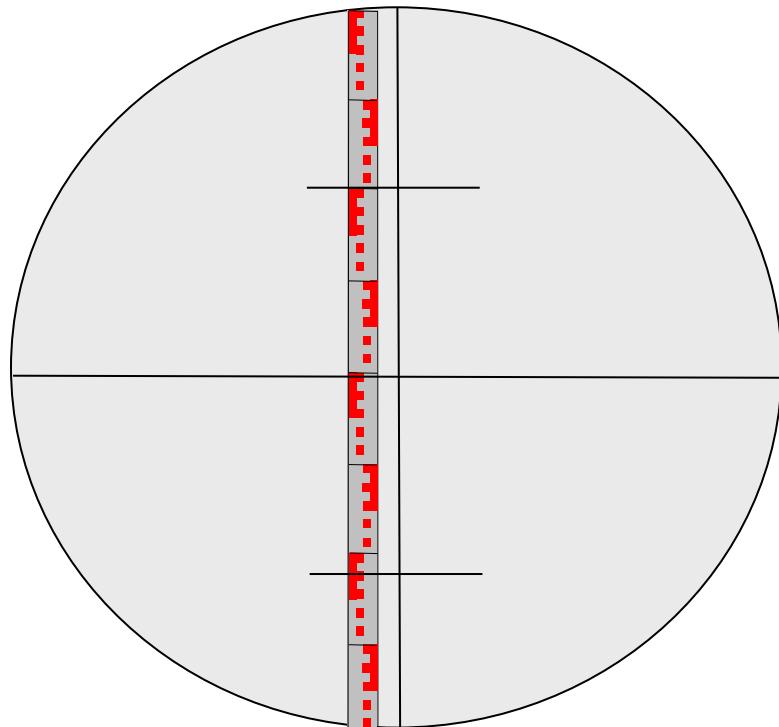
Durch geeignete Dimensionierung des parallaktischen Winkels vereinfacht sich die Formel zu

$$S = 100 * b$$

Beispielaufgabe:

Sie sehen folgendes Bild im Theodoliten:

Wie weit ist die Messlatte von Ihnen entfernt?



Lösung:

Ableseung der Basis (b) zwischen den Reichenbachschen Distanzfäden: 42,4cm

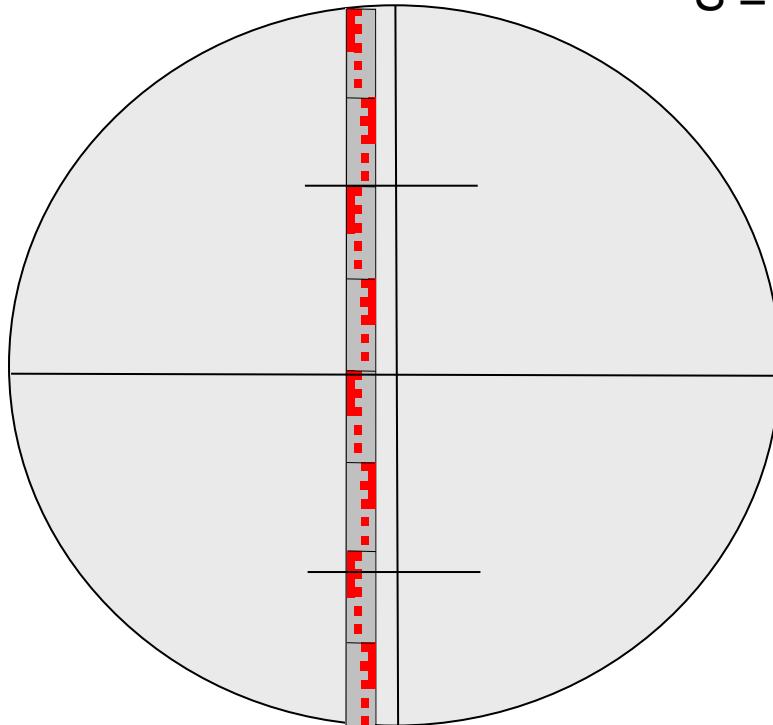
Faktor für die kalibrierten Distanzfäden: $S = 100 * b$

Entfernung:

$$S = 100 * 42,4\text{cm}$$

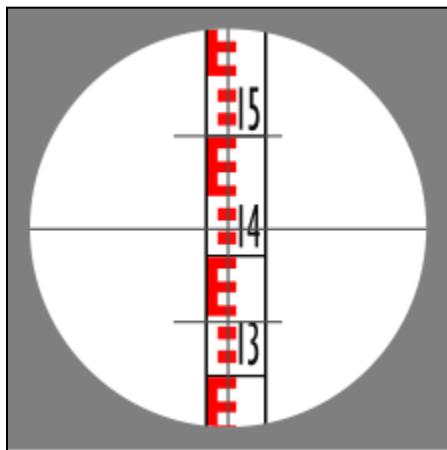
$$S = 4240\text{cm}$$

$$S = 42,40\text{m}$$

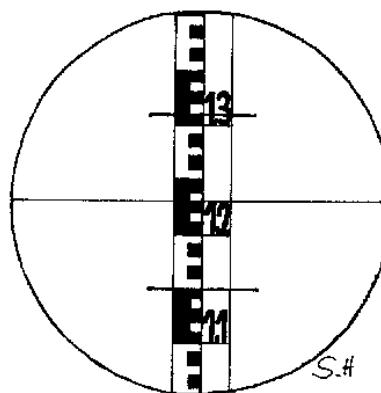


Kleine Übung: In welcher Entfernung stehen die Nivellierlatten?

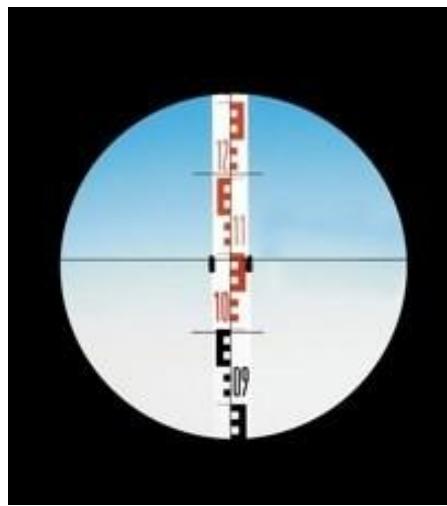
(a)



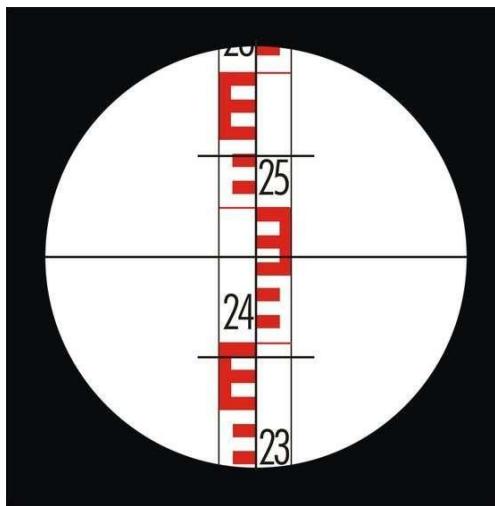
(b)



(c)



(e)



(3) Elektrooptische Streckenmessung

Elektrooptische Streckenmessung:

→ Streckenbestimmung durch die Laufzeit der elektromagnetischen Wellen

Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen: $c = 300\ 000 \text{ km/s}$

Berechnung der Strecke (s) durch die gemessene Zeit (t)

$$s = c * t$$

$$[\text{km/s} * \text{s}] = [\text{km}]$$

Eine sehr präzise Zeitmessung ist erforderlich!

Für 1cm braucht die Welle nur Bruchteile einer Sekunde!

Zusammenfassung von

- Theodolit und
- elektromagnetische Entfernungsmesser

→ Tachymeter/Totalstation!

Tachymeter / Totalstation:
Theodolit mit direkter
Entfernungsmessung



Zur Vereinfachung der Messung verwendet man an Vermessungspunkten:

→ Zieltafeln mit Reflektoren

Sie werden auf einem Stativ über die Vermessungspunkte gestellt.



Totalstation mit Reflektor und Zieltafel

Elektrooptische Streckenmessung mit Handlasergeräten



Laser:

Aktive Einheit:

- bestehend aus Sender und Empfänger:
→ sendet Zielstrahl aus

Passive Einheit:

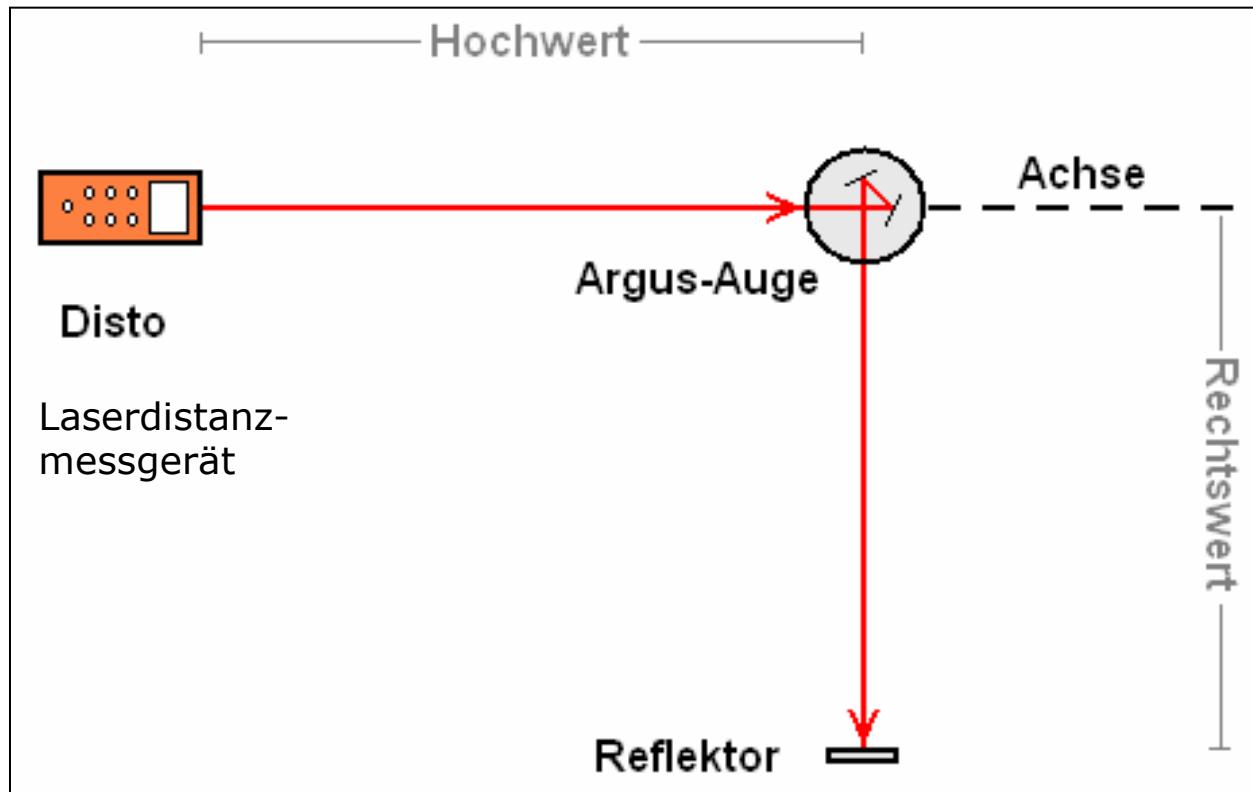
→ reflektiert Zielstrahl zurück

Gemessen wird die Laufzeit des Signals über Hin- und Rückweg

Handlasergeräte gibt es seit den 80er Jahren

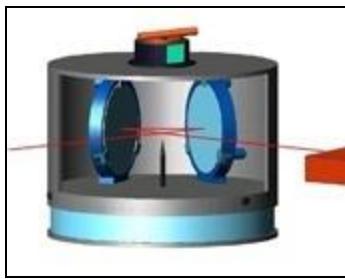
- reflektorlose Messung bis 100m Entfernung möglich
- häufige Anwendung im Bauaufmaß
- sorgfältige Horizontierung erforderlich
- Genauigkeit etwa: 2-5mm

Hohe Effektivitätssteigerung unter Verwendung von „Argusaugen“
→ Ermöglicht Messung rechtwinklig ums Eck



Quelle: [http://tu-dresden.de/die_tu_dresden/fakultaeten/\(...\)/papers/fuhrland.pdf](http://tu-dresden.de/die_tu_dresden/fakultaeten/(...)/papers/fuhrland.pdf)

→ Verwendung zur Effektivitätssteigerung:



Prinzipdarstellung



Abbildung



Quelle: <http://www.jetzweb.de/argus-vermessungsgeraete/argusauge.htm>

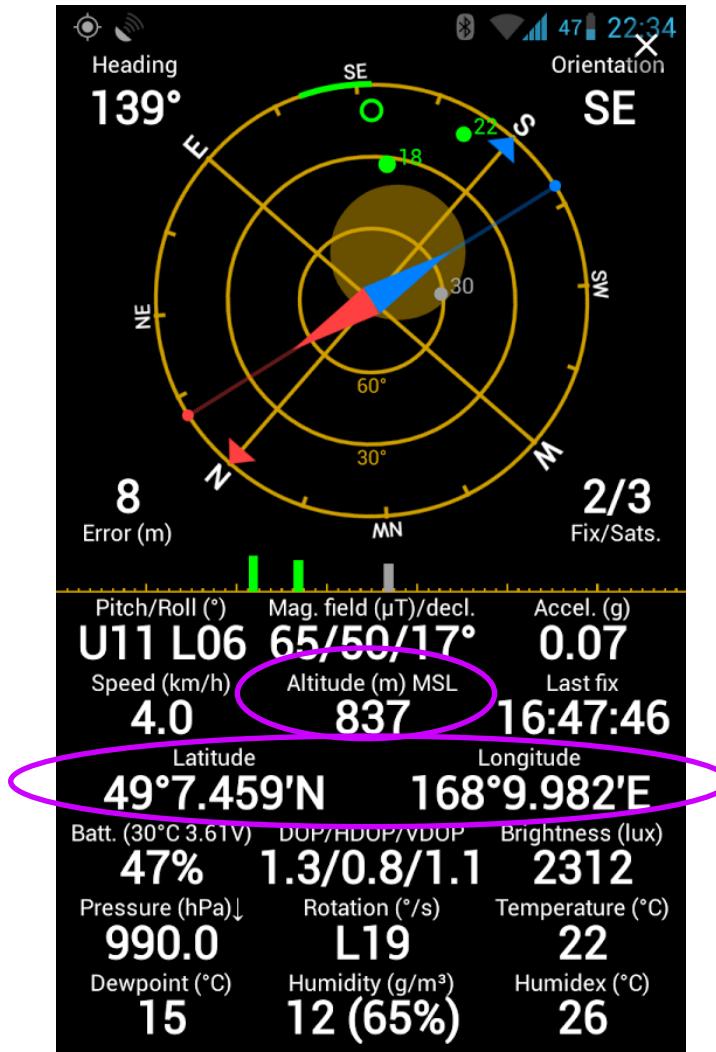
Quelle: http://www.jetzweb.de/argus-vermessungsgeraete/bilder/argus_auge_umecke.jpg

(4) Streckenmessung mit Hilfe von GPS

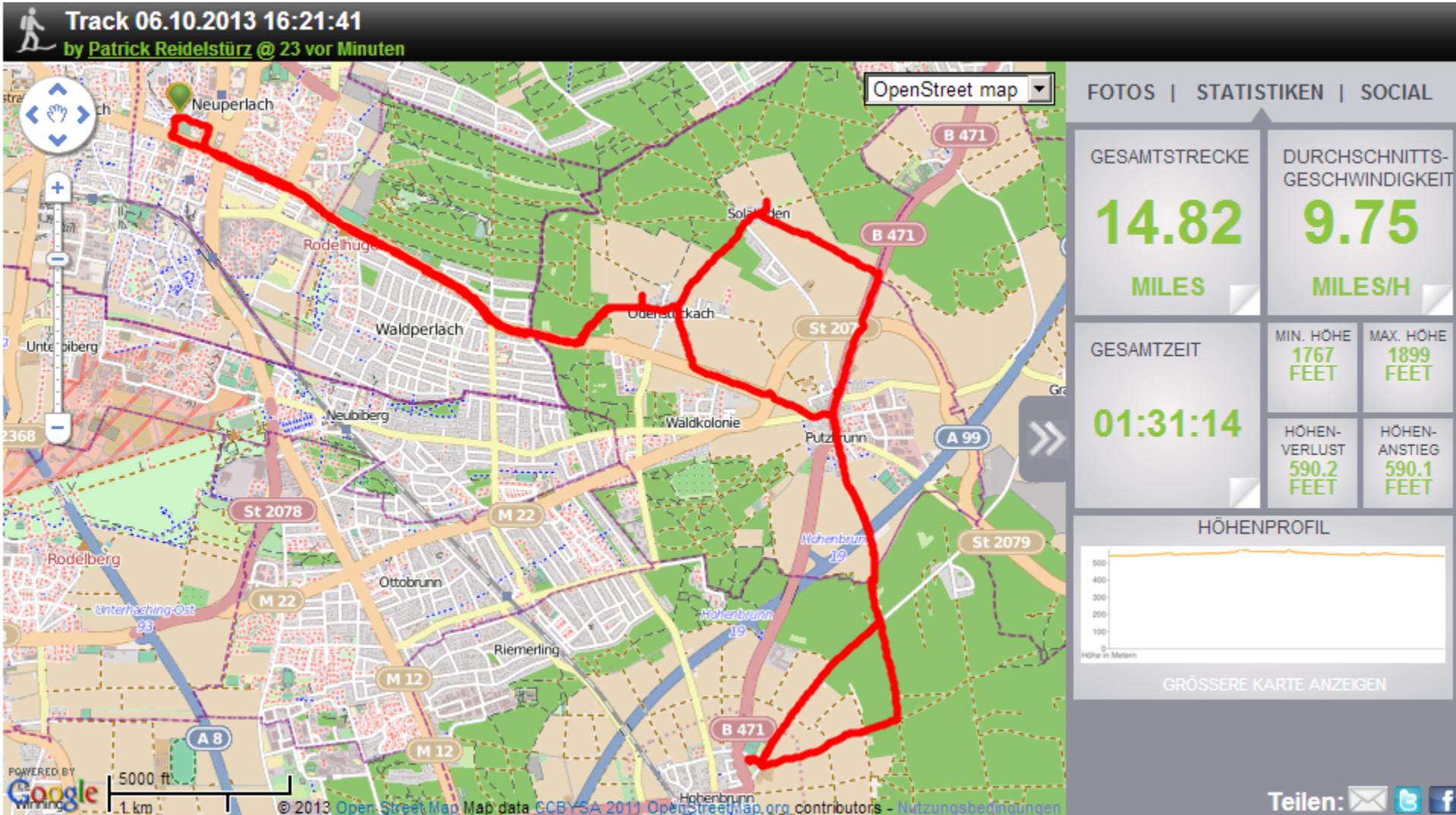
(4) Streckenmessung mit Hilfe von GPS

- (1) Koordinatenbestimmung mittels GPS
- (2) Streckenbestimmung mittels GPS
- (3) Errechnung der Strecke im virtuellen Globus (referenzierte Orthobilder)

Beispiel 1: Smartphone – App: „GPS Status“ auslesen



Beispiel 2: Smartphone – App: GPS Tracker „View Ranger“



Beispiel 3: GPS Tracker – Cessna Flug Borkenkäferüberwachung





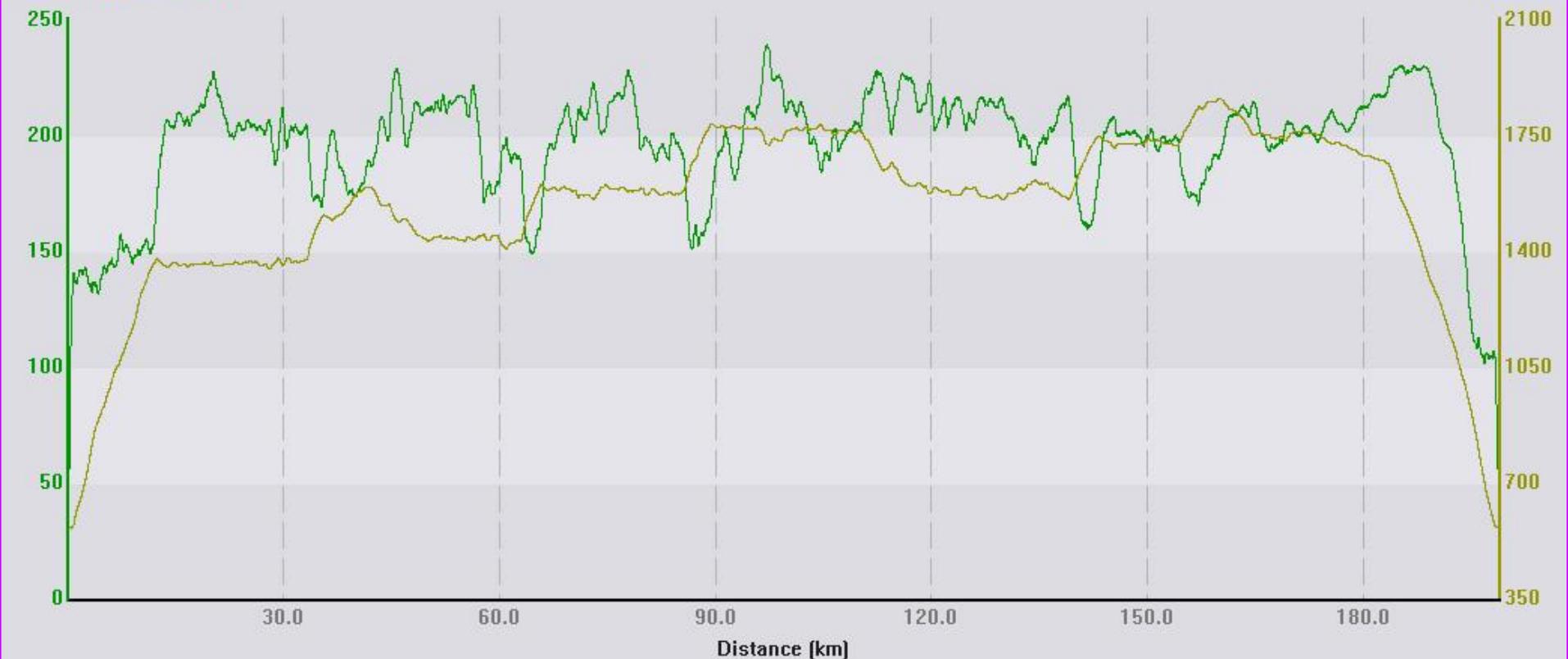
Zeit: 1hr 36min Distance: 198.9km

Moving Time: 1hr 3min Stopped Time: 33min

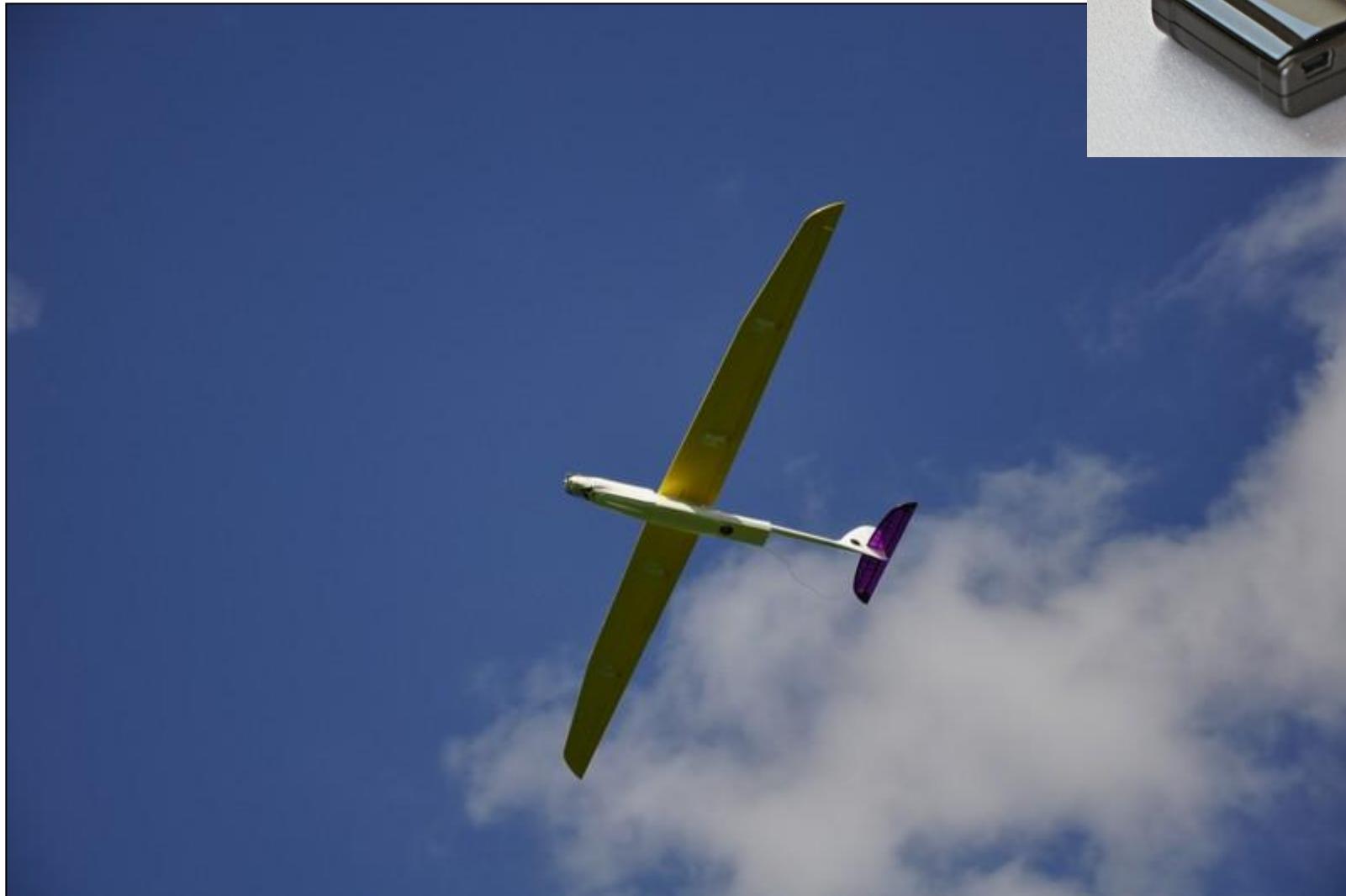
Max Speed: 239km/h Average Speed: 123km/h

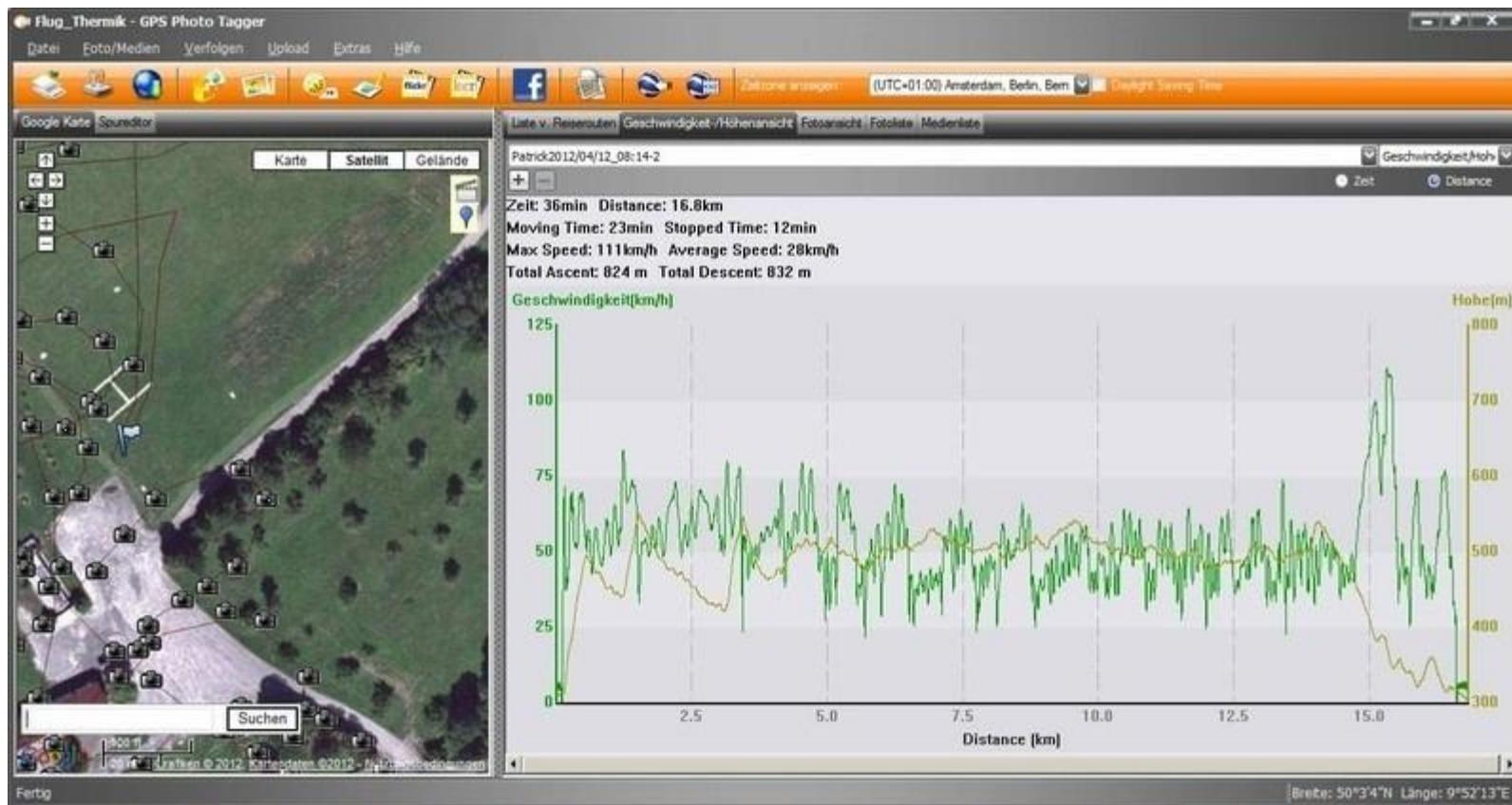
Total Ascent: 2358 m Total Descent: 2351 m

Geschwindigkeit(km/h)

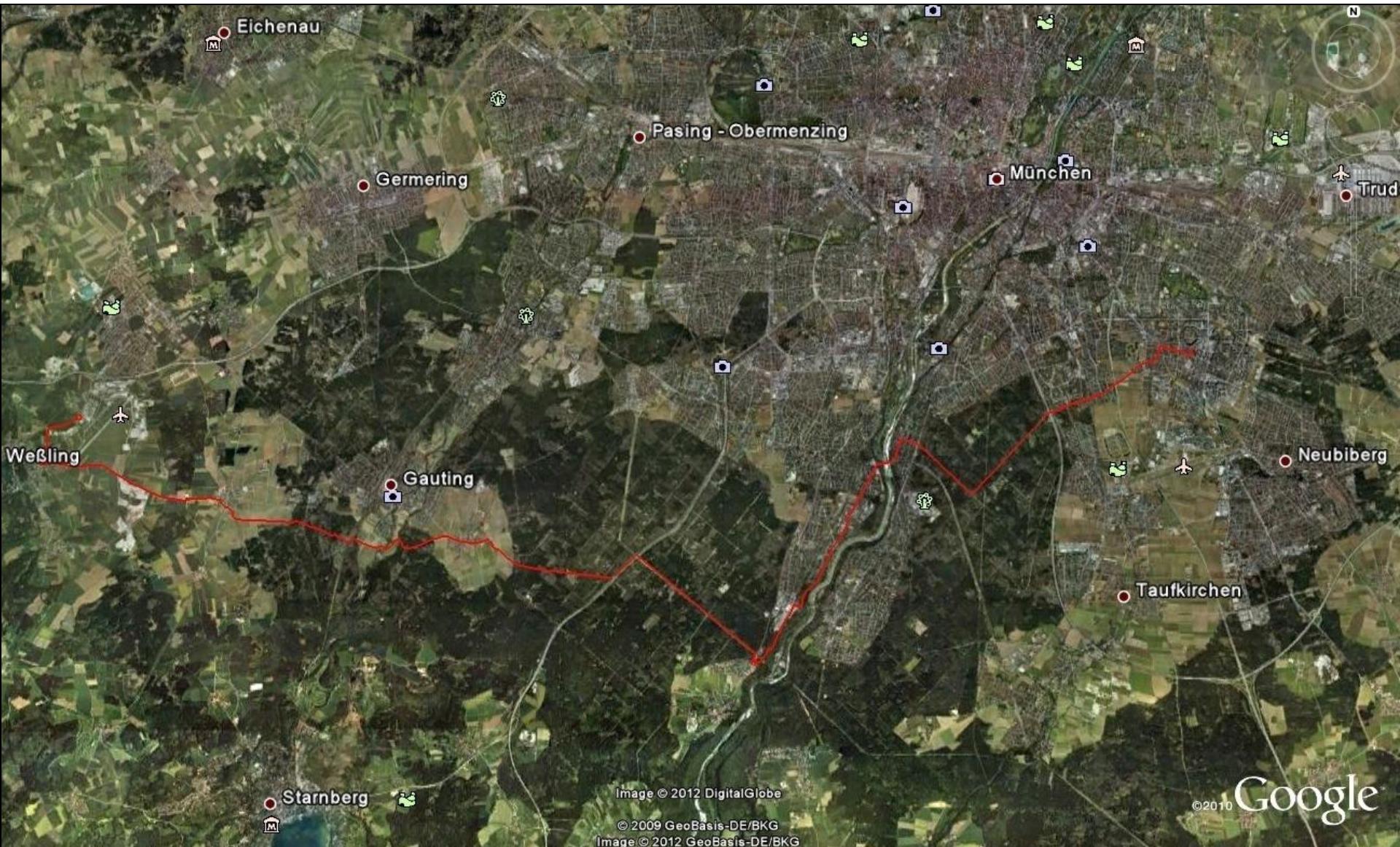


Beispiel 4: GPS Bildverortung - UAV Flug





Beispiel 5: Wegabgriff an georeferenzierten Karten



Fahrradweg: 38,9km

Kleine Übung – Bilder taggen:

Vorarbeit (Preprozessing):

- GPS Logger einrichten (Software: „GPS view“)
- Kamerazeit mit Satellitenzeit synchronisieren

Datenerfassung:

- Spaziergang:
 - GPS Logger mitlaufen lassen,
 - ab und zu einen POI setzen
- An beliebigen Stellen Bilder machen

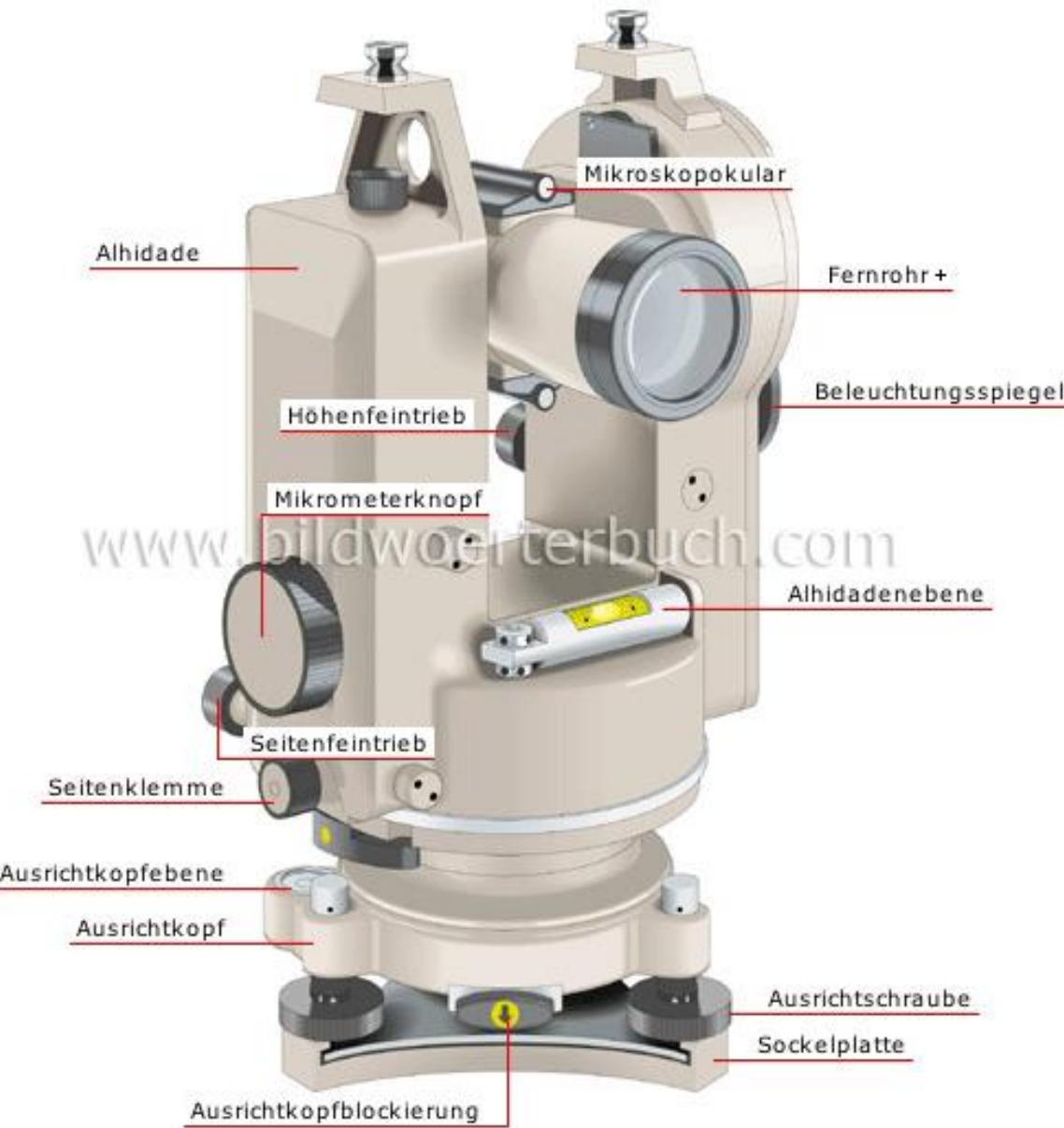
Nacharbeit (Postprozessing):

- GPS Log auslesen (Software: „GPS photo tagger“)
- GPS Log abspeichern
- KML Export / In Google earth anschauen
- Fotos auslesen
- Fotos taggen
- KMZ Export in Google Earth anschauen

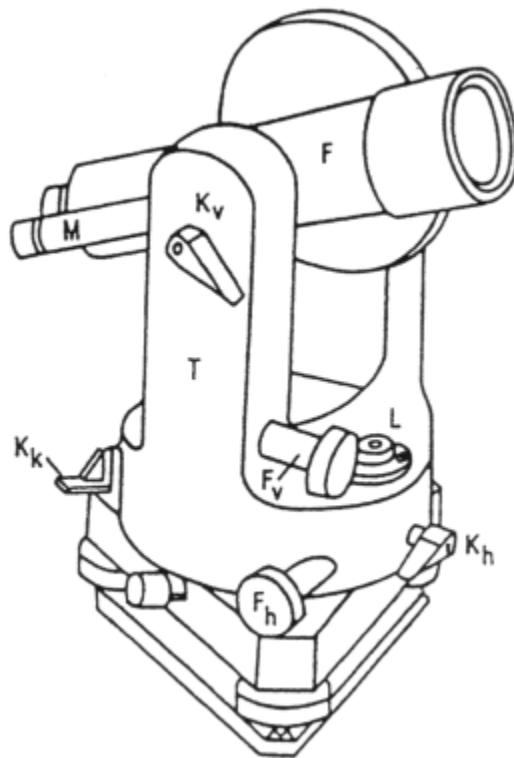


3.3 Richtungsmessungen / Winkelmessungen

Theodolit

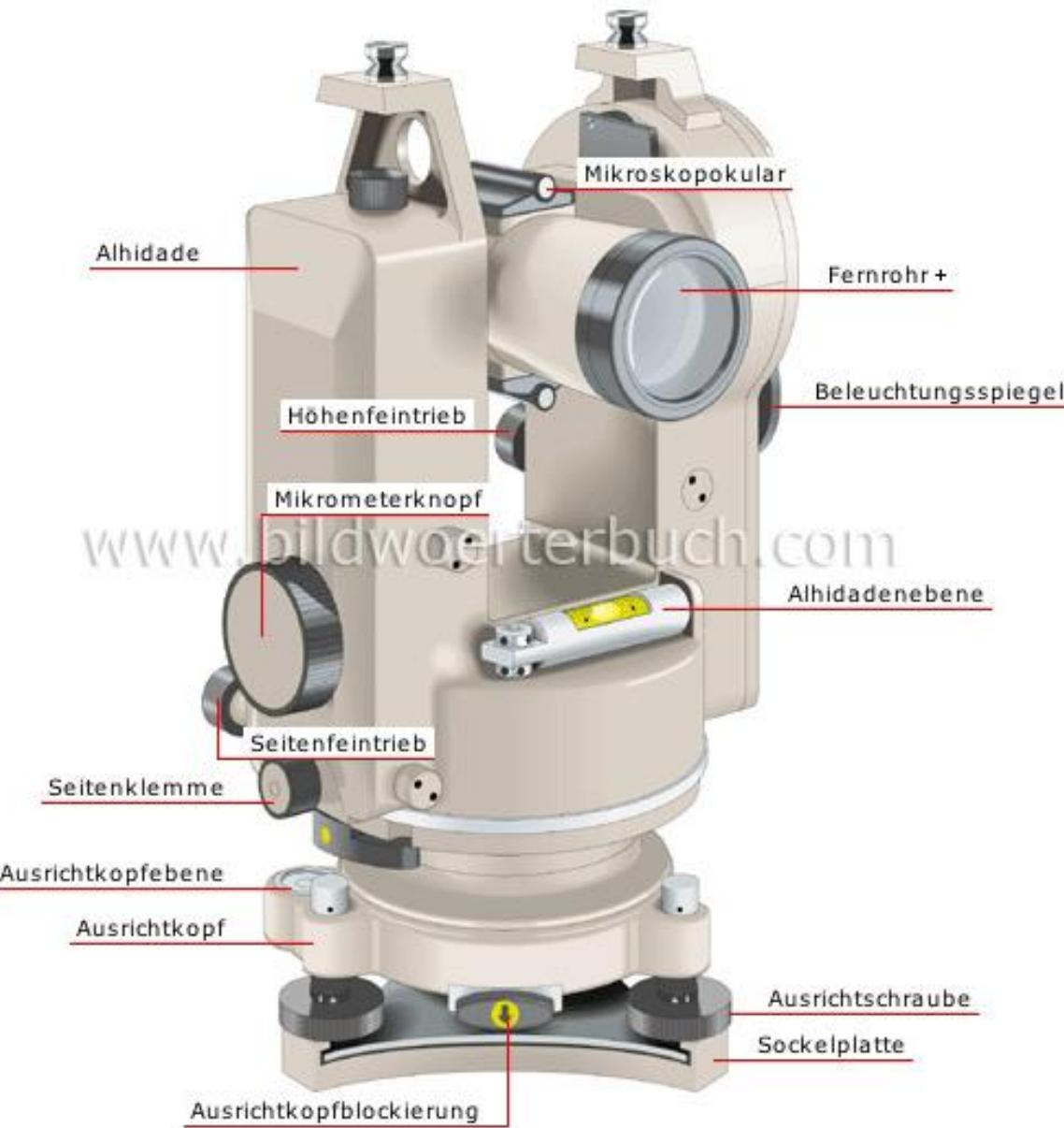


- Instrument zur genauen Bestimmung von Vertikal- und Horizontalwinkeln
- es werden Punkte anvisiert und die Winkel zwischen Punkten ermittelt
- wird benötigt,
um Positionen von Punkten in einem Koordinatensystem zu bestimmen
- Punkte → Polygonzüge

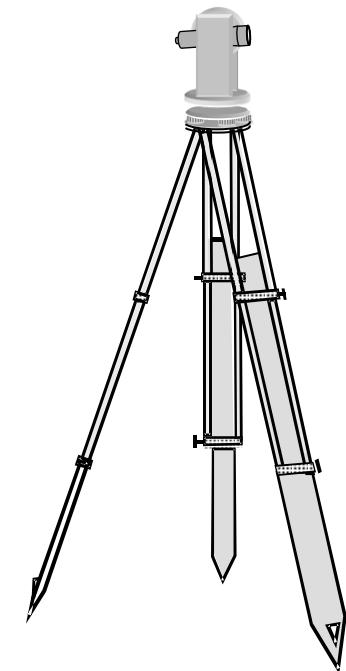
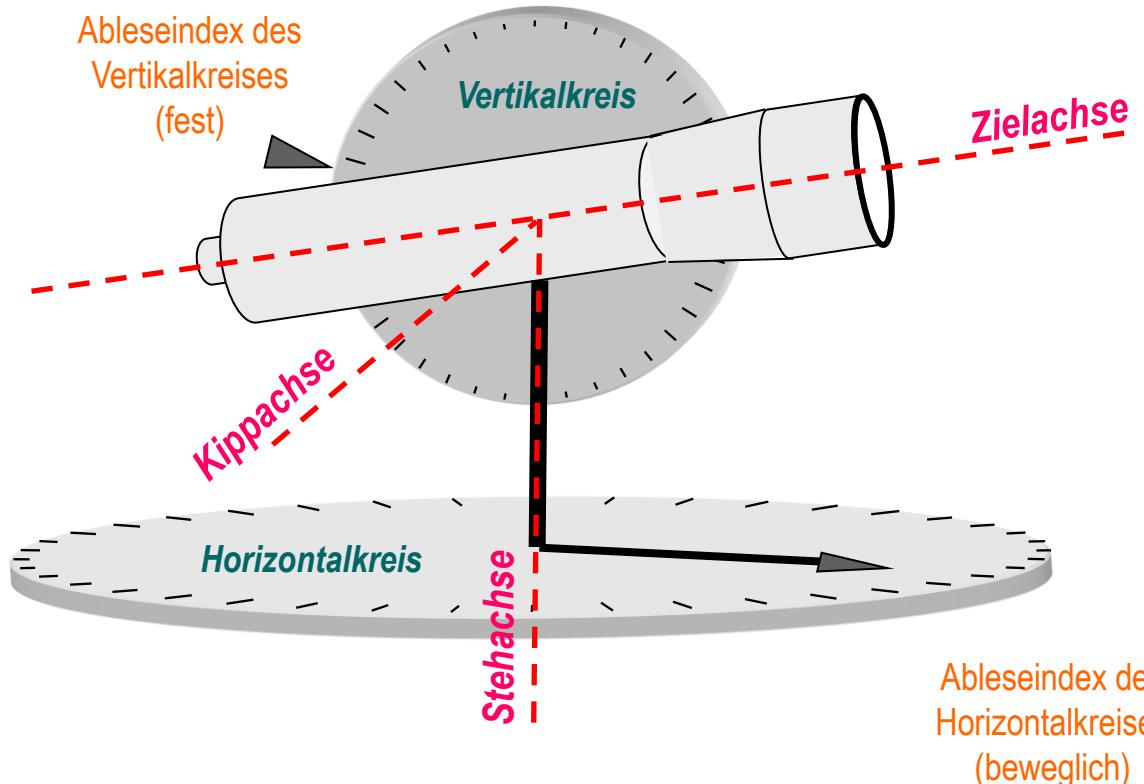


T	=	Fernrohrträger
F	=	Fernrohr
Kv	=	Klemmvorrichtung zur Feststellung der Kippachse (Höhenklemme)
Kh	=	Seitenklemme
L	=	Dosenlibelle
Fv	=	Höhenfeintrieb
Fh	=	Seitenfeintrieb
M	=	Ablesemikroskop

Theodolit



Richtungsmessung: Beispiel Theodolit



Zur besseren Veranschaulichung



Quelle: [http://www.travemuende-aktuell.de/aktuell/
artikel/bilder/2008/b_11860_3.jpg](http://www.travemuende-aktuell.de/aktuell/artikel/bilder/2008/b_11860_3.jpg)

Theodolit aus dem Jahr 1670:



Anwendung der Winkelmeßfunktionen des Theodoliten:



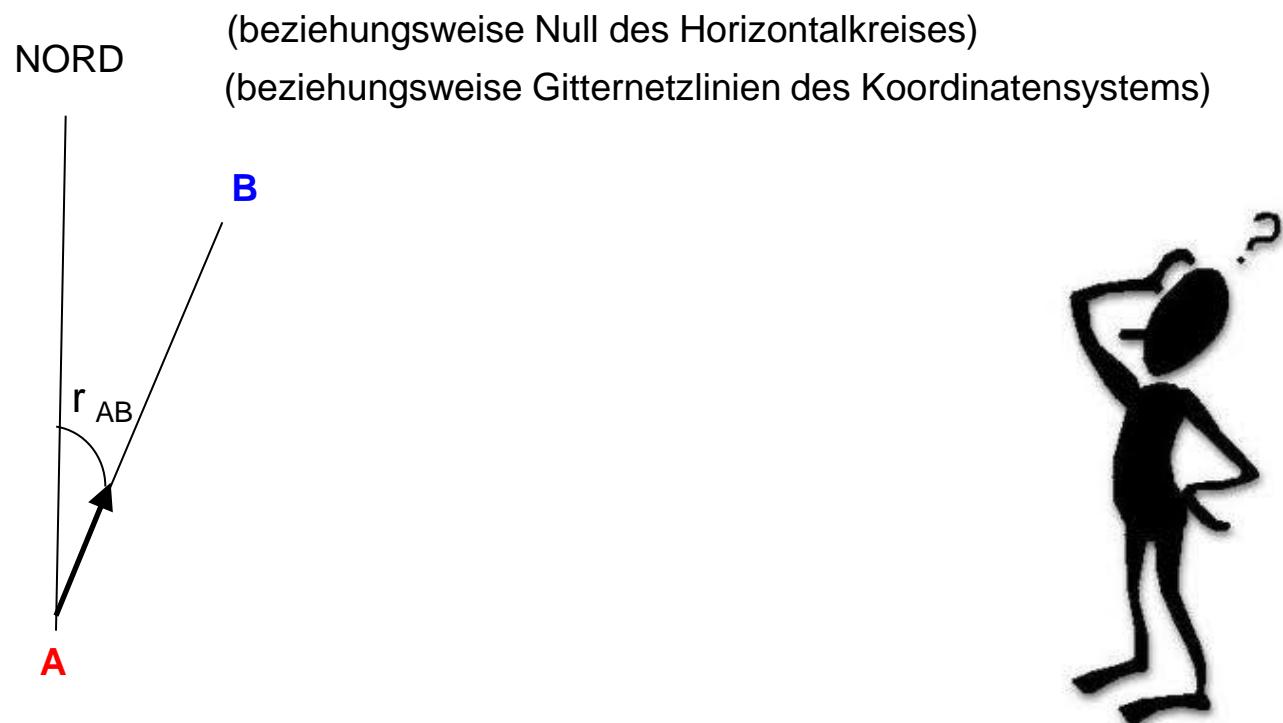
Quelle: <http://bildwoerterbuch.pons.eu/wissenschaft/messinstrumente/winkelmessung/theodolit.php>

patrick.reidelstuerz@th-deg.de

Zunächst ein paar Basics...

Winkelbezeichnungen:

r_{AB} = Richtungswinkel zwischen NORD und Strecke AB

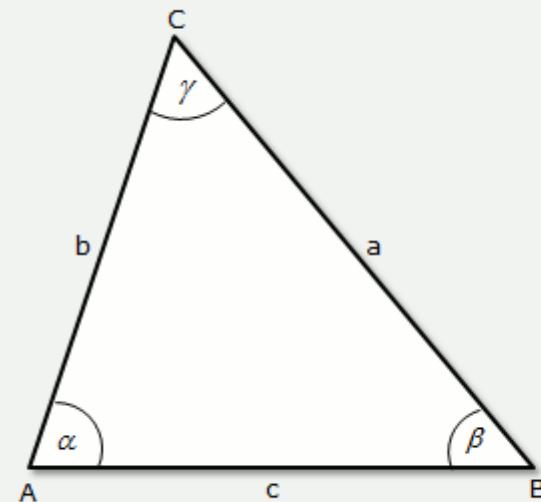


Zunächst ein paar Basics...

Sinussatz

Übung zu Sinussatz und Kosinussatz

Gegeben ist ein allgemeines Dreieck mit den Streckenlängen $a = 5 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ und $c = 7 \text{ cm}$. Berechne die Größe der Winkel.



Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2b \cdot c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b \cdot c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = 0,71$$

$$\rightarrow \alpha \approx 45^\circ$$

Sinussatz

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{\sin \alpha \cdot b}{a} = \frac{\sin 45^\circ \cdot 6}{5}$$

$$\rightarrow \beta \approx 58^\circ$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \Leftrightarrow \sin \gamma = \frac{\sin \alpha \cdot c}{a} = \frac{\sin 45^\circ \cdot 7}{5}$$

$$\rightarrow \gamma \approx 77^\circ$$



Quelle:

<http://www.schulminator.com/mathematik/trigonometrie&docid=2Vg7xgEqyrkoDM&imgurl=http://www.schulminator.com/sites/default/files/wiki/trigonometrie-sinussatz--kosinussatz-winkelfunktionen-im-allgemeinen-dreieck-aufgabe-schulminator.png>

(1) Einzelpunktbestimmung

- (1.1) Winkelmessung (Vorwärtsschnitt)
- (1.2) Winkelmessung (Rückwärtsschnitt)
- (1.3) Streckenmessung (Bogenschnitt)
- (1.4) Polarverfahren (Winkel und Strecke kombiniert)
- (1.5) Verfahren der freien Standpunkte

werden nicht behandelt!

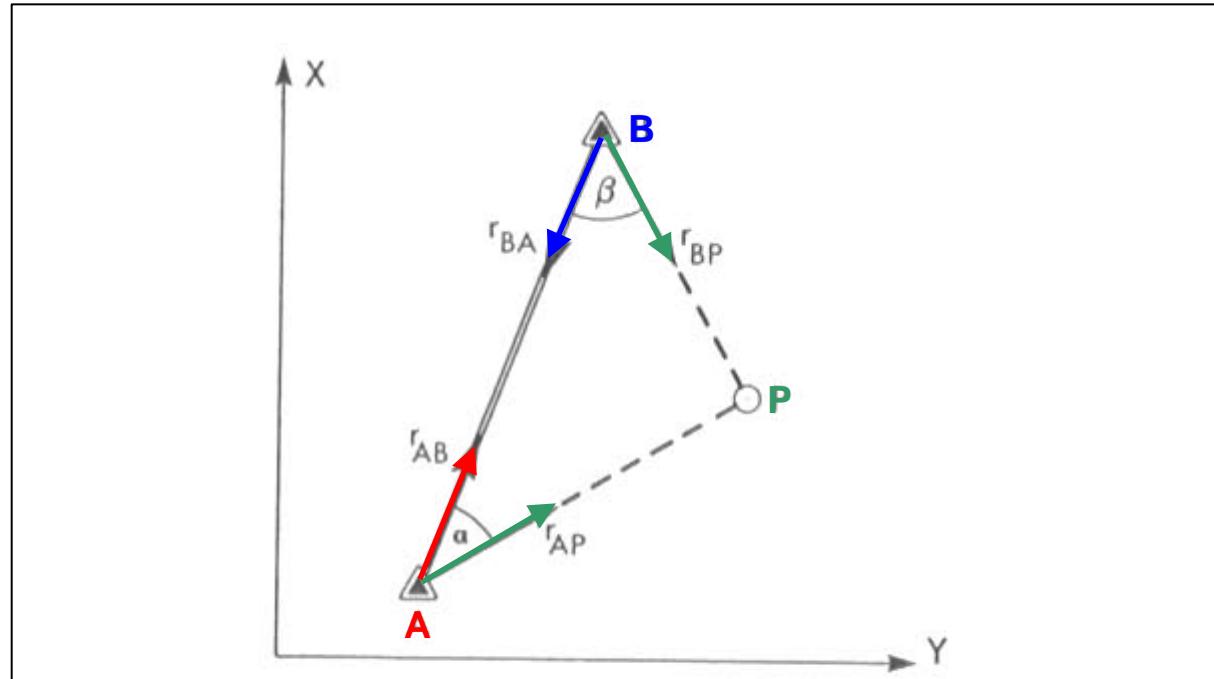
(1.1) Winkelmessung – Vorwärtsschnitt

(1.1) Winkelmessung – Vorwärtsschnitt → über Dreieckswinkel

(1.1) Winkelmessung - Vorwärtsschnitt

Trigonometrische Methode zur Punktbestimmung in der Geodäsie

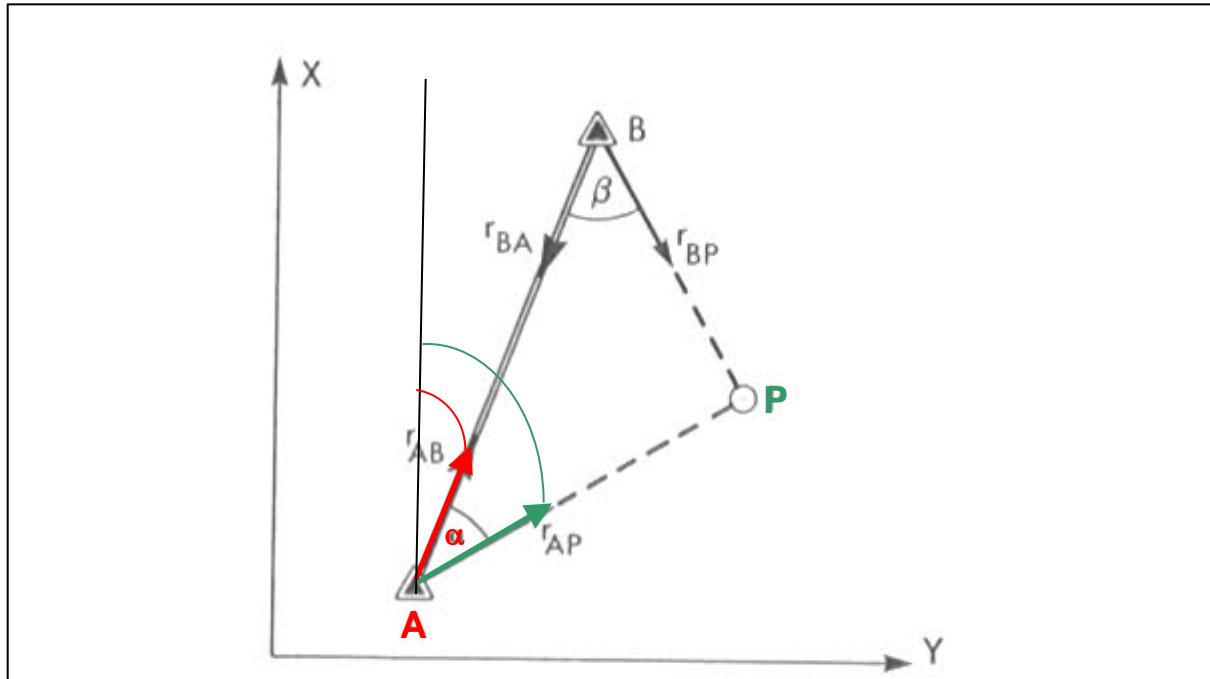
- Voraussetzung: 2 vermarkte Festpunkte (A, B) → mit Sichtkontakt
- Bestimmung der Horizontalrichtung zum Neupunkt (P)
- Bestimmung der Horizontalrichtung zum gegenüberliegenden Standpunkt



**Abb.: Vorwärtsschnitt über Dreieckswinkel
bei Sichtverbindung von A nach B**

Aus der Differenz der Richtungen ergeben sich

→ beim Punkt A der Winkel α $\alpha = r_{AP} - r_{AB}$

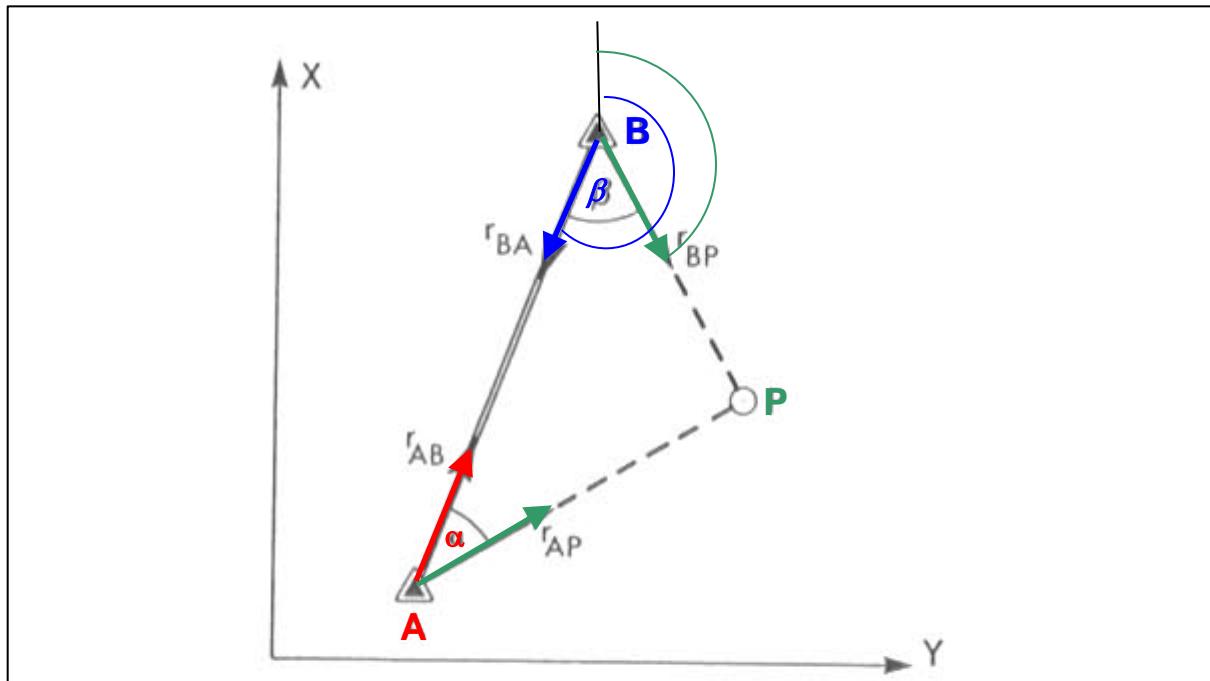


**Abb.: Vorwärtsschnitt über Dreieckswinkel
bei Sichtverbindung von A nach B**

Quelle: WITTE/SCHMIDT (2006) Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen, Wichmann Verlag

Aus der Differenz der Richtungen ergeben sich

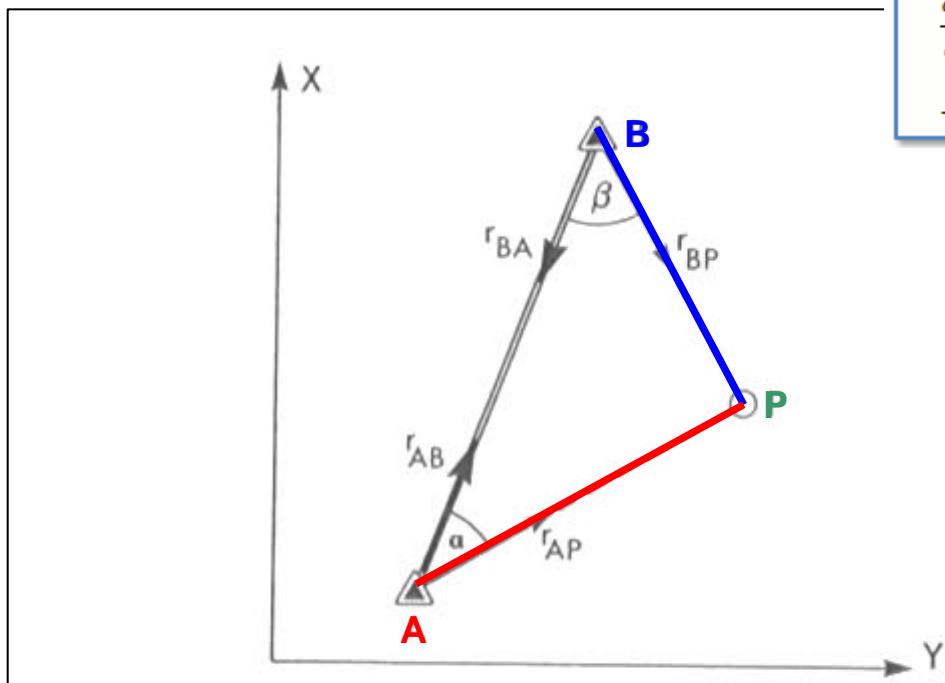
- beim Punkt A der Winkel α $\alpha = r_{AP} - r_{AB}$
- beim Punkt B der Winkel β $\beta = r_{BA} - r_{BP}$



**Abb.: Vorwärtsschnitt über Dreieckswinkel
bei Sichtverbindung von A nach B**

Durch Dreieckauflösung lassen sich

→ die Entferungen von den Basispunkten zum Neupunkt **AP** und **BP** berechnen



Sinussatz

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{\sin \alpha \cdot b}{a} = \frac{\sin 45^\circ \cdot 6}{5}$$

$$\rightarrow \beta \approx 58^\circ$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \Leftrightarrow \sin \gamma = \frac{\sin \alpha \cdot c}{a} = \frac{\sin 45^\circ \cdot 7}{5}$$

$$\rightarrow \gamma \approx 77^\circ$$

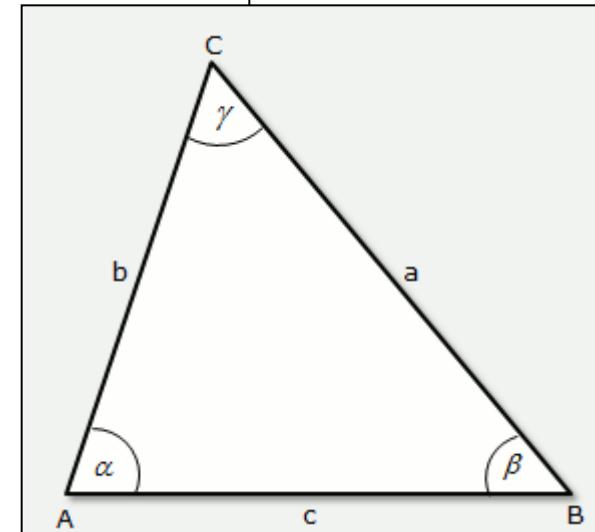


Abb.: Vorwärtsschnitt über Dreieckswinkel bei Sichtverbindung von A nach B

Durch Dreieckauflösung lassen sich

- die Entferungen von den Basispunkten zum Neupunkt AP und BP berechnen
- damit die **Koordinaten des Neupunktes** berechnen

Neupunktbestimmung:

$$\left. \begin{array}{l} y_P = y_A + \overline{AP} \cdot \sin t_A^P \\ x_P = x_A + \overline{AP} \cdot \cos t_A^P \end{array} \right\} P \rightarrow R \text{ mit Addition der Anschlusskoordinaten}$$

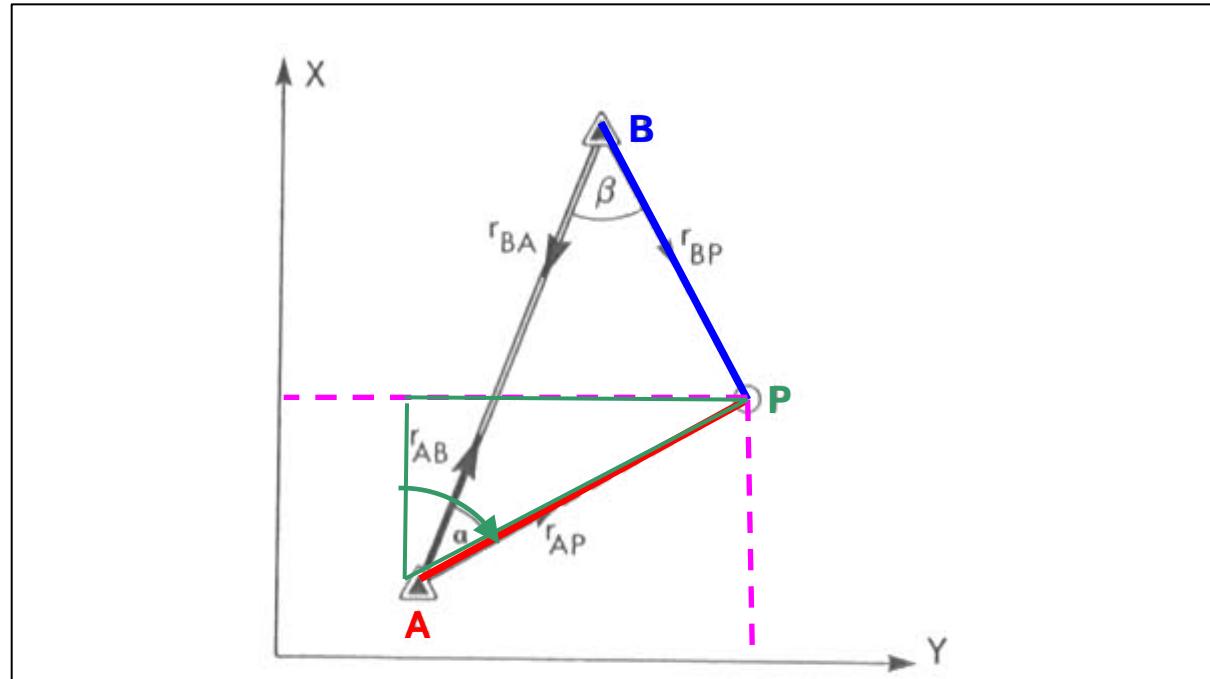


Abb.: Vorwärtsschnitt über Dreieckswinkel bei Sichtverbindung von A nach B

7.3.1.1 Rechengang beim Vorwärtsschnitt über Dreieckswinkel

Mithilfe der Winkel α und β bei den Basispunkten und der aus Koordinaten zu berechnenden Basisstrecke \overline{AB} werden nach Sinussatz die Seiten \overline{AP} und \overline{BP} bestimmt. Ihre Richtungswinkel lassen sich vom Richtungswinkel t_A^B der Basis ableiten, sodass die Neupunktkoordinaten polar bestimmt werden können.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} \\ t_A^B = \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \end{array} \right\} R \rightarrow P \text{ von } A \text{ nach } B \quad (7.8)$$

Dreieckswinkel bei den Basispunkten als Differenzen der gemessenen Richtungen:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = r_{AP} - r_{AB} \\ \beta = r_{BA} - r_{BP} \end{array} \right\} \quad (7.9)$$

Richtungswinkel von den Basispunkten zum Neupunkt:

$$\left. \begin{array}{l} t_A^P = t_A^B + \alpha \\ t_B^P = t_B^A - \beta = t_A^B + 200 \text{ gon} - \beta \end{array} \right\} \quad (7.10)$$

Strecken von den Basispunkten zum Neupunkt nach Sinussatz:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AP} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin \beta \\ \overline{BP} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \quad (7.11)$$

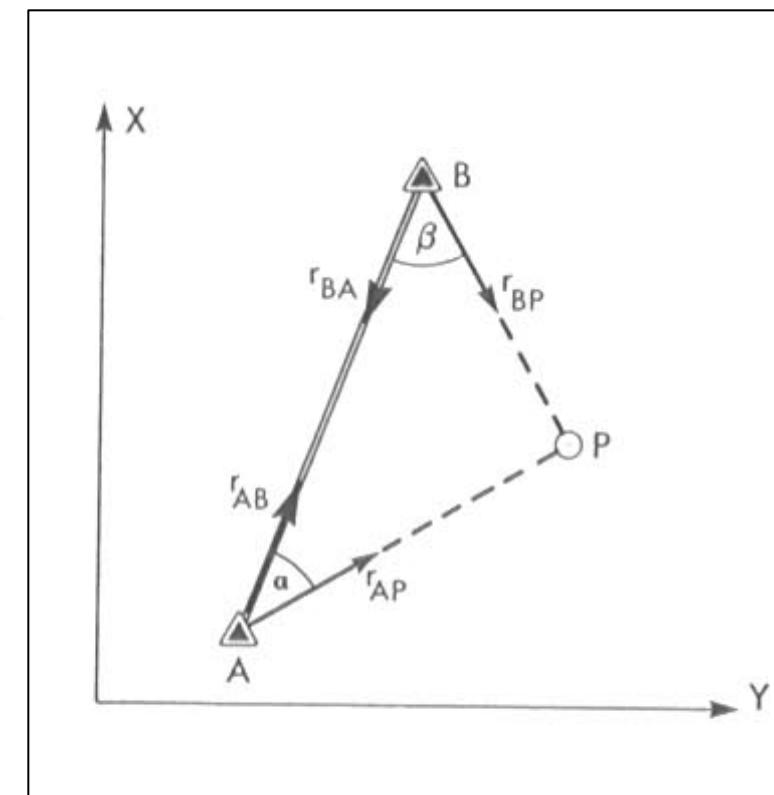
Neupunktberechnung:

$$\left. \begin{array}{l} y_P = y_A + \overline{AP} \cdot \sin t_A^P \\ x_P = x_A + \overline{AP} \cdot \cos t_A^P \end{array} \right\} P \rightarrow R \text{ mit Addition der Anschlusskoordinaten} \quad (7.12)$$

Kontrolle:

$$\left. \begin{array}{l} y_P = y_B + \overline{BP} \cdot \sin t_B^P \\ x_P = x_B + \overline{BP} \cdot \cos t_B^P \end{array} \right\} P \rightarrow R \text{ mit Addition der Anschlusskoordinaten} \quad (7.13)$$

Wählt man für spezielle Absteckungen (z. B. beim Brückenbau) die Basis \overline{AB} als x -Richtung eines örtlichen Koordinatensystems mit dem Punkt A als Koordinatenursprung, stellt die berechnete y_P -Koordinate die Höhe (Ordinate) und die x_P -Koordinate den Fußpunktabschnitt bezogen auf die Basis dar.



→ Beispielaufgabe:

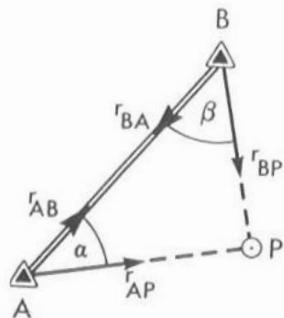


Abbildung 7.3-4: Vorwärtsschnitt über Dreieckswinkel

Gegebene Koordinaten:

Punkt	y [m]	x [m]
A	6 593,84	26 406,86
B	6 722,32	26 732,15

Gemessene Winkel:

$$\begin{aligned}\alpha &= r_{AP} - r_{AB} = 41,0462 \text{ gon} \\ \beta &= r_{BA} - r_{BP} = 52,6905 \text{ gon} \\ \alpha + \beta &= 93,7367 \text{ gon}\end{aligned}$$



→ Beispielaufgabe:

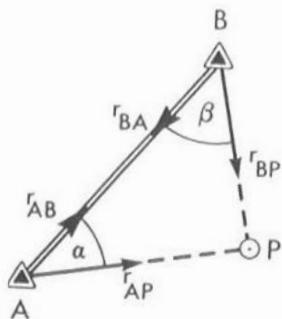


Abbildung 7.3-4: Vorwärtsschnitt über Dreieckswinkel

Gegebene Koordinaten:

Punkt	y [m]	x [m]
A	6 593,84	26 406,86
B	6 722,32	26 732,15

Gemessene Winkel:

$$\begin{aligned}\alpha &= r_{AP} - r_{AB} = 41,0462 \text{ gon} \\ \beta &= r_{BA} - r_{BP} = 52,6905 \text{ gon} \\ \alpha + \beta &= 93,7367 \text{ gon}\end{aligned}$$

$$\overline{AB} = 349,744 \text{ m} ; \quad t_A^B = 23,9473 \text{ gon} \quad R \rightarrow P$$

$$t_A^P = 23,9473 + 41,0462 = 64,9935 \text{ gon}$$

$$t_B^P = 223,9473 - 52,6905 = 171,2568 \text{ gon}$$

$$\overline{AP} = \frac{349,744}{\sin 93,7367} \cdot \sin 52,6905 = 258,785 \text{ m}$$

$$\overline{BP} = \frac{349,744}{\sin 93,7367} \cdot \sin 41,0462 = 211,218 \text{ m}$$

$$\left. \begin{aligned}y_P &= 6 593,84 + 258,785 \cdot \sin 64,9935 = 6 814,48 \text{ m} \\ x_P &= 26 406,86 + 258,785 \cdot \cos 64,9935 = 26 542,10 \text{ m}\end{aligned} \right\} \quad P \rightarrow R \text{ mit Addition}$$

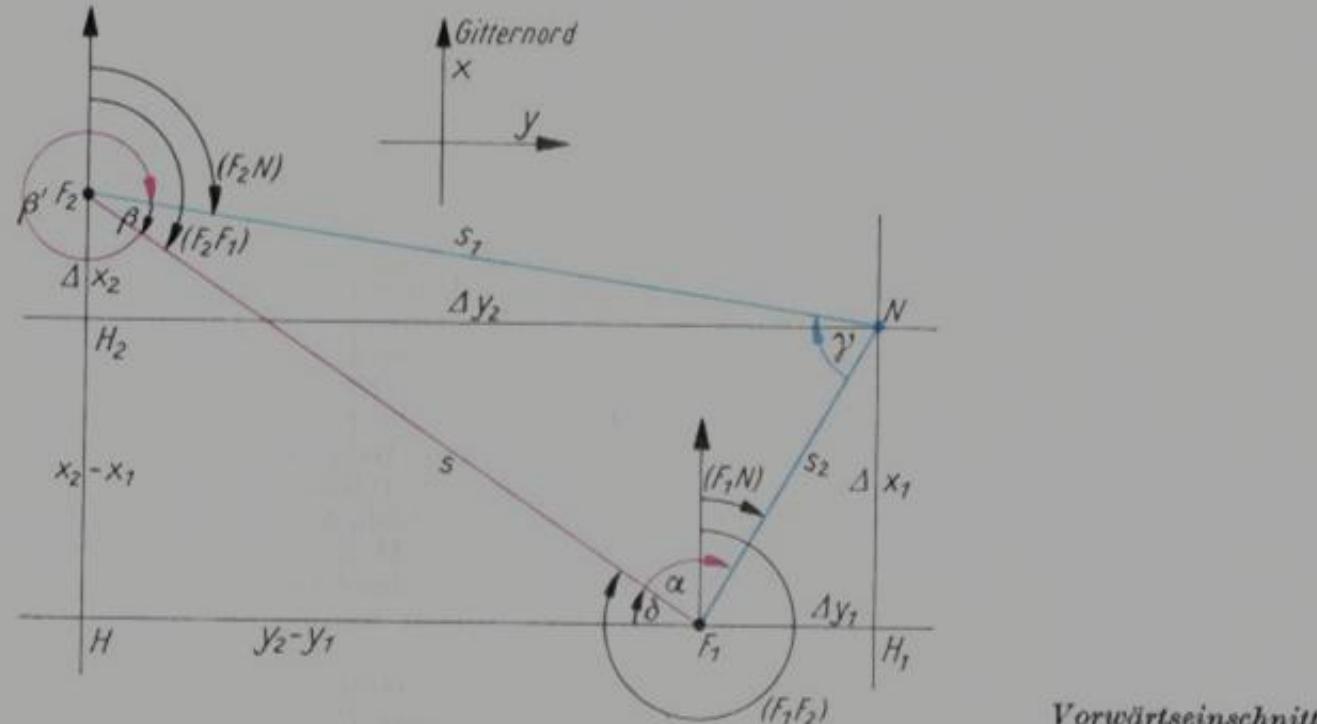
Kontrolle:

$$\left. \begin{aligned}y_P &= 6 722,32 + 211,218 \cdot \sin 171,2568 = 6 814,48 \text{ m} \\ x_P &= 26 732,15 + 211,218 \cdot \cos 171,2568 = 26 542,10 \text{ m}\end{aligned} \right\} \quad P \rightarrow R \text{ mit Addition}$$



Zusammenfassung:

wird der Richtungswinkel von Gitternord aus im Drehsinn des Uhrzeigers gemessen. Mit den nach dem Sinussatz bestimmten Seitenlängen s_1 und s_2 lassen sich in den rechtwinkligen Dreiecken F_2NH_2 und F_1H_1N die Koordinatendifferenzen Δy_1 , Δx_1 , Δx_2 , Δy_2 bestimmen, die zu den Koordi.



naten von F_1 oder von F_2 addiert die von N ergeben. Die Koordinaten vom Neupunkt N werden zur Kontrolle doppelt berechnet.

(1.1) Winkelmessung – Vorwärtsschnitt → über Richtungswinkel

(1.1) Winkelmessung – Vorwärtsschnitt → über Richtungswinkel

Vorgehensweise wie beim Vorwärtsschnitt über Dreieckswinkel

aber: → Strecke zwischen A und B nicht einsehbar!

→ statt Dreieckswinkel werden Richtungswinkel verwendet

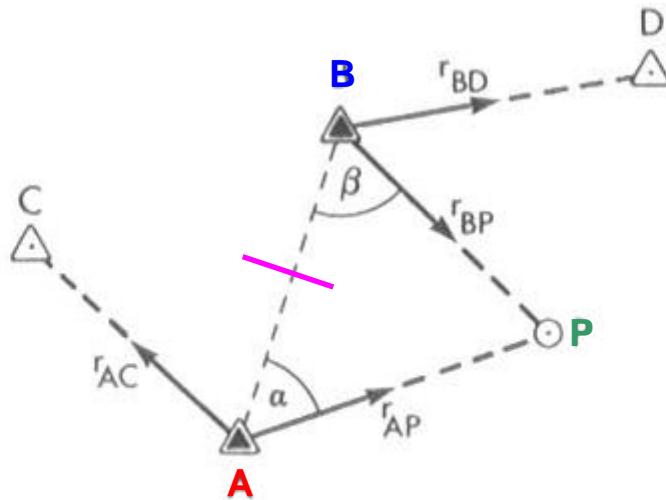


Abbildung 7.3-5: Vorwärtsschnitt über Richtungswinkel

- Bestimmung Richtungswinkel zum Neupunkt (**P**) nicht von der Basis aus, sondern mit Hilfe weiterer Anschlusspunkte (**C**, **D**)
- Ausgehend von den neuen Anschlusspunkten können die Dreieckswinkel α und β als Differenz der Richtungswinkel der Neupunkte bestimmt werden
- Direkte Messung von α und β (Dreieckswinkel) werden durch Richtungswinkel ersetzt
- Also zusätzliches Einmessen von Anschlusspunkten **C** und **D**:

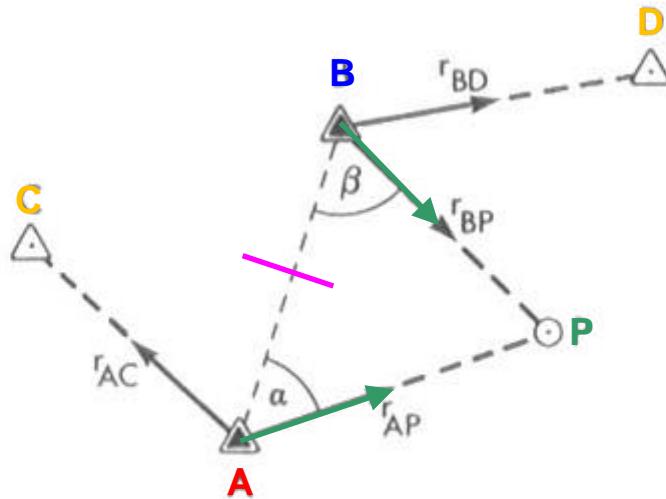


Abbildung 7.3-5: Vorwärtschnitt über Richtungswinkel

Dreieckswinkel bei den Basispunkten als Differenz der Richtungswinkel:

$$\alpha = t_A^P - t_A^B \quad (7.17)$$

$$\beta = t_B^A - t_B^P \quad (7.18)$$

bekannt!

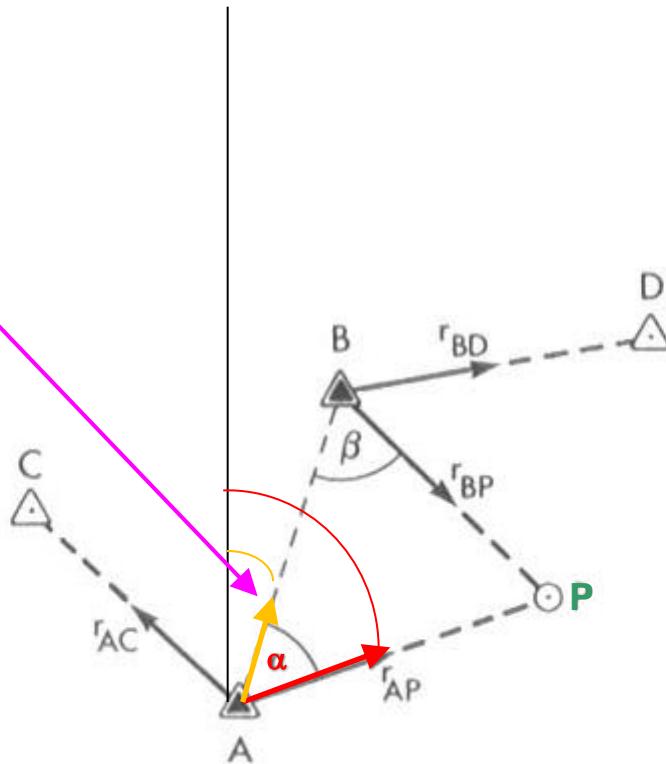


Abbildung 7.3-5: Vorwärts-schnell über Richtungswinkel

Dreieckswinkel bei den Basispunkten als Differenz der Richtungswinkel:

$$\alpha = t_A^P - t_A^B \quad (7.17)$$

$$\beta = t_B^A - t_B^P \quad (7.18)$$

Richtungswinkel von den Basispunkten zum Neupunkt:

$$t_A^P = t_A^C + (r_{AP} - r_{AC}) \quad (7.15)$$

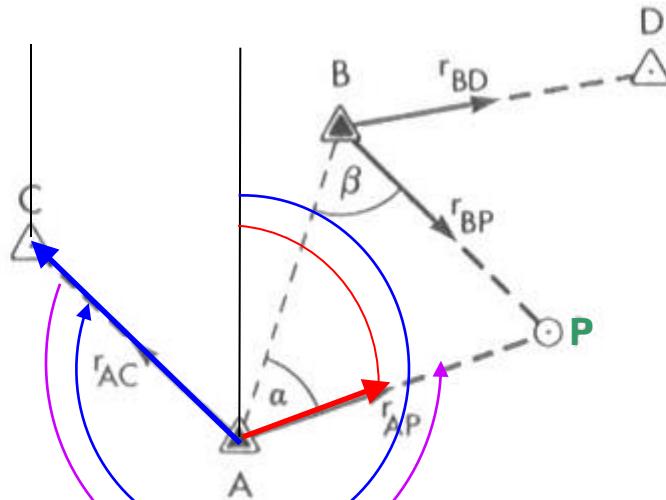


Abbildung 7.3-5: Vorwärtschnitt über Richtungswinkel

Dreieckswinkel bei den Basispunkten als Differenz der Richtungswinkel:

$$\alpha = t_A^P - t_A^B \quad (7.17)$$

$$\beta = t_B^A - t_B^P \quad (7.18)$$

Richtungswinkel von den Basispunkten zum Neupunkt:

$$t_A^P = t_A^C + (r_{AP} - r_{AC}) \quad (7.15)$$

nicht einsehbar!

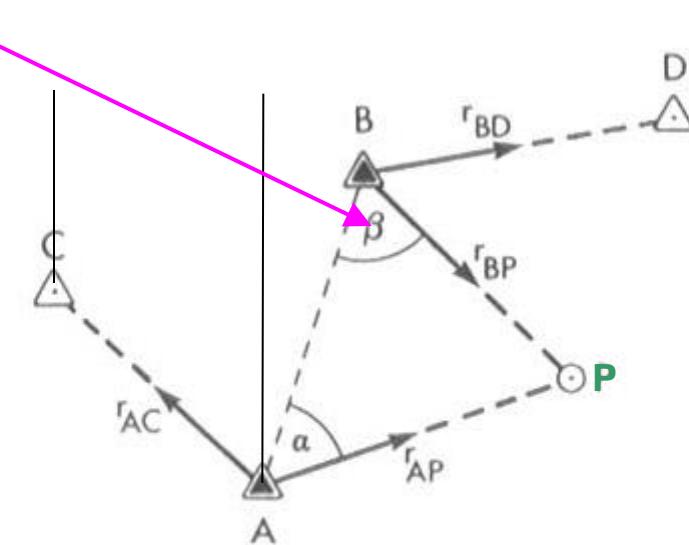


Abbildung 7.3-5: Vorwärts-schnell über Richtungswinkel

Dreieckswinkel bei den Basispunkten als Differenz der Richtungswinkel:

$$\alpha = t_A^P - t_A^B \quad (7.17)$$

$$\beta = t_B^A - t_B^P \quad (7.18)$$

Richtungswinkel von den Basispunkten zum Neupunkt:

$$t_A^P = t_A^C + (r_{AP} - r_{AC}) \quad (7.15)$$

$$t_B^P = t_B^D + (r_{BP} - r_{BD}) \quad (7.16)$$

Dreieckswinkel bei den Basispunkten als Differenz der Richtungswinkel:

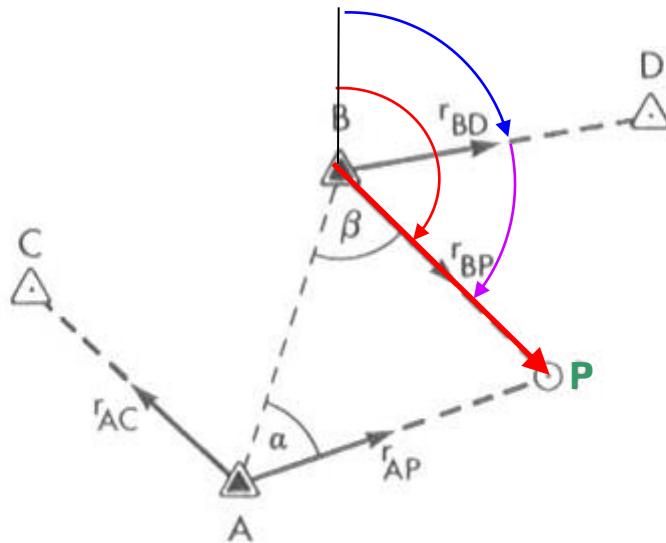


Abbildung 7.3-5: Vorwärtsschnitt über Richtungswinkel

Dreieckswinkel bei den Basispunkten als Differenz der Richtungswinkel:

$$\alpha = t_A^P - t_A^B \quad (7.17)$$

$$\beta = t_B^A - t_B^P \quad (7.18)$$

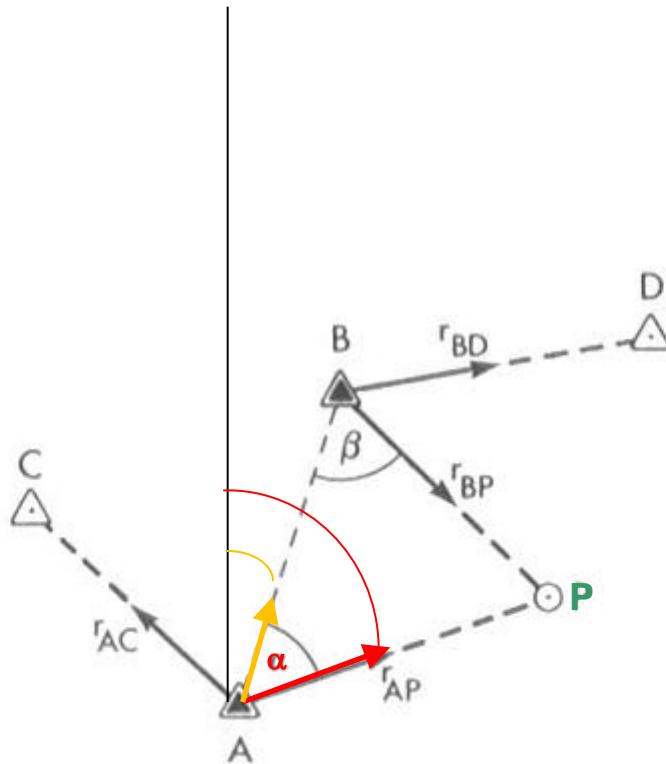


Abbildung 7.3-5: Vorwärts-schnell über Richtungswinkel

Dreieckswinkel bei den Basispunkten als Differenz der Richtungswinkel:

$$\alpha = t_A^P - t_A^B \quad (7.17)$$

$$\beta = t_B^A - t_B^P \quad (7.18)$$

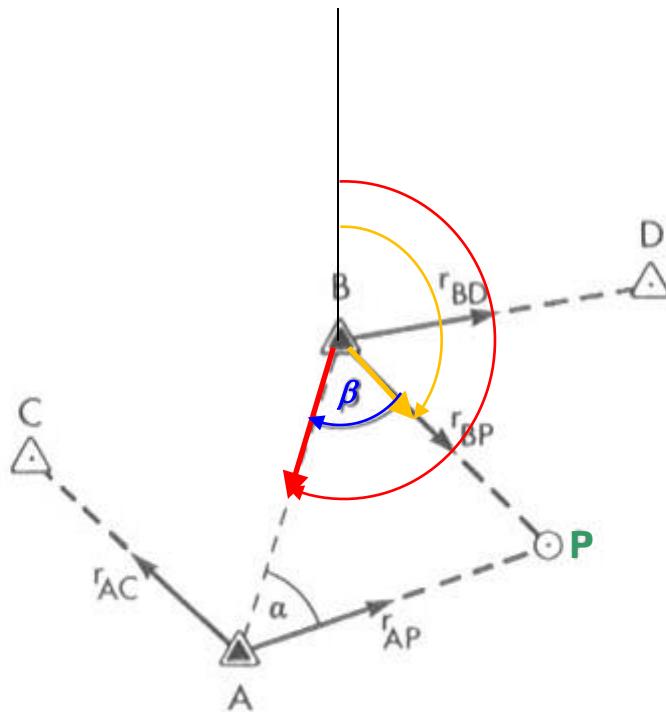


Abbildung 7.3-5: Vorwärtschnitt über Richtungswinkel

Dreieckswinkel bei den Basispunkten als Differenz der Richtungswinkel:

$$\alpha = t_A^P - t_A^B \quad (7.17)$$

$$\beta = t_B^A - t_B^P \quad (7.18)$$

$$t_B^P = t_B^D + (r_{BP} - r_{BD}) \quad (7.16)$$

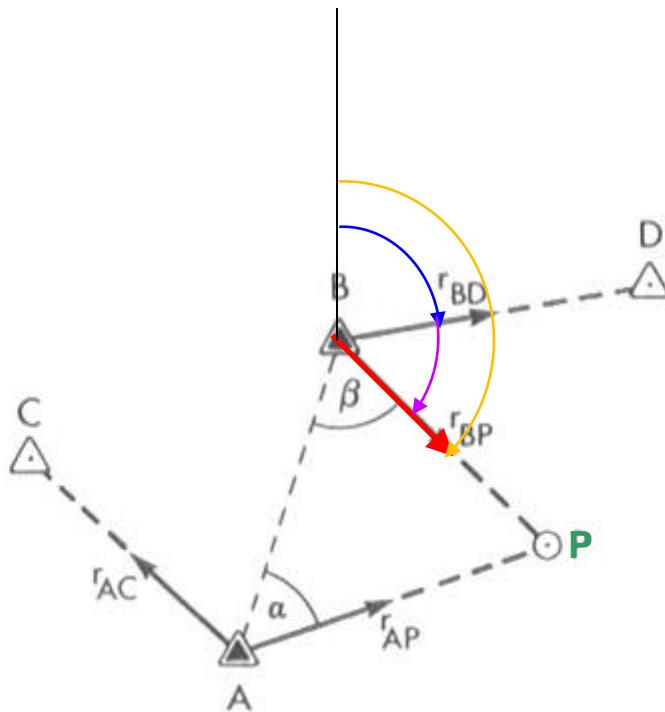


Abbildung 7.3-5: Vorwärtschnitt über Richtungswinkel

Komplette Formeln zum Vorwärtsschnitt über Richtungswinkel: (Kopien)

Richtungswinkel von den Basispunkten zu weiteren Festpunkten:

$$\left. \begin{array}{l} t_A^C = \arctan \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \\ t_B^D = \arctan \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} \end{array} \right\} R \rightarrow P \quad (7.14)$$

Richtungswinkel von den Basispunkten zum Neupunkt:

$$t_A^P = t_A^C + (r_{AP} - r_{AC}) \quad (7.15)$$

$$t_B^P = t_B^D + (r_{BP} - r_{BD}) \quad (7.16)$$

Dreieckswinkel bei den Basispunkten als Differenz der Richtungswinkel:

$$\alpha = t_A^P - t_A^C \quad (7.17)$$

$$\beta = t_B^P - t_B^D \quad (7.18)$$

Die übrigen Berechnungen lassen sich nun wie unter Kapitel 7.3.1.1 angegeben mit den Gleichungen (7.8) und (7.11) bis (7.13) durchführen. Der Vorwärtsschnitt über Richtungswinkel kann jedoch auch als Geradenschnitt mit den in Kapitel 3.5.6 angegebenen Formeln berechnet werden.

→ Beispielaufgabe:

Beispiel 7.3.2: Vorwärtsschnitt über Richtungswinkel

Gegebene Koordinaten:

Punkt	y [m]	x [m]
A	6 449,72	26 347,92
B	6 591,34	26 674,66
C	6 252,26	26 548,73
D	6 906,67	26 745,19

Gemessene Richtungen:

Stdpkt.	Zielpkt.	Richtung [gon]
A	C	0,0000
	P	125,1795
B	D	0,0000
	P	59,0263



→ Beispielaufgabe: Lösung

Beispiel 7.3.2: Vorwärtsschnitt über Richtungswinkel

Gegebene Koordinaten:

Punkt	y [m]	x [m]
A	6 449,72	26 347,92
B	6 591,34	26 674,66
C	6 252,26	26 548,73
D	6 906,67	26 745,19

Gemessene Richtungen:

Stdpkt.	Zielpkt.	Richtung [gon]
A	C	0,0000
	P	125,1795
B	D	0,0000
	P	59,0263

$$\overline{AB} = 356,111 \text{ m} ; \quad t_A^B = 26,0372 \text{ gon } R \rightarrow P$$

$$t_A^C = 350,5355 \text{ gon} ; \quad t_B^D = 85,9913 \text{ gon } R \rightarrow P$$

$$t_A^P = 350,5355 + 125,1795 = 75,7150 \text{ gon}$$

$$t_B^P = 85,9913 + 59,0263 = 145,0176 \text{ gon}$$

$$\alpha = 75,7150 - 26,0372 = 49,6777 \text{ gon}$$

$$\beta = 226,0372 - 145,0176 = 81,0197 \text{ gon}$$

$$\alpha + \beta = 130,6974 \text{ gon}$$

$$\overline{AP} = \frac{356,111}{\sin 130,6974} \cdot \sin 81,0197 = 384,209 \text{ m}$$

$$\overline{BP} = \frac{356,111}{\sin 130,6974} \cdot \sin 49,6777 = 282,773 \text{ m}$$



(1.2) Winkelmessung - Rückwärtsschnitt

(1.2) Winkelmessung - Rückwärtsschnitt

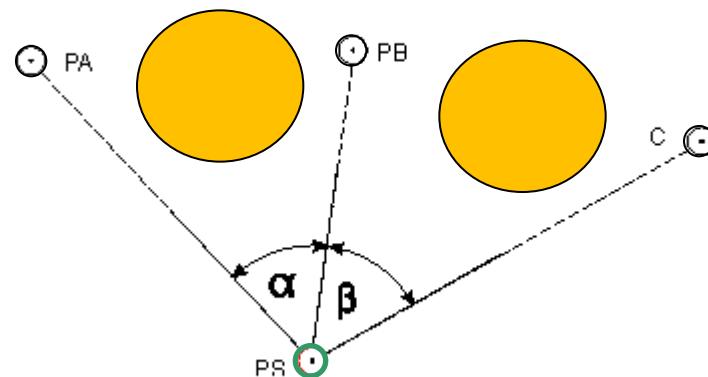
Rückwärtsschnitt: Arbeitspapier: Rückwärtsschnitt über Richtungswinkel!

- 3 Festpunkte gegeben
- nur vom Neupunkt einsehbar.

Ab 4 Festpunkten:
→ Kontrolle durch Überbestimmung möglich

Fragestellung:

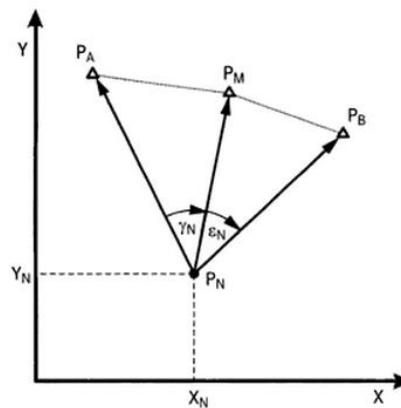
- aus den Koordinaten der drei Punkte PA, PB, PC und
 - den rechtsläufig gemessenen Winkeln alpha und beta
- sollen die Koordinaten des Neupunktes PS berechnet werden.



Anders gesagt:

Der **Rückwärtsschnitt** erlaubt die Bestimmung der Standpunktkoordinaten ohne Streckenmessung durch Richtungsmessung zu drei bekannten Punkten. Es gibt dazu einige Lösungen, unter anderem die hier vorgestellte Lösung **nach CASSINI (GRUBER 1996)**. Andere Lösungen sind das Rückwärtseinschneiden als Schnitt von drei Geraden (**GROSSMANN & KAHMEN 1983**) oder die Berechnung **nach COLLINS (WITTE & SCHMIDT 2000)**.

Das genannte Verfahren eignet sich hervorragend zur Bestimmung der eigenen Position unter Verwendung bekannter Punkte. Hat man die Koordinaten von drei Antennen, Gipfelkreuzen oder Kirchtürmen, kann man seine Position an jeder Stelle bestimmen, sofern man die drei Fernziele sehen kann. Eine andere Einsatzmöglichkeit ist in Innenräumen, in denen an Wänden oder durch Wandöffnungen hindurch drei bekannte Ziele sichtbar sind.



Quelle:

<http://books.google.de/books?id=yTA9T9II4JoC&pg=PA132&lpg=PA132&dq=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt+nach+Collins&source=bl&ots=8T5nn8OIHc&sig=QVJ-CALiC10V8DxQcooxczGnu4&hl=de&sa=X&ei=o-tTUo75DJL44QTpoHIBA&ved=0CEIQ6AEwAw#v=onepage&q=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt%20nach%20Collins&f=false>

Anders gesagt:

Der **Rückwärtsschnitt** erlaubt die Bestimmung der Standpunktkoordinaten ohne Streckenmessung durch Richtungsmessung zu drei bekannten Punkten. Es gibt dazu einige Lösungen, unter anderem die hier vorgestellte Lösung **nach CASSINI (GRUBER 1996)**. Andere Lösungen sind das Rückwärtseinschneiden als Schnitt von drei Geraden (**GROSSMANN & KAHMEN 1983**) oder die Berechnung **nach COLLINS (WITTE & SCHMIDT 2000)**.

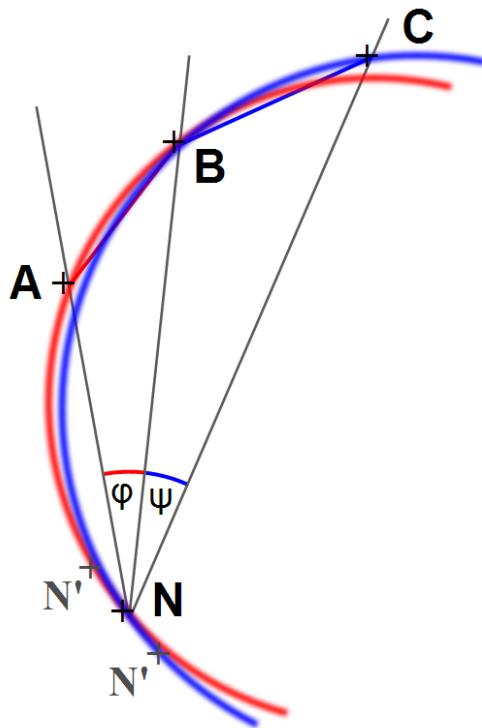
Das genannte Verfahren eignet sich hervorragend zur Bestimmung der eigenen Position unter Verwendung bekannter Punkte. Hat man die Koordinaten von drei Antennen, Gipfelkreuzen oder Kirchtürmen, kann man seine Position an jeder Stelle bestimmen, sofern man die drei Fernziele sehen kann. Eine andere Einsatzmöglichkeit ist in Innenräumen, in denen an Wänden oder durch Wandöffnungen hindurch drei bekannte Ziele sichtbar sind.

Man muss darauf achten, dass die drei Zielpunkte und der eigene Standpunkt nicht auf einem gemeinsamen Kreis liegen. In diesem Fall wird die Lösung des Problems unbestimmt. Diese Konstellation nennt man gefährlichen Kreis. Eine sichere Konfiguration hat man, wenn die drei Ziele gleichmäßig über den Horizont verteilt sind oder die drei Ziele auf einer Geraden liegen. Auch die Verwendung eines vierten Ziels löst eine solche Unbestimmtheit auf, bedarf dann aber der Ausgleichung (Kap. 4.5.3).

Quelle:

<http://books.google.de/books?id=yTA9T9II4JoC&pg=PA132&lpg=PA132&dq=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt+nach+Collins&source=bl&ots=8T5nn8OIhc&sig=QVYj-CALiC10V8DxQcooxczGnu4&hl=de&sa=X&ei=o-tTUo75DJL44QTpoHIBA&ved=0CEIQ6AEwAw#v=onepage&q=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt%20nach%20Collins&f=false>

Gefährlicher Kreis mit schleifenden Schnitten:



Anders gesagt:

Der **Rückwärtsschnitt** erlaubt die Bestimmung der Standpunktkoordinaten ohne Streckenmessung durch Richtungsmessung zu drei bekannten Punkten. Es gibt dazu einige Lösungen, unter anderem die hier vorgestellte Lösung **nach CASSINI (GRUBER 1996)**. Andere Lösungen sind das Rückwärtseinschneiden als Schnitt von drei Geraden (**GROSSMANN & KAHMEN 1983**) oder die Berechnung **nach COLLINS (WITTE & SCHMIDT 2000)**.

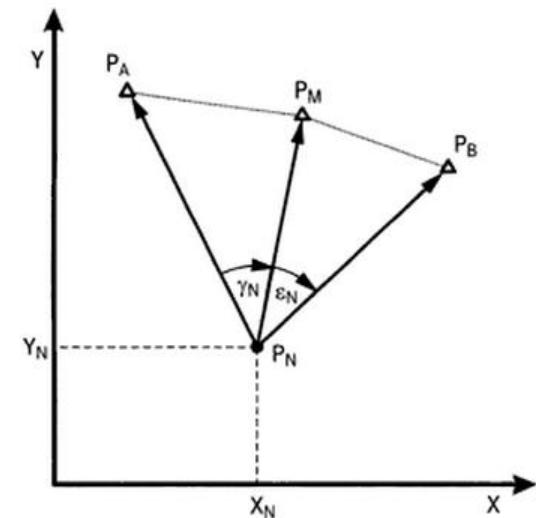
Das genannte Verfahren eignet sich hervorragend zur Bestimmung der eigenen Position unter Verwendung bekannter Punkte. Hat man die Koordinaten von drei Antennen, Gipfelkreuzen oder Kirchtürmen, kann man seine Position an jeder Stelle bestimmen, sofern man die drei Fernziele sehen kann. Eine andere Einsatzmöglichkeit ist in Innenräumen, in denen an Wänden oder durch Wandöffnungen hindurch drei bekannte Ziele sichtbar sind.

Man muss darauf achten, dass die drei Zielpunkte und der eigene Standpunkt nicht auf einem gemeinsamen Kreis liegen. In diesem Fall wird die Lösung des Problems unbestimmt. Diese Konstellation nennt man gefährlichen Kreis. Eine sichere Konfiguration hat man, wenn die drei Ziele gleichmäßig über den Horizont verteilt sind oder die drei Ziele auf einer Geraden liegen. Auch die Verwendung eines vierten Ziels löst eine solche Unbestimmtheit auf, bedarf dann aber der Ausgleichung (Kap. 4.5.3).

Quelle:

<http://books.google.de/books?id=yTA9T9II4JoC&pg=PA132&lpg=PA132&dq=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt+nach+Collins&source=bl&ots=8T5nn8OIhc&sig=QVYj-CALiC10V8DxQcooxczGnu4&hl=de&sa=X&ei=o-tTUo75DJL44QTpoHIBA&ved=0CEIQ6AEwAw#v=onepage&q=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt%20nach%20Collins&f=false>

Rechenweg:



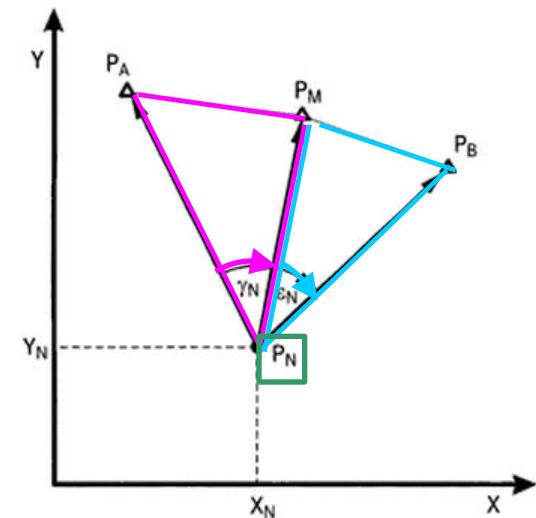
Quelle:

<http://books.google.de/books?id=yTA9T9II4JoC&pg=PA132&lpg=PA132&dq=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt+nach+Collins&source=bl&ots=8T5nn8OIhc&sig=QVJ-CALiC10V8DxQcooxczGnu4&hl=de&sa=X&ei=o-tTUo75DJL44QTpoHIBA&ved=0CEIQ6AEwAw#v=onepage&q=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt%20nach%20Collins&f=false>

Zunächst werden in den beiden Hilfsdreiecken $\triangle NAM$ und $\triangle NMB$ (Abb. 4.16) die beiden Dreieckswinkel γ und ε am Punkt P_N durch Bildung der Differenz der Richtungsbeobachtungen bestimmt.

$$\gamma_N = r_N^M - r_N^A$$

$$\varepsilon_N = r_N^B - r_N^M \quad (4-29)$$



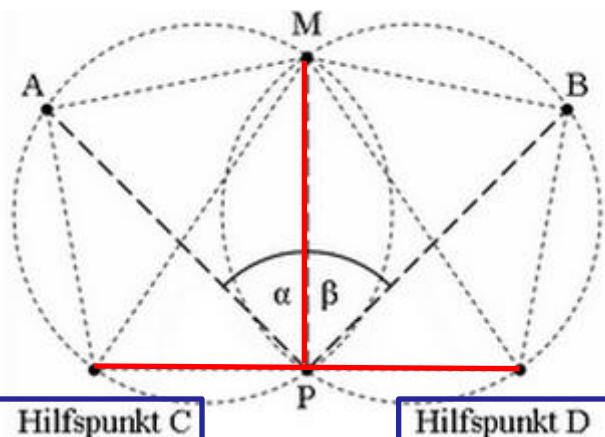
Mit Hilfe dieser Winkel können die Koordinaten der beiden Hilfspunkte C und D berechnet werden.

$$X_C = X_A + \frac{(Y_M - Y_A)}{\tan(\gamma_N)}$$

$$X_D = X_B + \frac{(Y_B - Y_M)}{\tan(\varepsilon_N)} \quad (4-30)$$

$$Y_C = Y_A - \frac{(X_M - X_A)}{\tan(\gamma_N)}$$

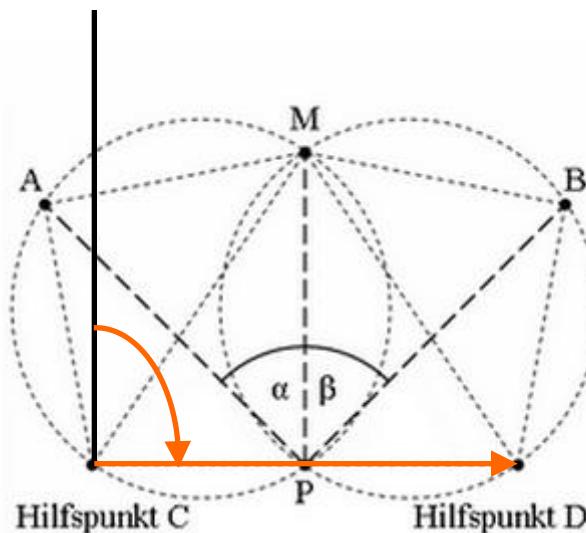
$$Y_D = Y_B - \frac{(X_B - X_M)}{\tan(\varepsilon_N)} \quad (4-31)$$



Einführung rechtwinkliges Dreieck

Im nächsten Schritt wird der Richtungswinkel zwischen den Hilfspunkten von P_C zu P_D berechnet.

$$\alpha_C^D = \arctan\left(\frac{X_D - X_C}{Y_D - Y_C}\right) \quad (4-32)$$

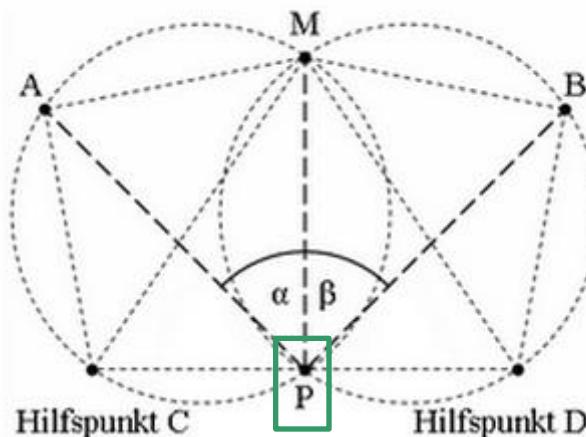


Im nächsten Schritt wird der Richtungswinkel zwischen den Hilfspunkten von P_C zu P_D berechnet.

$$\alpha_C^D = \arctan\left(\frac{X_D - X_C}{Y_D - Y_C}\right) \quad (4-32)$$

Nun lassen sich die Koordinaten des Punktes P_N berechnen. Die Hilfsgrößen p und q vereinfachen die Berechnung:

$$p = \tan(\alpha_C^D) \quad q = \frac{1}{\tan(\alpha_C^D)} \quad (4-33)$$



Im nächsten Schritt wird der Richtungswinkel zwischen den Hilfspunkten von P_C zu P_D berechnet.

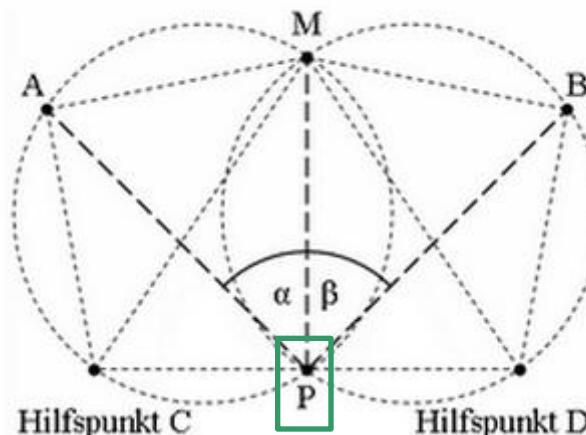
$$\alpha_C^D = \arctan\left(\frac{X_D - X_C}{Y_D - Y_C}\right) \quad (4-32)$$

Nun lassen sich die Koordinaten des Punktes P_N berechnen. Die Hilfsgrößen p und q vereinfachen die Berechnung:

$$p = \tan(\alpha_C^D) \quad q = \frac{1}{\tan(\alpha_C^D)} \quad (4-33)$$

Dabei erfolgt zunächst die Berechnung der **Y-Koordinate**:

$$Y_N = Y_C + \frac{X_M - X_C + q(Y_M - Y_C)}{p + q} \quad (4-34)$$



Im nächsten Schritt wird der Richtungswinkel zwischen den Hilfspunkten von P_C zu P_D berechnet.

$$\alpha_C^D = \arctan\left(\frac{X_D - X_C}{Y_D - Y_C}\right) \quad (4-32)$$

Nun lassen sich die Koordinaten des Punktes P_N berechnen. Die Hilfsgrößen p und q vereinfachen die Berechnung:

$$p = \tan(\alpha_C^D) \quad q = \frac{1}{\tan(\alpha_C^D)} \quad (4-33)$$

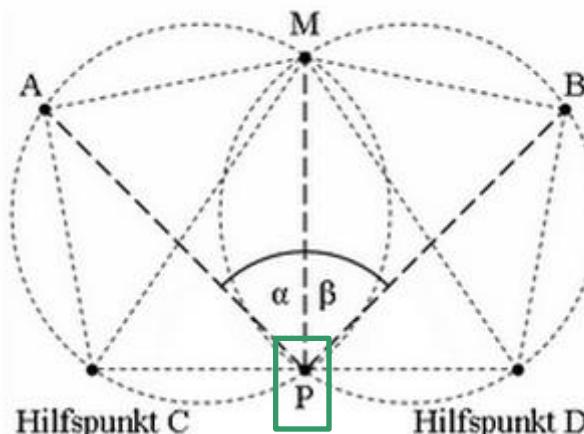
Dabei erfolgt zunächst die Berechnung der Y-Koordinate:

$$Y_N = Y_C + \frac{X_M - X_C + q(Y_M - Y_C)}{p + q} \quad (4-34)$$

Für die Berechnung der X-Koordinate ist eine Fallunterscheidung anzuwenden:

wenn gilt $p < q$
 $X_N = X_C + p(Y_N - Y_C)$

wenn gilt $q < p$
 $X_N = X_M - q(Y_N - Y_M)$



Studentische Übung:

Beschäftigen Sie sich mit den beiden Arbeitspapieren, um das Prinzip zu verstehen:

- Arbeitspapier_Rückwärtsschnitt über Richtungswinkel
- Arbeitspapier_Rückwärtsschnitt über Richtungswinkel_Ubungsaufgabe

Beispiel:

Gegeben	Gemessen	Gesucht
Zielpunkt: P_A (196,49; 845,77)	$r_N^A = 213,2035$ gon	Neupunkt P_n
Zielpunkt: P_M (735,95; 526,37)	$r_N^M = 339,5979$ gon	
Zielpunkt: P_B (281,83; 132,55)	$r_N^B = 74,2190$ gon	



Beispielaufgabe: Lösung →**Arbeitspapier Rückwärtsschnitt über Richtungswinkel_Ubungsaufgabe****Beispiel:**

Gegeben	Gemessen	Gesucht
Zielpunkt: P_A (196,49; 845,77)	$r_N^A = 213,2035$ gon	Neupunkt P_n
Zielpunkt: P_M (735,95; 526,37)	$r_N^M = 339,5979$ gon	
Zielpunkt: P_B (281,83; 132,55)	$r_N^B = 74,2190$ gon	

Bestimmung der Dreieckswinkel γ und ε :

$$\begin{aligned}\gamma_N &= r_N^M - r_N^A \\ &= 339,5979 \text{ gon} - 213,2035 \text{ gon} \\ &= 126,3944 \text{ gon}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_N &= r_N^B - r_N^M \\ &= 74,2190 \text{ gon} - 339,5979 \text{ gon} \\ &= -265,3789 \text{ gon} (+400 \text{ gon}) \\ &= 134,6211 \text{ gon}\end{aligned}$$

Nun folgt die Berechnung der Richtungswinkel zum Neupunkt:

$$\begin{aligned} X_C &= X_A + \frac{(Y_M - Y_A)}{\tan(\gamma_N)} \\ &= 196,49 + \frac{526,37 - 845,77}{\tan(126,3944 \text{ gon})} \\ &= 196,49 + \frac{-319,40}{-2,27214} \\ &= 196,49 + 140,57 \\ &= \underline{\underline{337,06}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_D &= X_B + \frac{(Y_B - Y_M)}{\tan(\varepsilon_N)} \\ &= 281,82 + \frac{132,55 - 526,37}{\tan(134,6211 \text{ gon})} \\ &= 281,82 + \frac{-393,82}{-1,65387} \\ &= 281,82 + 238,12 \\ &= \underline{\underline{519,95}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_C &= Y_A - \frac{(X_M - X_A)}{\tan(\gamma_N)} \\ &= 845,77 - \frac{735,95 - 196,49}{\tan(126,3944 \text{ gon})} \\ &= 845,77 - \frac{539,46}{-2,27214} \\ &= 845,77 + 237,42 \\ &= \underline{\underline{1083,19}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_D &= Y_B - \frac{(X_B - X_M)}{\tan(\varepsilon_N)} \\ &= 132,55 - \frac{281,83 - 735,95}{\tan(134,6211 \text{ gon})} \\ &= 132,55 - \frac{-454,12}{-1,65387} \\ &= 132,55 - 274,58 \\ &= \underline{\underline{-142,03}} \end{aligned}$$

Der Richtungswinkel zwischen den Hilfspunkten von P_C zu P_D ist:

$$\begin{aligned}\alpha_C^D &= \arctan\left(\frac{X_D - X_C}{Y_D - Y_C}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{519,95 - 337,06}{-142,03 - 1083,19}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{182,89}{-1225,22}\right) = \arctan(-0,14927) = -9,4332 \text{ gon (+}200 \text{ gon)} \\ &= \underline{\underline{190,5668 \text{ gon}}}\end{aligned}$$

Die Hilfsgrößen p und q sind:

$$\begin{aligned}p &= \tan(\alpha_C^D) \\ &= \tan(190,5668 \text{ gon}) \\ &= \underline{\underline{-0,14927}} \\ q &= \frac{1}{\tan(\alpha_C^D)} = \frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{-0,14927} \\ &= \underline{\underline{-6,69922}}\end{aligned}$$

Beispiel:

Gegeben	Gemessen	Gesucht
Zielpunkt: P_A (196,49; 845,77)	$r_N^A = 213,2035$ gon, $s_{NA} = 432,15$ m	Neupunkt P_n
Zielpunkt: P_B (281,83; 132,55)	$r_N^B = 74,2190$ gon, $s_{NB} = 376,82$ m	

Zunächst werden durch polares Anhängen an den Punkt (0,0) die lokalen Koordinaten der Passpunkte berechnet.

$$\begin{aligned} X'_A &= s_{NA} \cdot \sin(r_N^A) \\ &= 432,15 \cdot \sin(213,2035) \\ &= 432,15 \cdot (-0,205916) \\ &= \underline{\underline{-88,99}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y'_A &= s_{NA} \cdot \cos(r_N^A) \\ &= 432,15 \cdot \cos(213,2035) \\ &= 432,15 \cdot (-0,978570) \\ &= \underline{\underline{-422,89}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'_B &= s_{NB} \cdot \sin(r_N^B) \\ &= 376,82 \cdot \sin(74,2190) \\ &= 376,82 \cdot (0,919115) \\ &= \underline{\underline{346,34}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y'_B &= s_{NB} \cdot \cos(r_N^B) \\ &= 376,82 \cdot \cos(74,2190) \\ &= 376,82 \cdot 0,393988 \\ &= \underline{\underline{148,46}} \end{aligned}$$

Punktnummer	lokales Koordinatensystem		übergeordnetes Koordinatensystem	
	X' [m]	Y' [m]	X'' [m]	Y'' [m]
P _A	-88,99	-422,89	196,49	845,77
P _B	346,34	148,46	281,83	132,55
P _N	0,00	0,00	gesucht	gesucht

$$\begin{aligned}\Delta X' &= X_B' - X_A' \\ &= 346,34 - (-88,99) \\ &= \underline{\underline{435,33}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta Y' &= Y_B' - Y_A' \\ &= 148,46 - (-422,89) \\ &= \underline{\underline{571,35}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta X'' &= X_B'' - X_A'' \\ &= 281,83 - 196,49 \\ &= \underline{\underline{85,34}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta Y'' &= Y_B'' - Y_A'' \\ &= 132,55 - 845,77 \\ &= \underline{\underline{-713,22}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s' &= \sqrt{(\Delta X')^2 + (\Delta Y')^2} \\ &= \sqrt{435,33^2 + 571,35^2} \\ &= \sqrt{189512,2089 + 326440,8225} \\ &= \sqrt{515953,0314} \\ &= \underline{\underline{718,30}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s'' &= \sqrt{(\Delta X'')^2 + (\Delta Y'')^2} \\ &= \sqrt{85,44^2 + 713,22^2} \\ &= \sqrt{7282,9156 + 508682,7684} \\ &= \sqrt{515965,684} \\ &= \underline{\underline{718,31}}\end{aligned}$$

Berechnung der Transformationsparameter a und o :

$$a = \frac{\Delta X' \cdot \Delta X'' + \Delta Y' \cdot \Delta Y''}{s^2}$$

$$= \frac{435,33 \cdot 85,44 + 571,35 \cdot (-713,22)}{718,30^2}$$

$$= \frac{37194,5952 - 407498,2476}{515954,8900}$$

$$= \frac{-370303,6524}{515954,89}$$

$$= \underline{-0,717705}$$

$$o = \frac{\Delta Y' \cdot \Delta X'' - \Delta X' \cdot \Delta Y''}{s^2}$$

$$= \frac{571,35 \cdot 85,34 - 435,33 \cdot (-713,22)}{718,30^2}$$

$$= \frac{48759,0092 - (-310486,0626)}{515954,8900}$$

$$= \frac{359245,0718}{515954,8900}$$

$$= \underline{0,696272}$$

Die geometrisch interpretierbaren Werte sind:

$$m = \sqrt{a^2 + o^2}$$

$$= \sqrt{0,717705^2 + 0,696272^2}$$

$$= \underline{0,9999}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{o}{a}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{0,696272}{-0,717705}\right)$$

$$= \arctan(-0,970137)$$

$$= -49,0351 \text{ gon}$$

$$= \underline{350,9649 \text{ gon}}$$

Nun lassen sich X_N und Y_N ableiten:

$$\begin{aligned}X_N &= X_A'' - a \cdot X_A' - o \cdot Y_A' \\&= 196,49 - (-0,717705) \cdot (-88,99) - 0,696272 \cdot (-422,89) \\&= 196,49 - 63,87 + 294,45 \\&= \underline{\underline{427,07}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y_N &= Y_A'' + o \cdot X_A' - a \cdot Y_A' \\&= 845,77 + 0,696272 \cdot (-88,99) - (-0,717705) \cdot (-422,89) \\&= 845,77 - 62,00 - 303,51 \\&= \underline{\underline{480,26}}\end{aligned}$$

Testen Sie folgendes Softwaretool: Konstruieren sie dazu einen Fall!

ERASSOFT

News Produkte Forum Umfrage Artworks Wallpaper Kontakt

Software

- Zeit-Programm
- Sicherungssperre
- Zeitabgleich
- Gamepad-Maus
- Locator

Scripts

- PHP-Counter
- PHP-Kommentar
- PHP-Umfrage

RPG-Spiele

- Devil or Angel
- Kama Camelion
- Bonus Games
- Zoidblode EW
- Devil or Angel 2

Online Application

- Statistik Calc.
- Rückwärtsschnitt
- Ordinary Kriging

JETZT SPENDEN!

Besucher

Gestern:	12
Heute:	5
Gesamt:	21.271
@ErasSoft	10.04.2009

Rückwärtsschnitt berechnen

Punkt X Y

A		
M		
B		

Winkel

Alpha

Beta gon

[Neupunkt berechnen](#) [Beispiel 1](#)

Neupunkt P(0,0000000 ; 0,0000000)

Formeln zur Berechnung nach Cassini

Berechnung der Hilfspunkte

$$Y_C = Y_A - (X_A - X_M) * \cot(\alpha)$$

$$X_C = X_A + (Y_A - Y_M) * \cot(\alpha)$$

$$Y_D = Y_B + (X_B - X_M) * \cot(\beta)$$

$$X_D = X_B - (Y_B - Y_M) * \cot(\beta)$$

Koordinaten von Punkt P

$$X_P = X_M + \frac{(Y_M - Y_C) - (X_M - X_C) * t_{C,D}}{t_{C,D} - t_{M,P}}$$

$$Y_P = Y_M + (X_P - X_M) * t_{M,P}$$

Geradenschnitt der Geraden

Probe

$$t_{C,D} = \frac{Y_C - Y_D}{X_C - X_D}$$

$$X_P = X_D + \frac{(Y_M - Y_D) - (X_M - X_D) * t_{M,P}}{t_{C,D} - t_{M,P}}$$

$$Y_P = Y_D + (X_P - X_D) * t_{C,D}$$

$$t_{M,P} = \frac{-(X_C - X_D)}{Y_C - Y_D}$$

Quelle: <http://erassoft.de/index.php?page=223>

patrick.reidelstuerz@th-deg.de



(2) Polygonzugmessung

(2) Polygonzugmessung

Bei einem Polygonzug wird eine Folge von Punkten jeweils durch Strecken- und Winkelmessung verbunden. Auf jedem Standpunkt wird der rechtsläufige Winkel vom vorherigen Punkt zum folgenden Punkt gemessen sowie die Strecken zu diesen Punkten. Am ersten und letzten Punkt werden die Winkel zwischen Fernzielen oder Anschlusspunkten und dem zweiten bzw. vorletzten Punkt gemessen. Diese gebräuchlichste Form des Polygonzuges wird beidseitig angeschlossen genannt. Es gibt aber auch nur einseitig angeschlossene Polygonzüge oder Ringpolygone. Diese sind aber fehlertheoretisch deutlich ungünstiger.

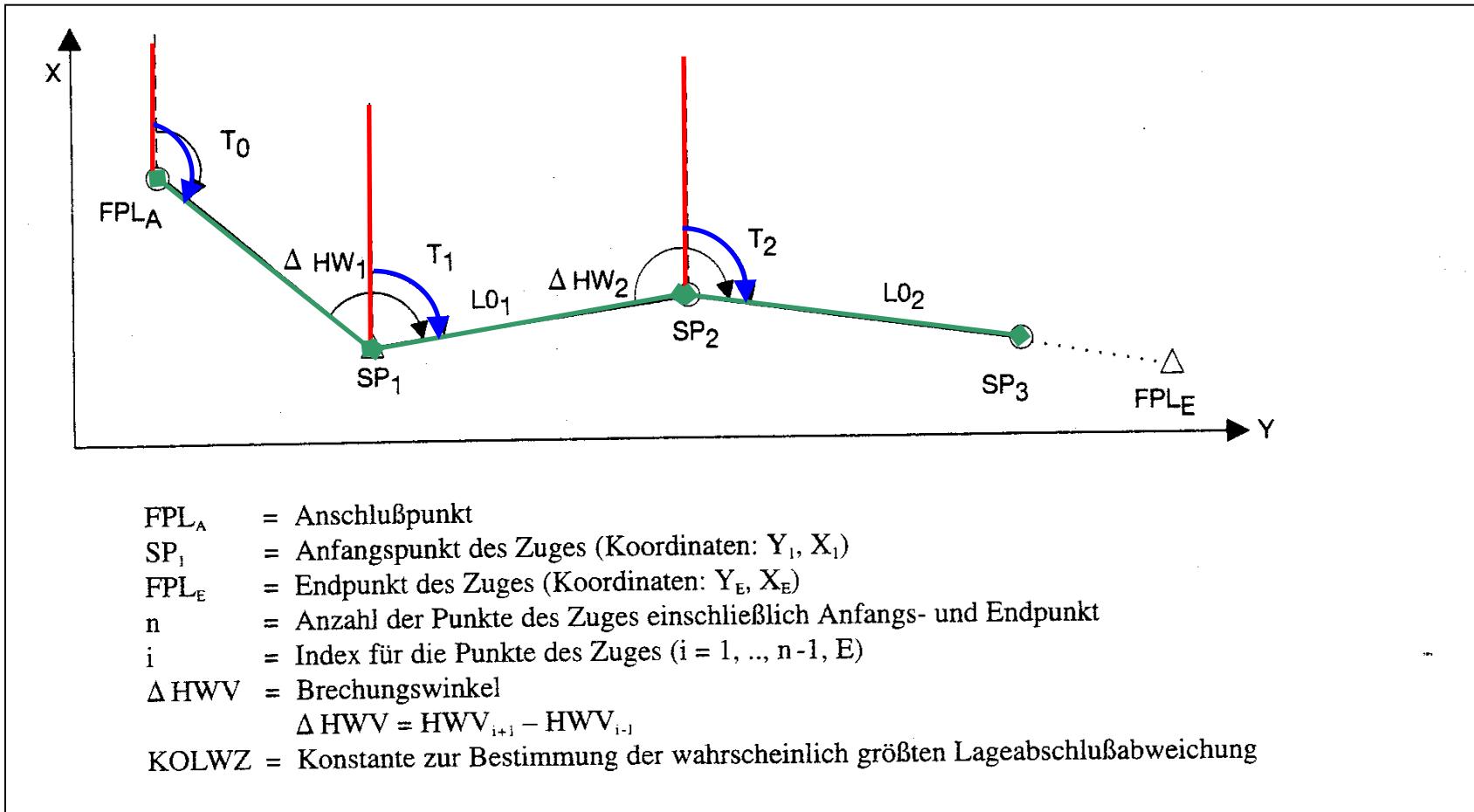
Ein Polygonzug ist also nichts anderes als eine Folge von Polarpunktmessungen mit einer Einpassung in ein übergeordnetes Netz.

Quelle:

<http://books.google.de/books?id=yTA9T9II4JoC&pg=PA132&lpg=PA132&dq=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt+nach+Collins&source=bl&ots=8T5nn8OIhc&sig=QVYj-CALiC10V8DxQcoxczGnu4&hl=de&sa=X&ei=o-tTUo75DJL44QTpoHIBA&ved=0CEIQ6AEwAw#v=onepage&q=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt%20nach%20Collins&f=false>

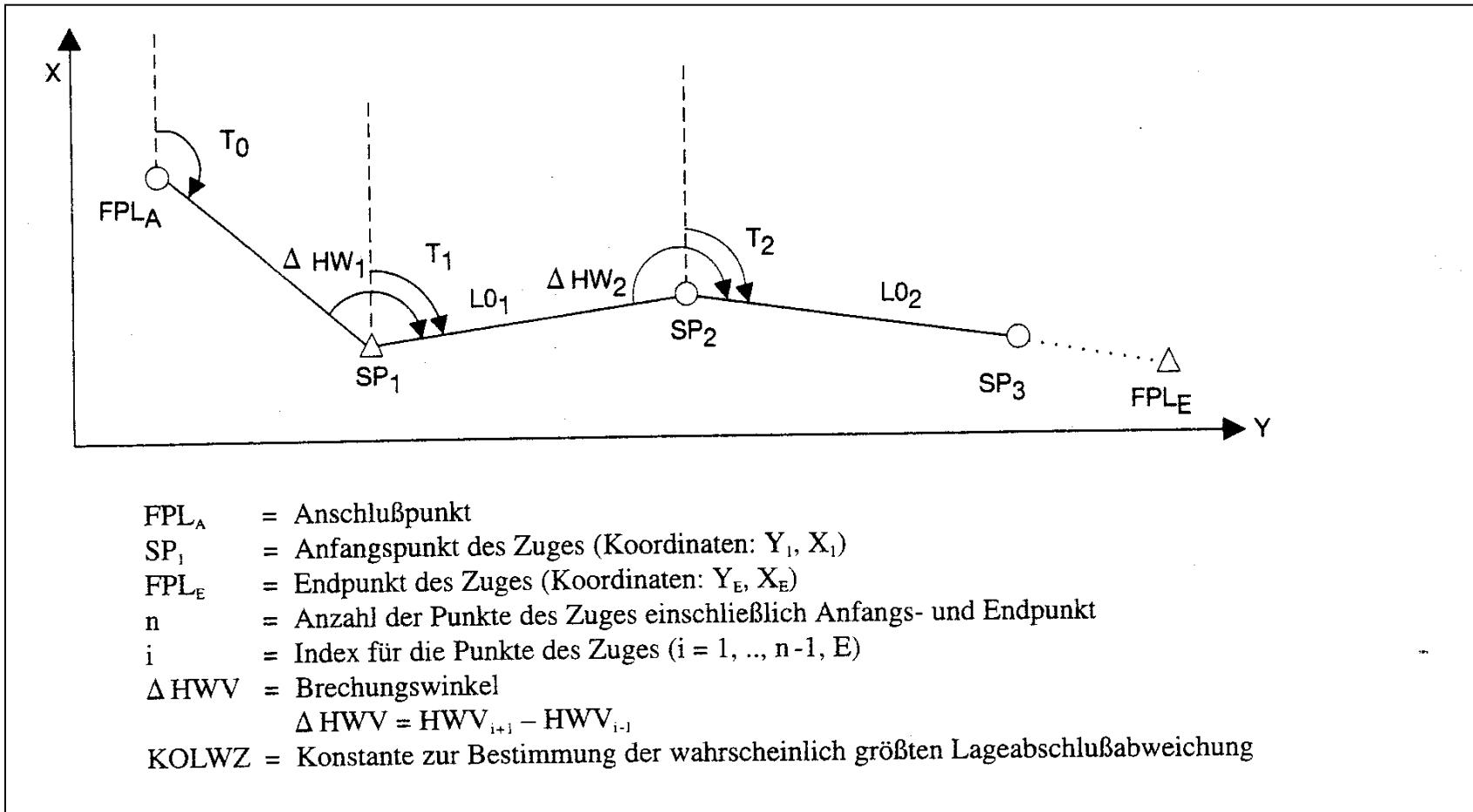
Polygonzugmessung (horizontal) – Aufsicht: Grundkonzept

- An jedem Theodolitstandort: **x-Richtung einnorden:** muss über Brechungswinkel geschehen!
- Ableitung von **Richtung** und **Entfernung**

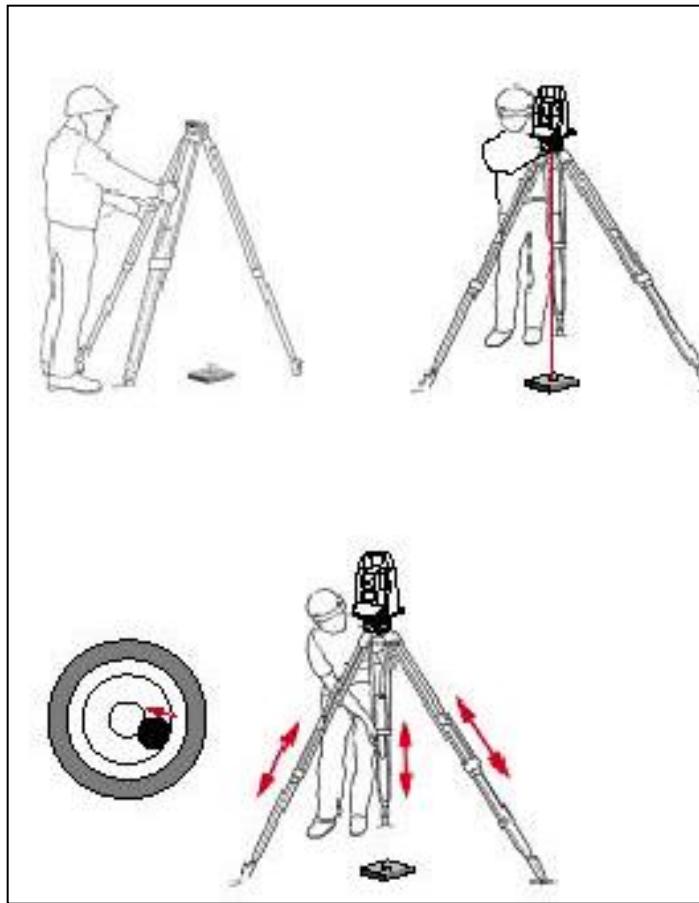


Polygonzugmessung (horizontal) – Aufsicht: Grundkonzept

→ Fehlerkorrekturen durch anteilige Aufteilung
der Winkel und Streckenfehler auf die einzelnen Strecken!



Theodolit muss immer exakt über dem Vermessungspunkt ausgerichtet werden:



Grobboxtierung: <http://www.youtube.com/watch?v=sA3ubs8vaug>

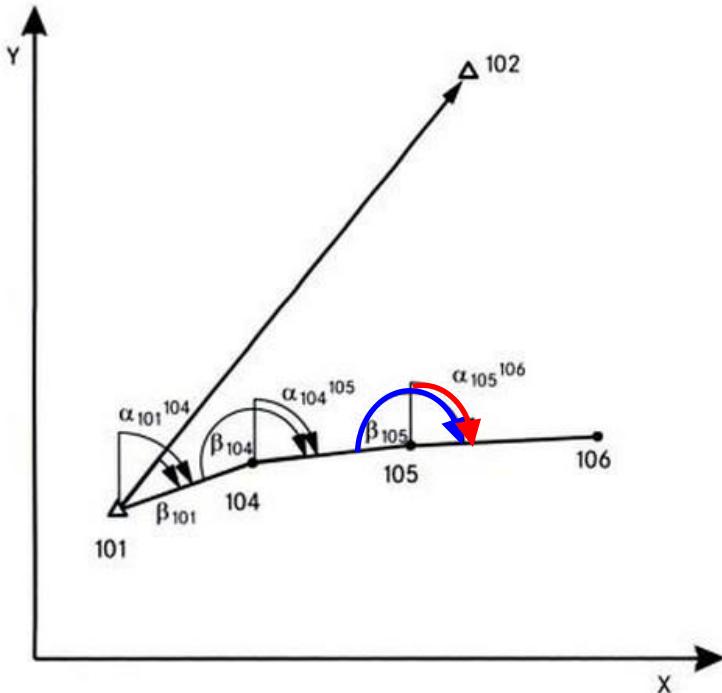
Feinjustierung: <http://www.youtube.com/watch?v=0hAOD4OGMGY&feature=relmfu>

Beidseitig angeschlossener Polygonzug: Rechenweg

Basics: **Richtungswinkel**

Brechungswinkel

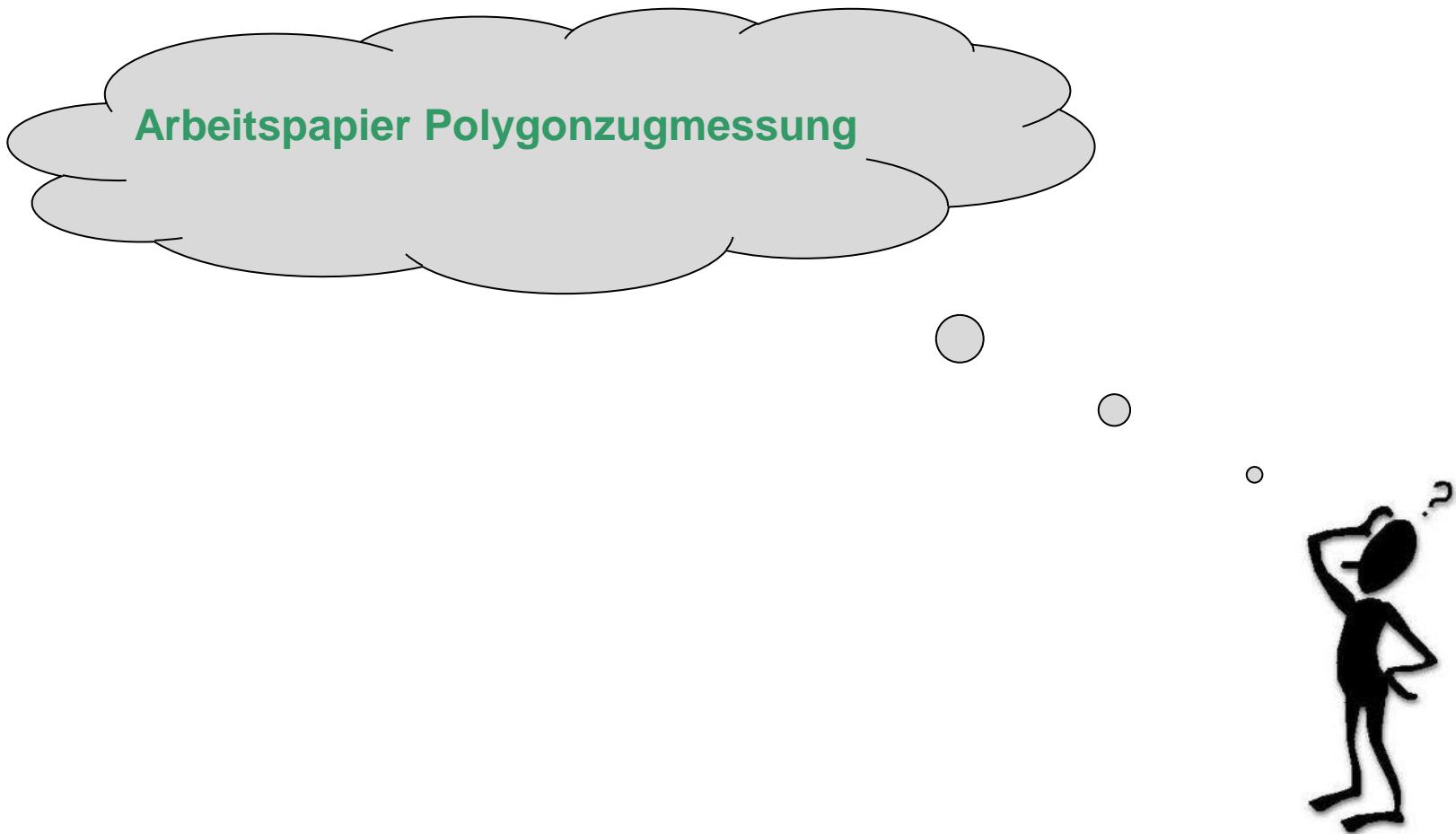
- Ableitung des Richtungswinkels über Brechungswinkel
- Außer bei bestehenden Anschlusspunkten!



Quelle:

<http://books.google.de/books?id=yTA9T9II4JoC&pg=PA132&lpg=PA132&dq=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt+nach+Collins&source=bl&ots=8T5nn8OIHc&sig=QVYj-CALiC10V8DxQcooxczGnu4&hl=de&sa=X&ei=o-tTUo75DJL44QTpoHIBA&ved=0CEIQ6AEwAw#v=onepage&q=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt%20nach%20Collins&f=false>

Beidseitig angeschlossener Polygonzug: Rechenweg



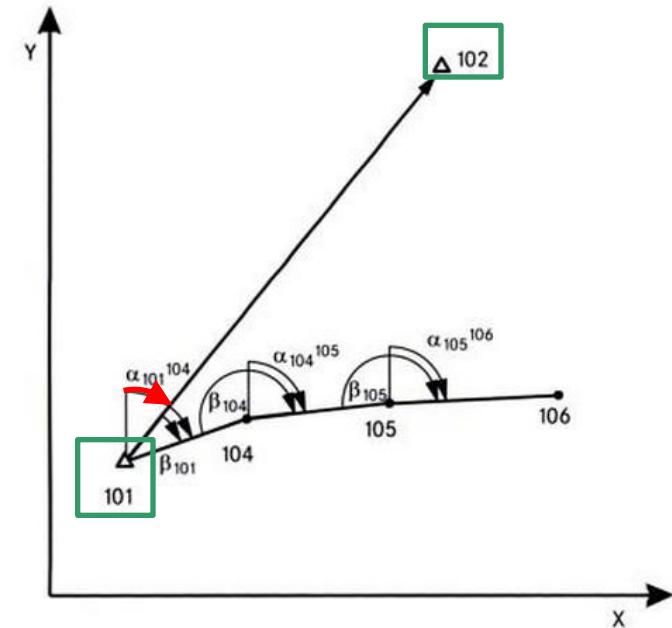
Quelle:

<http://books.google.de/books?id=yTA9T9II4JoC&pg=PA132&lpg=PA132&dq=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt+nach+Collins&source=bl&ots=8T5nn8OIhc&sig=QVJ-CALiC10V8DxQCoocGnu4&hl=de&sa=X&ei=o-tTUo75DJL44QTpoHIBA&ved=0CEIQ6AEwAw#v=onepage&q=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt%20nach%20Collins&f=false>

Beidseitig angeschlossener Polygonzug: Rechenweg

Zunächst wird der Richtungswinkel α_1^0 auf dem Startpunkt P_1 zum Anschlusspunkt P_0 berechnet. Dabei müssen die Besonderheiten der Richtungswinkelbestimmung berücksichtigt werden (siehe Kap.3.2.2.4).

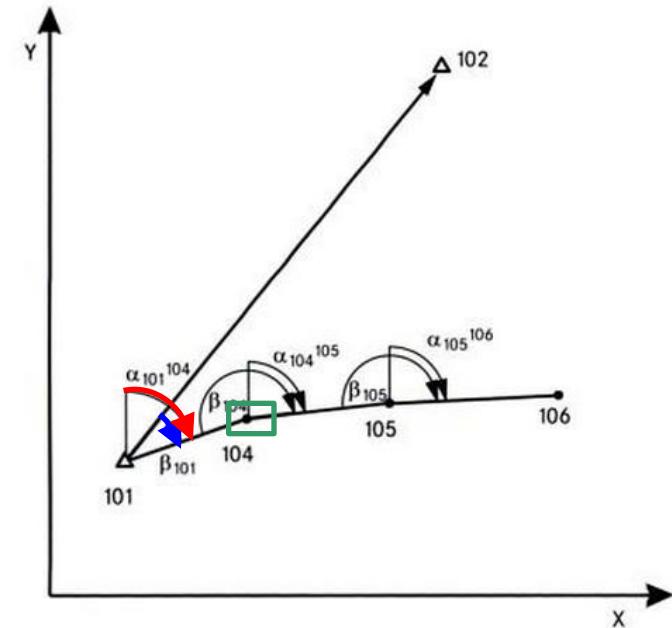
$$\alpha_1^0 = \arctan\left(\frac{X_0 - X_1}{Y_0 - Y_1}\right) \quad (4-41)$$



Beidseitig angeschlossener Polygonzug: Rechenweg

Zur Bestimmung des Richtungswinkels zum 1. Neupunkt (Punkt P_2) wird der Brechungswinkel β_1^{02} verwendet:

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 &= \alpha_1^0 + \beta_1^{02} \\ &= \alpha_1^0 + (r_1^2 - r_1^0)\end{aligned}\quad (4-42)$$



Beidseitig angeschlossener Polygonzug: Rechenweg

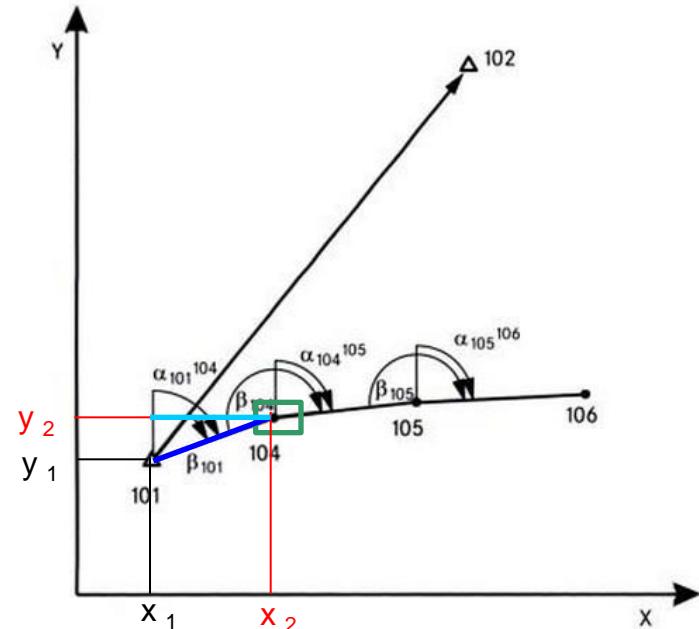
Zur Bestimmung des Richtungswinkels zum 1. Neupunkt (Punkt P_2) wird der Brechungswinkel β_1^{02} verwendet:

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 &= \alpha_1^0 + \beta_1^{02} \\ &= \alpha_1^0 + (r_1^2 - r_1^0)\end{aligned}\quad (4-42)$$

Die Koordinaten des 1. Neupunktes rechnen sich unter Nutzung der Horizontstrecke s_{AN} dann zu:

$$\begin{aligned}X_2 &= X_1 + s_{12} \cdot \sin(\alpha_1^2) \\ Y_2 &= Y_1 + s_{12} \cdot \cos(\alpha_1^2)\end{aligned}\quad (4-43)$$

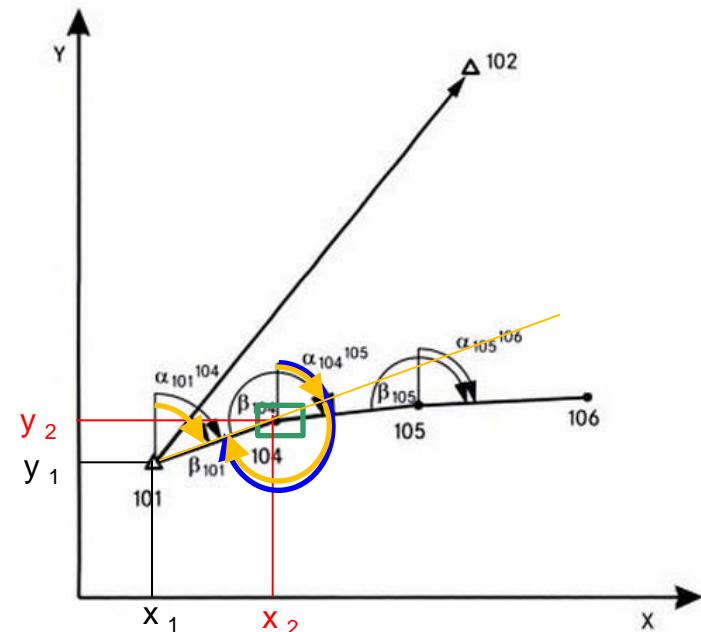
→ Einführen eines rechtwinkligen Dreieckes



Beidseitig angeschlossener Polygonzug: Rechenweg

Somit kennt man jetzt die Koordinaten des ersten Neupunktes. Der Richtungswinkel von einem Neupunkt zum vorherigen Punkt unterscheidet sich um genau 200 gon vom Richtungswinkel vom vorherigen Punkt zum neuen Punkt:

$$\alpha_{i+1}^i = \alpha_i^{i+1} + 200 \text{ gon} \quad (4-44)$$



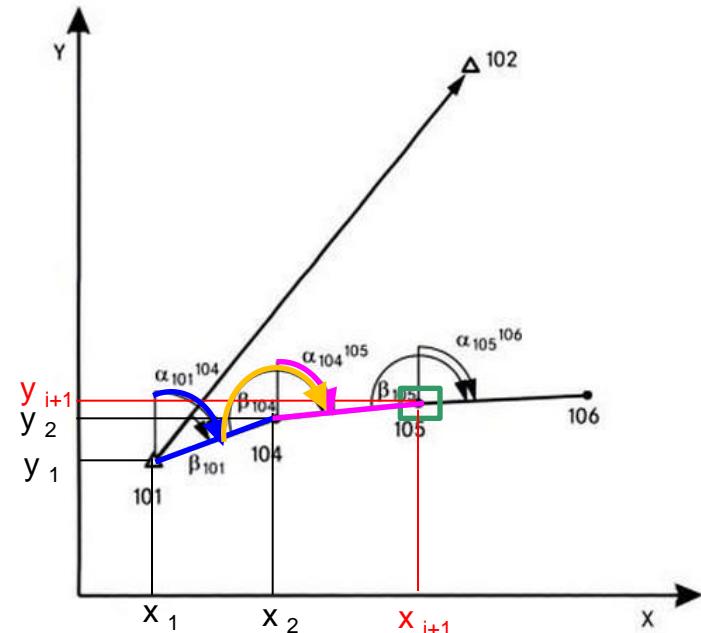
Beidseitig angeschlossener Polygonzug: Rechenweg

Wir können diesen Richtungswinkel wiederum als Anschlussrichtung verwenden und erneut den Richtungswinkel zum nächsten Punkt ermitteln:

$$\begin{aligned}\alpha_i^{i+1} &= \alpha_i^{i-1} + \beta_i^{(i-1)(i+1)} \\ &= \alpha_i^{i-1} + (r_i^{i+1} - r_i^{i-1})\end{aligned}\quad (4-45)$$

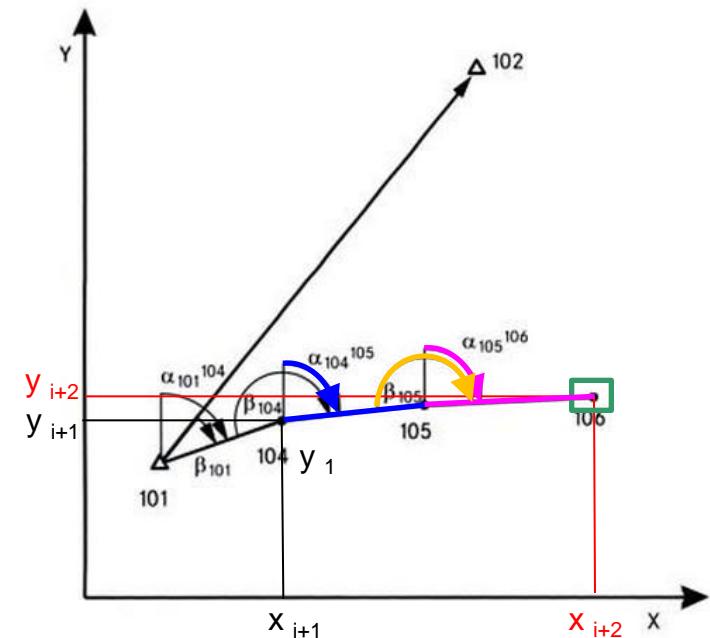
Die Koordinaten des nächsten Neupunktes rechnen sich unter Nutzung der Horizontalstrecke $s_{i \rightarrow (i+1)}$ dann zu:

$$X_{i+1} = X_i + s_{i \rightarrow (i+1)} \cdot \sin(\alpha_i^{i+1}) \quad Y_{i+1} = Y_i + s_{i \rightarrow (i+1)} \cdot \cos(\alpha_i^{i+1}) \quad (4-46)$$



Beidseitig angeschlossener Polygonzug: Rechenweg

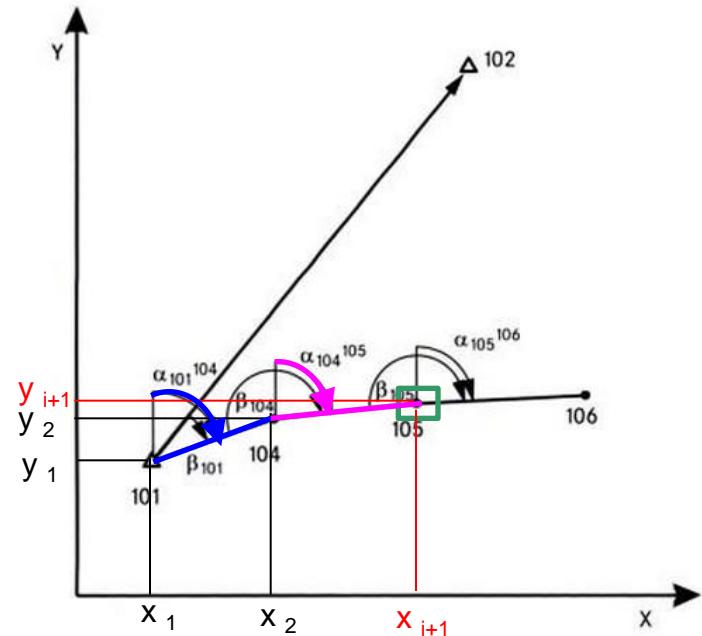
Dies wird wiederholt, bis man am Endpunkt des Polygonzuges angekommen ist.



Beidseitig angeschlossener Polygonzug: Rechenweg

Dies wird wiederholt, bis man am Endpunkt des Polygonzuges angekommen ist.

Man kann dort die ermittelten Koordinaten mit den Sollkoordinaten des Endpunktes vergleichen und kleine Fehler gleichmäßig auf den ganzen Polygonzug verteilen.



Beidseitig angeschlossener Polygonzug: Rechenweg

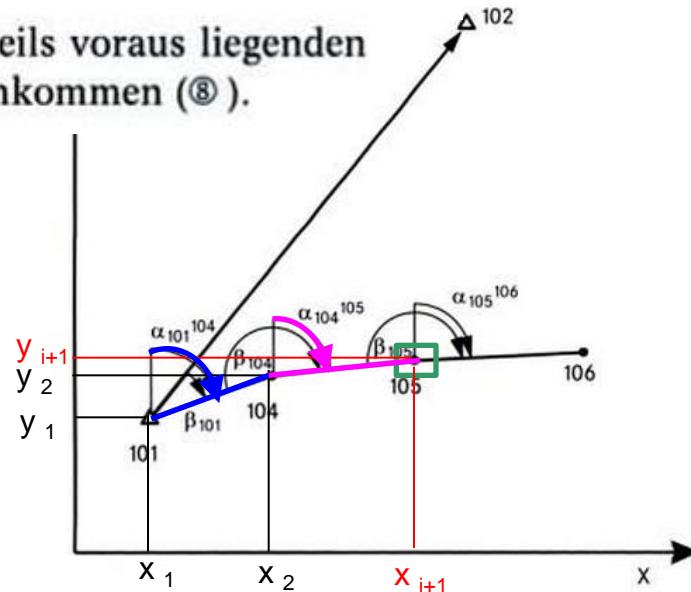
Dies wird wiederholt, bis man am Endpunkt des Polygonzuges angekommen ist.

Man kann dort die ermittelten Koordinaten mit den Sollkoordinaten des Endpunktes vergleichen und kleine Fehler gleichmäßig auf den ganzen Polygonzug verteilen.

Man kann bereits vor der Rechnung des Zuges die Winkelsumme überprüfen. Die Summe der Brechungswinkel (abzüglich eines Vielfachen von 200 gon) muss gleich der Differenz zwischen der Anschlussrichtung am Startpunkt und der Anschlussrichtung am Endpunkt des Polygonzuges sein.

$$\alpha_{ist} = \sum_{i=1}^n \alpha_i - 200 \cdot n \quad \alpha_{soll} = \alpha_E - \alpha_0 \quad (4-47)$$

Koordinatenzuschläge werden auf die Koordinaten des jeweils voraus liegenden Punktes aufgeschlagen, am Ende muss man am Endpunkt ankommen (®).



Wir haben nur $n = 3$ Standpunkte, aber 4 Streckenmessungen. Die Berechnung der Richtungswinkel entfällt.

Nach dem Eintragen der Punktnummern werden die gemessenen Brechungswinkel in die zweite Spalte eingetragen. Die Berechnung eines Winkelabschlussfehlers entfällt, da die erforderliche Information nicht vorliegt. Ebenso entfällt die Berechnung des Koordinatenabschlusses.

PNr.	^① β	^② β'	^④ α_i^{i+1}	^⑤ $\sin(\alpha_i^{i+1})$ $\cos(\alpha_i^{i+1})$	^⑥ $s_{i \rightarrow (i+1)}$	^⑦ ΔX ΔY	^⑧ ΔX	Y
00.000								
101			200.000	+0.00000		+0.00	0.00	0.00
				-1.00000	164.33	+0.00	+0.00	-164.33
104	214.475		214.475	-0.22542		-41.01	0.00	-164.33
				-0.97426	181.93	-177.25	-41.01	-177.25
105	204.210		218.685	-0.28931		-62.18	-41.01	-341.58
				-0.95724	214.93	-205.74	-62.18	-205.74
106	199.166		217.851	-0.27674		-50.88	-103.19	-547.32
				-0.96094	183.84	-176.66	-50.88	-176.66
108							-154.07	-723.98

- ② ist:
Widerspruch
- soll:
zu vert. dwi = gon
- ⑦ dX: ist:
soll:
- ⑦ dY: ist:
soll:



Anschließend müssen die so berechneten Punkte in das übergeordnete Koordinatensystem transformiert werden. Dies erfolgt wie im Kap. 1.3.4.4 beschrieben. Zur Vereinfachung der Rechnung und zur Vermeidung von Rundungsfehlern im Taschenrechner werden bei den Landeskoordinaten die jeweils identischen führenden vier Stellen gestrichen (und am Ende wieder angebracht).

Punktnummer	lokales System		Landeskoordinatensystem	
	X' [m]	Y' [m]	X'' [m]	Y'' [m]
101	0,00	0,00	099,24	100,32
108	-154,07	-723,98	833,23	196,34
104	0,00	-164,33	-	-
105	-41,01	-341,58	-	-
106	-103,19	-547,32	-	-

$$\begin{aligned}\Delta X' &= X_2' - X_1' & \Delta Y' &= Y_2' - Y_1' & \Delta X'' &= X_2'' - X_1'' & \Delta Y'' &= Y_2'' - Y_1'' \\ &= -154,07 - 0,00 & & = -723,98 - 0,00 & & = 833,23 - 99,24 & & = 196,34 - 100,32 \\ &= -154,07 & & = -723,98 & & = 733,99 & & = 96,02\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s' &= \sqrt{(\Delta X')^2 + (\Delta Y')^2} \\ &= \sqrt{(-154,07)^2 + (-723,98)^2} \\ &= \underline{\underline{740,19}} \\ s'' &= \sqrt{(\Delta X'')^2 + (\Delta Y'')^2} \\ &= \sqrt{733,99^2 + 96,02^2} \\ &= \underline{\underline{740,24}}\end{aligned}$$



Aus diesen Werten können dann unmittelbar die Transformationsparameter a und o berechnet werden.

$$a = \frac{\Delta X' \cdot \Delta X'' + \Delta Y' \cdot \Delta Y''}{s^2}$$

$$= \frac{-154,07 \cdot 733,99 + (-723,98) \cdot 96,02}{740,19^2}$$

$$= \frac{-113085,84 - 69516,56}{547884,60}$$

$$= \underline{\underline{-0,333286}}$$

$$o = \frac{\Delta Y' \cdot \Delta X'' - \Delta X' \cdot \Delta Y''}{s^2}$$

$$= \frac{-723,98 \cdot 733,99 - (-154,07) \cdot 96,02}{740,19^2}$$

$$= \frac{-531394,08 + 14793,80}{547884,60}$$

$$= \underline{\underline{-0,942900}}$$

Da X_1' und X_1'' jeweils 0 sind, ist $X_0 = X_1''$ und $Y_0 = Y_1''$:

$$X_0 = X_1'' - a \cdot X_1' - o \cdot Y_1'$$

$$= 99,24 - (-0,33...) \cdot 0,0 - (-0,94...) \cdot 0,0$$

$$= \underline{\underline{99,24}}$$

$$Y_0 = Y_1'' + o \cdot X_1' - a \cdot Y_1'$$

$$= 100,32 + (-0,94...) \cdot 0,0 - (-0,33...) \cdot 0,0$$

$$= \underline{\underline{100,32}}$$

Wir haben also $n = 5$ Standpunkte:

$$\alpha_{101}^{102} = 42,984 \text{ gon}$$

$$\alpha_{108}^{110} = 127,723 \text{ gon}$$



Die Berechnung erfolgt mit dem gleichen Formular. Nach dem Eintragen der Punktnummern werden die gemessenen Brechungswinkel in die zweite Spalte eingetragen sowie deren Summe gebildet (①). Daraus kann dann der Ist- und der Soll-Wert des Winkelabschlusses berechnet werden (②), wobei n die Zahl der Polygonpunkte ist.

PNr.	① β	② β'	④ α_i^{i+1}	⑤ $\sin(\alpha_i^{i+1})$ $\cos(\alpha_i^{i+1})$	⑥ $s_{i \rightarrow (i+1)}$	⑦ ΔX ΔY	⑧ ΔX	Y
0.000								
101			0.000	+0.000000		+0.00	200.00	500.00
				+1.000000	53.17	+53.17	+0.00	+53.16
102	285.528	285.526	85.526	+0.974266		+30.18	200.00	553.16
				+0.225403	30.98	+6.98	+30.18	+6.98
103	315.843	315.841	201.367	-0.021471		-1.40	230.18	560.14
				-0.999769	65.22	-65.20	-1.39	-65.21
104	263.923	263.922	265.289	-0.855003		-11.22	228.79	494.93
				-0.518623	13.12	-6.80	-11.22	-6.80
105	272.579	272.577	337.866	-0.828262		-17.57	217.57	488.13
				+0.560341	21.21	+11.88	-17.57	+11.87
101	262.136	262.134	400.000				200.00	500.00
	1400.009					-0.01 0.03	733.99	96.02

- ② ist: 1400.009 soll: 1400.000
 Widerspruch 0.009 zu vert. dwi = -0.002 gon
- ⑦ dX: ist: -0.01 soll: 0.00
- ⑧ dY: ist: 0.03 soll: 0.00



<http://books.google.de/books?id=yTA9T9II4JoC&pg=PA132&lpg=PA132&dq=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt+nach+Collins&source=bl&ots=8T5nn8OIHc&sig=QVJ-CALiC10V8DxQCooxczGnu4&hl=de&sa=X&ei=o-tTUo75DJL44QTPpoHIBA&ved=0CEIQ6AEwAw#v=onepage&q=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt%20nach%20Collins&f=false>

3.4 Höhenmessung

Nivellement:

→ bezeichnet die Messung des Höhenunterschiedes verschiedener Standorte.

Höhenfestpunkt Deutschland:

Pegel Amsterdam als NN (Normal Null) definiert.

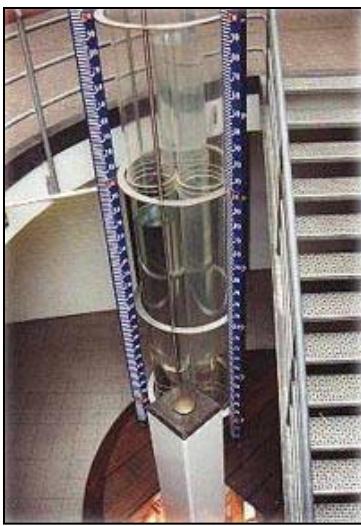
Erster Fixpunkt war die Berliner Sternwarte mit 37m ü. NN.

Höhenfestpunkt Österreich:

Triester Pegel

Höhenfestpunkt Schweiz:

Pegel Genua



Drei Wassersäulen im Stadhuis von Amsterdam.

Interessantes:

Amsterdamer Pegel (Normal Null)

Mit dem Pegel auf Meereshöhe = 0 m über Normalnull ist in Deutschland der Amsterdamer Pegel, "Normaal Amsterdamer Peil (N.A.P.)" gemeint. Er wurde im 17. Jahrhundert durch den Magistrat der Stadt Amsterdam als Ausgangspunkt für die nationale Höhenmessung festgelegt und später auch als Bezugspunkt für verschiedene Nachbarländer übernommen.

So bezog z.B. die Preussische Landesaufnahme 1877/1878 ihre Höhenvermessung auf den Amsterdamer Pegel.

→ Anschluss des Datums Berliner Sternwarte an Amsterdamer Pegel: 1877/1878



3.4 Höhenmessung

- 3.4.1 Geometrisches Nivellement
- 3.4.2 Hydrostatisches Nivellement
- 3.4.3 Trigonometrisches Nivellement
- 3.4.4 Barometrisches Nivellement
- 3.4.5 Höhenmessung mit Global Positioning System (GPS)

3.4 Höhenmessung

3.4.1 Geometrisches Nivellement

3.4.2 Hydrostatisches Nivellement

3.4.3 Trigonometrisches Nivellement

3.4.4 Barometrisches Nivellement

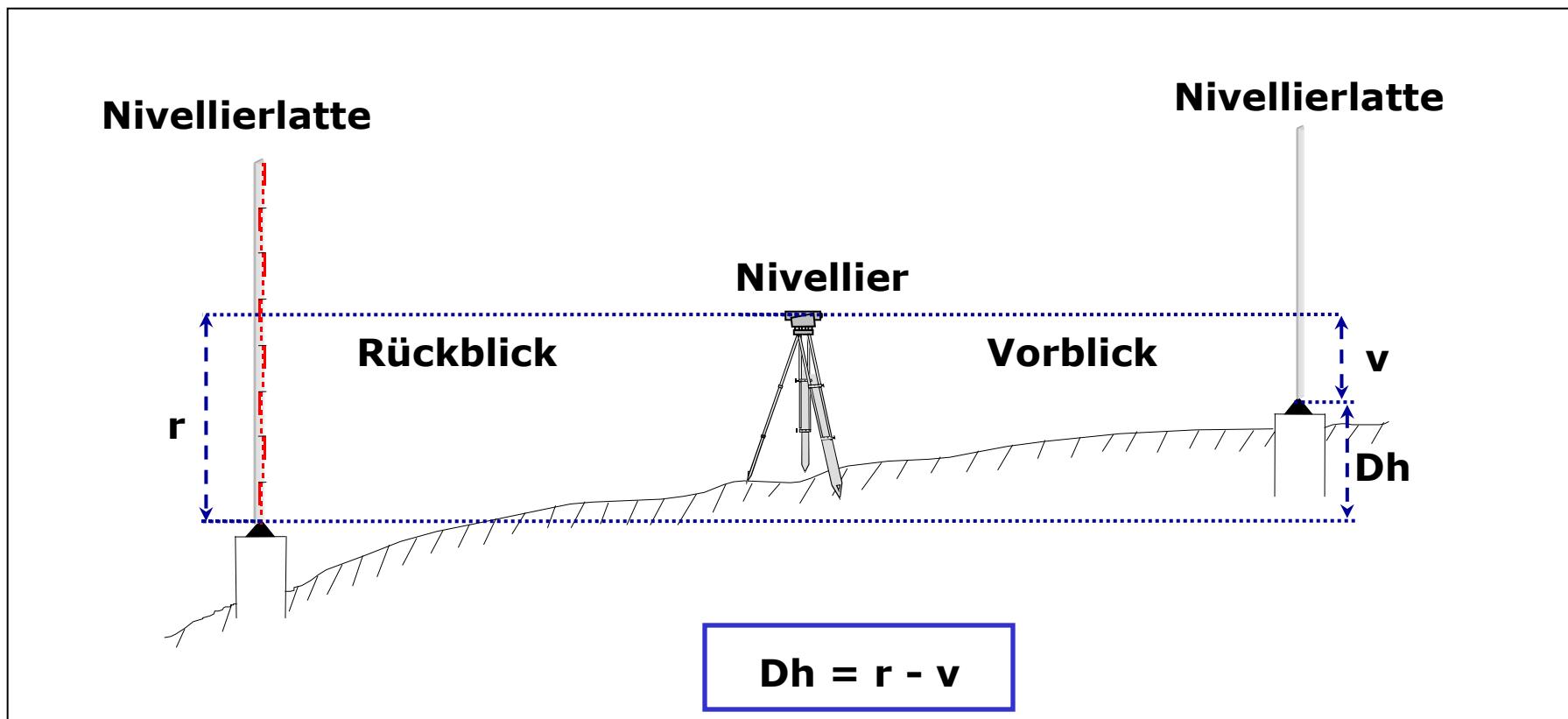
3.4.5 Höhenmessung mit Global Positioning System (GPS)

3.4.1 Geometrisches Nivellement

Geometrisches Nivellement:

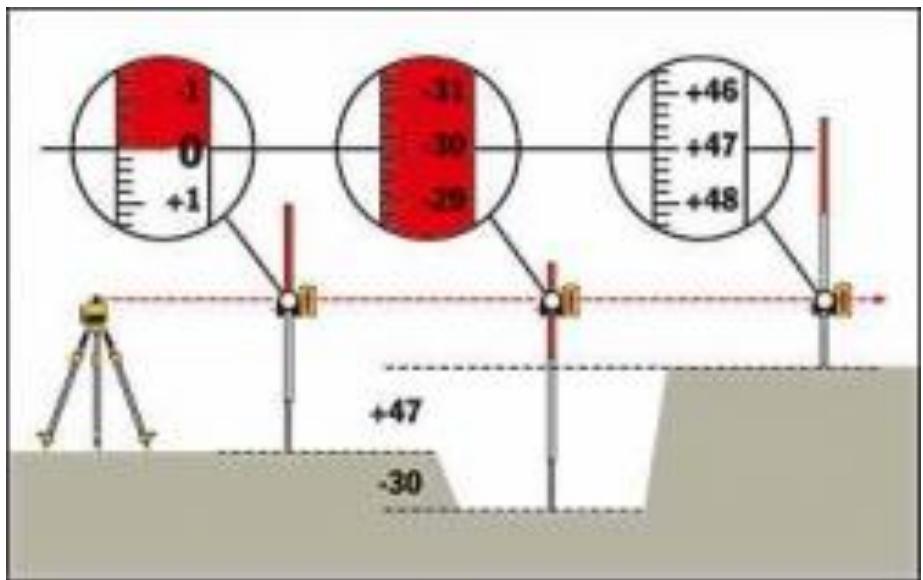
Messen von Höhenunterschieden mit Hilfe eines **horizontalen Zielstrahles**, wobei an lotrecht gehaltenen Nivellierlatten die vertikalen Abstände abgelesen werden.

Die **Höhendifferenz** entspricht der Differenz zwischen Rück- und Vorblick

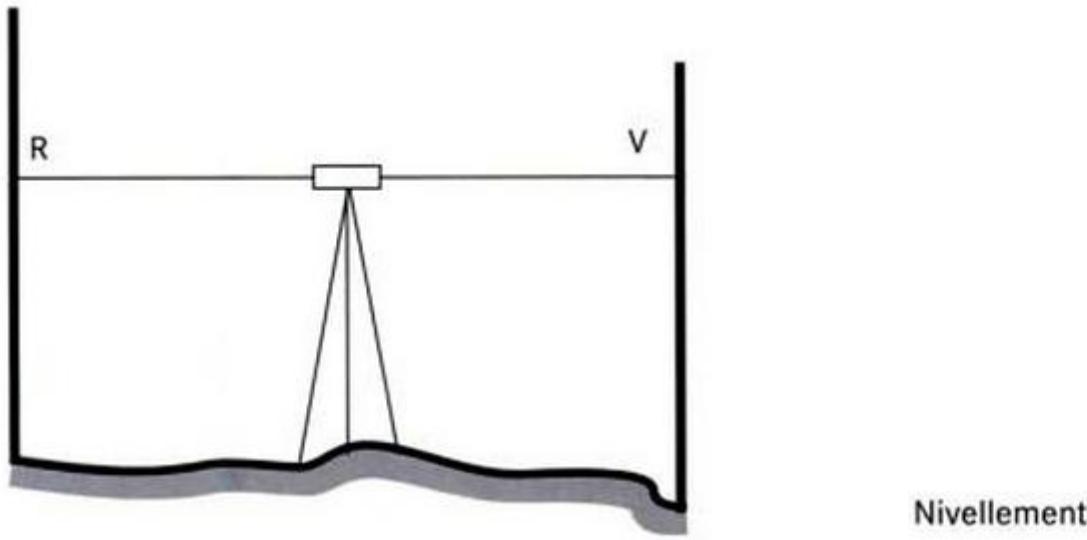




Nivellierlatte



Messprinzip



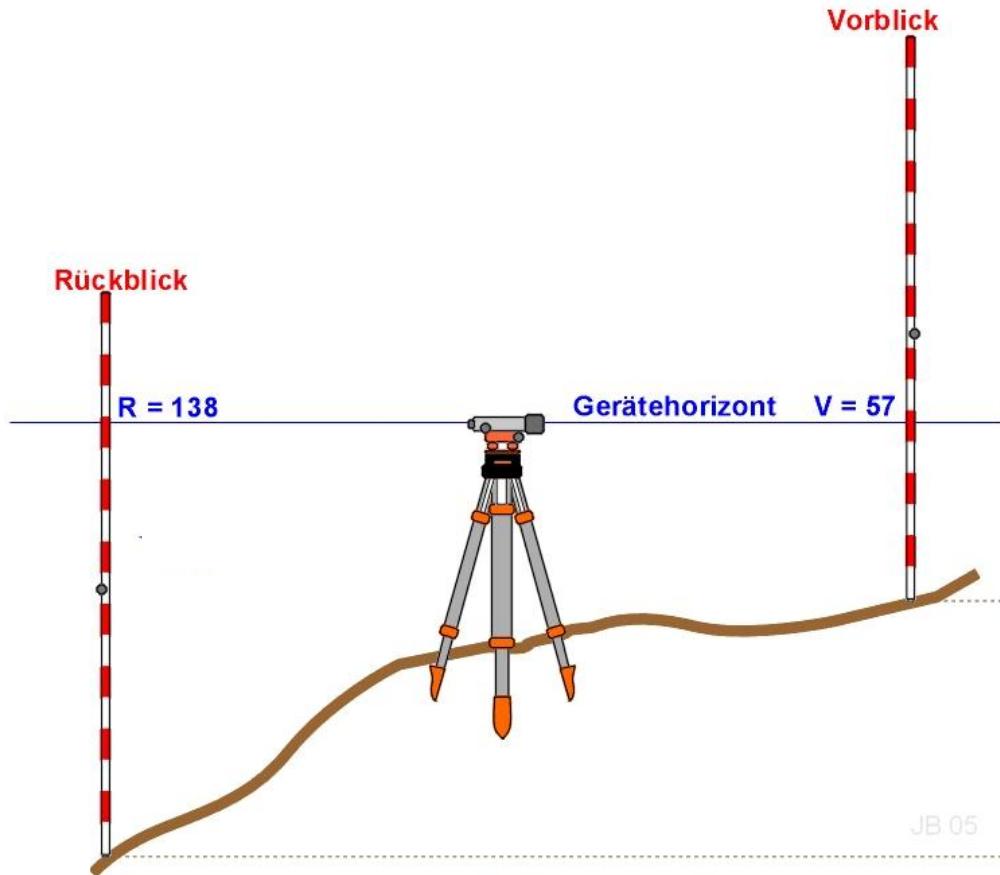
Quelle:

<http://books.google.de/books?id=yTA9T9II4JoC&pg=PA132&lpg=PA132&dq=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt+nach+Collins&source=bl&ots=8T5nn8OIHc&sig=QVyJ-CALiC10V8DxQCooxczGnu4&hl=de&sa=X&ei=o-tTUo75DJL44QTpoHIBA&ved=0CEIQ6AEwAw#v=onepage&q=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt%20nach%20Collins&f=false>

Übungsaufgabe

Beim geometrischen Nivellement lesen Sie an der Nivellierlatte:

- im Vorwärtsblick: 57cm
 - im Rückwärtsblick: 1,38 m ab
- Wie groß ist die Höhendifferenz?



Übungsaufgabe

Beim geometrischen Nivellement lesen Sie an der Nivellierlatte:

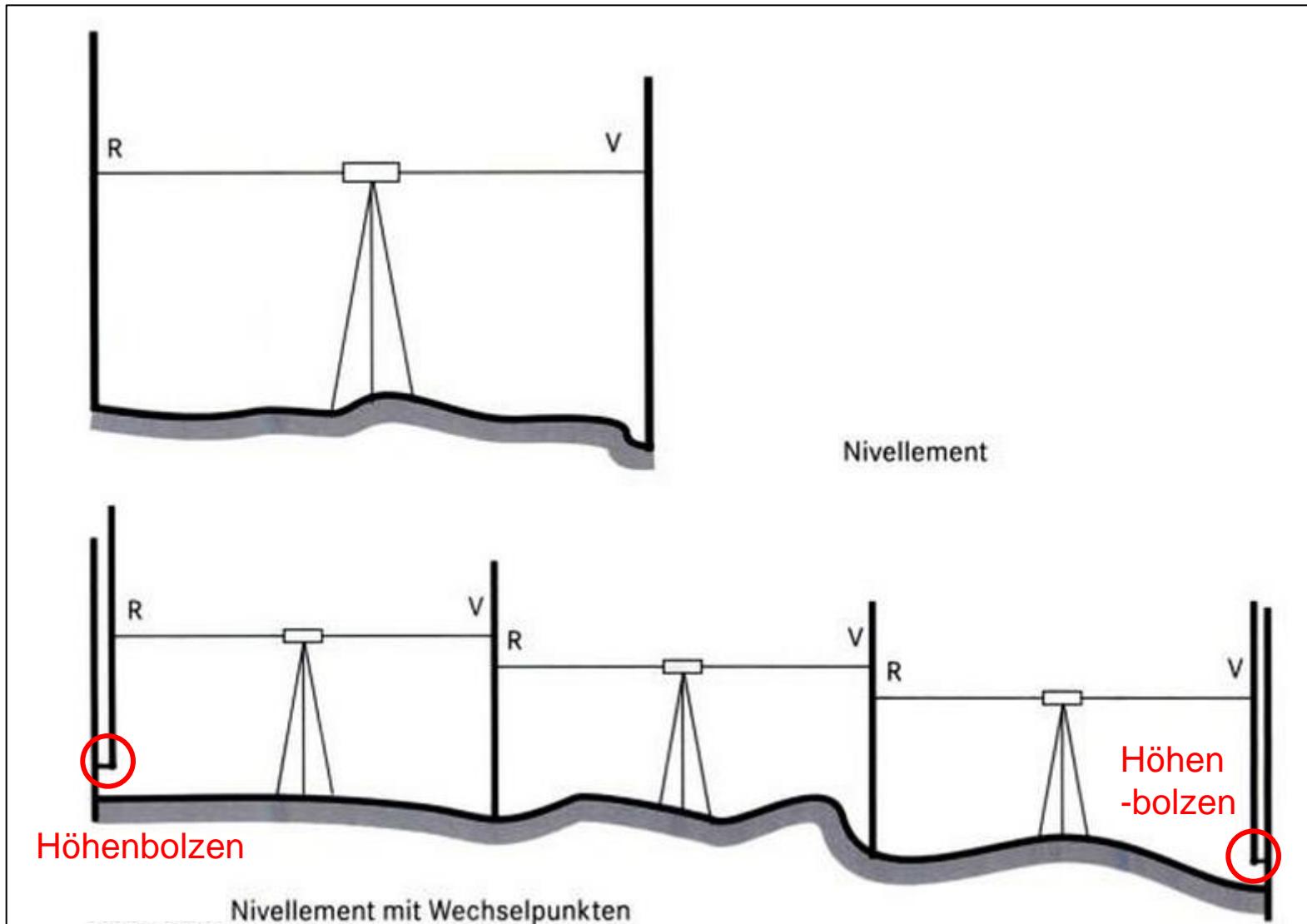
- im Vorwärtsblick: 57cm
 - im Rückwärtsblick: 1,38 m ab
- Wie groß ist die Höhendifferenz?

Lösung:

Vorblick

Welche Höhe wurde
nun eigentlich gemessen?





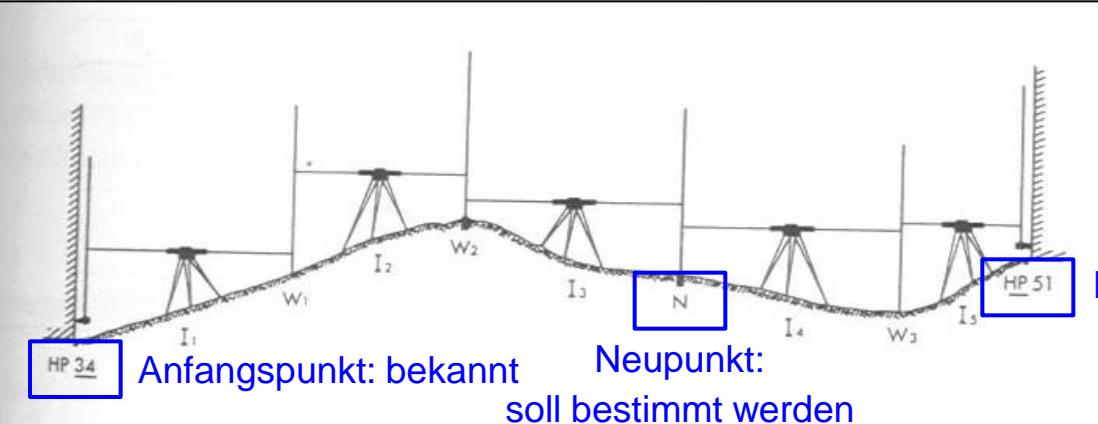
Quelle:

<http://books.google.de/books?id=yTA9T9II4JoC&pg=PA132&lpg=PA132&dq=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt+nach+Collins&source=bl&ots=8T5nn8OIHc&sig=QVJ-CALiC10V8DxQCooxczGnu4&hl=de&sa=X&ei=o-tTUo75DJL44QTpoHIBA&ved=0CEIQ6AEwAw#v=onepage&q=R%C3%BCckw%C3%A4rtsschnitt%20nach%20Collins&f=false>

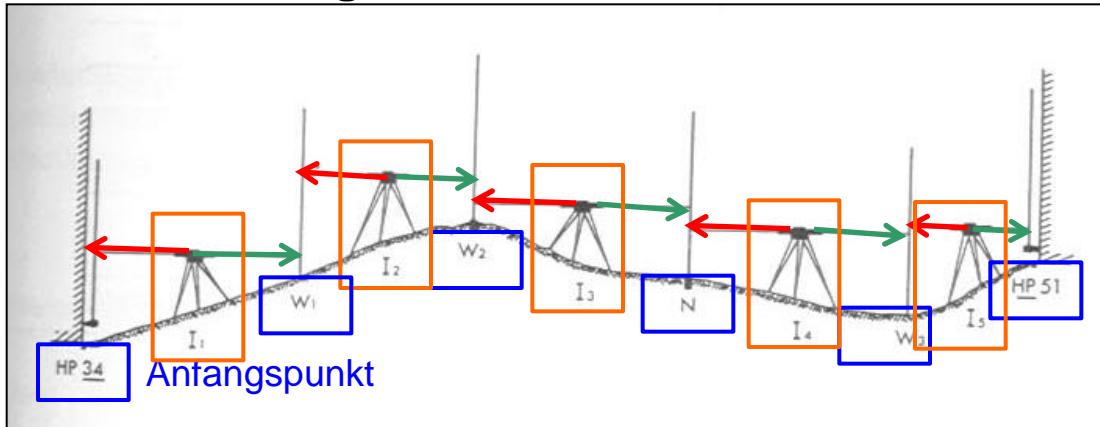
Beispiel eines Aufnahmeformulars: (Nivellement Vordruck)

Nivellement - Feldbuch

Durchführung eines Nivellements:



Durchführung eines Nivellements:



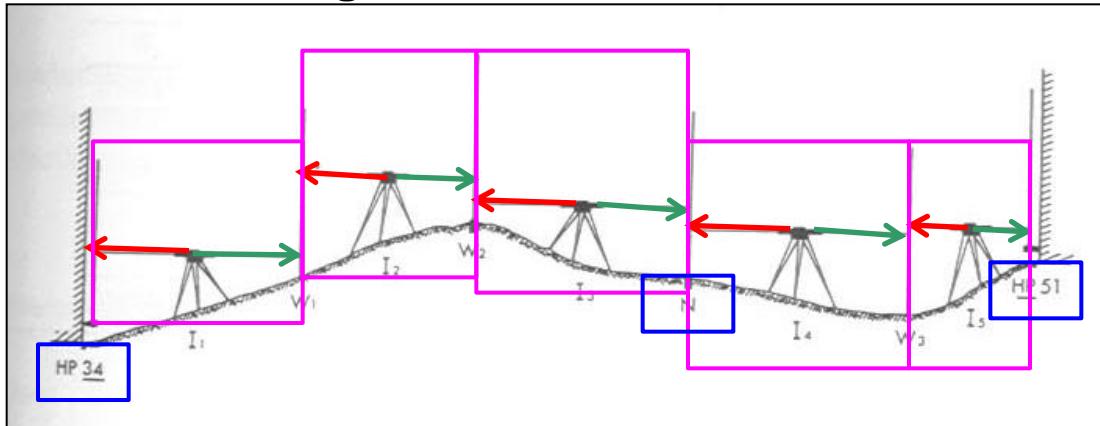
Punkt	Messwerte			Auswertung			
	Zielweite z [m]	Rückbl. r [m]	Vorbl. v [m]	Höhenunterschied $\Delta h = r - v$ [m]	Höhe ü. NN [m]	Bemerk.	
	2	3	4	5	6	7	8
HP 34	50	1,628			222,915	Mauerb.	
W ₁	50		0,416	1,212	+1,212 ₉		
	40	1,957			224,128		
W ₂	40		0,816	1,141	+1,141 ₇		
	50	0,348			225,270		
N	50		1,389		1,041	-1,040 ₁	Mauer-
	50	1,002				224,230	bolzen
W ₃	50		1,593		0,591	-0,590 ₁	
	28	1,738				223,639	
HP 51	28		0,615	1,123	+1,123 ₅	224,763	Mauer-
	436 m	$\sum r_i$ 6,673	$\sum v_i$ 4,829	$\sum +\Delta h_i$ 3,476	$\sum -\Delta h_i$ 1,632	$H_E - H_A$ +1,848	bolzen (Soll)

Mauerbolzen im Festpunktnetz mit gegebener Höhe

Mauerbolzen:
Neupunkt soll bestimmt werden

Mauerbolzen im Festpunktnetz mit gegebener Höhe

Durchführung eines Nivellements:



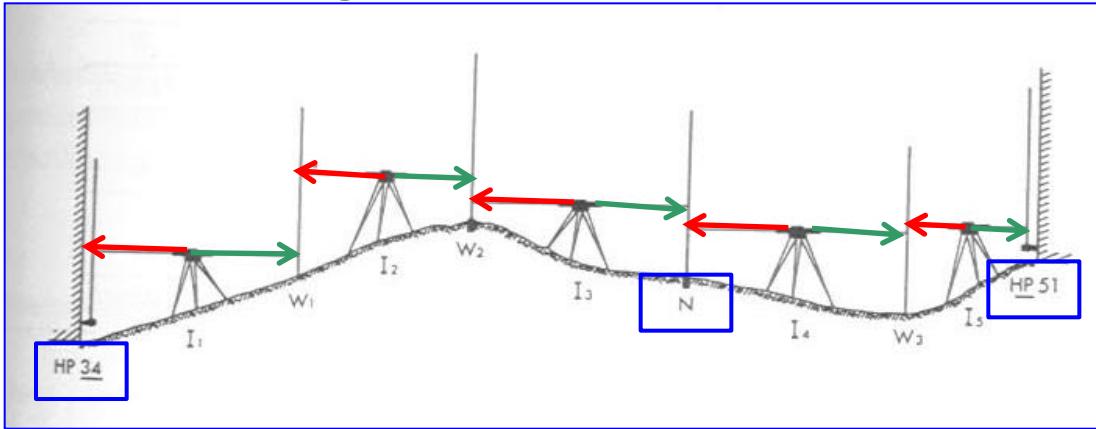
Punkt	Messwerte			Auswertung				
	Zielweite z [m]	Rückbl. r [m]	Vorbl. v [m]	Höhenunterschied $\Delta h = r - v$ [m]	Höhe ü. NN [m]	Bemerk.		
1	2	3	4	5	6	7	8	
HP 34	50	1,628			222,915	Mauerb.	Mauerbolzen im Festpunktnetz mit gegebener Höhe	
W ₁	50		0,416	1,212	-1,212 ₉	Steigung		
	40	1,957			224,128			
W ₂	40		0,816	1,141	-1,141 ₇	Steigung		
	50	0,348			225,270			
N	50		1,389	Gefälle	1,041	-1,040 ₁	Mauerbolzen: Neupunkt soll bestimmt werden	
	50	1,002			224,230	224,230		
W ₃	50		1,593	Gefälle	0,591	-0,590 ₁	Mauerbolzen im Festpunktnetz mit gegebener Höhe	
	28	1,738			223,639	223,639		
HP 51	28		0,615	Steigung	+1,123 ₅	Mauerbolzen		
	436 m	$\sum r_i$ 6,673	$\sum v_i$ 4,829	$\sum +\Delta h_i$ 3,476	$\sum -\Delta h_i$ 1,632	$H_E - H_A$ +1,848	(Soll)	

Mauerbolzen im Festpunktnetz mit gegebener Höhe

Mauerbolzen:
Neupunkt soll bestimmt werden

Mauerbolzen im Festpunktnetz mit gegebener Höhe

Durchführung eines Nivellements:



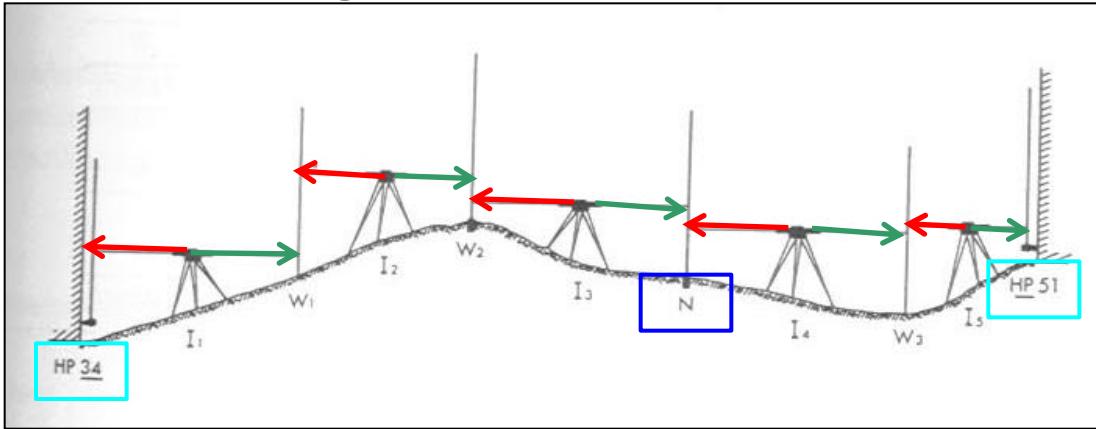
Punkt	Messwerte			Auswertung			
	Zielweite <i>z</i> [m]	Rückbl. <i>r</i> [m]	Vorbl. <i>v</i> [m]	Höhenunterschied $\Delta h = r - v$ [m]	Höhe ü. NN [m]	Bemerk.	
	2	3	4	5	6	7	8
HP 34	50	1,628			222,915	Mauerb.	
W ₁	50		0,416	1,212	+1,212 ₉		
	40	1,957			224,128		
W ₂	40		0,816	1,141	+1,141 ₇		
	50	0,348			225,270		
N	50		1,389		1,041 → -1,040 ₁	Mauer-	
	50	1,002			224,230	bolzen	
W ₃	50		1,593		0,591 → -0,590 ₁		
	28	1,738			223,639		
HP 51	28		0,615	1,123	+1,123 ₅	Mauer-	
	436 m	$\sum r_i$ 6,673	$\sum v_i$ 4,829	$\sum +\Delta h_i$ 3,476	$\sum -\Delta h_i$ 1,632	224,763	bolzen
					$H_E - H_A$ +1,848	(Soll)	

Mauerbolzen im Festpunktnetz mit gegebener Höhe

Mauerbolzen:
Neupunkt soll bestimmt werden

Mauerbolzen im Festpunktnetz mit gegebener Höhe

Durchführung eines Nivellements:



Punkt	Messwerte			Auswertung			
	Zielweite z [m]	Rückbl. r [m]	Vorbl. v [m]	Höhenunterschied $\Delta h = r - v$ [m]	Höhe ü. NN [m]	Bemerk.	
	2	3	4	5	6	7	8
HP 34	50	1,628			222,915	Mauerb.	
W_1	50		0,416	1,212	+1,212 ₉		
	40	1,957			224,128		
W_2	40		0,816	1,141	+1,141 ₇		
	50	0,348			225,270		
N	50		1,389		1,041	-1,040 ₁	Mauer-
	50	1,002				224,230	bolzen
W_3	50		1,593		0,591	-0,590 ₁	
	28	1,738				223,639	
HP 51	28		0,615	1,123	+1,123 ₅	Mauer-	
						224,763	bolzen
	436 m	$\sum r_i$ 6,673	$\sum v_i$ 4,829	$\sum +\Delta h_i$ 3,476	$\sum -\Delta h_i$ 1,632	$H_E - H_A$ +1,848	(Soll)
	Summe: 1,844			0,004	→ Restfehler anteilig auf Höhenwerte verteilen		

Fehlerkontrolle

Mauerbolzen im Festpunktnetz mit gegebener Höhe

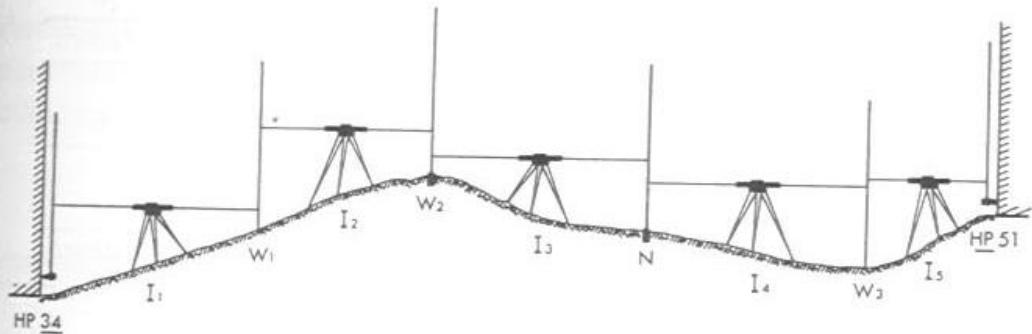
Mauerbolzen:
Neupunkt soll bestimmt werden

Fehlerkontrolle

Mauerbolzen im Festpunktnetz mit gegebener Höhe

Summe: 1,844 → Restfehler anteilig auf Höhenwerte verteilen

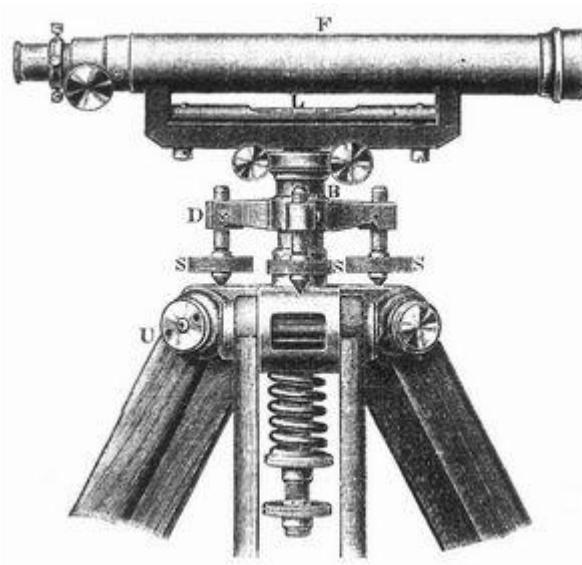
Studentische Übung: „Arbeitspapier_Geometrisches Nivellement“



Punkt	Messwerte			Auswertung			
	Zielweite z [m]	Rückbl. r [m]	Vorbl. v [m]	Höhenunterschied $\Delta h = r - v$ [m]	Höhe ü. NN [m]	Bemerk.	
1	2	3	4	5	6	7	8
HP 34	50	1,628				222,915	Mauerb.
W_1	50		0,416				
	40	1,957					
W_2	40		0,816				
	50	0,348					
N	50		1,389				Mauerbolzen
	50	1,002					
W_3	50		1,593				
	28	1,738					
HP 51	28		0,615			224,763	Mauerbolzen
	436 m	$\sum r_i$	$\sum v_i$	$\sum +\Delta h_i$	$\sum -\Delta h_i$	$H_E - H_A$	(Soll)

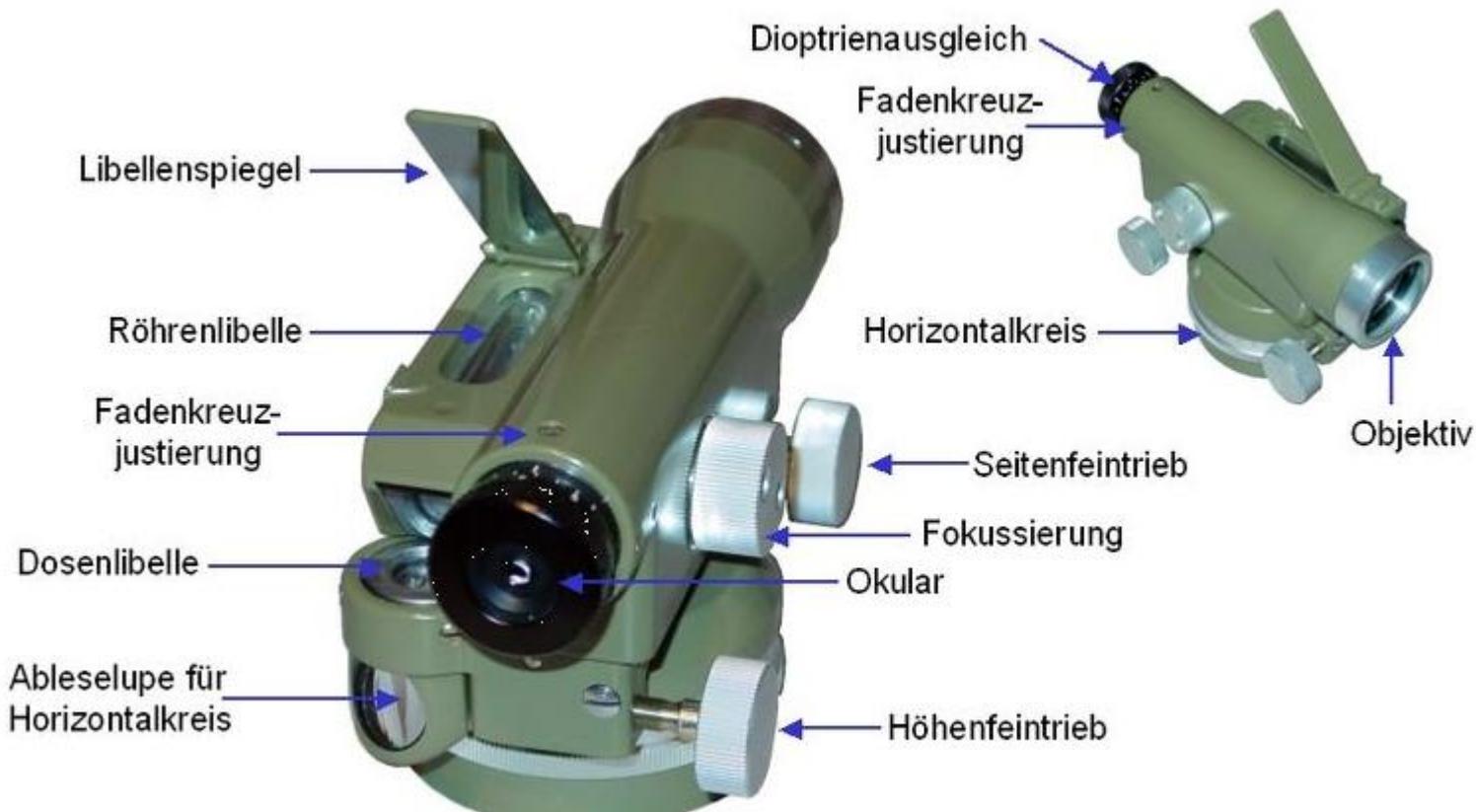


Nivellierinstrumente:



Nivellierinstrument
mit festem Fernrohr

Nivellierinstrumente:



Nivellier mit Dosenlibelle

Quelle:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Nivellierger%C3%A4t&docid=P2egowyN2UhLAM&imgurl=http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a2/Lieblingsnivellier.jpg>

Nivellierinstrumente:

Bsp. Moderne Leica Nivelliere

Leica NA700 Serie

CHF499.00

1



Automatische Nivellierinstrumente von Leica mit Selbsthorizontierung der Ziellinie.

Diese Geräte zeichnen sich durch ihre robuste Bauweise aus. Wasserdicht, stoss sicher, licht stark, endlos Seitenfeintrieb, Teilkreis mit 360° / 400g wählbar. Erfüllt höchste Standards in der Bau- und Ingenieurvermessung und bei topographischen Vermessungen.

[Fare clic qui](#)


NAL-20 Serie

CHF229.00

1



Preisgünstiges Baunivellier für das Bauwesen. Selbsttätige Horizontierung der Ziellinie, aufrechtes Teilungsbild, Horizontalkreis 400g. Zusätzliches Grobvisier, sehr kurze Zielweite. Spritzwasserfest. Komplett ausstattung mit Behälter.

[Fare clic qui](#)


NAN-2000 Serie

CHF590.00

1



Das robuste Nivellier von Gottlieb Nestle GmbH. Selbsttätige Horizontierung der Ziellinie, aufrechtes Teilungsbild, Horizontalkreis 400 gon. Zusätzliches Grobvisier, sehr kurze Zielweite. Verbesserte Ausführung für genaues und sicheres Arbeiten.

Große, griffige Bedienungsknöpfe erlauben einfache, zeitsparende Handhabung.

- wasserdicht
- Endlos Seitenfeintrieb mit Federung
- Überdrehschutz der Fokussierung
- Komplett ausstattung mit Behälter



Sprinter 50

CHF995.00

1



762628

Digitales Nivellier

Der Sprinter ist das ideale Nivelliergerät für Routineanwendungen. Einfach anzielen, fokussieren und die Mess-Taste drücken. Die Messdaten werden umgehend im Display angezeigt.

Ein eingebauter Sensor lässt keine Messungen außerhalb des Kompensatorbereichs zu. Das garantiert absolut zuverlässige Messungen. Inkl. Teleskop-Nivellierlatte.



Nivellierinstrumente:

Theodolit und Totalstation



Klassifizierung der Nivellierinstrumente:

Einteilung nach Genauigkeitsstufen	Standardabweichung σ_H für 1 km Doppelnivellement	Einteilung nach Verwendungszweck
höchste Genauigkeit	$\sigma_H \leq 0,5$ mm	Präzisionsnivelliere
hohe Genauigkeit	$\sigma_H \leq 2$ mm	Ingenieurnivelliere
einfache Genauigkeit	$\sigma_H \leq 6$ mm	Baunivelliere

Was sollen die Abbildungen veranschaulichen?

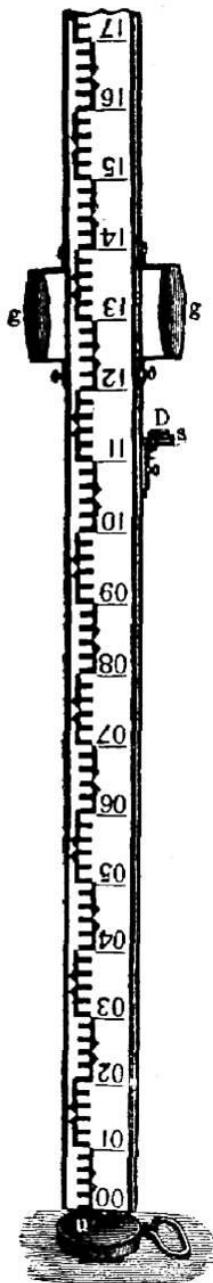


Fig. 15.

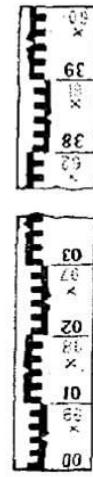
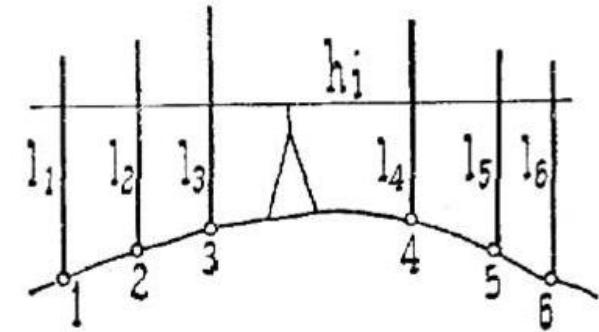
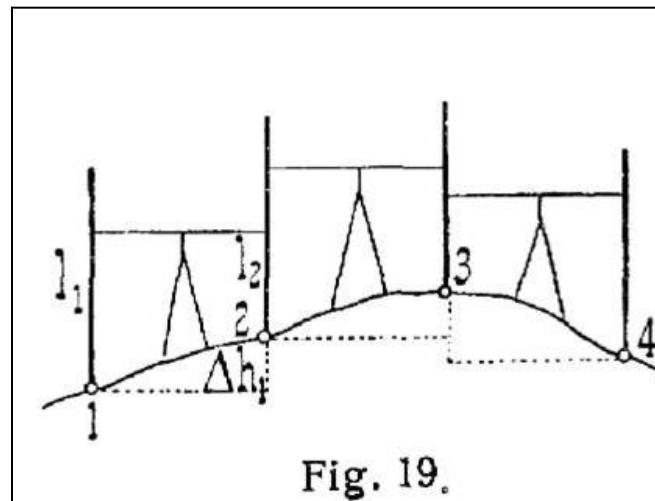


Fig. 16.



Quelle: <http://de.academic.ru/dic.nsf/technik/16459/Nivellieren>

patrick.reidelstuerz@th-deg.de

Was sollen die Abbildungen veranschaulichen?

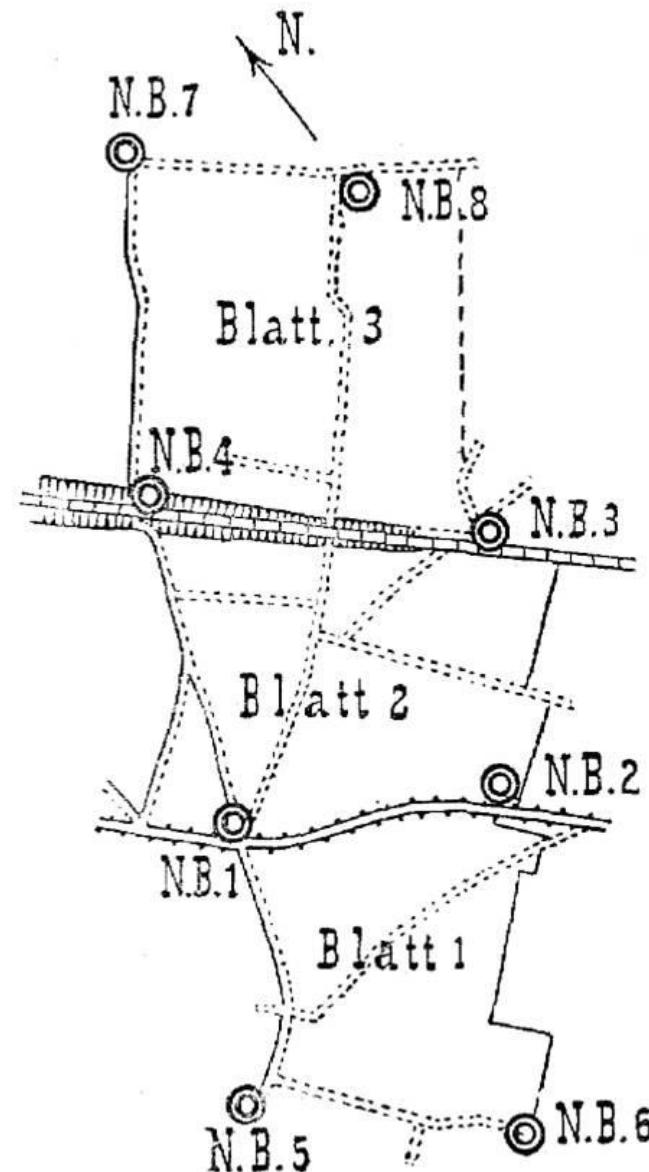
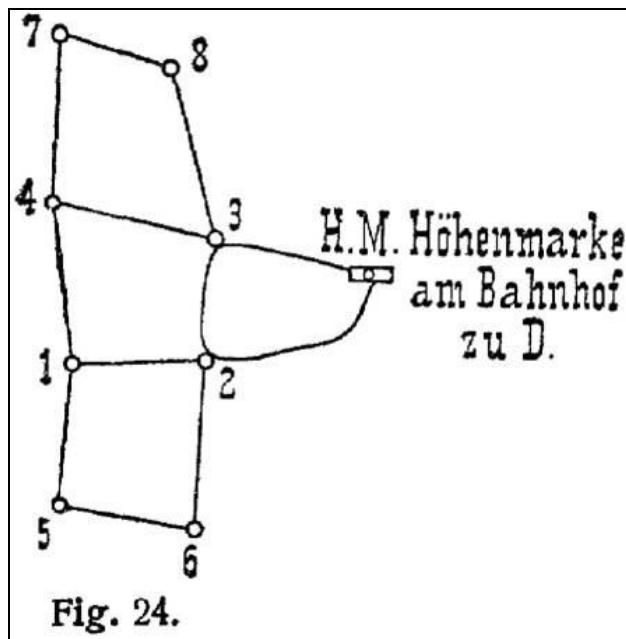


Fig. 23.

Was sollen die Abbildungen veranschaulichen?

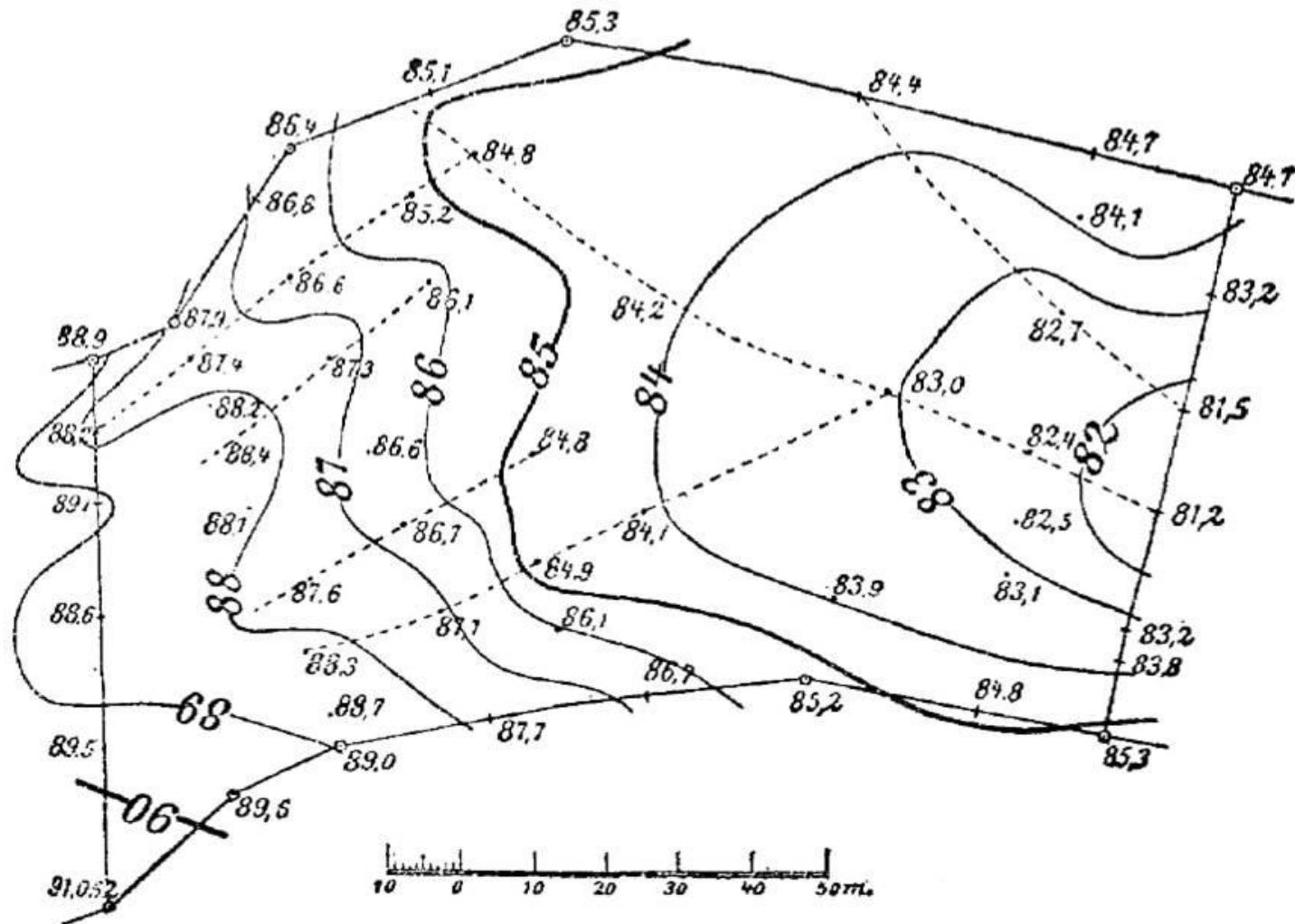
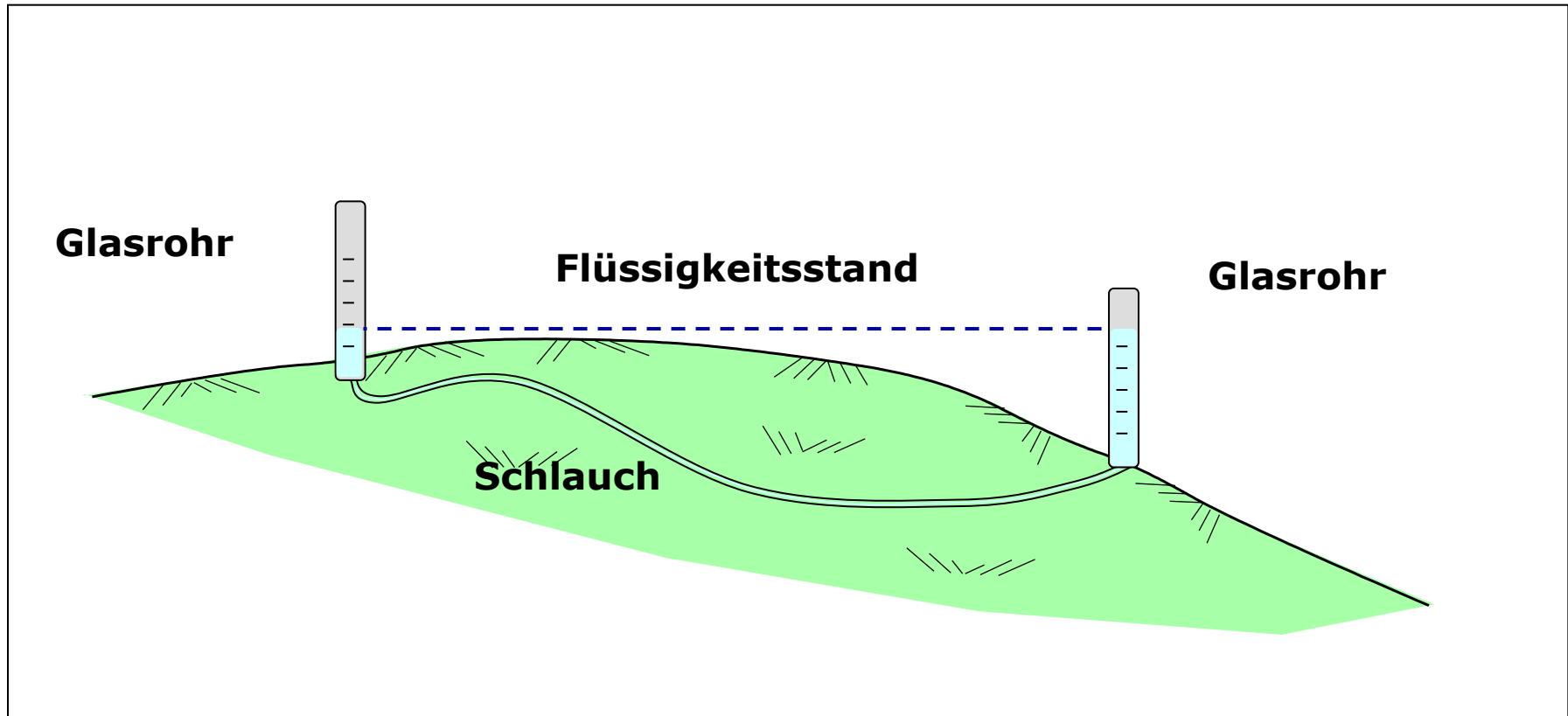


Fig. 25.

3.4.2 Hydrostatisches Nivellement

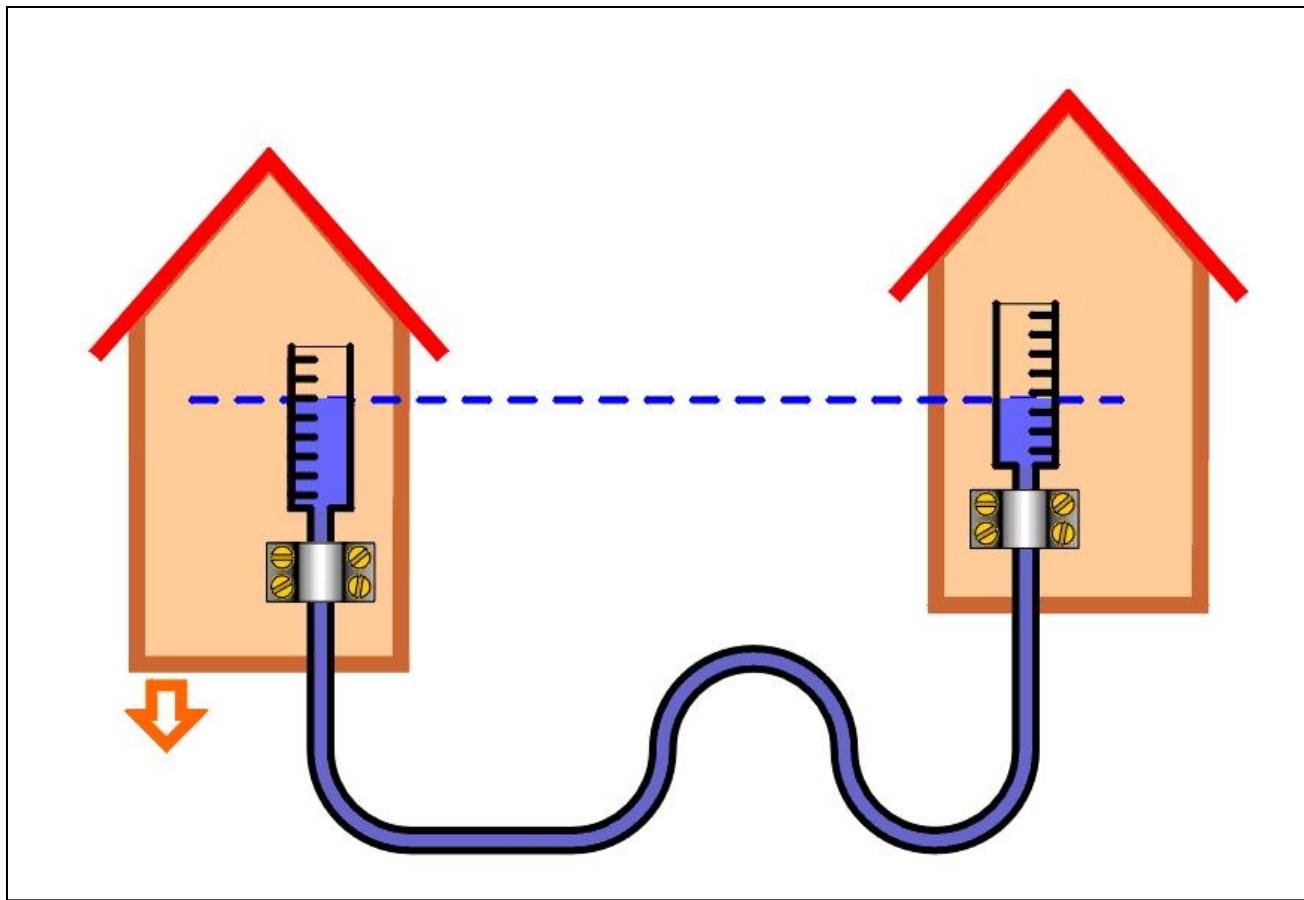
Hydrostatisches Nivellement:

- beruht auf dem physikalischen Prinzip der kommunizierenden Röhren
- wird mit einer Schlauchwaage ausgeführt



- weiteres Anwendungsbeispiel:

<http://www.youtube.com/watch?v=SamYsGvOsoA&feature=fvwrel>



Quelle: http://de.academic.ru/pictures/dewiki/72/Hydrostatisches_Nivellement.jpg

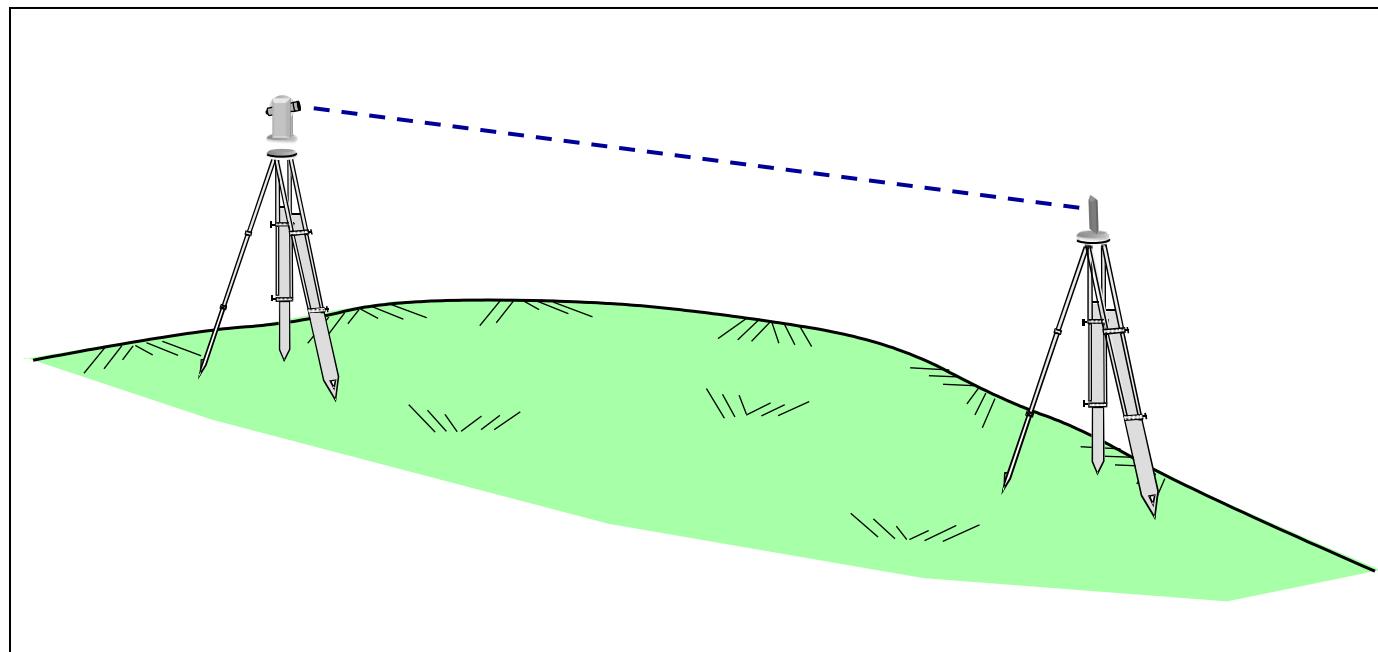
patrick.reidelstuerz@th-deg.de

3.4.3 Trigonometrisches Nivellement

Berechnet die Höhenangaben aus:

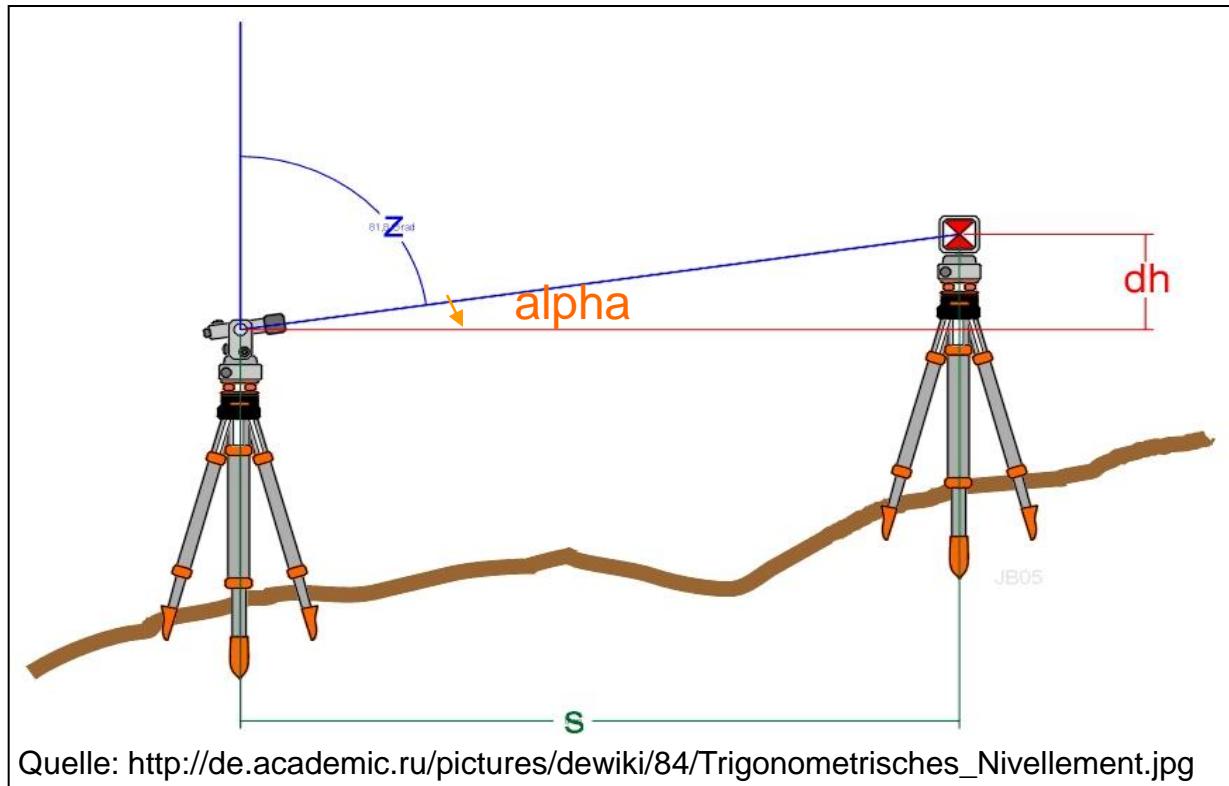
- der horizontalen Entfernung und
- einem Höhenwinkel (Vertikalwinkel)

Wurde schon in der Antike angewandt!



Übungsaufgabe:

Wie berechnen Sie den Höhenunterschied nach dem trigonometrischen Prinzip?



Quelle: http://de.academic.ru/pictures/dewiki/84/Trigonometrisches_Nivellement.jpg



Lösung:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

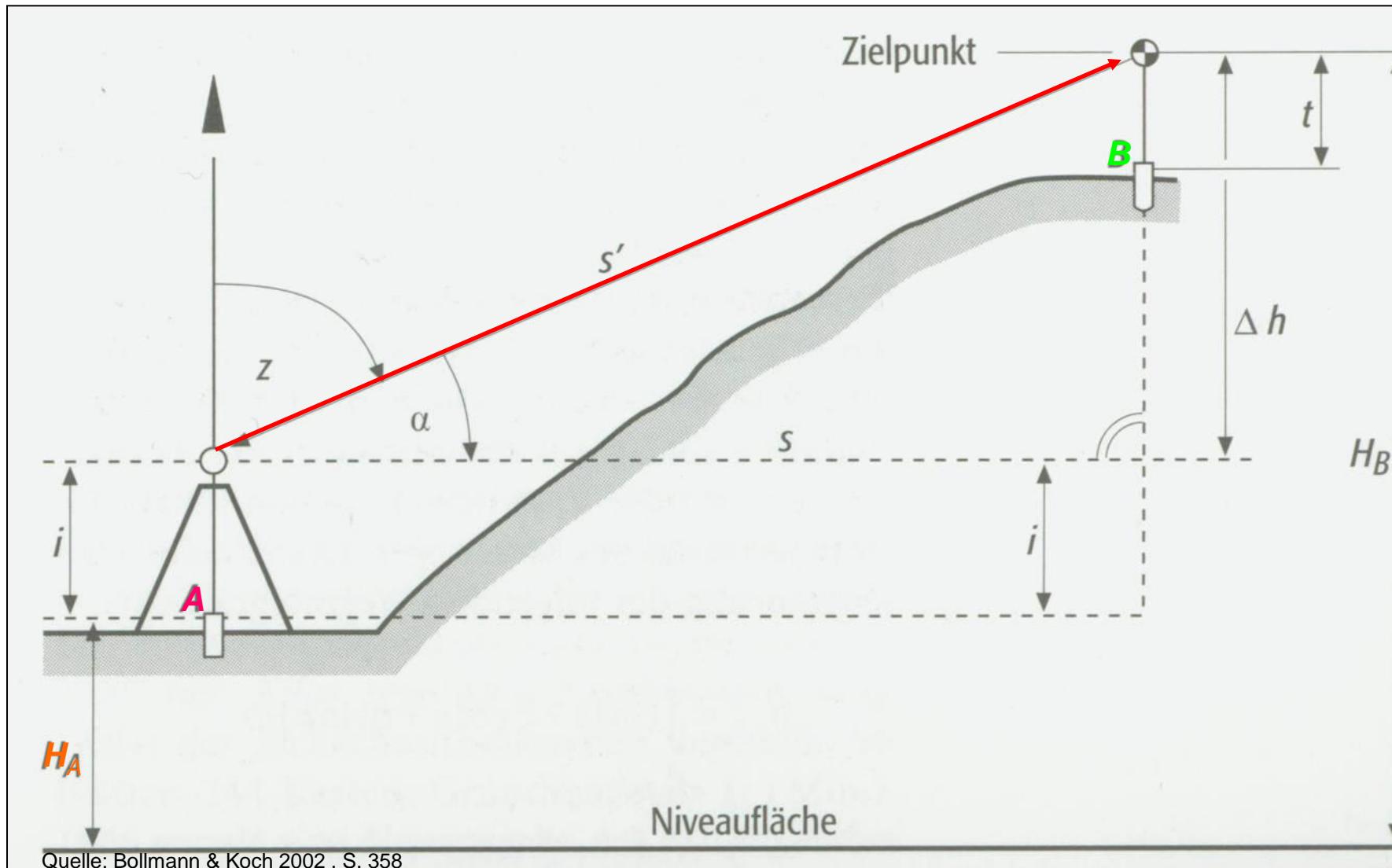
$$\text{Alpha} = 90 \text{ Grad} - z$$

$$\sin \alpha = \frac{dh}{s}$$

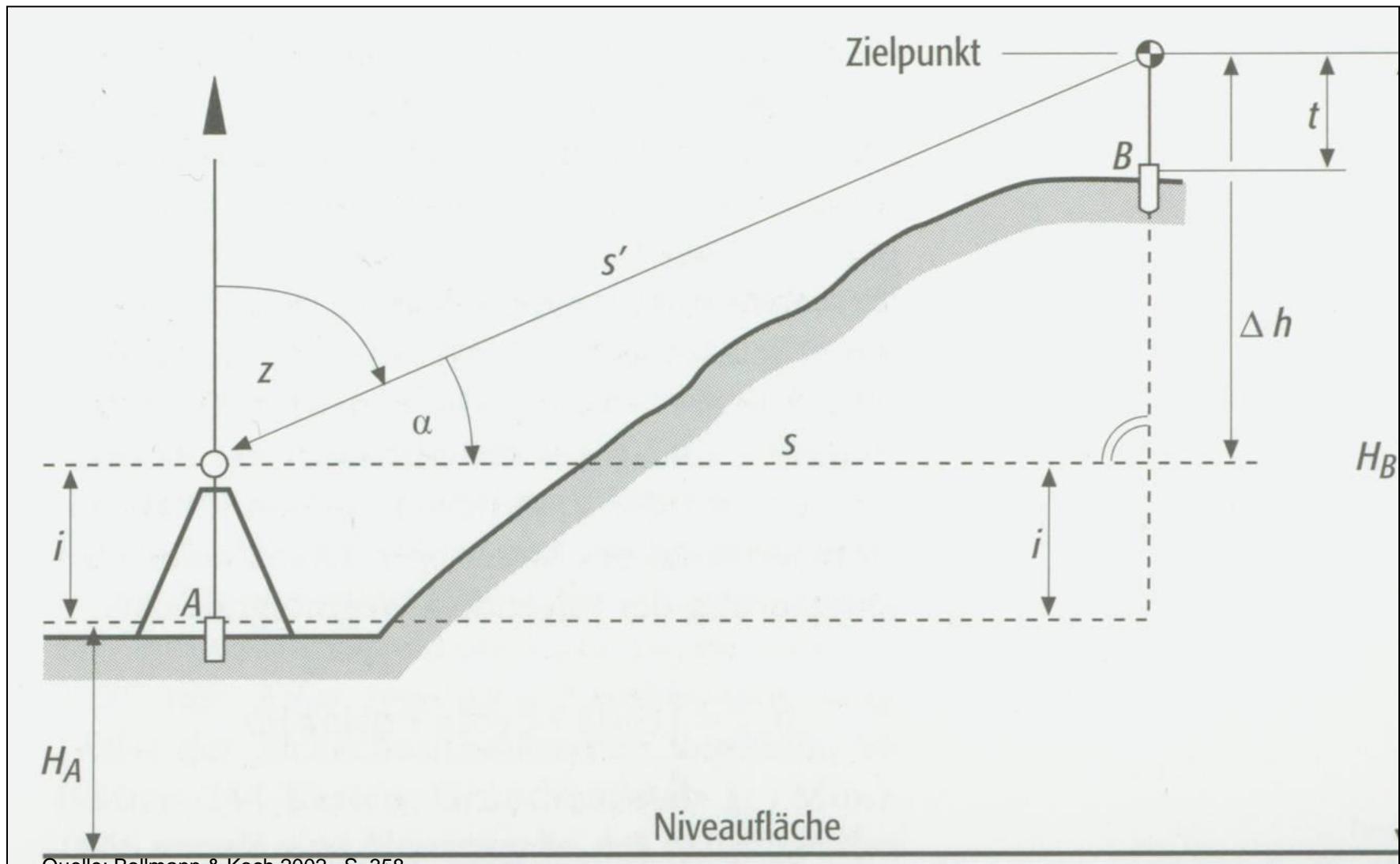
$$dh = s * \sin \alpha$$

Durchführung eines trigonometrisches Nivellements für kurze Distanzen (<250m)

Von Standpunkt A mit Höhe H_A wird zu Standort B gemessen.



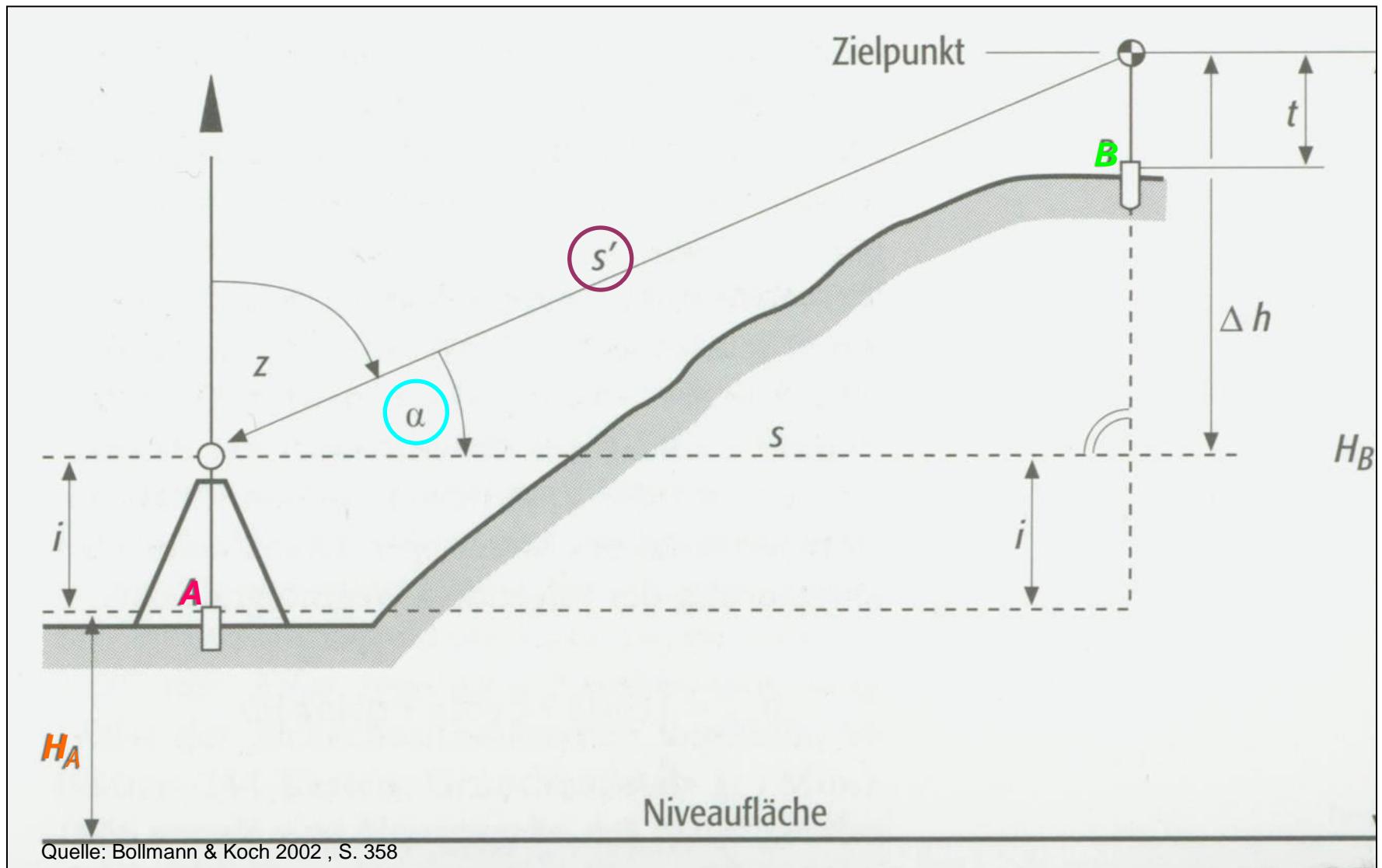
Durchführung eines trigonometrisches Nivellements für kurze Distanzen (<250m)



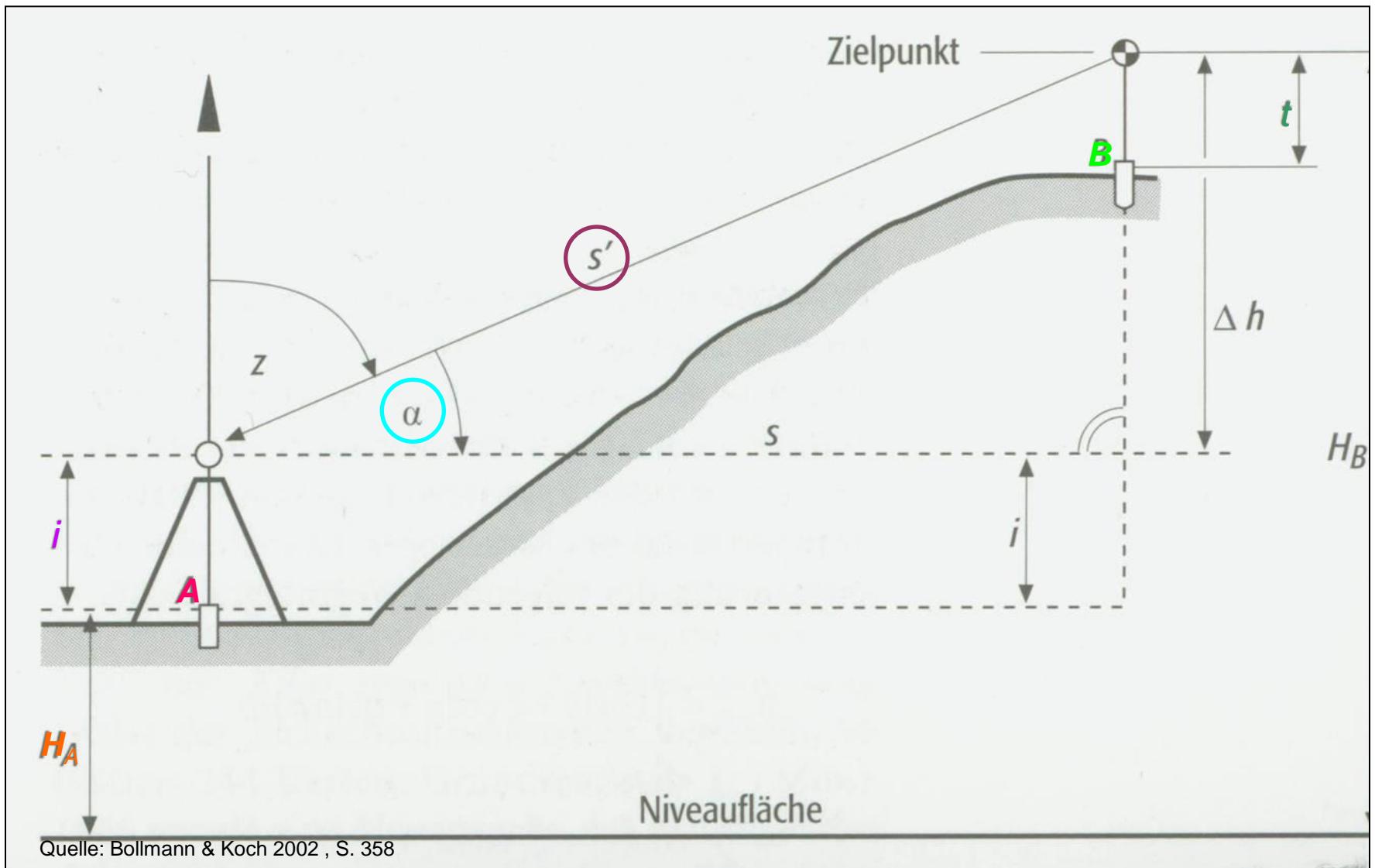
Quelle: Bollmann & Koch 2002 , S. 358

patrick.reidelstuerz@th-deg.de

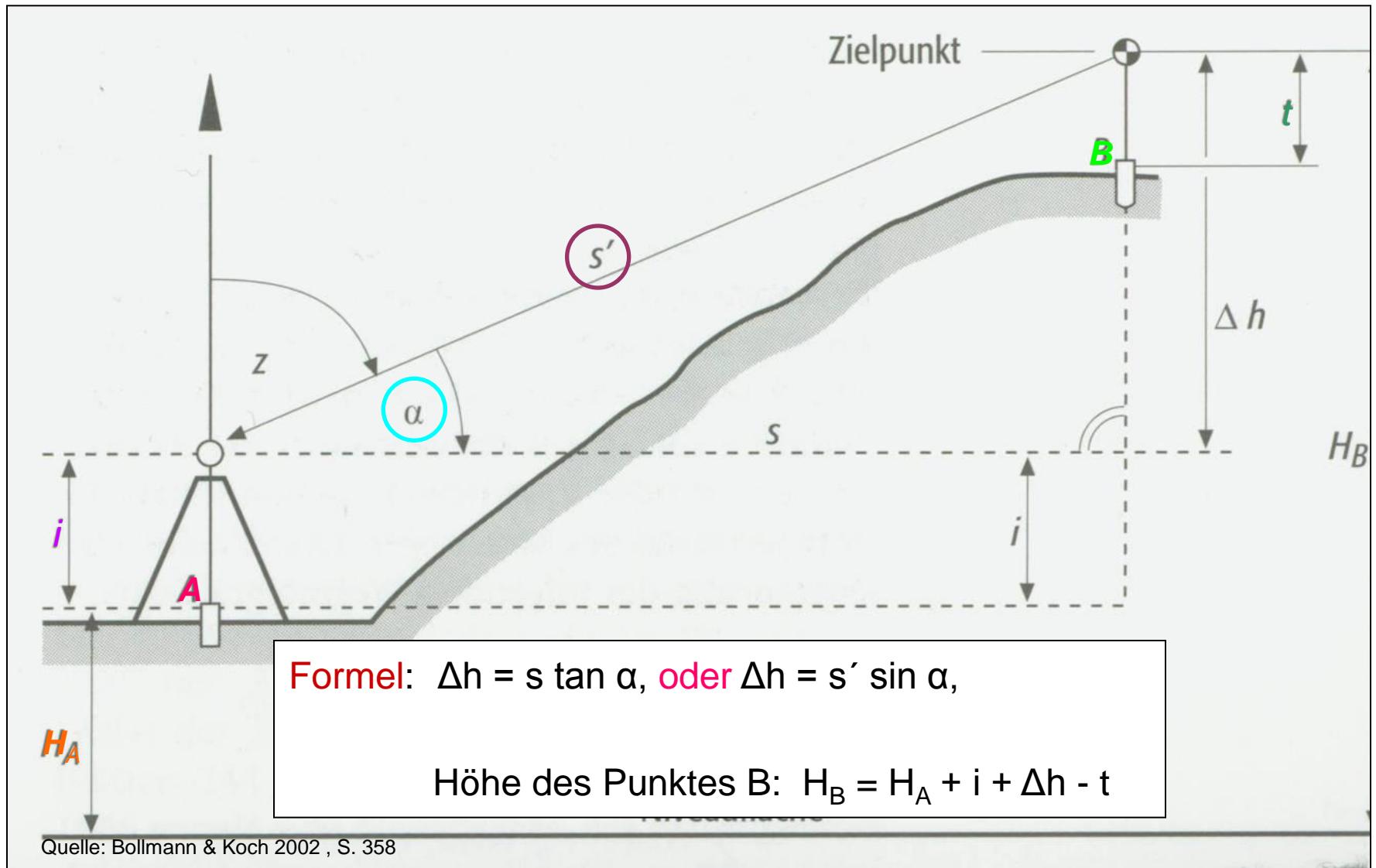
Höhenwinkel α und Strecke s' (Distanz s') werden auf den Zielpunkt gemessen



Instrumentenhöhe i und Zielhöhe t müssen bekannt sein

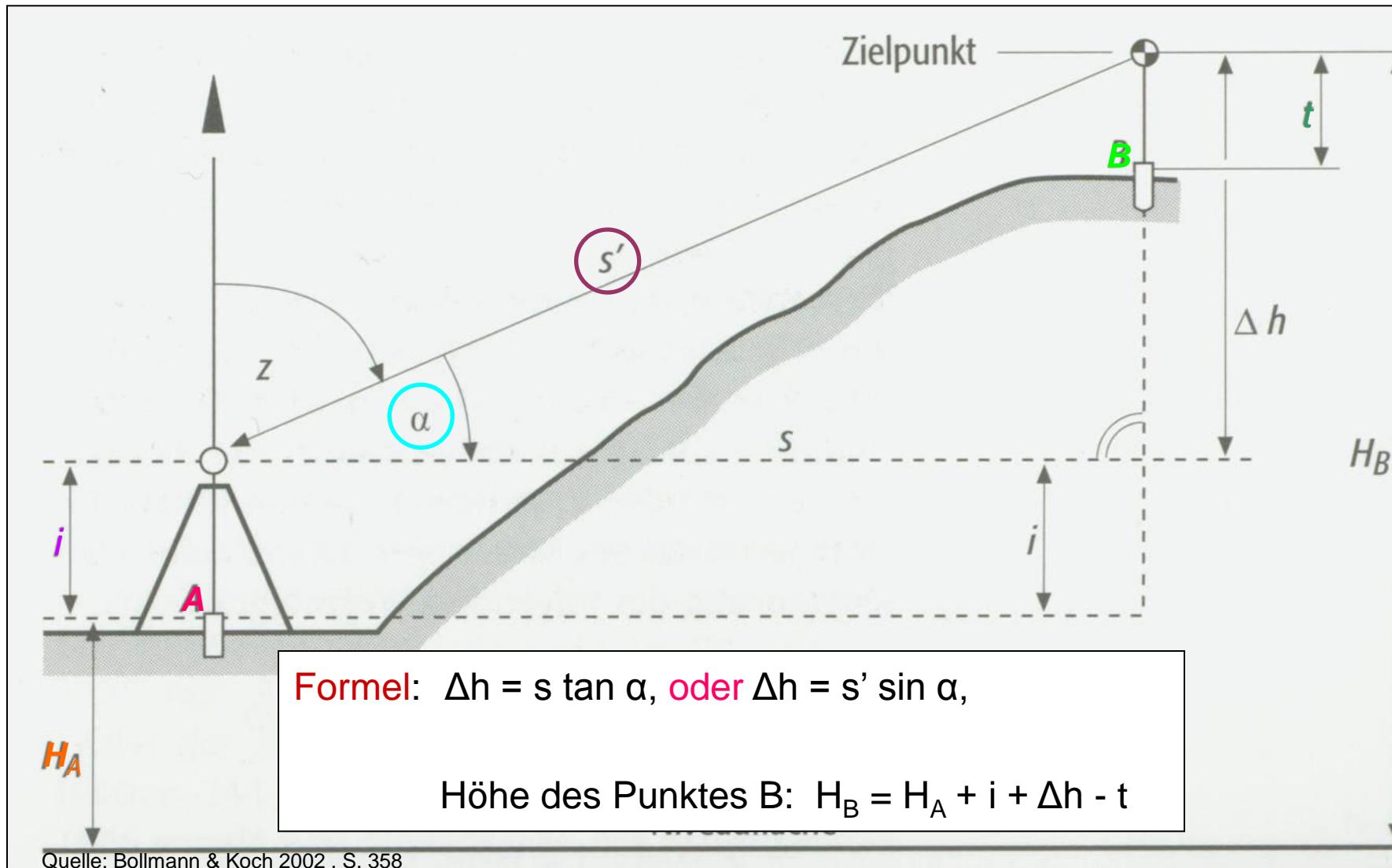


Berechnung:



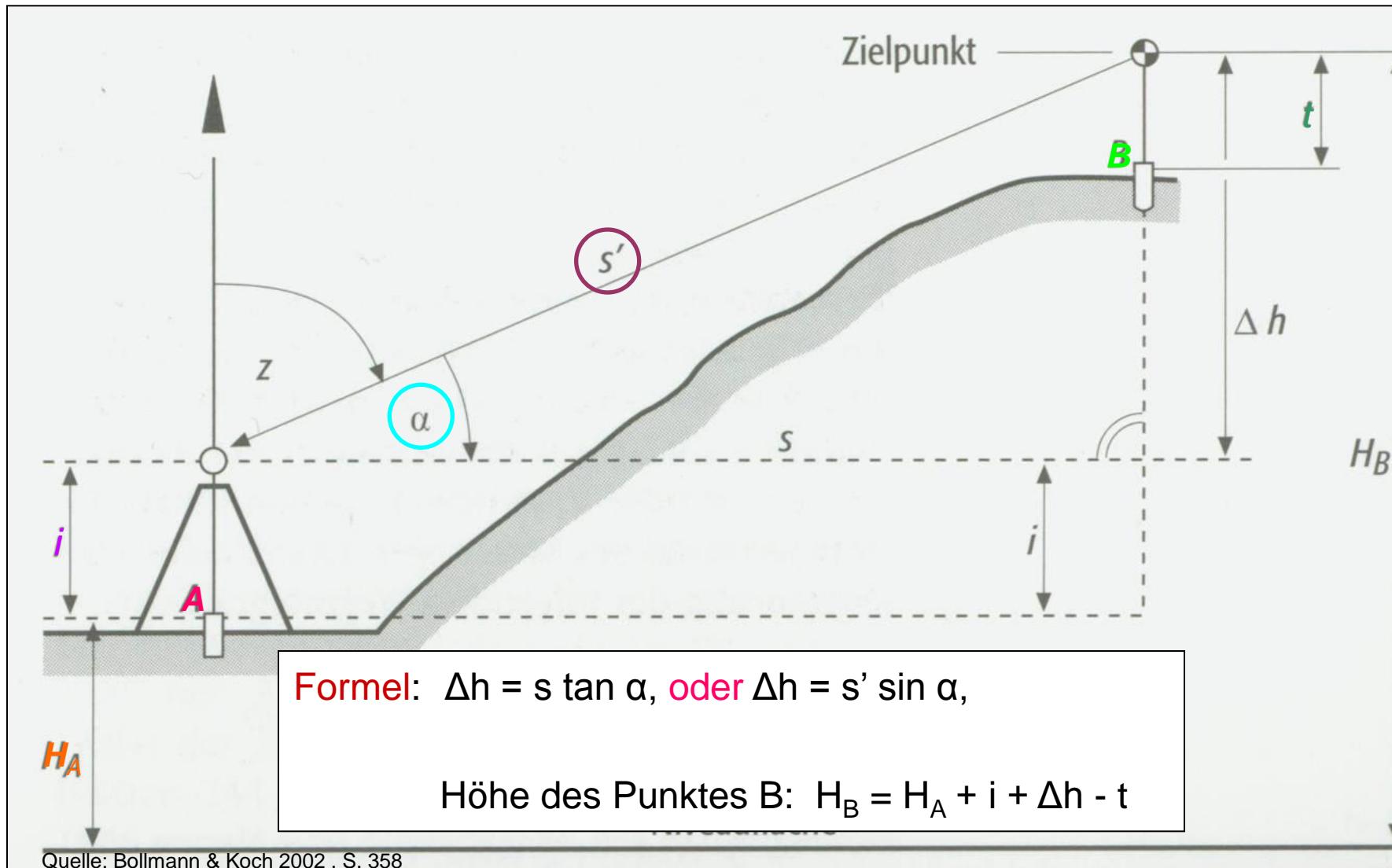
Übungsaufgabe 1:

Entfernungsmessung $s' = 20\text{m}$, Messwinkel $z = 63\text{ Grad}$, Gerätehöhe = $1,32\text{m}$,
 Reflektorhöhe = $1,54\text{m}$, Gerätestandorthöhe = 428m → Wie hoch liegt Punkt B?



Übungsaufgabe 2:

Entfernungsmessung $s' = 43,7\text{m}$, Messwinkel $z = 17$ Grad, Gerätehöhe = $1,27\text{m}$,
 Reflektorhöhe = $1,82\text{m}$, Gerätestandorthöhe = 195m → Wie hoch liegt Punkt B?



Trigonometrisches Nivellements über lange Distanzen > 10km

Durch die größere Entfernung zum Zielpunkt:

- Erdkrümmung verfälscht die Winkelmessung
 - terrestrische Refraktion (Strahlenbrechung) erhöht optisch den Horizont
- Die angepeilten Objekte erscheinen in falscher Höhe

Weitere Fehler durch:

- Einfluss der Lotabweichung
- reliefbedingte Unregelmäßigkeit des Erdschwerefeldes

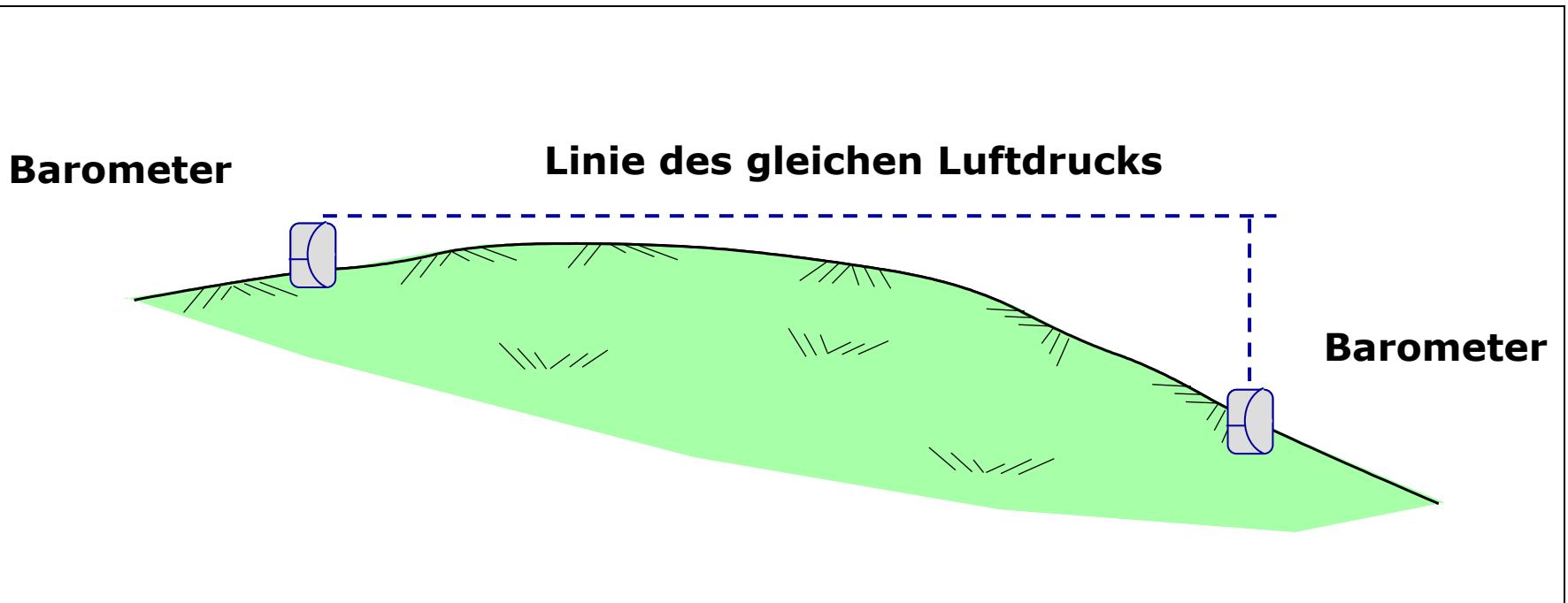
→ Rechnerische Korrektur dieser Vorgänge ist möglich

3.4.4 Barometrisches Nivellement

Messverfahren zur Bestimmung von Höhenunterschieden aus Luftdruckdifferenzen, die mit Barometern gemessen werden.

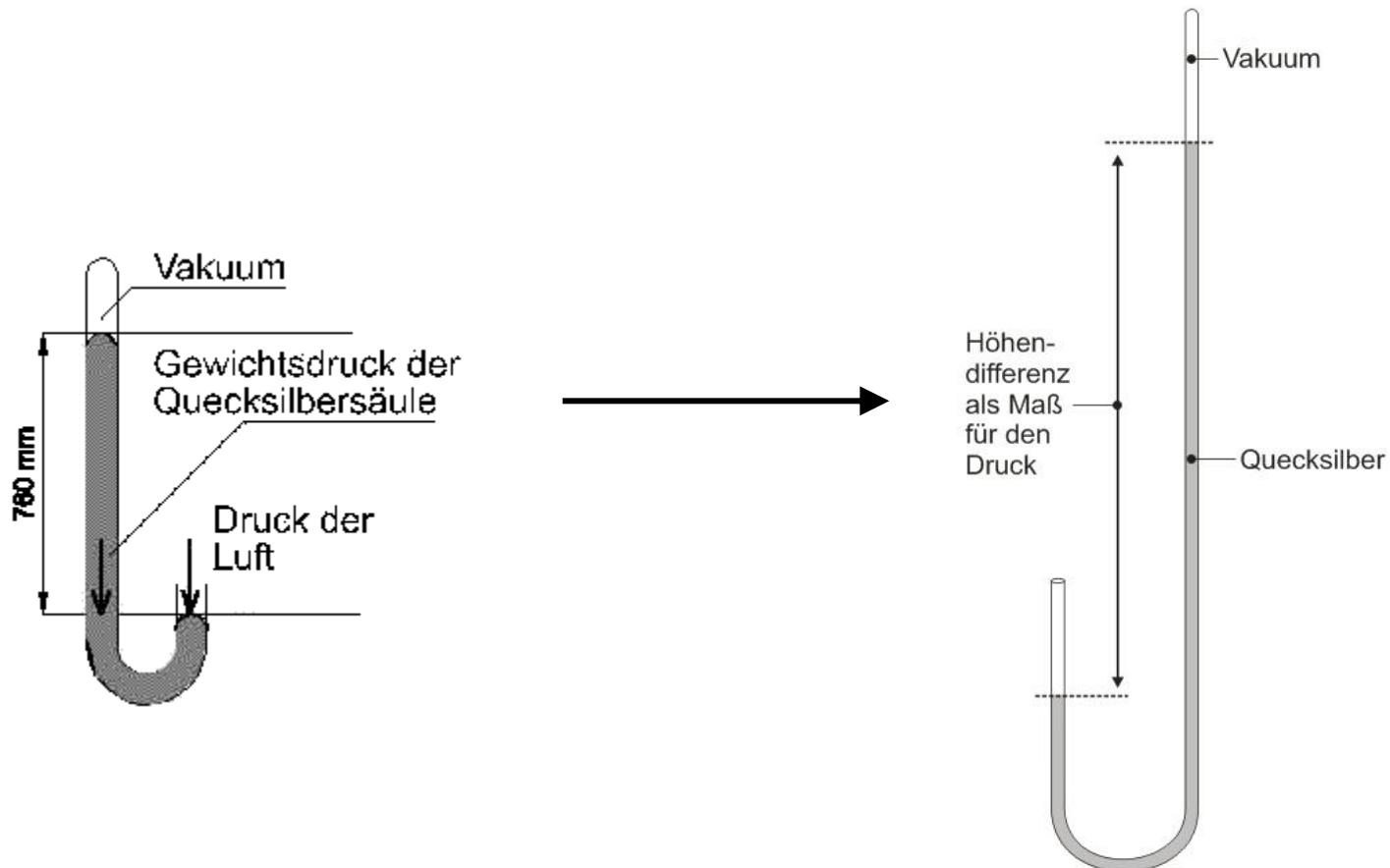
Das Verfahren beruht darauf, dass der Luftdruck mit der Höhe abnimmt.

→ Linien gleichen Luftdrucks haben idR. die gleiche Höhe



Luftdruck in Meereshöhe H_0 entspricht durchschnittlich

→ dem Druck einer 760mm hohen Quecksilbersäule



Luftdruck Einheiten: Umrechnung

- International verwendete Einheit (SI-Einheit) des Luftdrucks: **Pascal [Pa]**
- In Deutschland und Österreich gesetzlich ebenfalls zulässig: **Bar [bar]**

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

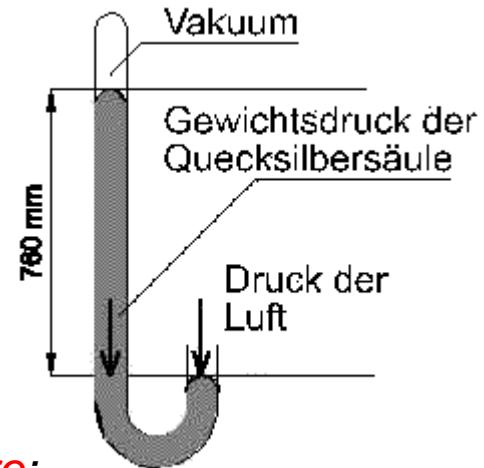
Statt der unpassend kleinen Einheit Pascal: → **Hektopascal [hPa]**

→ auf Meereshöhe: etwa 1.000 hPa = 1.000 Millibar (mbar)

Auf alten Quecksilber-Barometern: → oft nur eine **Millimeterskala**

1mm Quecksilbersäule = **1 Torr**

Der Normdruck von 1.013,25 hPa ist gleich 760 Torr



Weitere Einheit im Kontext des Luftdrucks ist die **Atmosphäre**:

diese alten Einheiten wie

- Physikalische Atmosphäre,
- Technische Atmosphäre,
- Atmosphäre Absolutdruck,
- Atmosphäre Überdruck oder
- Atmosphärer Unterdruck

→ nach dem Einheitenrecht nicht mehr zulässig

Kleine Übung

Testen Sie folgendes Tool und vergegenwärtigen Sie sich die Größenordnungen der Einheiten:

□ www.umrechnung.org/masseinheiten-druck-umrechnen/einheiten-umrechner-druck-pressure.htm

Verwenden Sie Luftdruckwerte aus Wetterseiten im Internet !



Screenshot of the Umrechnung.org website showing a pressure unit converter.

The URL in the browser bar is: www.umrechnung.org/masseinheiten-druck-umrechnen/einheiten-umrechner-druck-pressure.htm

The page title is: **Umrechnung.org**

The date displayed is: Fr, 11.10.2013

Navigation links: Home, Suchen, A-Z, Hilfe, Links

Druck Masseinheiten umrechnen

Pascal · Bar · Torr · Ksi · Psi · Newton/m²
Rechnen Sie verschiedene Druckeinheiten um.

Druck-Einheiten Umrechner

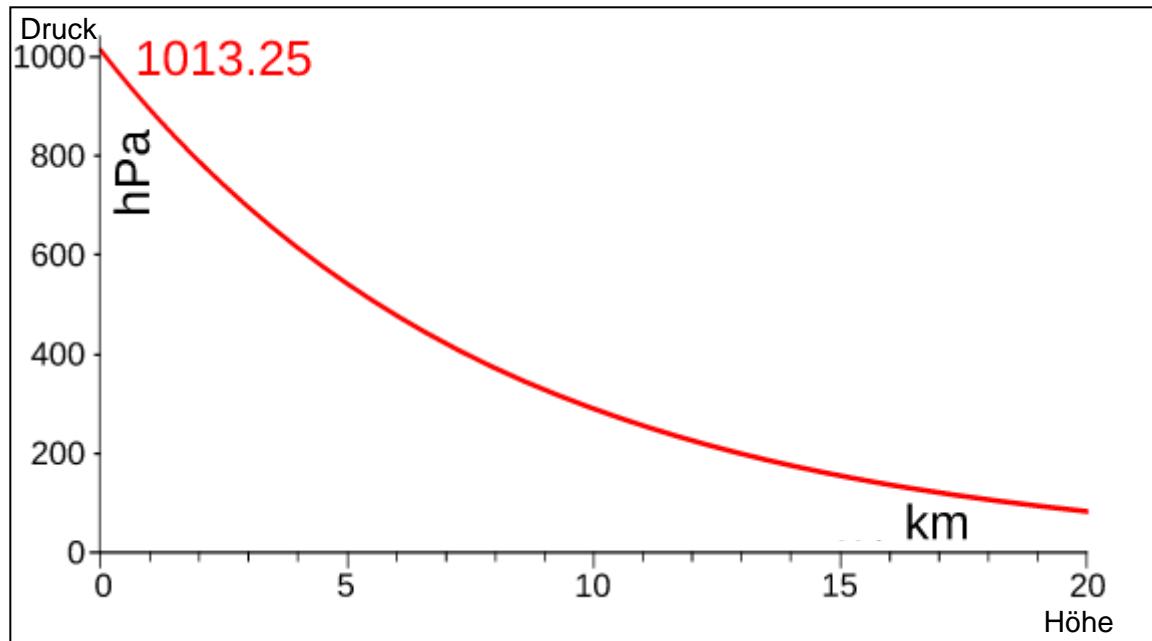
Pascal [Pa]:	<input type="text"/>
Kilopascal [kPa]:	<input type="text"/>
Hectopascal [hPa]:	<input type="text"/>
Millipascal [mPa]:	<input type="text"/>
Newton/Quadratmeter:	<input type="text"/>
Bar [bar]:	<input type="text"/>
Millibar [mbar]:	<input type="text"/>
Ksi [ksi]:	<input type="text"/>
Psi [psi]:	<input type="text"/>
Torr [Torr]:	<input type="text"/>

Powered by unitconversion.org

Quelle: <http://www.umrechnung.org/masseinheiten-druck-umrechnen/einheiten-umrechner-druck-pressure.htm>

patrick.reidelstuerz@th-deg.de

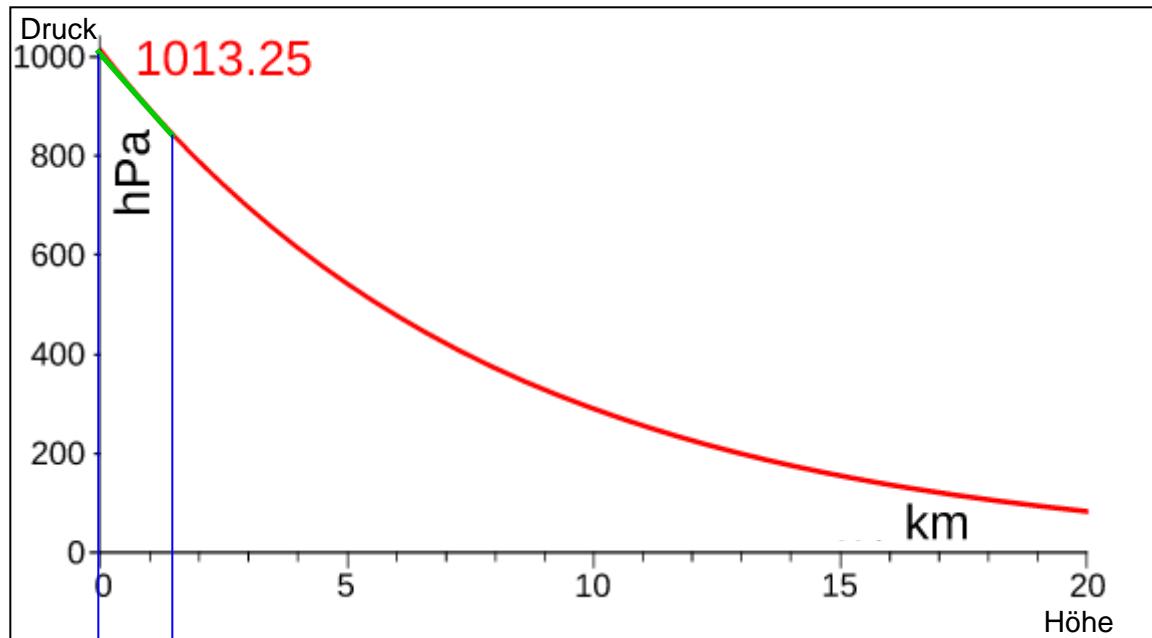
Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe



Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe

- Mittlere geographische Breite und mittlere Höhe des Messpegels muss in Berechnung einbezogen werden.

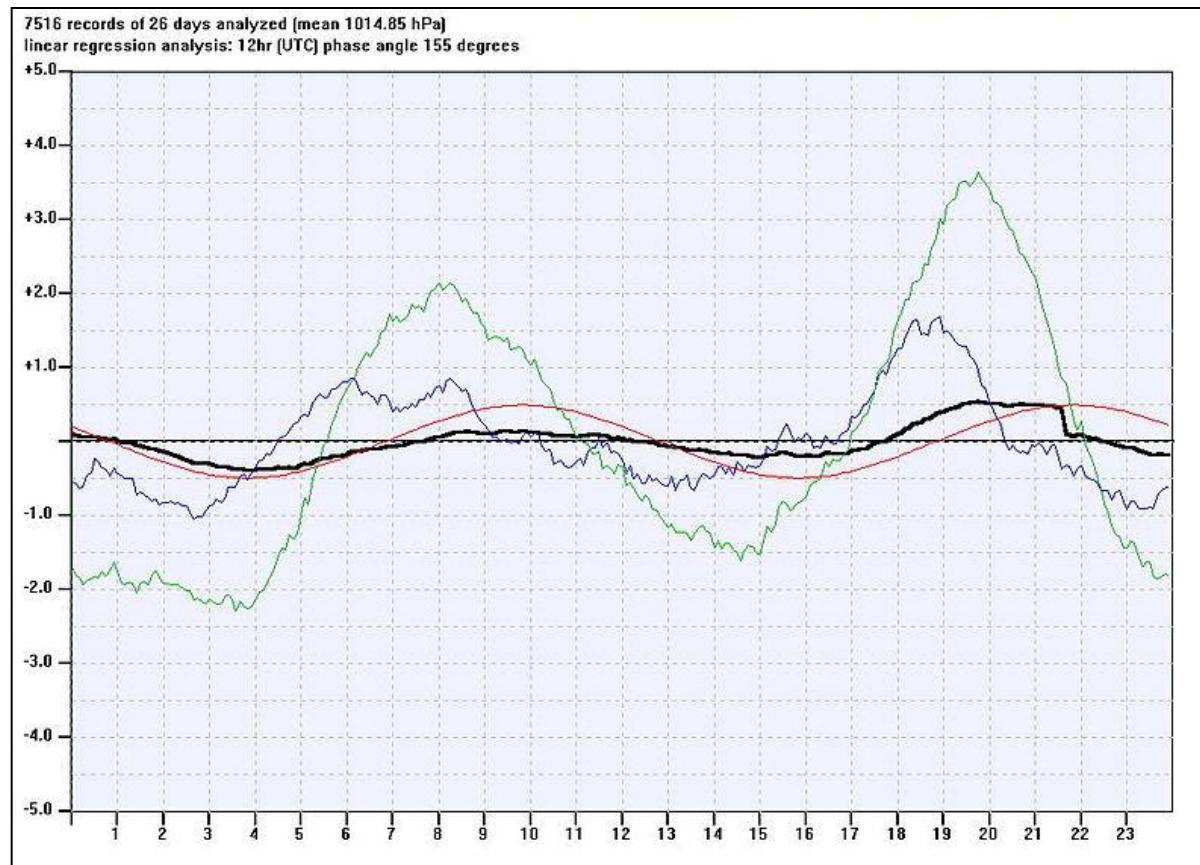
Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe



Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe

im relevanten Bereich fast linear

Tagesgang des Luftdrucks auf gleicher Höhe



schwarze Kurve: Luftdruckverlauf.

blaue Kurve: Ein-Stunden-Tendenz,

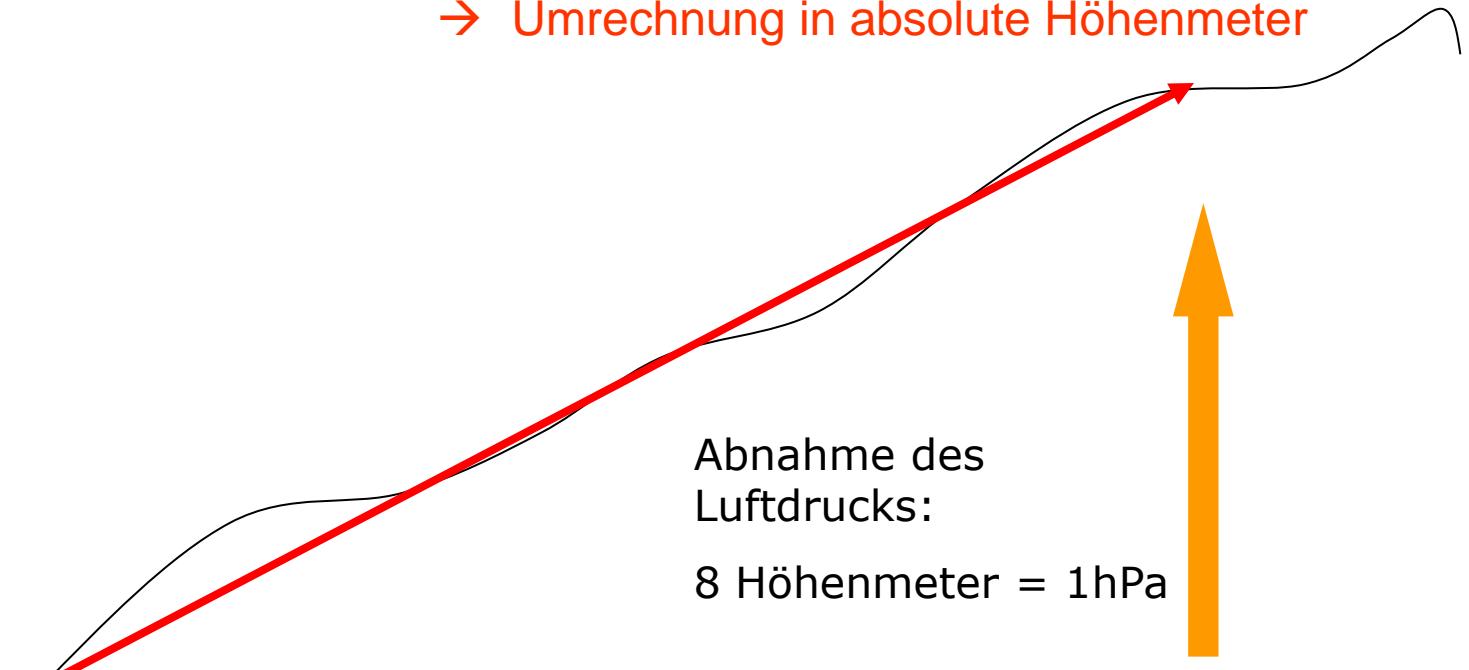
grüne Kurve: Drei-Stunden-Tendenz

rote Kurve: lineare Regression.

→ weit verbreitet in der mobilen Navigation

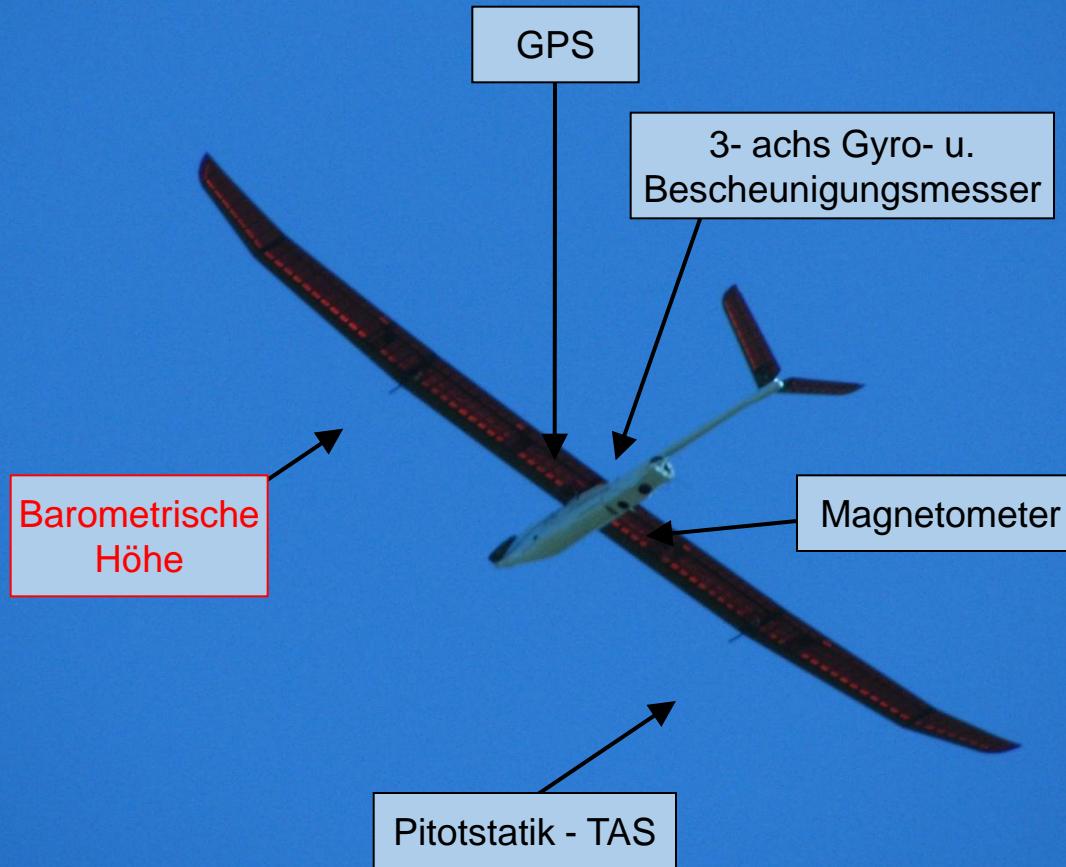
Gerät misst:

- Druckunterschied zwischen Start- und Endpunkt
- Umrechnung in absolute Höhenmeter



Startpunkt: Messgerät wird geeicht → Ausgangsluftdruck

Autopilotgestützte Flugführung



3.4.5 Höhenmessung mit GPS

Professionelle GPS Vermessungsgeräte

C viva-gnss.leica-geosystems.com/de

Deutsch ▾

Leica Viva ... let us inspire you

- when it has to be **right**

Leica Geosystems

Technologie | Grenzen definieren | Product Insight | Apps

Leica Viva GNSS → Technologie

Erwartungen übertreffen mit Leica Viva GNSS



Leica SmartTrack

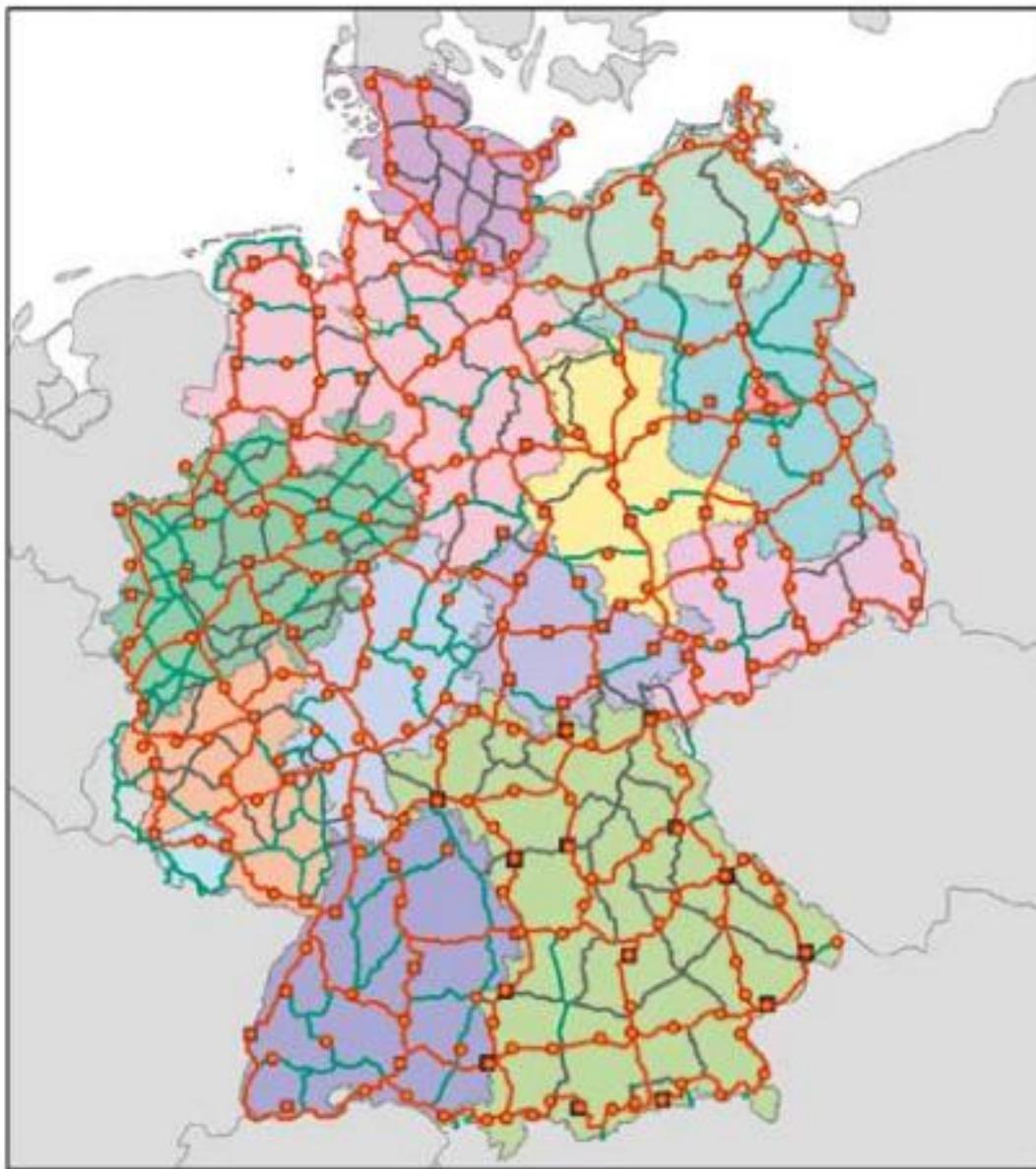
Die Leica SmartTrack Technologie garantiert durch ihre herausragende Empfangstechnik präziseste Positions berechnungen. Leica SmartTrack empfängt alle heutigen und zukünftigen Satellitensignale.

Leica xRTK

Leica SmartCheck

Genauigkeit (rms) von differentiellem Code mit DGPS / RTCM¹	
DGPS / RTCM	Typisch 25 cm (rms)
Genauigkeit (rms) in Real-Time (RTK)¹	
Gemäß Standard	Erfüllt ISO17123-8
Rapid Static (Phase)	Horizontal: 5 mm + 0.5 ppm (rms)
Statischer Modus nach Initialisierung	Vertikal: 10 mm + 0.5 ppm (rms)
Kinematisch (Phase)	Horizontal: 10 mm + 1 ppm (rms)
Kinematisch nach Initialisierung	Vertikal: 20 mm + 1 ppm (rms)
Genauigkeit (rms) in Post Processing¹	
Statisch (Phase) mit langer Beobachtung	Horizontal: 3 mm + 0.1 ppm (rms) Vertikal: 3.5 mm + 0.4 ppm (rms)
Statisch und Rapid Static (Phase)	Horizontal: 5 mm + 0.5 ppm (rms) Vertikal: 10 mm + 0.5 ppm (rms)
Kinematisch (Phase)	Horizontal: 10 mm + 1 ppm (rms) Vertikal: 20 mm + 1 ppm (rms)
On the Fly (OTF) Initialisierung	
RTK-Technologie	Leica SmartCheck Technologie
Zuverlässigkeit der OTF-Initialisierung	Besser als 99,99% ¹
Zeit zur Initialisierung	Typisch 4 s ²
OTF-Reichweite	bis zu 70 km ²
Network RTK (Vernetzung)	
Unterstützte RTK Network Lösungen	VRS, FKP, iMAX
Unterstützte RTK Network Standards	MAC (Master Auxiliary Concept) gemäß RTCM SC 104

GPS Höhenfestpunktnetz Deutschland



Stand Mai 2007

- Pflichtlinien
- optionale Linien
- restliche Linien des DHHN92
- GNSS-Station
- Absolutschwerepunkt
- GNSS+Absolutschwere

Quelle: <http://www.thueringen.de/imperia/md/content/tlvermgeo/landesamt/info-material/tkv25-2008.pdf>

patrick.reidelstuerz@th-deg.de

Tabellarische Übersicht Höhenmessung

	natürliche Höhen „Meereshöhen“	„Mischhöhen“ zur Interpolation zwischen Ausgangspunkten geeignet					Höhen über einem Ellipsoid
Messverfahren	Nivellement (und Schwere- messung)	Trigonometrische Höhenmessung	Tachymetrie	Barometer- (Hypsometer-) messung	Photo- grammetrie	Laser- (Radar-) scanning	Satelliten- vermessung „GPS“
Messprinzip	„fortgesetzte 100 m lange Wasserwaage“	Höhenwinkel- und (ggf. indirekte) Streckenmessung		Messung von Luftdruck- unterschieden		Winkelmessung Flugzeug - Boden	Strecken und Messung der Strecken zu den Satelliten sowie die zeitl. Änderung
Genauigkeit über 1 km	Präzisionsniv. 1 mm	5 cm	bei günstiger Verteilung der Ausgangspunkte	30 cm	2 m	20 cm	30 cm je nach Messdauer 0,5 bis 5 cm
hauptsächliche Verwendung für	Schaffung von Ausgangspunkten; Wasserwirtschaft, Stadthöhennetze	Lagefestpunkte z. B. auf Berggipfeln	topograph. Gelände- aufnahme, Höhenlinien	topographische Einzelpunkte	Höhenlinien, Digitales Geländemodell, Digitales Höhenmodell	kombiniert mit Undulationen: Höhen geringerer Genauigkeit	
Verwendungszeit in Bayern	seit 1865	seit 1850	seit 1866	1850 - 1893	seit 1959	seit 1996	seit 1991
Zuständigkeit im BLVA	Nivellement und Schwere (II 2)	Lagefestpunkt- feld (II 1)	Topographie (II 3)	-	Photogrammetrie und Fernerkundung (II 4)	Lagefestpunktfeld (II 1)	

Quelle: WEBER, 2001, S. 152.

Tabellarische Übersicht Höhenmessung

	natürliche Höhen „Meereshöhen“	„Mischhöhen“ zur Interpolation zwischen Ausgangspunkten geeignet					Höhen über einem Ellipsoid
Messverfahren	Nivellement (und Schwere- messung)	Trigonometrische Höhenmessung	Tachymetrie	Barometer- (Hypsometer-) messung	Photo- grammetrie	Laser- (Radar-) scanning	Satelliten- vermessung „GPS“
Messprinzip	„fortgesetzte 100 m lange Wasserwaage“	Höhenwinkel- und (ggf. indirekte) Streckenmessung		Messung von Luftdruck- unterschieden		Winkelmessung Flugzeug - Boden	Strecken und Messung der Strecken zu den Satelliten sowie die zeitl. Änderung
Genauigkeit über 1 km	Präzisionsniv. 1 mm	5 cm	bei günstiger Ver- teilung der Ausgangs- punkte	2 m	20 cm	30 cm	je nach Messdauer 0,5 bis 5 cm
hauptsächliche Verwendung für	Schaffung von Ausgangspunkten; Wasserwirtschaft, Stadthöhennetze	Lagefestpunkte z. B. auf Berggipfeln	topograph. Gelände- aufnahme, Höhenlinien	topographische Einzelpunkte	Höhenlinien, Digitales Geländemodell, Digitales Höhenmodell	kombiniert mit Undulationen: Höhen geringerer Genauigkeit	
Verwendungszeit in Bayern	seit 1865	seit 1850	seit 1866	1850 - 1893	seit 1959	seit 1996	seit 1991
Zuständigkeit im BLVA	Nivellement und Schwere (II 2)	Lagefestpunkt- feld (II 1)	Topographie (II 3)	-	Photogrammetrie und Fernerkundung (II 4)	Lagefestpunktfeld (II 1)	

Quelle: WEBER, 2001, S. 152.

Tabellarische Übersicht Höhenmessung

	natürliche Höhen „Meereshöhen“	„Mischhöhen“ zur Interpolation zwischen Ausgangspunkten geeignet					Höhen über einem Ellipsoid
Messverfahren	Nivellement (und Schwere- messung)	Trigonometrische Höhenmessung	Tachymetrie	Barometer- (Hypsometer-) messung	Photo- grammetrie	Laser- (Radar-) scanning	Satelliten- vermessung „GPS“
Messprinzip	„fortgesetzte 100 m lange Wasserwaage“	Höhenwinkel- und (ggf. indirekte) Streckenmessung		Messung von Luftdruck- unterschieden		Winkelmessung Flugzeug - Boden	Strecken und Messung der Strecken zu den Satelliten sowie die zeitl. Änderung
Genauigkeit über 1 km	Präzisionsniv. 1 mm	5 cm	bei günstiger Verteilung der Ausgangspunkte	30 cm	2 m	20 cm	30 cm je nach Messdauer 0,5 bis 5 cm
hauptsächliche Verwendung für	Schaffung von Ausgangspunkten; Wasserwirtschaft, Stadthöhennetze	Lagefestpunkte z. B. auf Berggipfeln	topograph. Gelände- aufnahme, Höhenlinien	topographische Einzelpunkte	Höhenlinien, Digitales Geländemodell, Digitales Höhenmodell	kombiniert mit Undulationen: Höhen geringerer Genauigkeit	
Verwendungszeit in Bayern	seit 1865	seit 1850	seit 1866	1850 - 1893	seit 1959	seit 1996	seit 1991
Zuständigkeit im BLVA	Nivellement und Schwere (II 2)	Lagefestpunkt- feld (II 1)	Topographie (II 3)	-	Photogrammetrie und Fernerkundung (II 4)	Lagefestpunktfeld (II 1)	

Quelle: WEBER, 2001, S. 152.

Tabellarische Übersicht Höhenmessung

	natürliche Höhen „Meereshöhen“	„Mischhöhen“ zur Interpolation zwischen Ausgangspunkten geeignet					Höhen über einem Ellipsoid
Messverfahren	Nivellement (und Schwere- messung)	Trigonometrische Höhenmessung	Tachymetrie	Barometer- (Hypsometer-) messung	Photo- grammetrie	Laser- (Radar-) scanning	Satelliten- vermessung „GPS“
Messprinzip	„fortgesetzte 100 m lange Wasserwaage“	Höhenwinkel- und (ggf. indirekte) Streckenmessung		Messung von Luftdruck- unterschieden		Winkelmessung Flugzeug - Boden	Strecken und Messung der Strecken zu den Satelliten sowie die zeitl. Änderung
Genauigkeit über 1 km	Präzisionsniv. 1 mm	5 cm	bei günstiger Verteilung der Ausgangspunkte 30 cm	2 m	20 cm	30 cm	je nach Messdauer 0,5 bis 5 cm
hauptsächliche Verwendung für	Schaffung von Ausgangspunkten; Wasserwirtschaft, Stadthöhennetze	Lagefestpunkte z. B. auf Berggipfeln	topograph. Gelände- aufnahme, Höhenlinien	topographische Einzelpunkte	Höhenlinien, Digitales Geländemodell, Digitales Höhenmodell	kombiniert mit <u>Undulationen</u> : Höhen geringerer Genauigkeit	
Verwendungszeit in Bayern	seit 1865	seit 1850	seit 1866	1850 - 1893	seit 1959	seit 1996	seit 1991
Zuständigkeit im BLVA	Nivellement und Schwere (II 2)	Lagefestpunkt- feld (II 1)	Topographie (II 3)	-	Photogrammetrie und Fernerkundung (II 4)	Lagefestpunktfeld (II 1)	

Quelle: WEBER, 2001, S. 152.

Hangneigung und Gefälle

Die Neigung einer Strecke/Fläche kann auf verschiedene Weise ausgedrückt werden:

(1) Neigung:

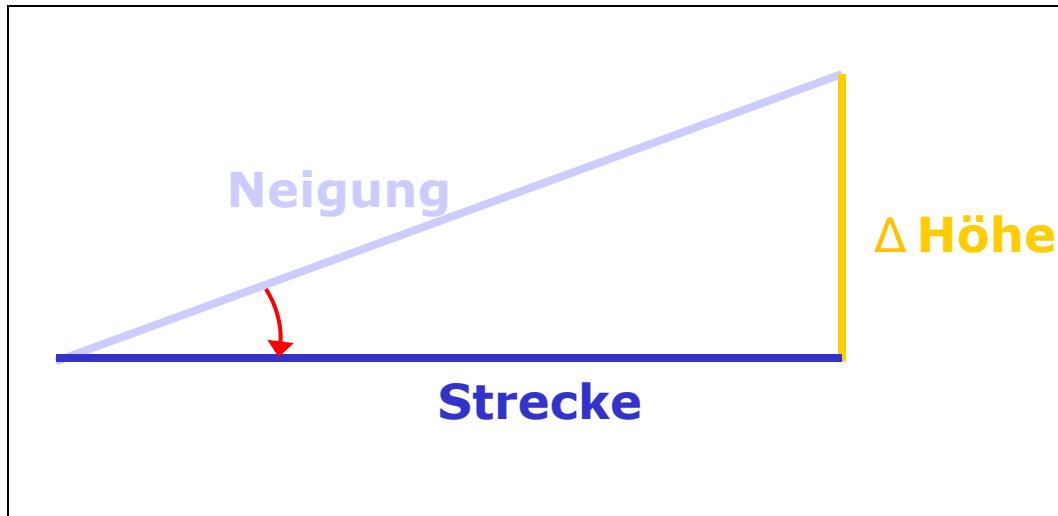
(Steigungs- oder Gefällewinkel in °)

$$\tan \alpha = \Delta \text{ Höhe} / \text{Strecke}$$

(2) Böschungswinkel:

(Prozent- oder Promilleangaben in %)

$$\alpha \% = (\Delta \text{ Höhe} / \text{Strecke}) * 100$$



Umrechnung:

45° Gefälle entspricht
100% Böschungswinkel

Übungsaufgabe

- (1) Neigung:** (Steigungs- oder Gefällewinkel in °)
 $\tan \alpha = \Delta \text{ Höhe/Strecke}$
- (2) Böschungswinkel:** (Prozent- oder Promilleangaben in %)
 $\alpha \% = (\Delta \text{ Höhe/Strecke}) * 100$
- a) Wieviel Prozent Steigung/Grad Neigung hat das Steilstück einer Serpentinenstrasse, die auf 10m 2m abfällt.
 - b) Eine Weinbergauffahrt kann nur mit einem Schlepper passiert werden. Die letzten 3m steigen 2m an. Wieviel Prozent Steigung/Grad Neigung hat das Teilstück?
 - c) Wie weit reicht eine Autobahnböschung bei 100% Gefälle, wenn sie 10m hoch ist?
- a) Lösung: 20%, 11,3 Grad
 - b) Lösung: 67%, 33,6 Grad
 - c) Lösung: 10m

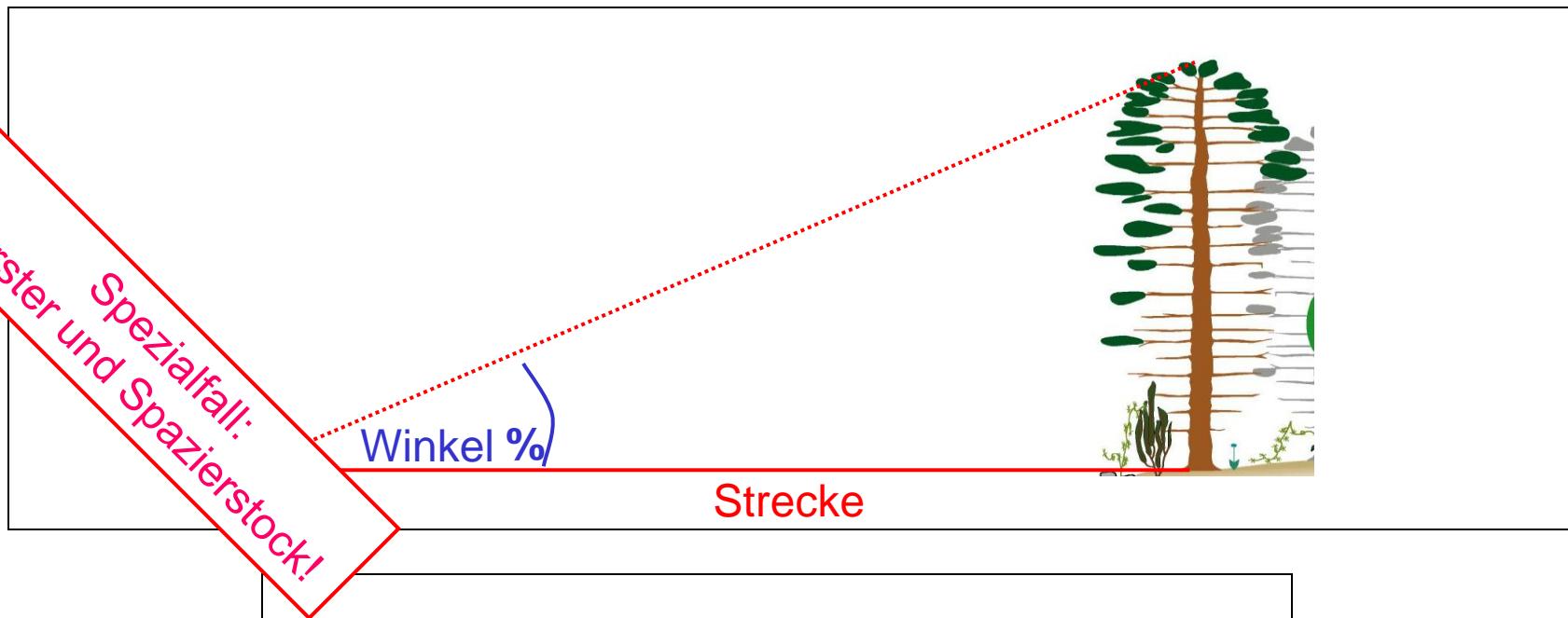


Neigung und Objekthöhe mit Hilfe des Klinometers (Einfachverfahren)

Neigung (Inklination):

→ zu messen mit dem **Klinometer** in Grad oder Prozent ($45^\circ = 100\%$)

Beispiel einer Objekthöhenmessung mit dem Klinometer:



$$\text{Höhe} = \frac{\text{Winkel in \%}}{100} \cdot \text{Strecke}$$

Endergebnis = Ergebnis + Augenhöhe

Gemischte Übungsaufgaben / Verständnisfragen zum Stoff



(14)

Was ist die Fragestellung bei einem Rückwärtsschnitt?

(Bestimmung der Koordinaten eines Neupunktes bei 2 gegebenen Punkten, die nicht einsehbar sind; Folie 160)

(15)

Was führt man ein, um diese Fragestellung zu lösen?

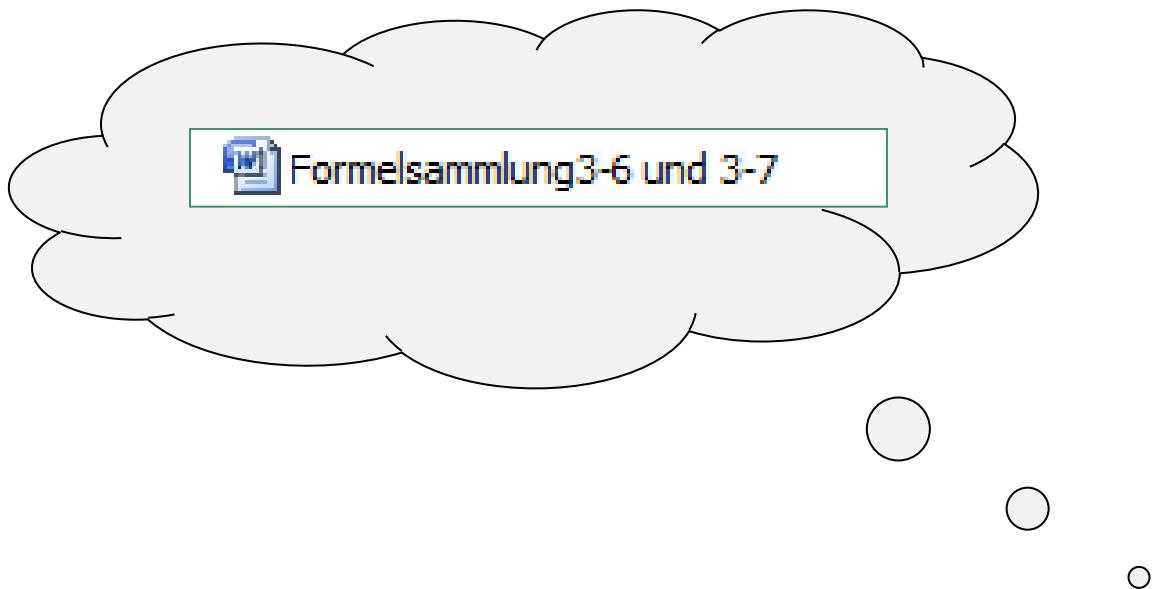
(Einführung zweier Hilfspunkte auf einer Linie zum Neupunkt, 2 rechtwinklige Dreiecke; Folie 168)

(16)

Welche Konfiguration muss vermieden werden? Warum?

(Gefährlicher Kreis, schleifende Schnitte, keine eindeutige Lösung; Folie 165)

3.6 Einfache Koordinatenberechnungen und Umformungen rechtwinkliger Koordinaten



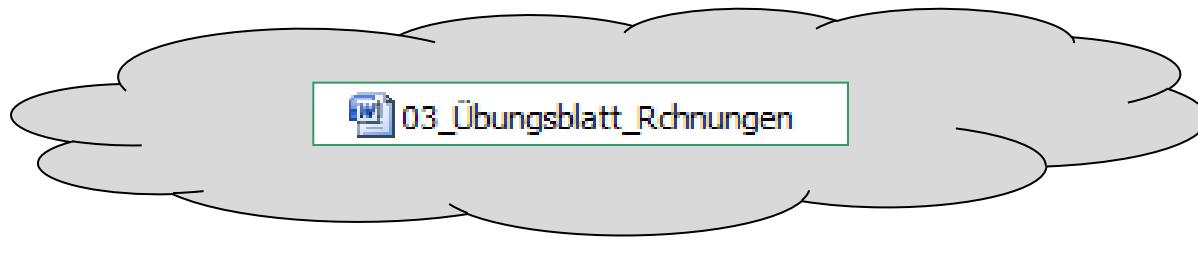
3.6 Einfache Koordinatenberechnungen und Umformungen rechtwinkliger Koordinaten

- 3.6.1 Berechnung von Höhe und Höhenfußpunkt in einem Dreieck
- 3.6.2 Umrechnungen zwischen rechtwinkligen und polaren Koordinaten
 - (1) Rechtwinklige Koordinaten aus Richtungswinkel und Strecke
 - (2) Richtungswinkel und Strecke aus rechtwinkligen Koordinaten
 - (3) Kleinpunktberechnung

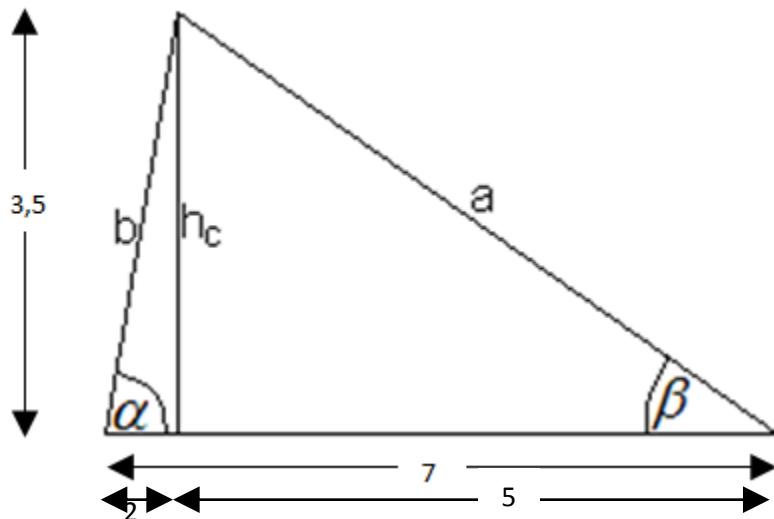
3.6.1 Berechnung von Höhe und Höhenfußpunkt in einem Dreieck

- (a) **Berechnung über rechtwinkliges Dreieck**
- (b) **Berechnung über abgeleitete Formel nach Heron**
(Vorteil: nicht auf einen rechten Winkel angewiesen)

Übungsaufgabe



Übungsaufgabe



1. Vorbereitung:

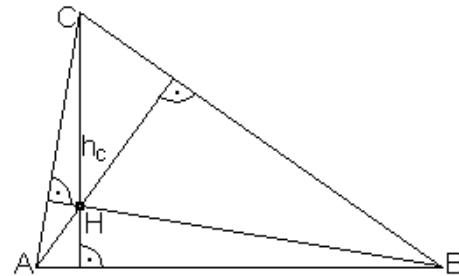
Berechnen Sie am Übungsblatt (nicht messen):

- Seitenlängen
- Winkel



3.6.1 Berechnung von Höhe und Höhenfußpunkt in einem Dreieck

Was sind Höhen im Dreieck?

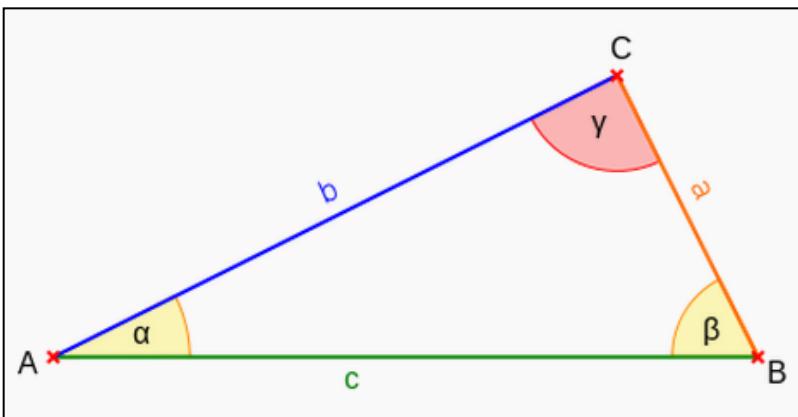


Fällt man von einem Eckpunkt eines beliebigen Dreiecks das Lot auf die gegenüberliegende Seite, so entsteht seine Höhe.

Die Höhe beschreibt, wie hoch das Dreieck ist.

Da es drei Eckpunkte und drei Seiten gibt, gibt es auch drei Höhen.

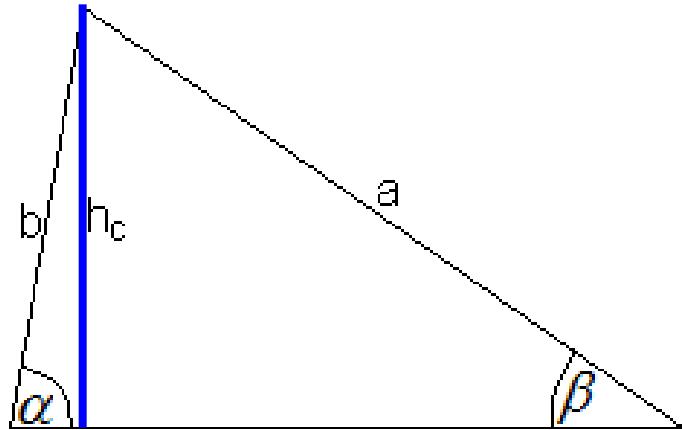
→ Berechnung über „Rechtwinkliges Dreieck“:



$$\text{Sinus eines Winkels} = \frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$$

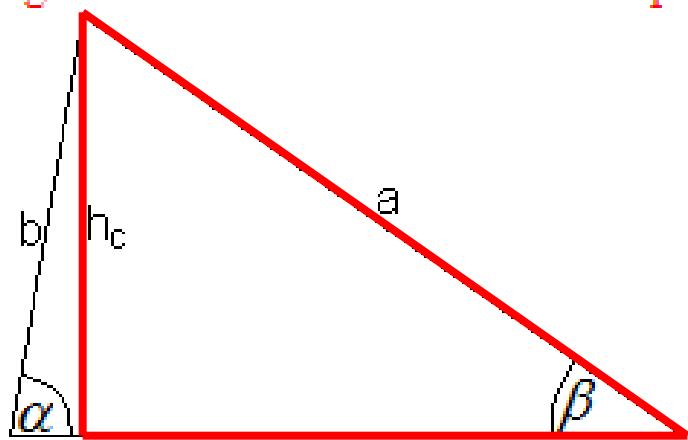
$$\text{Kosinus eines Winkels} = \frac{\text{Ankathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$$

Gegeben ist ein Winkel und eine passende Seite.



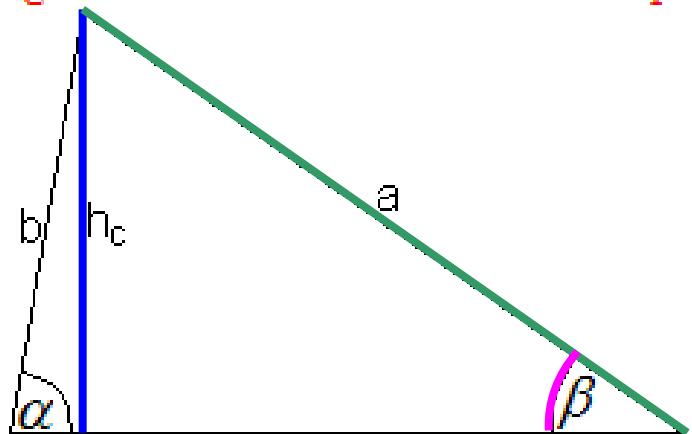
Eine Höhe, zum Beispiel die Höhe h_c , teilt ein Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke.

Gegeben ist ein Winkel und eine passende Seite.



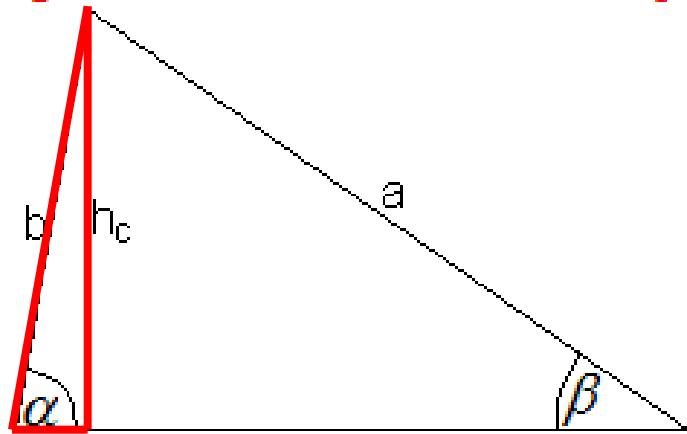
Eine Höhe, zum Beispiel die Höhe h_c , teilt ein Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke.
Im rechten Dreieck gilt $h_c = a \cdot \sin(\beta)$, im linken $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$.

Gegeben ist ein Winkel und eine passende Seite.



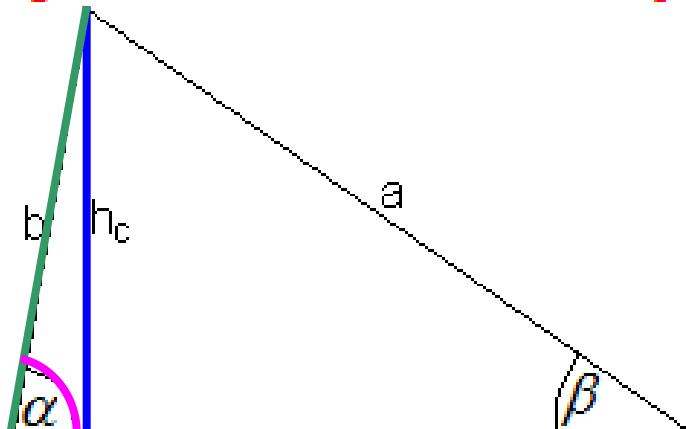
Eine Höhe, zum Beispiel die Höhe h_c , teilt ein Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke.
Im rechten Dreieck gilt $h_c = a \cdot \sin(\beta)$, im linken $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$.

Gegeben ist ein Winkel und eine passende Seite.



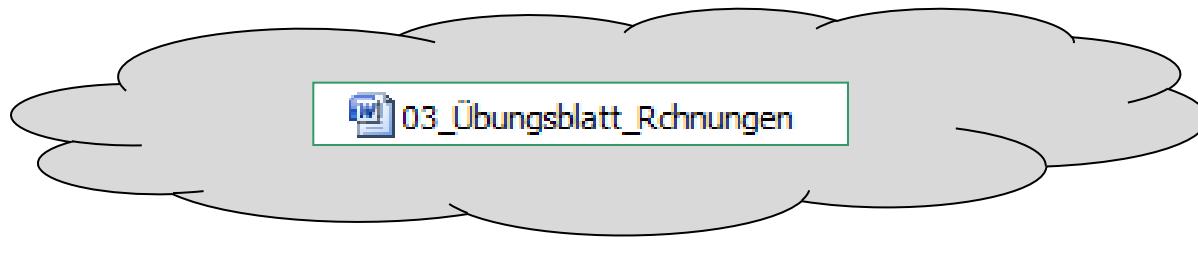
Eine Höhe, zum Beispiel die Höhe h_c , teilt ein Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke.
Im rechten Dreieck gilt $h_c = a \cdot \sin(\beta)$, im linken $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$.

Gegeben ist ein Winkel und eine passende Seite.

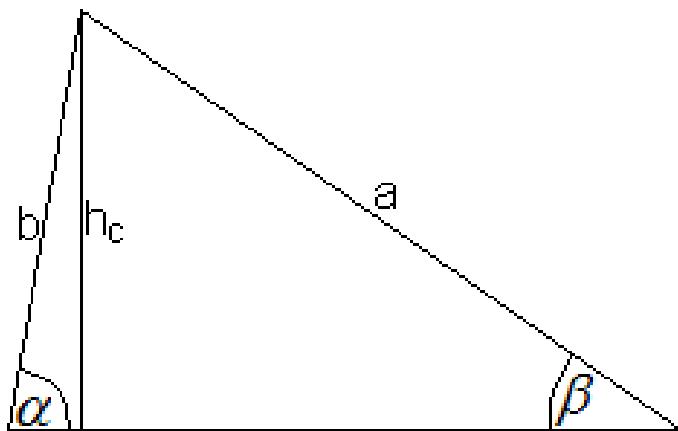


Eine Höhe, zum Beispiel die Höhe h_c , teilt ein Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke.
Im rechten Dreieck gilt $h_c = a \cdot \sin(\beta)$, im linken $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$.

Übungsaufgabe



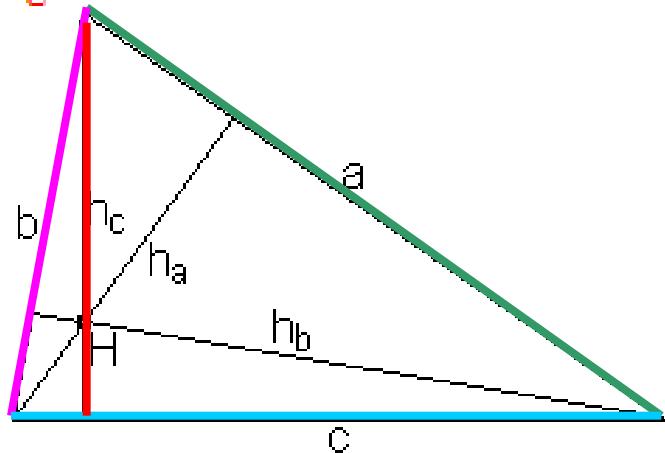
Übungsaufgabe



- Zeichnen Sie am Übungsblatt die fehlenden Höhen h_b und h_a ein.
- Berechnen Sie die Höhen h_b und h_a



Gegeben sind die drei Seiten.



Es gelten die Formeln

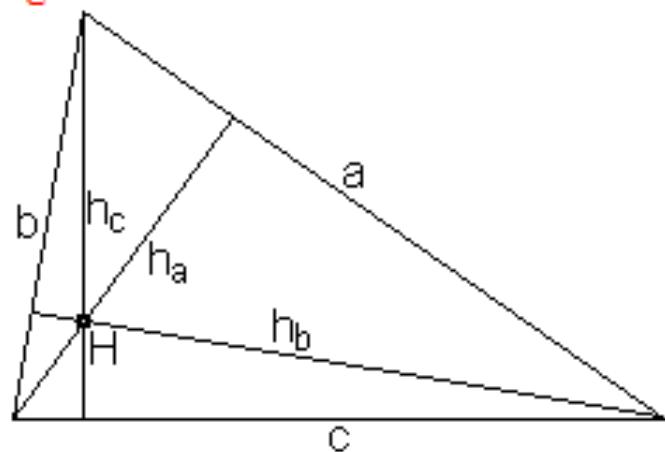
$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\boxed{h_c = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Darin ist $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Gegeben sind die drei Seiten.

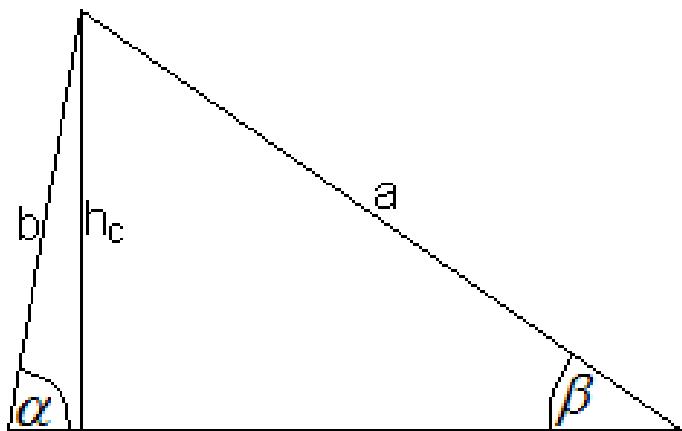


Es gelten die Formeln
 $h_a = (2/a)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,
 $h_b = (2/b)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,
 $h_c = (2/c)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.
Darin ist $s = (1/2)(a+b+c)$.

Zum Beweis

Es gilt für den Flächeninhalt eines Dreiecks die Formel von Heron $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Übungsaufgabe

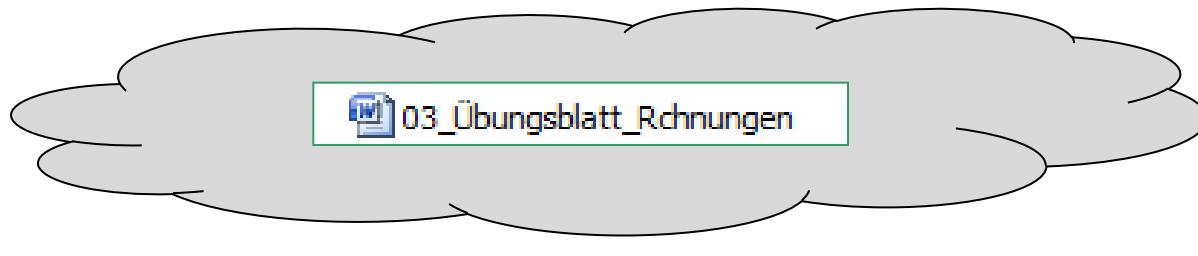


Es gelten die Formeln
 $h_a = (2/a)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,
 $h_b = (2/b)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,
 $h_c = (2/c)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.
Darin ist $s = (1/2)(a+b+c)$.

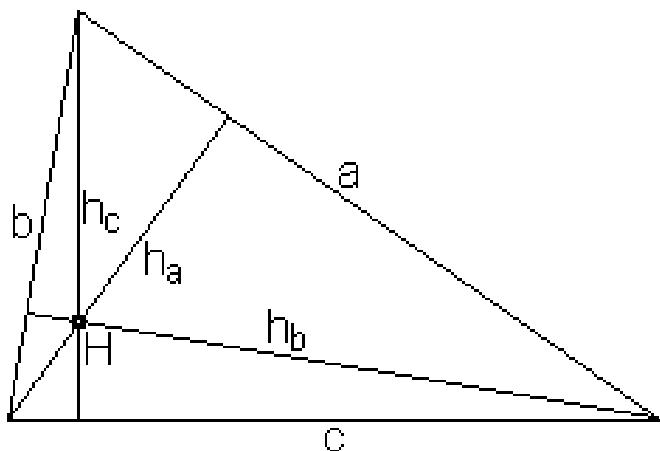
- Berechnen Sie „S“
- Berechnen Sie mit den angegebenen Formeln die Höhen h_a und h_b



Übungsaufgabe



Übungsaufgabe



Es gelten die Formeln
 $h_a = (2/a)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,
 $h_b = (2/b)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,
 $h_c = (2/c)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.
Darin ist $s = (1/2)(a+b+c)$.

Zum Beweis

Es gilt für den Flächeninhalt eines Dreiecks die Formel von Heron $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Berechnen Sie den Flächeninhalt:

- nach der Formel von Heron
- nach der Flächeninhaltsformel für Dreiecke ($a = 1/2 \cdot h \cdot \text{Grundlinie}$)



3.6.2 Umrechnungen zwischen rechtwinkligen und polaren Koordinaten

3.6.2 Umrechnungen zwischen rechtwinkligen und polaren Koordinaten

(1) Rechtwinklige Koordinaten aus Richtungswinkel und Strecke

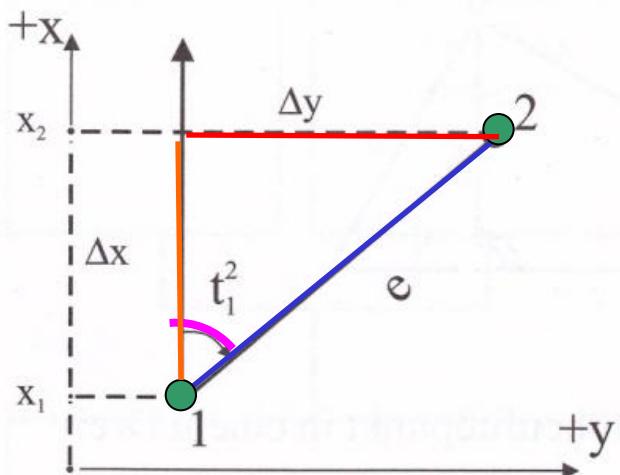


Abbildung 3.5-3: Umrechnung von Polarkoordinaten in Rechtwinkelkoordinaten

Sind die Polarkoordinaten (Strecke e und Richtungswinkel t) zwischen zwei Punkten bekannt, lassen sich die rechtwinkligen Koordinatenunterschiede Δy und Δx errechnen.

Gegeben: Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Gesucht : Rechtwinklige Koordinatenunterschiede

$$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \text{Vorzeichen}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{beachten!}$$

Lösung : $P \rightarrow R$

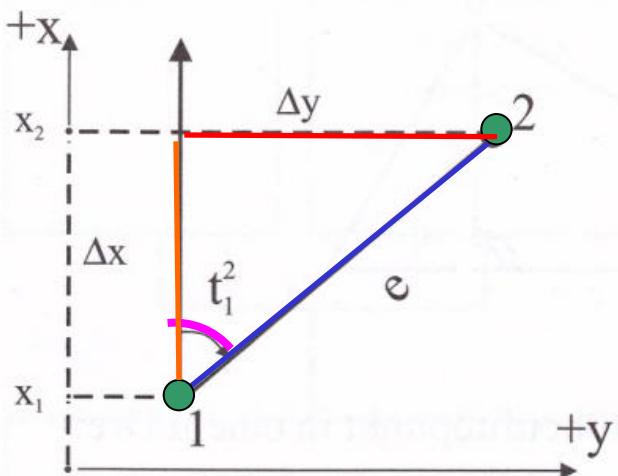


Abbildung 3.5-3: Umrechnung von Polarkoordinaten in Rechtwinkelkoordinaten

Sind die Polarkoordinaten (Strecke e und Richtungswinkel t) zwischen zwei Punkten bekannt, lassen sich die rechtwinkligen Koordinatenunterschiede Δy und Δx errechnen.

Gegeben: Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Gesucht : Rechtwinklige Koordinatenunterschiede

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_2 - y_1 \\ \Delta x &= x_2 - x_1\end{aligned}$$

Vorzeichen beachten!

Lösung : $P \rightarrow R$

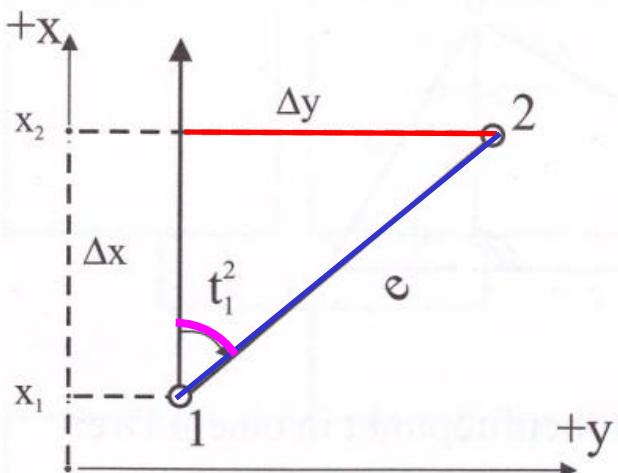


Abbildung 3.5-3: Umrechnung von Polarkoordinaten in Rechtwinkelkoordinaten

Sind die Polarkoordinaten (Strecke e und Richtungswinkel t) zwischen zwei Punkten bekannt, lassen sich die rechtwinkligen Koordinatenunterschiede Δy und Δx errechnen.

Gegeben: Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Gesucht : Rechtwinklige Koordinatenunterschiede

$$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \text{Vorzeichen}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{beachten!}$$

Lösung : $P \rightarrow R$

$$\boxed{\Delta y} = e \cdot \sin t_1^2 \quad (3.23)$$

$$\Delta x = e \cdot \cos t_1^2 \quad (3.24)$$

Wenn die Koordinaten y_1 und x_1 des Punktes 1 bekannt sind, ergeben sich die Koordinaten des Punktes 2 zu

$$y_2 = y_1 + \Delta y = y_1 + e \cdot \sin t_1^2 \quad (3.25)$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = x_1 + e \cdot \cos t_1^2 \quad (3.26)$$

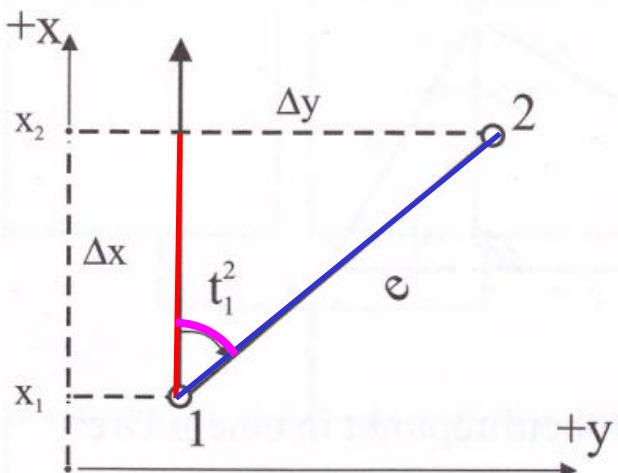


Abbildung 3.5-3: Umrechnung von Polarkoordinaten in Rechtwinkelkoordinaten

Sind die Polarkoordinaten (Strecke e und Richtungswinkel t) zwischen zwei Punkten bekannt, lassen sich die rechtwinkligen Koordinatenunterschiede Δy und Δx errechnen.

Gegeben: Polarkoordinaten = Richtungswinkel t^2 und Strecke e

Gesucht : Rechtwinklige Koordinatenunterschiede

$$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \text{Vorzeichen}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{beachten!}$$

Lösung : $P \rightarrow R$

$$\Delta y = e \cdot \sin t_1^2 \quad (3.23)$$

$$\boxed{\Delta x} = \boxed{e} \cdot \boxed{\cos t_1^2} \quad (3.24)$$

Wenn die Koordinaten y_1 und x_1 des Punktes 1 bekannt sind, ergeben sich die Koordinaten des Punktes 2 zu

$$y_2 = y_1 + \Delta y = y_1 + e \cdot \sin t_1^2 \quad (3.25)$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = x_1 + e \cdot \cos t_1^2 \quad (3.26)$$

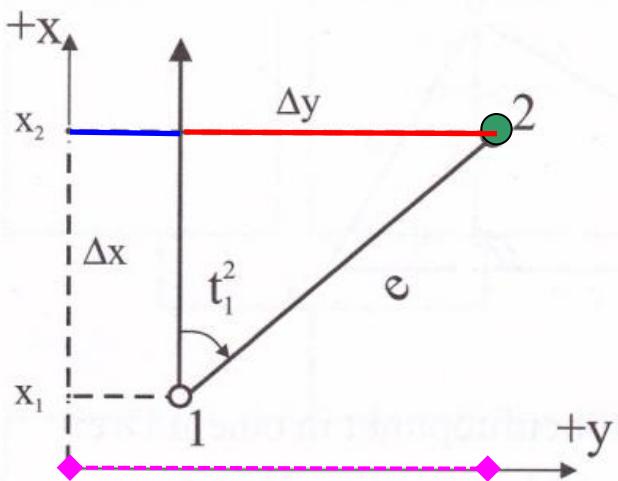


Abbildung 3.5-3: Umrechnung von Polarkoordinaten in Rechtwinkelkoordinaten

Sind die Polarkoordinaten (Strecke e und Richtungswinkel t) zwischen zwei Punkten bekannt, lassen sich die rechtwinkligen Koordinatenunterschiede Δy und Δx errechnen.

Gegeben: Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Gesucht : Rechtwinklige Koordinatenunterschiede

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_2 - y_1 && \text{Vorzeichen} \\ \Delta x &= x_2 - x_1 && \text{beachten!}\end{aligned}$$

Lösung : $P \rightarrow R$

$$\Delta y = e \cdot \sin t_1^2 \quad (3.23)$$

$$\Delta x = e \cdot \cos t_1^2 \quad (3.24)$$

Wenn die Koordinaten y_1 und x_1 des Punktes 1 bekannt sind, ergeben sich die Koordinaten des Punktes 2 zu

$$y_2 = y_1 + \Delta y = y_1 + e \cdot \sin t_1^2 \quad (3.25)$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = x_1 + e \cdot \cos t_1^2 \quad (3.26)$$

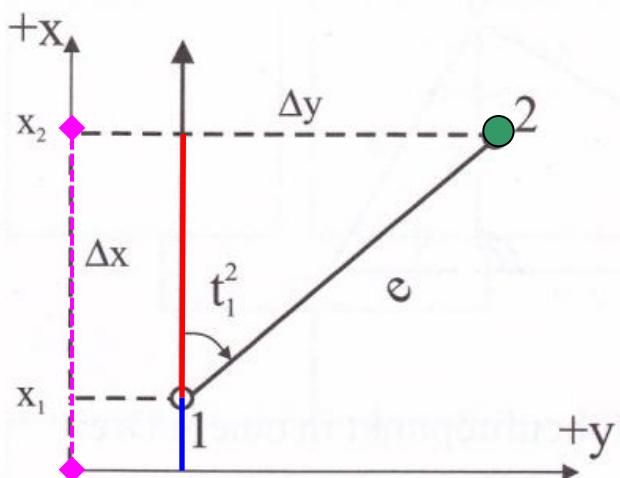


Abbildung 3.5-3: Umrechnung von Polarkoordinaten in Rechtwinkelkoordinaten

Sind die Polarkoordinaten (Strecke e und Richtungswinkel t) zwischen zwei Punkten bekannt, lassen sich die rechtwinkligen Koordinatenunterschiede Δy und Δx errechnen.

Gegeben: Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Gesucht : Rechtwinklige Koordinatenunterschiede

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_2 - y_1 && \text{Vorzeichen} \\ \Delta x &= x_2 - x_1 && \text{beachten!}\end{aligned}$$

Lösung : $P \rightarrow R$

$$\Delta y = e \cdot \sin t_1^2 \quad (3.23)$$

$$\boxed{\Delta x = e \cdot \cos t_1^2} \quad (3.24)$$

Wenn die Koordinaten y_1 und x_1 des Punktes 1 bekannt sind, ergeben sich die Koordinaten des Punktes 2 zu

$$y_2 = y_1 + \Delta y = y_1 + e \cdot \sin t_1^2 \quad (3.25)$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = x_1 + e \cdot \cos t_1^2 \quad (3.26)$$

Dieses „Polare Abhängen“ wird auch als „Erste Grundaufgabe“ bezeichnet.

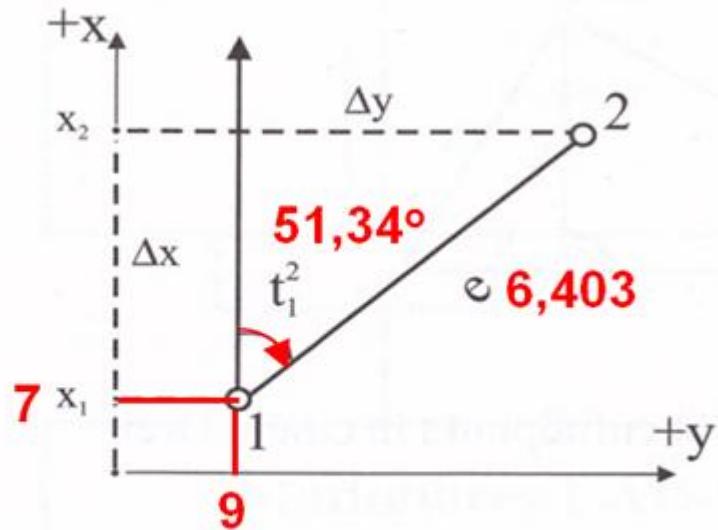
Übungsaufgabe zu Rechtwinkelkoordinaten



03_Übungsblatt_Rechtwinkelkoordinaten



Übungsaufgabe zu Rechtwinkelkoordinaten



Aufgabe:

Berechnen Sie die rechtwinkligen Koordinaten für Punkt 2!



Übungsaufgabe

Koordinatenberechnungen

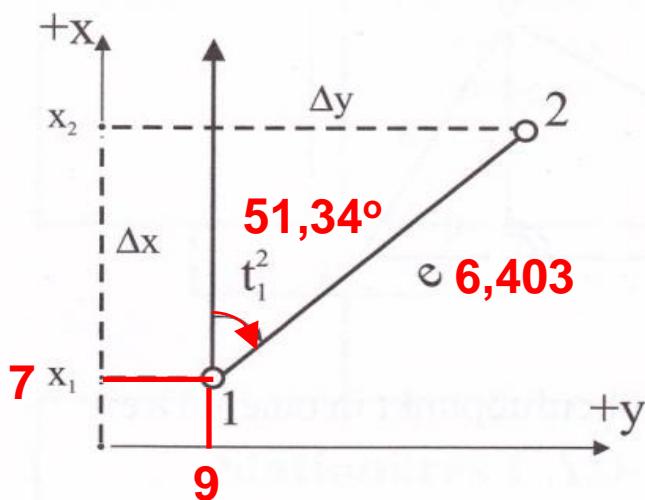


Abbildung 3.5-3: Umrechnung von Polarkoordinaten in Rechtwinkelkoordinaten

Berechnen Sie die rechtwinkligen Koordinaten für Punkt 2

Wenn die Koordinaten y_1 und x_1 des Punktes 1 bekannt sind, ergeben sich die Koordinaten des Punktes 2 zu

$$\Delta y = e \cdot \sin t_1^2 \quad (3.23)$$

$$\Delta x = e \cdot \cos t_1^2 \quad (3.24)$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y = y_1 + e \cdot \sin t_1^2$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = x_1 + e \cdot \cos t_1^2$$

Dieses „Polare Anhängen“ wird auch als „Erste Grundaufgabe“ bezeichnet.

Sind die Polarkoordinaten (Strecke e und Richtungswinkel t) zwischen zwei Punkten bekannt, lassen sich die rechtwinkligen Koordinatenunterschiede Δy und Δx errechnen.

Gegeben: Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Gesucht : Rechtwinklige Koordinatenunterschiede

$$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \text{Vorzeichen}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{beachten!}$$

Lösung : $P \rightarrow R$



Übungsaufgabe

Koordinatenberechnungen

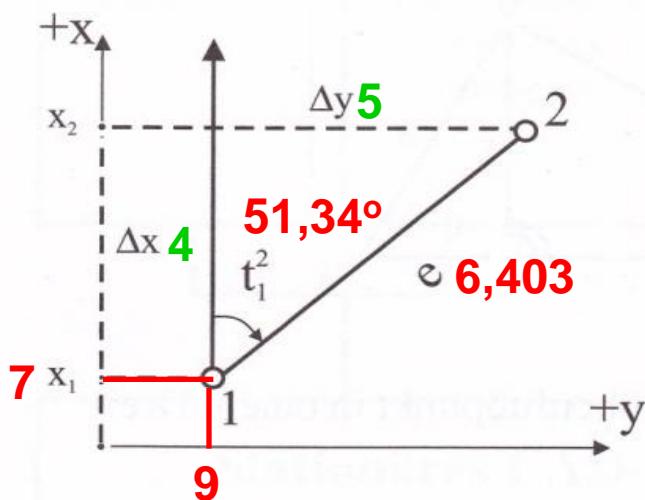


Abbildung 3.5-3: Umrechnung von Polarkoordinaten in Rechtwinkelkoordinaten

Berechnen Sie die rechtwinkligen Koordinaten für Punkt 2: (11/14)

Sind die Polarkoordinaten (Strecke e und Richtungswinkel t) zwischen zwei Punkten bekannt, lassen sich die rechtwinkligen Koordinatenunterschiede Δy und Δx errechnen.

Gegeben: Polarkoordinaten = Richtungswinkel t^2 und Strecke e

Gesucht : Rechtwinklige Koordinatenunterschiede

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_2 - y_1 && \text{Vorzeichen} \\ \Delta x &= x_2 - x_1 && \text{beachten!}\end{aligned}$$

Lösung : $P \rightarrow R$

$$\Delta y = e \cdot \sin t^2 \quad (3.23)$$

$$\Delta x = e \cdot \cos t^2 \quad (3.24)$$

Wenn die Koordinaten y_1 und x_1 des Punktes 1 bekannt sind, ergeben sich die Koordinaten des Punktes 2 zu

$$y_2 = y_1 + \Delta y = y_1 + e \cdot \sin t^2$$

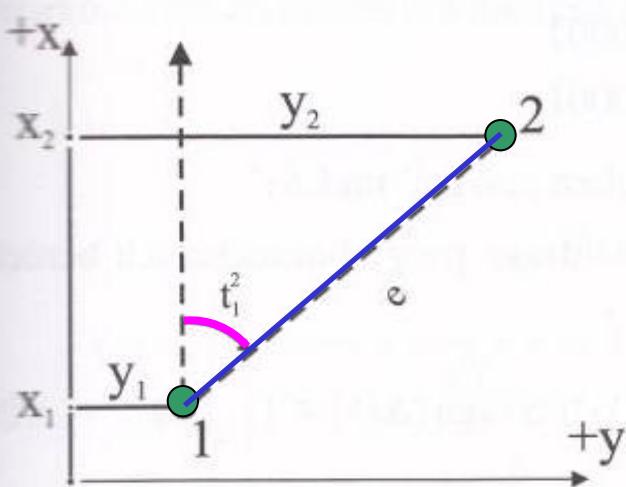
$$x_2 = x_1 + \Delta x = x_1 + e \cdot \cos t^2$$

Dieses „Polare Anhängen“ wird auch als „Erste Grundaufgabe“ bezeichnet.



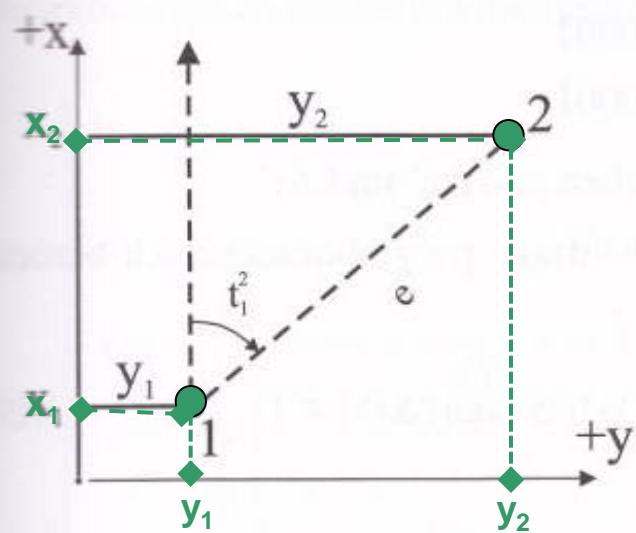
3.6.2 Umrechnungen zwischen rechtwinkligen und polaren Koordinaten

(2) Richtungswinkel und Strecke aus rechtwinkligen Koordinaten



Aus den gegebenen Koordinaten zweier Punkte sind die Länge und der Richtungswinkel ihrer Verbindungsgeraden zu bestimmen. Diese Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten wird auch als „Zweite Grundaufgabe“ bezeichnet.

Abbildung 3.5-4: Umrechnung von Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten



Aus den gegebenen Koordinaten zweier Punkte sind die Länge und der Richtungswinkel ihrer Verbindungsgeraden zu bestimmen. Diese Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten wird auch als „Zweite Grundaufgabe“ bezeichnet.

Gegeben: Rechtwinkelkoordinaten y_1, x_1 und y_2, x_2 der Punkte 1 und 2

Abbildung 3.5-4: Umrechnung von Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten

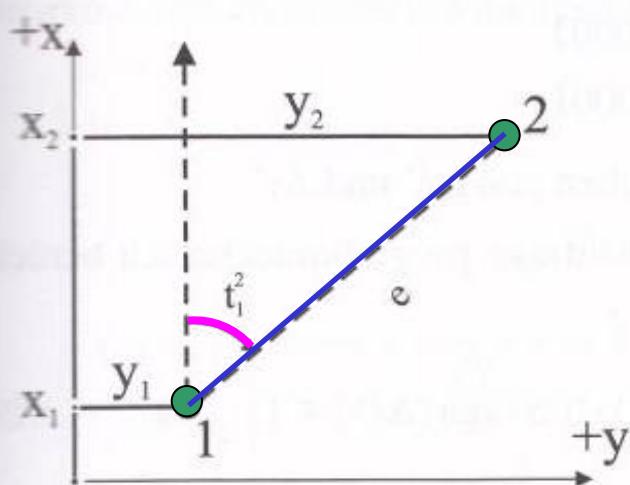


Abbildung 3.5-4: Umrechnung von Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten

Aus den gegebenen Koordinaten zweier Punkte sind die Länge und der Richtungswinkel ihrer Verbindungsgeraden zu bestimmen. Diese Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten wird auch als „Zweite Grundaufgabe“ bezeichnet.

Gegeben: Rechtwinkelkoordinaten y_1, x_1 und y_2, x_2 der Punkte 1 und 2

Gesucht : Polarkoordinaten = **Richtungswinkel**
 t_1^2 und **Strecke e**

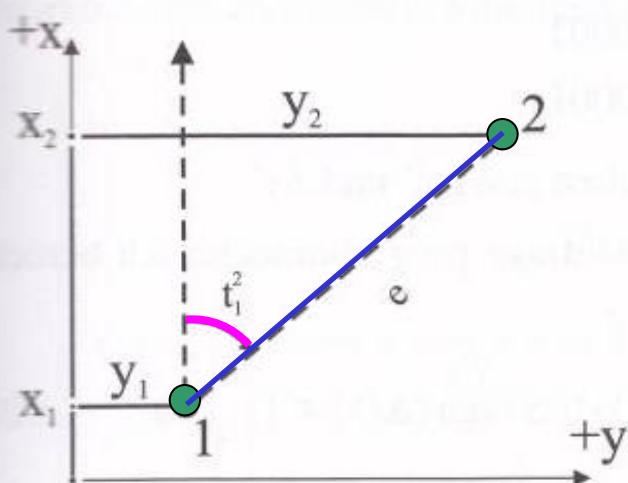


Abbildung 3.5-4: Umrechnung von Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten

Aus den gegebenen Koordinaten zweier Punkte sind die Länge und der Richtungswinkel ihrer Verbindungsgeraden zu bestimmen. Diese Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten wird auch als „Zweite Grundaufgabe“ bezeichnet.

Gegeben: Rechtwinkelkoordinaten y_1, x_1 und y_2, x_2 der Punkte 1 und 2

Gesucht : Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Lösung : $R \rightarrow P$

*Umformung:
Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten*

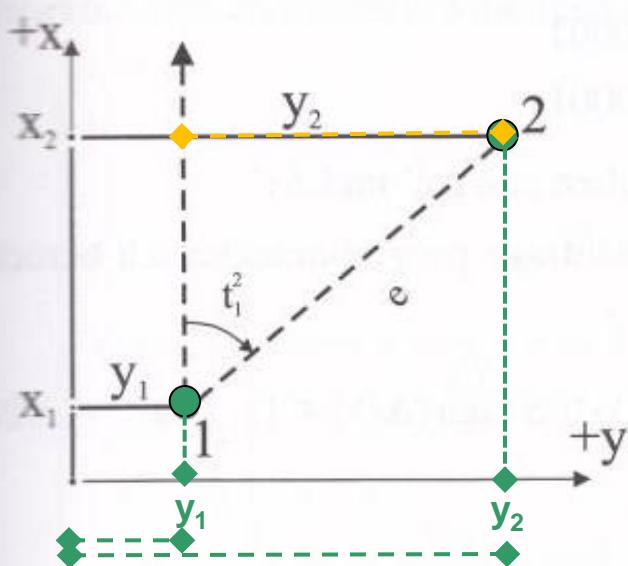


Abbildung 3.5-4: Umrechnung von Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten

Aus den gegebenen Koordinaten zweier Punkte sind die Länge und der Richtungswinkel ihrer Verbindungsgeraden zu bestimmen. Diese Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten wird auch als „Zweite Grundaufgabe“ bezeichnet.

Gegeben: Rechtwinkelkoordinaten y_1, x_1 und y_2, x_2 der Punkte 1 und 2

Gesucht : Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Lösung : $R \rightarrow P$

$$\Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

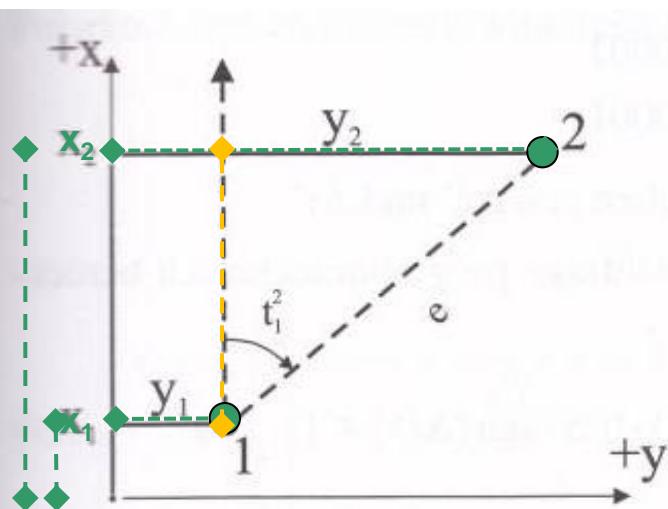


Abbildung 3.5-4: Umrechnung von Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten

Aus den gegebenen Koordinaten zweier Punkte sind die Länge und der Richtungswinkel ihrer Verbindungsgeraden zu bestimmen. Diese Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten wird auch als „Zweite Grundaufgabe“ bezeichnet.

Gegeben: Rechtwinkelkoordinaten y_1, x_1 und y_2, x_2 der Punkte 1 und 2

Gesucht : Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Lösung : $R \rightarrow P$

$$\Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta x := x_2 - x_1$$

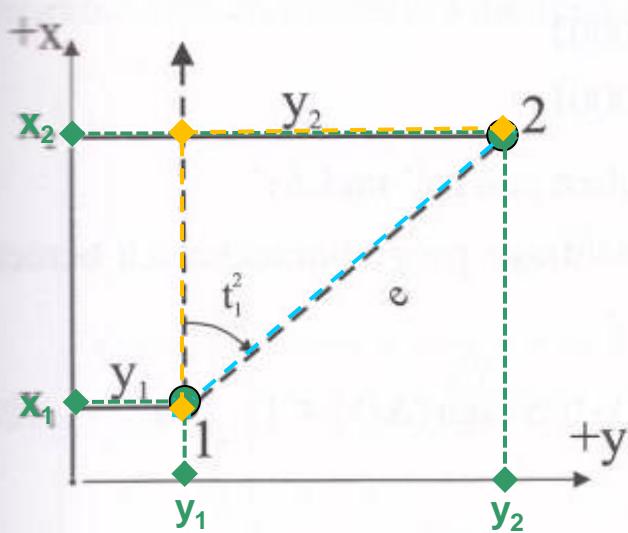


Abbildung 3.5-4: Umrechnung von Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten

Aus den gegebenen Koordinaten zweier Punkte sind die Länge und der Richtungswinkel ihrer Verbindungsgeraden zu bestimmen. Diese Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten wird auch als „Zweite Grundaufgabe“ bezeichnet.

Gegeben: Rechtwinkelkoordinaten y_1, x_1 und y_2, x_2 der Punkte 1 und 2

Gesucht : Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Lösung : $R \rightarrow P$

$$\Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

$$e = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2} \quad (3.27)$$

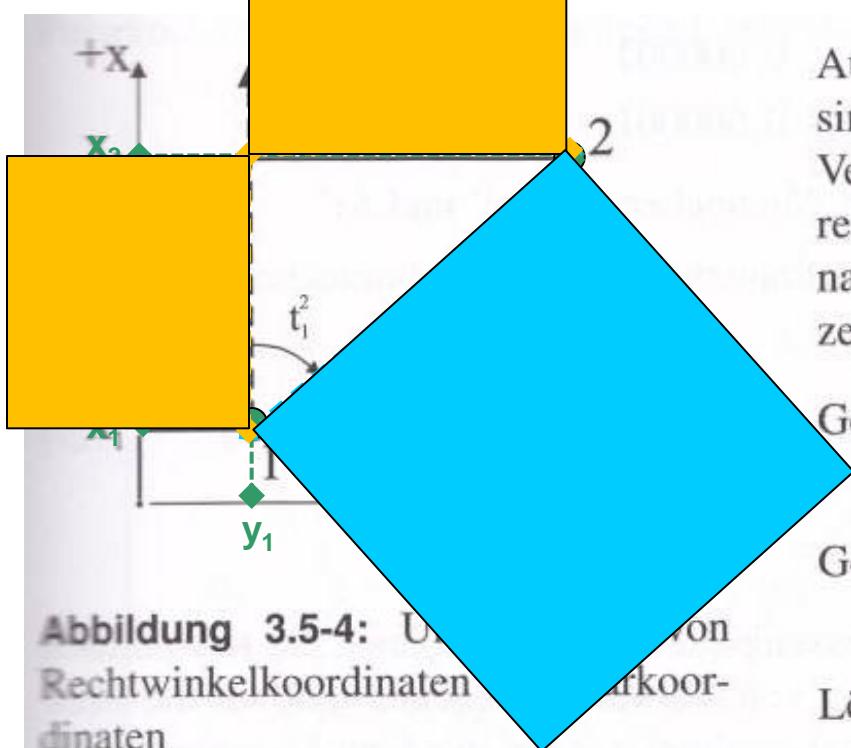


Abbildung 3.5-4: Umwandlung von Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten

Aus den gegebenen Koordinaten zweier Punkte sind die Länge und der Richtungswinkel ihrer Verbindungsgeraden zu bestimmen. Diese Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten wird auch als „Zweite Grundaufgabe“ bezeichnet.

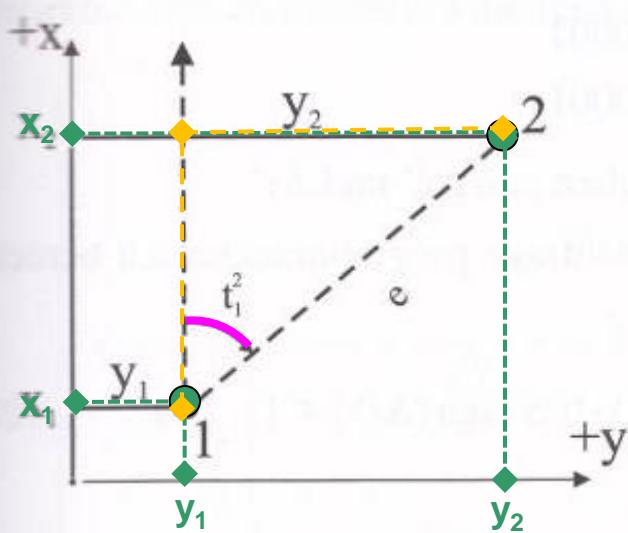
Gegeben: Rechtwinkelkoordinaten y_1, x_1 und y_2, x_2 der Punkte 1 und 2

Gesucht : Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Lösung : $R \rightarrow P$

$$\Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

$$e = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2} \quad \text{Pythagoras!} \quad (3.27)$$



Aus den gegebenen Koordinaten zweier Punkte sind die Länge und der Richtungswinkel ihrer Verbindungsgeraden zu bestimmen. Diese Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten wird auch als „Zweite Grundaufgabe“ bezeichnet.

Gegeben: Rechtwinkelkoordinaten y_1, x_1 und y_2, x_2 der Punkte 1 und 2

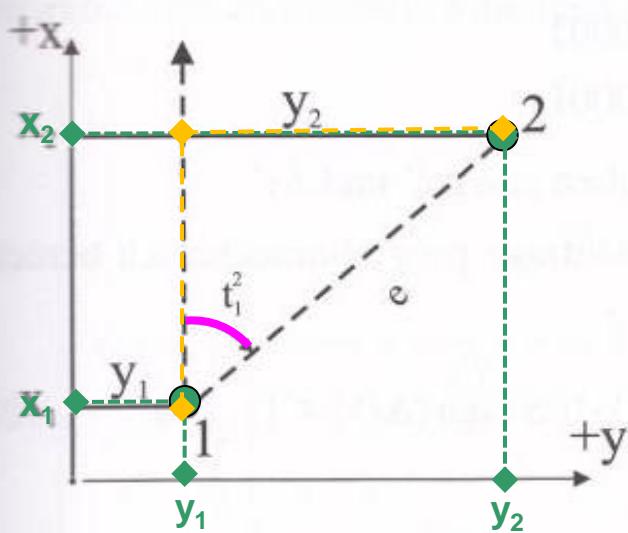
Gesucht : Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Lösung : $R \rightarrow P$

Abbildung 3.5-4: Umrechnung von Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten

tan = Gegenkathete / Ankathete

$$\tan \boxed{t_1^2} = \boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$



Aus den gegebenen Koordinaten zweier Punkte sind die Länge und der Richtungswinkel ihrer Verbindungsgeraden zu bestimmen. Diese Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten wird auch als „Zweite Grundaufgabe“ bezeichnet.

Gegeben: Rechtwinkelkoordinaten y_1, x_1 und y_2, x_2 der Punkte 1 und 2

Gesucht : Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Lösung : $R \rightarrow P$

Abbildung 3.5-4: Umrechnung von Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten

arctan = Umkehrfunktion des Tangens!

Der arctan bedeutet,

- dass Ihnen die Länge der Gegenkathete bekannt ist
- und Sie den zugehörigen Winkel finden müssen.

$$\boxed{t_1^2} = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3.28)$$

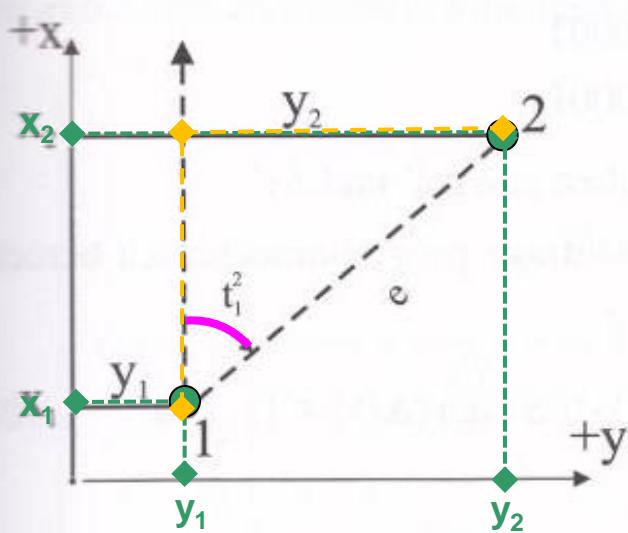


Abbildung 3.5-4: Umrechnung von Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten

arctan = Umkehrfunktion des Tangens!

Aus den gegebenen Koordinaten zweier Punkte sind die Länge und der Richtungswinkel ihrer Verbindungsgeraden zu bestimmen. Diese Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten wird auch als „Zweite Grundaufgabe“ bezeichnet.

Gegeben: Rechtwinkelkoordinaten y_1, x_1 und y_2, x_2 der Punkte 1 und 2

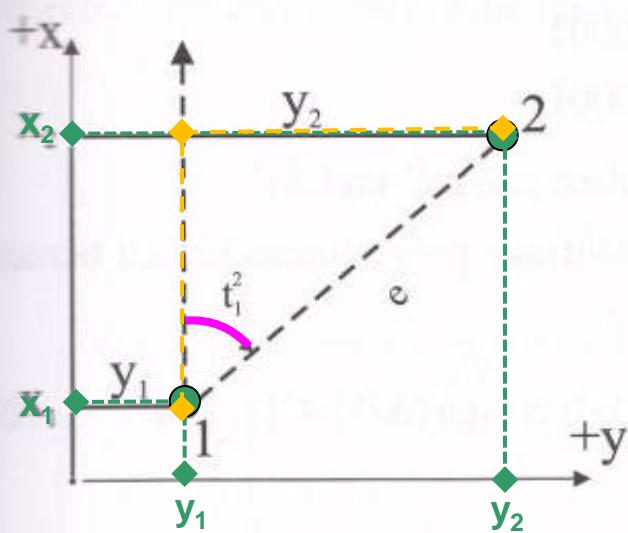
Gesucht : Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Lösung : $R \rightarrow P$

Der arctan bedeutet,

- dass Ihnen die Länge der Gegenkathete bekannt ist
- und Sie den zugehörigen Winkel finden müssen.

$$\boxed{t_1^2} = \boxed{\arctan \frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad (3.28)$$



Aus den gegebenen Koordinaten zweier Punkte sind die Länge und der Richtungswinkel ihrer Verbindungsgeraden zu bestimmen. Diese Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten wird auch als „Zweite Grundaufgabe“ bezeichnet.

Gegeben: Rechtwinkelkoordinaten y_1, x_1 und y_2, x_2 der Punkte 1 und 2

Gesucht : Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Lösung : $R \rightarrow P$

Abbildung 3.5-4: Umrechnung von Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten

Achtung!

Je nach Quadrant ändern sich die Vorzeichen!

$$\boxed{t_1^2} = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3.28)$$

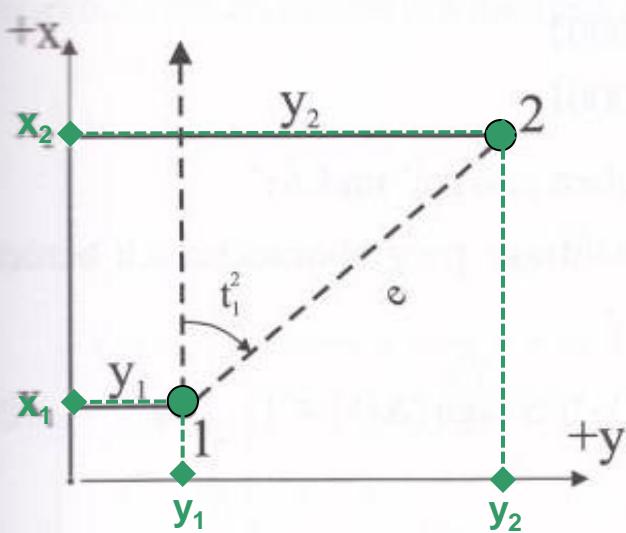


Abbildung 3.5-4: Umrechnung von Rechtwinkelkoordinaten in Polarkoordinaten

Aus den gegebenen Koordinaten zweier Punkte sind die Länge und der Richtungswinkel ihrer Verbindungsgeraden zu bestimmen. Diese Umrechnung von rechtwinkligen in polare Koordinaten wird auch als „Zweite Grundaufgabe“ bezeichnet.

Gegeben: Rechtwinkelkoordinaten y_1, x_1 und y_2, x_2 der Punkte 1 und 2

Gesucht : Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

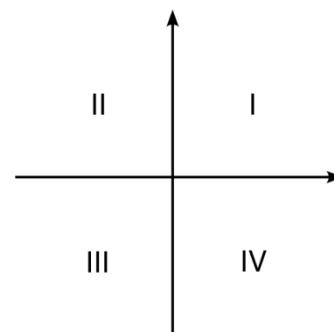
Lösung : $R \rightarrow P$

$$\Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

$$e = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2} \quad (3.27)$$

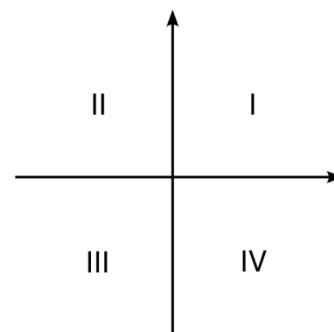
$$t_1^2 = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3.28)$$

Δy	Δx	Quadrant	Ergebnis
+	+	I	$t = t^* \text{ gon}$
+	-	II	$t = t^* + 200 \text{ gon}$
-	-	III	$t = t^* + 200 \text{ gon}$
-	+	IV	$t = t^* \text{ gon}$



Zum Berechnungsergebnis ist immer dann 200 Gon zu addieren,
 → wenn $\Delta x = \text{negativ}$

Δy	Δx	Quadrant	Ergebnis
+	+	I	$t = t^* \text{ gon}$
+	-	II	$t = t^* + 200 \text{ gon}$
-	-	III	$t = t^* + 200 \text{ gon}$
-	+	IV	$t = t^* \text{ gon}$



Um zu vermeiden, dass in einem Algorithmus unerlaubterweise durch „0“ geteilt wird:

$$\Delta y^* = \Delta y + 0,000001$$

$$\Delta x^* = \Delta x + 0,000001$$

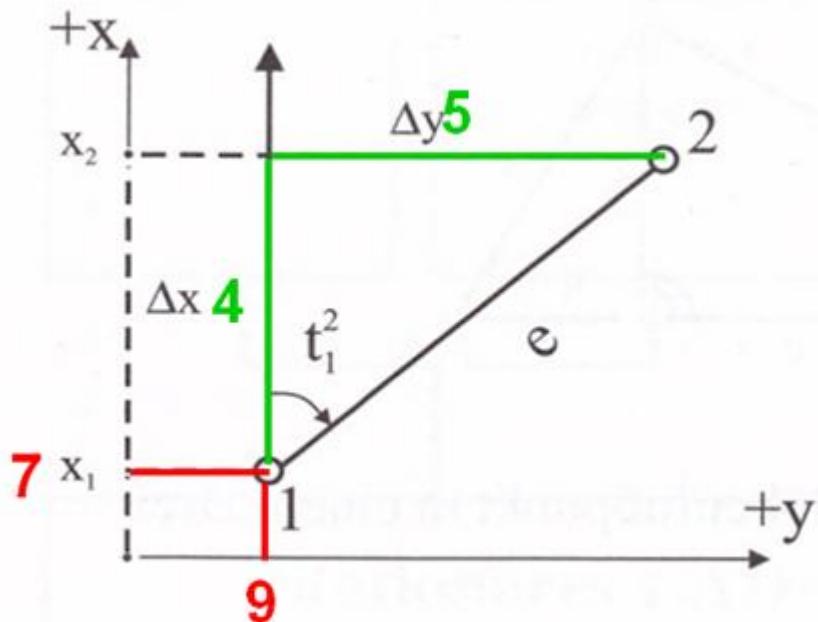
Übungsaufgabe zu Rechtwinkelkoordinaten



03_Übungsblatt_Polarkoordinaten



Übungsaufgabe zu Rechtwinkelkoordinaten



Aufgabe:

Berechnen Sie die Polarkoordinaten für Punkt 2

Übungsaufgabe

Koordinatenberechnungen

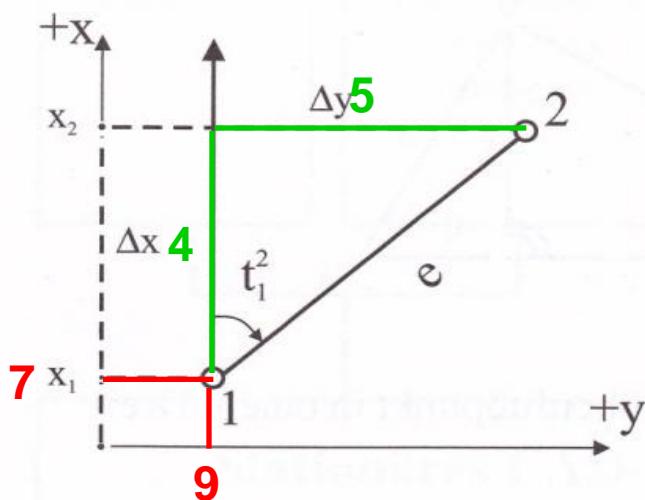


Abbildung 3.5-3: Umrechnung von Polarkoordinaten in Rechtwinkelkoordinaten

Berechnen Sie die
Polarkoordinaten
für Punkt 2

Sind die Polarkoordinaten (Strecke e und Richtungswinkel t) zwischen zwei Punkten bekannt, lassen sich die rechtwinkligen Koordinatenunterschiede Δy und Δx errechnen.

Gegeben: Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Gesucht : Rechtwinklige Koordinatenunterschiede

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_2 - y_1 && \text{Vorzeichen} \\ \Delta x &= x_2 - x_1 && \text{beachten!}\end{aligned}$$

Lösung : $P \rightarrow R$

$$\Delta y = e \cdot \sin t_1^2 \quad (3.23)$$

$$\Delta x = e \cdot \cos t_1^2 \quad (3.24)$$

Wenn die Koordinaten y_1 und x_1 des Punktes 1 bekannt sind, ergeben sich die Koordinaten des Punktes 2 zu

$$y_2 = y_1 + \Delta y = y_1 + e \cdot \sin t_1^2$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = x_1 + e \cdot \cos t_1^2$$

Dieses „Polare Anhängen“ wird auch als „Erste Grundaufgabe“ bezeichnet.



Übungsaufgabe

Koordinatenberechnungen

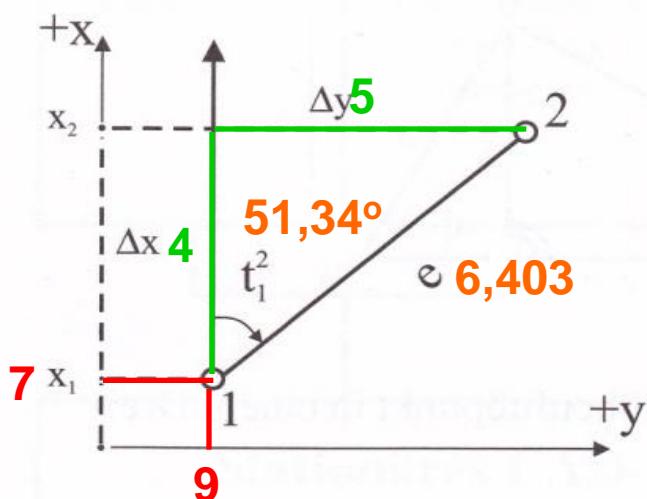


Abbildung 3.5-3: Umrechnung von Polarkoordinaten in Rechtwinkelkoordinaten

Berechnen Sie die
Polarkoordinaten
für Punkt 2

Wenn die Koordinaten y_1 und x_1 des Punktes 1 bekannt sind, ergeben sich die Koordinaten des Punktes 2 zu

$$\Delta y = e \cdot \sin t_1^2 \quad (3.23)$$

$$\Delta x = e \cdot \cos t_1^2 \quad (3.24)$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y = y_1 + e \cdot \sin t_1^2$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = x_1 + e \cdot \cos t_1^2$$

Dieses „Polare Anhängen“ wird auch als „Erste Grundaufgabe“ bezeichnet.

Sind die Polarkoordinaten (Strecke e und Richtungswinkel t) zwischen zwei Punkten bekannt, lassen sich die rechtwinkligen Koordinatenunterschiede Δy und Δx errechnen.

Gegeben: Polarkoordinaten = Richtungswinkel t_1^2 und Strecke e

Gesucht : Rechtwinklige Koordinatenunterschiede

$$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \text{Vorzeichen}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{beachten!}$$

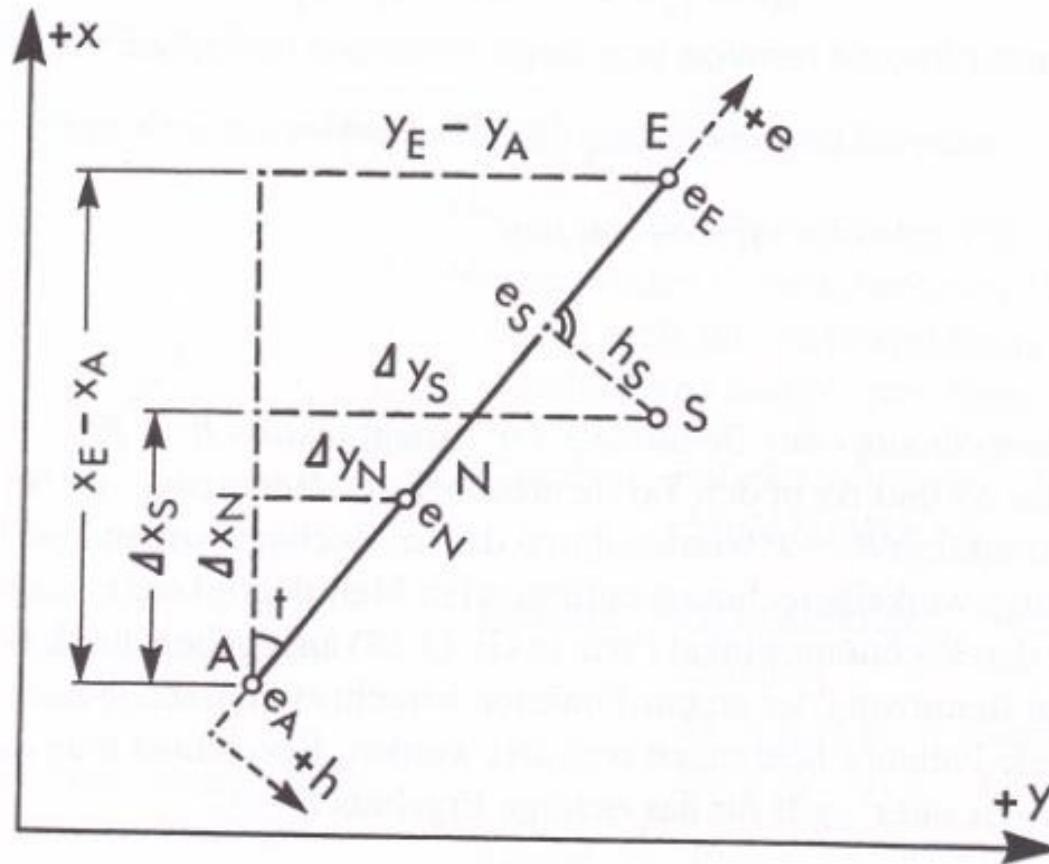
Lösung : $P \rightarrow R$



3.6.2 Umrechnungen zwischen rechtwinkligen und polaren Koordinaten

(3) Kleinpunktberechnung

Sind die Koordinaten der Endpunkte einer Messungslinie bekannt, können die Koordinaten von Vermessungspunkten auf dieser Linie oder von seitwärts gelegenen und auf die Messungslinie rechtwinklig aufgemessenen Punkten berechnet werden, die dann *Kleinpunkte* heißen.



3.7 Flächenberechnung aus Maßzahlen

(1) Zerlegung in Dreiecke und Trapeze

Flächenberechnung von Grundstücken durch Zerlegung in Dreiecke und Trapeze

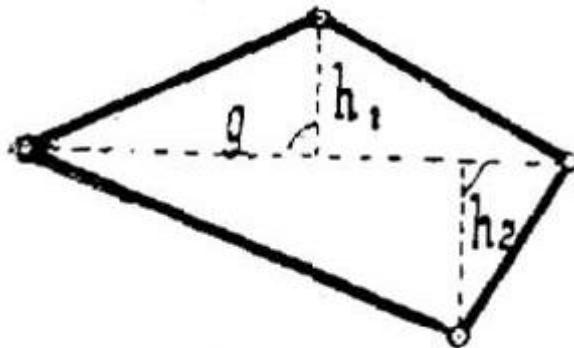
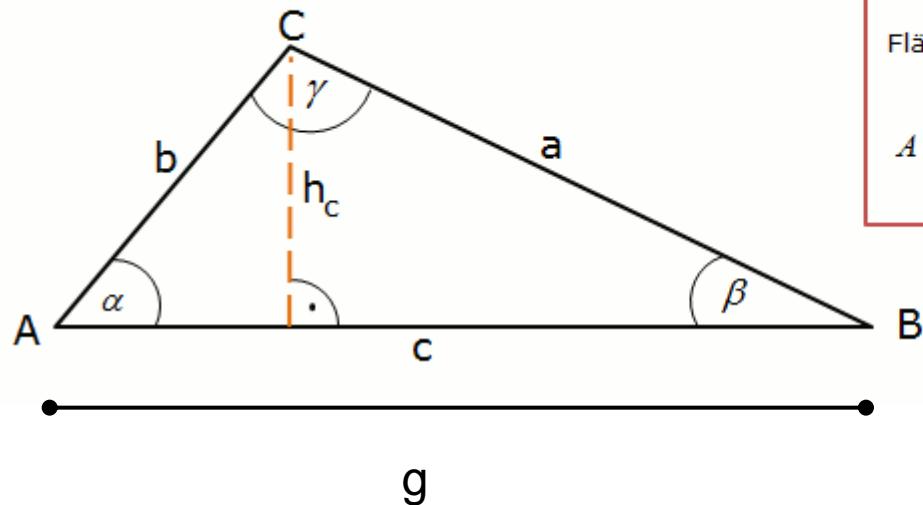


Fig. 1.

Allgemeines Dreieck



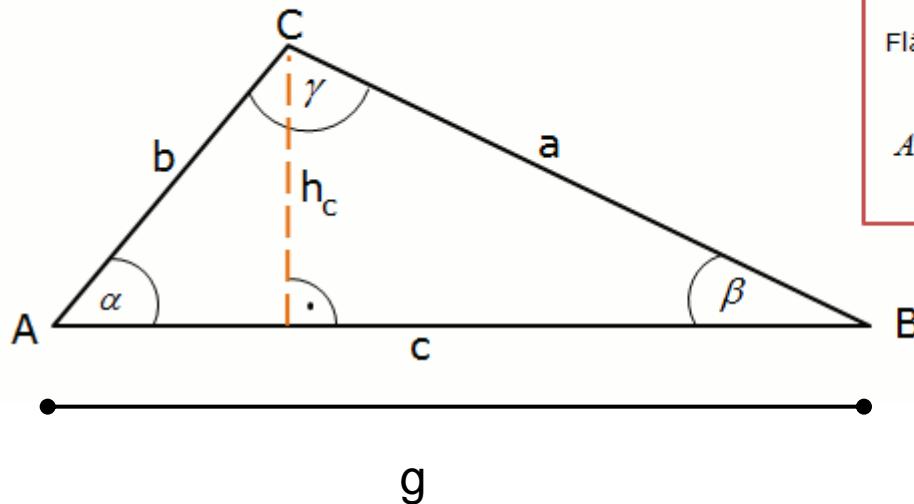
Fläche

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h_g$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

S

Allgemeines Dreieck



Fläche

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h_g$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

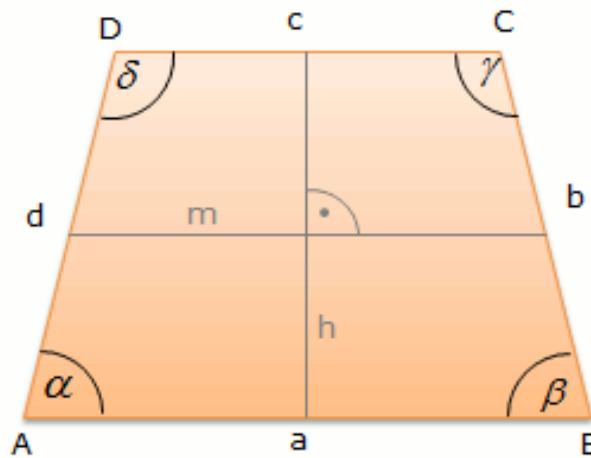
S

Berechnen Sie den Flächeninhalt:

$$c = 5\text{cm}$$

$$h_c = 3\text{cm}$$

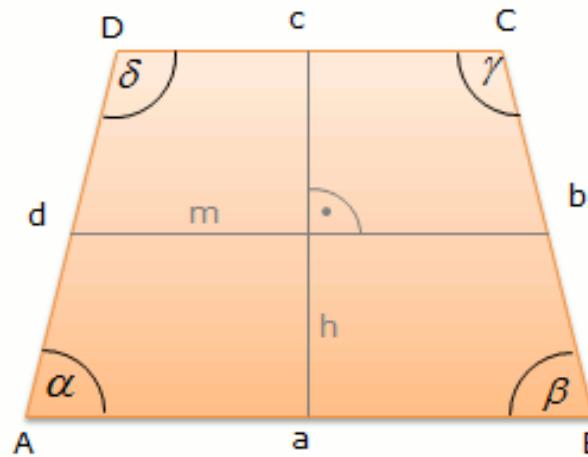


Trapez: Seiten, Winkel, Umfang, Fläche

Fläche im Trapez

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$$

Trapez: Seiten, Winkel, Umfang, Fläche



Fläche im Trapez

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt:

$$a = 5\text{cm}, c=4$$

$$h= 4\text{cm}$$



Flächenberechnung von Grundstücken durch Zerlegung in Dreiecke und Trapeze

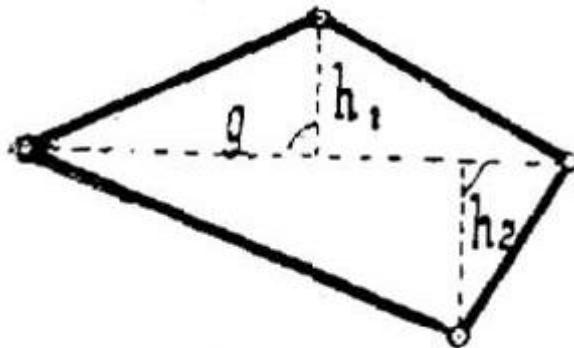
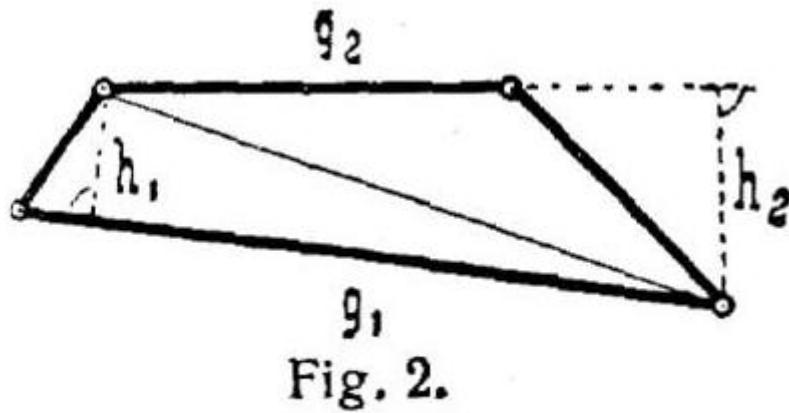


Fig. 1.

Flächenberechnung von Grundstücken durch Zerlegung in Dreiecke und Trapeze



Flächenberechnung von Grundstücken durch Zerlegung in Dreiecke und Trapeze

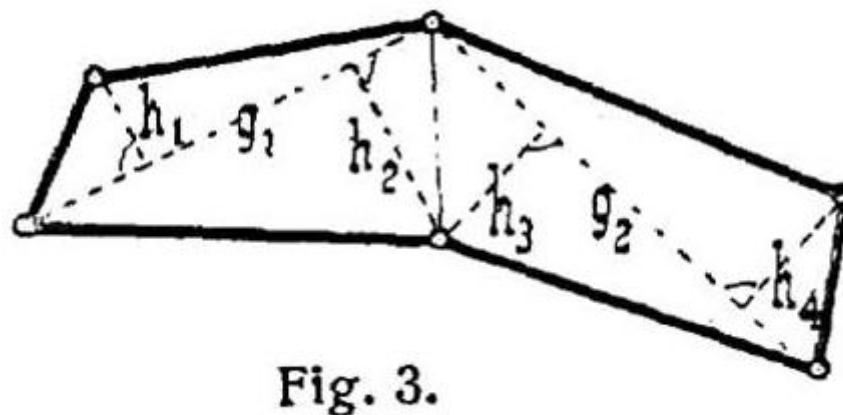


Fig. 3.

Flächenberechnung von Grundstücken durch Zerlegung in Dreiecke und Trapeze

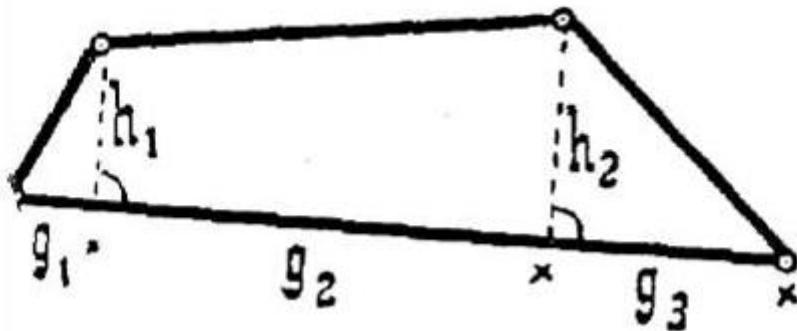


Fig. 4.

Flächenberechnung von Grundstücken durch Zerlegung in Dreiecke und Trapeze

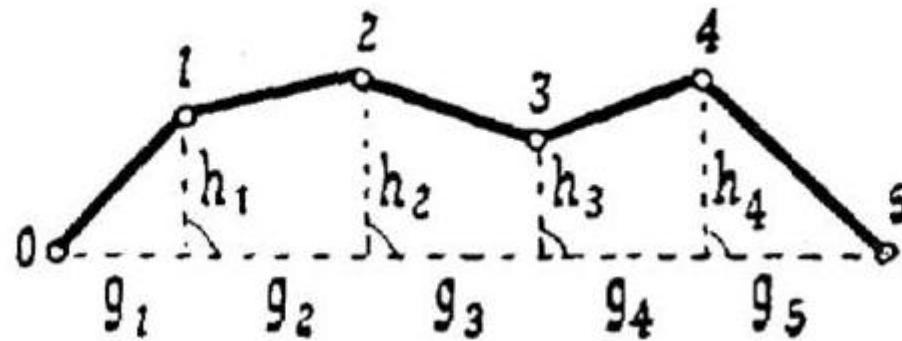


Fig. 5.

Flächenberechnung von Grundstücken durch Zerlegung in Dreiecke und Trapeze

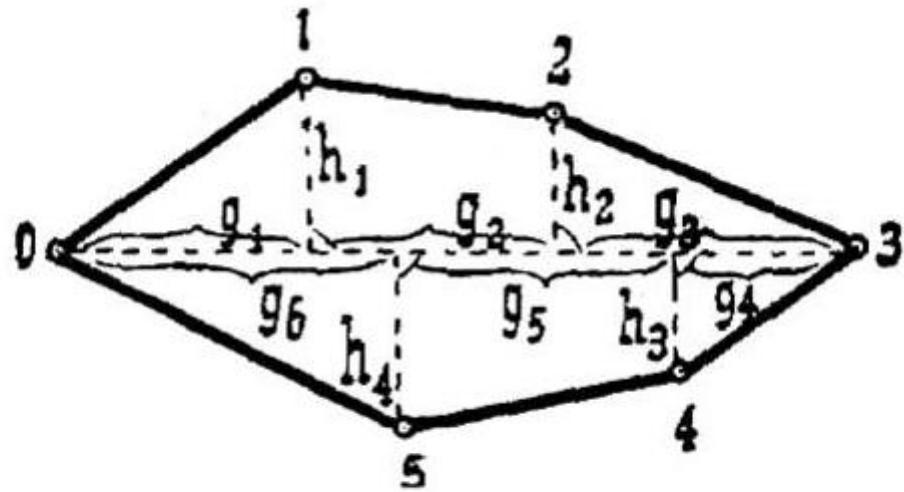


Fig. 6.

3.7 Flächenberechnung aus Maßzahlen

(2) Flächenformel nach Heron

Heron von Alexandria

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

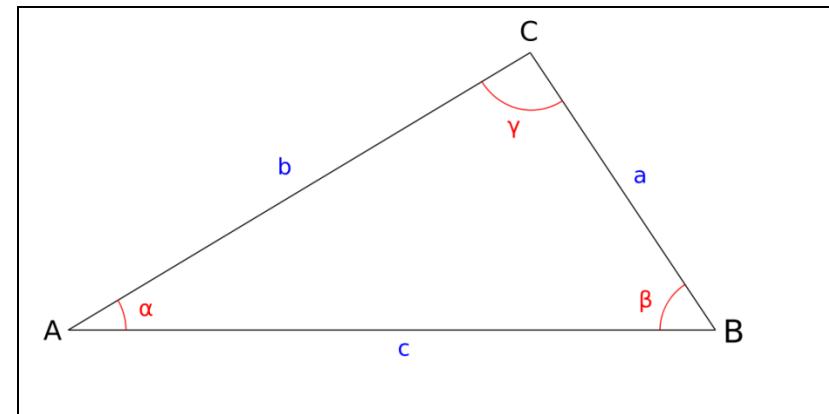
A = Fläche

s = halber Umfang

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

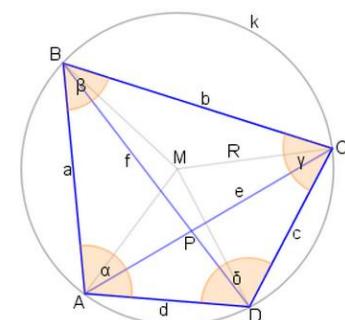
Die Formel von Heron lautet auch so:

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}$$



Spezialfall für den Flächeninhalt eines Sehnenvierecks

$$A = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)} \text{ (Formel von Brahmagupta)}$$



Heron von Alexandria

Übungsaufgabe

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (1)$$

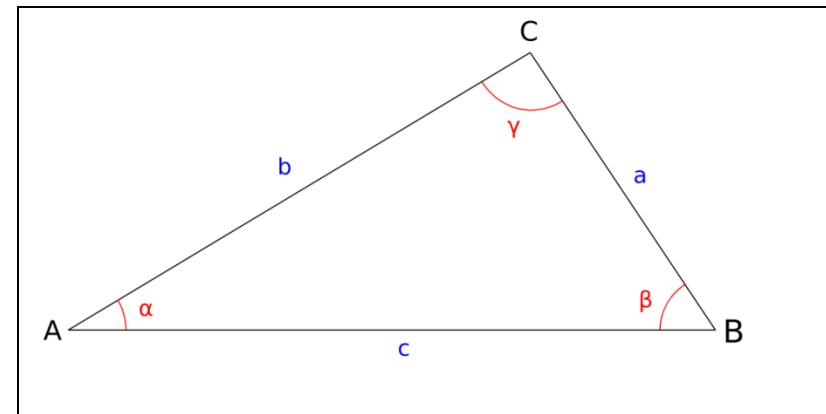
A = Fläche

s = halber Umfang

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

Die Formel von Heron lautet auch so:

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \quad (2)$$

**Berechnen Sie:**

(a=18, b=10,2956, c=15,811)

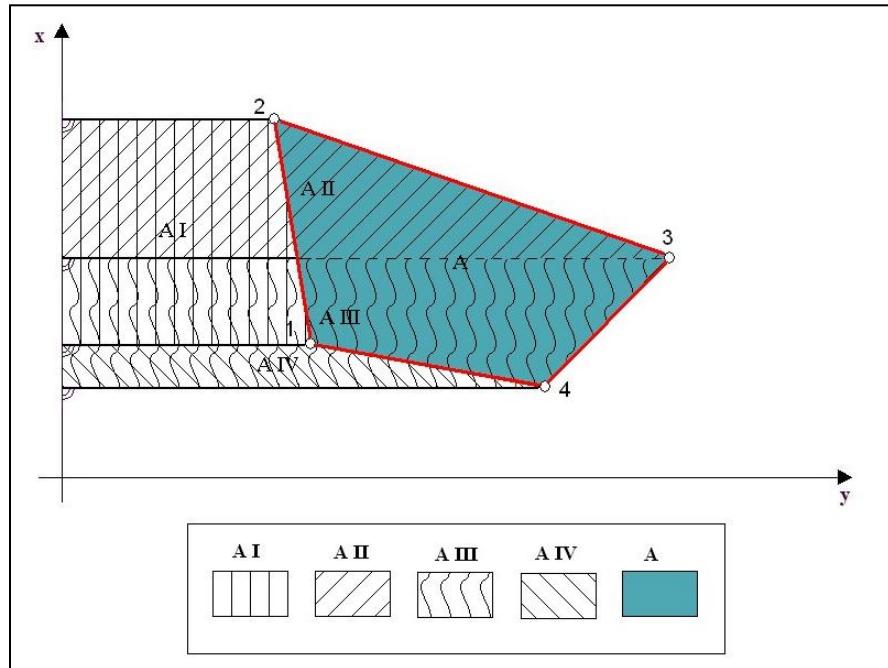
- halben Umfang s
- Flächeninhalt A nach Formel 1
- Flächeninhalt A nach Formel 2



3.7 Flächenberechnung aus Maßzahlen

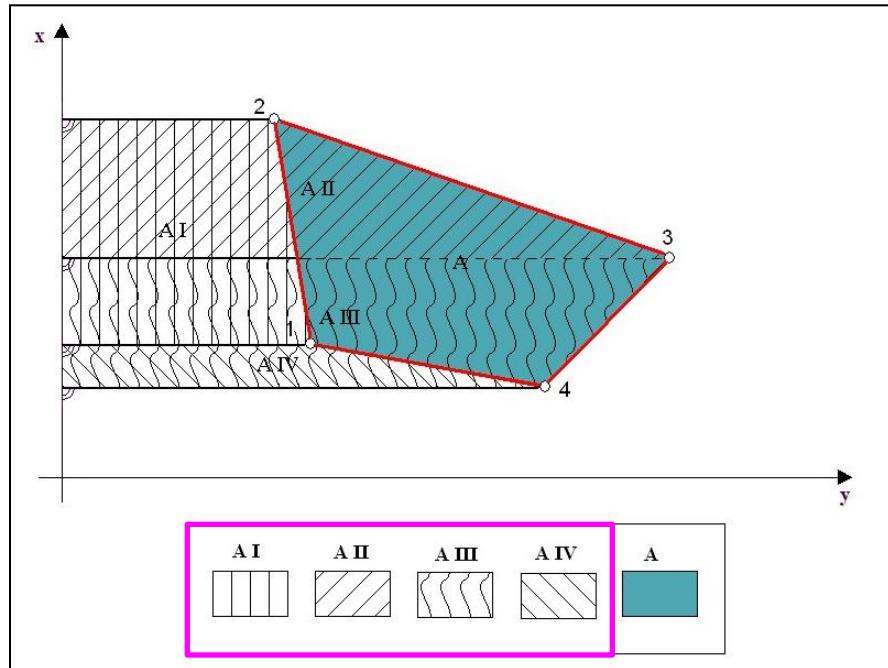
(3) Flächenberechnung aus Koordinaten (Gaußsche Trapezformel)

Gaußsche Trapezformel



$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

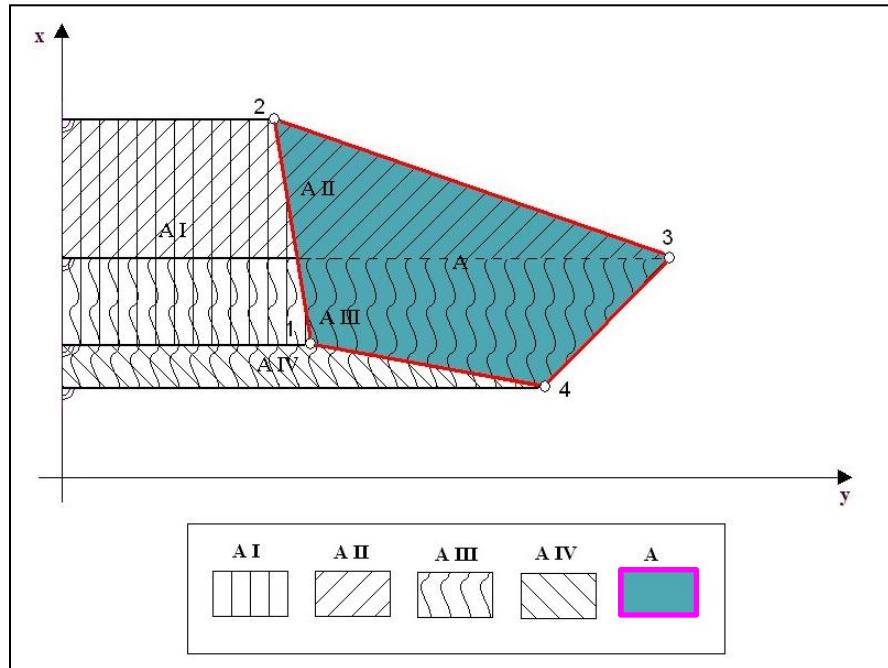
Gaußsche Trapezformel



$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} , so erhält man folgende Formel

Gaußsche Trapezformel

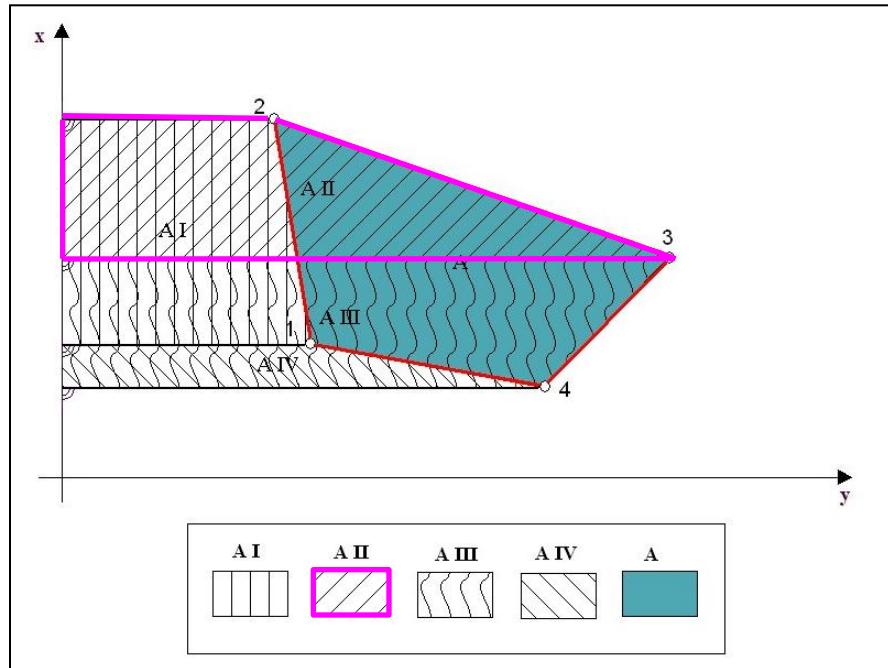


$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} , so erhält man folgende Formel

- $\boxed{A} = A_{II} + A_{III} - A_I - A_{IV}$

Gaußsche Trapezformel

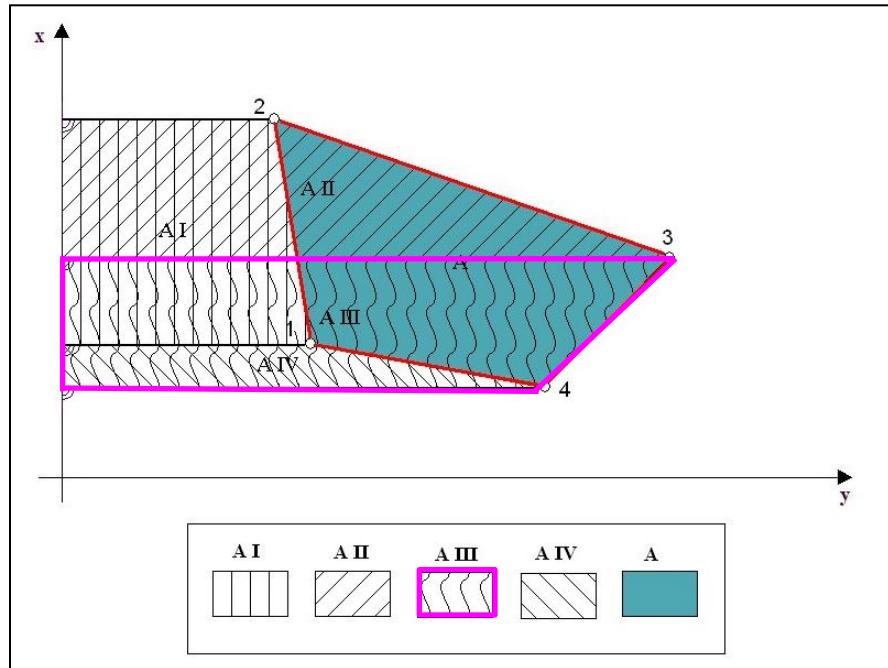


$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} , so erhält man folgende Formel

- $A = \boxed{A_{II}} + A_{III} - A_I - A_{IV}$

Gaußsche Trapezformel

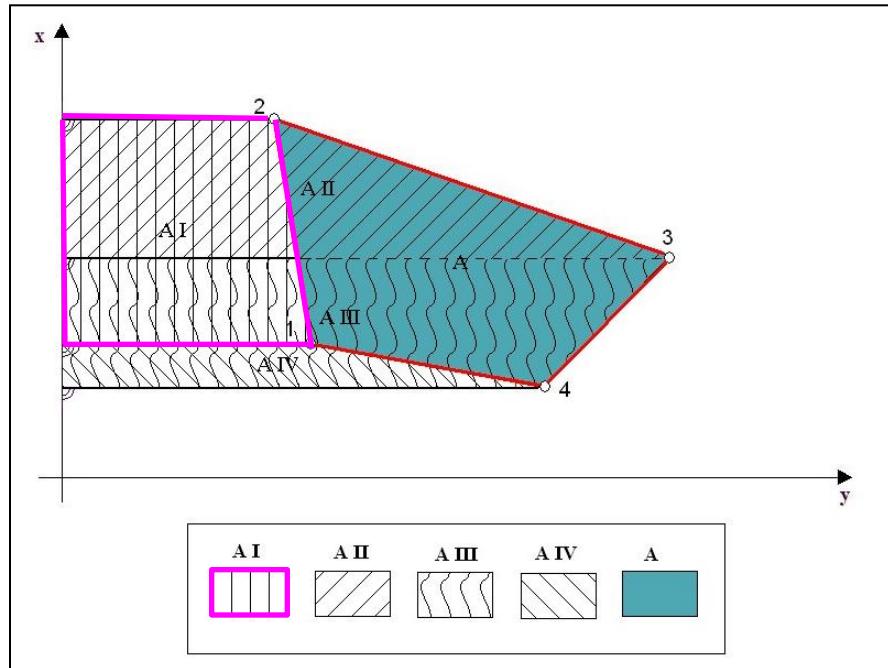


$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} , so erhält man folgende Formel

- $A = A_{II} + \boxed{A_{III}} - A_I - A_{IV}$

Gaußsche Trapezformel

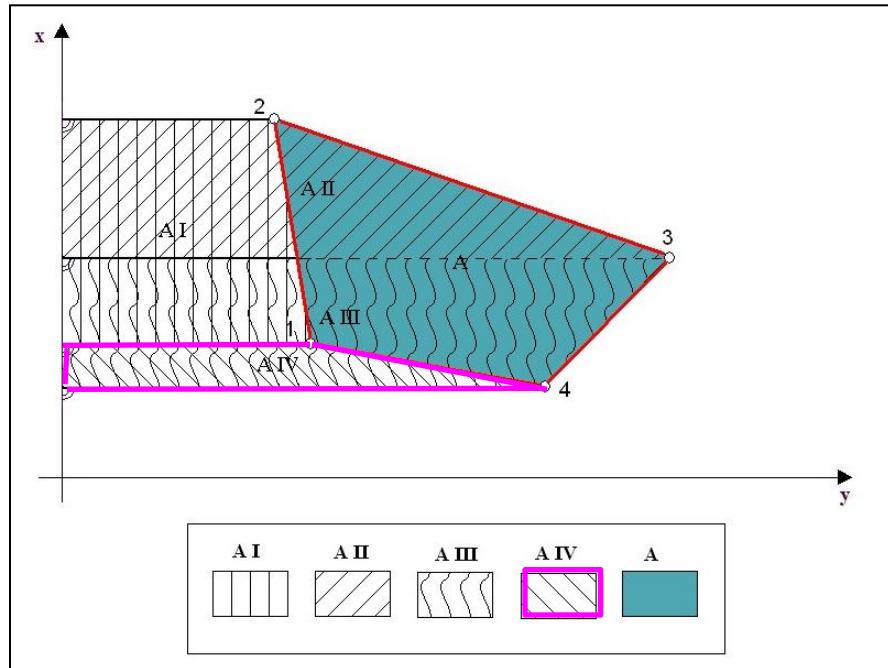


$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} , so erhält man folgende Formel

- $A = A_{II} + A_{III} - \boxed{A_I} - A_{IV}$

Gaußsche Trapezformel

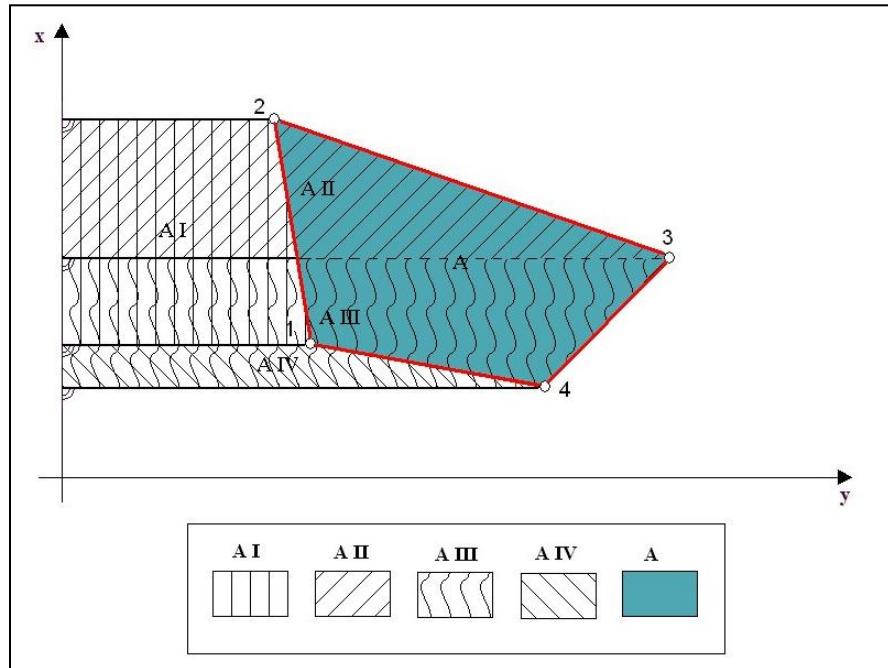


$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} , so erhält man folgende Formel

- $\bullet A = A_{II} + A_{III} - A_I - A_{IV}$

Gaußsche Trapezformel

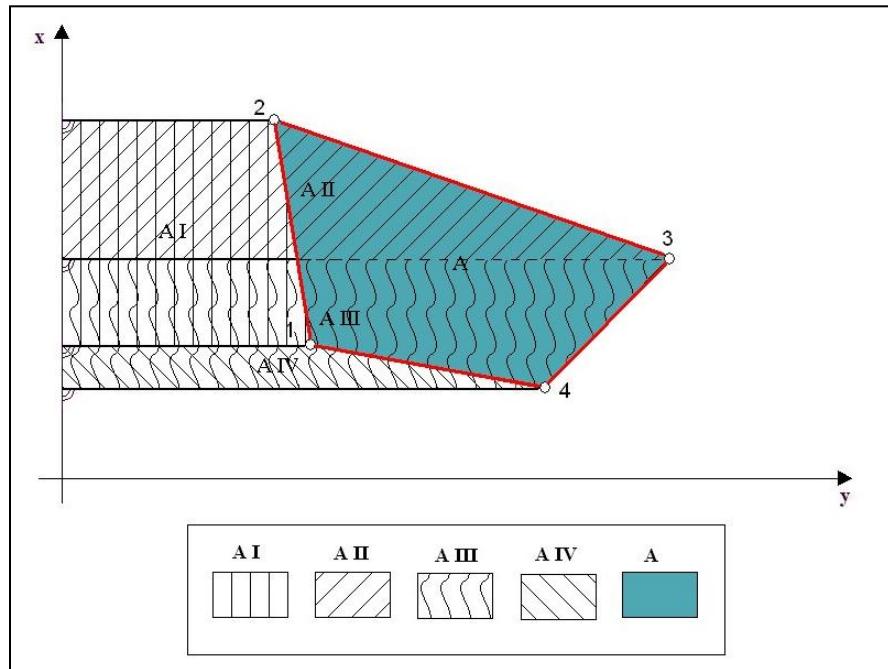


$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} , so erhält man folgende Formel

- $A = A_{II} + A_{III} - A_I - A_{IV}$

Gaußsche Trapezformel



$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

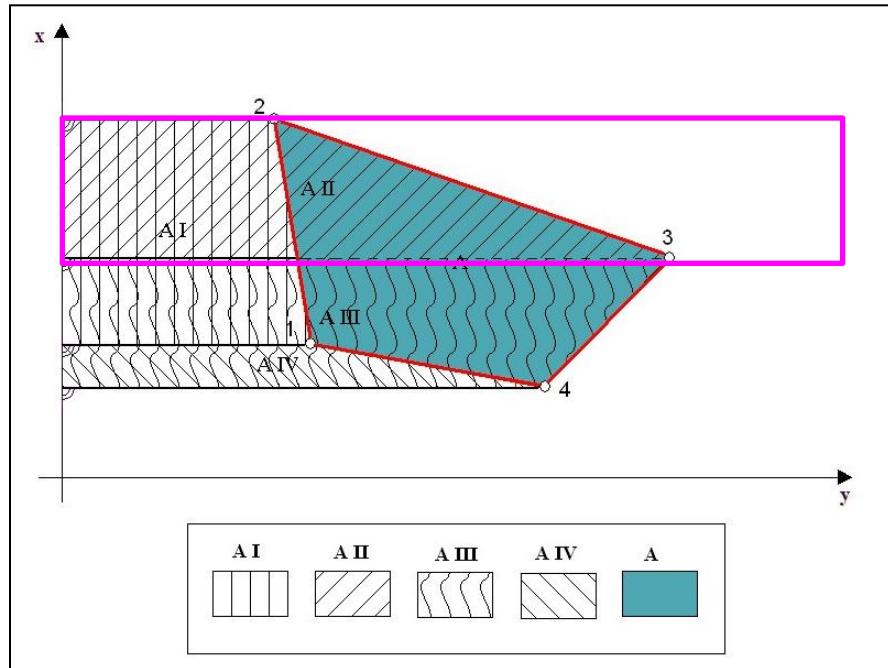
Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} , so erhält man folgende Formel

- $A = A_{II} + A_{III} - A_I - A_{IV}$

Somit ist

- $2A = (y_2+y_3)(x_2-x_3) + (y_3+y_4)(x_3-x_4) - (y_2+y_1)(x_2-x_1) - (y_1+y_4)(x_1-x_4).$

Gaußsche Trapezformel



$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

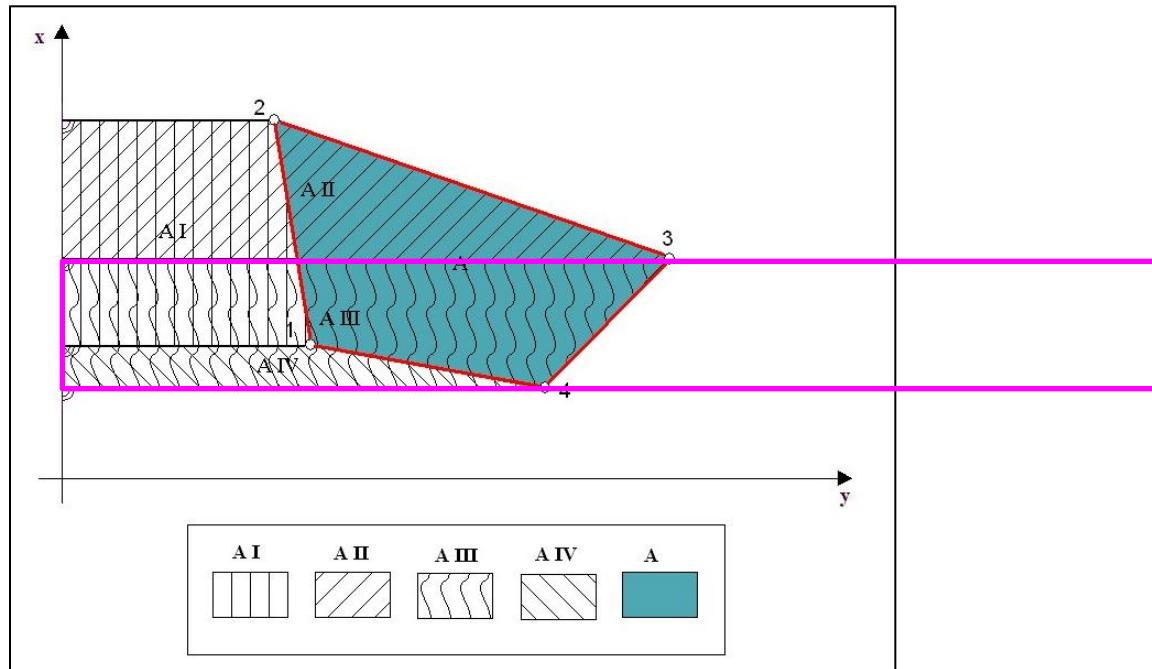
Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} , so erhält man folgende Formel

- $A = A_{II} + A_{III} - A_I - A_{IV}$

Somit ist

- $2A = (y_2+y_3)(x_2-x_3) + (y_3+y_4)(x_3-x_4) - (y_2+y_1)(x_2-x_1) - (y_1+y_4)(x_1-x_4)$.

Gaußsche Trapezformel



$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

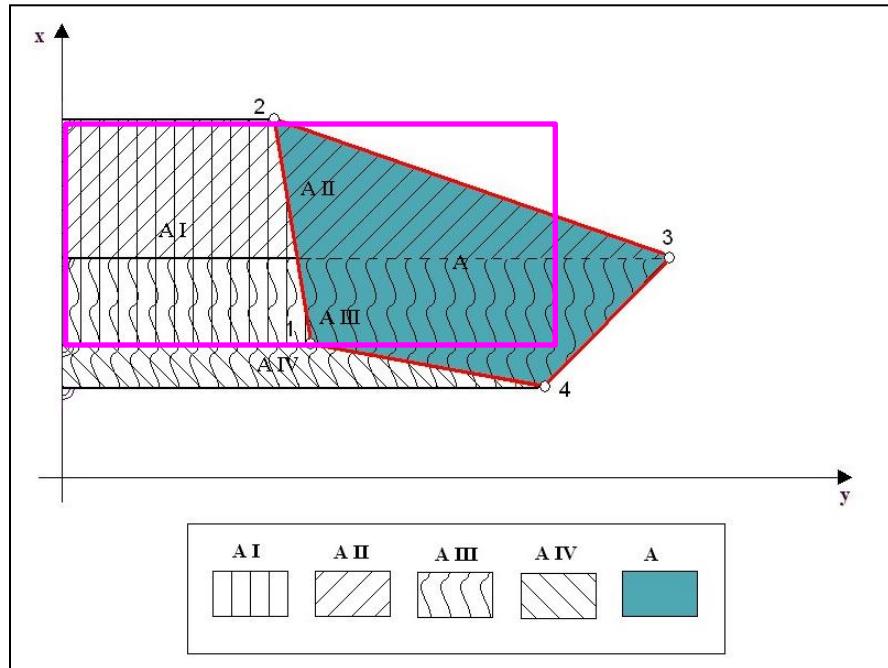
Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} , so erhält man folgende Formel

- $A = A_{II} + A_{III} - A_I - A_{IV}$

Somit ist

- $\underline{2A} = (y_2+y_3)(x_2-x_3) + (y_3+y_4)(x_3-x_4) - (y_2+y_1)(x_2-x_1) - (y_1+y_4)(x_1-x_4).$

Gaußsche Trapezformel



$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

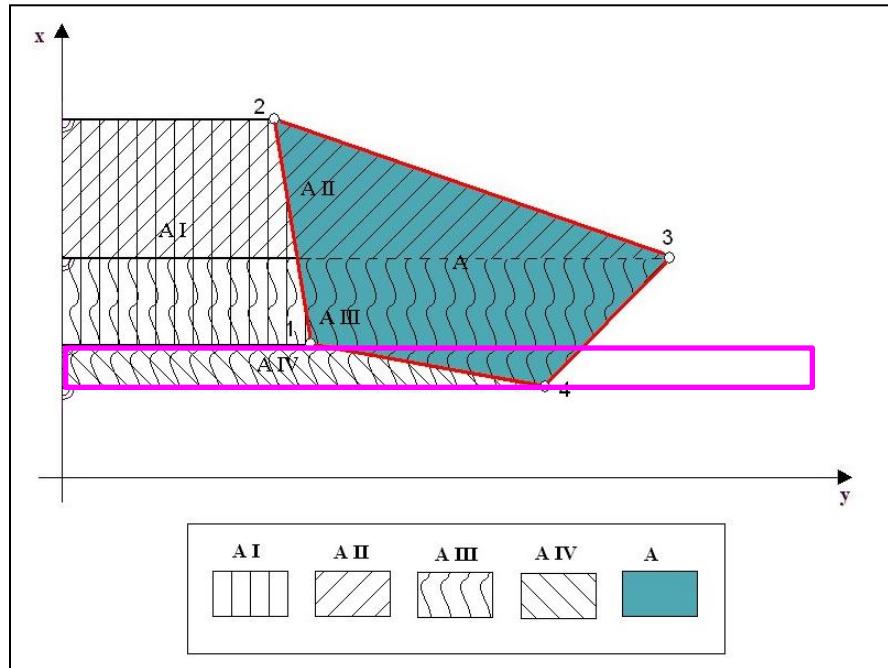
Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} , so erhält man folgende Formel

- $A = A_{II} + A_{III} - A_I - A_{IV}$

Somit ist

- $2A = (y_2+y_3)(x_2-x_3) + (y_3+y_4)(x_3-x_4) - (y_2+y_1)(x_2-x_1) - (y_1+y_4)(x_1-x_4)$.

Gaußsche Trapezformel



$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

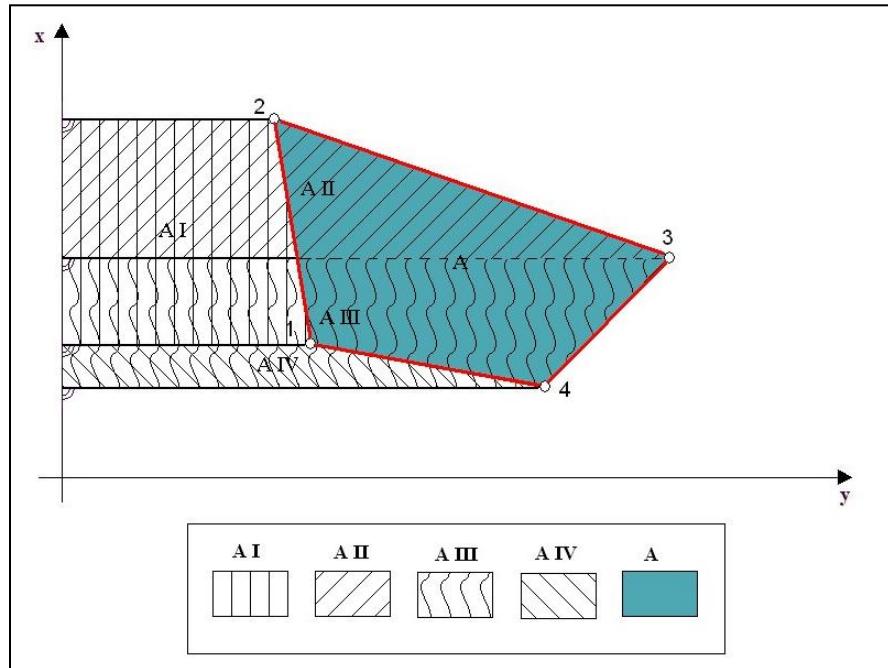
Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} , so erhält man folgende Formel

- $A = A_{II} + A_{III} - A_I - A_{IV}$

Somit ist

- $2A = (y_2+y_3)(x_2-x_3) + (y_3+y_4)(x_3-x_4) - (y_2+y_1)(x_2-x_1) - (y_1+y_4)(x_1-x_4)$.

Gaußsche Trapezformel



$$2A = (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_4 - x_1)(y_4 + y_1)$$

$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} , so erhält man folgende Formel

- $A = A_{II} + A_{III} - A_I - A_{IV}$

Somit ist

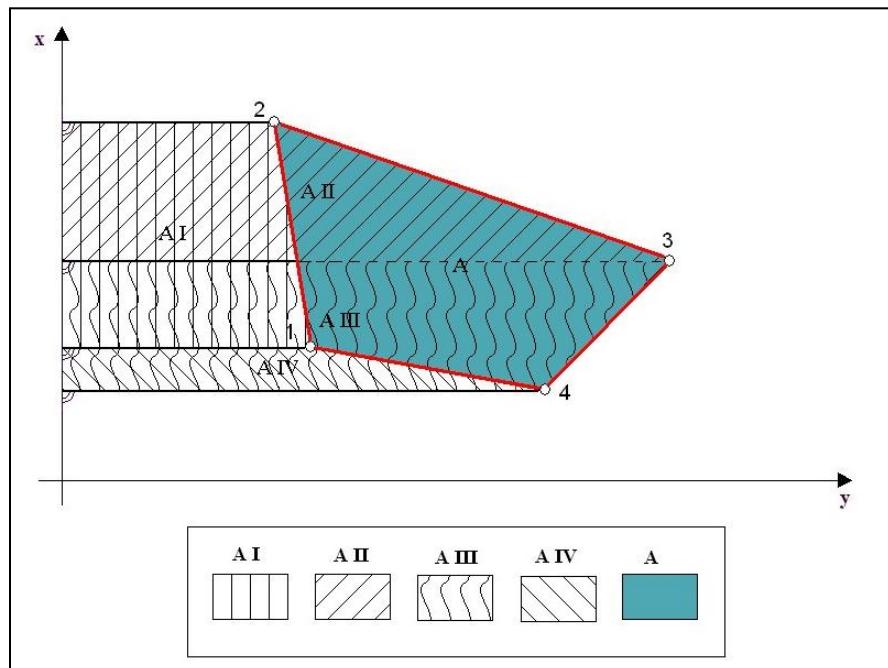
- $2A = (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_3 + y_4)(x_3 - x_4) - (y_2 + y_1)(x_2 - x_1) - (y_1 + y_4)(x_1 - x_4)$.

Setzt man jedoch die gegebenen Rechts- und Hochwerte vorzeichentreu in die zuerst genannte Formel ein, so ergibt sich durch

- $2A = (y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_3 + y_4)(x_3 - x_4) + (y_4 + y_1)(x_4 - x_1)$

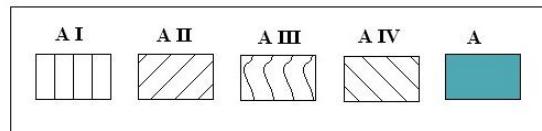
ebenfalls die gesuchte Einzelfläche.

Gaußsche Trapezformel



Übungsaufgabe

Berechnen Sie den Flächeninhalt nach der Gaußschen Trapezformel!



$$2A = \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

$$\begin{array}{ll} Y_1=5 & x_1=3 \\ Y_2=4 & x_2=7 \\ Y_3=11 & x_3=5 \\ Y_4=10 & x_4=2 \end{array}$$



