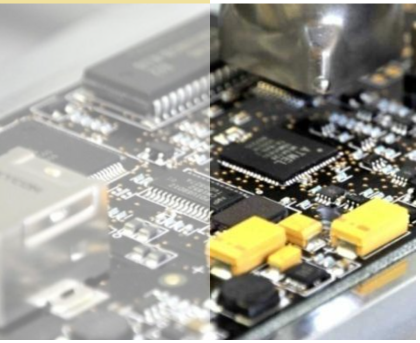
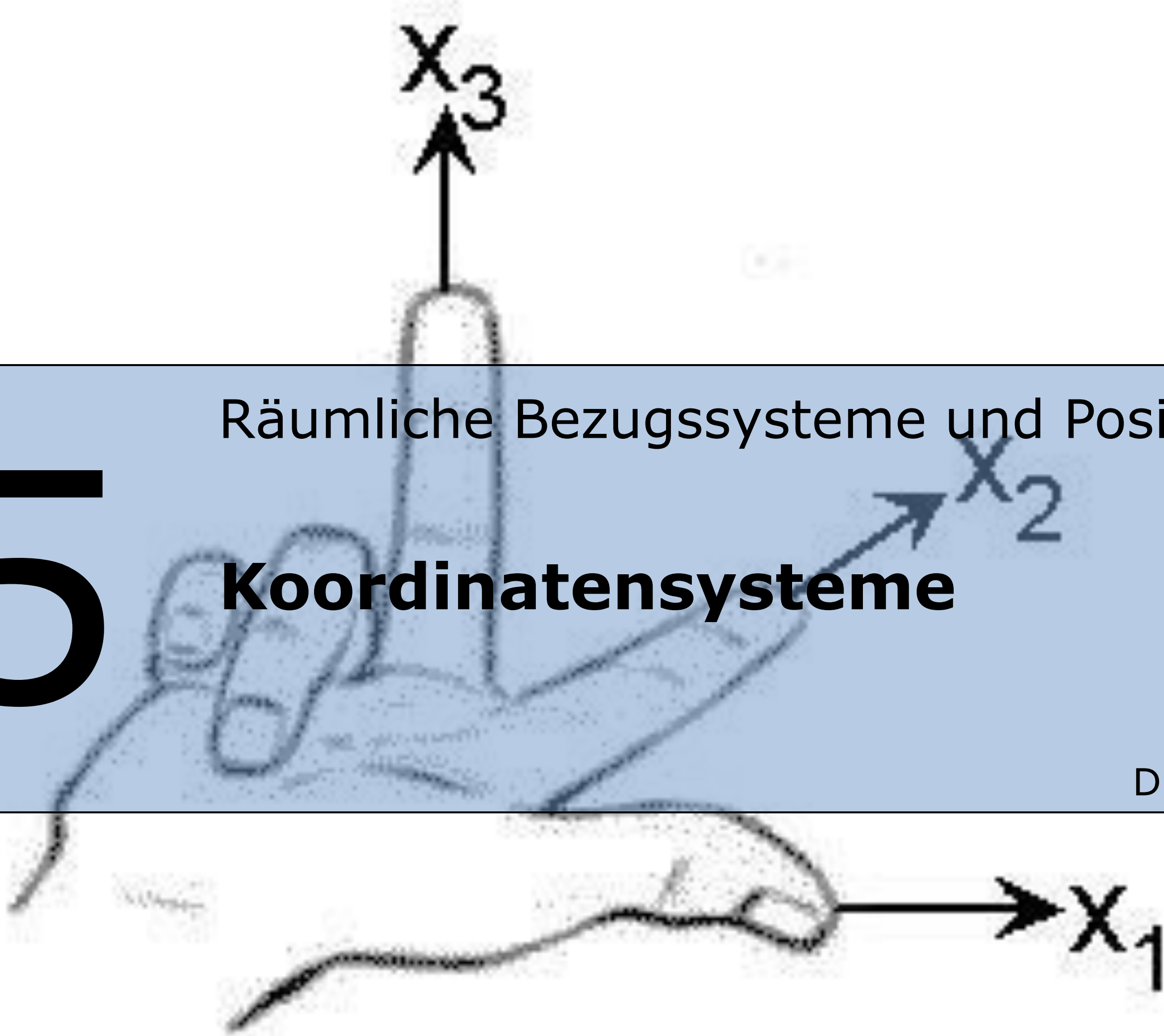
HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences




Modul O-60: **Räumliche Bezugssysteme und Positionierung**

Dr. rer. nat. Patrick Reidelstürz (Diplom Forstwirt)



Räumliche Bezugssysteme und Positionierung

05 **Koordinatensysteme**

Dr. Patrick Reidelstürz

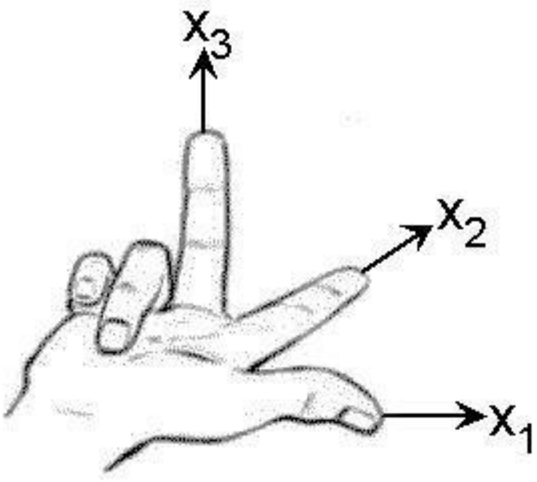
Koordinatensysteme

Koordinatensysteme

Grundlagen:

- zweidimensional, dreidimensional, n-dimensional
- **kartesisch** (alle 3 Koordinatenachsen stehen rechtwinklig aufeinander) und **polar**
- rechtshändig, linkshändig

→ Beispiel: dreidimensionales rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem:



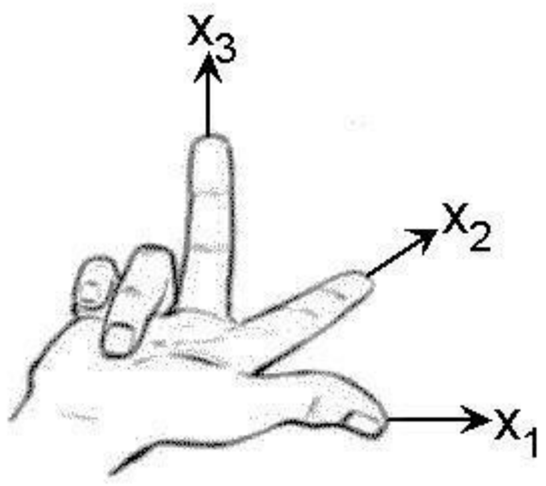
Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php

Koordinatensysteme

Grundlagen:

- zweidimensional, dreidimensional, n-dimensional
- **kartesisch** (alle 3 Koordinatenachsen stehen rechtwinklig aufeinander) und **polar**
- rechtshändig, linkshändig

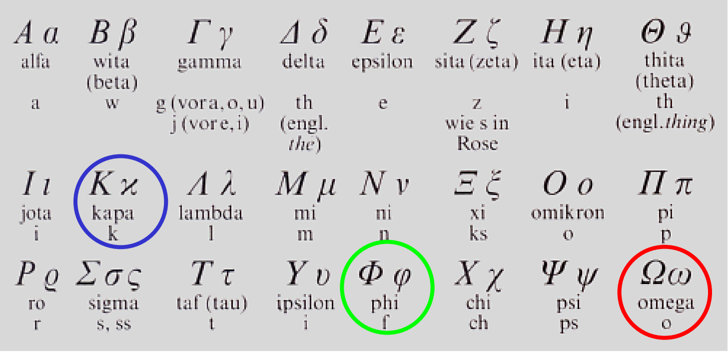
→ Beispiel: dreidimensionales rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem:



Winkel um x_3: Kappa

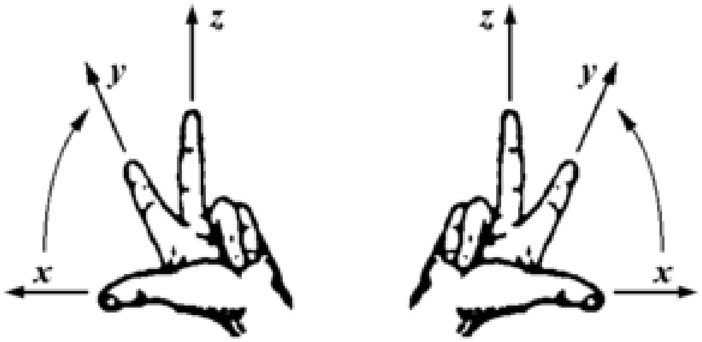
Winkel um x_2: Phi

Winkel um x_1: Omega



Α α alfa a	Β β wita (beta) w	Γ γ gamma g (vora, o, u) j (vore, i)	Δ δ delta th (engl. *the*)	Ε ε epsilon e	Ζ ζ sita (zeta) z wie s in Rose	Η η ita (eta) i	Θ ϑ thita (theta) th (engl. *thing*)
Ι ι jota i	Κ ϰ kapa k	Λ λ lambda l	Μ μ mi m	Ν ν ni n	Ξ ξ xi ks	Ο ο omikron o	Π π pi p
Ρ ϱ ro r	Σ σ ς sigma s, ss	Τ τ taf (tau) t	Υ υ ipsilon i	Φ φ phi f	Χ χ chi ch	Ψ ψ psi ps	Ω ω omega o

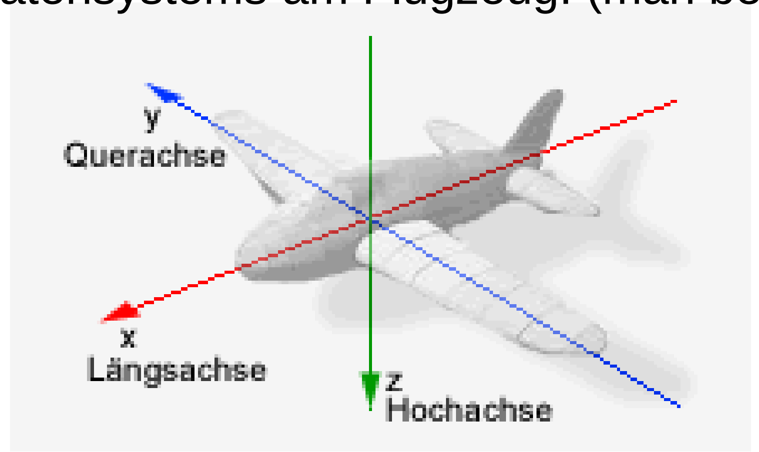
Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php



Linkshändiges Koordinatensystem
Mathematisch negativer Drehsinn
= Geodätisch positiver Drehsinn

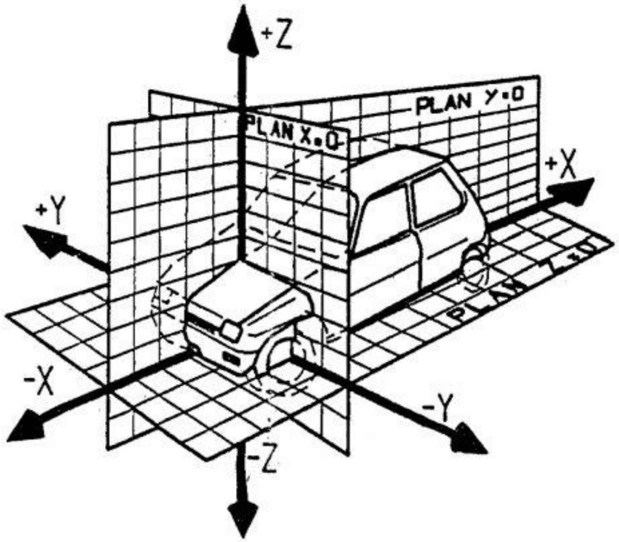
Rechtshändiges Koordinatensystem
Mathematisch positiver Drehsinn
= Geodätisch negativer Drehsinn

Definition des Koordinatensystems am Flugzeug: (man beachte z!)



Quelle: http://www.nva-flieger.de/tl/index.php/theorie/aerodynamik/hs/grundlagen.html

Definition des Koordinatensystems am Fahrzeug: (man beachte z!)



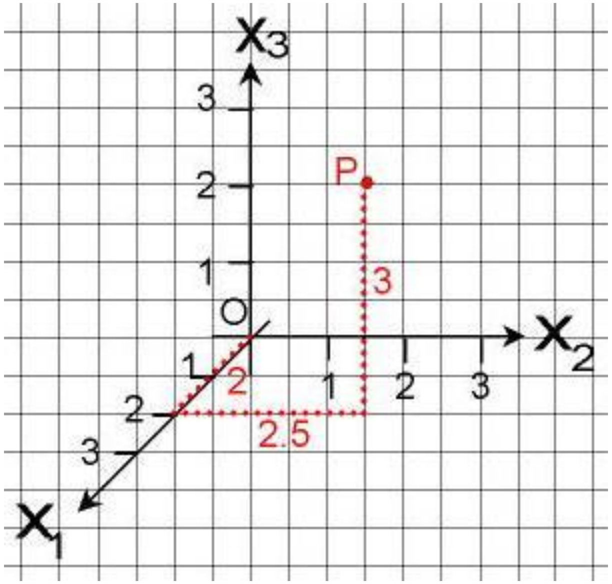
Quelle http://ww3.cad.de/foren/ubb/uploads/Michael+Puschner/090311-FahrzeugKoordinatensystem.jpg

Punkte im Koordinatensystem

Am Kreuzungspunkt der Koordinatenachsen liegt der Ursprung O (Origin)

Er definiert die Position (0/0/0), also die Ursprungskoordinaten

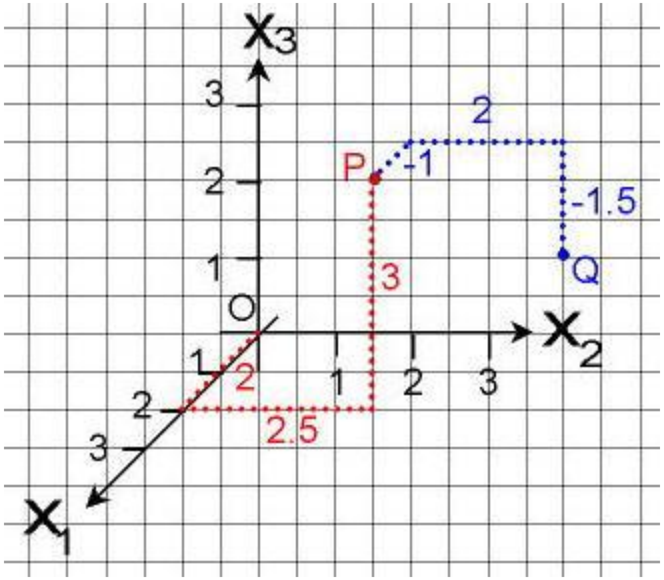
Welche Position hat der eingezeichnete Punkt?



Entsprechend der Koordinatenachsendefinition

hat der eingezeichnete Punkt die Koordinaten: (2/ 2,5/ 3)

Punktverschiebung im Koordinatensystem



P = (x1, x2, x3) = (2/ 2,5/ 3)

Welche Position hat der verschobene Punkt Q?

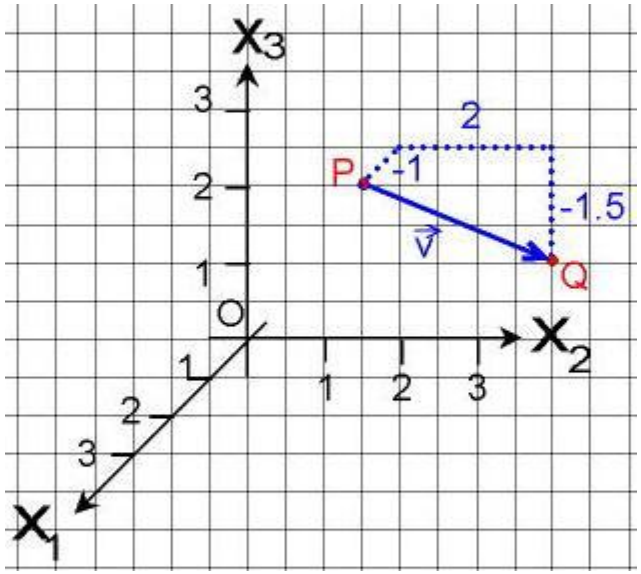
→ die x1-Koordinate wird um 1 verringert: x'1 = x1 - 1 = 1

→ die x2-Koordinate wird um 2 vergrößert: x'2 = x2 + 2 = 4.5

→ die x3-Koordinate wird um 1.5 verringert: x'3 = x3 - 1.5 = 1.5

Koordinaten des verschobenen Bildpunktes Q: (1/ 4.5/ 1.5)

Punktverschiebung im Koordinatensystem: Darstellung als Vektor



P = (2 / 2,5/   3)
$\vec{v}$ = (-1 / 2 / -1,5)

Q = (1 / 4,5 / 1,5)

P = (x1, x2, x3) = (2/ 2,5/ 3)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

→ in Richtung x1
→ in Richtung x2
→ in Richtung x3

→ Koordinaten des Bildpunktes Q: (1/ 4.5/ 1.5)

Beispiel:

Starten wir im Ursprung.

Merkregel zur Berechnung der Komponenten solcher Verschiebungspfeile:

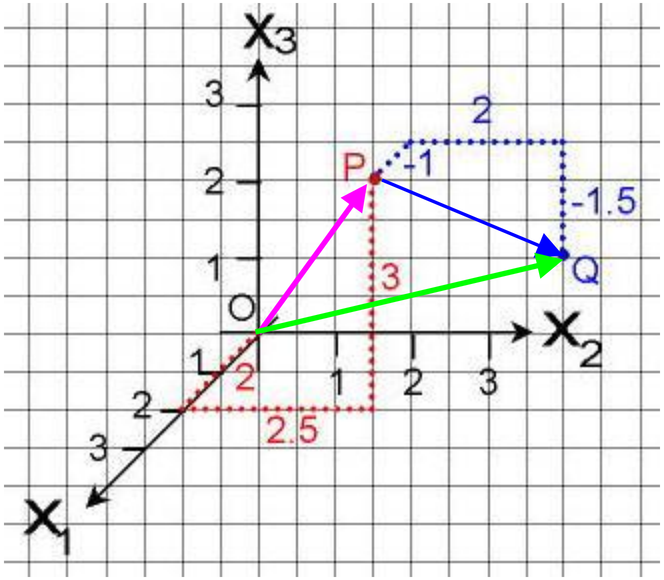
„Spitze minus Fuß“

Definition Ortsvektor:

Der Verschiebungspfeil, der den Ursprung zu einem Punkt p hin verschiebt.

Definition Verschiebung:

Komponenten des Ortsvektors, der an der Spitze des Verschiebungspfeils endet minus
die Komponenten des Ortsvektors, der am Fuß des Verschiebungspfeils endet.



Vorsicht:

Ortsvektoren und Verschiebungspfeile nicht verwechseln:

Ortsvektor	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1.5 \end{pmatrix}$	definiert die Lage eines Punktes (Zustand)

ist etwas anderes als der

Verschiebungspfeil	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1.5 \end{pmatrix}$	definiert die Richtung eines Verschiebungs-prozesses

Um Verwechslungen zu vermeiden gibt man den Verschiebungsvektor gerne mit Punktnamen an, bspw.:

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$$

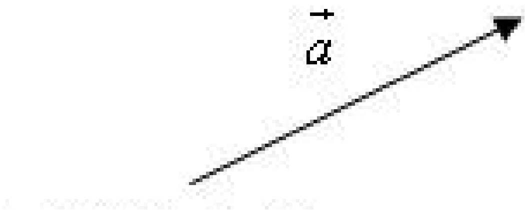
Vektoren

Analytische Geometrie:

Geometrische Objekte werden mit analytischen Funktionen verknüpft.

Geometrische Aufgabenstellungen werden rechnerisch gelöst.

„Vektor“ ist ein elementarer Begriff in der analytischen Geometrie.

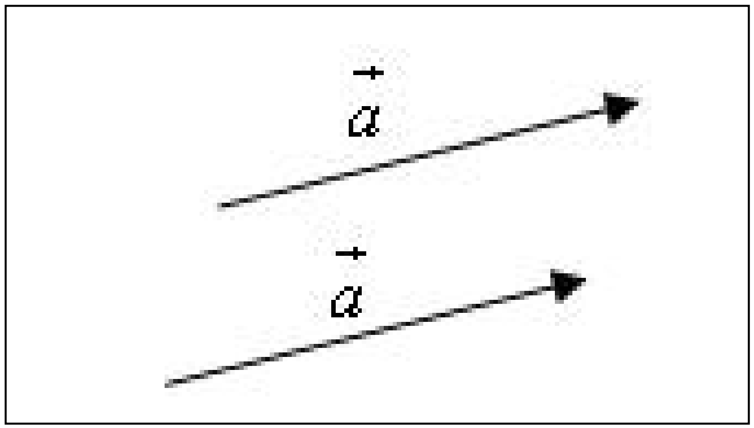


Einen Vektor kann man sich als Pfeil vorstellen.

Pfeile können sich unterscheiden:

- in der Länge

- in der Orientierung



2 vektorgleiche Pfeile

Die Pfeile sind Repräsentanten des Vektors $\vec{a}$

Es gibt eine ganze Reihe vektorgleiche Pfeile,

da man die Vektoren beliebig in der Ebene verschieben kann.

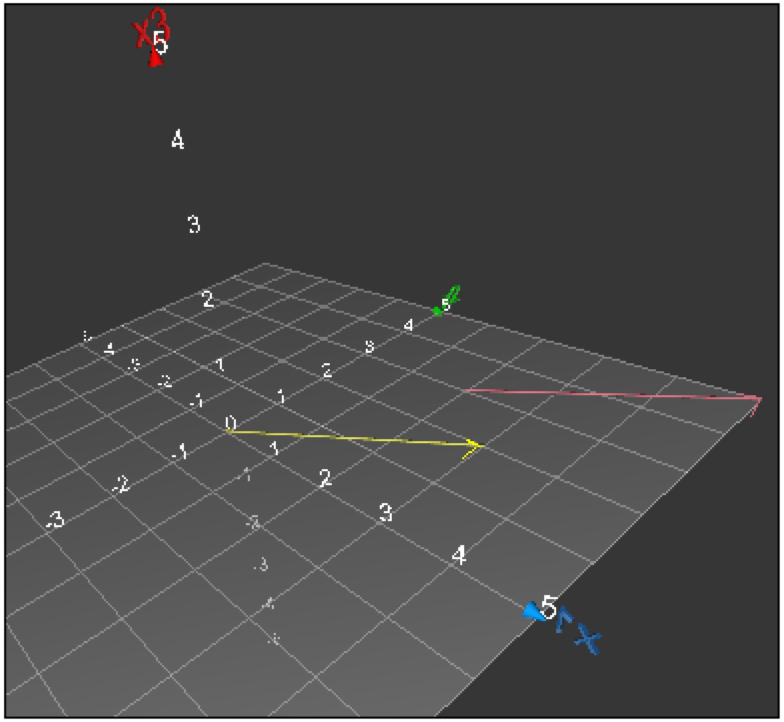
Definition:

Unter einem Vektor versteht man die Menge aller zu einem Pfeil vektorgleichen Pfeile. Pfeile heißen genau dann vektorgleich, wenn sie:

- gleich lang,
- parallel und
- gleich orientiert sind

Erfassen von Vektoren durch Zahlen

Vektoren kann man durch Koordinaten in Form einer Matrix darstellen:



Zum gelben Vektor $\overrightarrow{a_1}$:

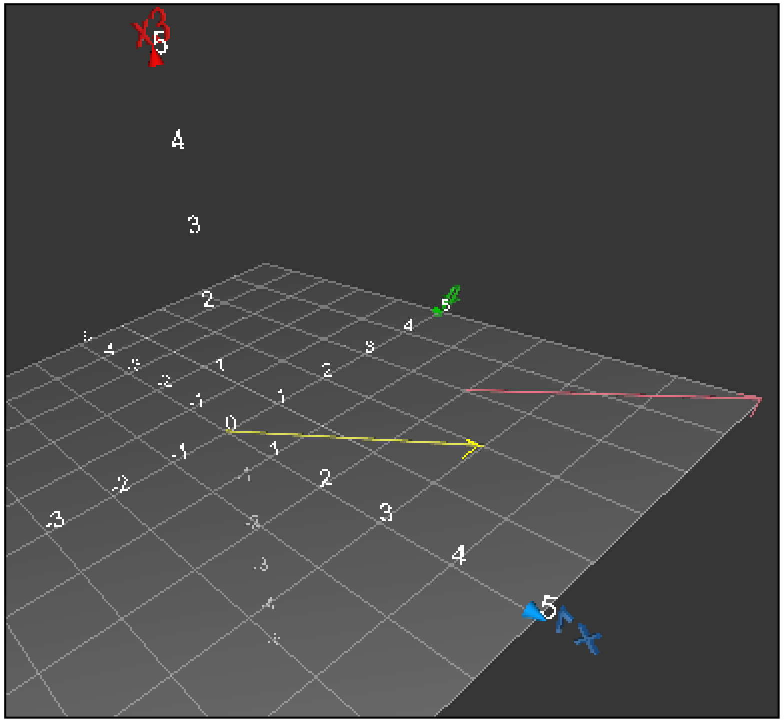
Der Vektor beginnt bei dem Punkt O (0|0) und endet beim Punkt B (3|2).

Um den Vektor durch Zahlen zu erfassen, müssen wir folgende Rechnung durchführen:

$$\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Vektoren kann man durch eine Koordinatendarstellung in Form einer Matrix darstellen



Für den $\boxed{\text{roten Vektor } \overrightarrow{a_2}}$ gilt damit:

Punkte C (2|3) und D (5| 5)

$$\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

patrick.reidelstuerz@hdu-deggendorf.de

Vektoren kann man durch eine Koordinatendarstellung in Form einer Matrix darstellen

Wir halten fest:

Satz:

1) Sind $A(a_1 \mid a_2)$ und $B(b_1 \mid b_2)$ zwei Punkte der Ebene und ist der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ ein Vertreter des Vektors $\vec{v}$, so gilt:

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Vektoren kann man durch eine Koordinatendarstellung in Form einer Matrix darstellen

Wir halten fest:

Satz:

1) Sind A $(a_1 \mid a_2)$ und B $(b_1 \mid b_2)$ zwei Punkte der Ebene und ist der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ ein Vertreter des Vektors $\vec{v}$, so gilt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Merksatz: Die Berechnung Spitze – Fuß definiert den Vektor!

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Vektoren kann man durch eine Koordinatendarstellung in Form einer Matrix darstellen

Wir halten fest:

Satz:

1) Sind $A(a_1 | a_2)$ und $B(b_1 | b_2)$ zwei Punkte der Ebene und ist der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ ein Vertreter des Vektors $\vec{v}$, so gilt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Das gleiche gilt für den dreidimensionalen Raum:

2) Sind $A(a_1 | a_2 | a_3)$ und $B(b_1 | b_2 | b_3)$ zwei Punkte des Raumes und ist der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ ein Vertreter des Vektors $\vec{w}$, so gilt:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

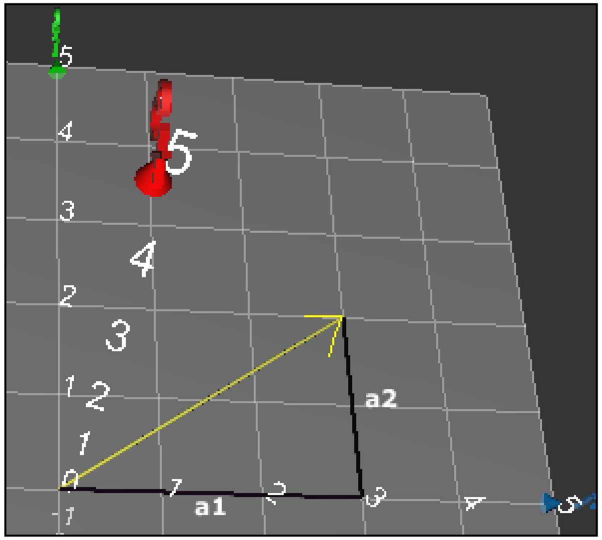
Merksatz: Die Berechnung Spitze – Fuß definiert den Vektor!

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Betrag eines Vektors

Betrag eines Vektors

Unter dem Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a}$ verstehen wir geometrisch die Länge des Vektors. Wir müssen nun nur eine "Formel" finden, mit der wir die Länge eines Vektors berechnen können. Der alte Pythagoras hilft uns da weiter:



Länge oder Betrag eines Vektors

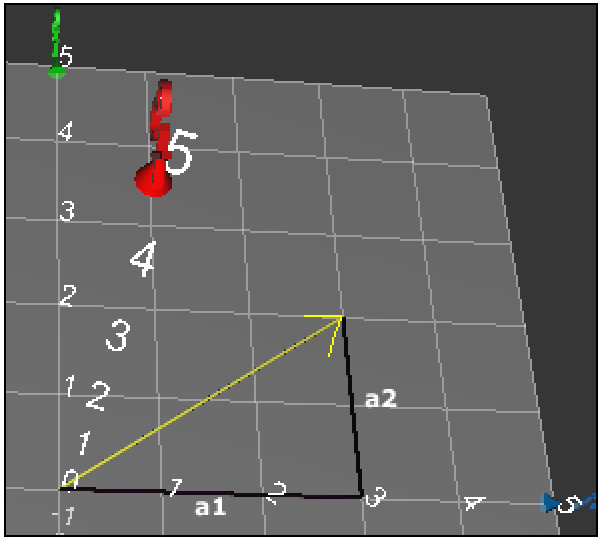
Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Betrag eines Vektors

Anwenden des Satzes von Pythagoras liefert:

$$|\vec{a}|^2 = a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}$$

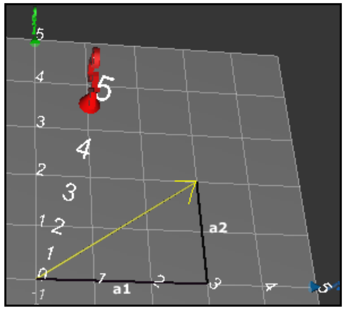
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}}$$



Länge oder Betrag eines Vektors

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Betrag eines Vektors



Beispiel:

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$

Uns interessieren in diesem Fall nur die positiven Ergebnisse, da eine Länge immer nur positive Werte annehmen kann bzw. eine Länge in gewissem Sinne auch nur als positive Zahl dargestellt wird.

Für räumliche Vektoren gilt entsprechend:

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Satz:
Für den Betrag ebener und räumlicher Vektoren gilt:

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ bzw. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Das heißt: Unter dem Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors verstehen wir die Maßzahl der Länge seiner Repräsentanten.

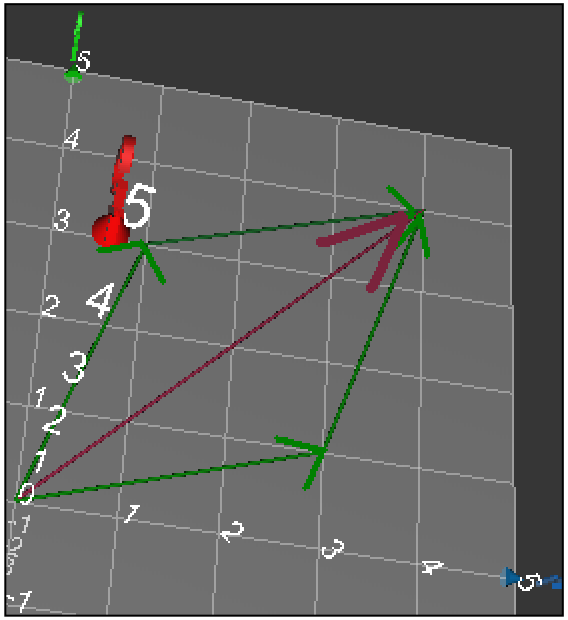
Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Rechnen mit Vektoren

Addition von Vektoren

Die geometrische Addition von Vektoren:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden zeichnerisch addiert, indem man je einen Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so aneinander legt, dass der Anfang des zweiten Pfeils mit der Spitze des ersten Pfeils übereinstimmt. Ein Repräsentant des Summenvektors $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ reicht dann vom Anfang des ersten Pfeils bis zur Spitze des zweiten Pfeils.



Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

In Koordinatenschreibweise des Summenvektors:

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3 \\ 3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die rechnerische Addition von Vektoren:

Zwei in Koordinatendarstellung gegebene Vektoren werden addiert, indem man ihre entsprechenden Koordinaten addiert.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

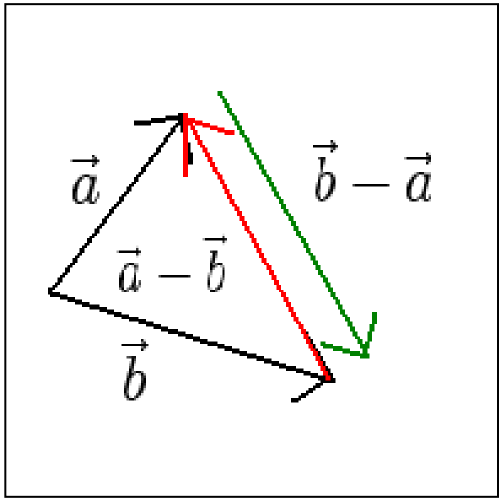
Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Addieren Sie zeichnerisch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Subtraktion von Vektoren



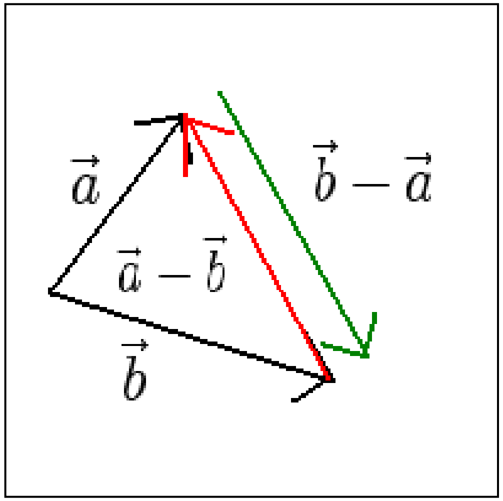
Wie kann man Vektoren geometrisch/zeichnerisch subtrahieren?

→ **Beide Vektoren mit ihren Anfangswerten aneinander legen!**

→ **Der resultierende Vektor von der Spitze des zweiten Pfeils zum ersten Pfeil vertritt den Differenzvektor!**

Subtraktion von Vektoren

Es gilt: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Durch den Gegenvektor werden immer die Vorzeichen umgedreht!

Der Pfeil zum Vektor $(-\vec{b})$ ist genau umgekehrt, hat also eine andere Orientierung.

Es ist der Gegenvektor zum Vektor $\vec{b}$ aus der Addition von Vektoren.

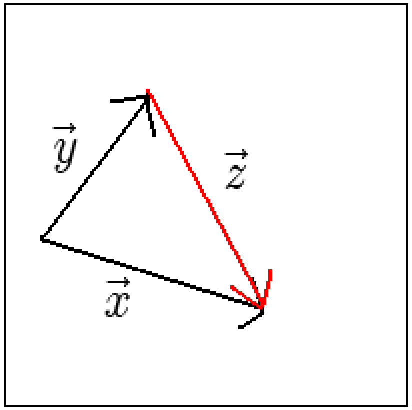
Dieser Vektor heißt **inverses Element oder Gegenvektor.**

Gegenvektor:

Der Vektor $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$ heißt Gegenvektor zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Man kann einen Vertreter des Differenzvektors $\vec{a} - \vec{b}$ zeichnerisch auch dadurch bestimmen, dass man zwei Vertreter der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit ihren Anfangspunkten aneinander legt; dann reicht der Vertreter des Vektors $\vec{a} - \vec{b}$ von der Spitze des zweiten Pfeils bis zur Spitze des ersten Pfeils.



Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Vektorrechnung: Rechenregeln

(1) Kommutativgesetz

(2) Assotiativgesetz

(3) Neutralitätsgesetz

(4) Inversitätsgesetz

1. Kommutativgesetz:

Kommutativgesetz:

Für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in V$ gilt: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Beweis:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}$$

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

2. Assoziativgesetz:

Assoziativgesetz:

Für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in V$ gilt: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Beweis:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

3. Neutralitätsgesetz:

Um das Neutralitätsgesetz anwenden und beweisen zu können, müssen wir das neutrale Element und den Nullvektor definieren.

Aus der arithmetischen Definition der Vektoraddition ergibt sich unmittelbar, dass ein neutrales Element für die Vektoraddition an allen Stellen die Koordinate 0 haben muss. Es gilt nämlich:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \\ a_3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Definition:

Unter dem Nullvektor $\vec{0}$ versteht man den Vektor, dessen sämtliche Koordinaten Null sind,

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dem Nullvektor ordnet man keine Richtung und keine Orientierung zu.

Für den Betrag (die Maßzahl der Länge) des Nullvektors gilt: $|\vec{0}| = 0$.

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Neutralitätsgesetz:

Für jeden Vektor $\vec{a} \in V$ gilt: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Beweis:

$$\vec{a} + \vec{0} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \\ a_3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

4. Inversitätsgesetz:

Inversitätsgesetz:

Für alle Vektoren $\vec{a} \in V$ gilt: $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

Beweis:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + (-a_1) \\ a_2 + (-a_2) \\ a_3 + (-a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_1 \\ a_2 - a_2 \\ a_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

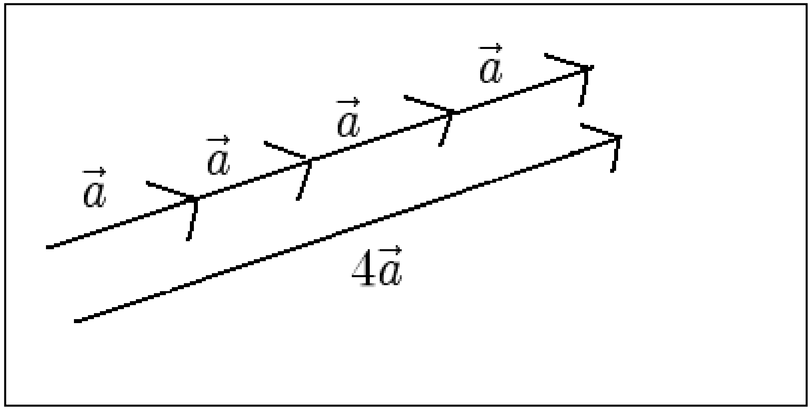
Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Vektorrechnung: Vervielfachen

Ein Beispiel für die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl wäre

$4 \cdot \vec{a}$.

Anschaulich können wir $4 \cdot \vec{a}$ wie folgt darstellen, denn $4 \cdot \vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$.



Wenn wir diese Schreibweise auf die Koordinatendarstellung übertragen, so erhalten wir:

$$4 \cdot \vec{a} = 4 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_1 + a_1 + a_1 \\ a_2 + a_2 + a_2 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_1 \\ 4a_2 \end{pmatrix}$$

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Die S-Multiplikation von Vektoren:

Für beliebige Vektoren $\vec{a} \in V$ und eine beliebige reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ gilt:

$$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$$

r nennt man Skalar. Aus diesem Grund bezeichnet man die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl auch als S-Multiplikation.

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

S-Multiplikation: Rechenregeln

(0) kein Kommutativgesetz

(1) Assotiativgesetz

(2) Distributivgesetz

Gesetze der S-Multiplikation:

-Kommutativgesetz:

Eine zur Gleichung des Kommutativgesetzes analoge Gleichung für die S-Multiplikation müsste lauten:

$r \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot r$

Der Term $\vec{a} \cdot r$ ist aber nicht definiert. Daher gibt es kein Kommutativgesetz für die S-Multiplikation. Man kann zwar einen Vektor mit einer Zahl vervielfachen, aber man kann keine Zahl mit einem Vektor vervielfachen.

-Assoziativgesetz:

Satz:
Für alle r, s $\in \mathbb{R}$ und für alle Vektoren $\vec{a} \in V$ gilt:

$s \cdot (r \cdot \vec{a}) = (s \cdot r) \cdot \vec{a}$.

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Distributivgesetz:

Satz:

Für alle r, s $\in \mathbb{R}$ und für alle Vektoren $\vec{a} \in V$ gilt:

$(r_1 + r_2) \cdot \vec{a} = r_1 \cdot \vec{a} + r_2 \cdot \vec{a}$.

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Matrizen – Multiplikation:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Produkt aus 1ter Zeile mal 1te Spalte…

… dazu einzelne Glieder heraus nehmen:

Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{pmatrix}$$

$1*1$

1te Stelle der ersten Zeile * 1te Stelle der ersten Spalte

Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{bmatrix}$$

$$1*1+0*0$$

2te Stelle der ersten Zeile * 2te Stelle der ersten Spalte

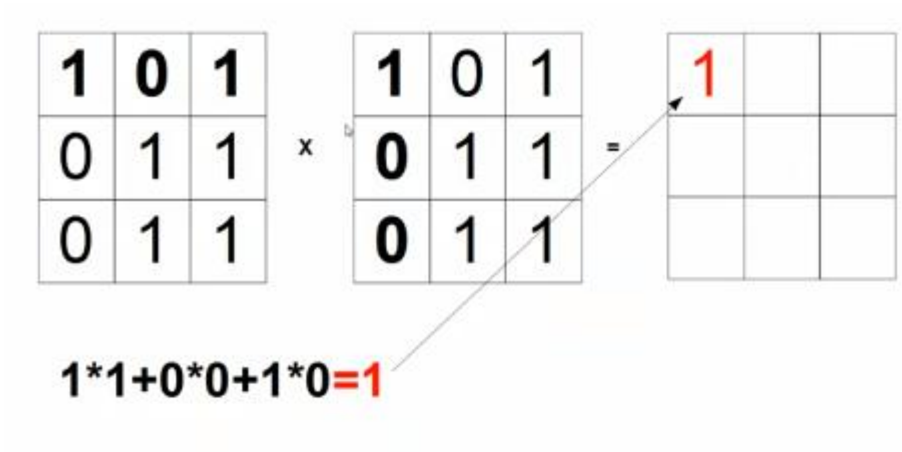
Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\ &\ &\ \\ \ &\ &\ \\ \ &\ &\ \end{bmatrix}$$

$1*1+0*0+1*0$

3te Stelle der ersten Zeile * 3te Stelle der ersten Spalte

Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c



Ergebnis der Addition in das „kreuzende Feld“

Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0} & 1 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 1 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Eine Spalte weiter rücken…

Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

$1*0$

Wieder von vorne:
Erste Stelle der ersten Spalte * erste Stelle der ersten Zeile

Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1& & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$1*0+0*1$

2te Stelle der ersten Spalte * 2te Stelle zweiten Spalte

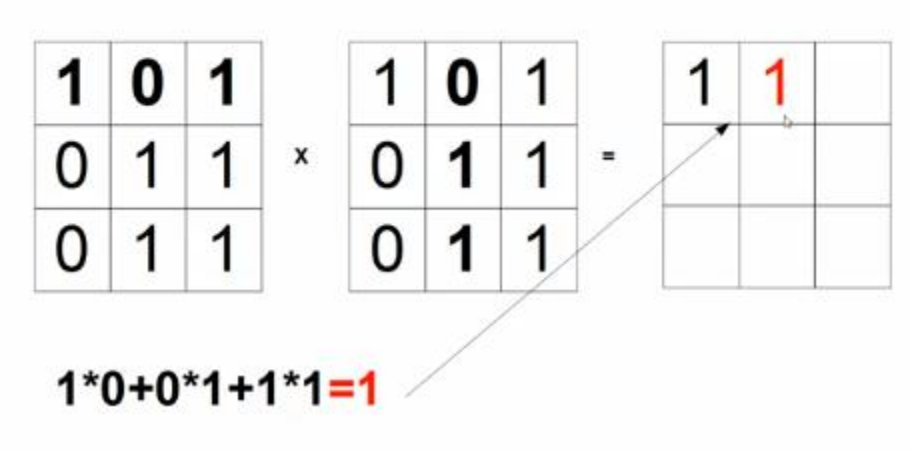
Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$1*0+0*1+1*1$$

3te Stelle der ersten Spalte * 3te Stelle der zweiten Spalte

Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c



Ergebnis der Addition in das „kreuzende Feld“

Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&2\\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$1*1+0*1+1*1=2$$

Eine Spalte weiter rücken…

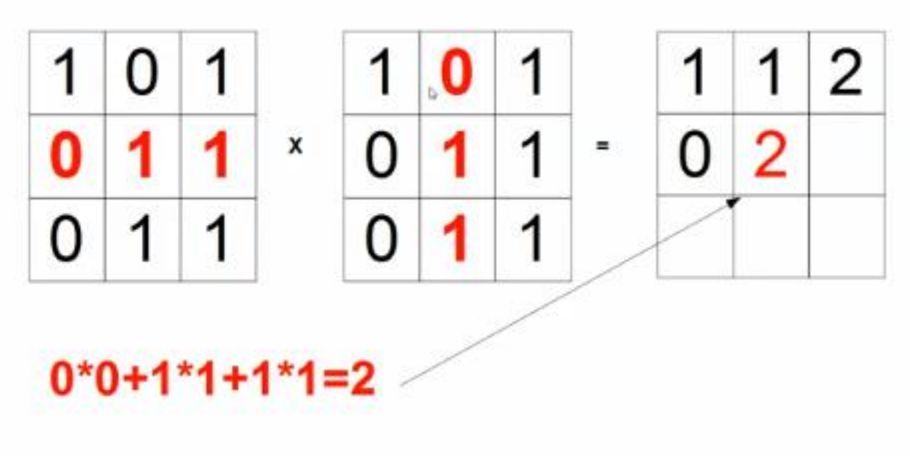
Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&2\\0&&\\&&\end{bmatrix}$$

$$0*1+1*0+1*0=0$$

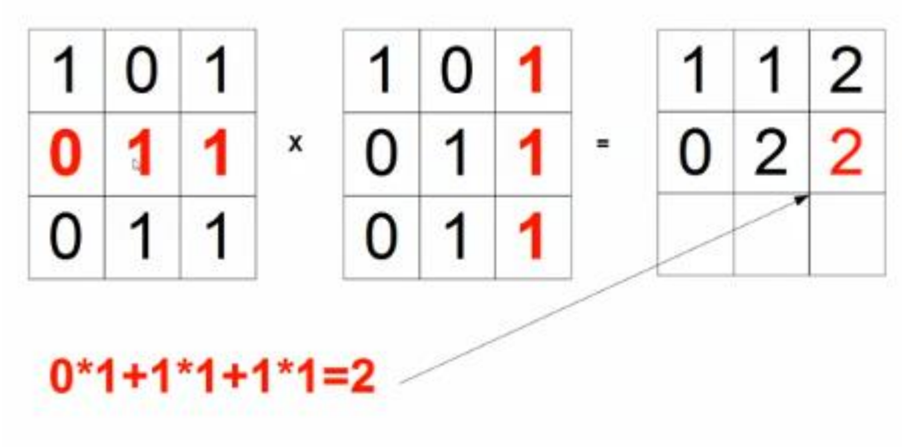
Eine Zeile weiter rücken, mit erster Spalte ausmultiplizieren…

Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c



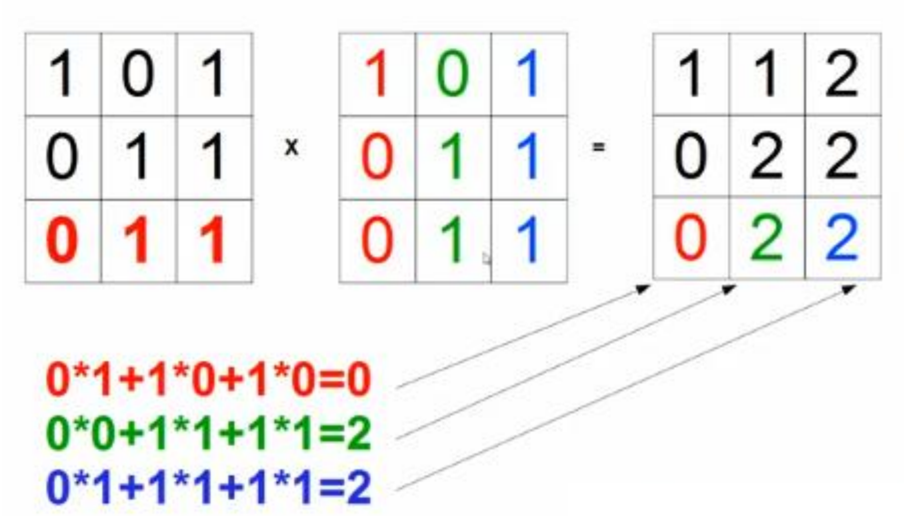
Eine Spalte weiter rücken und ausmultiplizieren…

Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c



Eine Spalte weiter rücken und ausmultiplizieren…

Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c



… genauso mit letzter Zeile…

Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=Kge22DJdp3c

Übungsaufgabe

Multiplizieren Sie folgende Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ \sin\omega\sin\varphi & \cos\omega & -\sin\omega\cos\varphi \\ -\cos\omega\sin\varphi & \sin\omega & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

1*1+0*0+1*0=1

Lineare Ab- bzw. Unabhängigkeit von Vektoren

Lineare Abhängigkeit:

… besteht, wenn eine Addition mehrerer Vektoren den Nullvektor ergibt

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ -11 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektoren sind auch linear abhängig,
wenn man Vielfache von Ihnen zum Nullvektor addieren kann.

$$\vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ sowie } \vec{c} = -\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Das heißt:

Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ heißen linear abhängig,
wenn es Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ gibt, so dass nicht alle r_i Null sind aber
$r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + r_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ ergibt

Also sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$ linear abhängig.

Wenn Vektoren nicht linear abhängig sind, dann sind sie linear unabhängig.

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Ein Beispiel für drei linear unabhängige Vektoren sind unsere Einheitsvektoren des Koordinatensystems:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anschaulich bedeutet dies: wenn Vektoren linear unabhängig sind, so zeigt mindestens ein Vektor aus der Ebene, die von einigen anderen Vektoren aufgespannt wird, hinaus.

Quelle: http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1010

Rotationsmatrix

- Für die Orientierung im Raum gibt es 3 Freiheitsgrade.

- Üblicherweise werden 2 Verfahren angewandt, um die Orientierung zu beschreiben:

Euler Winkel	Drehmatritzen

(1) Euler Winkel:

- 3 Winkel, welche die Drehung um bestimmte Achsen beschreiben
- Es gibt unterschiedliche Definitionen der Drehwinkel:

Definition nach Luftfahrtnorm (DIN 9300):

Yaw (Gier): Steuerkurs

Pitch: Nickwinkel

Roll: Querneigung

→ eine Möglichkeit zur Beschreibung der Orientierung eines Fahrzeuges im dreidimensionalen Raum

→ Es werden Winkel beschrieben mit denen um gedrehte Achsen rotiert wird

→ Die Winkel definieren eine Transformation zwischen 2 kartesischen Koordinatensystemen

→ Beispiel: Definition der Einbaulage einer IMU im Flugzeug

→ zunächst nur bei Luftfahrzeugen angewendet, inzwischen auch zur Lagebeschreibung von Land-, Schiffs- und Raumfahrzeugen

(2) Drehmatritzen:

- Beschreiben Drehungen (Rotationen), um ortsfeste Achsen
- Bsp. Photogrammetrie: Umrechnung zwischen Koordinatensystemen

→ **Euler Winkel und Drehmatritzen beschreiben 2 unterschiedliche Vorgänge, welche das gleiche Ergebnis liefern!**

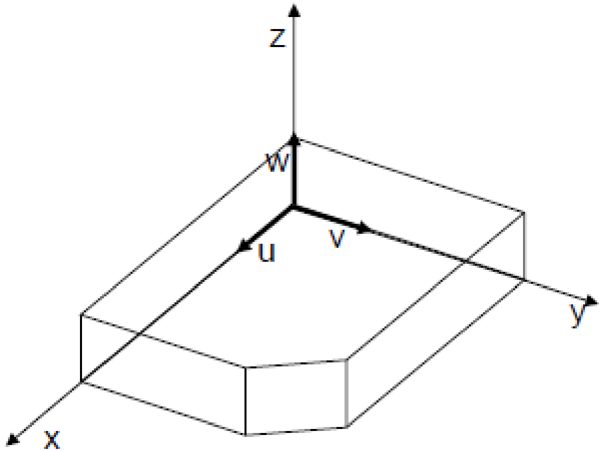
Rotationsmatrix

R = Rotationsmatrix oder Orientierungsmatrix

(mit u_i, v_i, w_i = x-y-z Koordinaten der Einheitsvektoren)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}$$ (allgemein)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (Ausgangssituation / Skizze)



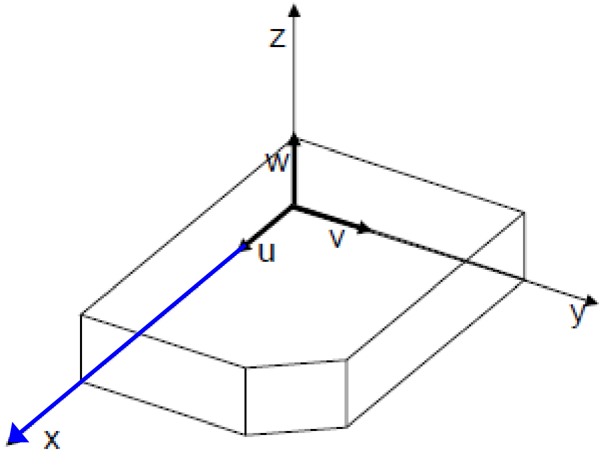
R = Rotationsmatrix oder Orientierungsmatrix

(mit u_i, v_i, w_i = x-y-z Koordinaten der Einheitsvektoren)

Koordinatenachse x des Bezugskoordinatensystems

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$



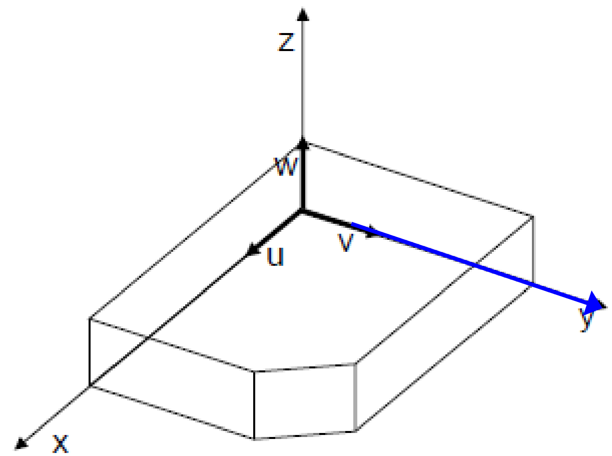
R = Rotationsmatrix oder Orientierungsmatrix

(mit u_i, v_i, w_i = x-y-z Koordinaten der Einheitsvektoren)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}$$ (allgemein

Koordinatenachse y des Bezugskoordinatensystems

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (Ausgangssituation / Skizze)



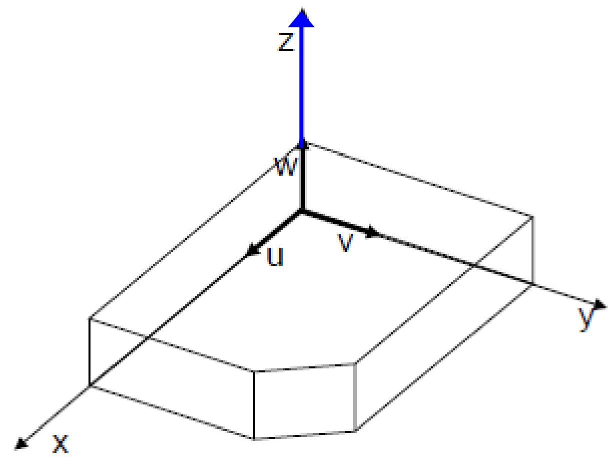
R = Rotationsmatrix oder Orientierungsmatrix

(mit u_i, v_i, w_i = x-y-z Koordinaten der Einheitsvektoren)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

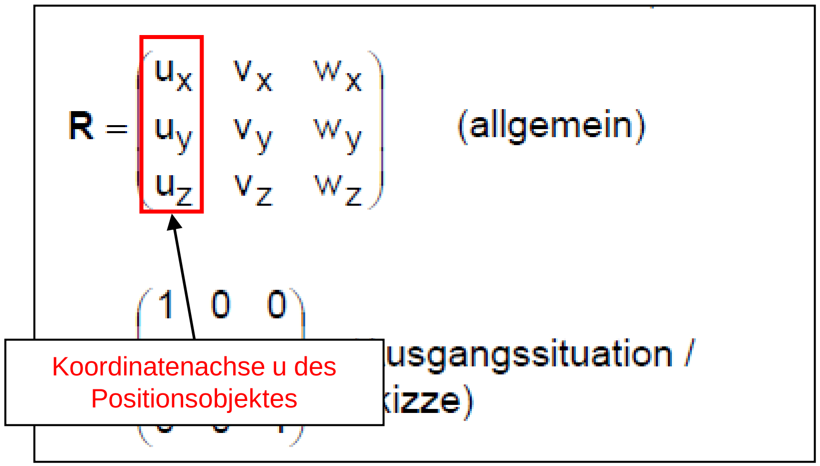
Koordinatenachse z des Bezugskoordinatensystems

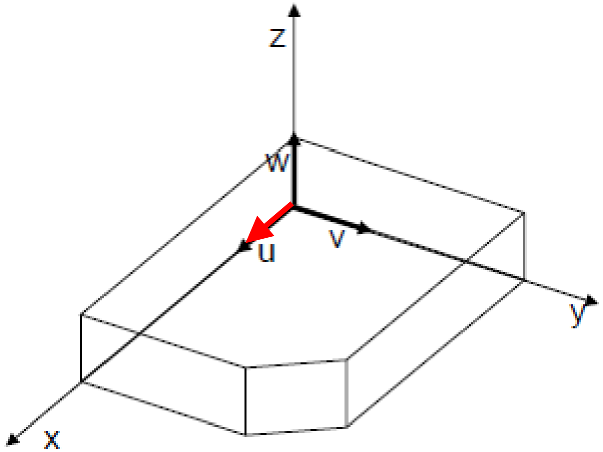
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$



R = Rotationsmatrix oder Orientierungsmatrix

(mit u_i, v_i, w_i = x-y-z Koordinaten der Einheitsvektoren)





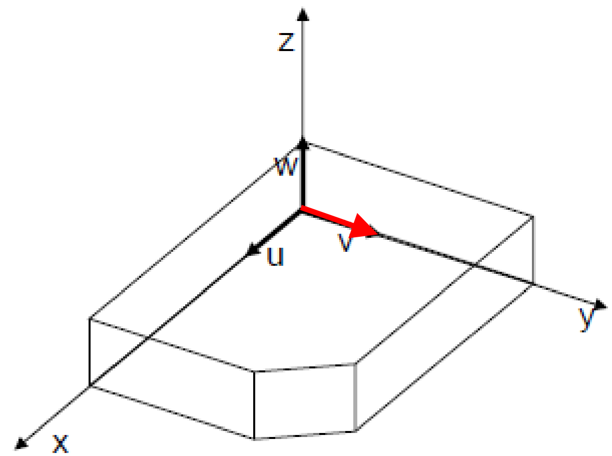
R = Rotationsmatrix oder Orientierungsmatrix

(mit u_i, v_i, w_i = x-y-z Koordinaten der Einheitsvektoren)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & \boxed{\begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{matrix}} & w_x \\ u_y & & w_y \\ u_z & & w_z \end{pmatrix} \qquad \text{(allgemein)}$$

1 0 0 … angssituation / … e)

Koordinatenachse v des Positionsobjektes



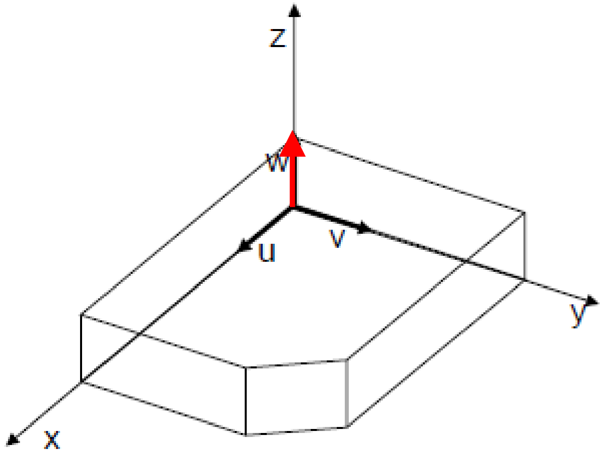
R = Rotationsmatrix oder Orientierungsmatrix

(mit u_i, v_i, w_i = x-y-z Koordinaten der Einheitsvektoren)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & \boxed{w_x} \\ u_y & v_y & \boxed{w_y} \\ u_z & v_z & \boxed{w_z} \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ...situation /

Koordinatenachse w des Positionsobjektes

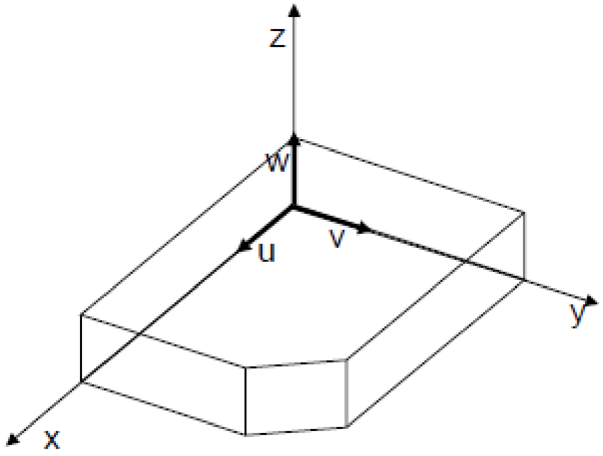


R = Rotationsmatrix oder Orientierungsmatrix

(mit u_i, v_i, w_i = x-y-z Koordinaten der Einheitsvektoren)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}$$ (allgemein)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (Ausgangssituation / Skizze)

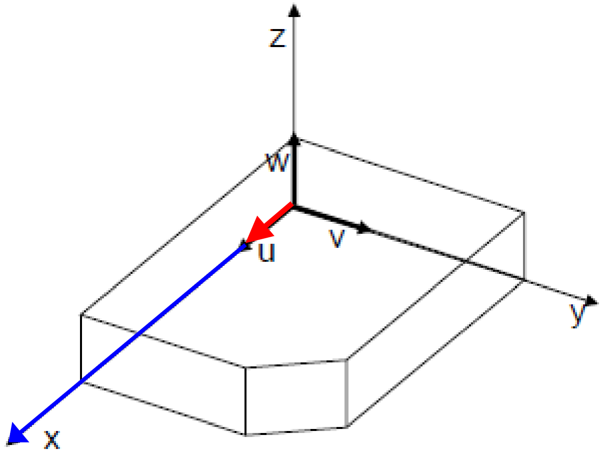


R = Rotationsmatrix oder Orientierungsmatrix

(mit u_i, v_i, w_i = x-y-z Koordinaten der Einheitsvektoren)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}$$ (allgemein)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$ (Ausgangssituation / Skizze)



Die Koordinatenachse u des Körpers orientiert sich nur an der x Achse des lokalen Koordinatensystems x-y-z.

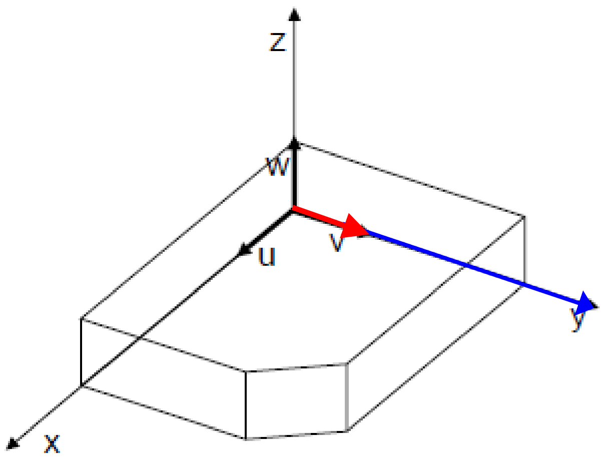
Es gibt keine Rotation zur y- und z- Achse

R = Rotationsmatrix oder Orientierungsmatrix

(mit u_i, v_i, w_i = x-y-z Koordinaten der Einheitsvektoren)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \qquad \text{(allgemein)}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$



Die Koordinatenachse v des Körpers orientiert sich nur

an der y Achse des lokalen Koordinatensystems x-y-z.

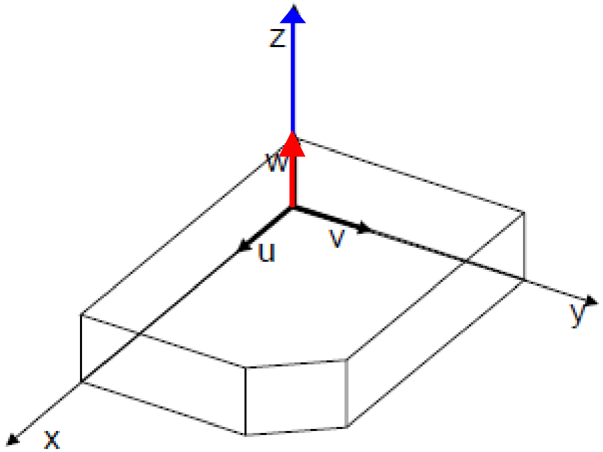
Es gibt keine Rotation zur x- und z- Achse

R = Rotationsmatrix oder Orientierungsmatrix

(mit u_i, v_i, w_i = x-y-z Koordinaten der Einheitsvektoren)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$



Die Koordinatenachse w des Körpers orientiert sich nur

an der z Achse des lokalen Koordinatensystems x-y-z.

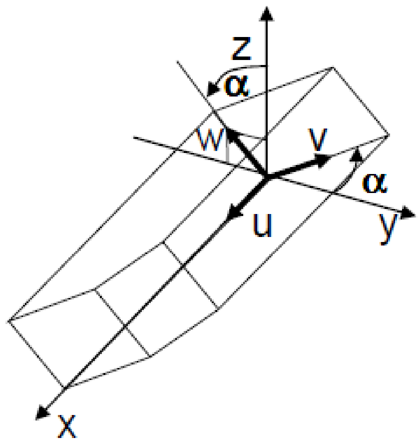
Es gibt keine Rotation zur x- und y- Achse

Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Rotation um die x-, y- und z-Achse

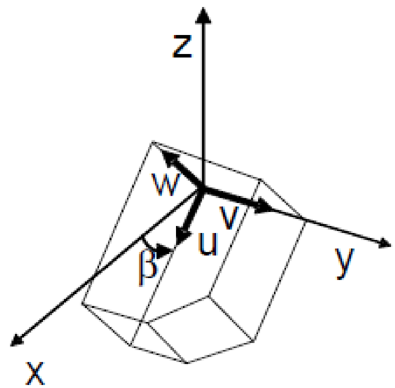
Rotation um die x-, y- und z-Achse

Rotation um x:



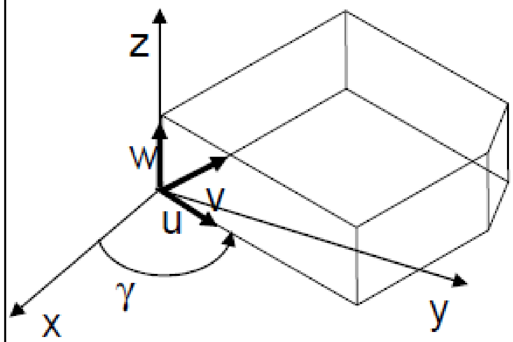
$$R_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$R_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Rotation um z:



$$R_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

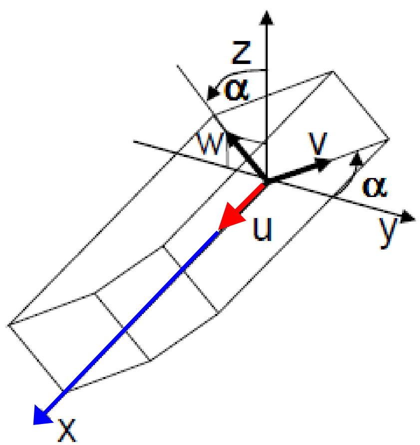
Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Rotation um die x-, y- und z-Achse

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

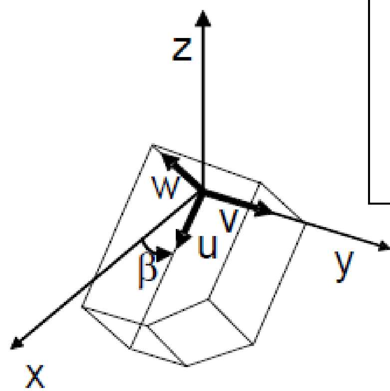
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$

Rotation um x:

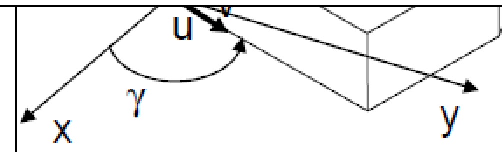


$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenachse u des Körpers orientiert sich entlang

der x Achse des lokalen Koordinatensystems x-y-z.

U rotiert nicht zur y- und z- Achse

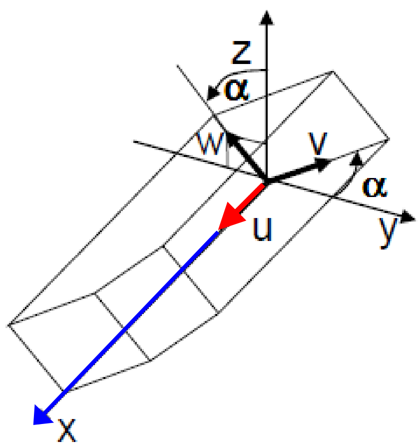
Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Rotation um die x-, y- und z-Achse

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

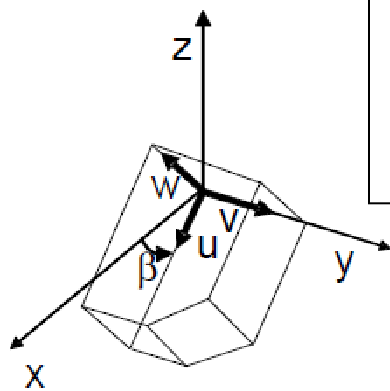
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$

Rotation um x:

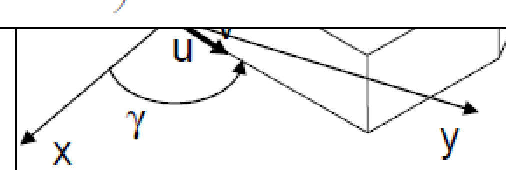


$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenachse x des lokalen Koordinatensystems orientiert sich entlang der u Achse des Körpers

x rotiert nicht zur v- und W- Achse des Körpers

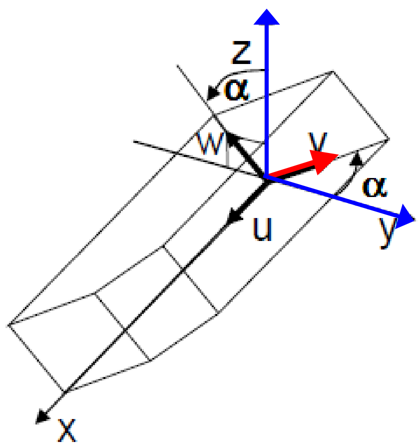
Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Rotation um die x-, y- und z-Achse

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

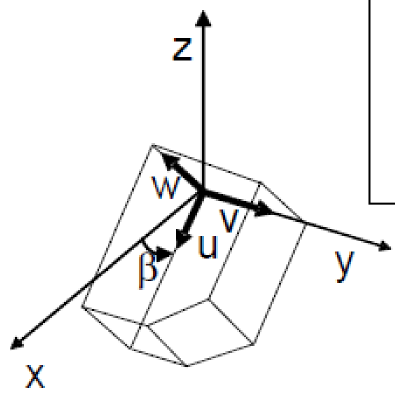
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$

Rotation um x:

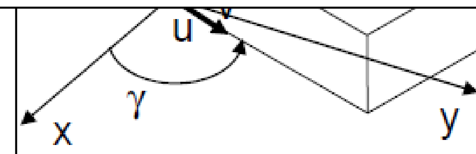


$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenachse v des Körpers rotiert zur y- und z-Achse des lokalen Koordinatensystems.

Der Betrag der Rotation zu y und z- berechnet sich über cos und sin.

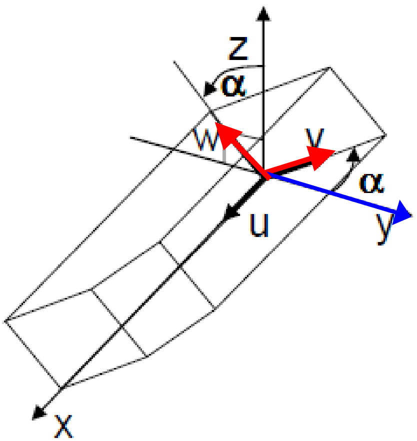
Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Rotation um die x-, y- und z-Achse

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

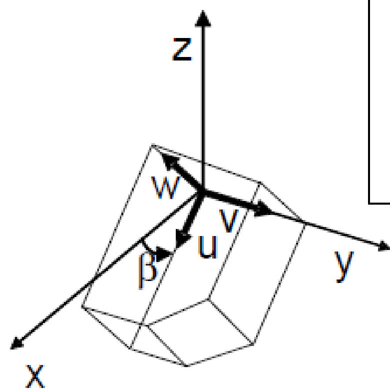
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$

Rotation um x:

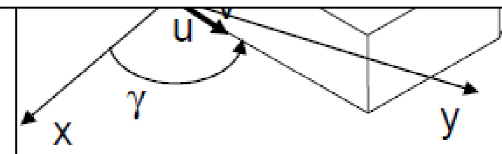


$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenachse y des lokalen Koordinatensystems rotiert mit dem Winkel alpha um die v- und w- Achse des Körpers.
Der Betrag der Rotation berechnet sich über cos und -sin.

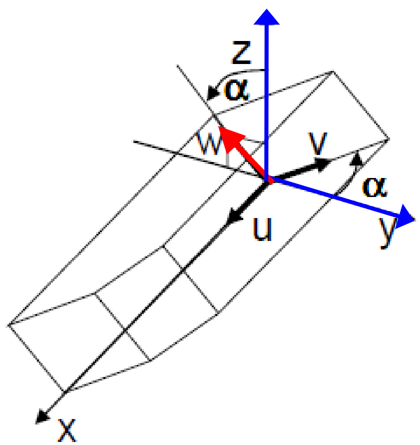
Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Rotation um die x-, y- und z-Achse

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

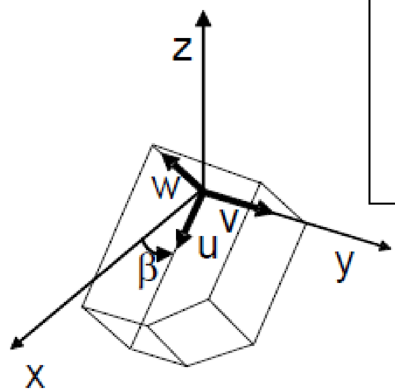
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$

Rotation um x:

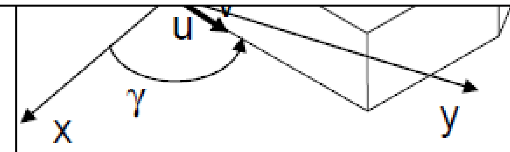


$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenachse w des Körpers rotiert mit dem Winkel alpha zur y und z Achse des Koordinatensystems x-y-z.
Der Betrag der Rotation zu y und z berechnet sich über –sin und cos.

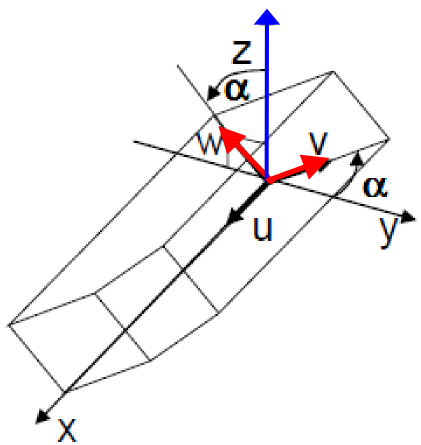
Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Rotation um die x-, y- und z-Achse

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

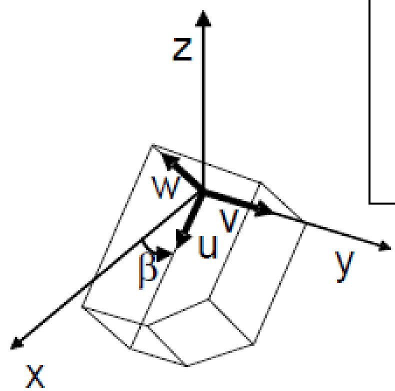
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$

Rotation um x:



$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

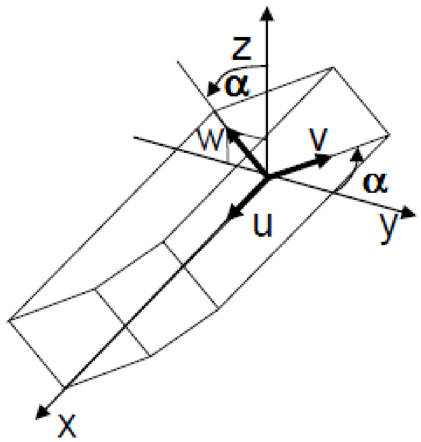
Die Koordinatenachse z des lokalen Koordinatensystems rotiert mit dem Winkel alpha zur v- und w- Achse des Körpers.

Die Betrag der Rotation berechnet sich über sin und cos.

Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

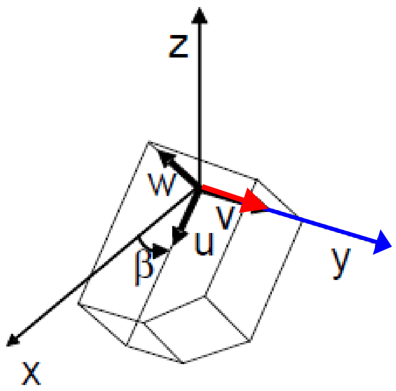
Rotation um die x-, y- und z-Achse

Rotation um x:



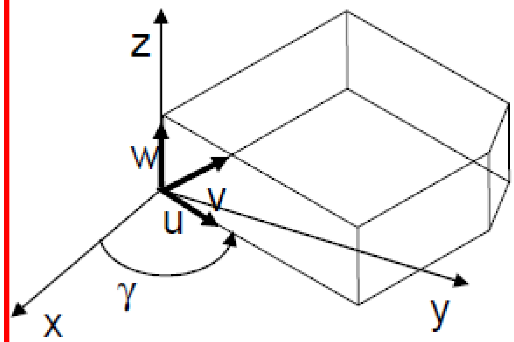
$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Rotation um z:



$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

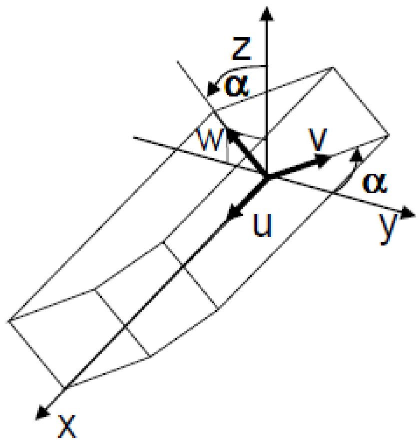
Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Rotation um die x-, y- und z-Achse

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

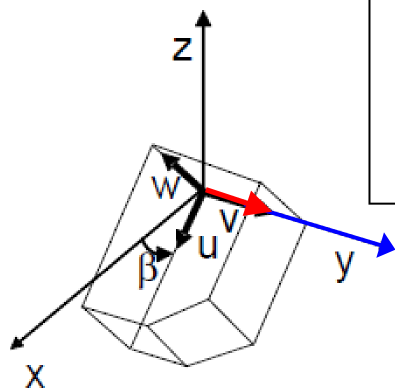
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$

Rotation um x:

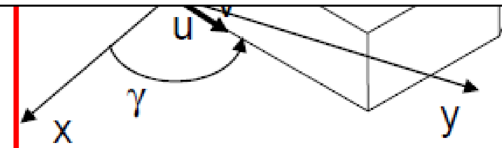


$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenachse v des Körpers orientiert sich entlang

der y Achse des lokalen Koordinatensystems x-y-z.

v rotiert nicht zur y- und z- Achse

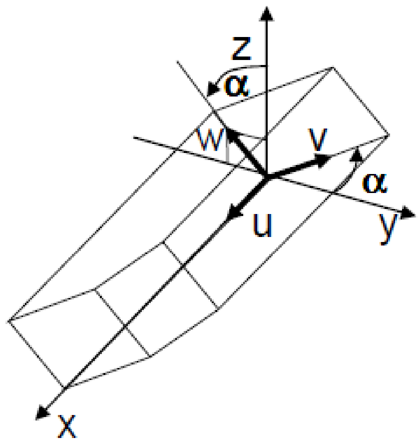
Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Rotation um die x-, y- und z-Achse

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

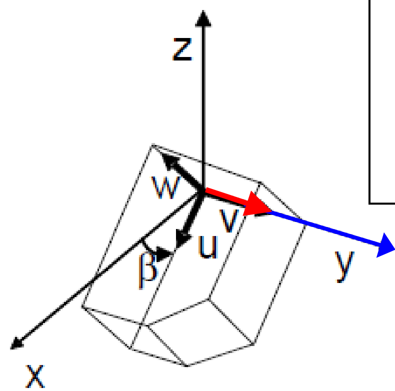
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$

Rotation um x:

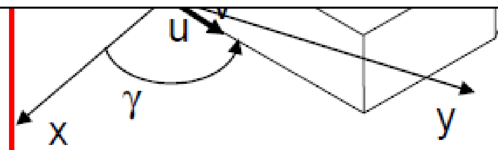


$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenachse y des lokalen Koordinatensystems orientiert sich entlang der v Achse des Körpers.

y rotiert nicht zur u- und v- Achse des Körpers

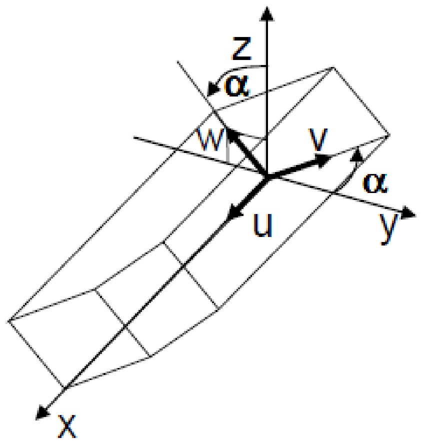
Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Rotation um die x-, y- und z-Achse

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

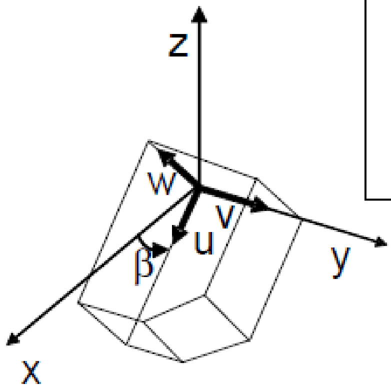
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$

Rotation um x:

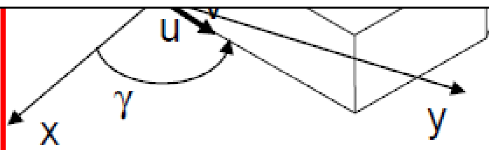


$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$



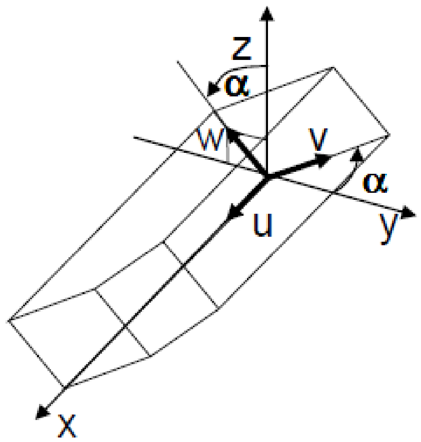
$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alles weitere in Analogie dazu…

Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

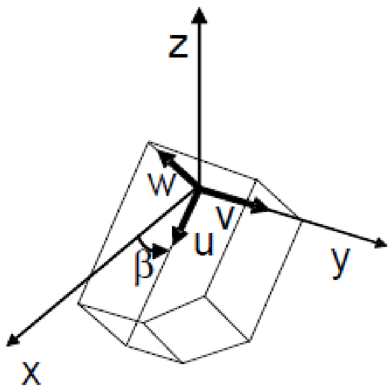
Rotation um die x-, y- und z-Achse

Rotation um x:



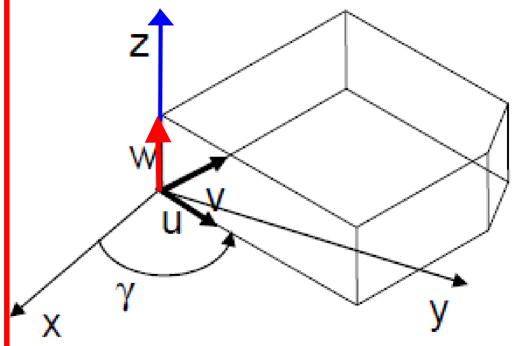
$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Rotation um z:



$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

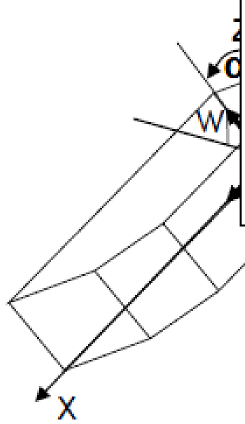
Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

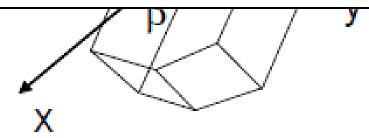
Rotation um die x-, y- und z-Achse

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

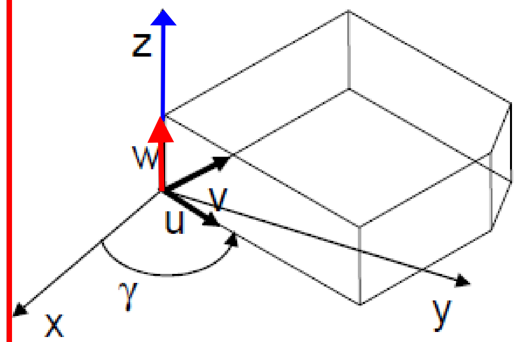
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$

Rotat





Rotation um z:



$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

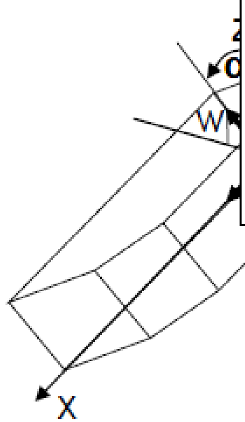
Die Koordinatenachse w des Körpers orientiert sich entlang

der z Achse des lokalen Koordinatensystems x-y-z.

w rotiert nicht zur x- und y- Achse

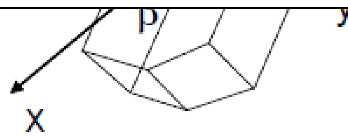
Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Rotation um die x-, y- und z-Achse

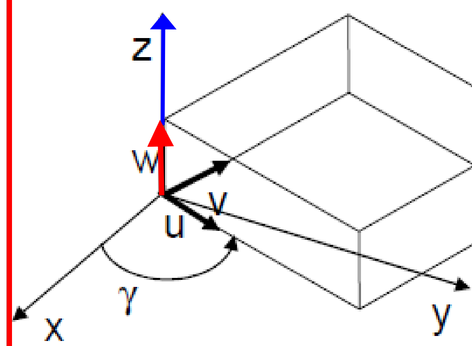


$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad \text{(allgemein)}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ausgangssituation / Skizze)}$$



Rotation um z:



$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenachse z des lokalen Koordinatensystems orientiert sich entlang der w Achse des Körpers.

z rotiert nicht zur x- und y- Achse

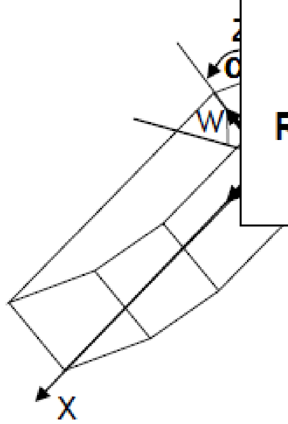
Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

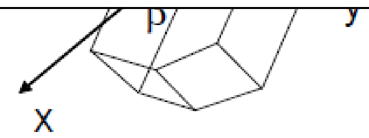
Rotation um die x-, y- und z-Achse

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}$$ (allgemein)

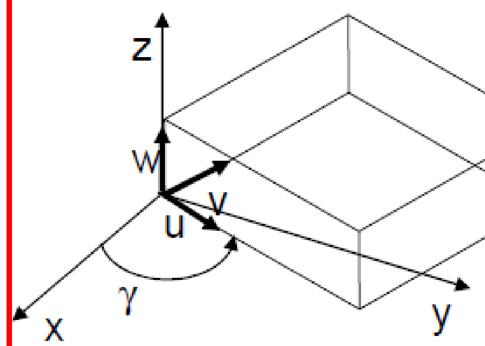
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (Ausgangssituation / Skizze)

Rotat





Rotation um z:



$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

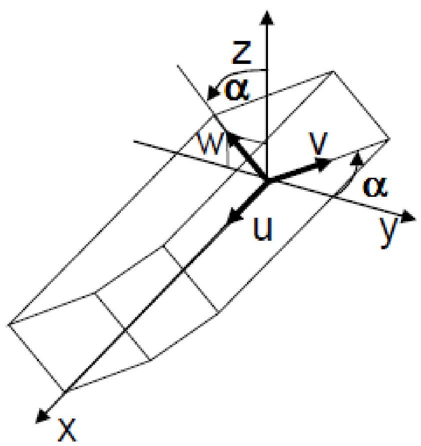
$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alles weitere in Analogie dazu…

Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

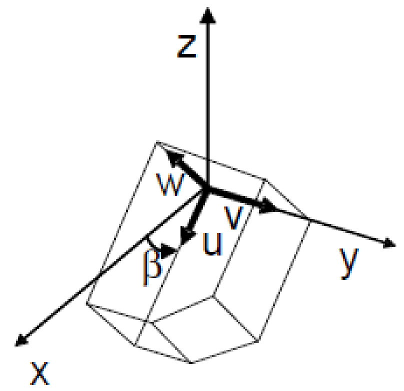
Rotation um die x-, y- und z-Achse

Rotation um x:



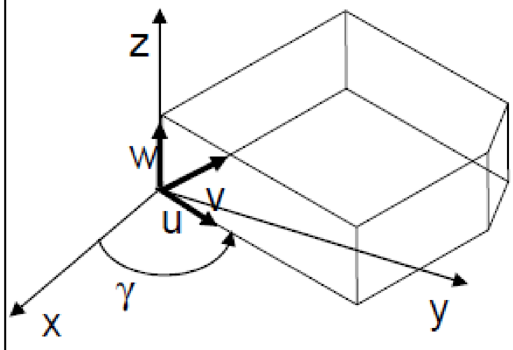
$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Rotation um z:

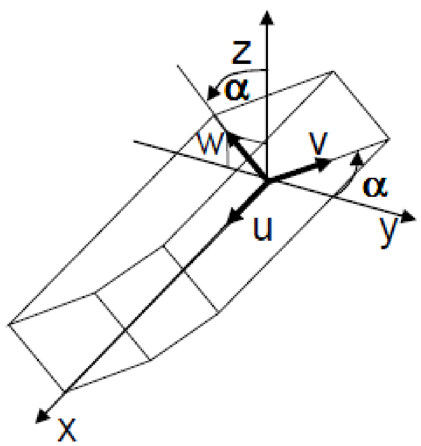


$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

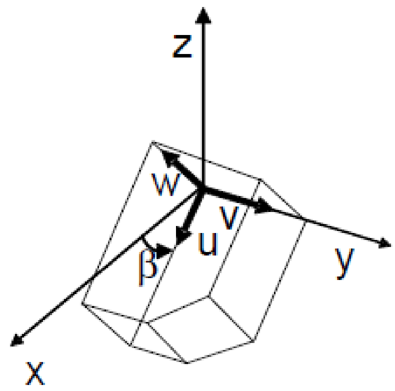
Rotation um die x-, y- und z-Achse

Rotation um x:



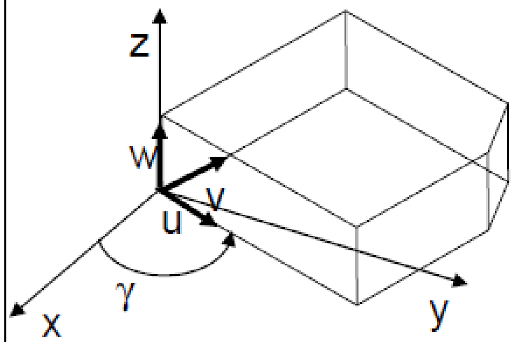
$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Rotation um z:



$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}$$ (allgemein)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (Ausgangssituation / Skizze)

ser/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Serien von Rotationen

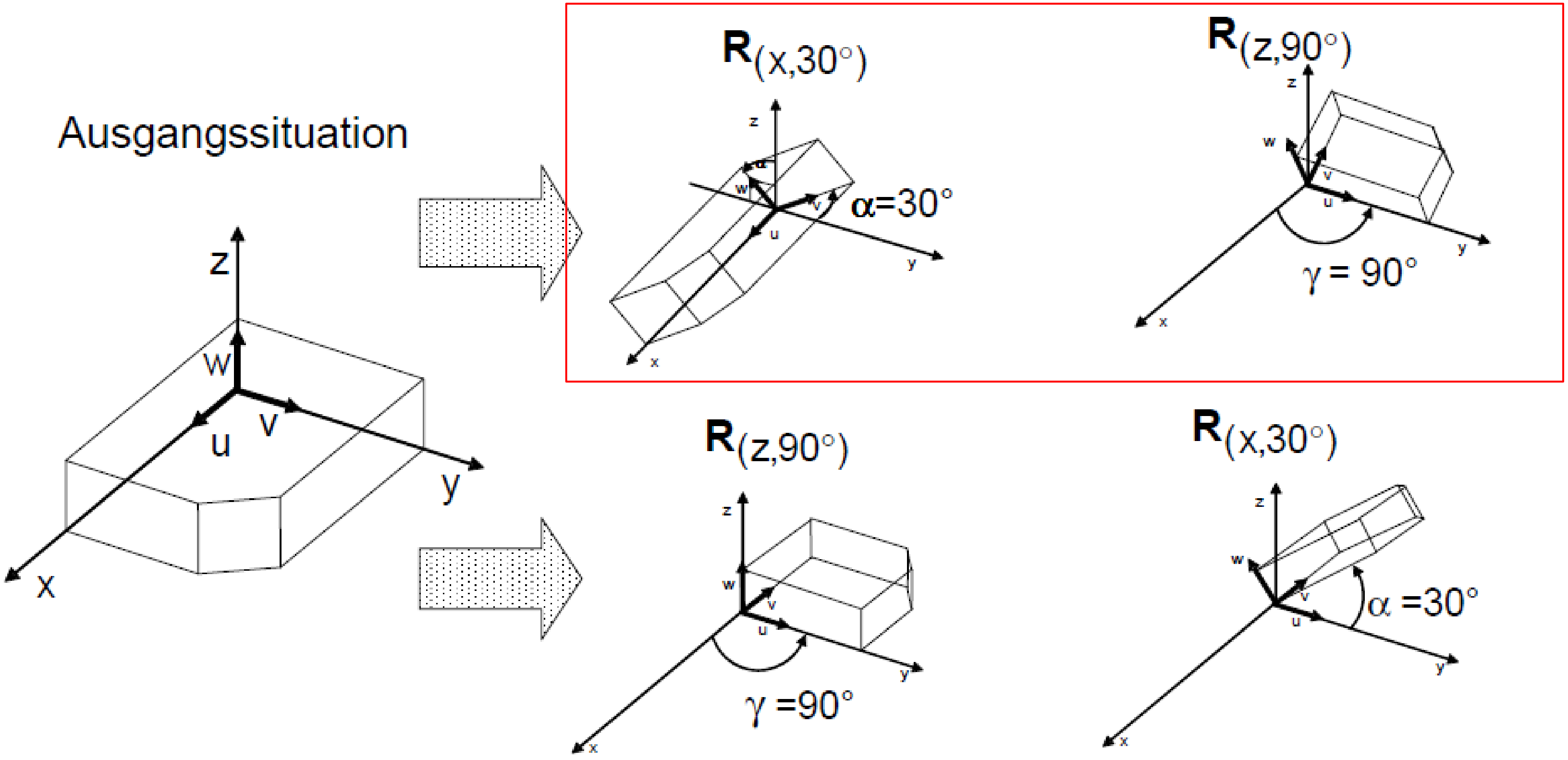
Rotationsmatrizen können miteinander multipliziert werden

→ das ergibt Serien von Rotationen um die Achsen des Koordinatensystems

→ dabei ist die Reihenfolge der Rotationen wichtig!

Serien von Rotationen

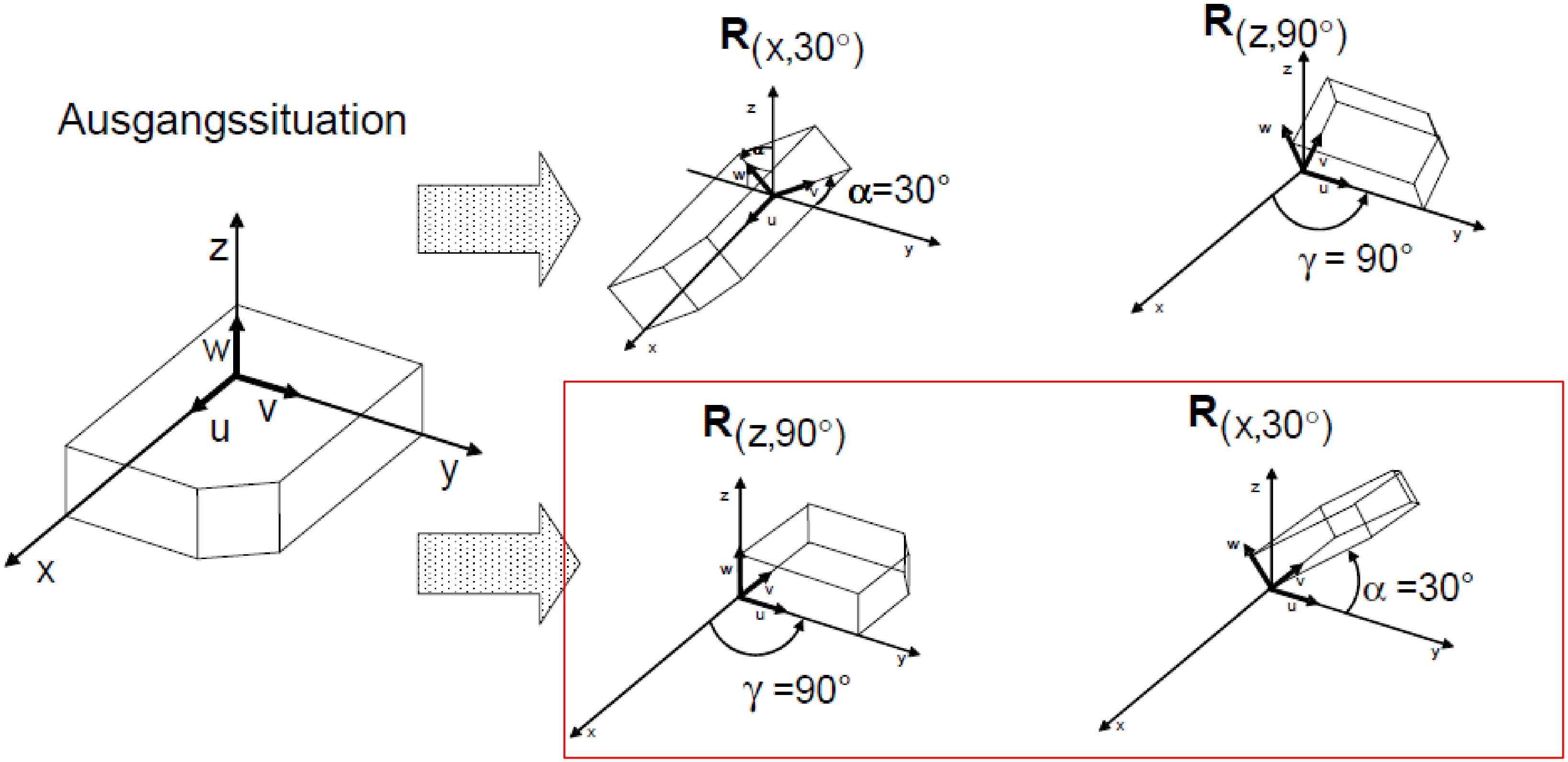
Beispiel unterschiedlicher Reihenfolgen:



Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Serien von Rotationen

Beispiel unterschiedlicher Reihenfolgen:

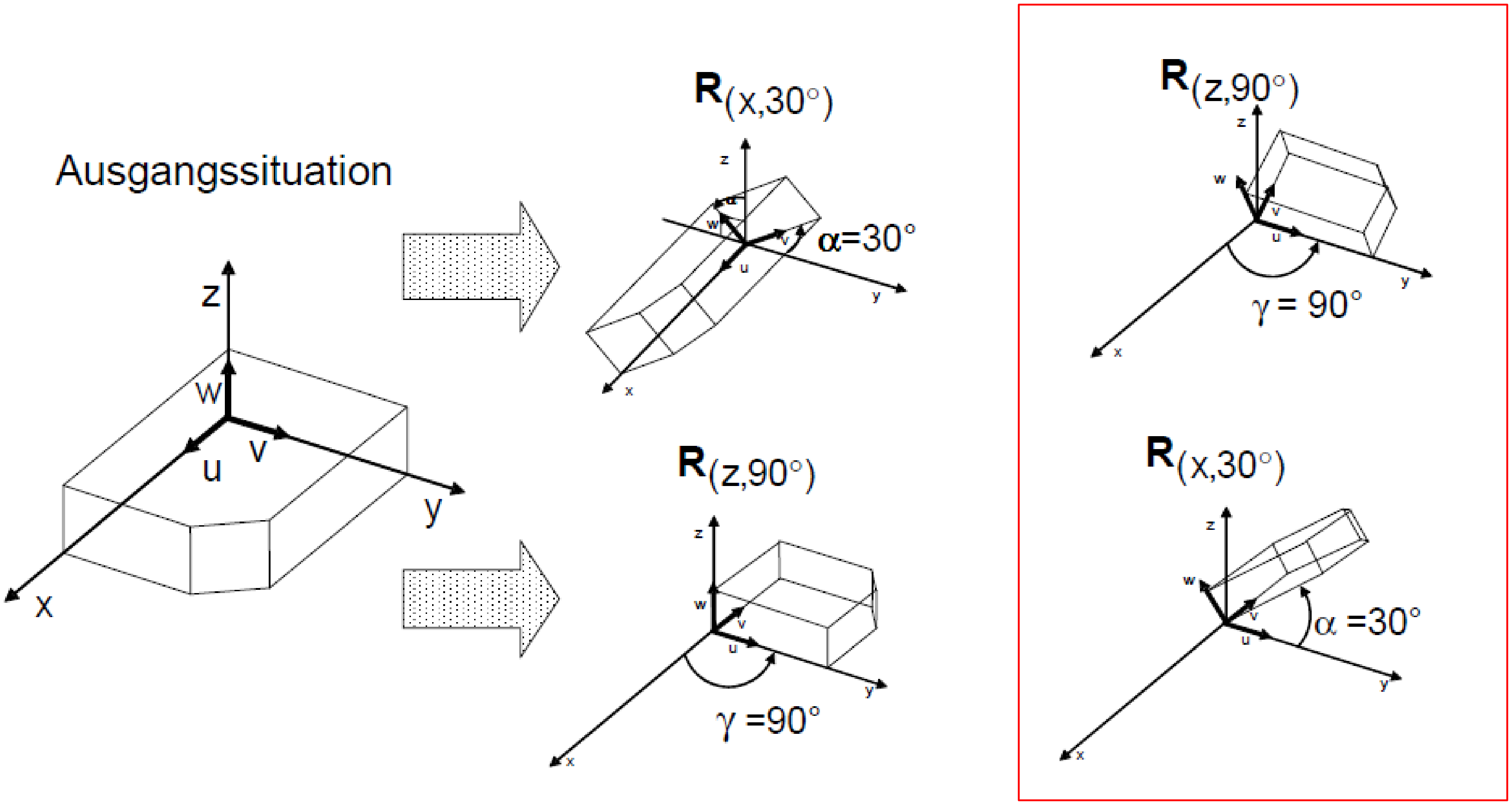


Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Serien von Rotationen

Beispiel unterschiedlicher Reihenfolgen:

→ die Reihenfolge der Rotationen ist wichtig!



Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Homogene Koordinaten

Es sei $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ein Vektor im 3D-Koordinatensystem

dann sind die homogenen Koordinaten des Punktes (Vektors) P

$$\mathbf{p}_H = \begin{pmatrix} h \bullet x \\ h \bullet y \\ h \bullet z \\ h \end{pmatrix} \quad \text{mit } h \neq 0$$

Der Spaltenvektor h ist der Skalierungsvektor.

Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Homogene Koordinaten

Damit kann für die Beschreibung der Rotation und Translation eine so genannte homogene 4x4 Matrize aufgestellt werden:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} R & T \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

- R = 3 x 3 Matrix: Rotation
- T = 3 x 1 Vektor: Translation
- 1 = Skalierungsfaktor

Vorteil: Rotation und Translation werden in einer Matrix zusammengefasst

Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

patrick.reidelstuerz@hdu-deggendorf.de

Homogene Transformation

Trans(x,y,z) = Verschiebung eines Punktes um x,y,z entlang der jeweiligen Achse:

$$\mathrm{Trans}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die y-Achse:

$$R_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die x-Achse:

$$R_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die z-Achse:

$$R_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Homogene Transformation

Trans(x,y,z) = Verschiebung eines Punktes um x,y,z entlang der jeweiligen Achse:

$$\mathrm{Trans}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die y-Achse:

$$R_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die x-Achse:

$$R_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die z-Achse:

$$R_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

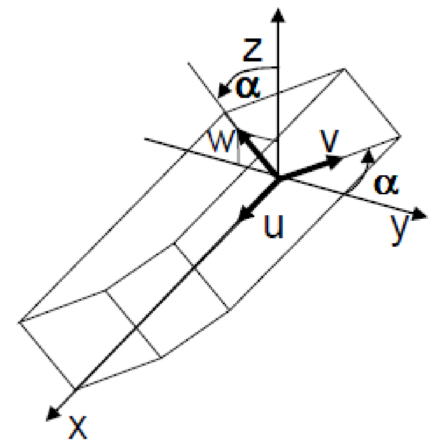
Homogene Transformation

Trans(x,y,z) = Verschiebung eines Punktes um x,y,z entlang der jeweiligen Achse:

$$\mathrm{Trans}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung:

Rotation um x:



$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Rotation um die x-Achse:

$$R_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Homogene Transformation

Trans(x,y

Punktes

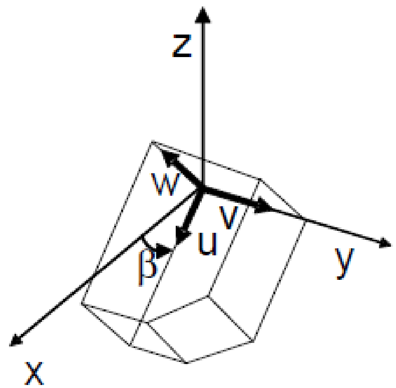
jeweilige

Trans(x, y

Rotation

Zur Erinnerung:

Rotation um y:



$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Rotation um die y-Achse:

$$R_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die z-Achse:

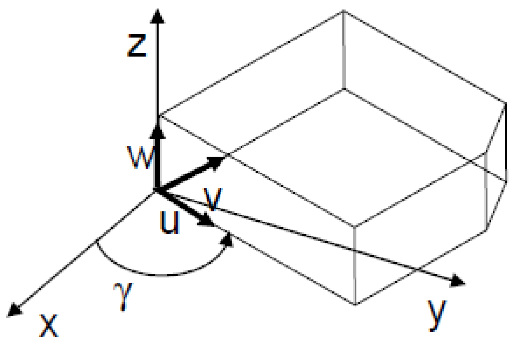
$$R_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Homog

Zur Erinnerung:

Rotation um z:



$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trans(x

Punktes

jeweilige

Trans(x,

Rotation

$$R_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die y-Achse:

$$R_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die z-Achse:

$$R_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Homogene Transformation

Trans(x,y,z) = Verschiebung eines Punktes um x,y,z entlang der jeweiligen Achse:

$$\mathrm{Trans}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die y-Achse:

$$R_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die x-Achse:

$$R_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die z-Achse:

$$R_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quelle: http://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_03.pdf

Exkurs: Anwendung von Rotationsmatrizen in der Photogrammetrie

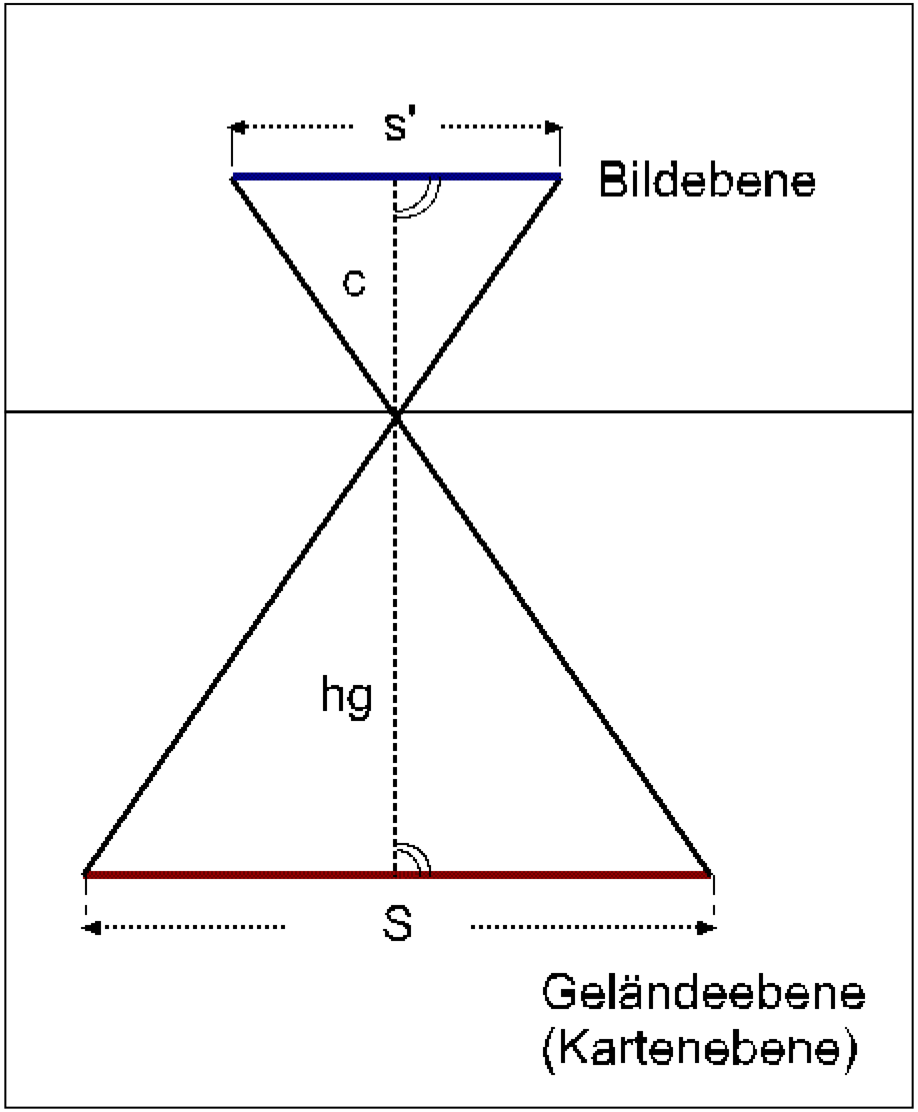
Exkurs: Anwendung von Rotationsmatrizen in der Photogrammetrie

„Unter Photogrammetrie versteht man allgemeinMethoden,
um aus einem oder mehreren Bildern eines beliebigen Objektes indirekt
- dessen Form, Lage und Größe durch Bildmessungen sowie
- dessen inhaltliche Beschreibung durch Bildinterpretation
zu gewinnen.“

Quelle: Th. Luhmann, *Nahbereichsphotogrammetrie – Grundlagen, Methoden und Anwendungen,* Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg 1999

Kamerasystem

Wirklichkeit



c = Kammerkonstante
h_g = Flughöhe über Grund
S = Geländestrecke
S_k = Kartenstrecke
s' = Bildstrecke

M_b = Bildmaßstab
M_k = Kartenmaßstab
m_b = Bildmaßstabszahl
m_k = Kartenmaßstabszahl

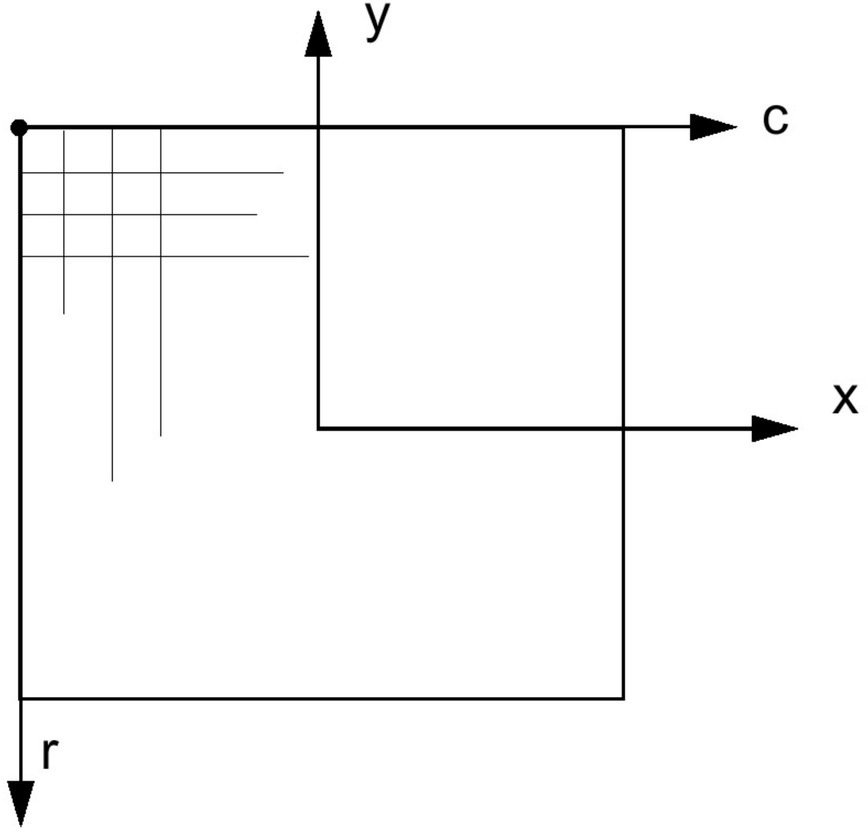
Bildmaßstab: $$M_b = \frac{1}{m_b} = \frac{c}{h_g} = \frac{s'}{S} = \frac{s'}{S_k * m_k}$$

Innere Orientierung: Definition eines Kamerakoordinatensystems

Innere Orientierung: Definition eines Kamerakoordinatensystems

Pixel- / Kamerakoordinatensystem:

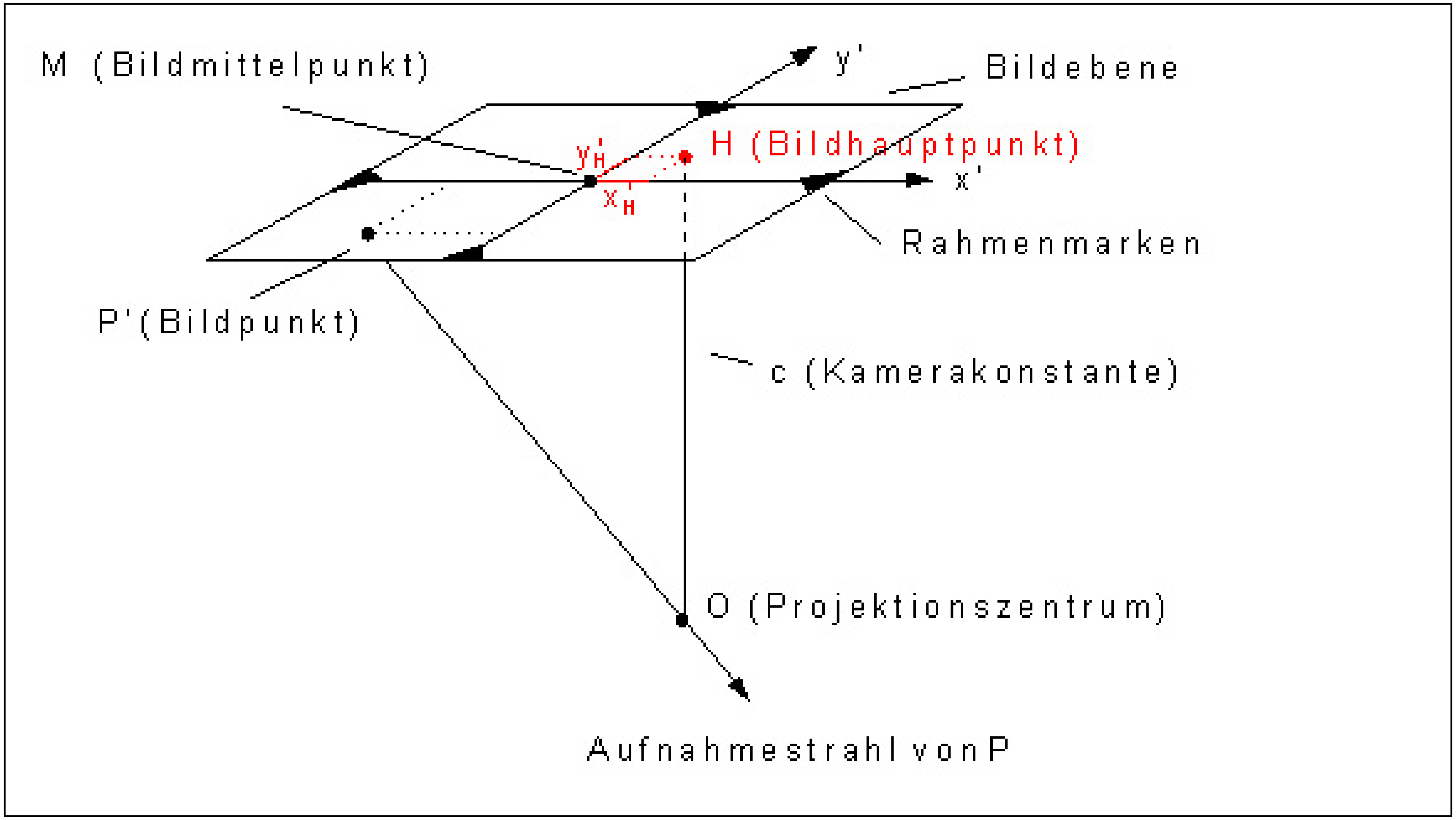
Definition über Ursprung und Achsen mit Einheiten



Pixel Coordinates and Image Coordinates

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/photogrammetrie_ss07.pdf

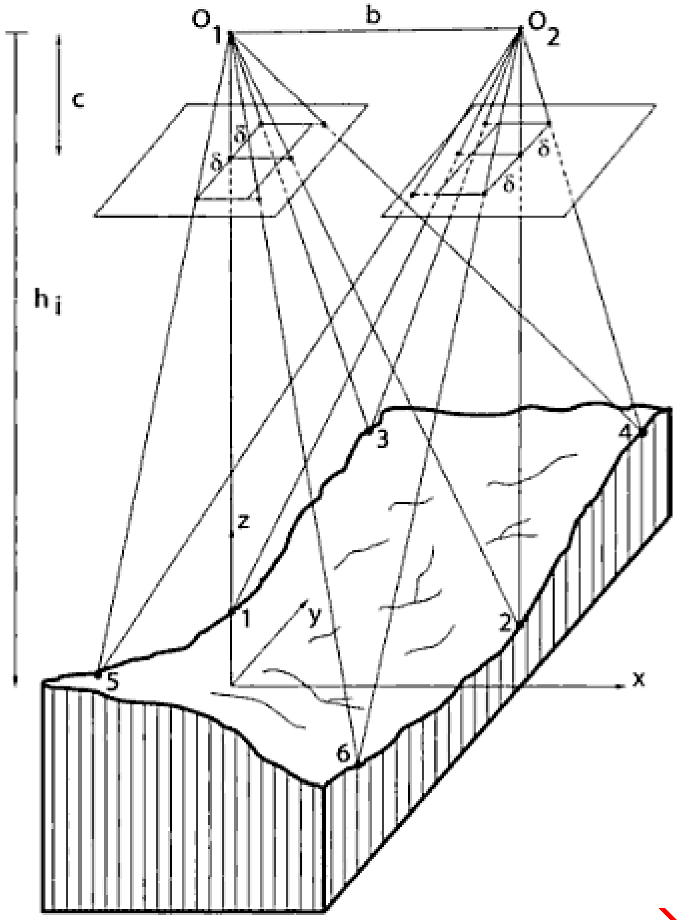
Innere Orientierung: Definition eines Kamerakoordinatensystems



Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/photogrammetrie_ss07.pdf

Relative Orientierung:
Definition der Orientierung der Kamerakoordinatensysteme zueinander

Relative Orientierung: Definition der Orientierung der Kamerakoordinatensysteme zueinander

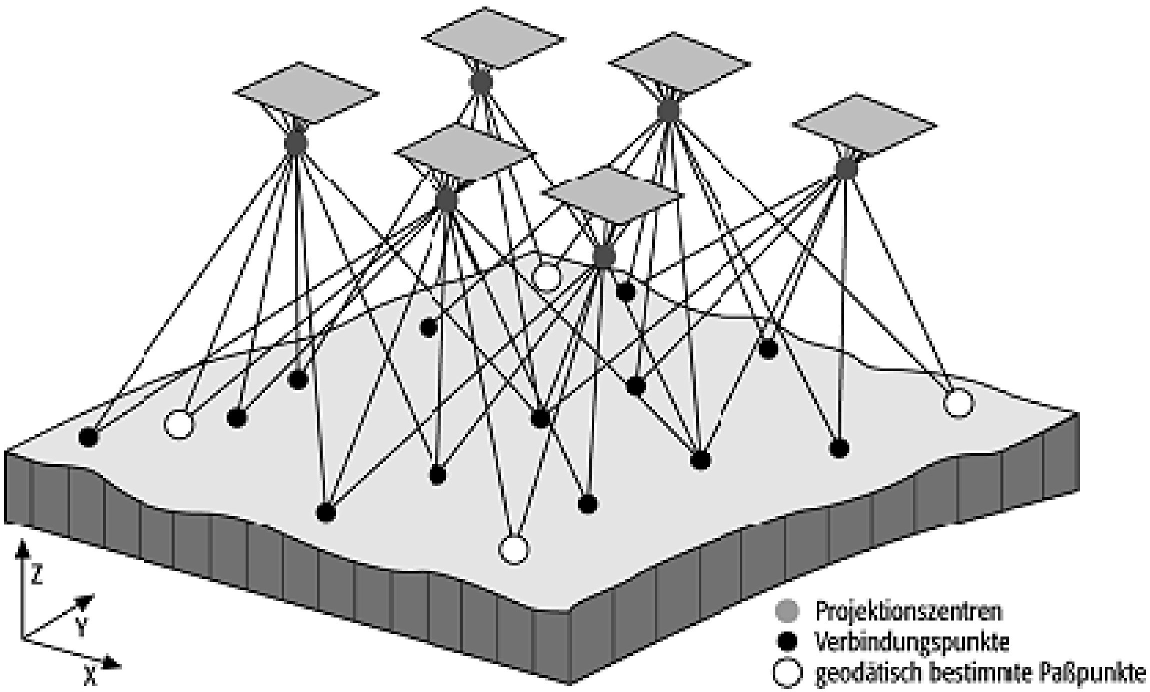


→ Relative dreidimensionale Modellkoordinaten

Absolute Orientierung:

Absolute Orientierung:

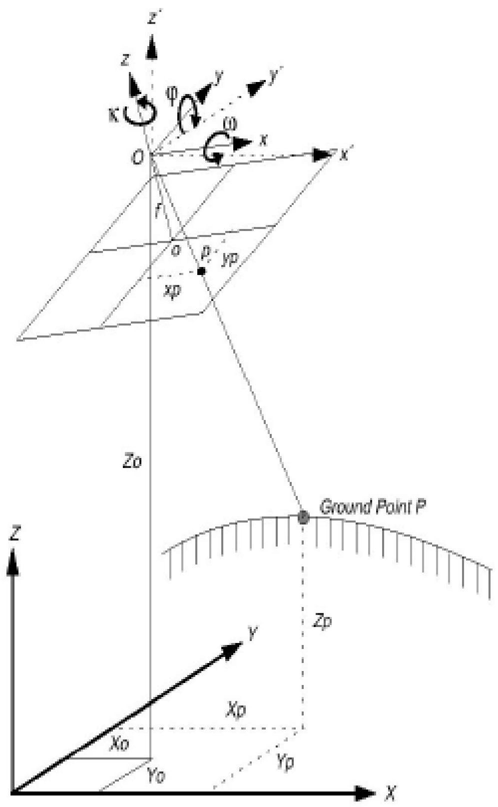
Definition des Bildblocks zum absoluten Bezugskoordinatensystem über Passpunkte



→ absolute dreidimensionale Koordinaten eines Bezugsystems der Wirklichkeit

Quelle: http://www.geodz.com/deu/d/images/1593_buendeltriangulation.png

Relative und absolute Orientierung = äußere Orientierung



Elements of Exterior Orientation

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/aeussere-orientierung.pdf

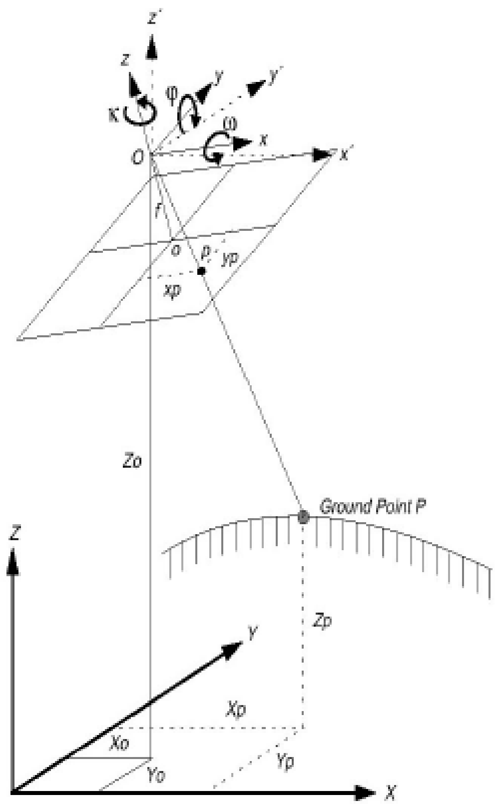
Relative und absolute Orientierung = äußere Orientierung

Positionselemente: X_0, Y_0, Z_0. Sie definieren die Position des Projektionszentrums im 3D-Kartenkoordinatensystem (X,Y,Z). Z_0 beschreibt hierbei die Kamerahöhe ü. NN.

Rotationselemente: κ, φ, ω. Definieren die Beziehung zwischen dem 3D-Kartenkoordinatensystem (X,Y,Z) und dem 3D-Bildkoordinatensystem (x,y,z).

Hierbei gilt:

ω: Rotation um die x-Achse
φ: Rotation um die y-Achse
κ: Rotation um die z-Achse



Elements of Exterior Orientation

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/aeussere-orientierung.pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

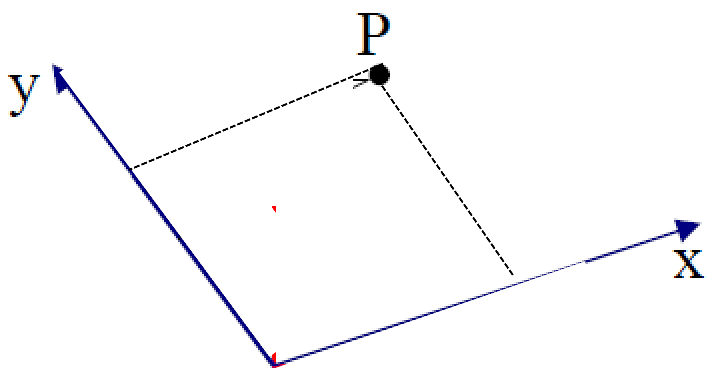
Äußere Orientierung: Rotationselemente

Drehung in der Ebene:

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/aeussere-orientierung.pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Drehung in der Ebene:
geg.: Punkt P (x,y) in einem Koordinatensystem,

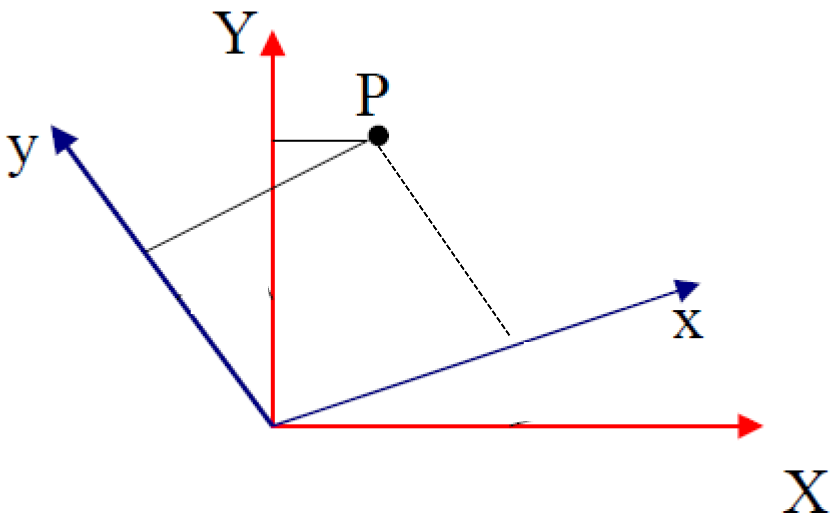


(Quelle: Kraus, 1982, dig. Photogrammetrie I, verändert)

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/aeussere-orientierung.pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Drehung in der Ebene:
geg.: Punkt P (x,y) in einem Koordinatensystem, das gegenüber einem übergeordneten Koordinatensystem gedreht ist



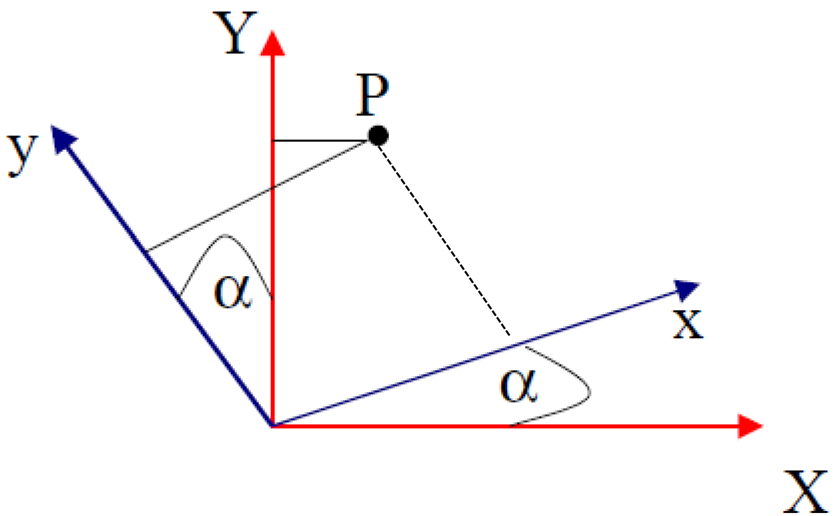
(Quelle: Kraus, 1982, dig. Photogrammetrie I, verändert)

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/aeussere-orientierung.pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Drehung in der Ebene:

geg.: Punkt P (x,y) in einem Koordinatensystem, das um den Winkel α gegenüber einem übergeordneten Koordinatensystem gedreht ist



(Quelle: Kraus, 1982, dig. Photogrammetrie I, verändert)

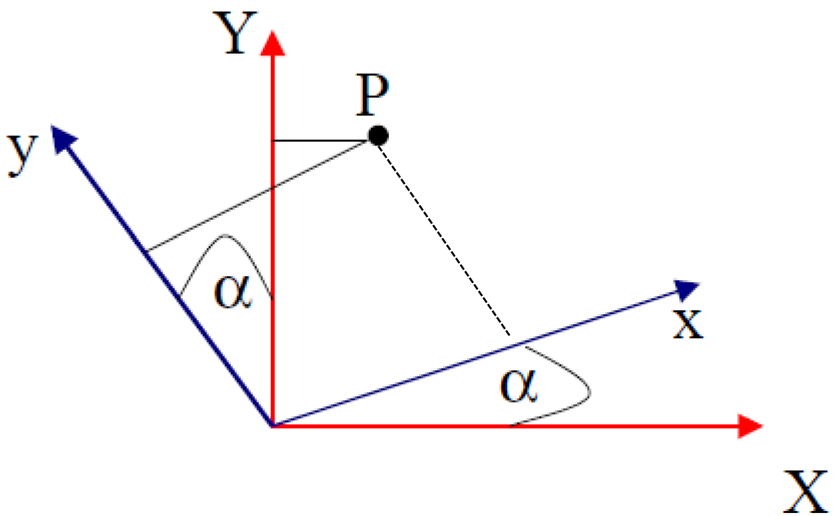
Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/aeussere-orientierung.pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Koordinaten des Punktes
im übergeordneten Koordinatensystem:

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

Drehung in der Ebene:
geg.: Punkt P (x,y) in einem Koordinatensystem, das um den Winkel α gegenüber einem übergeordneten Koordinatensystem gedreht ist



(Quelle: Kraus, 1982, dig. Photogrammetrie I, verändert)

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/aeussere-orientierung.pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Koordinaten des Punktes
im übergeordneten Koordinatensystem:

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

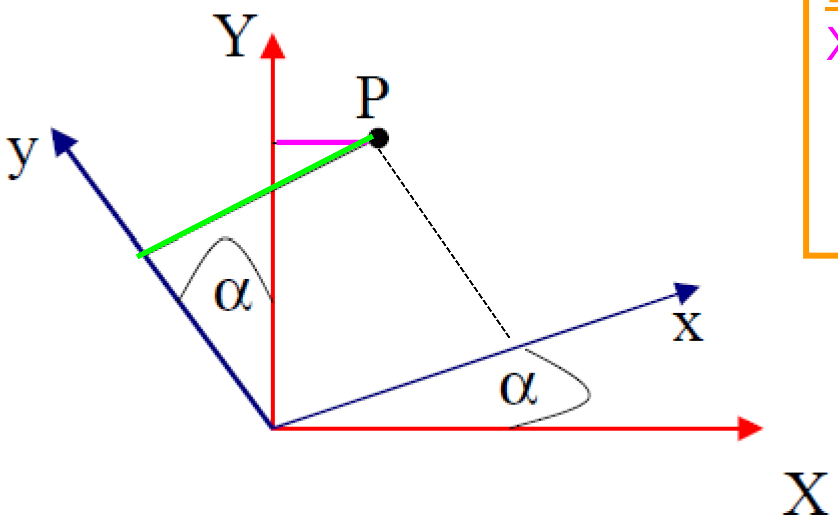
$$Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

Drehung in der Ebene:

geg.: Punkt P (x,y) in einem Koordinatensystem, das um den Winkel α gegenüber einem übergeordneten Koordinatensystem gedreht ist

Erklärung:

X = x * cos alpha



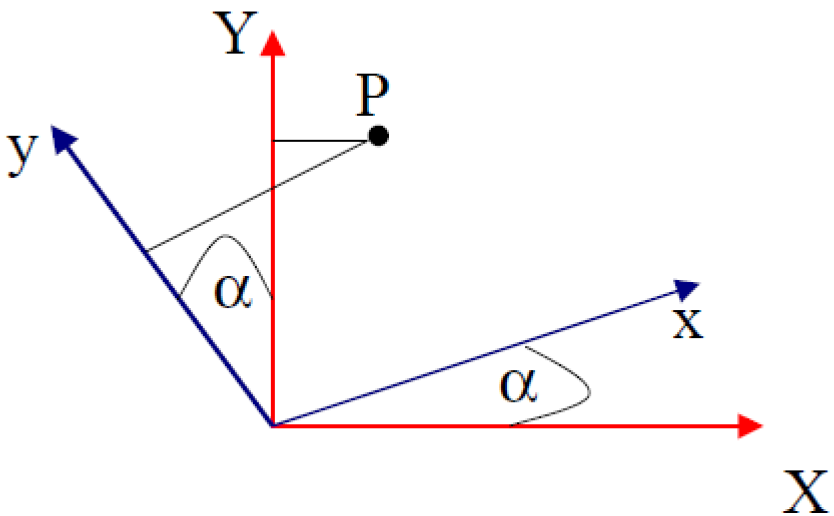
(Quelle: Kraus, 1982, dig. Photogrammetrie I, verändert)

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/aeussere-orientierung.pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Drehung in der Ebene:

geg.: Punkt P (x,y) in einem Koordinatensystem, das um den Winkel α gegenüber einem übergeordneten Koordinatensystem gedreht ist



(Quelle: Kraus, 1982, dig. Photogrammetrie I, verändert)

Koordinaten des Punktes im übergeordneten Koordinatensystem:

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/aeussere-orientierung.pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Drehung
geg.: Pu … as um
der … dneten
Ko

Zur Erinnerung:

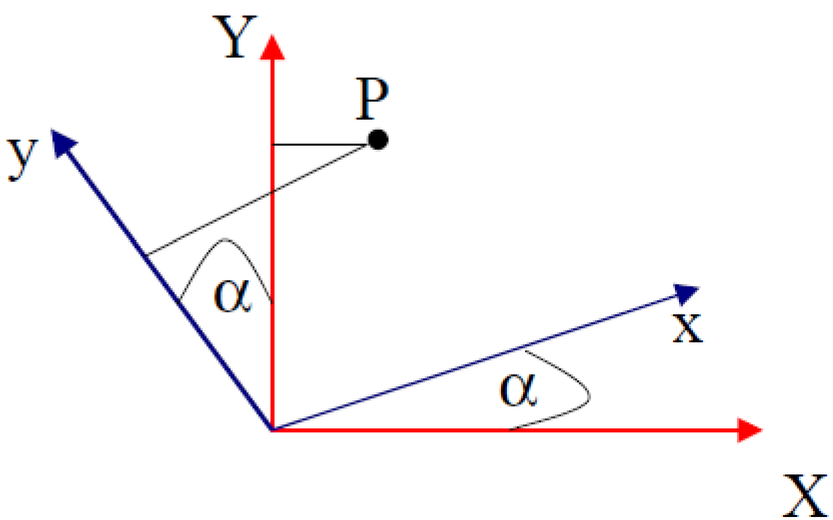
Koordinaten des Punktes
im übergeordneten Koordinatensystem:

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = \underline{R} \quad \underline{x}$$

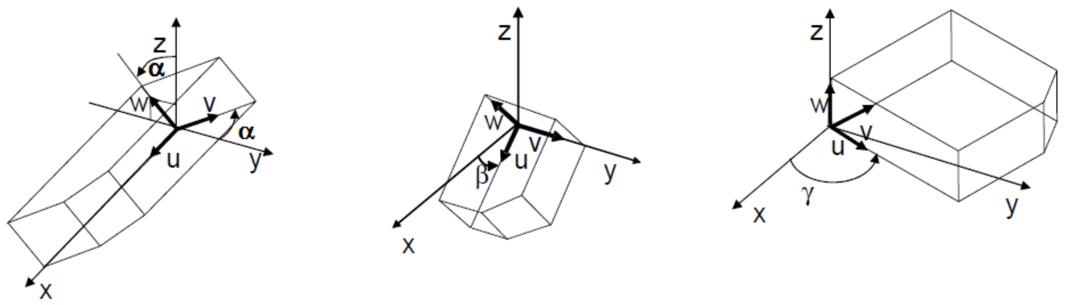


(Quelle: Kraus, 1982, dig. Photogrammetrie I, verändert)

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/aeussere-orientierung.pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Rotation um x: Rotation um y: Rotation um z:



$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

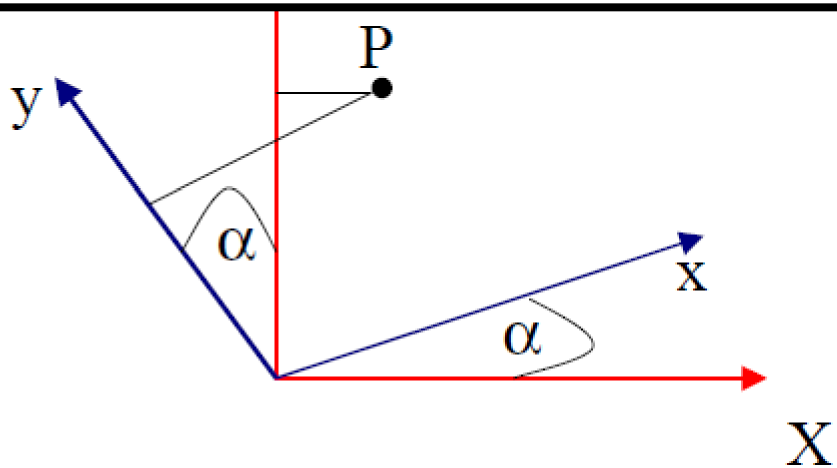
Koordinaten des Punktes
im übergeordneten Koordinatensystem:

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = \underline{R} \quad \underline{x}$$



(Quelle: Kraus, 1982, dig.
Photogrammetrie I, verändert)

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/aeussere-orientierung.pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Drehung im Raum:

Die Transformation eines Punktes P mit seinen Koordinaten (x,y,z) kann in das übergeordnete Koordinatensystem (X,Y,Z) wie folgt realisiert werden:

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/photogrammetrie_ss07pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Drehung im Raum:
Die Transformation eines Punktes P mit seinen Koordinaten (x,y,z) kann in das übergeordnete Koordinatensystem (X,Y,Z) wie folgt realisiert werden:

Drehung um die x-Achse (ω) Drehung um die y-Achse (φ) Drehung um die z-Achse (κ)

$$R_\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \quad R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad R_\kappa = \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es wird per Definition gegen den Uhrzeiger gedreht, wenn man von der Koordinatenspitze zum Koordinatenursprung schaut.

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/photogrammetrie_ss07pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Die $\boxed{\text{Multiplikation der drei Teilmatrizen } R_\Omega,\ R_\Phi \text{ und } R_K}$ führt schließlich zu einer räumlichen (3x3) Drehmatrix $R_{\Omega\Phi K}$, die aus den drei Winkeln ω, φ und κ aufgebaut ist:

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/photogrammetrie_ss07pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Die Multiplikation der drei Teilmatrizen R_Ω, R_Φ und R_K führt schließlich zu einer räumlichen (3x3) Drehmatrix $R_{\Omega\Phi K}$, die aus den drei Winkeln ω, φ und κ aufgebaut ist:

$$\boxed{\begin{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \\ R\omega \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ R\phi \end{matrix}} =$$

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/photogrammetrie_ss07pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Die Multiplikation der drei Teilmatrizen R_Ω, R_Φ und R_K führt schließlich zu einer räumlichen (3x3) Drehmatrix $R_{\Omega\Phi K}$, die aus den drei Winkeln ω, φ und κ aufgebaut ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}}_{R\omega} * \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{R\phi} = \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ \sin\omega\sin\varphi & \cos\omega & -\sin\omega\cos\varphi \\ -\cos\omega\sin\varphi & \sin\omega & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix}}_{R\omega\phi}}$$

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/photogrammetrie_ss07pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Die Multiplikation der drei Teilmatrizen R_Ω, R_Φ und R_K führt schließlich zu einer räumlichen (3x3) Drehmatrix $R_{\Omega\Phi K}$, die aus den drei Winkeln ω, φ und κ aufgebaut ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ \sin\omega\sin\varphi & \cos\omega & -\sin\omega\cos\varphi \\ -\cos\omega\sin\varphi & \sin\omega & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ \sin\omega\sin\varphi & \cos\omega & -\sin\omega\cos\varphi \\ -\cos\omega\sin\varphi & \sin\omega & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix}}_{R\omega\phi} * \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R\kappa}$$

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/photogrammetrie_ss07pdf

Äußere Orientierung: Rotationselemente

Die Multiplikation der drei Teilmatrizen R_Ω, R_Φ und R_K führt schließlich zu einer räumlichen (3x3) Drehmatrix $R_{\Omega\Phi K}$, die aus den drei Winkeln ω, φ und κ aufgebaut ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ \sin\omega\sin\varphi & \cos\omega & -\sin\omega\cos\varphi \\ -\cos\omega\sin\varphi & \sin\omega & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix}$$

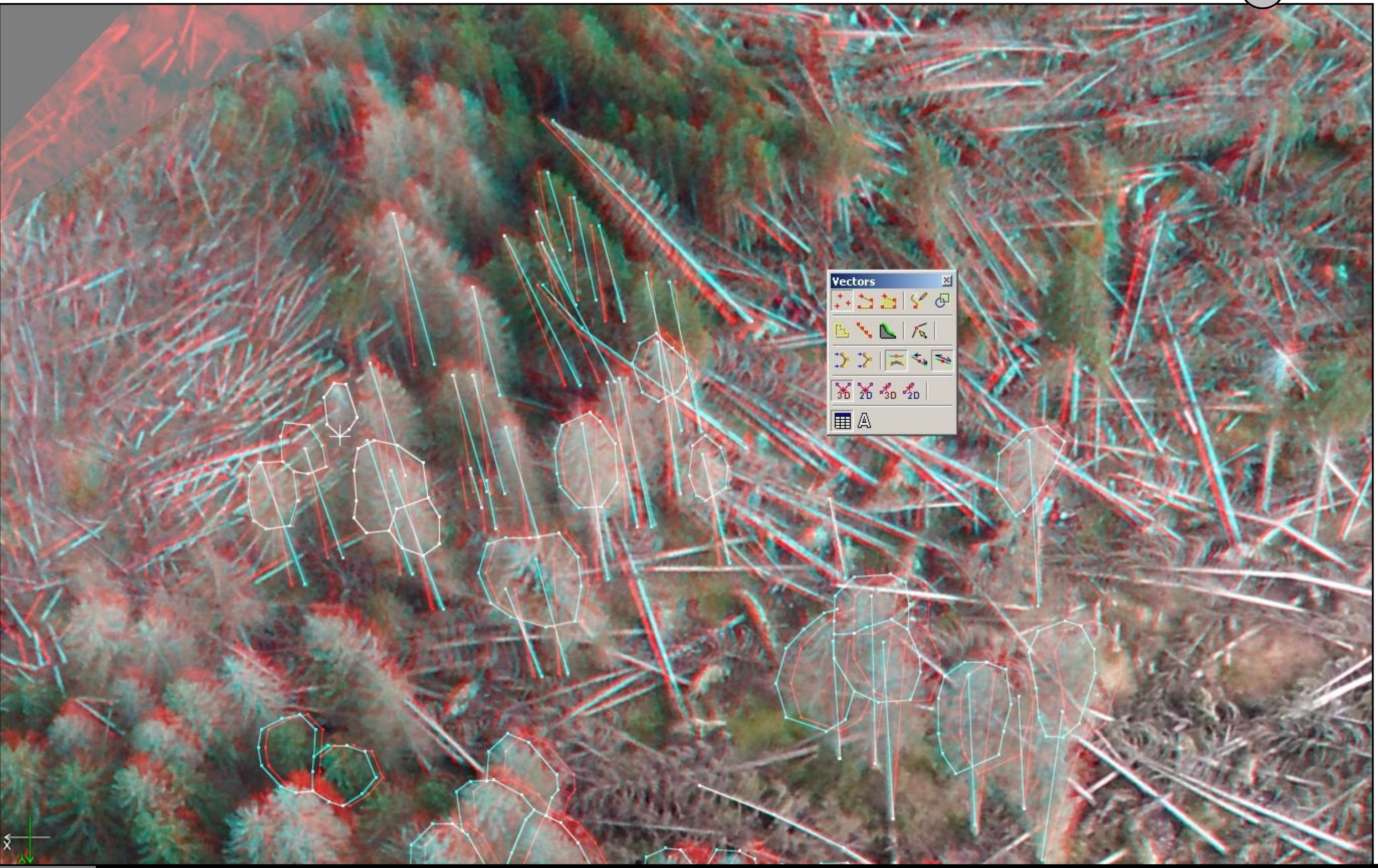
$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ \sin\omega\sin\varphi & \cos\omega & -\sin\omega\cos\varphi \\ -\cos\omega\sin\varphi & \sin\omega & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & -\cos\varphi\sin\kappa & \sin\varphi \\ \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & -\sin\omega\cos\varphi \\ \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix}} = R_{\omega\varphi\kappa}$$

(Quelle: Kraus, 1982: Dig. Photogrammetrie II)

Quelle: http://ladamer.org/Feut/pdf/Kursbegleitung/dp/photogrammetrie_ss07pdf

Soweit ein theoretischer Exkurs in die Photogrammetrie …



Koordinatensysteme als Bezugssysteme - Beispiele

Koordinatensysteme als Bezugssysteme - Beispiele

(1) Gauß – Krüger - Koordinatensystem

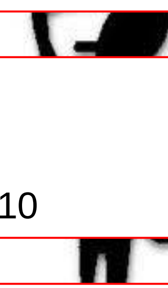
(2) UTM - Koordinatensystem

Koordinatensysteme als Bezugssysteme - Beispiele

(1) Gauß – Krüger - Koordinatensystem

(2) UTM - Koordinatensystem

→ **in Kleingruppe selbst erarbeiten und präsentieren**
→ **Verwenden Sie dazu auch das Arbeitsmaterial**



UTM – Abbildung und UTM Koordinaten

http://vermessung.bayern.de/file/pdf/1910/UTM%20Abbildung%20und%20Koordinaten.pdf

Die Gauß-Krüger Abbildung (GK-Abbildung)

http://www.adv-online.de/icc/extdeu/broker.jsp?uMen=c87707b7-f12f-9d01-3bbe-251ec0023010

Was unterscheidet die Gauß-Krüger Abbildung von der UTM Abbildung

http://www.lgn.niedersachsen.de/portal/live.php?navigation_id=11056&article_id=51596&_psmand=35

(1) Gauß – Krüger - Koordinatensystem

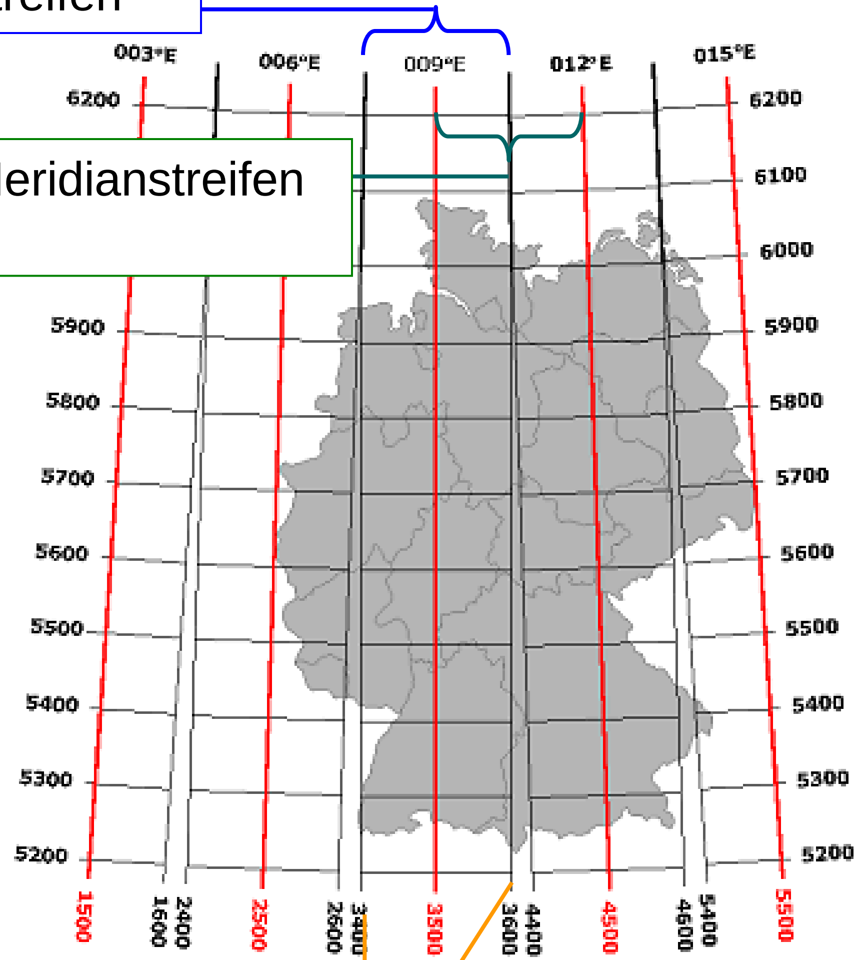
(1) Gauß – Krüger - Koordinatensystem

- kartesisches Koordinatensystem
- Gebiete, die nicht zu groß sind können mit metrischen Koordinaten (Rechts- und Hochwert) verortet werden.
- von 1935 bis 2010 in ganz Deutschland als Kartengrundlage verwendet

Aufbau:

Aufteilung in 3° breite Meridianstreifen

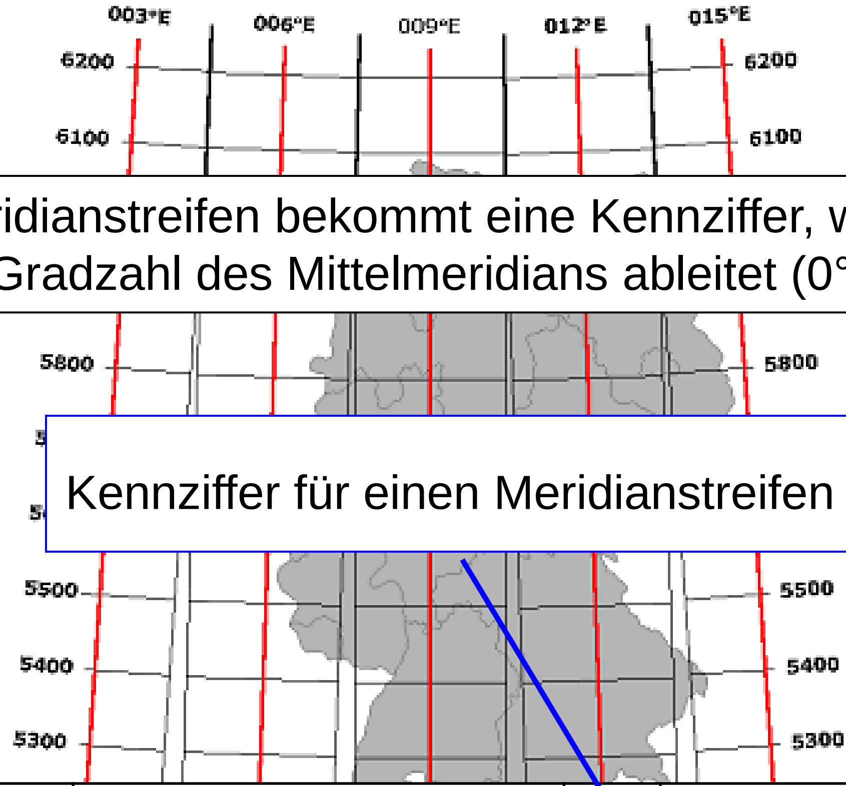
die Mittelmeridiane benachbarter Meridianstreifen liegen demnach 3° auseinander



jeder Meridianstreifen geht vom Nord- bis Südpol parallel zu seinem Mittelmeridian

patrick.reidelstuerz@hdu-deggendorf.de

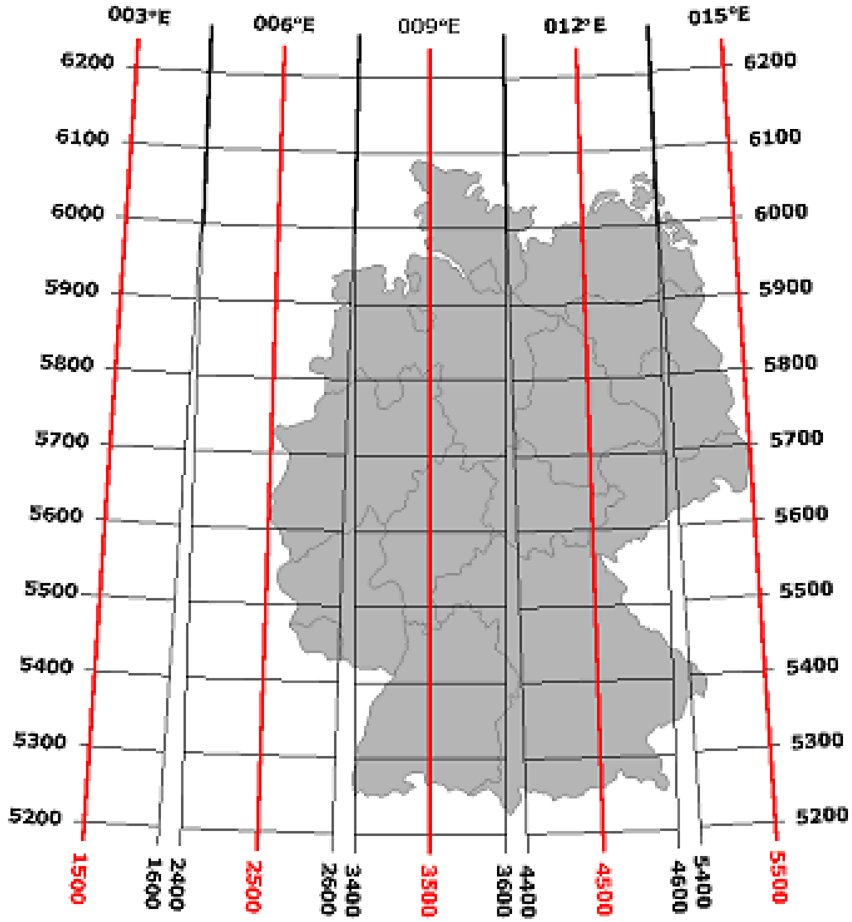
Aufbau:



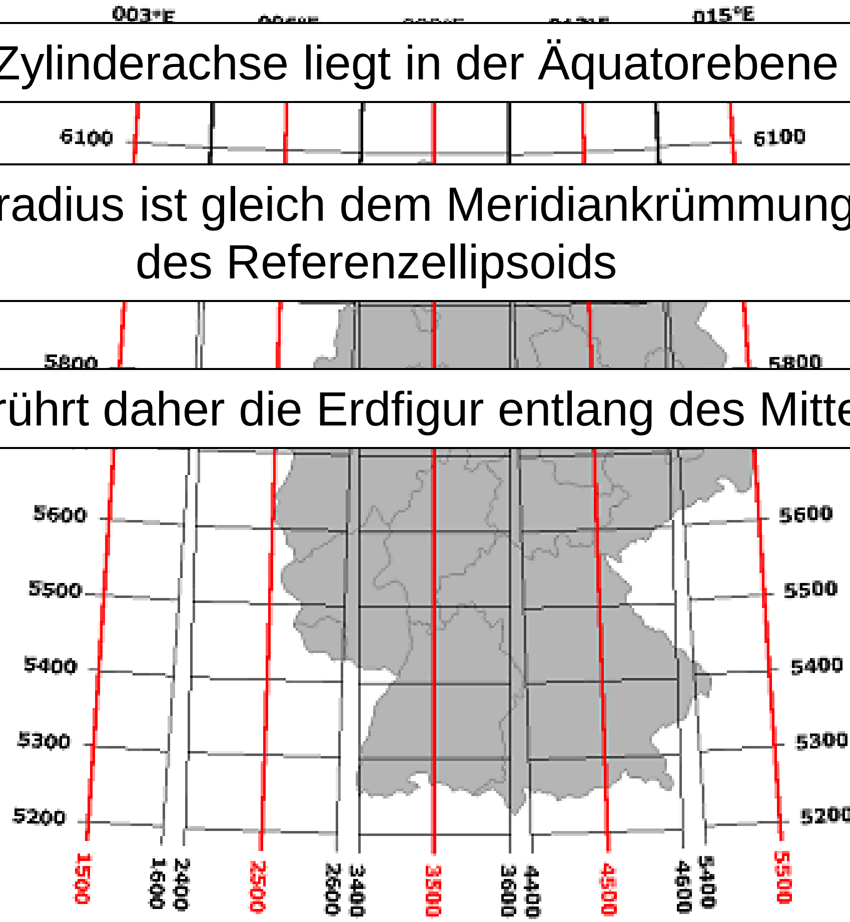
jeder Meridianstreifen bekommt eine Kennziffer, welche sich aus der Gradzahl des Mittelmeridians ableitet (0°, 3°, 6°…)

Kennziffer für einen Meridianstreifen mit je 3°

Mittelmeridian	**westliche Länge**					**östliche Länge**						
Längengrad	...	9°	6°	3°	0°	3°	6°	9°	12°	15°	...
Kennziffer	...	117	118	119	0	1	2	3	4	5	...



Quelle: http://www.gs-enduro.de/pics/pics_orientierung/pics_navigation/gk-meridianstreifen.gif der Meridianstreifen wird auf einen Zylindermantel winkeltreu (konform) abgebildet

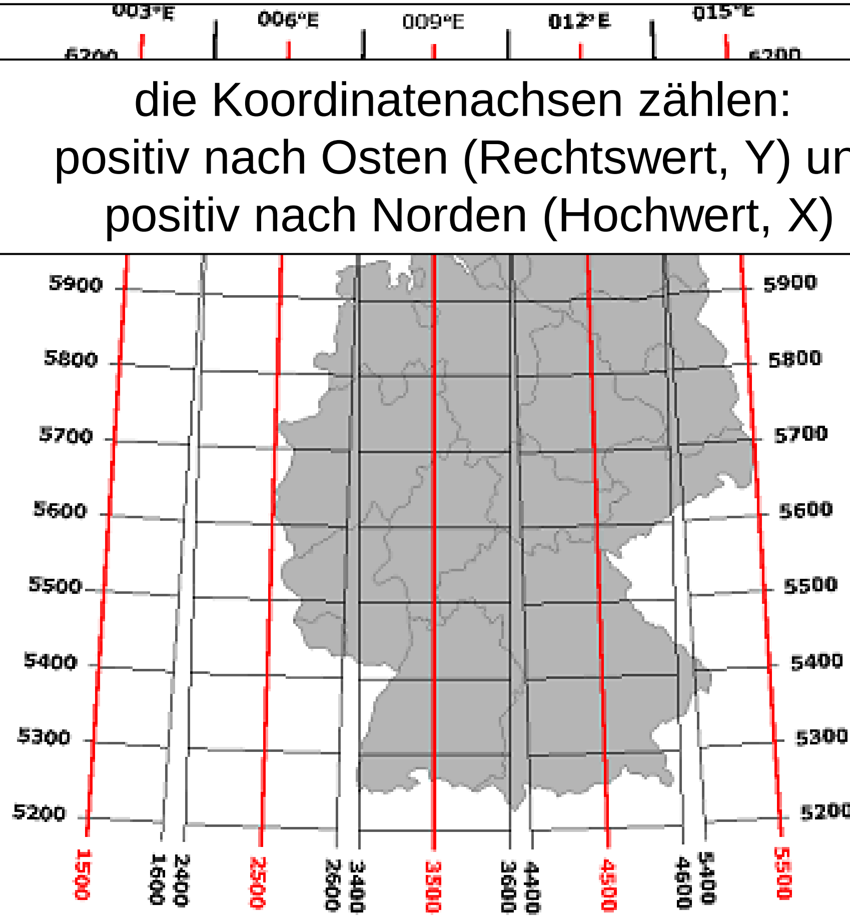


die Zylinderachse liegt in der Äquatorebene

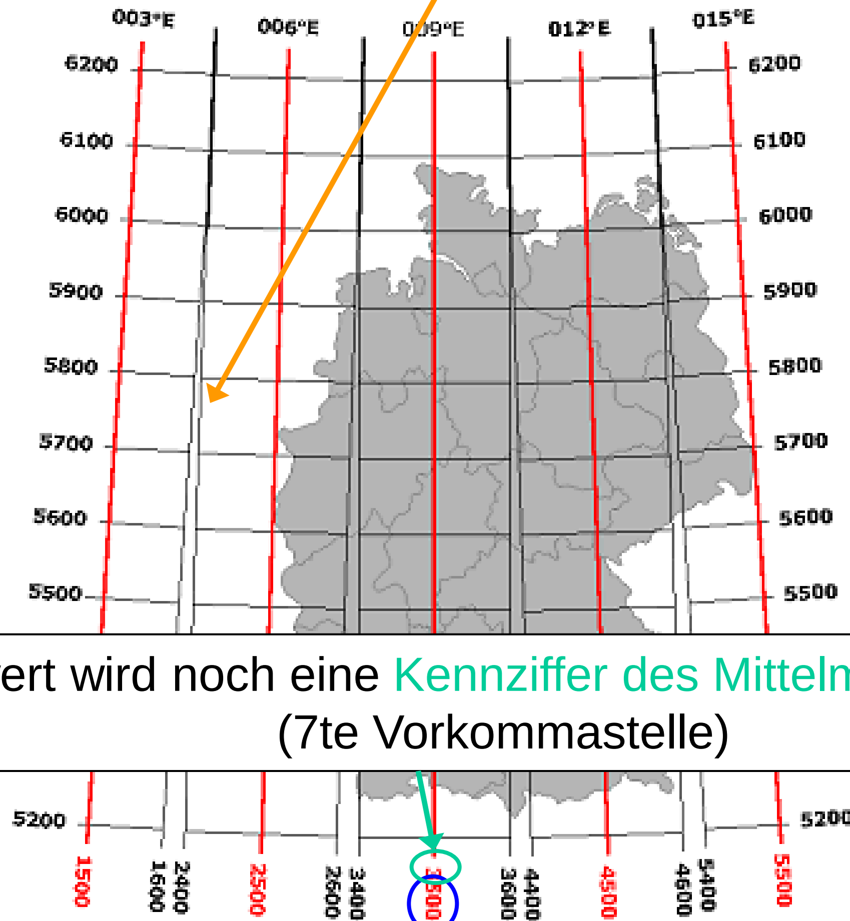
der Zylinderradius ist gleich dem Meridiankrümmungsradius des Referenzellipsoids

der Zylinder berührt daher die Erdfigur entlang des Mittelmeridians der Koordinatenursprung ist der Schnittpunkt zwischen Äquator und Mittelmeridian

die Koordinatenachsen zählen:
positiv nach Osten (Rechtswert, Y) und
positiv nach Norden (Hochwert, X)



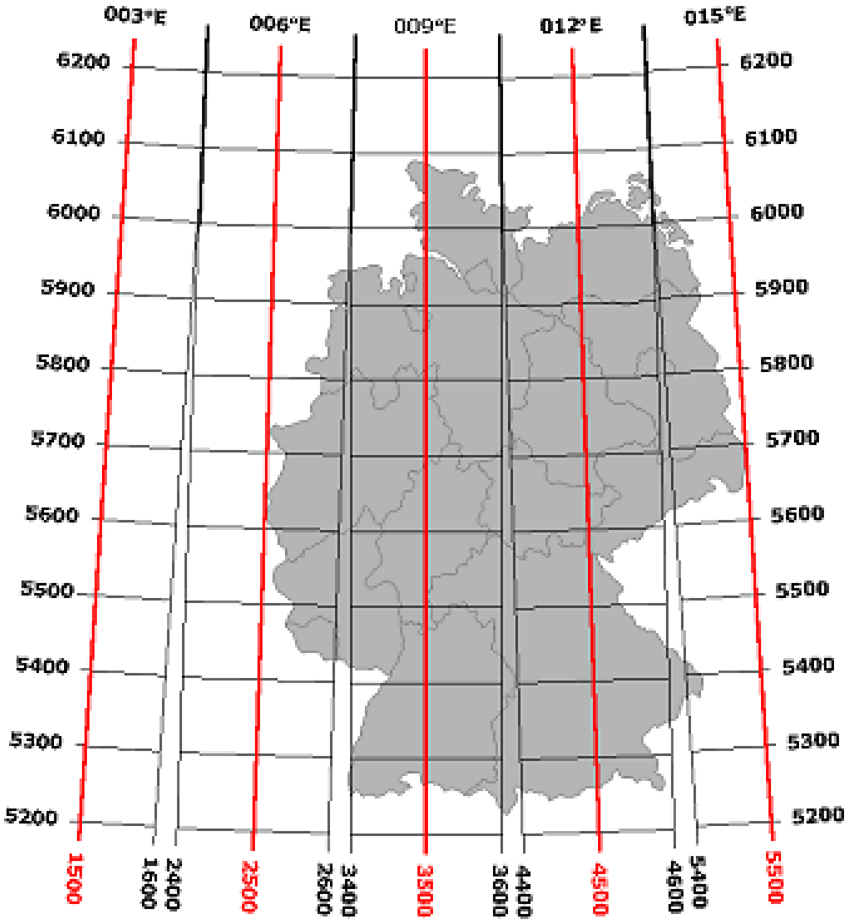
die Rechts- und Hochwerte des kartesischen Systems verlaufen parallel zu den Achsen



dem Rechtswert wird noch eine Kennziffer des Mittelmeridians hinzugefügt (7te Vorkommastelle)

um negative Werte bei den Rechtswerten zu vermeiden, wird ein konstanter Wert von 500 000m dazu addiert

2 benachbarte Systeme überlappen sich mit einem
20 Längenminuten breiten Streifen (im Mittel etwa 23km)



im Überlappungsbereich werden offiziell beide Koordinaten angegeben,
damit man dort nicht ständig mit wechselnden Systemen arbeiten muss

Gauß – Krüger in Deutschland:

- verwendet das Bessel Ellipsoid
- zunächst Datum Rauenberg, nach dessen Zerstörung: Helmertturm in Potsdam
- in der DDR wurde wie in der Sowjetunion für das Gauß Krüger Koordinatensystem das Krassowski – Ellipsoid verwendet
- wird heute noch in Mecklenburg-Vorpommern und in Sachsen-Anhalt verwendet
- im amtlichen Vermessungswesen wird derzeit von Gauß-Krüger Koordinaten auf UTM Koordinaten umgestellt.

- für die in Deutschland verwendeten Meridianstreifen gelten folgende Bezeichnungen:

31466 für den Meridianstreifen mit der Kennziffer 2

31467 für den Meridianstreifen mit der Kennziffer 3

31468 für den Meridianstreifen mit der Kennziffer 4

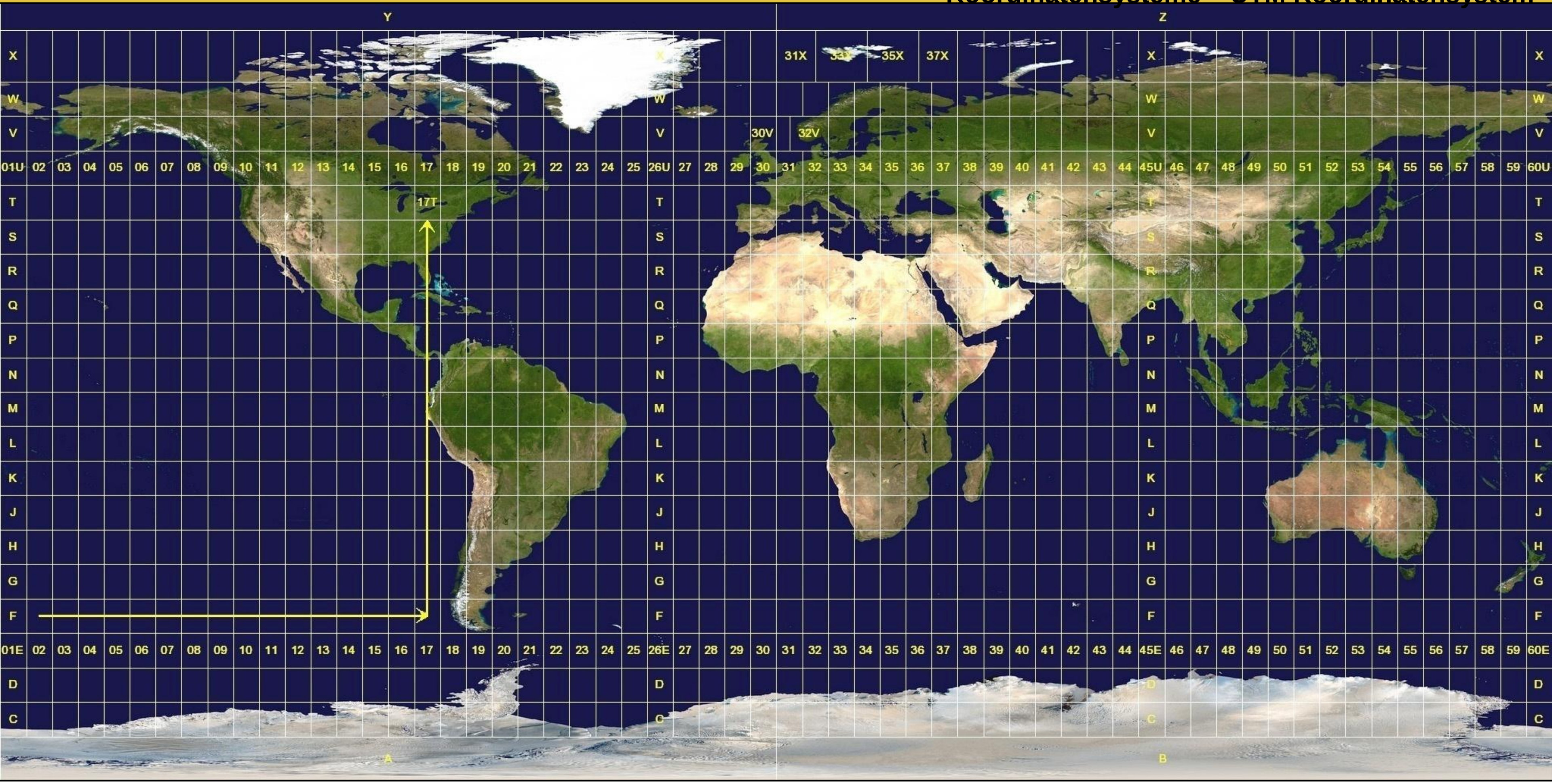
31469 für den Meridianstreifen mit der Kennziffer 5

Es findet sich derzeit noch eine Reihe von Geodatendiensten mit

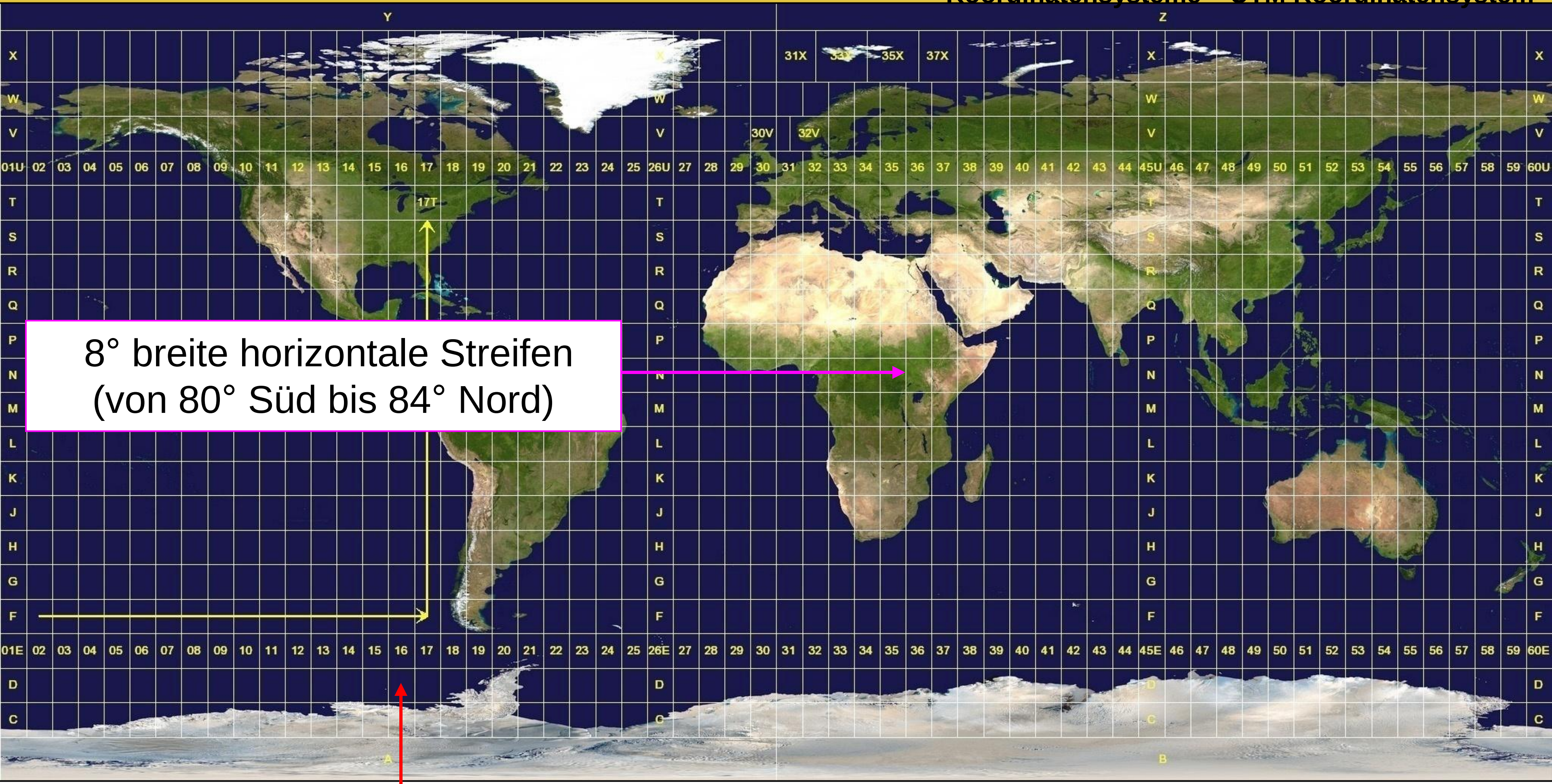
- falschen Kennungen (31492–31495) oder
- alten Kennungen (31462–31465).

Zu beachten ist, dass sich die Systeme mit alter und neuer Kennung in der Reihenfolge der Koordinatenwerte (Rechtswert, Hochwert [alt] bzw. Hochwert, Rechtswert [neu]) unterscheiden

(2) UTM - Koordinatensystem



Quelle: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Utm-zones.jpg&filetimestamp=20070126110825



6° breite vertikale Zonen

globales Koordinatensystem

Quelle: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Utm-zones.jpg&filetimestamp=20070126110825

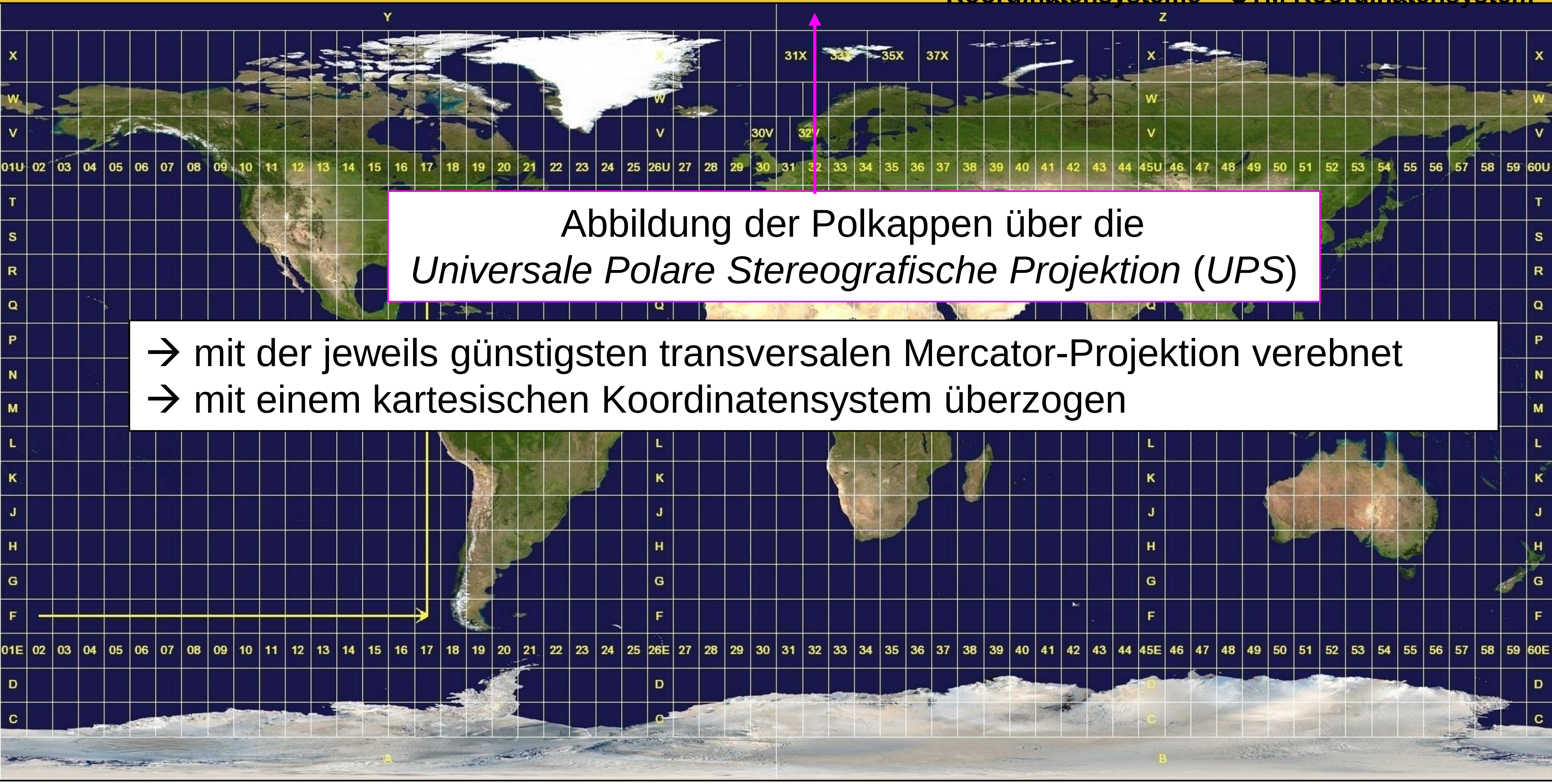


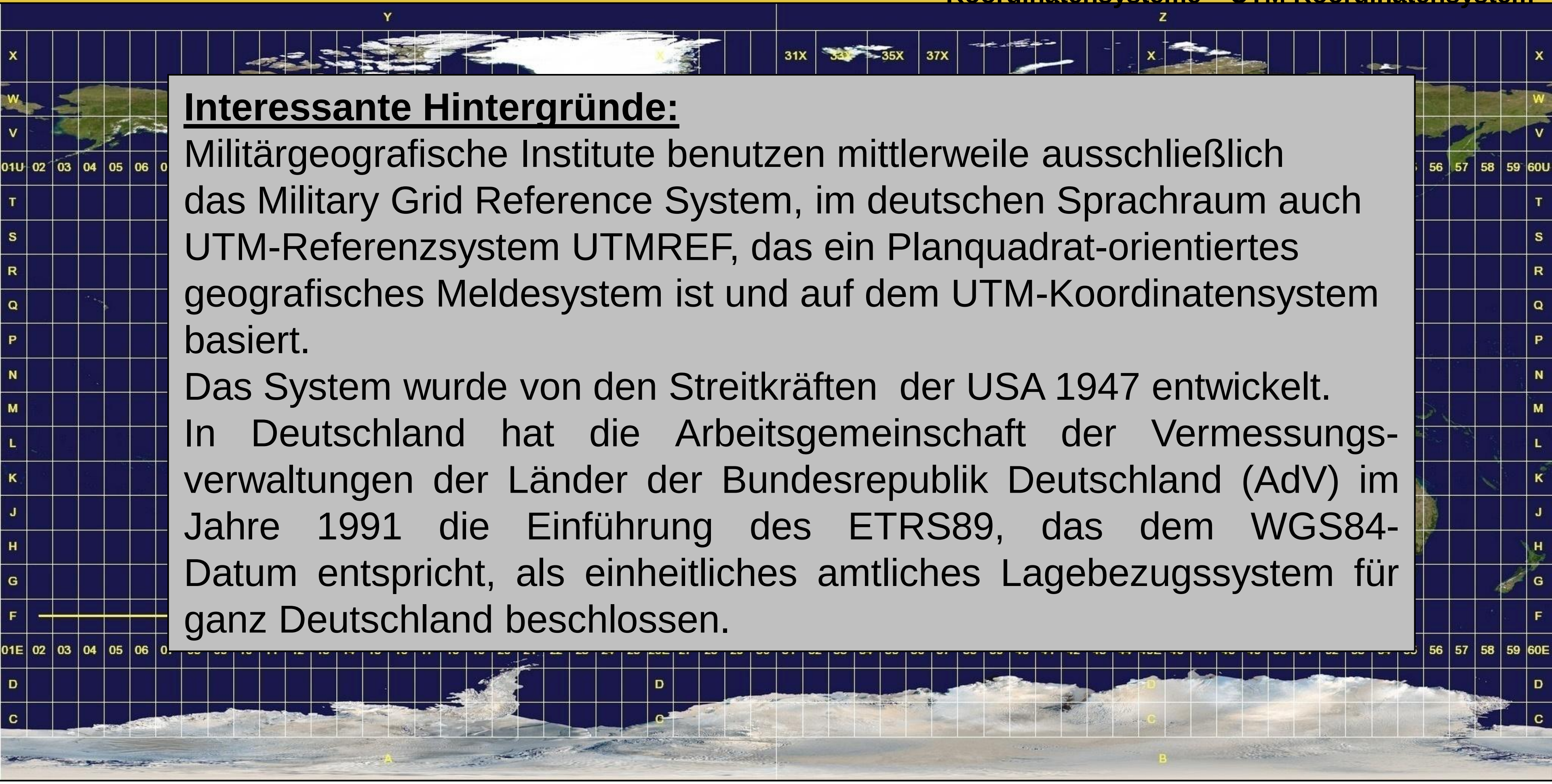
Abbildung der Polkappen über die
Universale Polare Stereografische Projektion (*UPS*)

→ mit der jeweils günstigsten transversalen Mercator-Projektion verebnet
→ mit einem kartesischen Koordinatensystem überzogen

in Deutschland und in Österreich: UTM-Koordinaten vermehrt unter Bezug auf das Referenzsystem ETRS89 mit dem GRS80-Ellipsoid

das mit UTM verwandte Gauß-Krüger-Koordinatensystem verliert langfristig an Bedeutung

Quelle: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Utm-zones.jpg&filetimestamp=20070126110825



Interessante Hintergründe:

Militärgeografische Institute benutzen mittlerweile ausschließlich das Military Grid Reference System, im deutschen Sprachraum auch UTM-Referenzsystem UTMREF, das ein Planquadrat-orientiertes geografisches Meldesystem ist und auf dem UTM-Koordinatensystem basiert.

Das System wurde von den Streitkräften der USA 1947 entwickelt.

In Deutschland hat die Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland (AdV) im Jahre 1991 die Einführung des ETRS89, das dem WGS84-Datum entspricht, als einheitliches amtliches Lagebezugssystem für ganz Deutschland beschlossen.

Quelle: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Utm-zones.jpg&filetimestamp=20070126110825

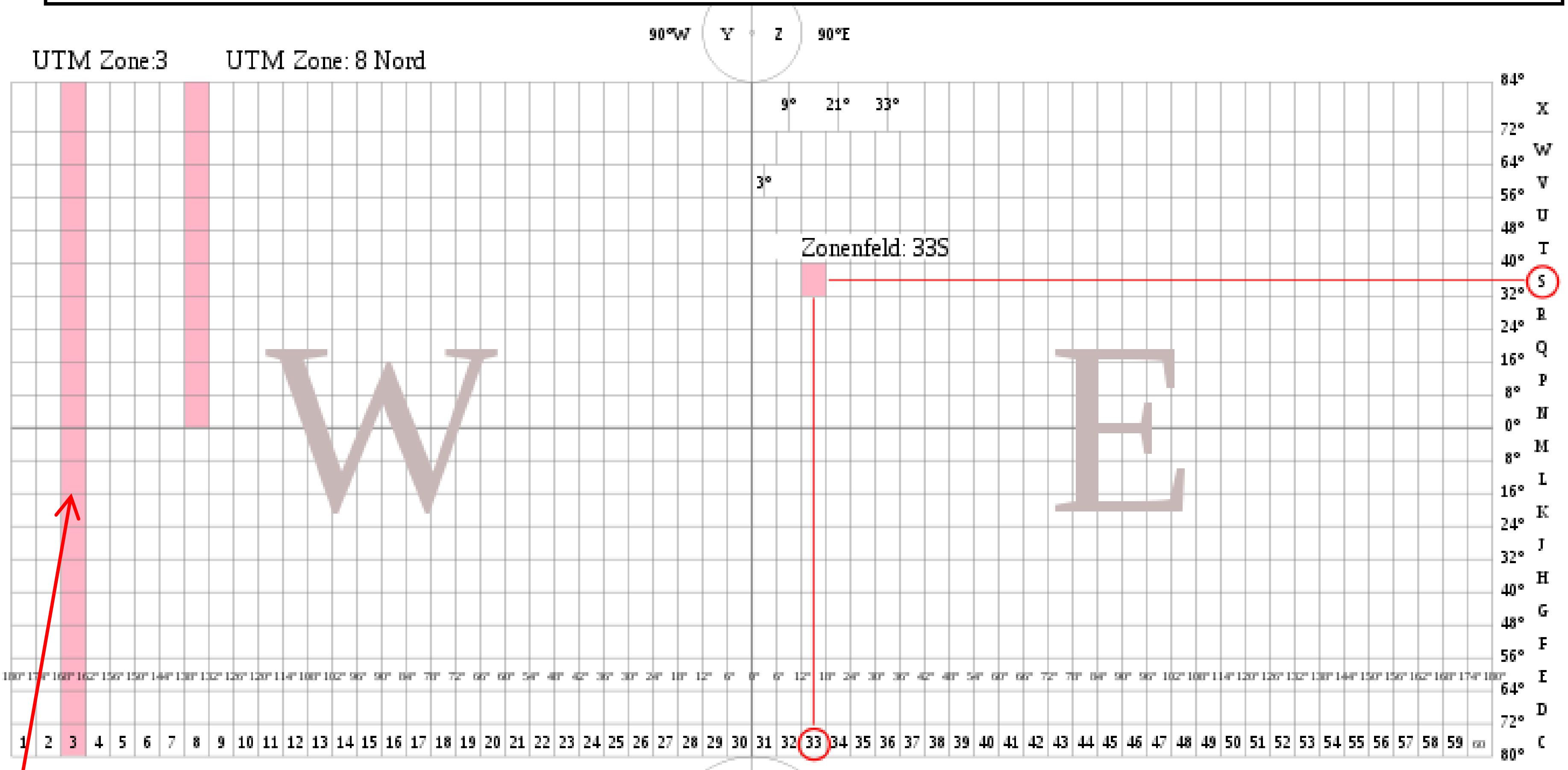
Aufbau:

UTM nutzt eine transversale Mercator-Projektion

Dabei schneidet der Projektionszylinder die Oberfläche, sodass ein streifenförmiger Teil des Erdballs aus der Zylinderoberfläche herausragt.

Quelle: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Utmzylinderrp.jpg&filetimestamp=20050506225502

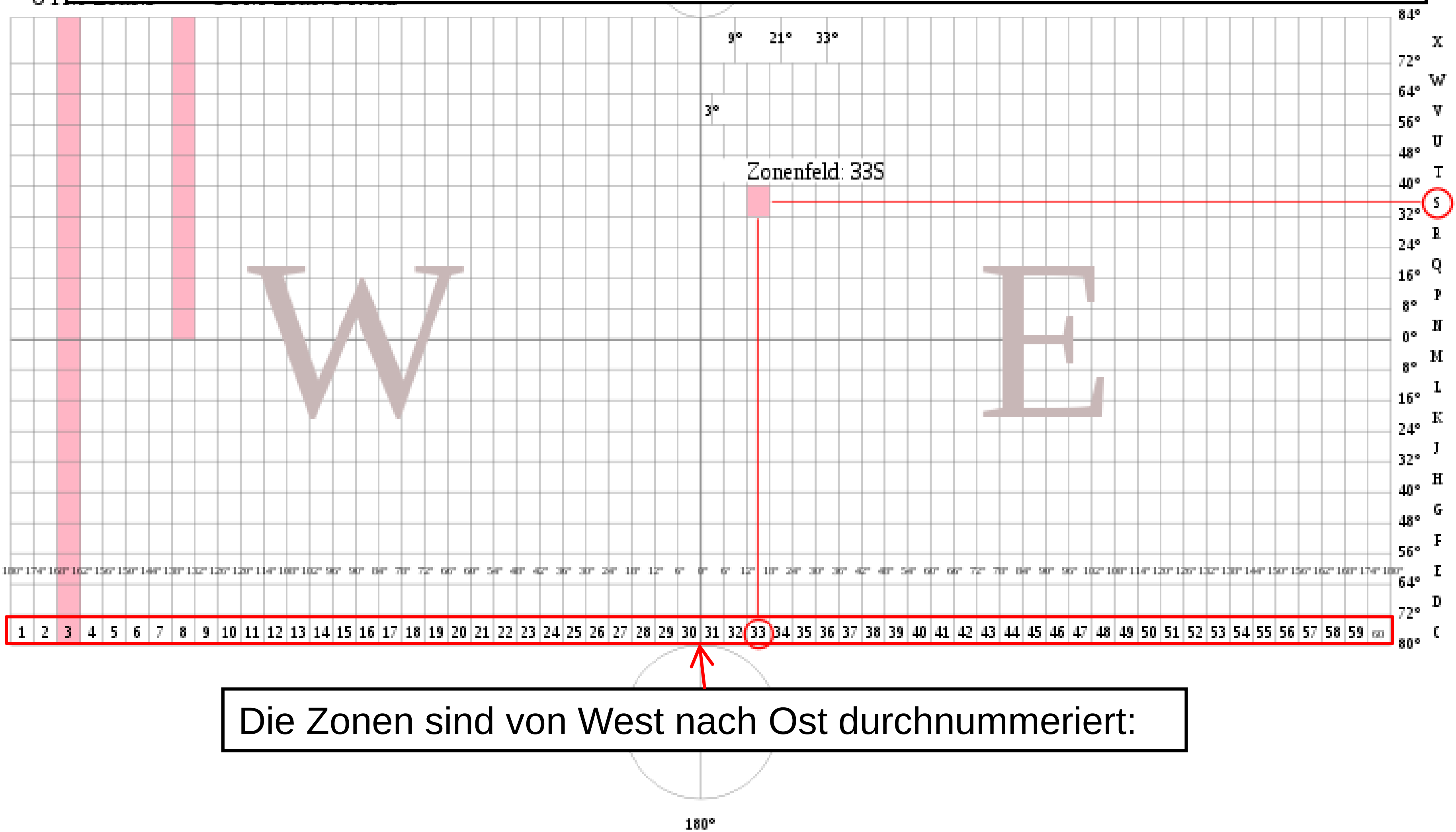
UTM ist keine einzelne Projektion, welche die gesamte Erdoberfläche abdeckt:



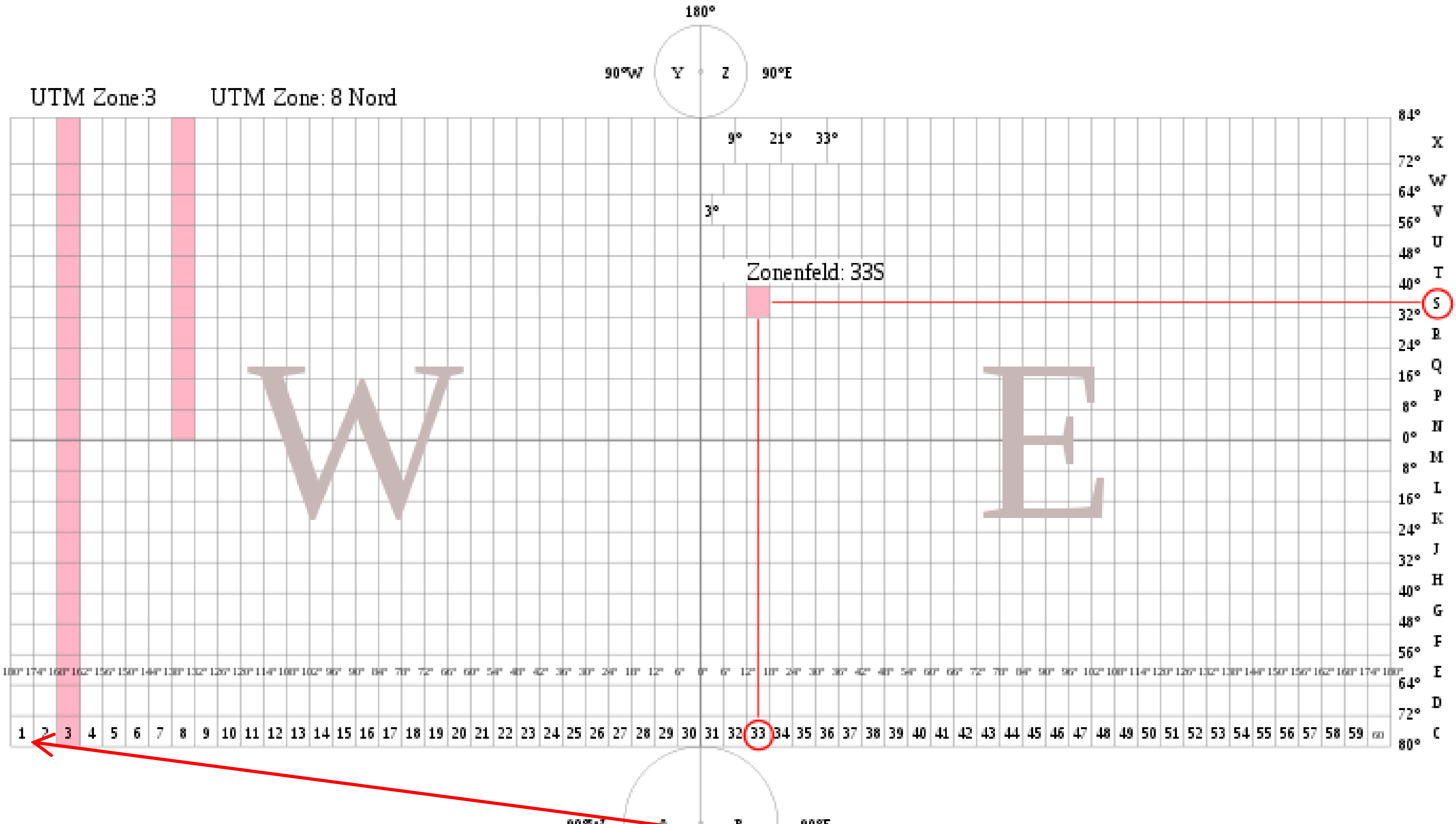
- um Verzerrungen zu reduzieren wird die Erde in 6° breite Zonen unterteilt.

Beginnend vom 180. Längengrad West und dem 180. Längengrad Ost (Datumsgrenze)

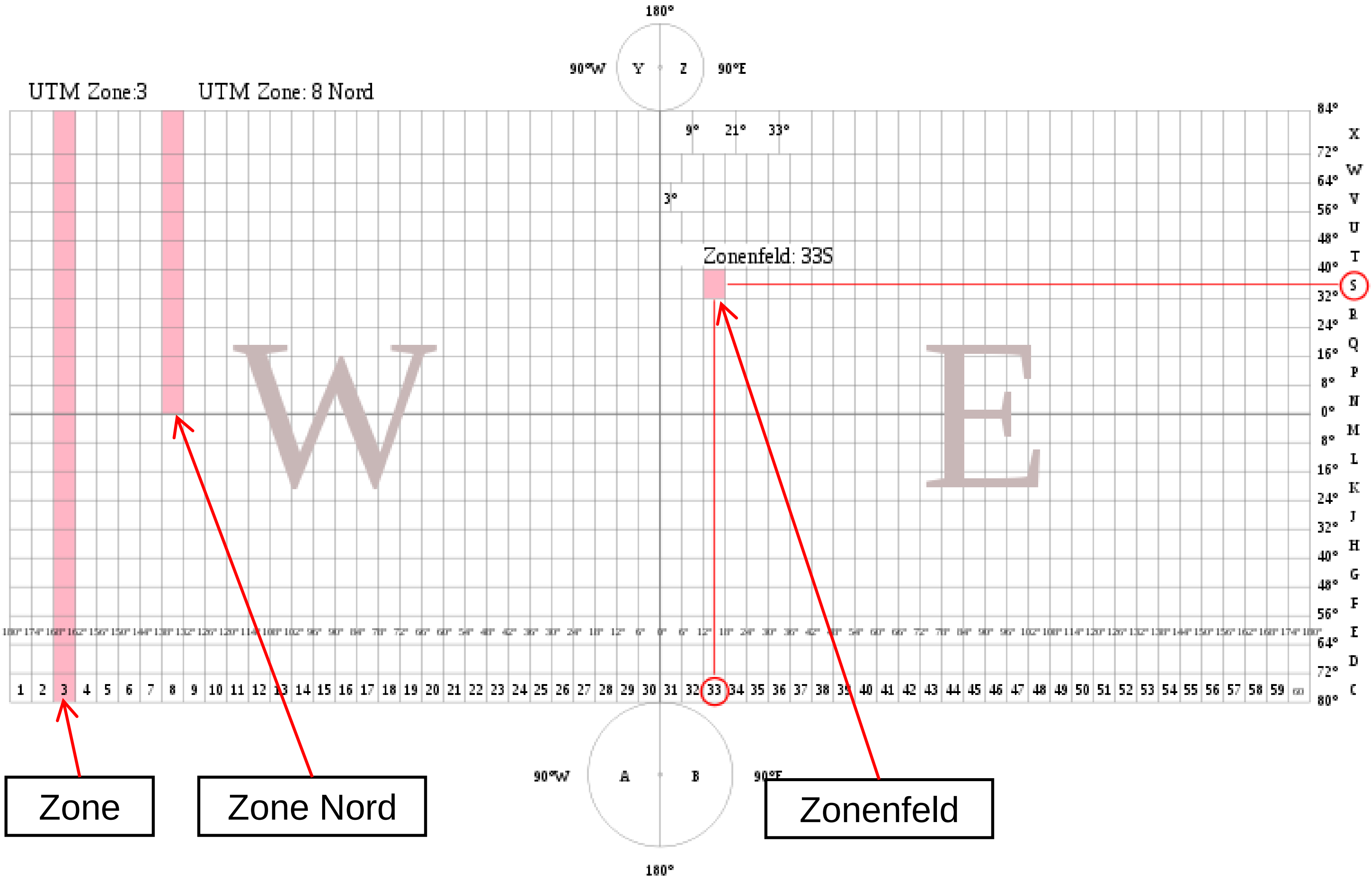
Zur Projektion wird jeweils der mittlere Meridian der Zone als Bezugsmeridian herangezogen.

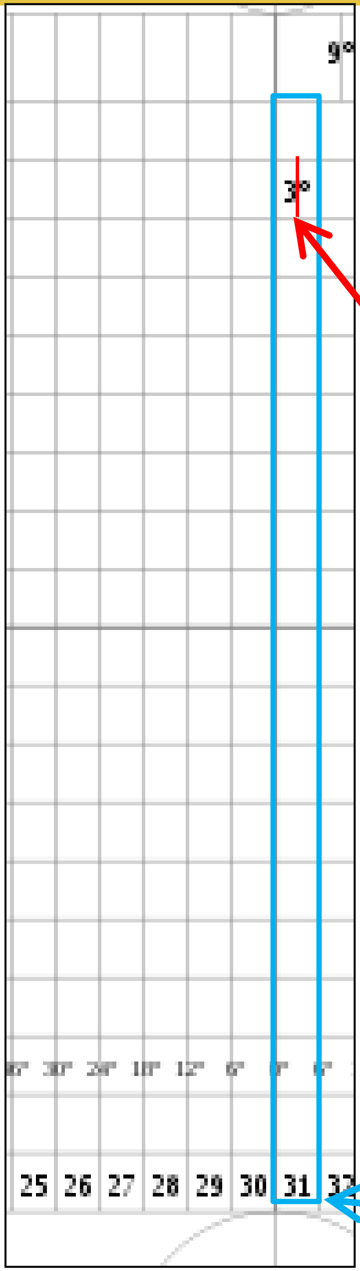


Die Zonen sind von West nach Ost durchnummeriert:



Zone 180° bis 174° westlicher Länge: → Kennziffer 1.
Zone 174° bis 168° westlicher Länge: → Kennziffer 2

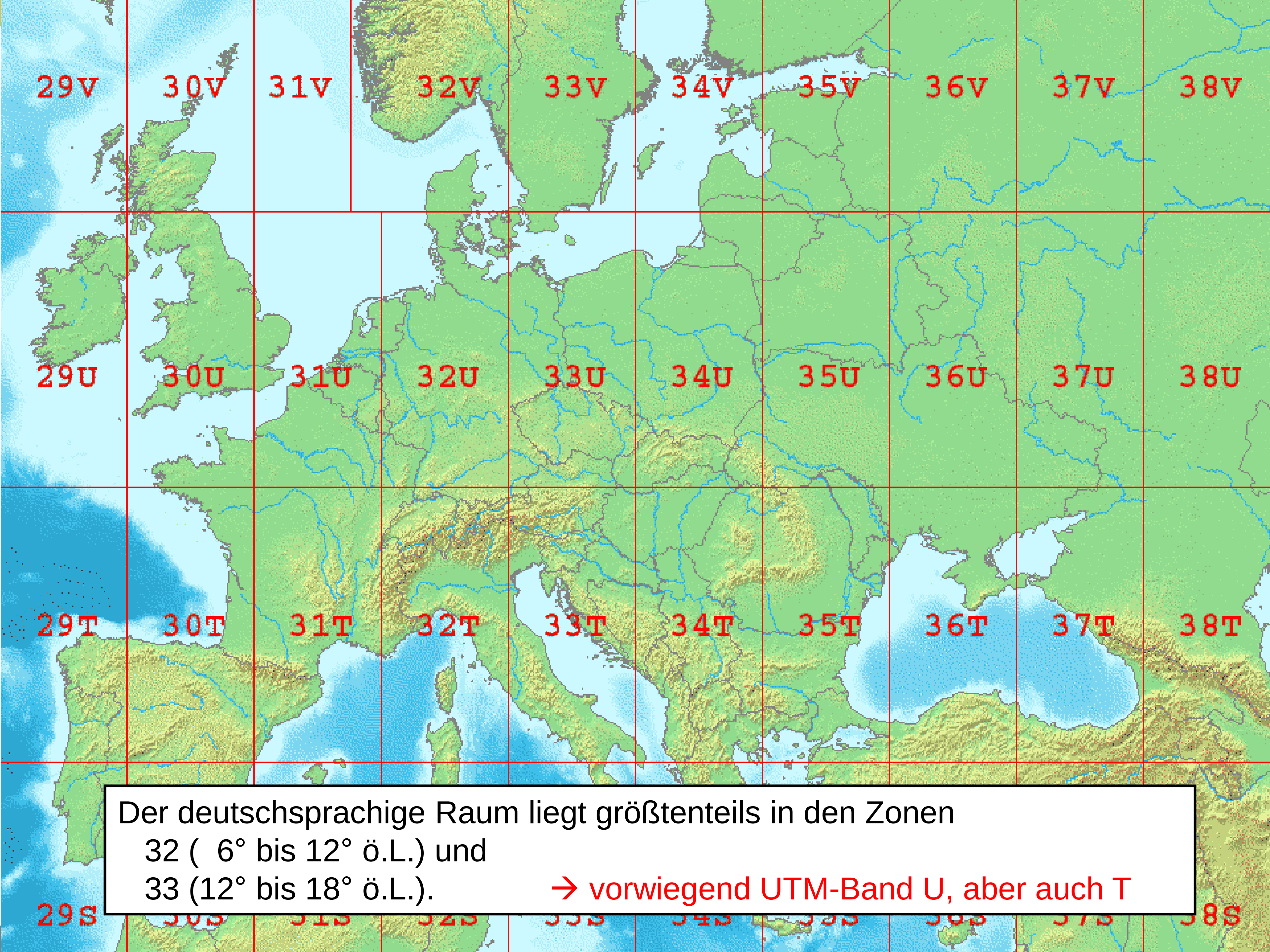

UTM Zone:3
UTM Zone: 8 Nord
Zonenfeld: 33S
W
E
Zone
Zone Nord
Zonenfeld



Bsp.:

Zone 31 erstreckt sich von 0° bis 6° Ost.

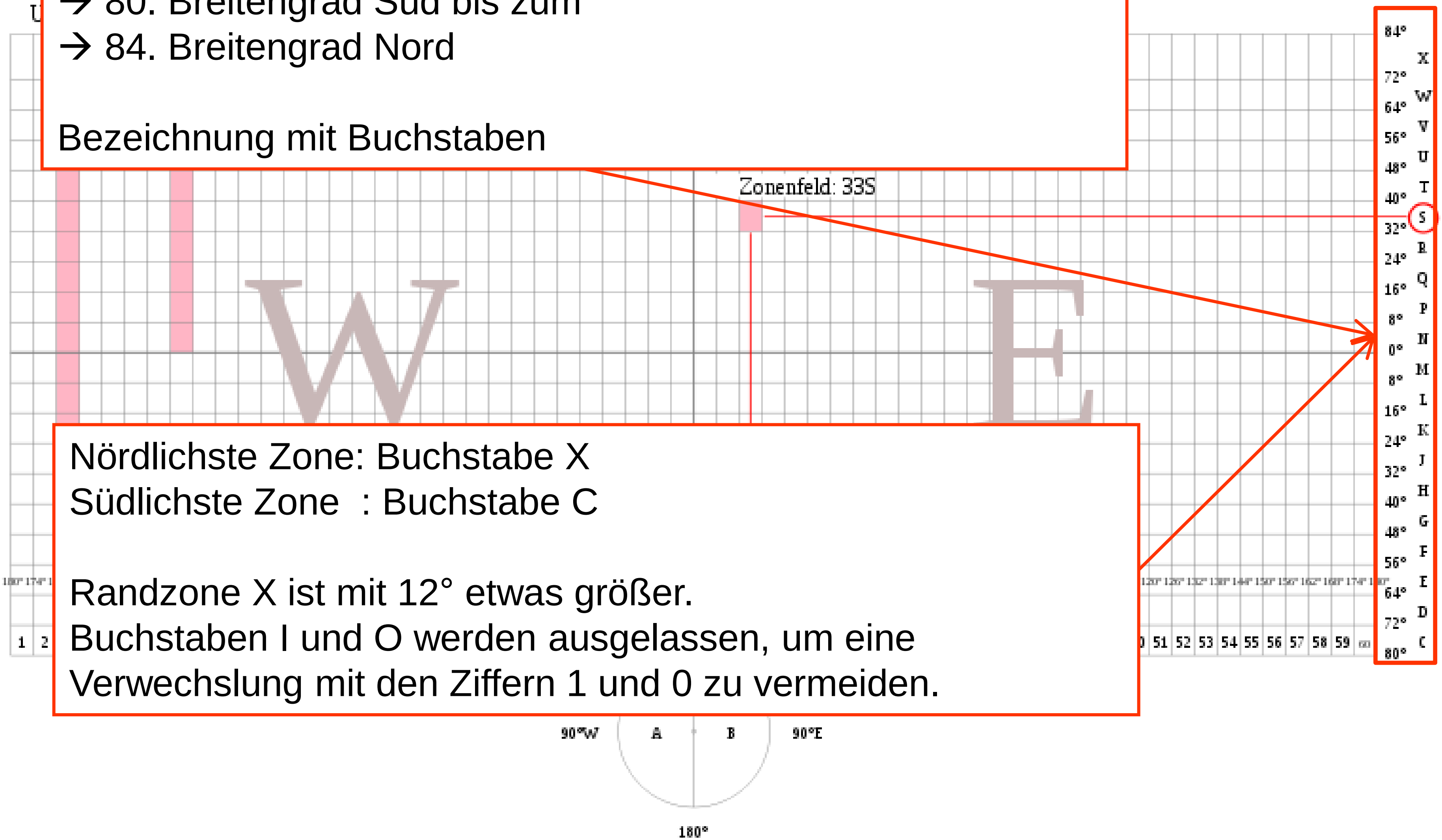
Der Bezugsmeridian liegt auf 3° Ost.



Der deutschsprachige Raum liegt größtenteils in den Zonen
32 (6° bis 12° ö.L.) und
33 (12° bis 18° ö.L.). → vorwiegend UTM-Band U, aber auch T

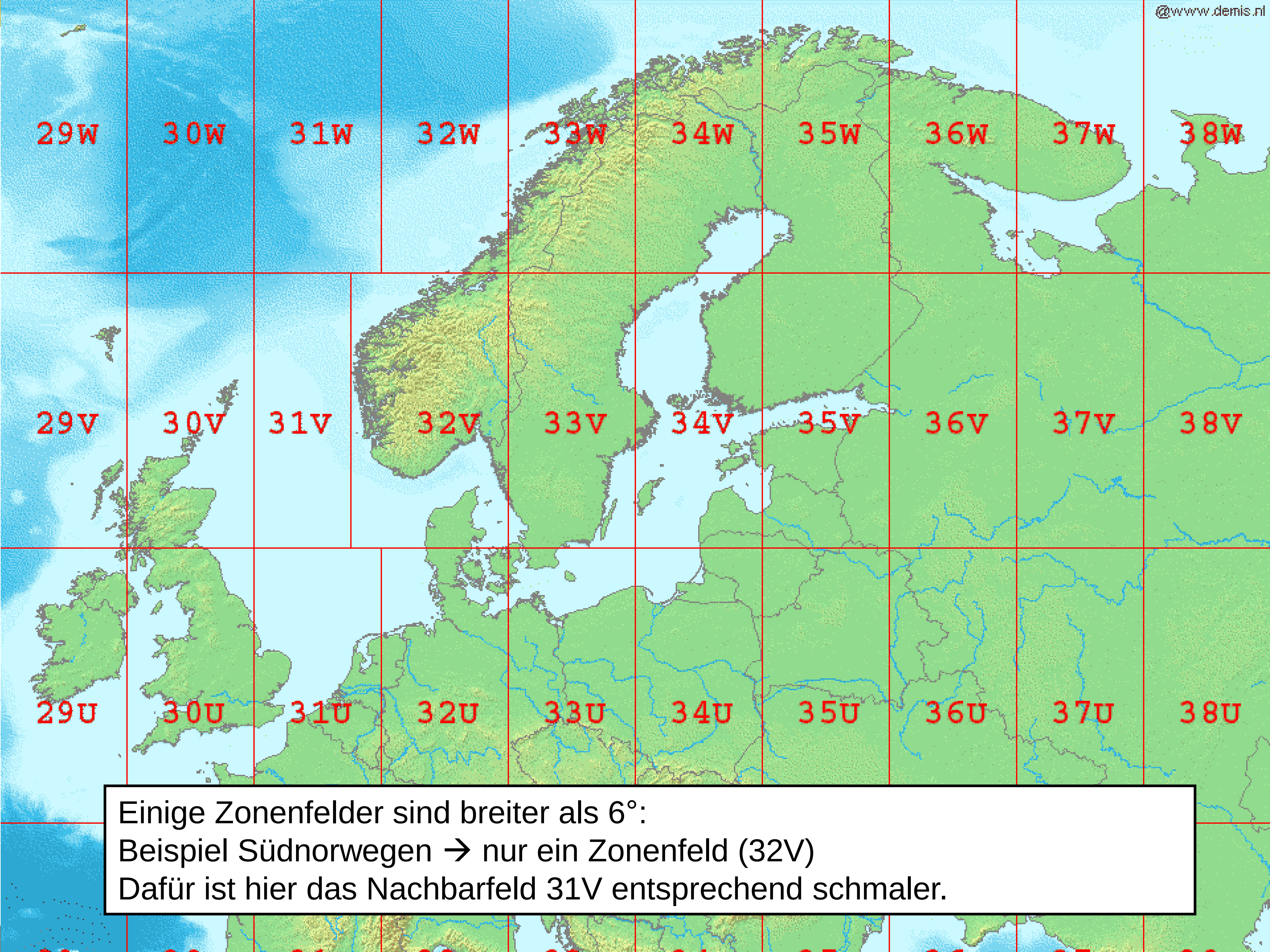
Unterteilung in Zonenfelder durch Breitenkreise mit 8° vom:
→ 80. Breitengrad Süd bis zum
→ 84. Breitengrad Nord

Bezeichnung mit Buchstaben



Nördlichste Zone: Buchstabe X
Südlichste Zone : Buchstabe C

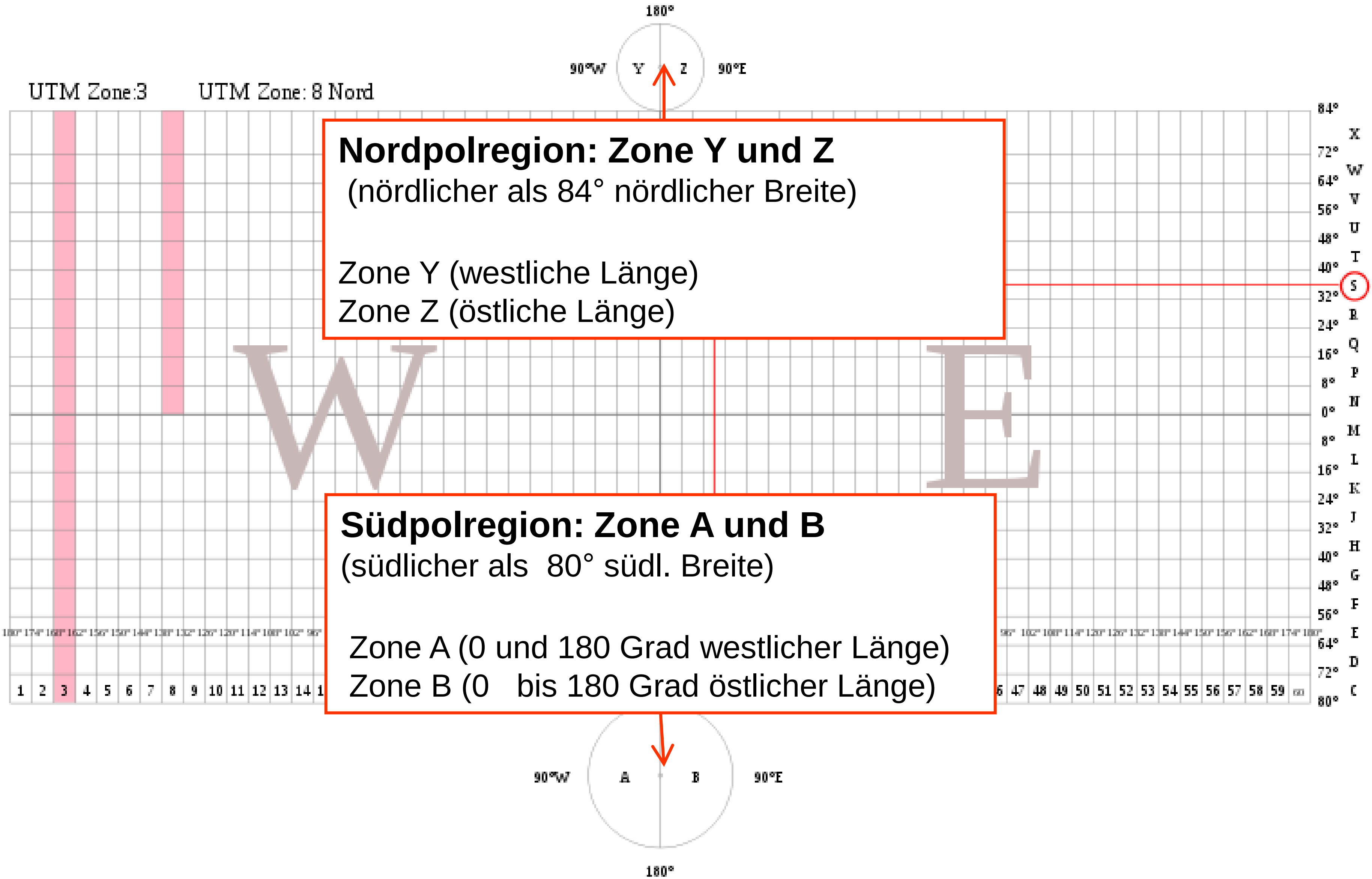
Randzone X ist mit 12° etwas größer.
Buchstaben I und O werden ausgelassen, um eine Verwechslung mit den Ziffern 1 und 0 zu vermeiden.



Einige Zonenfelder sind breiter als 6°:
Beispiel Südnorwegen → nur ein Zonenfeld (32V)
Dafür ist hier das Nachbarfeld 31V entsprechend schmaler.

Die Nordpol- bzw. Südpolregionen werden mit einer eigenen Kartenprojektion abgebildet (Universale Polare Stereografische Projektion)

Quelle: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Utm-zones.jpg&filetimestamp=20070126110825



Nordpolregion: Zone Y und Z

(nördlicher als 84° nördlicher Breite)

Zone Y (westliche Länge)

Zone Z (östliche Länge)

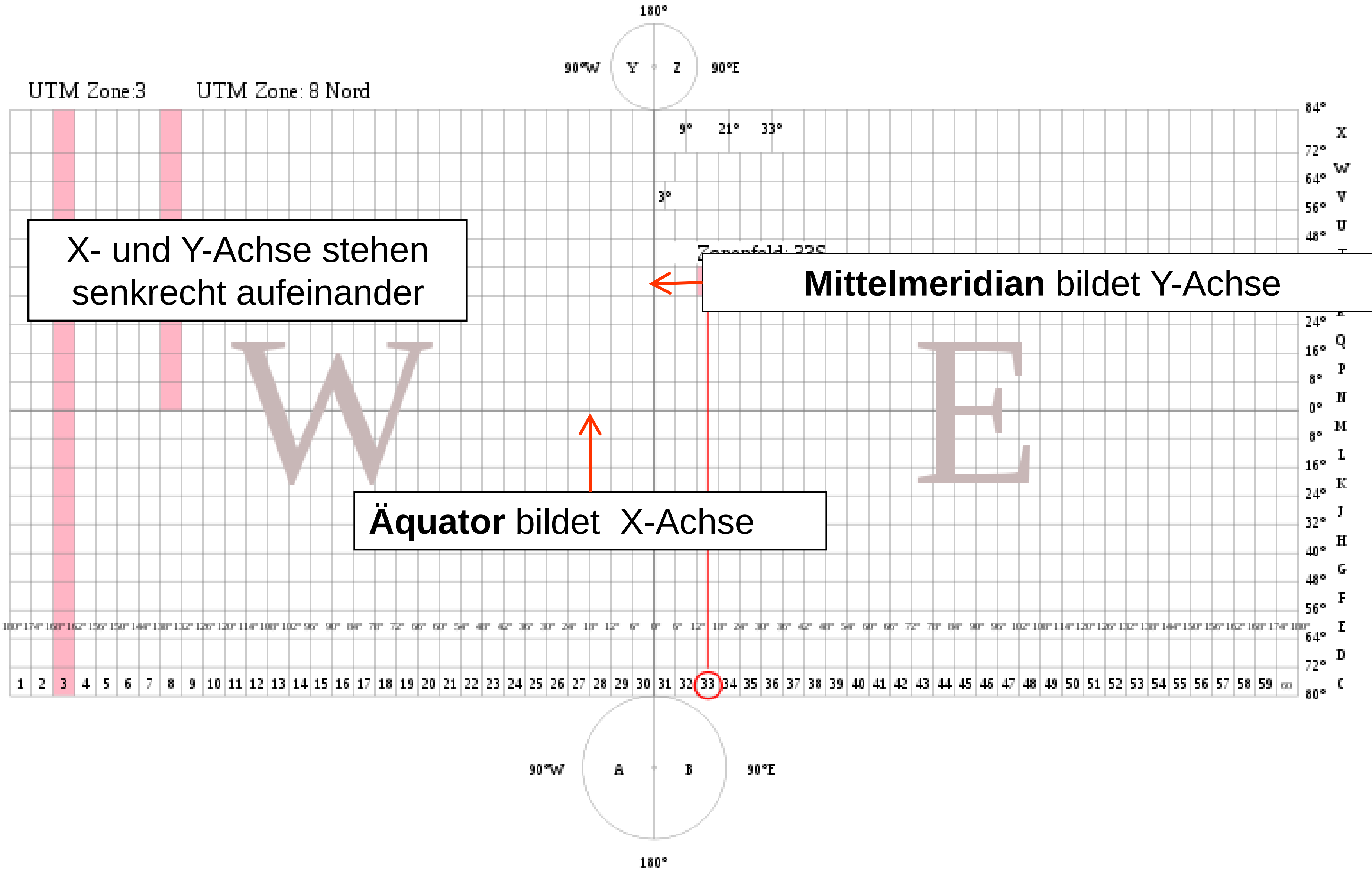
Südpolregion: Zone A und B

(südlicher als 80° südl. Breite)

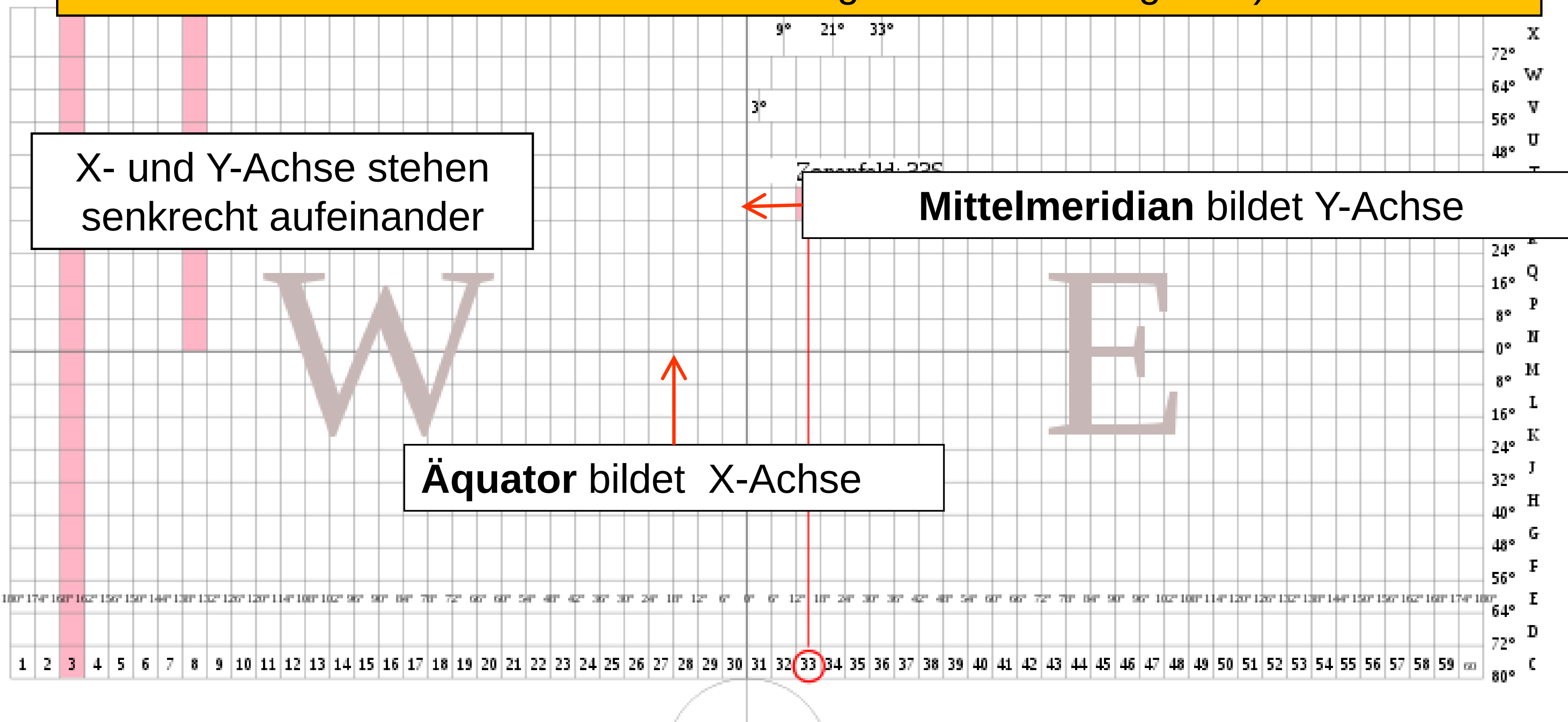
Zone A (0 und 180 Grad westlicher Länge)

Zone B (0 bis 180 Grad östlicher Länge)

Koordinaten:


180°
90°W
Y
Z
90°E
UTM Zone:3
UTM Zone: 8 Nord
9°
21°
33°
3°
X- und Y-Achse stehen senkrecht aufeinander
Mittelmeridian bildet Y-Achse
W
E
Äquator bildet X-Achse
84°
72°
64°
56°
48°
24°
16°
8°
0°
8°
16°
24°
32°
40°
48°
56°
64°
72°
80°
X
W
V
U
Q
P
N
M
L
K
J
H
G
F
E
D
C
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
90°W
A
B
90°E
180°

man liest die X- und Y-Werte wie in einem kartesischen Koordinatensystem ab
(parallel zu den Achsen; nicht zu den bogenförmig
verlaufenden Linien der Längen- und Breitengrade!)



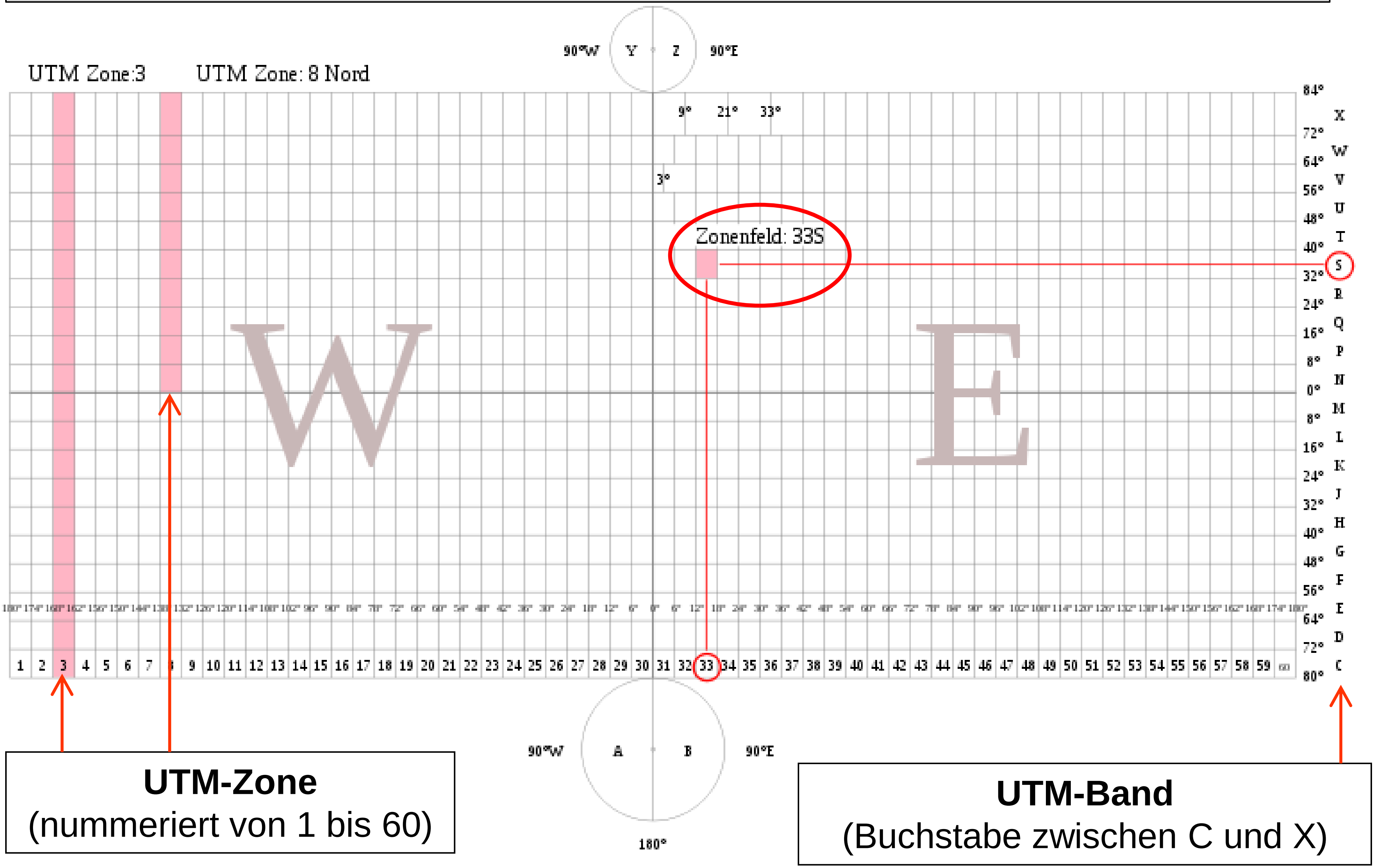
X- und Y-Achse stehen senkrecht aufeinander

Mittelmeridian bildet Y-Achse

Äquator bildet X-Achse

Zu beachten: in Geodäsie umgekehrte Koordinatenachsen!
→ X-Achse für den Rechtswert
→ Y-Achse für den Hochwert

Eine geografische Angabe im UTM-Referenzsystem setzt sich zusammen aus.

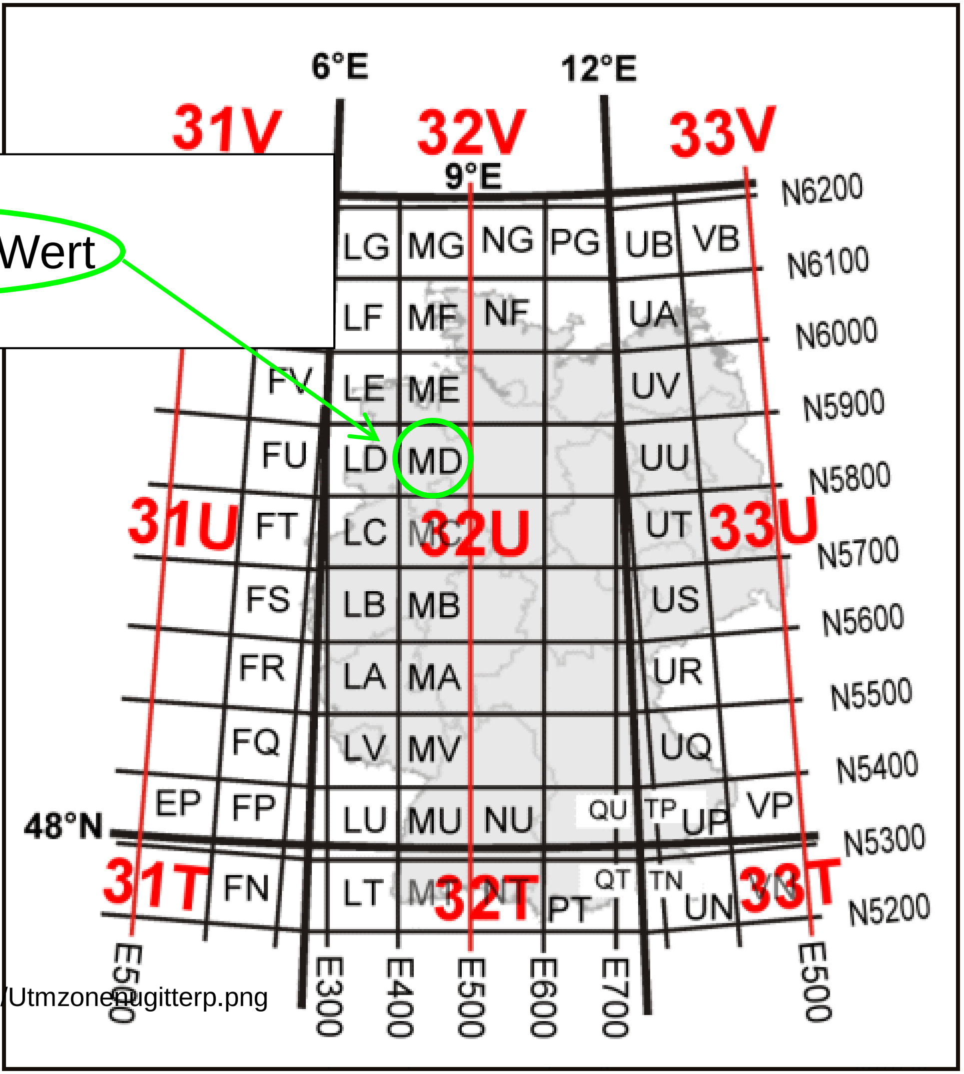


Eine geografische Angabe im UTM-Referenzsystem setzt sich zusammen aus.

dazu:

die Planquadratbezeichnung :

- Buchstabenpaar für Ost- und Nord- Wert

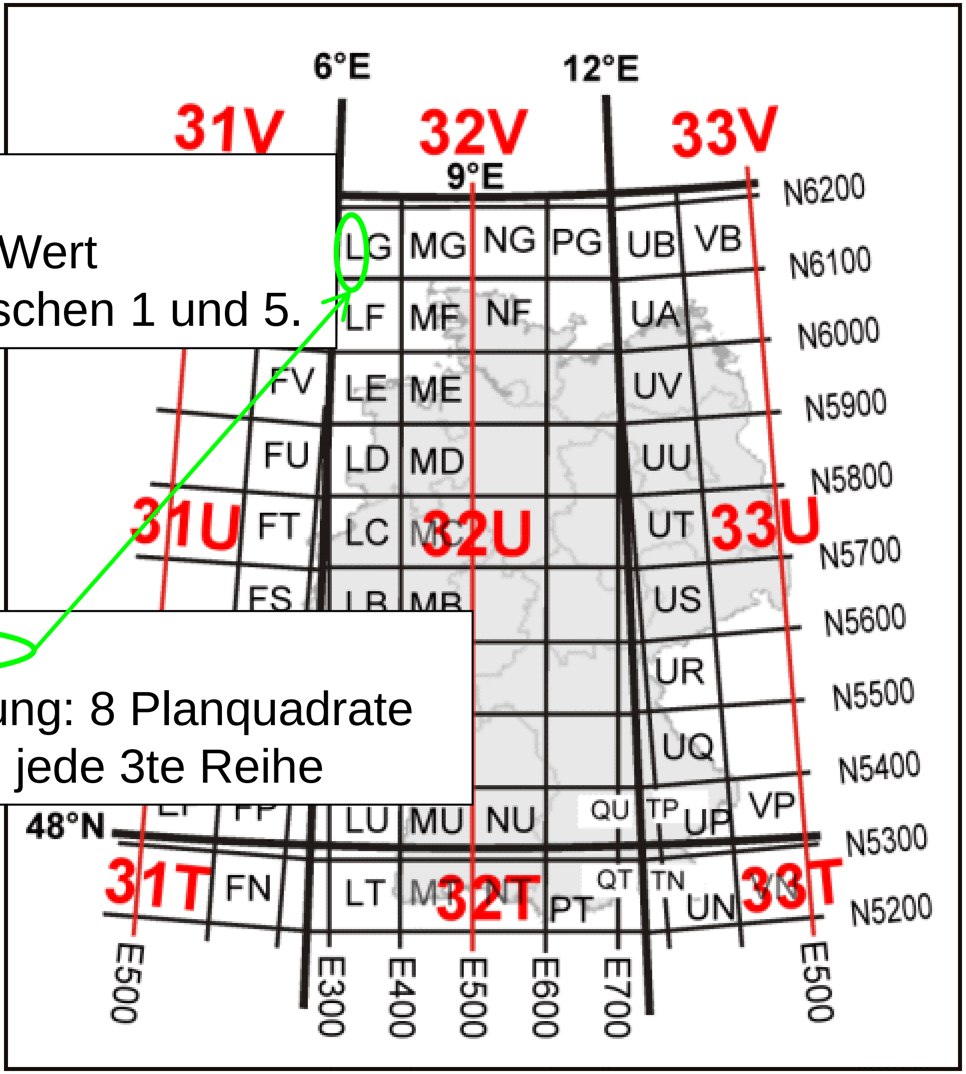


Quelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/19/Utmzonenugitterp.png

Eine geografische Angabe im UTM-Referenzsystem setzt sich zusammen aus.

dazu:

die Planquadratbezeichnung :
- Buchstabenpaar für Ost- und Nord- Wert
- Zahlenpaar gleicher Stellenzahl zwischen 1 und 5.



1. Buchstabe: Ost-West Richtung:

→ Pro UTM Zone in Ost-West Richtung: 8 Planquadrate

→ bei 24 Buchstaben: Wiederholung jede 3te Reihe

Rest	Easting (km)							
	100	200	300	400	500	600	700	800
1	A	B	C	D	E	F	G	H
2	J	K	L	M	N	P	Q	R
0	S	T	U	V	W	X	Y	Z

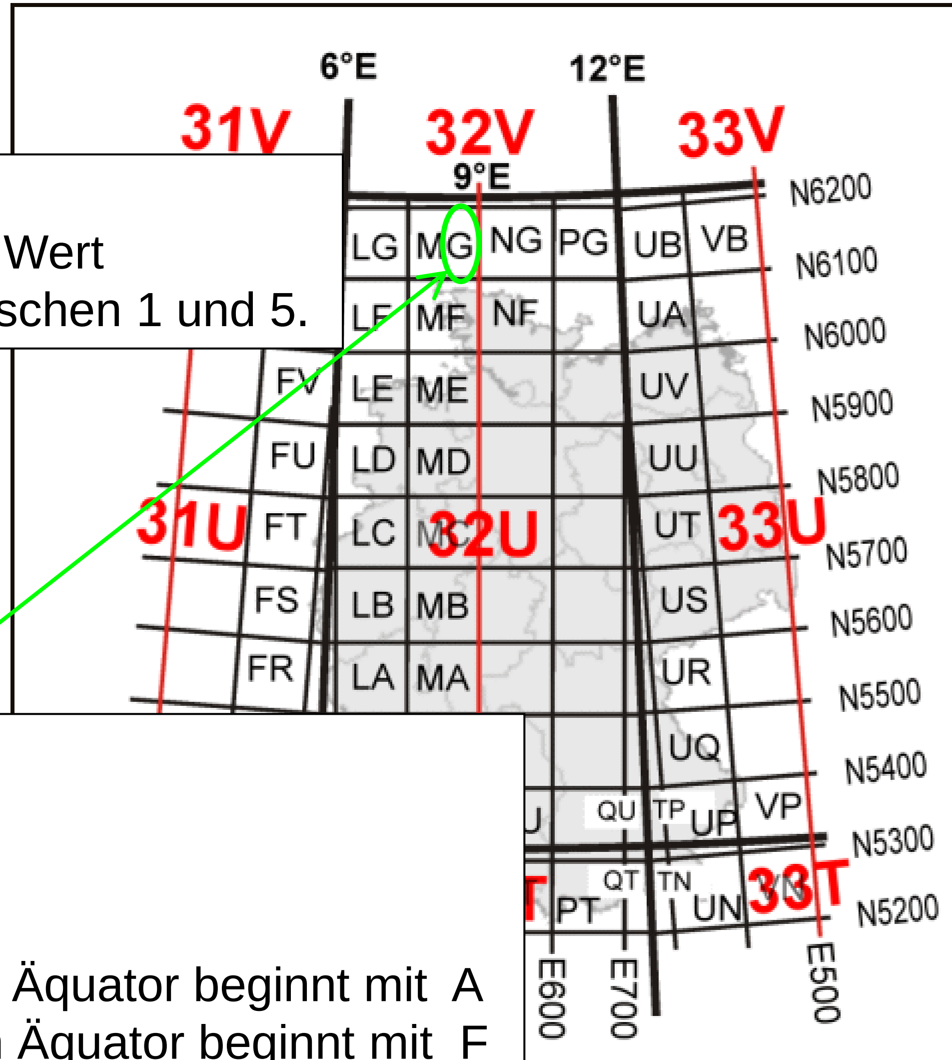
Quelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/19/Utmzonenugitterp.png

Eine geografische Angabe im UTM-Referenzsystem setzt sich zusammen aus.

dazu:

die Planquadratbezeichnung :

- Buchstabenpaar für Ost- und Nord- Wert
- Zahlenpaar gleicher Stellenzahl zwischen 1 und 5.



2. Buchstabe: Nord-Wert:

→20 Zeichen (A-V, ohne I und O)

→ Wiederholung alle 2000km:

20 Planquadrate a 100km Höhe

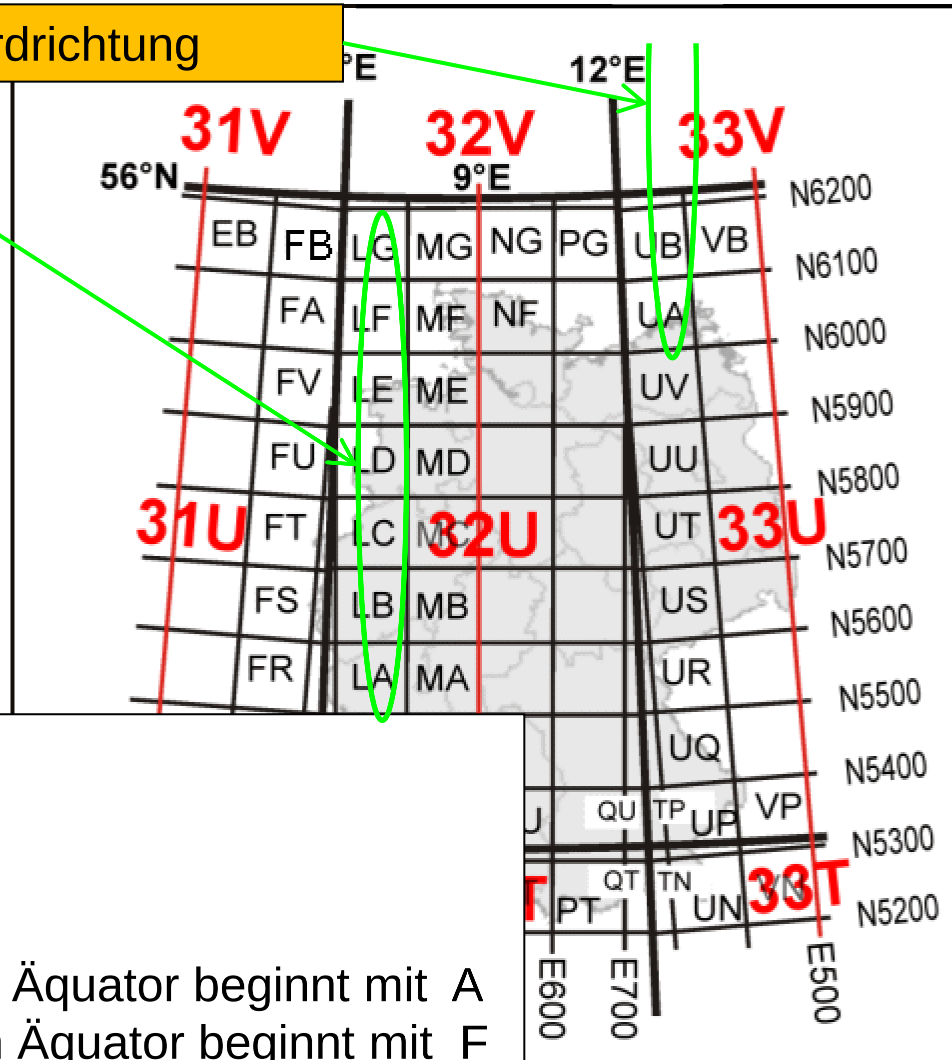
→Ungradzahlige Zonen: Zählung am Äquator beginnt mit A

→ gradzahlige Zonen: Zählung am Äquator beginnt mit F

Quelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/19/Utmzonenugitterp.png

Eine geografische Angabe im UTM-Referenzsystem setzt sich zusammen aus.

Versatz der Planquadrate in Nordrichtung



2. Buchstabe: Nord-Wert:

→20 Zeichen (A-V, ohne I und O)

→ Wiederholung alle 2000km:

20 Planquadrate a 100km Höhe

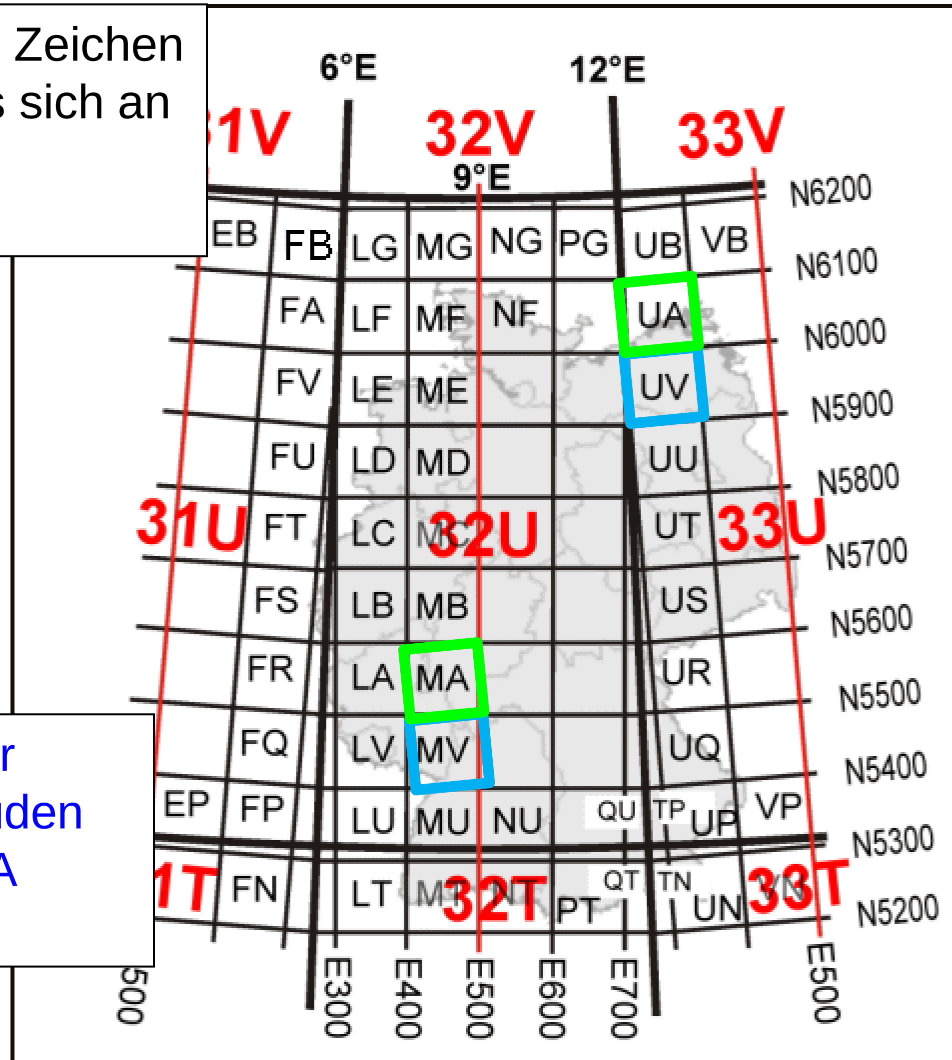
→Ungradzahlige Zonen: Zählung am Äquator beginnt mit A

→ gradzahlige Zonen: Zählung am Äquator beginnt mit F

Quelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/19/Utmzonenugitterp.png

Eine geografische Angabe im UTM-Referenzsystem setzt sich zusammen aus.

In der Zone *33* bei N6000 sind die 20 Zeichen zum dritten Mal durchgezählt, so dass sich an
- das Planquadrat *UV* nördlich
- das Planquadrat *UA* anschließt.



In gradzahligen UTM-Zonen ist dieser Wechsel um 5 Planquadrate nach Süden versetzt. Daher der Wechsel MV - MA bereits bei N5500.

Quelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/19/Utmzonenugitterp.png

Koordinatenbeispiel Paradeplatz Mannheim:

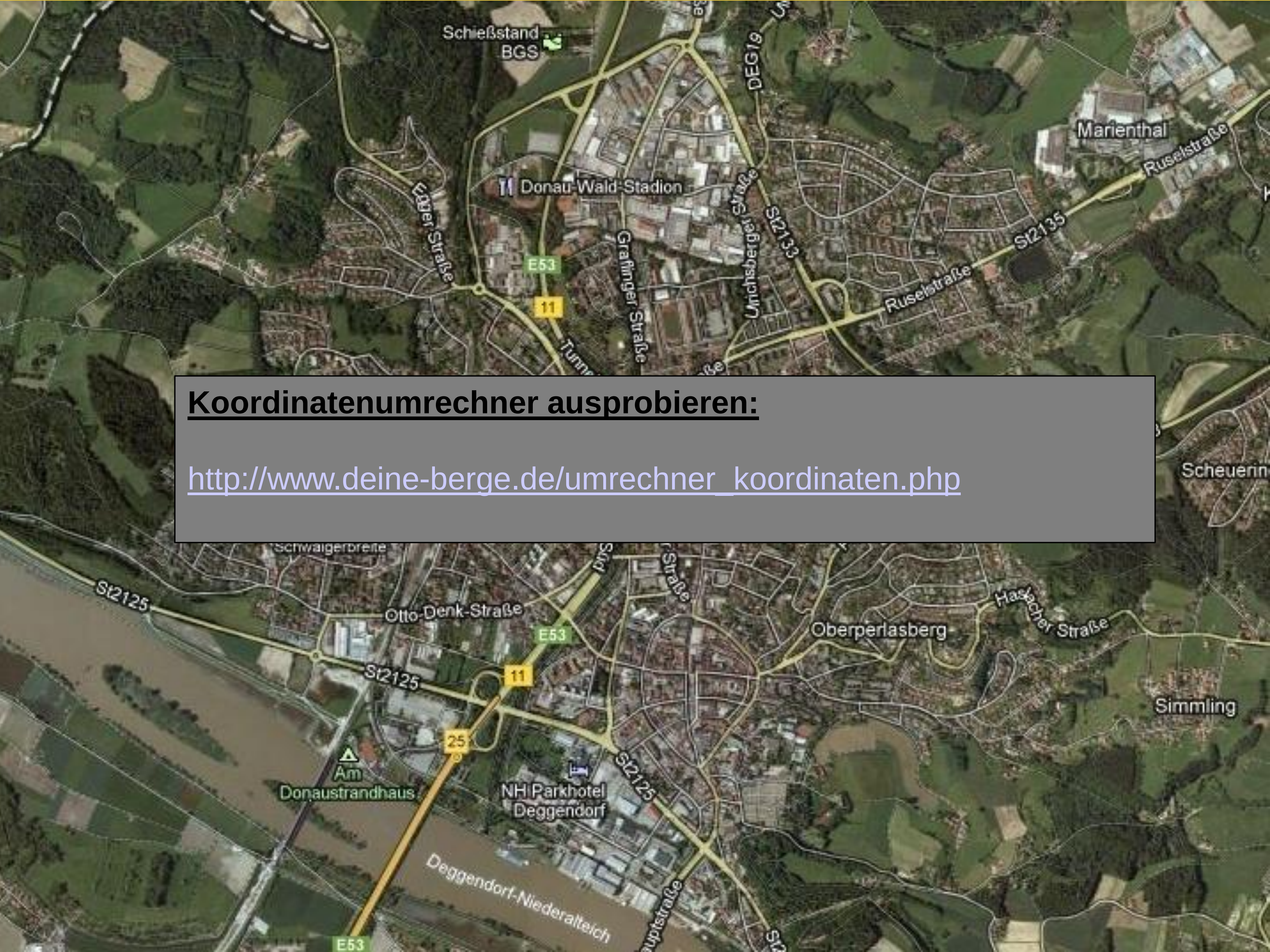
Geografische Koordinaten (WGS84): 49° 29′ 13.6″ N 8° 27′ 58.6″ E

UTM-Koordinaten (WGS84): 32U 461344 5481745

→ Zone 32-Nord (Planquadrat 32U, unerheblich für Berechnung)
→ Ostwert/Rechtswert: 461344
→ Nordwert/Hochwert: 5481745

UTMREF/MGRS: 32U MV 61344 81745
(Military Grid Referenz System - Koordinate mit Gitterfeldern):

→ Zone 32U
→ Gitterquadrat MV
→ Ostwert/Rechtswert 61344[7]
→ Nordwert/Hochwert 81745
die vollständige Georeferenz[5] ist also 32U MV 61344 81745



Koordinatenumrechner ausprobieren:

http://www.deine-berge.de/umrechner_koordinaten.php

Selbststudium zum Thema Koordinatensysteme

UTM – Abbildung und UTM Koordinaten

http://vermessung.bayern.de/file/pdf/1910/UTM%20Abbildung%20und%20Koordinaten.pdf

Die Gauß-Krüger Abbildung (GK-Abbildung)

http://www.adv-online.de/icc/extdeu/broker.jsp?uMen=c87707b7-f12f-9d01-3bbe-251ec0023010

Was unterscheidet die Gauß-Krüger Abbildung von der UTM Abbildung

http://www.lgn.niedersachsen.de/portal/live.php?navigation_id=11056&article_id=51596&_psmand=35

Einführung des Bezugsystems ETRS89 im Liegenschaftskataster

http://vermessung.bayern.de/file/pdf/4059/ETRS-UTM.pdf

Selbststudium zum Thema Koordinatensysteme

Das European Terrstrial Reference System 1989 (ETRS89)

http://www.adv-online.de/icc/extdeu/broker.jsp?uMen=4e9707b7-f12f-9d01-3bbe-251ec0023010

Deutsches Haupthöhennetz 1992 (DHHN92)

http://www.adv-online.de/icc/extdeu/broker.jsp?uMen=c87707b7-f12f-9d01-3bbe-251ec0023010

DHHN-Erneuerung 2006-2012

http://www.adv-online.de/icc/extdeu/broker.jsp?uMen=c6620606-903a-7231-fdf2-4f5672e13d63

Deutsches Haupthöhennetz 1996 (DHHN96)

http://www.adv-online.de/icc/extdeu/broker.jsp?uMen=6c8707b7-f12f-9d01-3bbe-251ec0023010

Transformation

http://www.adv-online.de/icc/extdeu/broker.jsp?uMen=786707b7-f12f-9d01-3bbe-251ec0023010

Koordinatentransformation

Koordinatentransformation

- Koordinaten werden von einem in ein anderes Koordinatensystem übertragen

- Übergang von den ursprünglichen Koordinaten $(x_1, x_2, ..., x_N)$
  zu den neuen Koordinaten $(x'_1, x'_2, ..., x'_N)$

- typische Koordinatentransformationen entstehen durch:
  - o Rotation (Drehung)
  - o Skalierung (Maßstabsveränderung)
  - o Scherung und
  - o Translation (Verschiebung)

- die neuen Koordinaten $(x'_1, x'_2, ..., x'_N)$ können beliebige Funktionen
  der alten Koordinaten $(x_1, x_2, ..., x_N)$ sein.

- typisch in der Geodäsie:
  Transformation von polaren Koordinaten (Kugelkoordinaten) in
  Kartesische Koordinaten (rechtwinklig, orthogonal).

Transformationen:

2 Typen von Transformationen:

Nicht formverändernde Transformationen
(Rigid Body Transformations)

Die Form des Körpers bleibt nach der Transformation erhalten

- Translation
- Rotation
- Isotrophe Skalierung

Formverändernde Transformationen

Die Form des Körpers ist nach der Transformation verändert

- anisotrophe Skalierung
- Scherung

Grundprinzip der Transformation:

Da alle Objekte durch Punkte definiert sind, besteht das Grundprinzip der Transformation darin, die selbe Funktion auf alle Punkte anzuwenden!

→ Mathematisch betrachtet ist ein Punkt durch eine Koordinate definiert.

→ Um einen dreidimensionalen Punkt zu manipulieren bietet sich die Verwendung von Matrizen an.

→ Eine Transformation ist daher gleichbedeutend mit einer Multiplikation der Punktvektoren eines Objektes mit Matrizen!

Transformationen:

2 Arten von Transformationen:

Lineare Transformationen

Linearität ist die Eigenschaft eines Systems, auf die Veränderung eines Parameters stets mit einer dazu proportionalen Änderung eines anderen Parameters zu reagieren.

Affine Transformationen

Affinität:
Ähnlichkeit, bei der die Verhältnisse *beliebiger* Streckenlängen und die Maße von Winkeln erhalten bleiben;

-gleicher Ursprung
-gleiche Koordinatenachsen

Lineare Transformation

- die neuen Koordinaten sind eine **lineare** Funktion aus der ursprünglichen:

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$$
$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$$

- für den Vektor gilt dann: $\vec{x'} = A\vec{x}$

- der Ursprung des neuen Koordinatensystems stimmt dabei mit dem des ursprünglichen Koordinatensystems überein.

Dies kann man kompakt darstellen als:

1) Matrixmultiplikation

des alten Koordinatenvektors $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ mit der Matrix A ,

(Die Matrix A enthält die Koeffizienten a_{ij})

und

2) Vektoraddition

der Vektor $\vec{b}$ enthält die Koeffizienten b_i

$$\boxed{\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{b}}$$

Dies kann man kompakt darstellen als:

1) Matrix<u>multiplikation</u>

des alten Koordinatenvektors $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ mit der Matrix A ,

(Die Matrix A enthält die Koeffizienten a_{ij})

und

2) Vektor<u>addition</u>

der Vektor $\vec{b}$ enthält die Koeffizienten b_i

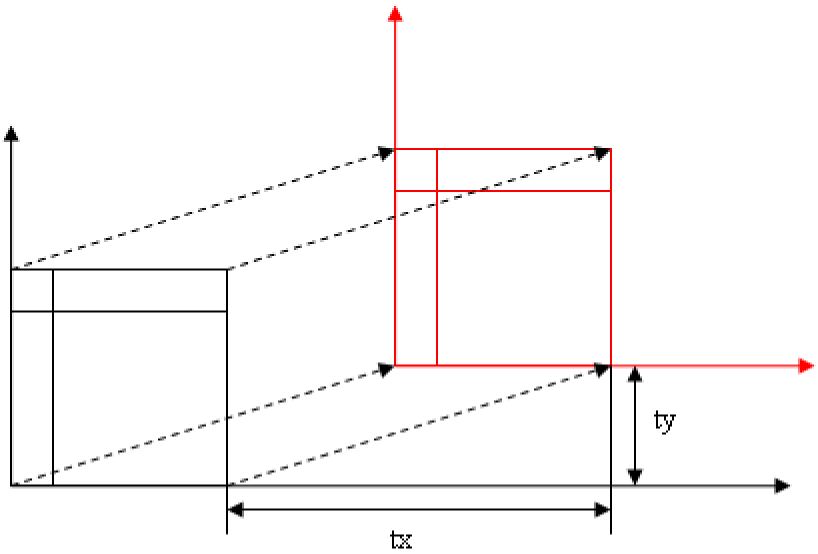
$$\boxed{\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{b}}$$

Die Translation ist ein Spezialfall einer affinen Transformation, bei der *A* die Einheitsmatrix ist.

Lineare Transformation: Translation (Verschiebung)

Definition:

Eine Translation ist eine Abbildung, die jeden Punkt auf einen um einen konstanten Vektor verschobenen Punkt abbildet.

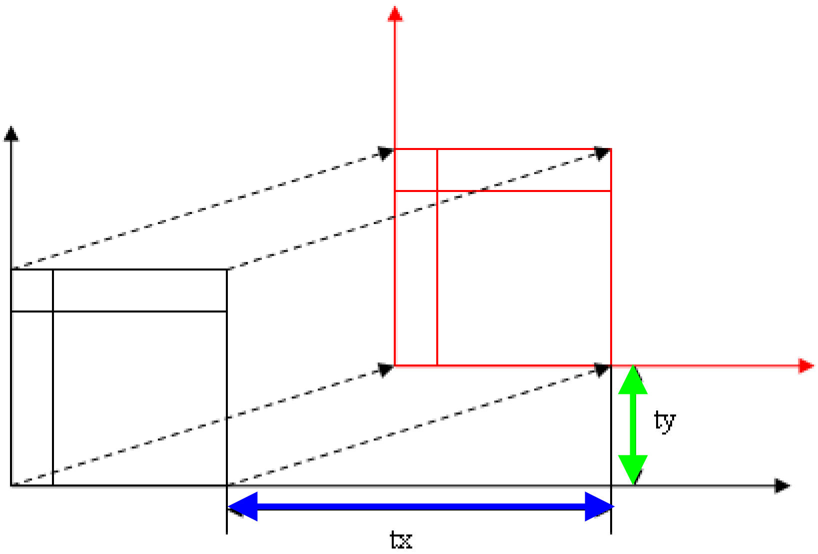


- Verschiebung des Koordinatenursprungs oder
- Verschiebung der abgebildeten Objekte.

Im 2D-Raum erfordert eine Translation zwei Parameter:

- Verschiebung in x-Richtung (tx) und
  in y-Richtung (ty).

- Im 3D Raum gibt es als dritten Parameter die Verschiebung in z-Richtung (tz).



Affine Transformationen:

Affine Transformationen:

Nach der Transformation bestehen Ähnlichkeiten, bei der die

- Verhältnisse *beliebiger* Streckenlängen und die
- Maße von Winkeln erhalten bleiben

Affine Transformationen:

Definition affine Transformation:

- Beschränkte Objekte bleiben beschränkt
- Parallele Objekte bleiben parallel
- Längen-, Flächen- und Volumenverhältnisse bleiben erhalten

Eine affine Transformation liegt vor:

- Wenn beide beteiligten Koordinatensysteme linear sind, also
- gleichmäßig unterteilte Koordinatenachsen haben

Affine Transformationen:

- Können aus ein oder mehreren einfachen Transformationen bestehen
- Die neuen Koordinaten sind affine Funktionen der Ursprungskoordinaten

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2$$

usw.

Affine Transformationen:

→ Skalierung

→ Rotation

→ Scherung

Affine Transformation: Skalierung

- Es wird die Größe eines Objektes verändert
- Werden Höhe und Breite des Objektes gleichermaßen verändert, handelt es sich um eine isotrophische Skalierung: $s_x = s_y$

- ist diese Gleichung nicht erfüllt: → anisotrophische Skalierung: $s_x \neq s_y$

- um eine Skalierung rückgängig zu machen:
  Multiplikation der Inversen Rotationsmatrix

- eine Sonderform der Skalierung ist die Spiegelung: sx = -1 und sy =1

patrick.reidelstuerz@hdu-deggendorf.de

Die (isotrophische) **Skalierung** ist als Spezialfall auch eine lineare Transformation

Alle Koordinatenwerte werden mit dem gleichen Faktor s multipliziert .

Die Matrix A ist in diesem Fall s mal die **Einheitsmatrix**.

Die **Einheitsmatrix** (Identitätsmatrix) ist eine quadratische Matrix:
- die Hauptdiagonale besteht nur aus Einsen.
- alle anderen Elemente sind 0.

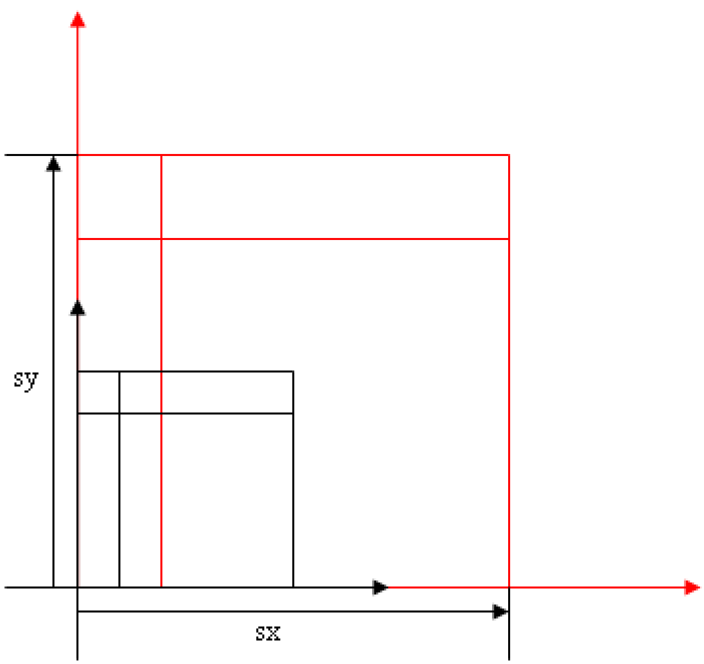
Deshalb stellt die Einheitsmatrix die Identitätsabbildung dar.
Beispiel:

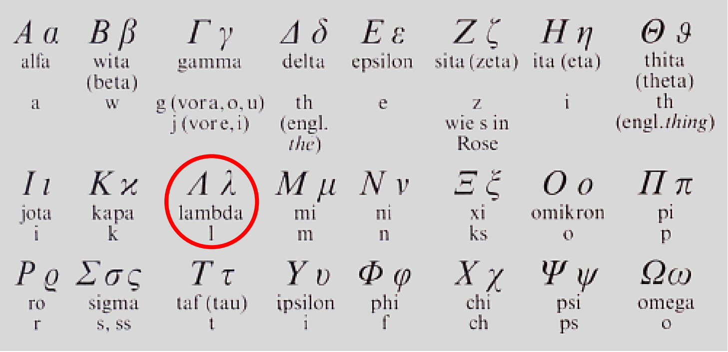
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel einer isotrophischen Skalierung:

Die Zahlenwerte der Koordinaten x_i werden
mit konstanten Faktoren λ_i multipliziert („skaliert“)

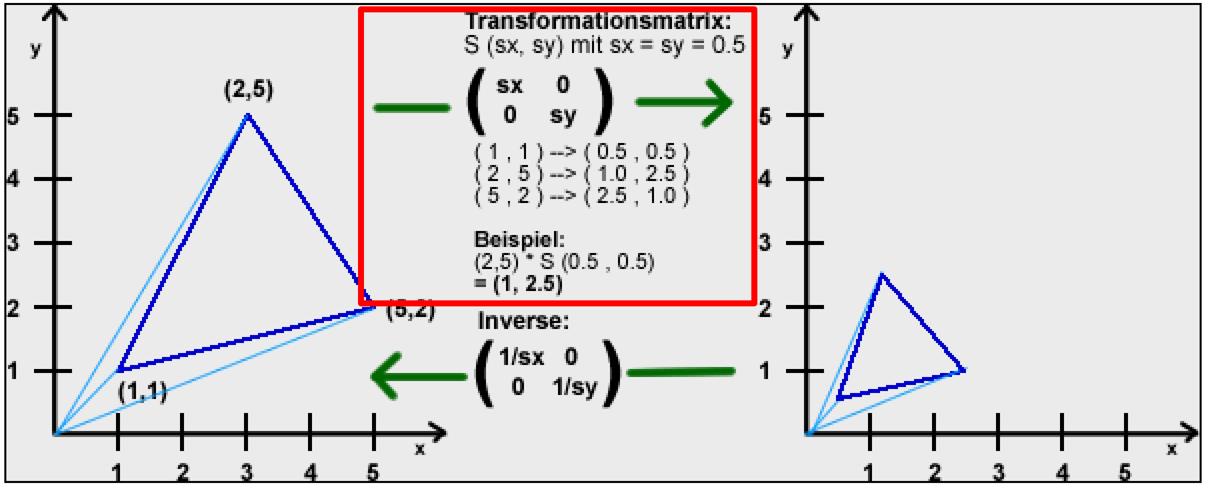
$$x_i' = \lambda_i \cdot x_i.$$





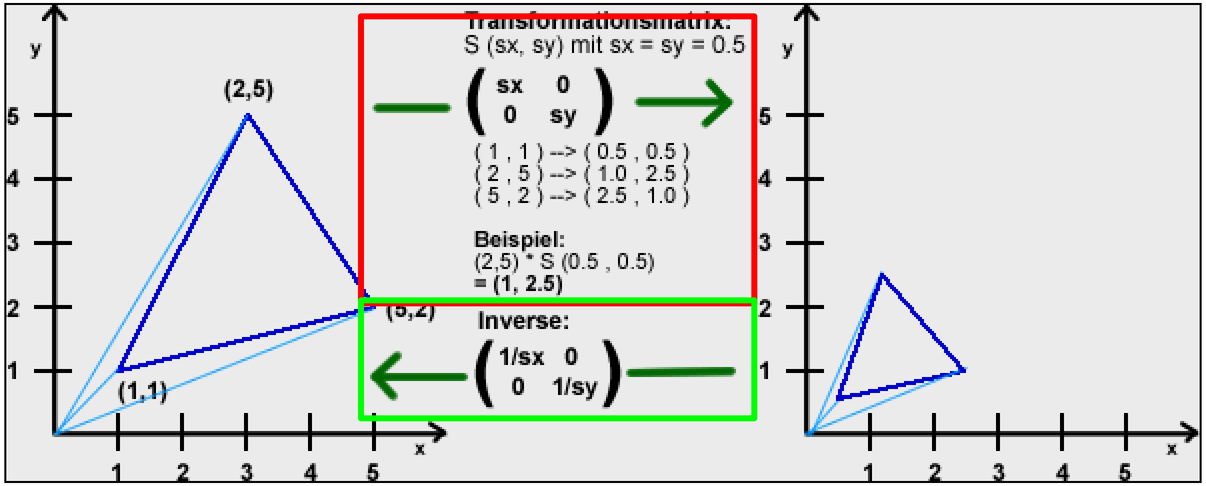
Α α alfa a	Β β wita (beta) w	Γ γ gamma g (vora, o, u) j (vore, i)	Δ δ delta th (engl. *the*)	Ε ε epsilon e	Ζ ζ sita (zeta) z wie s in Rose	Η η ita (eta) i	Θ ϑ thita (theta) th (engl. *thing*)
Ι ι jota i	Κ ϰ kapa k	Λ λ lambda l	Μ μ mi m	Ν ν ni n	Ξ ξ xi ks	Ο ο omikron o	Π π pi p
Ρ ϱ ro r	Σ σ ς sigma s, ss	Τ τ taf (tau) t	Υ υ ipsilon i	Φ φ phi f	Χ χ chi ch	Ψ ψ psi ps	Ω ω omega o

Beispiel einer isotrophischen Skalierung:



Quelle: http://computergrafik.informatiker-wissen.de/transformationen.html

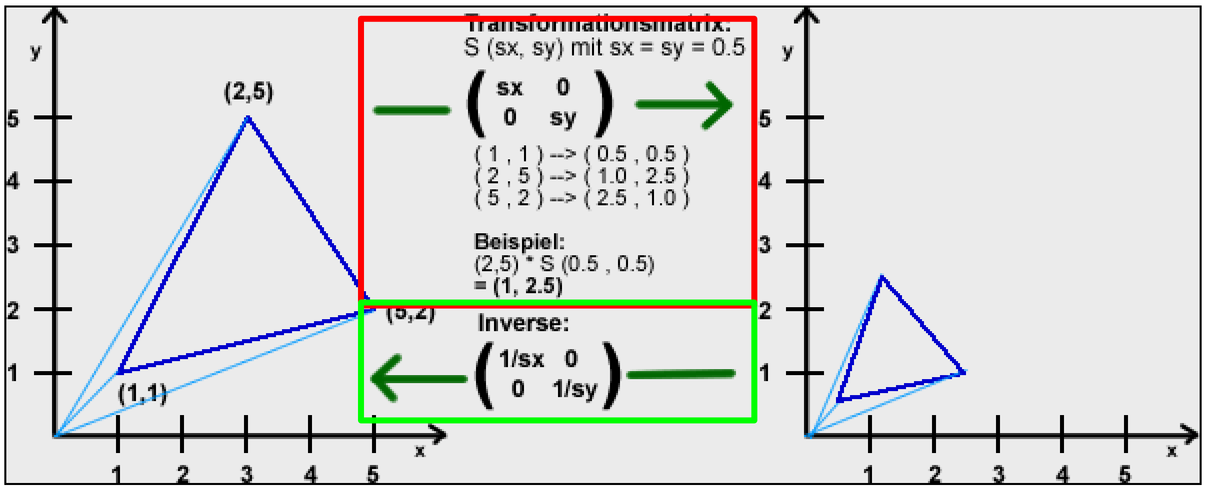
Beispiel einer isotrophischen Skalierung mit anschließend Inverser Funktion:



Quelle: http://computergrafik.informatiker-wissen.de/transformationen.html

Übungsaufgabe:

Berechnen Sie am vorliegenden Beispiel die anisotrophe Transformation mit :
S(sx, sy); sx =1,5, sy=2
Stellen Sie zeichnerisch dar!



Quelle: http://computergrafik.informatiker-wissen.de/transformationen.html

Affine Transformation: Rotation (Drehung)

- das Koordinatensystem wird gedreht.
- bei zwei Dimensionen gibt es nur einen Rotationswinkel.
- im 3D-Raum kann man um alle drei Koordinatenachsen drehen..
- eine Drehung wird durch eine Rotationsmatrix (Drehmatrix) beschrieben.

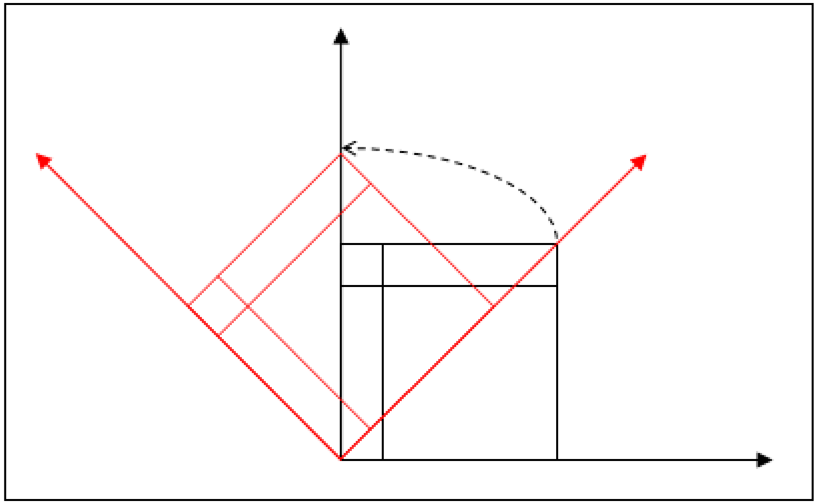
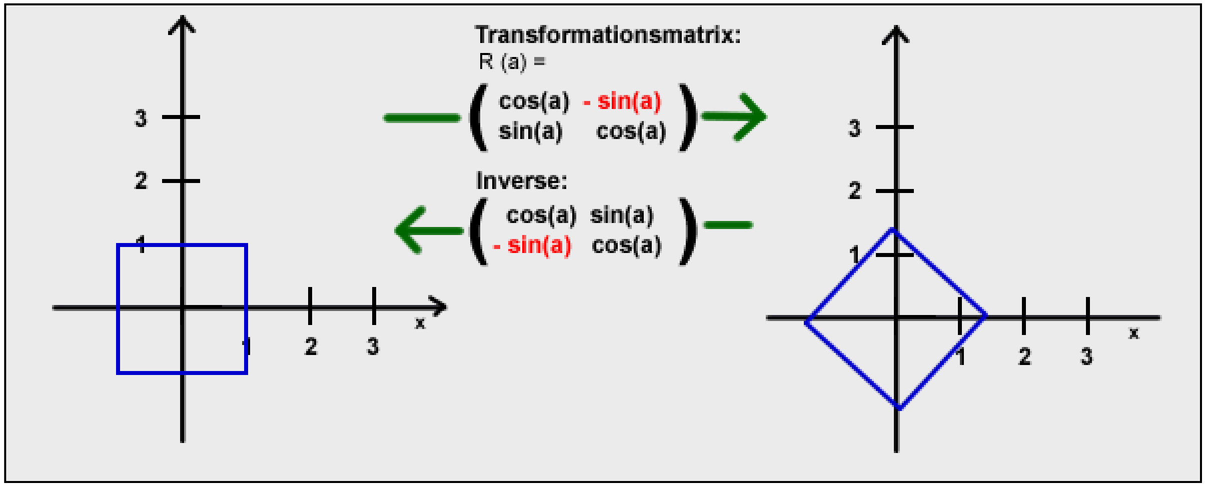


Abb.: Zweidimensionale Rotation

Affine Transformation: Rotation (Drehung)

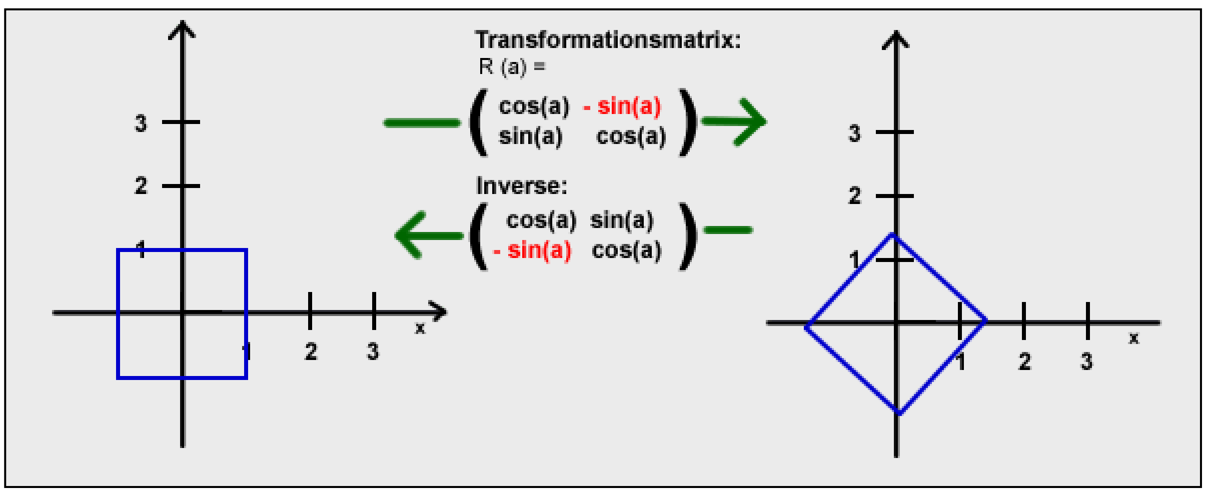
- Drehung des Objektes um den Ursprung
- Eigentlich eine Punktspiegelung
- Kann durch inverse Funktion wieder Rückgängig gemacht werden



Quelle: http://computergrafik.informatiker-wissen.de/transformationen.html

Übungsaufgabe:

Berechnen Sie am vorliegenden Beispiel die Drehung mit Alpha=30°
Und stellen Sie das Ergebnis zeichnerisch dar.



Quelle: http://computergrafik.informatiker-wissen.de/transformationen.html

Drehmatrix in der Ebene

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$:

Die Drehung eines Vektors p
- um einen festen Ursprung
- um einen Winkel α,

… wird erreicht durch:

Multiplikation mit einer Drehmatrix R_α

Der Winkel α ist im mathematisch positiven Sinn definiert.
(gegen den Uhrzeigersinn)

Es gibt die aktive und die passive Drehung.

Transformationen: Rotation – Drehmatrix in der Ebene

Bei der aktiven Drehung wird der Vektor p durch die Multiplikation mit der Rotationsmatrix R_α gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

$$p' = R_\alpha p.$$

Bei der passiven Drehung wird das Koordinatensystem gedreht. Der bleibende Vektor dreht sich daher relativ zum Koordinatensystem mit dem Uhrzeigersinn.

Die Koordinaten des Vektors im gedrehten Koordinatensystem findet man durch Multiplikation mit der Matrix :

$$p' = R_\alpha^{-1} p.$$

patrick.reidelstuerz@hdu-deggendorf.de

Beispiel:

Beispiel:

- Zwei (hier: dreidimensionale) kartesische Koordinatensysteme S und S'
- gemeinsame z-Achse mit
- gemeinsamem Ursprung.

Beispiel:

- Zwei (hier: dreidimensionale) kartesische Koordinatensysteme S und S'
- gemeinsame z-Achse mit
- gemeinsamem Ursprung.

S' sei gegenüber S um den Winkel φ um die z-Achse gedreht.

Ein Punkt P, der im Koordinatensystem S die Koordinaten $\vec{p} = (x, y, z)$ hat, besitzt dann im Koordinatensystem S' die Koordinaten:

$$\vec{p} = (x, y, z) \longrightarrow \begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Α α alfa a	Β β wita (beta) w	Γ γ gamma g (vora, o, u) j (vore, i)	Δ δ delta th (engl. *the*)	Ε ε epsilon e	Ζ ζ sita (zeta) z wie s in Rose	Η η ita (eta) i	Θ ϑ thita (theta) th (engl. *thing*)
Ι ι jota i	Κ ϰ kapa k	Λ λ lambda l	Μ μ mi m	Ν ν ni n	Ξ ξ xi ks	Ο ο omikron o	Π π pi p
Ρ ϱ ro r	Σ σ ς sigma s, ss	Τ τ taf (tau) t	Υ υ ipsilon i	Φ φ phi f	Χ χ chi ch	Ψ ψ psi ps	Ω ω omega o

Daraus ergibt sich die Rotationsmatrix:

$$\vec{p} = (x, y, z)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

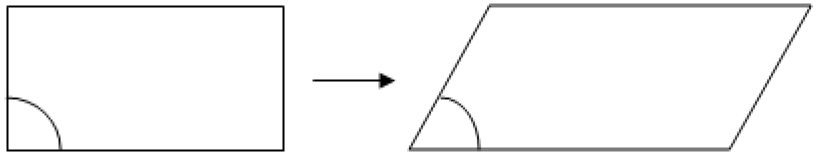
$$\downarrow$$

$$\vec{p'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{p}.$$

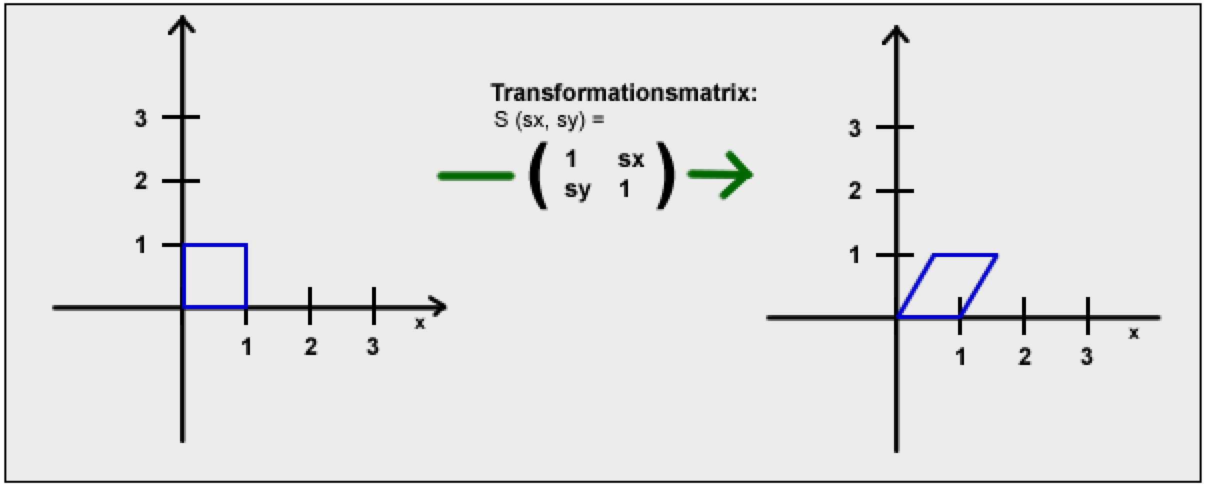
Affine Transformation: Scherung

Gehört zu den formverändernden Transformationen

Bei der Scherung verändert sich der Winkel zwischen den Koordinatenachsen.
Im 2D-Raum gibt es daher einen Parameter und im 3D-Raum drei Parameter.



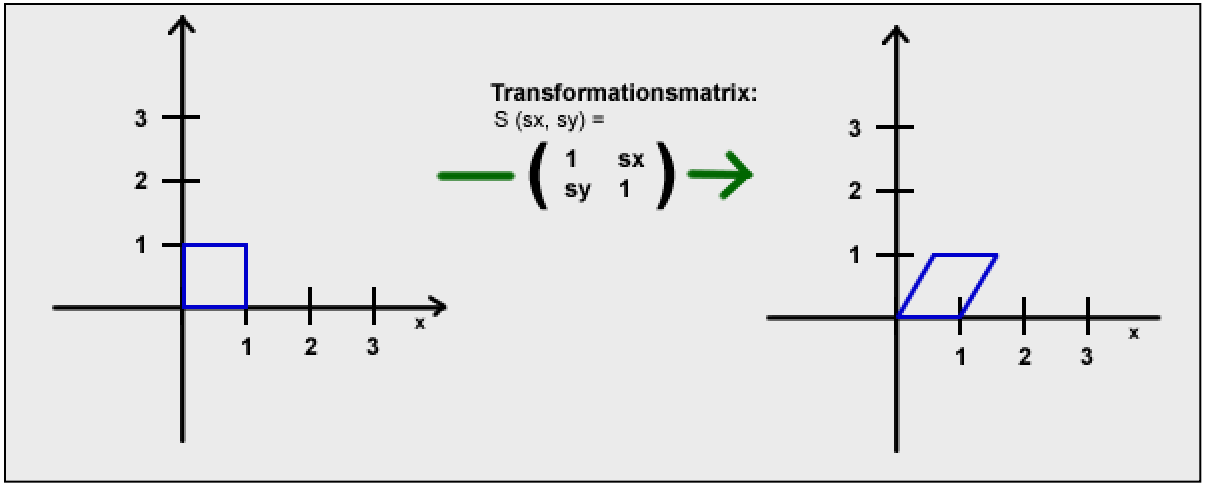
Beispiel einer Scherung:



Quelle: http://computergrafik.informatiker-wissen.de/transformationen.html

Übungsaufgabe:

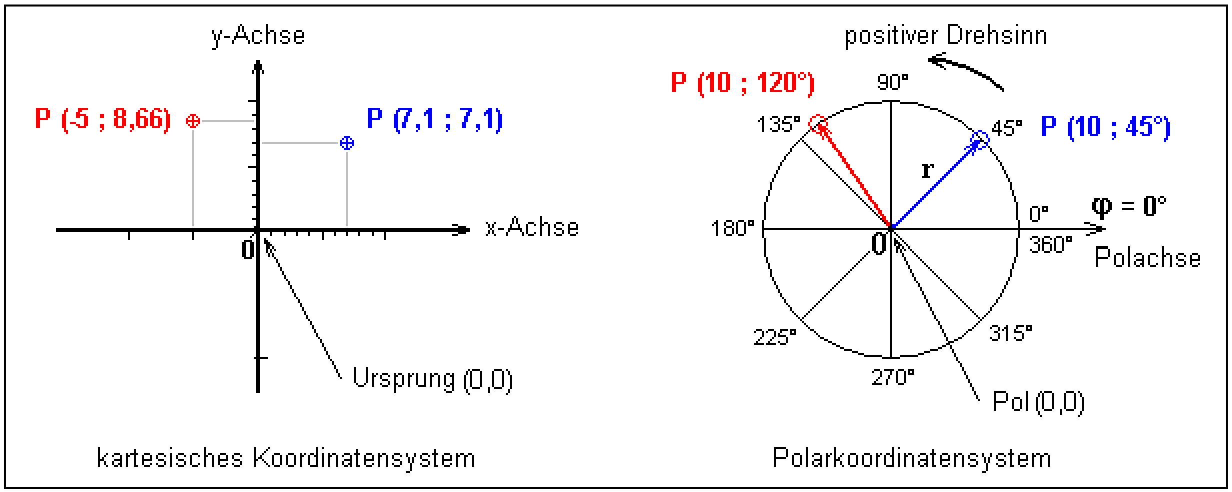
Berechnen Sie am vorliegenden Beispiel eine Scherung mit:
S(sx, sy); sx=sy=2;
Stellen Sie das Ergebnis zeichnerisch dar!



Quelle: http://computergrafik.informatiker-wissen.de/transformationen.html

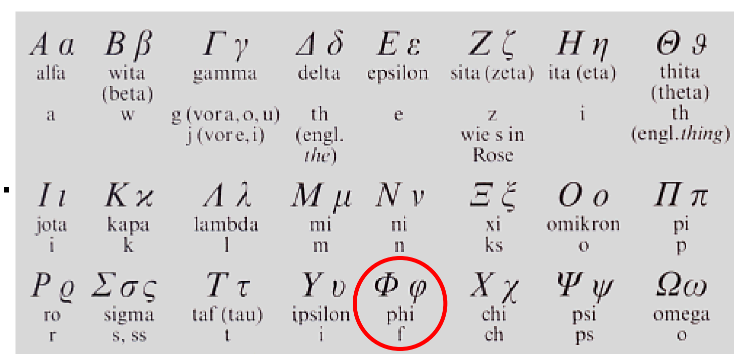
Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten

Im kartesischen Koordinatensystem (rechtwinklig) wird ein Punkt in der Ebene durch seine Koordinaten (x ,y) bestimmt.



Quelle: http://www.elektroniktutor.de/mathe/ma_pict/koordsys.gif

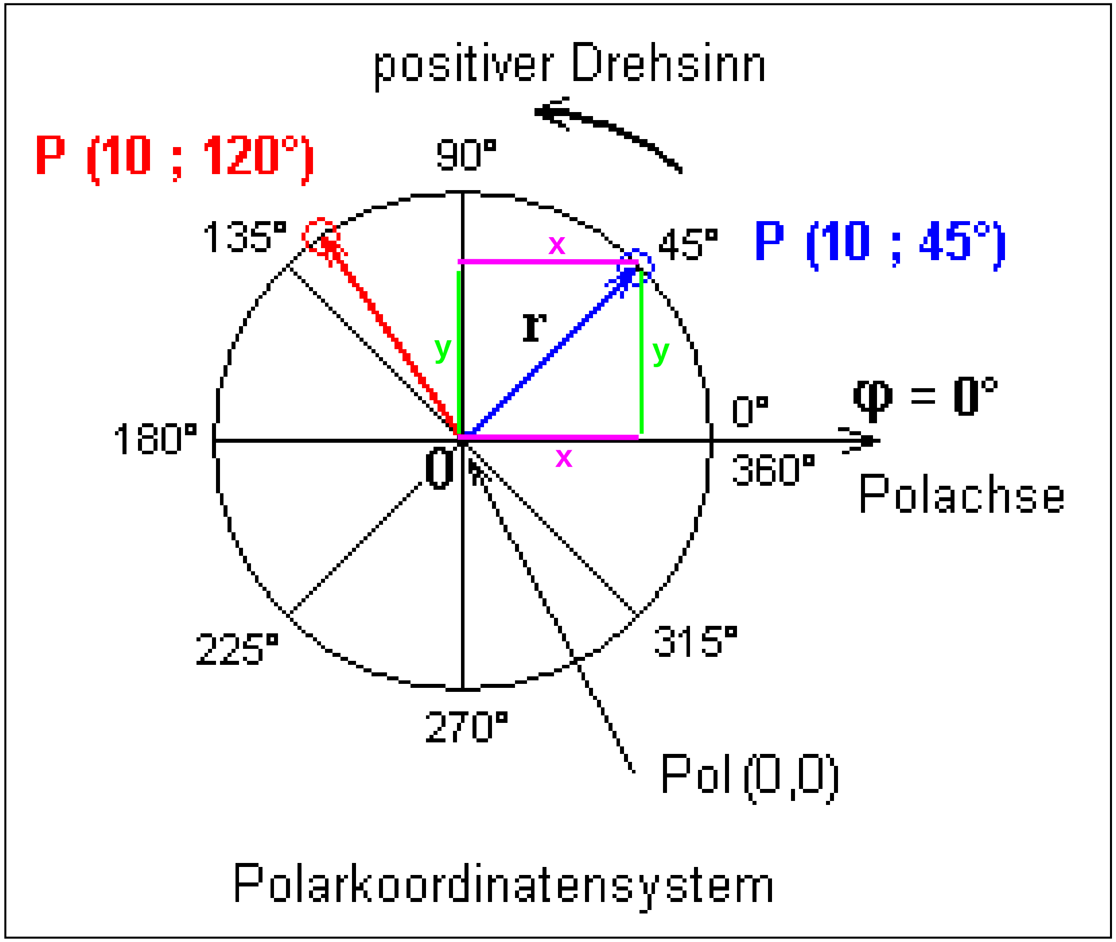
Im Polarkoordinatensystem wird ein Punkt
- durch den Abstand r vom Ursprung und
- dem (positiven) Winkel φ zur x-Achse bestimmt.



(A) Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten:

(A) Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten:

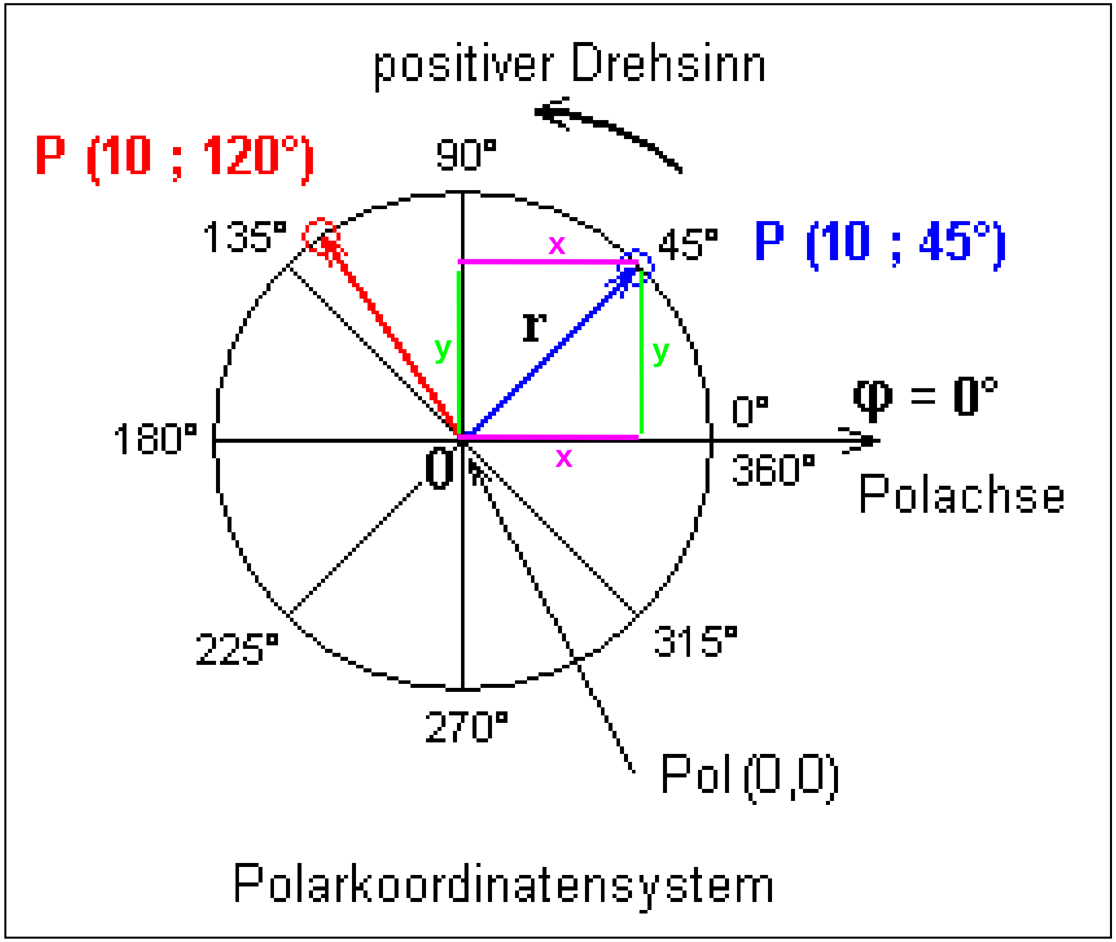
$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$



Quelle: http://www.elektroniktutor.de/mathe/ma_pict/koordsys.gif

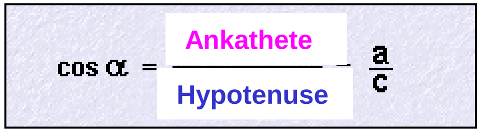
(A) Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten:

$$\boxed{x = r \cdot \cos\varphi}$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

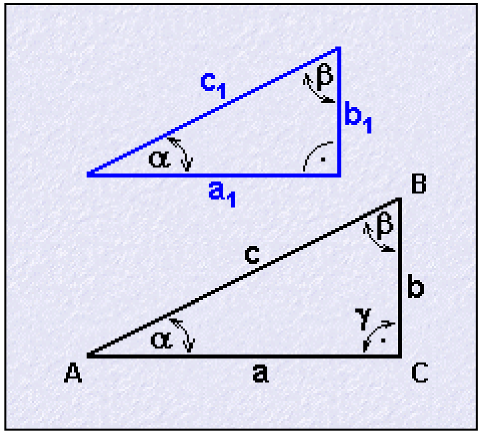


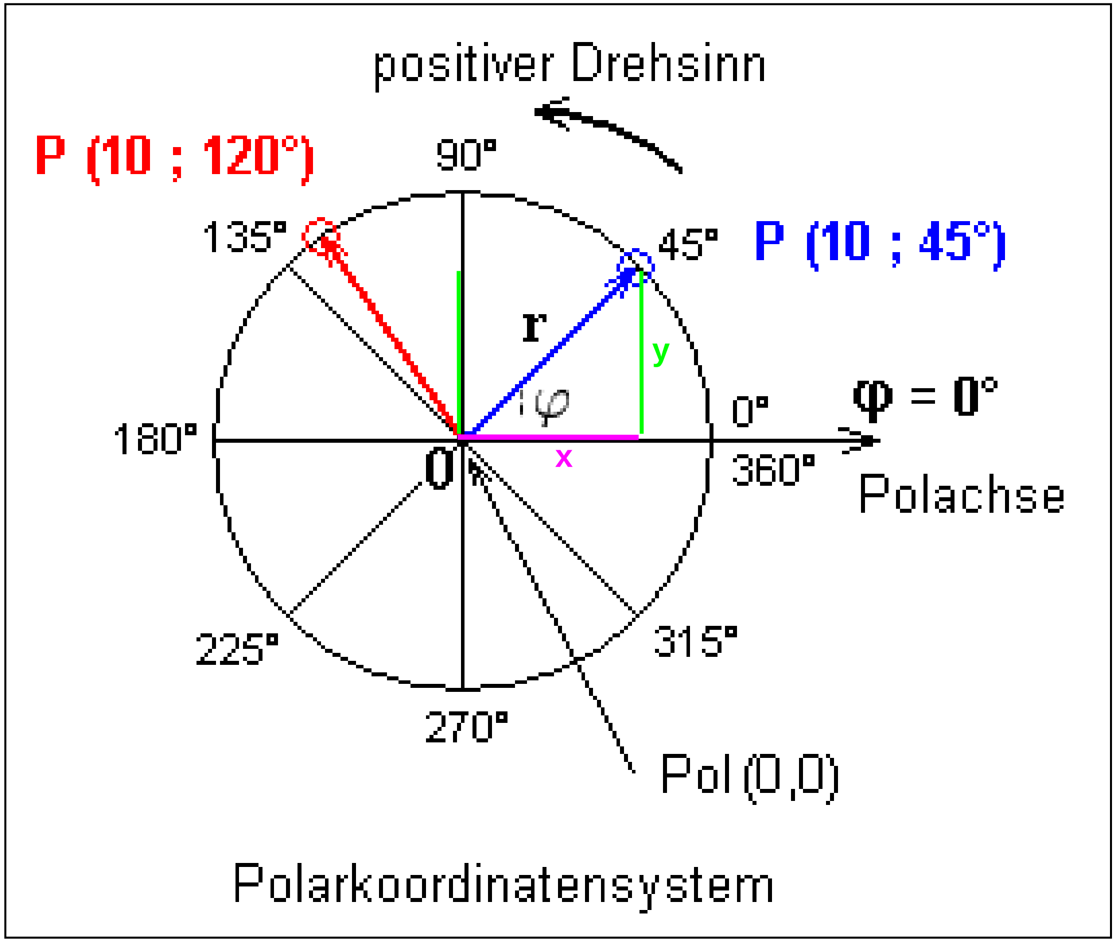
Quelle: http://www.elektroniktutor.de/mathe/ma_pict/koordsys.gif

Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten:



$$\boxed{x} = \boxed{r} \cdot \cos\varphi$$



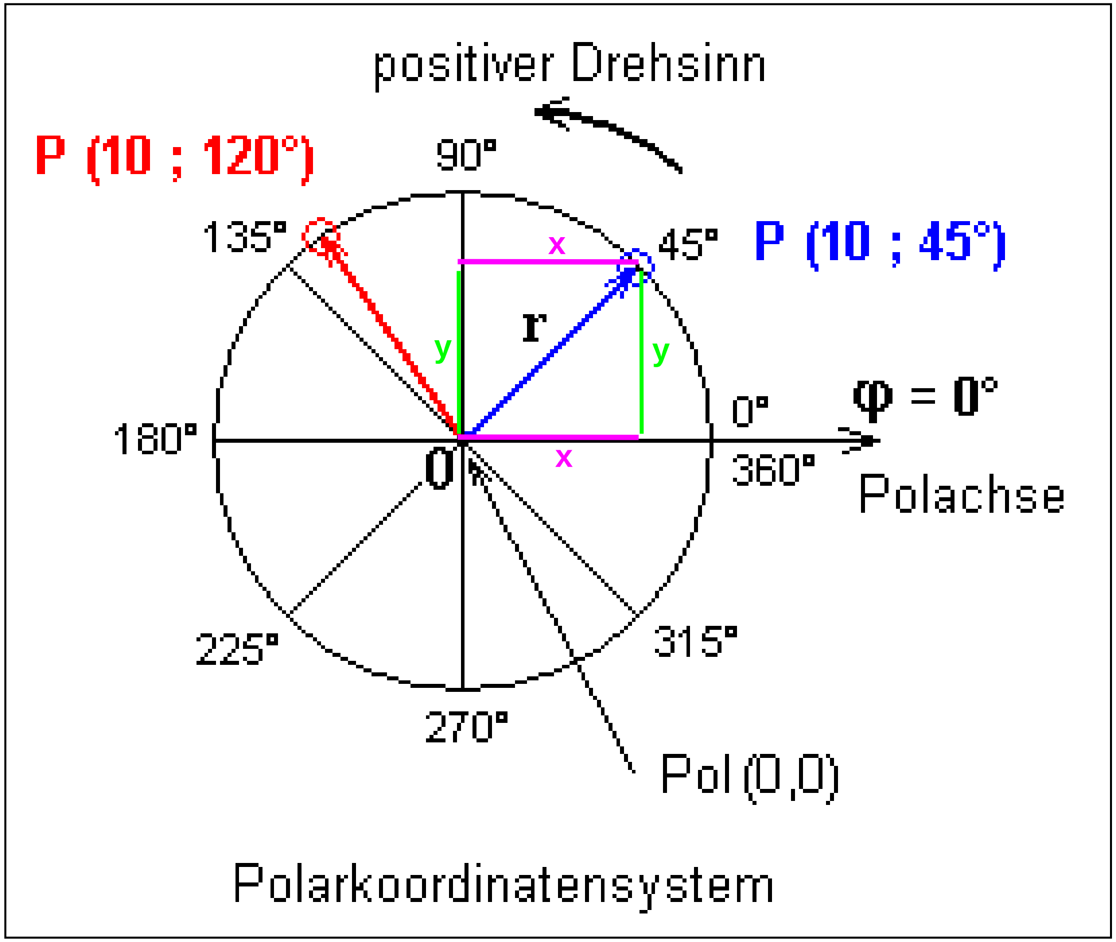


Quelle: http://www.elektroniktutor.de/mathe/ma_pict/koordsys.gif

(A) Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten:

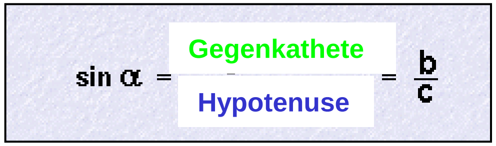
$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$\boxed{y = r \cdot \sin\varphi}$$

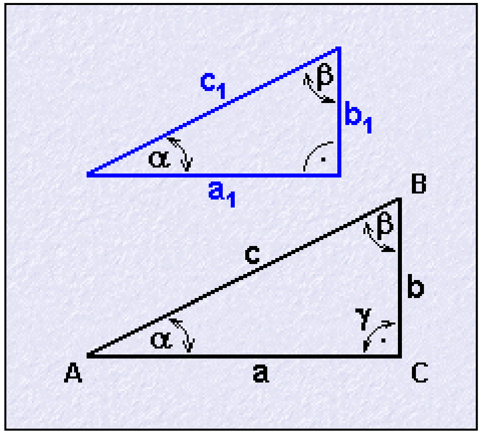


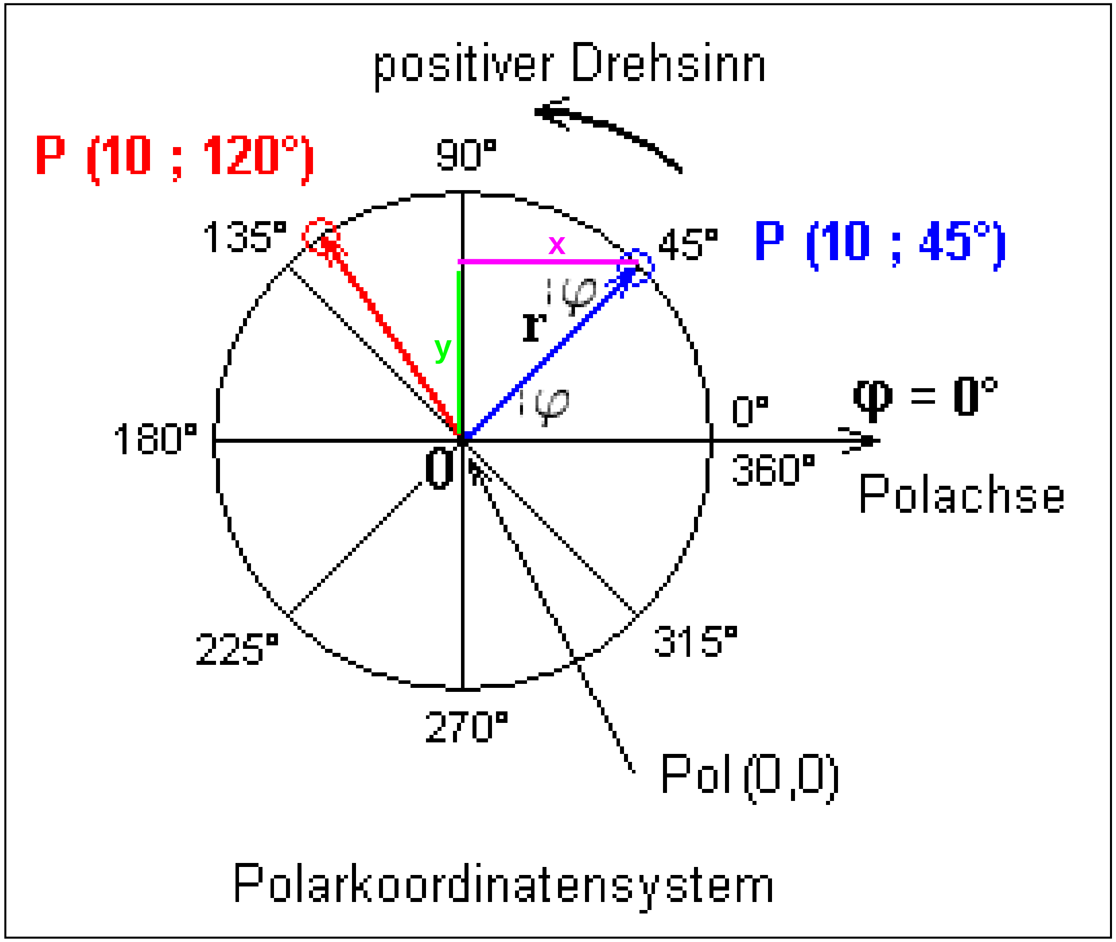
Quelle: http://www.elektroniktutor.de/mathe/ma_pict/koordsys.gif

Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten:



$$\boxed{y} = \boxed{r} \cdot \sin\varphi$$





Quelle: http://www.elektroniktutor.de/mathe/ma_pict/koordsys.gif

Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten:

$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

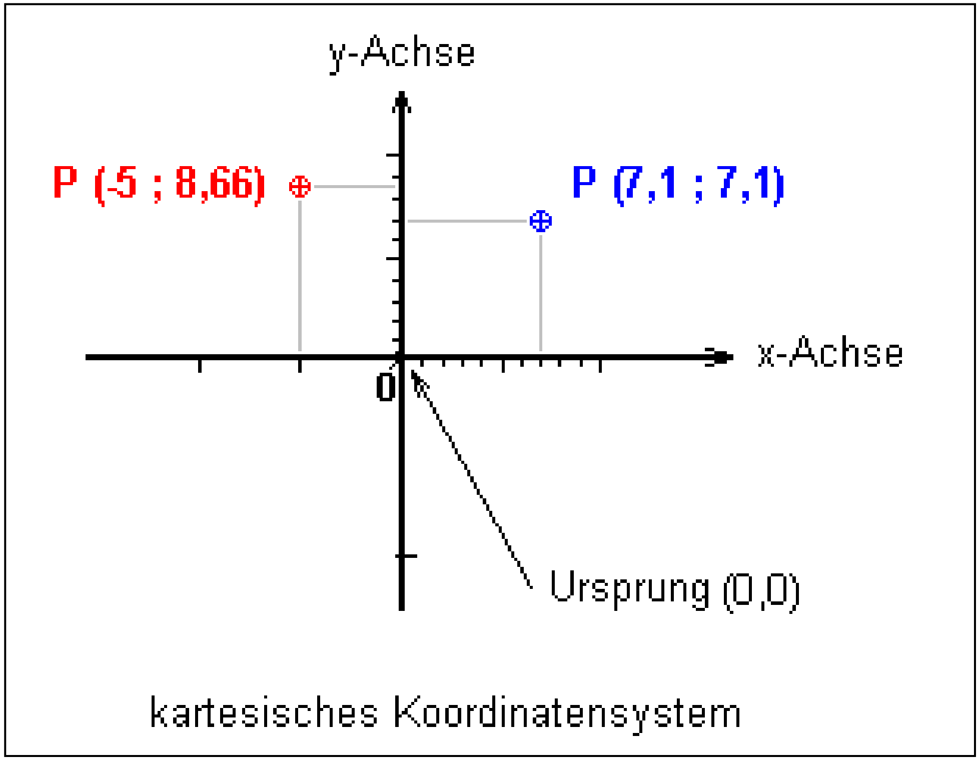
<u>Übungsaufgabe:</u>

Rechnen Sie folgende Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten um:
A (10, 45°), B(7,60°).
Begleiten Sie den Rechenprozess zur Kontrolle zeichnerisch!

$$x = r \cdot \cos \varphi$$
$$y = r \cdot \sin \varphi$$

(B) Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten:

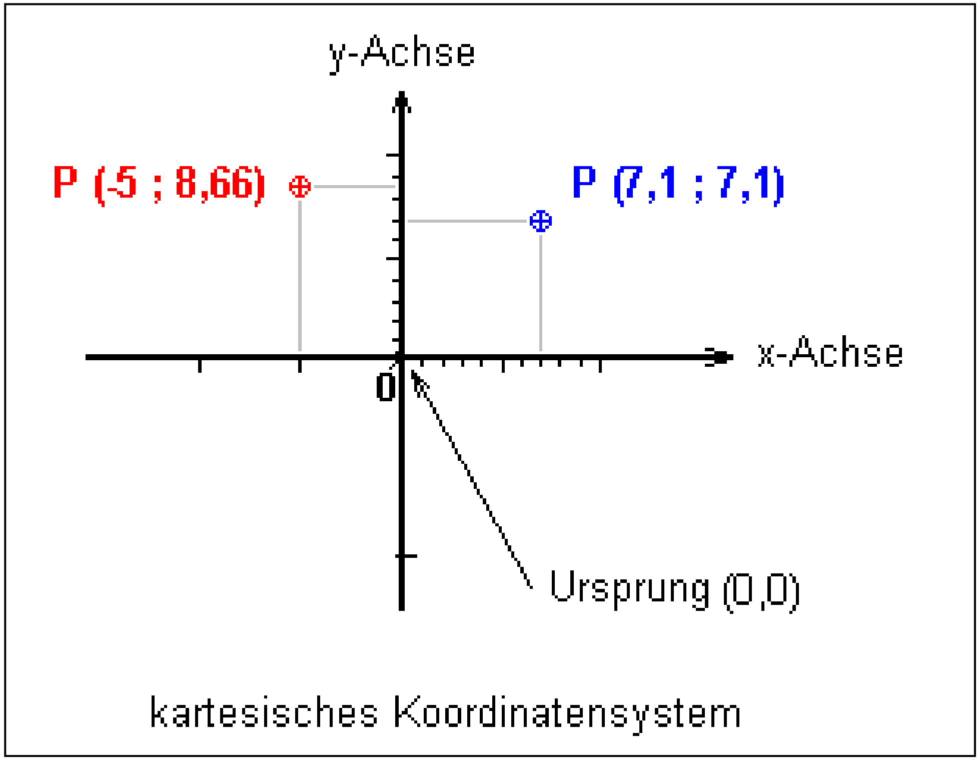
Für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten gilt:



Für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten gilt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ \pi/2 & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$



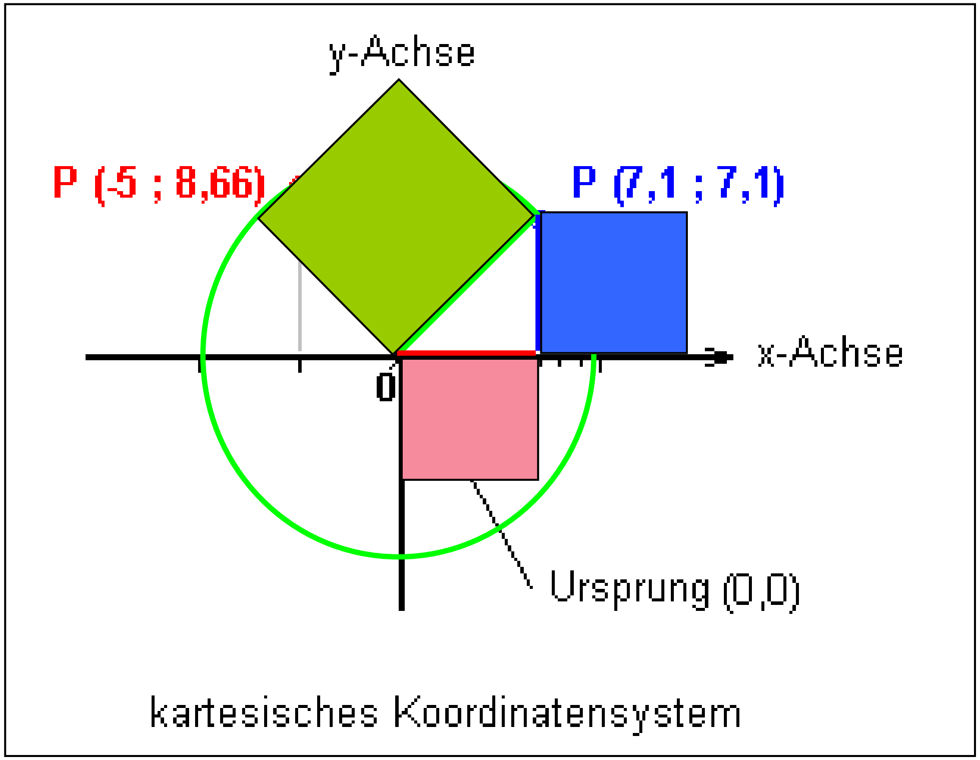
Für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten gilt:

(1) Berechnung von r:

Pythagoras: $a^2 = b^2 + c^2$

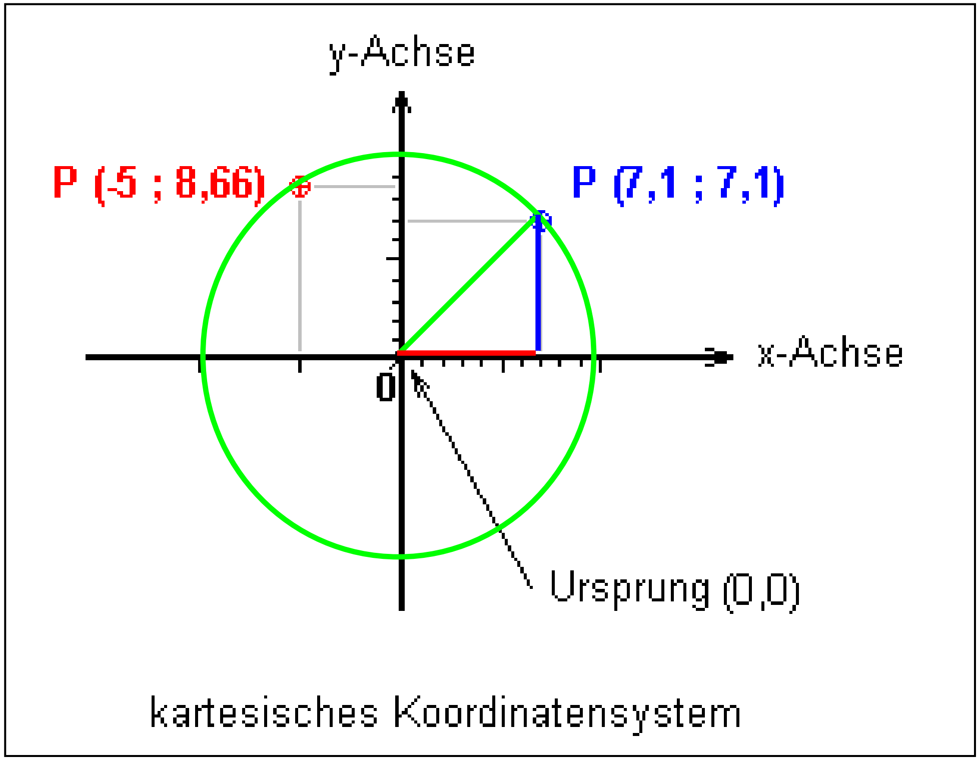
$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\boxed{r} = \sqrt{\boxed{x^2} + \boxed{y^2}}$$



Für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten gilt:

(2) Berechnung von φ:



Quadrantenweise:

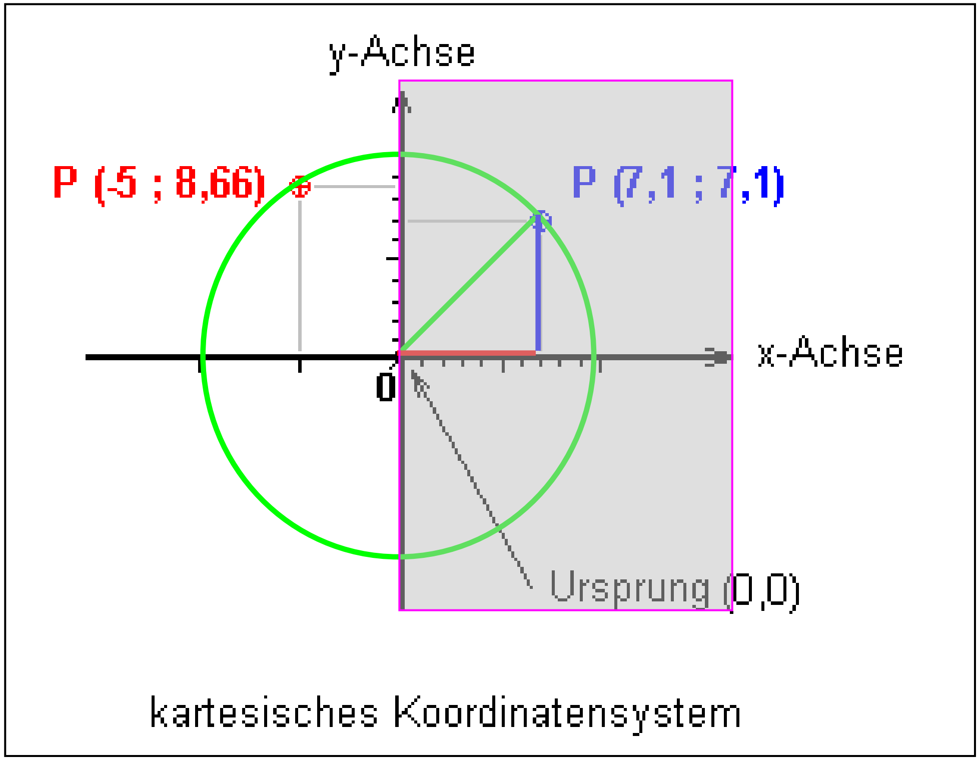
$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ \pi/2 & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten gilt:

(2) Berechnung von φ:

Quadrantenweise:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \boxed{\text{für } x > 0} \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ \pi/2 & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

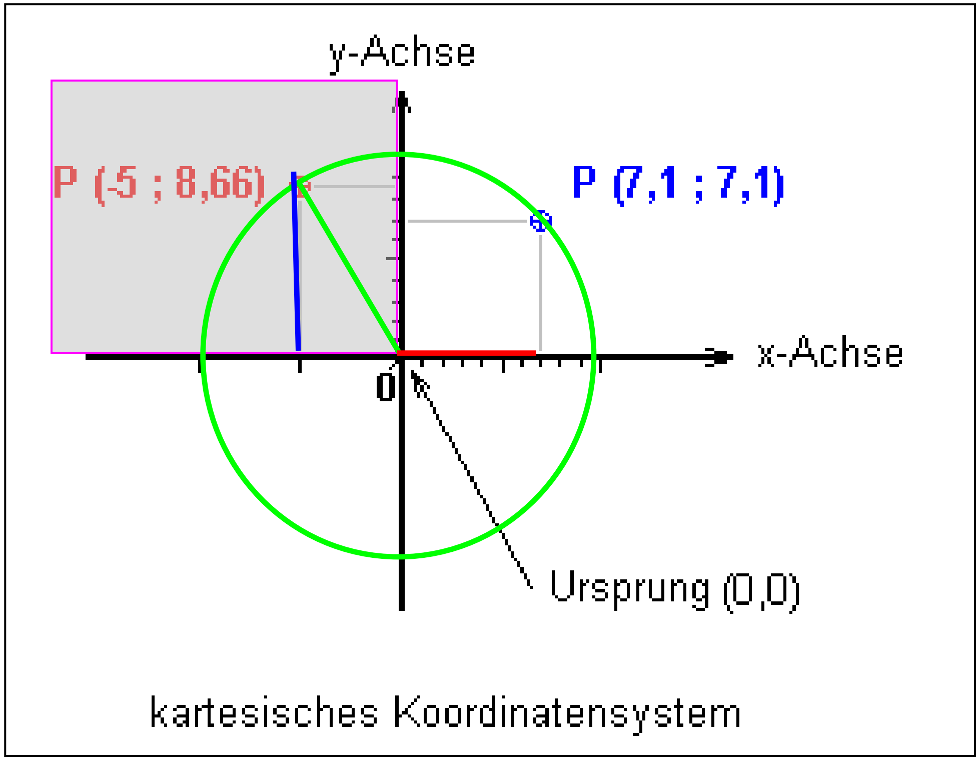


Für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten gilt:

(2) Berechnung von φ:

Quadrantenweise:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \boxed{\text{für } x < 0,\ y \geq 0} \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ \pi/2 & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

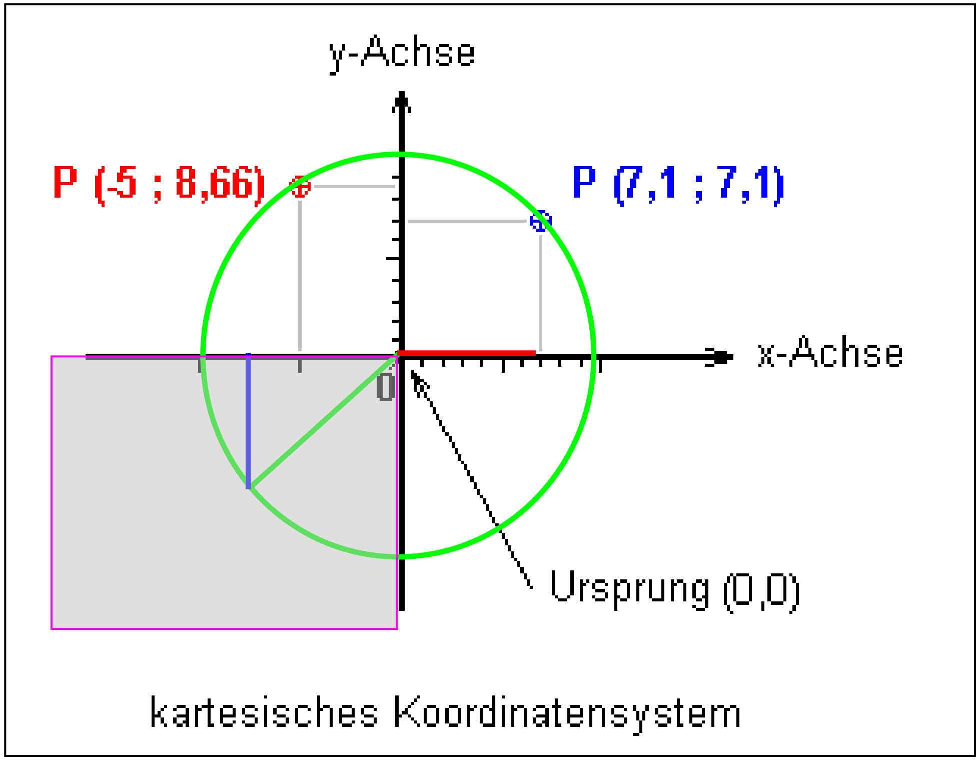


Für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten gilt:

(2) Berechnung von φ:

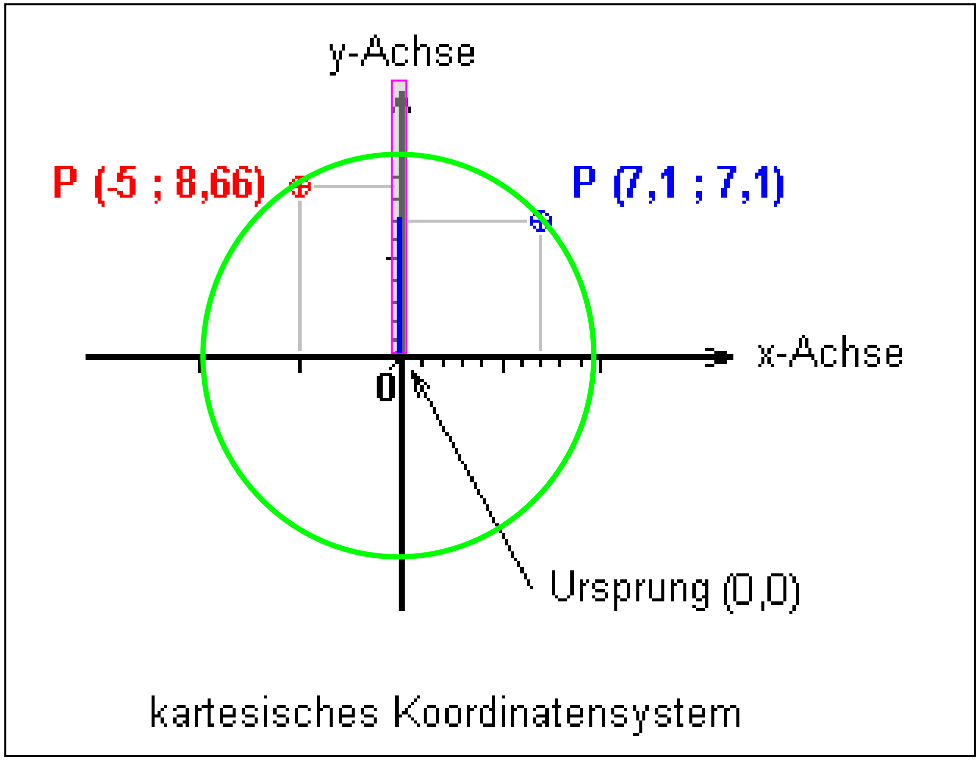
Quadrantenweise:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \boxed{\text{für } x < 0,\ y < 0} \\ \pi/2 & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$



Für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten gilt:

(2) Berechnung von φ:



Quadrantenweise:

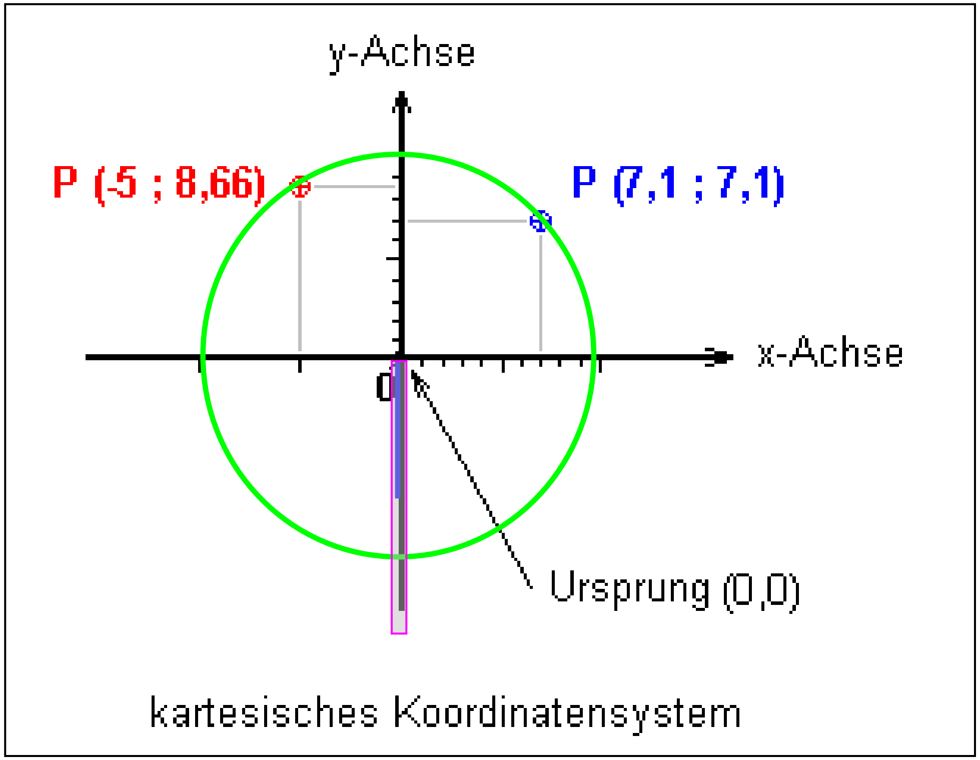
$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ \pi/2 & \boxed{\text{für } x = 0,\ y > 0} \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten gilt:

(2) Berechnung von φ:

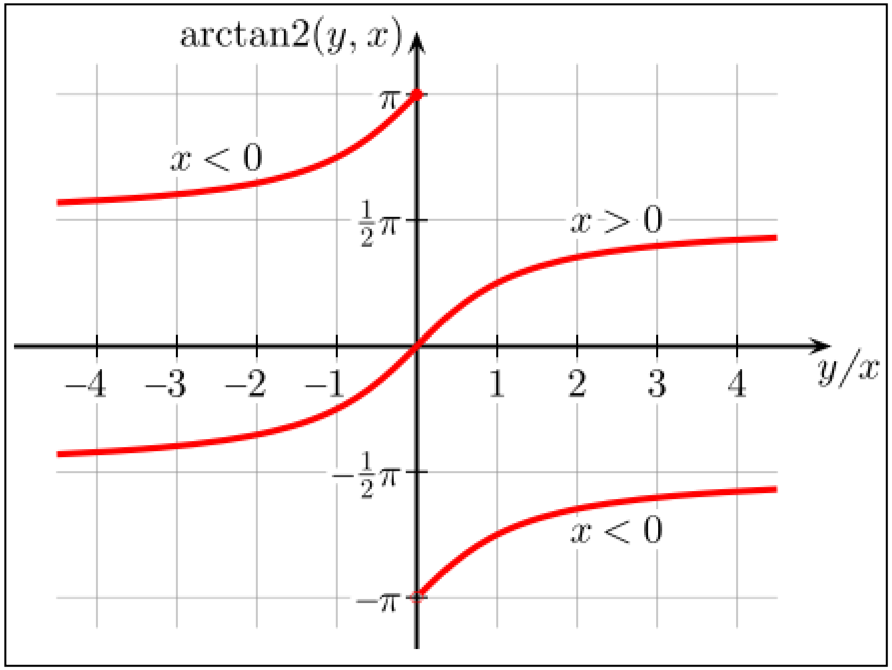
Quadrantenweise:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ \pi/2 & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \boxed{\text{für } x = 0,\ y < 0} \end{cases}$$

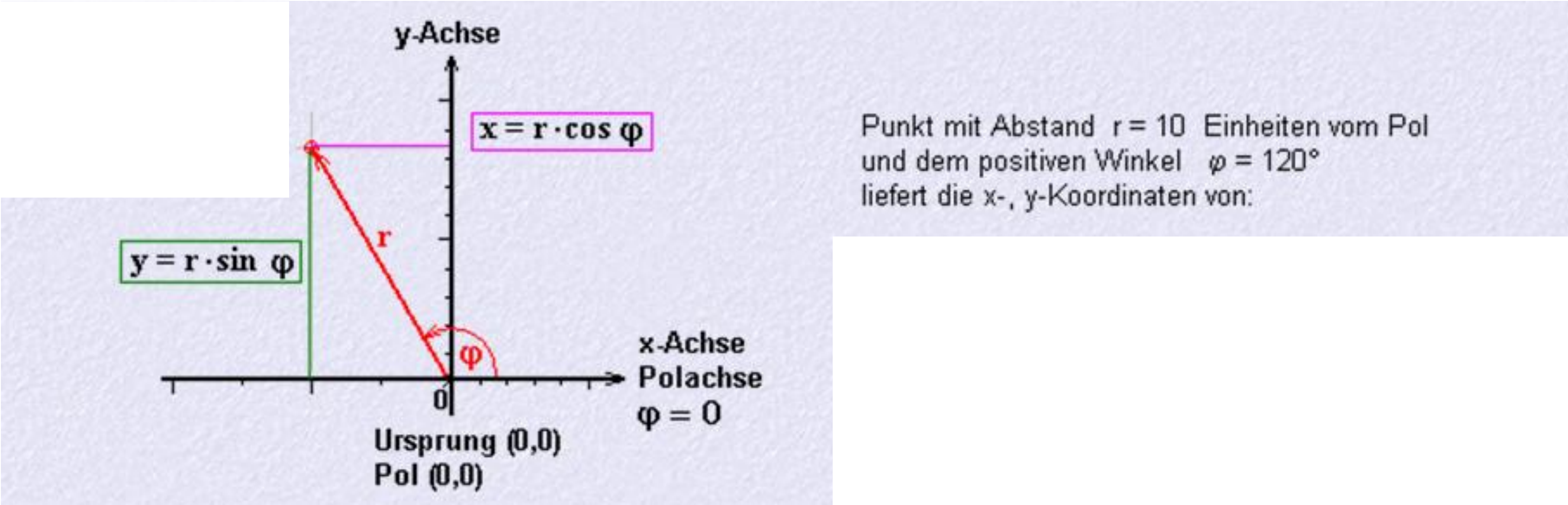


Quadrantenweise:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ \pi/2 & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

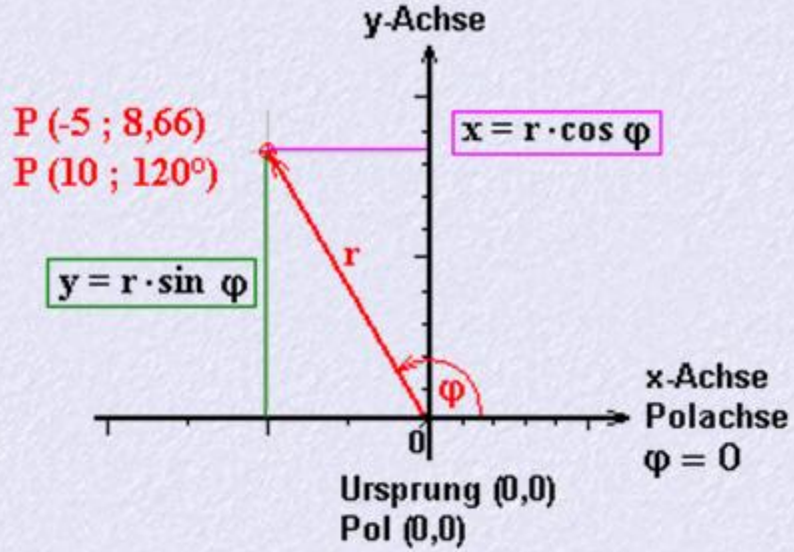


Beispielaufgabe 1: Umrechnung Polarkoordinaten ins kartesische Koordinatensystem



Quelle: http://www.elektroniktutor.de/mathe/ma_pict/koordsys.gif

Beispielaufgabe 1: Umrechnung Polarkoordinaten ins kartesische Koordinatensystem



Punkt mit Abstand r = 10 Einheiten vom Pol
und dem positiven Winkel $\varphi = 120°$
liefert die x-, y-Koordinaten von:

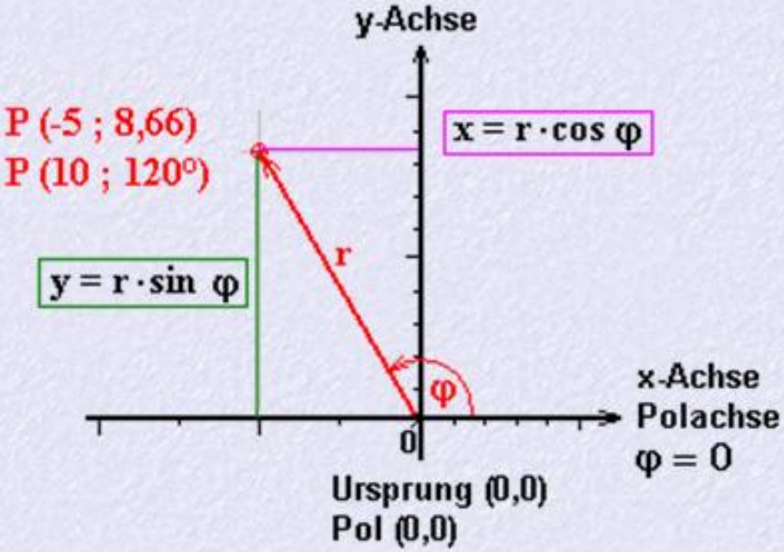
$x = r \cdot \cos\varphi$ $\qquad$ $y = r \cdot \sin\varphi$

$x = 10 \cdot \cos 120°$ $\qquad$ $y = 10 \cdot \sin 120°$

$\boxed{x = -5}$ $\quad$ $\boxed{y = 8{,}66}$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\boxed{P(-5\,;\,8{,}66)}$

Beispielaufgabe 2: Rückrechnung ins Polarkoordinatensystem

Beispielaufgabe 2: Rückrechnung ins Polarkoordinatensystem



Punkt mit Abstand $r = 10$ Einheiten vom Pol
und dem positiven Winkel $\varphi = 120°$
liefert die x-, y-Koordinaten von:

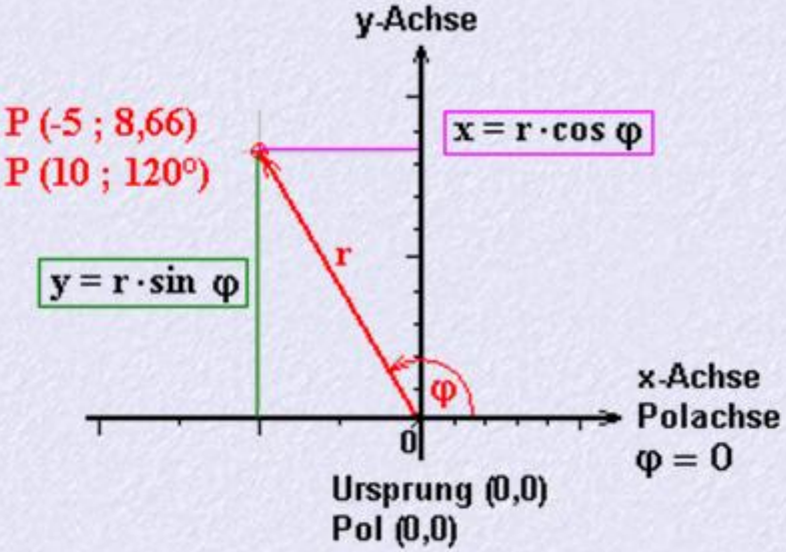
$x = r \cdot \cos\varphi$ $\qquad$ $y = r \cdot \sin\varphi$

$x = 10 \cdot \cos 120°$ $\qquad$ $y = 10 \cdot \sin 120°$

$\boxed{x = -5}$ $\quad$ $\boxed{y = 8{,}66}$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\boxed{P(-5\,;\,8{,}66)}$

Der Punkt P(-5 ; 8,66) im kartesischen System
hat die Entfernung r vom Ursprung und den Winkel φ:

Beispielaufgabe 2: Rückrechnung ins Polarkoordinatensystem



Punkt mit Abstand $r = 10$ Einheiten vom Pol und dem positiven Winkel $\varphi = 120°$ liefert die x-, y-Koordinaten von:

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

$$x = 10 \cdot \cos 120° \qquad y = 10 \cdot \sin 120°$$

$$\boxed{x = -5} \quad \boxed{y = 8{,}66} \implies \boxed{P(-5\,;\,8{,}66)}$$

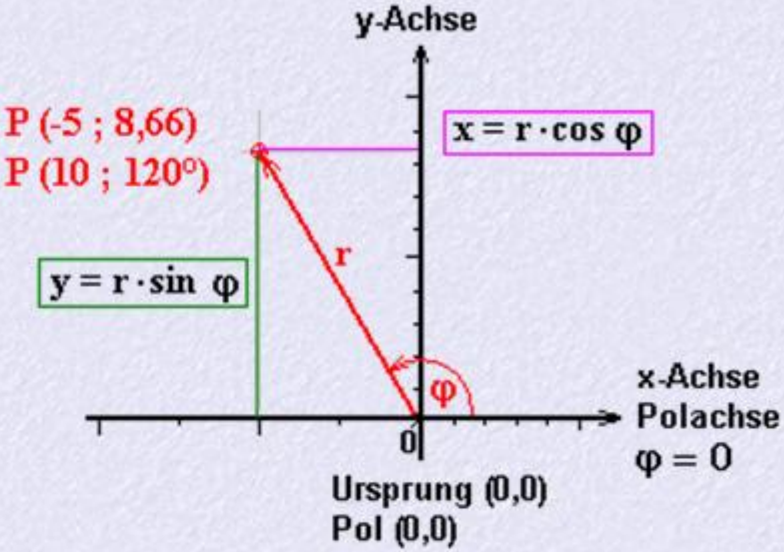
Der Punkt $P(-5\,;\,8{,}66)$ im kartesischen System hat die Entfernung r vom Ursprung und den Winkel φ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-5)^2 + (8{,}66)^2} = \sqrt{100}$$

$$r = 10$$

Beispielaufgabe 2: Rückrechnung ins Polarkoordinatensystem



Punkt mit Abstand r = 10 Einheiten vom Pol
und dem positiven Winkel $\varphi = 120°$
liefert die x-, y-Koordinaten von:

$x = r \cdot \cos\varphi$ $\qquad$ $y = r \cdot \sin\varphi$

$x = 10 \cdot \cos 120°$ $\qquad$ $y = 10 \cdot \sin 120°$

$\boxed{x = -5}$ $\quad$ $\boxed{y = 8{,}66}$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\boxed{P(-5\,;\,8{,}66)}$

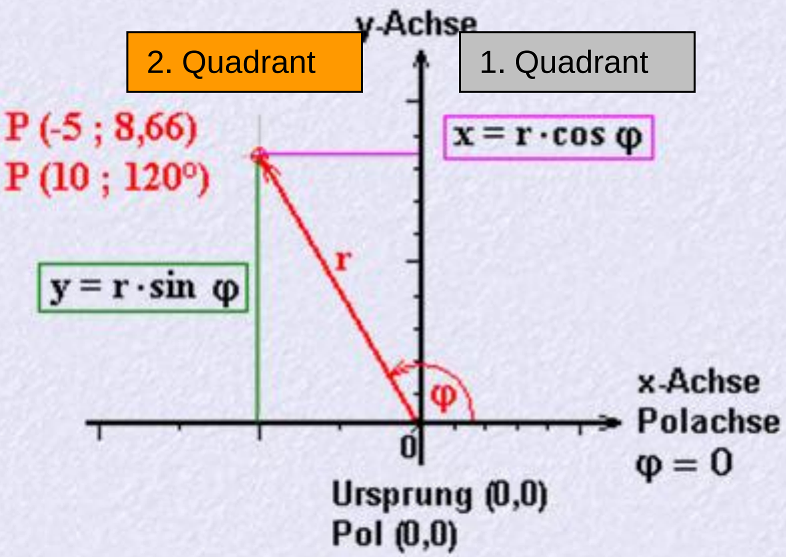
Der Punkt P(-5 ; 8,66) im kartesischen System
hat die Entfernung r vom Ursprung und den Winkel φ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{(-5)^2 + (8{,}66)^2} = \sqrt{100} \qquad \varphi = \arctan\frac{8{,}66}{-5} = \arctan(-1{,}732)$$

$$r = 10 \qquad \varphi = -60°$$

Beispielaufgabe 2: Rückrechnung ins Polarkoordinatensystem



Punkt mit Abstand r = 10 Einheiten vom Pol
und dem positiven Winkel $\varphi = 120°$
liefert die x-, y-Koordinaten von:

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

$$x = 10 \cdot \cos 120° \qquad y = 10 \cdot \sin 120°$$

$$\boxed{x = -5} \quad \boxed{y = 8{,}66} \Longrightarrow \boxed{P(-5\,;\,8{,}66)}$$

Der Punkt P(-5 ; 8,66) im kartesischen System
hat die Entfernung r vom Ursprung und den Winkel φ:

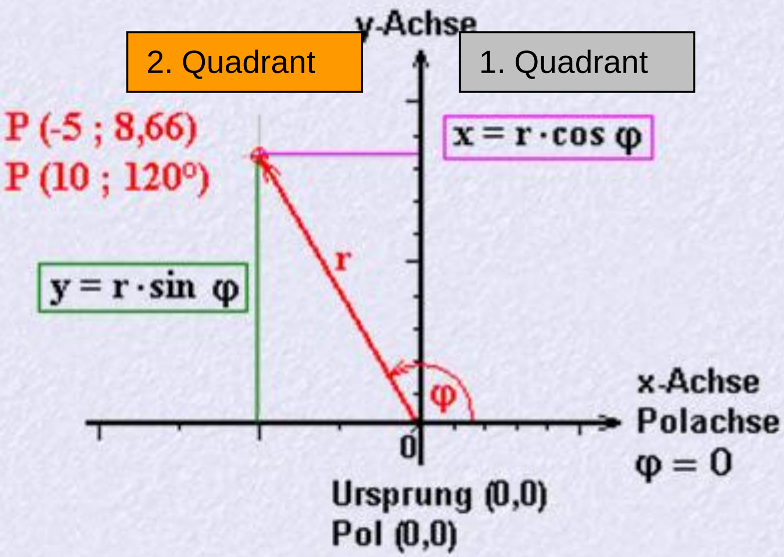
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{(-5)^2 + (8{,}66)^2} = \sqrt{100} \qquad \varphi = \arctan\frac{8{,}66}{-5} = \arctan(-1{,}732)$$

$$r = 10 \qquad \varphi = -60°$$

Der negative x-Wert weist auf den II. Quadranten hin.

Beispielaufgabe 2: Rückrechnung ins Polarkoordinatensystem



Punkt mit Abstand $r = 10$ Einheiten vom Pol und dem positiven Winkel $\varphi = 120°$ liefert die x-, y-Koordinaten von:

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

$$x = 10 \cdot \cos 120° \qquad y = 10 \cdot \sin 120°$$

$$\boxed{x = -5} \quad \boxed{y = 8{,}66} \Longrightarrow \boxed{P(-5\,;\,8{,}66)}$$

Der Punkt $P(-5\,;\,8{,}66)$ im kartesischen System hat die Entfernung r vom Ursprung und den Winkel φ:

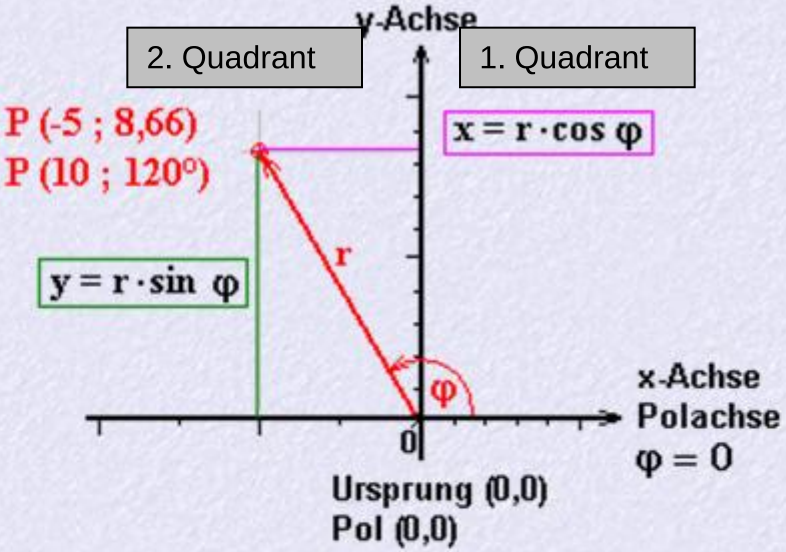
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{(-5)^2 + (8{,}66)^2} = \sqrt{100} \qquad \varphi = \arctan\frac{8{,}66}{-5} = \arctan(-1{,}732)$$

$$r = 10 \qquad \boxed{\varphi = -60°}$$

Der negative x-Wert weist auf den II. Quadranten hin.
Der negative Winkel muss zu 180° addiert werden.

Beispielaufgabe 2: Rückrechnung ins Polarkoordinatensystem



Punkt mit Abstand r = 10 Einheiten vom Pol
und dem positiven Winkel $\varphi = 120°$
liefert die x-, y-Koordinaten von:

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

$$x = 10 \cdot \cos 120° \qquad y = 10 \cdot \sin 120°$$

$$\boxed{x = -5} \quad \boxed{y = 8{,}66} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P(-5\,;\,8{,}66)}$$

Der Punkt P(-5 ; 8,66) im kartesischen System
hat die Entfernung r vom Ursprung und den Winkel φ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{(-5)^2 + (8{,}66)^2} = \sqrt{100} \qquad \varphi = \arctan\frac{8{,}66}{-5} = \arctan(-1{,}732)$$

$$r = 10 \qquad \varphi = -60° \qquad \boxed{\varphi = 180° - 60° = 120°}$$

Der negative x-Wert weist auf den II. Quadranten hin.
Der negative Winkel muss zu 180° addiert werden.

mit $\boxed{r = 10}$ $\boxed{\varphi = 120°}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{P(10\,;\,120°)}$

(C) Umrechnung von Gauß Krüger / UTM:

(C) Umrechnung von Gauß Krüger / UTM:

1 Formeln

1.1 verwendete Symbole

- geographische Koordinaten auf dem Ellipsoid Breite B, Lnge L
- Längendifferenz zum Bezugsmeridian $l = L - L_0$
- ebene Koord. Rechtswert (Easting) R, Hochw. (North.) H (geod. y, x / math. x, y)
- isometrische Breite q
- Index $_0$: Koordinatennullpunkt des Systems
- Maßstabsfaktor m_0
- Halbachsen a, b
- numerische Exzentrizität $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$
- sonstige abgeleitete Größen: $n = \frac{a-b}{a+b}$
- $\eta^2 = \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2 B \qquad t = \tan B$
- $W = \sqrt{1-e^2\sin^2 B} \qquad V = W\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$
- Querkrümmung $N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$
- E = Basis des natürlichen Logarithmus

1.2 isometrische Breite auf dem Ellipsoid

- isometrische Breite aus geographischer Breite

$$q = \ln\left(\left(\frac{1-e\sin B}{1+e\sin B}\right)^{\frac{e}{2}}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)\right) \tag{1}$$

- geographische Breite aus isometrischer Breite
  iteratives Verfahren:

$$\text{1. Näherung:} \quad B_n = 2\arctan(\mathrm{E}^q) - \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

$$\text{Iterationen:} \quad B_n = 2\arctan\left(\frac{\mathrm{E}^q}{\left(\frac{1-e\sin B_n}{1+e\sin B_n}\right)^{\frac{e}{2}}}\right) - \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

Siehe handout!

1.3 Gauß-Krüger-/UTM-Koordinaten

- Meridianbogenlänge:

$$G = \frac{a}{1+n}\left(\left(1+\frac{n^2}{4}\right)B - \frac{3}{2}\left(n-\frac{n^3}{8}\right)\sin 2B + \frac{15}{16}n^2\sin 4B - \frac{35}{48}n^3\sin 6B\right) \tag{4}$$

- Fußpunktsbreite:

$$\text{1. Näherung:} \quad B_{f0} = G\frac{1+n}{a\left(1+\frac{n^2}{4}+\frac{n^4}{64}\right)} \tag{5}$$

$$B_f = B_{f0} + \frac{3}{2}\left(n-\frac{9}{16}n^3\right)\sin 2B_{f0} + \frac{21}{16}n^2\sin 4B_{f0} + \frac{151}{96}n^3\sin 6B_{f0} \tag{6}$$

- Berechnung ebener Koordinaten:

$$\begin{aligned} H &= m_0\Big(G + \frac{Nt}{2}l^2\cos^2 B + \frac{Nt}{24}(5-t^2+9\eta^2)l^4\cos^4 B \\ &\quad + \frac{Nt}{720}(61-58t^2+t^4+270\eta^2-330t^2\eta^2)l^6\cos^6 B\Big) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} R &= y_0 + 1000000kz + m_0\Big(Nl\cos B + \frac{N}{6}(1-t^2+\eta^2)l^3\cos^3 B \\ &\quad + \frac{N}{120}(5-18t^2+t^4+14\eta^2-58t^2\eta^2)l^5\cos^5 B + \frac{N}{5040}(61-479t^2+179t^4)l^7\cos^7 B\Big) \end{aligned} \tag{8}$$

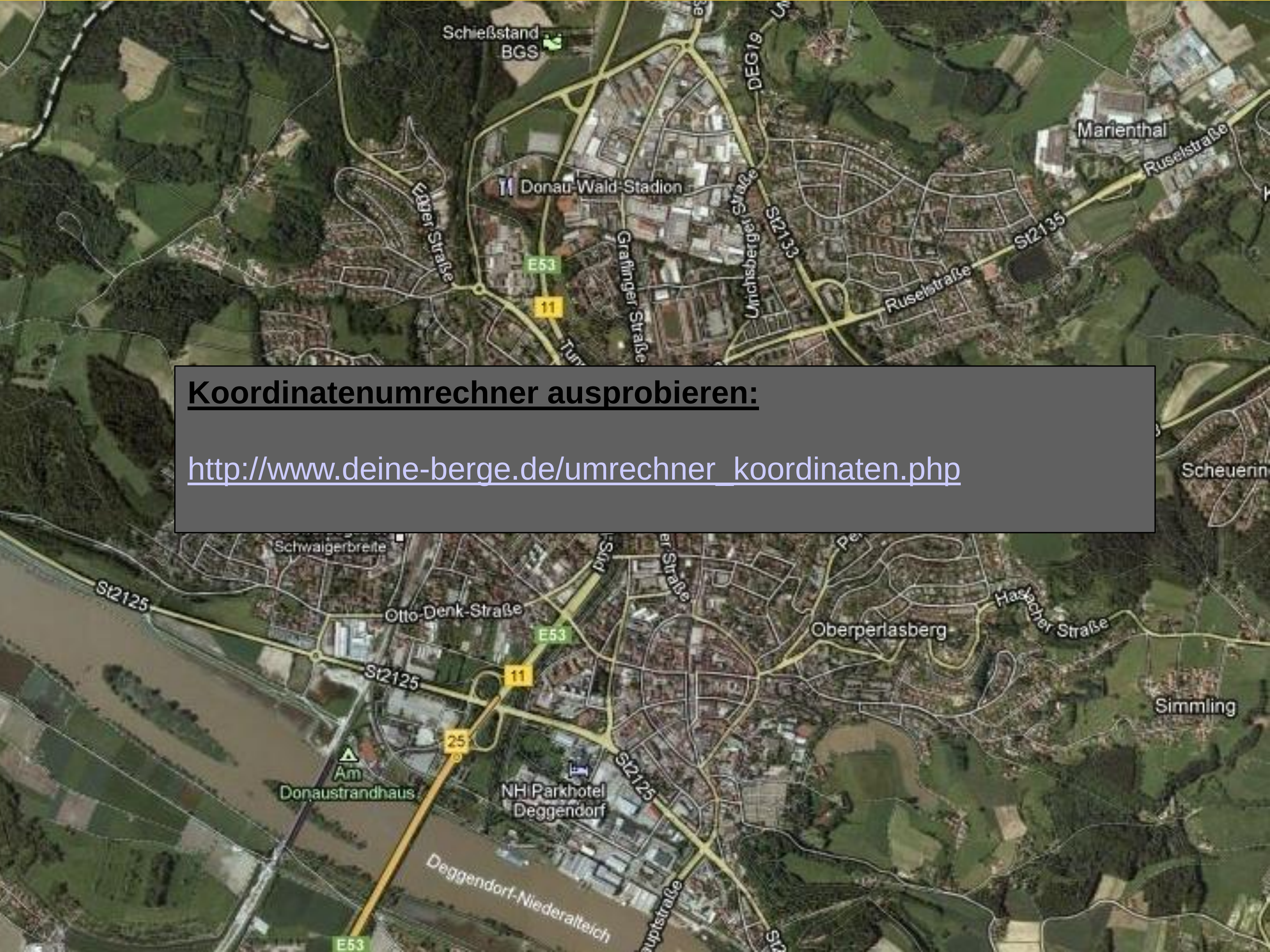
- Berechnung geographischer Koordinaten:

$$G = \frac{H}{m_0} \Rightarrow B_f \Rightarrow \cos B, N, \ldots \qquad \text{und} \qquad y = (R - y_0 - 1000000kz)/m_0 \tag{9}$$

$$B = B_f - \frac{t}{2}(1+\eta^2)\frac{y^2}{N^2} + \frac{t}{24}(5+3t^2+6\eta^2-6t^2\eta^2)\frac{y^4}{N^4} + \frac{t}{720}(61+90t^2+45t^4)\frac{y^6}{N^6} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \frac{1}{\cos B}\frac{y}{N} - \frac{1}{6\cos B}(1+2t^2+\eta^2)\frac{y^3}{N^3} + \frac{1}{120\cos B}(5+28t^2+24t^4)\frac{y^5}{N^5} \\ &\quad - \frac{1}{240\cos B}(61+662t^2+1320t^4+720t^6)\frac{y^7}{N^7} \end{aligned} \tag{11}$$

patrick.reidelstuerz@hdu-deggendorf.de



Koordinatenumrechner ausprobieren:

http://www.deine-berge.de/umrechner_koordinaten.php