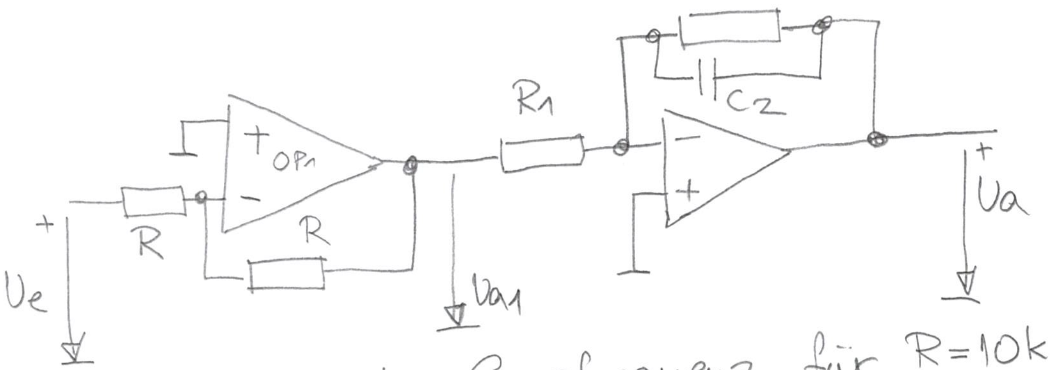
Aufgabe Messtechnik

Bestimmen sie die Übertragungsfunktion $\frac{U_a(s)}{U_e(s)}$. Um welche Funktion handelt es sich? Die OPs sind als ideal zu betrachten!

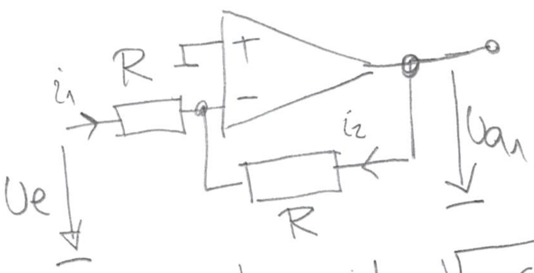


Bestimmen Sie den Grenzfrequenz für $R = 10\,k\Omega$, $R_1 = 20\,k\Omega$, $R_2 = 50\,k\Omega$, $C_2 = 100\,nF$!

Lösung

* Die zwei OP-Schaltungen können separat betrachtet werden, da der Ausgangswiderstand von OP1 als Null angenommen ist. Dadurch ist keine Rückwirkung über R_1 auf U_{a1} möglich

OP1:



$$i_1 = \frac{U_e}{R} = -i_2$$

$$U_{a1} = i_2 \cdot R = -i_1 \cdot R = -\frac{U_e}{R} \cdot R \Rightarrow u_a(t) = -U_e(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$U_a(s) = -U_e(s)$$

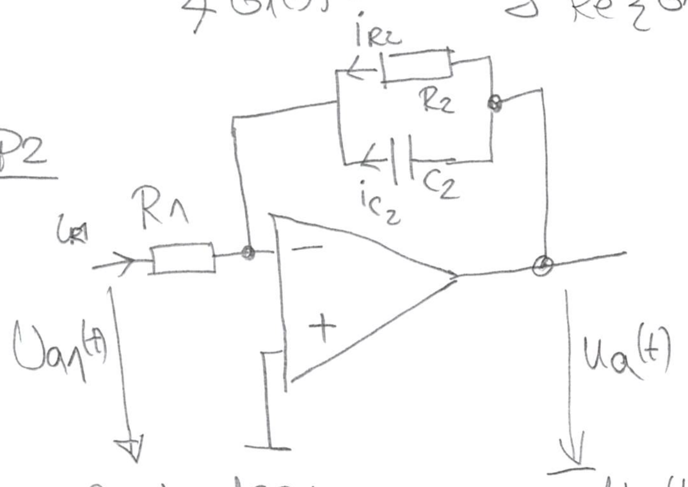
$$G_1(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = -1$$

Frequenzgang: $s = j\omega$

$$|G_1(s)| = \sqrt{Re\{G_1(j\omega)\}^2 + Im\{G_1(j\omega)\}^2} = 1$$

$$\sphericalangle G_1(s) = \arctan \frac{Im\{G_1(s)\}}{Re\{G_1(s)\}} = \arctan(-0) = -180^\circ$$

OP2



$$i_{R_1} = \frac{u_{a1}}{R_1} = -(i_{R_2} + i_{C_2})$$

$$u_a(t) = i_{R_2} \cdot R_2 \Rightarrow i_{R_2} = \frac{u_a(t)}{R_2}$$

$$u_a(t) = \frac{1}{C_2} \cdot \int_0^t i_{C_2}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow i_{C_2}(t) = C_2 \cdot \frac{du_a(t)}{dt}$$

folgt also: $\frac{u_{a1}}{R_1} = -\left(\frac{u_a(t)}{R_2} + C_2 \cdot \frac{du_a(t)}{dt}\right)$

Aufgabe Messtechnik, Seite ②

$$\frac{u_{a1}(t)}{R_1} = -\left(\frac{u_a(t)}{R_2} + C_2 \cdot \frac{du_a(t)}{dt}\right) \quad / \cdot R_2$$

$$u_a(t) + R_2 \cdot C_2 \cdot \frac{du_a(t)}{dt} = -u_{a1}(t) \cdot \frac{R_2}{R_1}$$ → entweder klassisch lösen für bekannten $u_{a1}(t)$

$\circ\!-\!\bullet \ \mathcal{L}$

$$U_a(s) + s \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot U_a(s) = -U_{a1}(s) \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

$$U_a(s) = -U_{a1}(s) \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot R_2 \cdot C_2}$$

$$G_2(s) = \frac{U_a(s)}{U_{a1}(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot R_2 \cdot C_2}$$

Frequenzgang: $s = j\omega$

$$G_2(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \cdot R_2 \cdot C_2} \cdot \frac{1 - j\omega R_2 C_2}{1 - j\omega R_2 C_2}$$

$$|G_2(j\omega)| = \sqrt{Re\{G_2(j\omega)\}^2 + Im\{G_2(j\omega)\}^2}$$

$$G_2(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1 - j\omega R_2 C_2}{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2} \cdot (1 - j\omega R_2 C_2)$$

$$|G_2(j\omega)| = +\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2} \cdot \sqrt{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2} = +\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2}}$$

$$\sphericalangle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{Im}{Re}\right) = -180° - \arctan\left(\frac{\omega R_2 C_2}{1}\right)$$

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

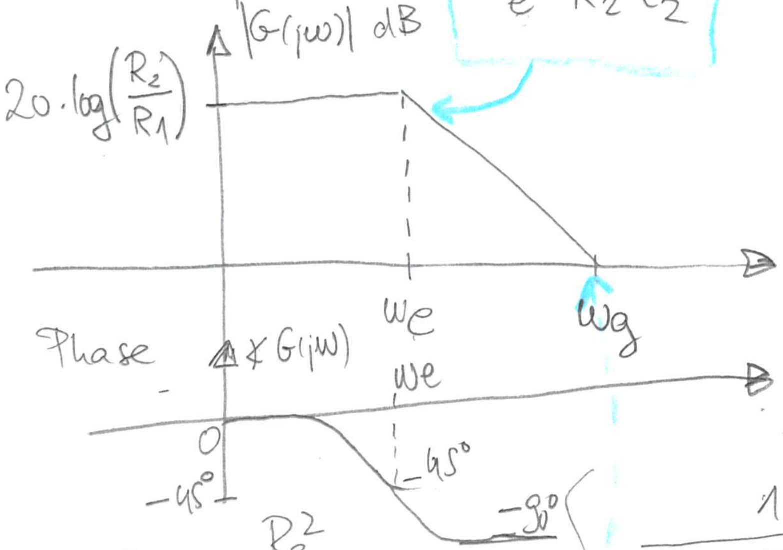
$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2}}$$

$$\sphericalangle G(j\omega) = \sphericalangle G_1(j\omega) + \sphericalangle G_2(j\omega) = \underbrace{-180° - 180°}_{-360° \to 0°} - \arctan\left(\frac{\omega \cdot R_2 \cdot C_2}{1}\right)$$

$$\sphericalangle G(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega \cdot R_2 \cdot C_2}{1}\right)$$

Aufgabe Messtechnik, seite 3

- Es handelt sich um einen Tiefpass-Filter mit dem Eckfrequenz $\boxed{\omega_e = \frac{1}{R_2 \cdot C_2}}$ bzw. $f_e = 2\pi \cdot \omega = \frac{2\pi}{R_2 \cdot C_2}$



für den Grenzfrequenz ist die Verstärkung 1

$$|G(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\omega_g^2 R_2^2 \cdot C_2^2}} = 1$$

folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\omega_g^2 R_2^2 C_2^2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\sqrt{1+\omega_g^2 R_2^2 C_2^2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$1+\omega_g^2 R_2^2 C_2^2 = \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

$\Leftarrow$

$$\omega_g^2 \cdot R_2^2 \cdot C_2^2 = \frac{R_2^2}{R_1^2} - 1$$

$$\omega_g^2 = \frac{\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2}}{R_2^2 \cdot C_2^2}$$

$$\omega_g^2 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 \cdot R_2^2 \cdot C_2^2}$$

$$\boxed{\omega_g = \sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 \cdot R_2^2 \cdot C_2^2}}}$$

die Phase ist beim Grenzfrequenz

$$\sphericalangle G(j\omega_g) = -\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 \cdot \cancel{R_2^2} \cdot \cancel{C_2^2}}} \cdot \cancel{R_2}\cancel{C_2}\right) = -\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2}}\right)$$

$$\sphericalangle G(j\omega_g) = -\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2}}\right) = -\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1}\right)$$

$\sphericalangle G(\omega_g)$ ist nur von $\frac{R_2}{R_1}$ abhängig, aber nicht von C_2!

Für die angegebene Daten:

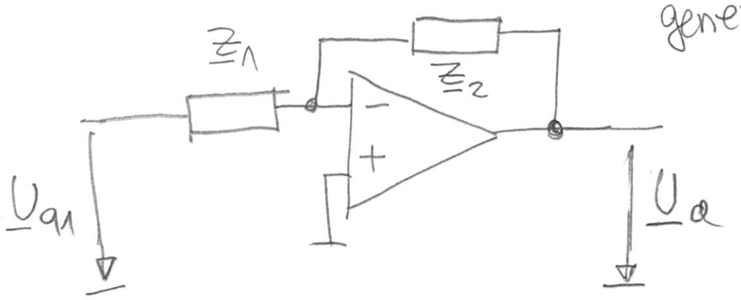
$\omega_e = \frac{1}{R_2 C_2} = 200\,\frac{rad}{s}$, $f_e \cong 1256$ Hz

$\omega_g = 979{,}8\,\frac{rad}{s}$, $f_g \cong 6156$ Hz

$\sphericalangle G(j\omega_g) = -1{,}3694\,\mathrm{rad} = -78{,}4630°$

Diskussion Bestimmung ÜF OP2

man kann auch anders vorgehen: wie im GET und dann generalisieren



$$\underline{U}_a = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \cdot \underline{U}_{a1}$$

$$\underline{G} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_{a1}} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

$$\underline{Z}_1 = R_1$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{R_2}{j\omega C_2 \cdot R_2 + 1}$$

$$\underline{G}_2 = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{R_2}{j\omega C_2 R_2 + 1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{j\omega C_2 R_2 + 1} = G_2(j\omega)$$

$$G_2(s) = G_2(j\omega)\Big|_{j\omega = s} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{s \cdot C_2 \cdot R_2 + 1}$$

Ergebnis ist natürlich identisch mit dem der aus Differentialgleichungen gewonnen wurde!

$$G_2(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{j\omega C_2 R_2 + 1}$$

$$G_2(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{s \cdot C_2 \cdot R_2 + 1}$$

$\Big\{$ weiter für Frequenzgang wie früher

Ein Matlab-Script zu Berechnung:

```
%% Zu Berechnung von Fg
clc;
R2=50e3;
C2=100e-9;
R1=10e3;
we=1/(R2*C2)
fe=we*2*pi
wg=sqrt((R2^2-R1^2)/(R1^2*R2^2*C2^2))
fg=wg*2*pi
phg=-atan(sqrt((R2^2-R1^2)/R1^2))
phgdeg=phg*180/pi
```

Und die Ergebnisse:

```
we =

   200

fe =

  1.2566e+003

wg =

  979.7959

fg =

  6.1562e+003

phg =

   -1.3694

phgdeg =

  -78.4630

>>
```

Matlab-Script zu Frequenzgang G(s)

```
clc;
R2=50e3;
C2=100e-9;
R1=10e3;
Gs=tf([R2/R1],[R2*C2, 1]);
bode(Gs);
```

Diagramm der Frequenzgang G(s)