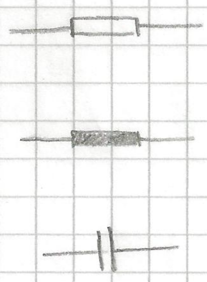
05.10.15

Grundlage: Vertiefte E-Technik

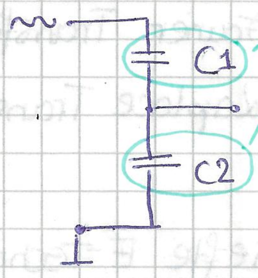


R — R

L — $j\omega L$ — ω = Betriebsfrequenz

C — $\frac{1}{j\omega C}$

Bsp.:

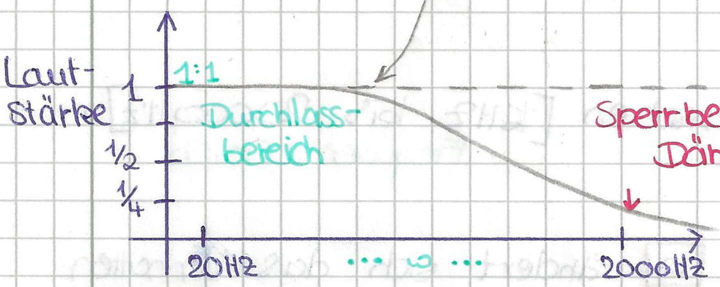


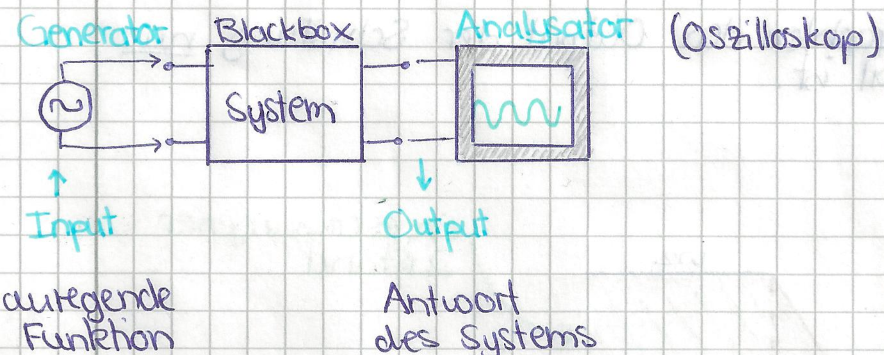
von ω abhängige Widerstände

Neu: VET

wir betrachten nicht mehr nur ein festes ω sondern wir variieren ω in einem Bereich $[\omega_{min} \dots \omega_{max}]$

Bsp.: Frequenzgang Kurve bei Audio-System:

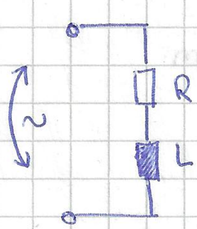




- Übertragungsfunktion eines Systems
- Ortskurven
- Bode-Diagramm
- Filterschaltungen
- Spektrum und Phasenlage
- Fourier Transformation
- Laplace Transformation

12.10.15 <u>Vertiefte E-Technik</u>

Ortskurven

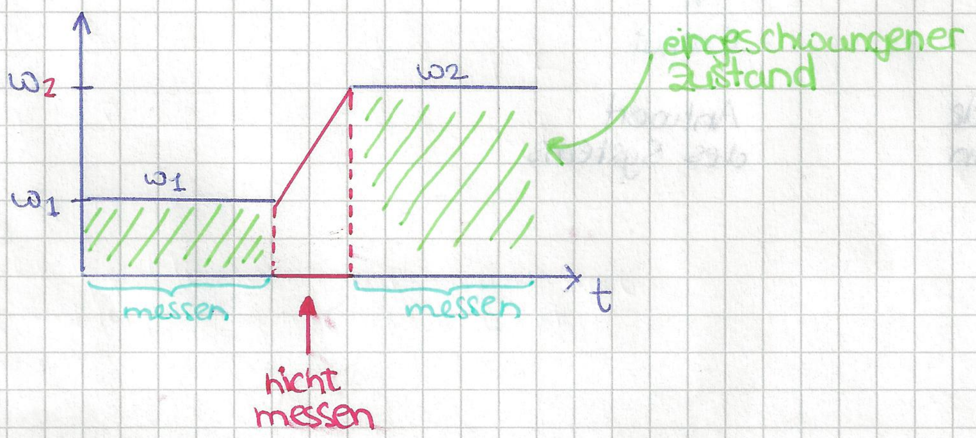


Bei der Analyse einer Schaltung betrachten wir das ω (Betriebsfrequenz) als variabel!

Bsp.: Hörbereich des Menschen [16Hz bis 20000Hz]
Frequenzbereich

Mit einer Änderung von $\boxed{\omega}$ ändert sich das Verhalten der Schaltung: $\omega_1 \longrightarrow \omega_2$

⚠ wir betrachten den Output der Schaltung nur ω stabil ist.



12.10.15

Ändern wir die Betriebsfrequenz ω von $\omega_1 \longrightarrow \omega_2$ dann wird erst wieder gemessen, wenn die Änderung abgeschlossen ist und die Schaltung sich an das neue ω_2 anpassen konnte.

Fachausdruck: "eingeschwungener Zustand"

Darunter versteht man, das eine Schaltung auf eine ω- Änderung reagiert hat und stabil läuft.

Im eingeschwungenen Zustand sind die Rechenverfahren einfacher (komplexe Rechnung).

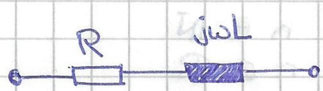
[will man auch die Änderungsreaktionen berechnen, so setzt man ~~von~~ LaPlace-Transformation ein]

(P.) Was versteht man unter dem "eingeschwungenem Zustand"?

Im letzten Semester haben wir eine graphische Darstellungsmethode (bei festem ω) kennen gelernt: "Zeigerdiagramme".

Jetzt erweitern wir dieses Bild für variable ω

Bsp.:



$\underline{Z} = R + \underline{j\omega L}$ ← Phasenverschiebung von 90°

Zeigerdiagramm für ein variables ω_v ← variabel

$\omega_v = \varnothing \cdot \omega \Rightarrow \underline{Z_0} = R$

$\omega_v = 1 \cdot \omega \Rightarrow \underline{Z_1} = R + j\omega L$

$\omega_v = 2 \cdot \omega \Rightarrow \underline{Z_2} = R + j2\omega L$

$\omega_v = 3 \cdot \omega \Rightarrow \underline{Z_3} = R + 3j\omega L$

$\omega_v = 4 \cdot \omega \Rightarrow \underline{Z_4} = R + 4j\omega L$

$\vdots \qquad \vdots$

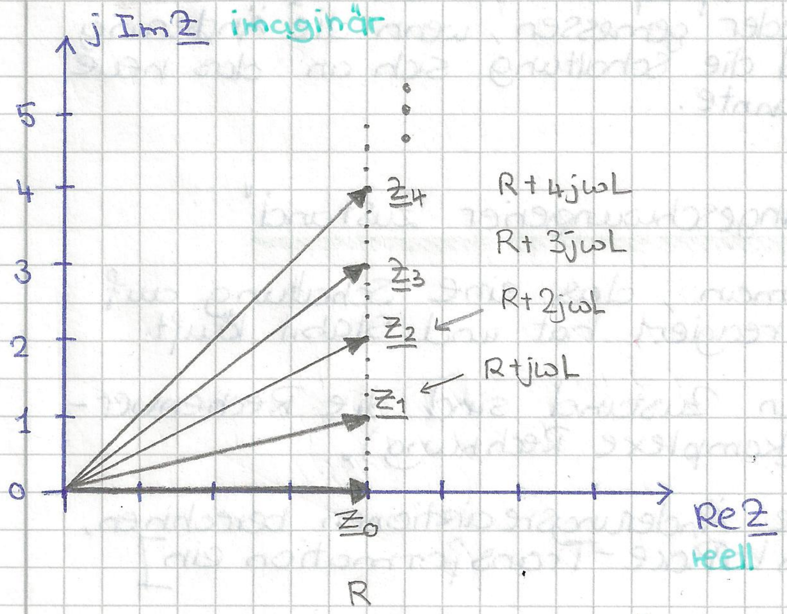
allgemein:

$\omega_n = n \cdot \omega$

$\Rightarrow \underline{Z_n} = R + nj\omega L$

Hier im Beispiel setzen wir $n \in \mathbb{N}$

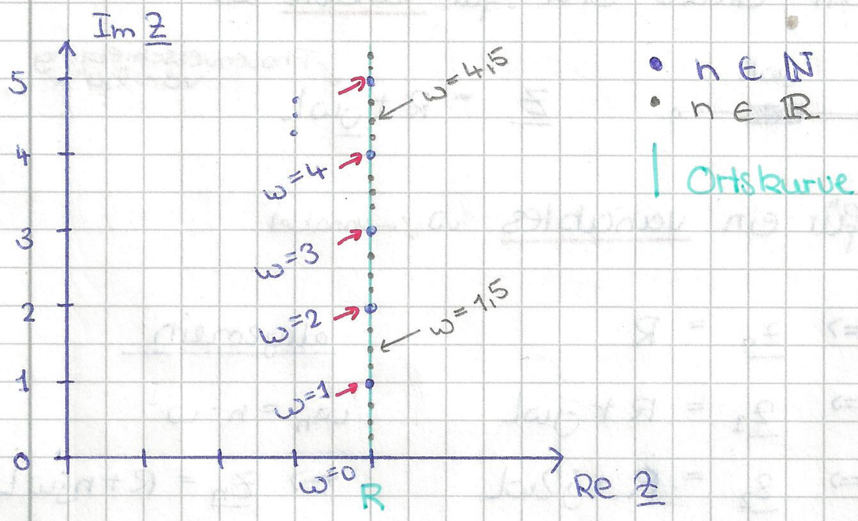
graphische Darstellung:



Bei $n \in \mathbb{N}$ entsteht ein Diagramm mit Zeigern $\underline{Z}_n$.

Verwendet man $n \in \mathbb{R}$ (Kommazahlen: 4,5 ... 3,141526), dann muss man viel mehr Zeiger einzeichnen.
⟶ unübersichtlich

Darum lässt man die Zeiger weg, und verwendet nur die Endpunkte

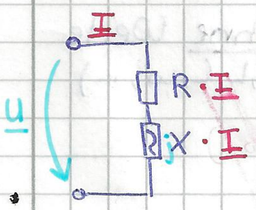


Ort: lat. ortus = Spitze, Ende eines Weges

Durch die Endpunkte legen wir eine Kurve.
Diese Kurve nennt man Ortskurve.

Ortskurven eignen sich zur Darstellung variabler ω, aber auch zur Darstellung anderer variabler Größen (R, L, C ...). 12.10.15

andere Bsp.: Ortskurve für R und X



Reihenschaltung aus Wirkwiderstand $R \geq 0$ und Blindwiderstand $-\infty < X < +\infty$

$\underline{Z} = R + jX$

Jetzt machen wir 1.) R = const. und X = variabel

2.) R = variabel und X = const.

wie sehen die entsprechenden Ortskurven aus?

Vorgehensweise:

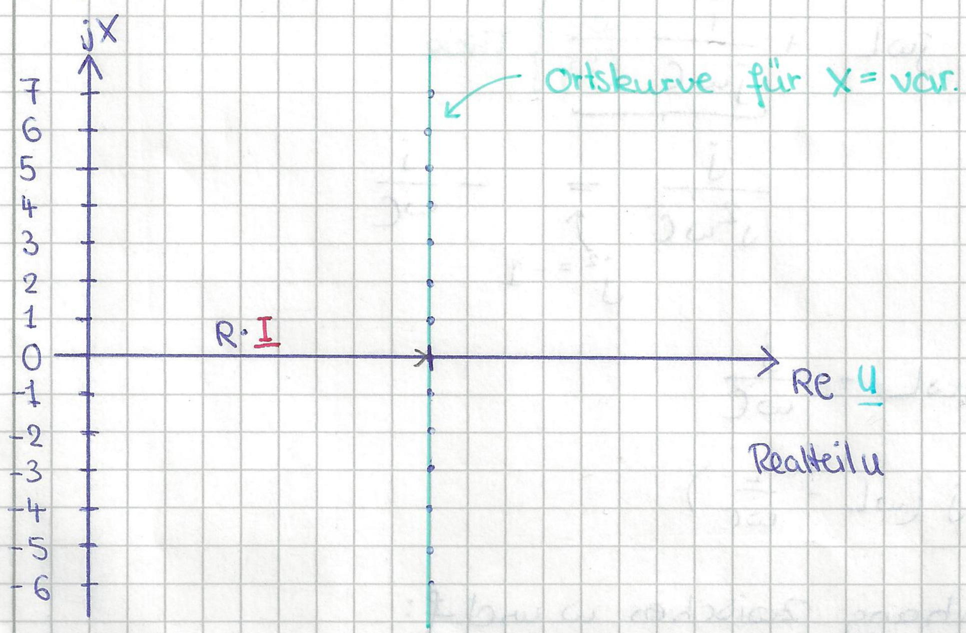
a.) Formel für die Schaltung aufstellen

b.) eine Hand voll "Endpunkte" berechnen

c.) die Ortskurve durch die Endpunkte zeichnen

Aufgabe: ges.: Ortskurve $\underline{U}_\sim$ zeichnen für 1.) R = const. und X = var.

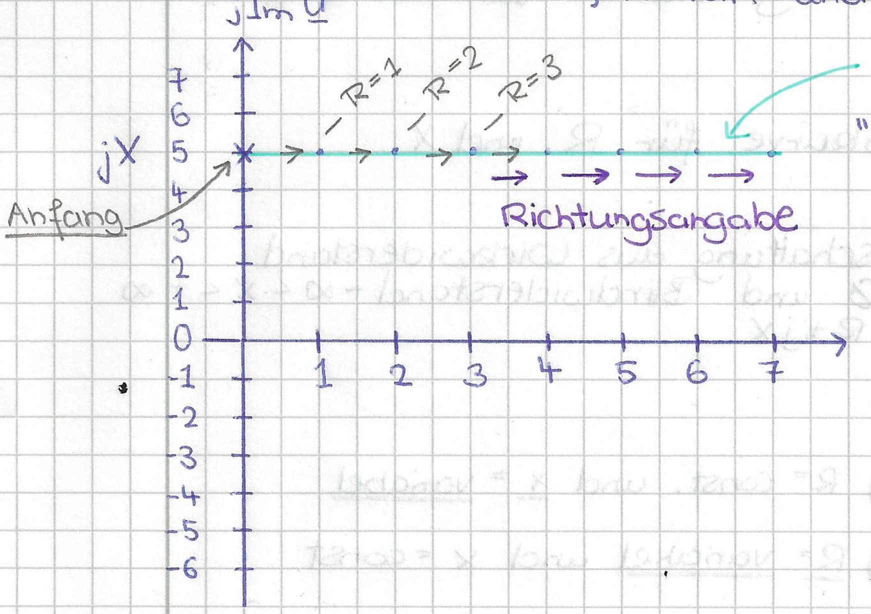
für $X = 0 \Rightarrow \underline{U}_{X=0} = R \cdot \underline{I}$



für $X = 1 \Rightarrow \underline{U}_{X=1} = R \cdot \underline{I} + jX \cdot \underline{I}$

für $X = 2 \Rightarrow \underline{U}_{X=2} = R \cdot \underline{I} + 2jX \cdot \underline{I}$

Aufgabe: ges.: Ortskurve $\underline{U}_{\sim}$ zeichnen für
2.) R = var. und X = konst.



Ortskurve für R = var.

"Qualitative" Angabe

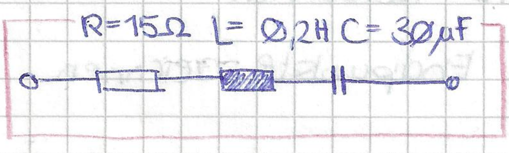
Richtungsangabe

d.h. es wird ohne Werte gerechnet (R, L, C, ω, ...)

für $R = 0 \Rightarrow \underline{U}_{R=0} = 0 + jX \cdot \underline{I}$

für $R = 1 \Rightarrow \underline{U}_{R=1} = 1 \cdot R \cdot \underline{I} + jX\,\underline{I}$

Als nächstes: "Quantitative" Ortskurve



Betriebsfrequenz
f = [40Hz ... 100 Hz

19.10.15 Gesucht: Ortskurve $\underline{Z}$ für Freq

$\underline{Z}$ für diese Schaltung: (Reihenschaltung)

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \underbrace{\frac{1}{j\omega C}\frac{(j)}{(j)}}$$ Trick

$$\frac{j}{j^2\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

$j^2 = -1$

$$= R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$

$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Zusammenhang zwischen ω und f:

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

"Quantitativ" $\hat{=}$ Wert einsetzen für R, L, C, f 19.10.15

$$\underline{Z} = 15\,\Omega + j\left(0{,}2\,H \cdot 2\pi f - \frac{1}{30\,\mu F \cdot 2\pi f}\right)$$

Für f können Werte im Bereich [40 Hz ... 100 Hz] eingesetzt werden.

Für f = 40 Hz ergibt das:

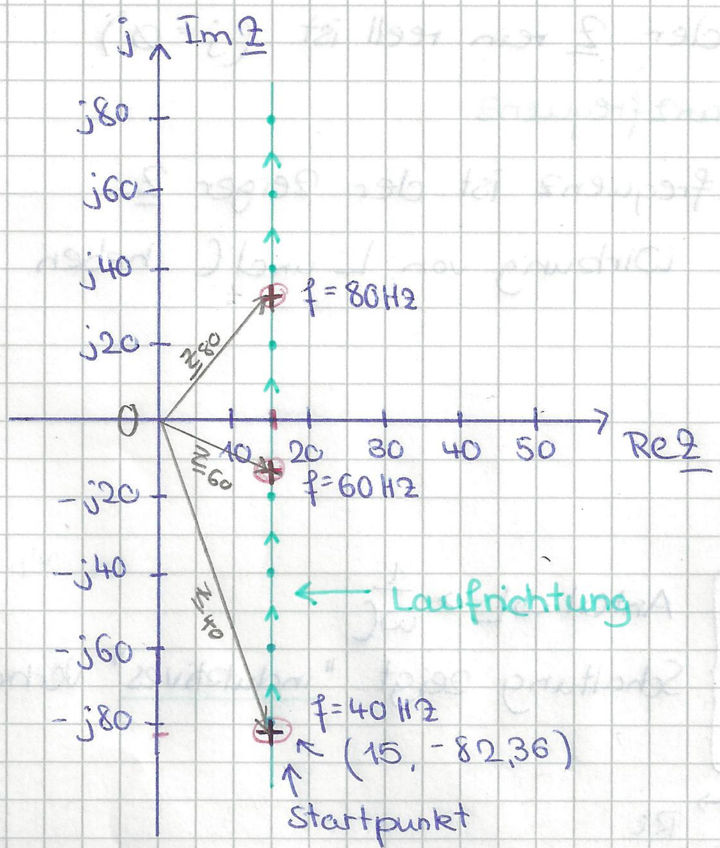
$$\underline{Z}_{40Hz} = 15\,\Omega + j\left(0{,}2H \cdot 2\pi \cdot 40\,Hz - \frac{1}{30\mu F \cdot 2\pi \cdot 40\,Hz}\right)$$

Taschenrechner

$$= 15\,\Omega + j\,(50{,}265 - 132{,}629)\,\Omega$$

$$= \underbrace{15\,\Omega}_{\text{Real}} + \underbrace{j\,(-82{,}36)\,\Omega}_{\text{Imaginär}}$$

Graphik für $\underline{Z}$



$$\underline{Z}_{60Hz} = 15\,\Omega + j\left(0{,}2H \cdot 2\pi \cdot 60\,Hz - \frac{1}{30\mu F \cdot 2\pi \cdot 60\,Hz}\right)$$

$$= 15\,\Omega + j\,(-13{,}02)\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{80Hz} = 15\,\Omega + j\left(0{,}2H \cdot 2\pi \cdot 80\,Hz - \frac{1}{30\mu F \cdot 2\pi \cdot 80\,Hz}\right)\Omega$$

$$= 15\,\Omega + j\,(34{,}22)\,\Omega$$

["Quantitativ" $\hat{=}$ Werte einsetzen für R, L, C, f]

Ein besonderer Punkt ist wo die

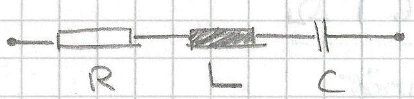
die reelle Achse (X-Achse) schneidet: hier ist der Img. j-Anteil = Ø. Bei welcher Frequenz f findet das statt?

Das bedeutet, dass $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Ø$ geworden ist:

Somit muss $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ sein.

aus $\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad | \cdot \omega$ folgt $\omega^2 L = \frac{1}{C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$

$$\boxed{\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$



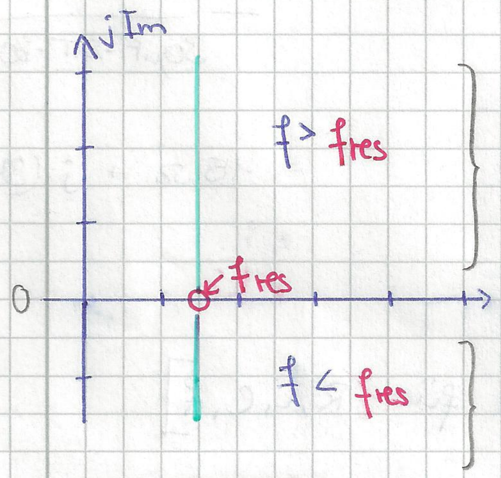
Diese Schaltung nennt man: Reihenschwingkreis

Die Frequenz bei der $\underline{Z}$ rein reell ist ($j = Ø$) nennt man: Resonanzfrequenz

Bei der Resonanzfrequenz ist der Zeiger $\underline{Z}$ minimal, d.h. die Wirkung von L und C heben sich auf.

Fachbegriffe:

P.



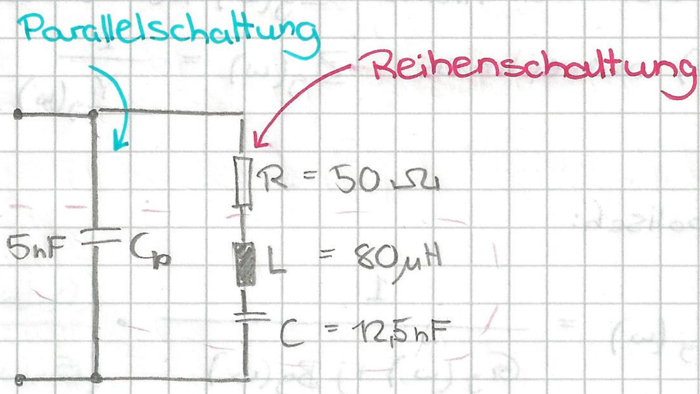
Anteil $\omega L > \frac{1}{\omega C}$
Schaltung zeigt "induktives" Verhalten

Anteil $\omega L < \frac{1}{\omega C}$
Schaltung zeigt "kapazitives" Verhalten

Komplizierte Ortskurven

19.10.15

Schaltung:



und

Betriebsfrequ.

$f = [80\,\text{Hz} \dots 64{,}0\,\text{kHz}]$

$\omega = [0{,}5 \cdot 10^6 \dots 4{,}0 \cdot 10^6]\ \frac{1}{s}$

Zeichne die Ortskurven für:

Admittanz $\underline{Y}_g$ und $\underline{Z}_g$ g = Gesamtschaltung

Bekannt sollte sein:

1.) Admittanz $\underline{Y}_{cp}(\omega) = j\omega C_p = j\omega \cdot 5\,\text{nF}$

2.) Impedanz der Reihenschaltung

Zusammenhang zw. $\underline{Y}$ und $\underline{Z}$ ist $Y = \frac{1}{Z}$

$\underline{Z}_r = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

Reihen-schaltung $= 50\,\Omega + j\left(\omega \cdot 80\,\mu\text{H} - \frac{1}{\omega \cdot 12{,}5\,\text{nF}}\right)$

So können wir $\underline{Y}_g(\omega)$ berechnen:

$\underline{Y}_g(\omega) = \underline{Y}_{cp}(\omega) + \frac{1}{Z_r(\omega)} =$

$= j\omega C_p + \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$

$= j\omega\, 5\,\text{nF} + \frac{1}{50\,\Omega + j\left(\omega\, 80\,\mu\text{H} - \frac{1}{\omega\, 12{,}5\,\text{nF}}\right)}$

$= C_p(\omega) + j\, B_g(\omega)$

Aus der Admittanz $\underline{Y}_g(\omega)$ können wir die Impedanz $\underline{Z}_g(\omega)$ ausrechnen: $\underline{Z}_g(\omega) = \frac{1}{\underline{Y}_g(\omega)}$ symbolisch

Symbolisch:

$$\underline{Z}_g(\omega) = \frac{1}{G_g(\omega) + j B_g(\omega)} \cdot \frac{(G_g(\omega) - j B_g(\omega))}{(G_g(\omega) - j B_g(\omega))}$$

... führt zu

$$\underbrace{\frac{G_g(\omega)}{G_g^2(\omega) + B_g^2(\omega)}}_{R_g(\omega)} + j \cdot \underbrace{\frac{-B_g(\omega)}{G_g^2(\omega) + B_g^2(\omega)}}_{X_g(\omega)}$$

Ausdruck: Diagramm

$\boxed{\text{Ergebnis}}$

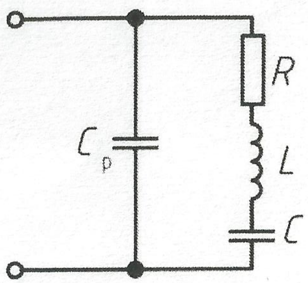
2 Resonanzfrequenzen

$\omega_{r1} = 1{,}1 \cdot 10^6 \frac{1}{s}$

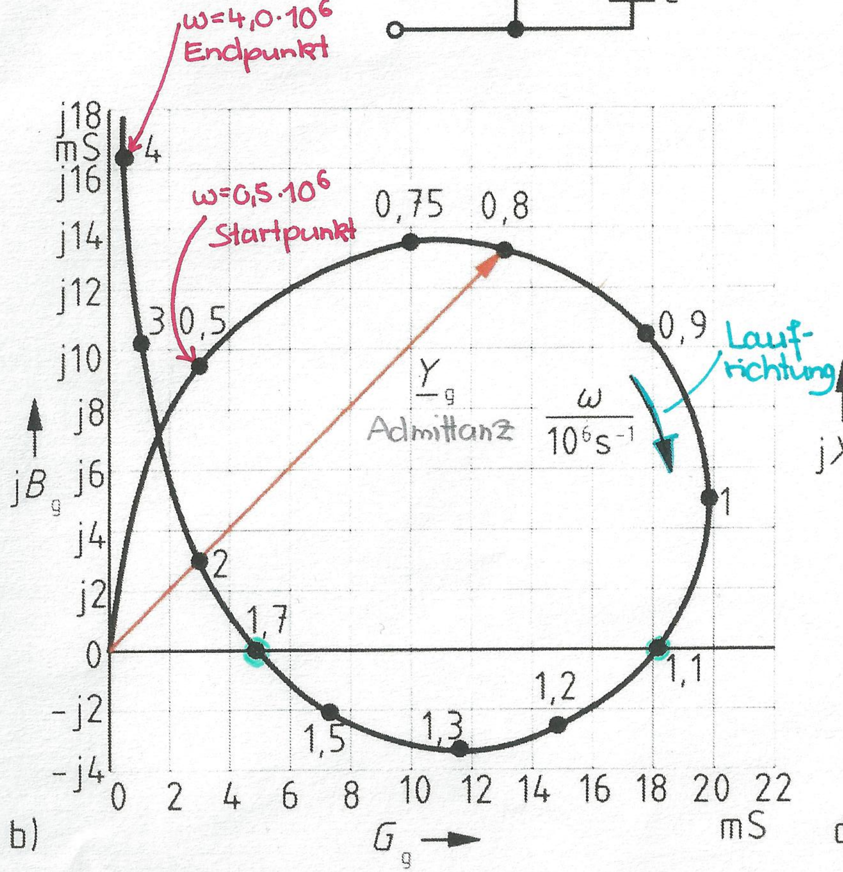
$\omega_{r2} = 1{,}7 \cdot 10^6 \frac{1}{s}$

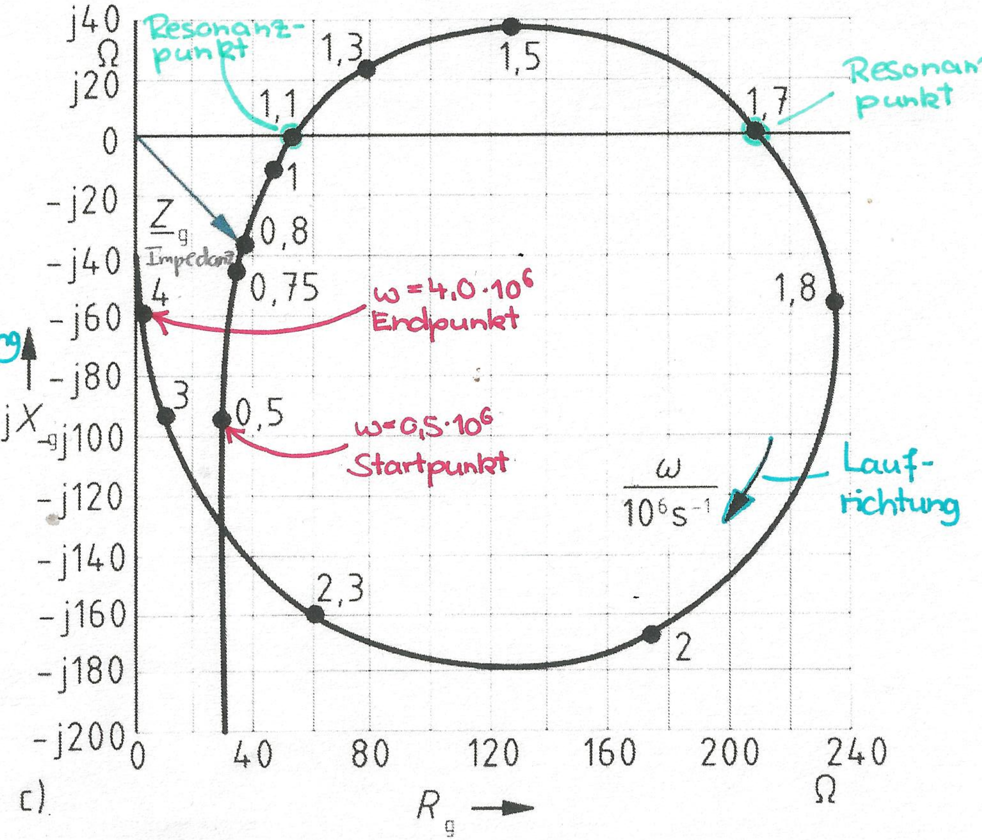
19.10.15

Beispiel aus
der Vorlesung:



Bestimme die Ortskurven
für Admittanz und Impedanz



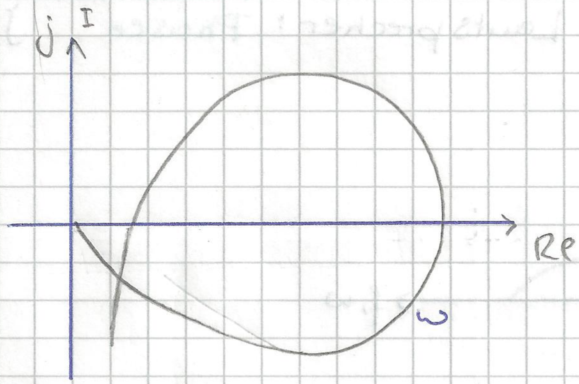


Schaltung des Zweipols (a) sowie Ortskurven seiner Admittanz $\underline{Y}_g$ (b) und Impedanz $\underline{Z}_g$ (c)

Thema: Ortskurve

26.10.15

Was erkennt man an der Impedanzortskurve?



1.) Schwingkreis mit 2 Freiheitsgraden

2.) Schwingkreis besitzt 2 Resonanzfrequenzen („Resonanzkreisfrequenzen" ω)

P.

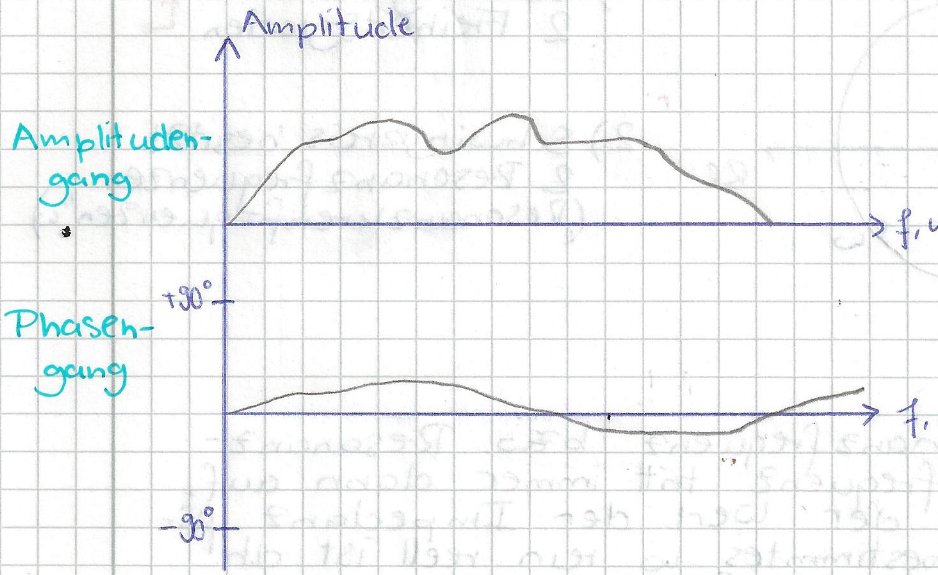
Resonanzfrequenz bzw. Resonanzkreisfrequenz tritt immer dann auf, wenn der Wert der Impedanz für ein bestimmtes ω rein reell ist d.h.
$jIm \neq \emptyset$ ⊛

⊛ anders ausgedrückt:
Wirkung der L's und C's hebt sich gegenseitig auf in Abhängigkeit von ω-Wert

Im Rechenbeispiel:

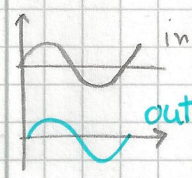
Andere Darstellung von Wechselsignalsschaltungs-eigenschaften

Vergleiche: Audio Bereich Lautsprecher: Amplituden } Diagramme
Phasen



Aus dem Amplitudengang lässt sich ablesen, wie das Übertragungsverhalten unterschiedlicher Frequenzen ist, im obigen Beispiel überträgt (gibt wieder) 20 Hz sehr leise, aber 100 Hz gut.

Aus dem Phasengang lässt sich ablesen, um wie viele Grade Input zu Output des Lautsprechers verschoben ist.



Zusammenhang von Ortskurven mit Amplituden Phasen - Diagramm

Der Vorteil von Ortskurven liegt darin, dass in einer einzigen Kurve die Abhängigkeit von Betrag Z (Impedanz) und Phasenwinkel φ von einem Parameter (z.B. ω) dargestellt wird.
Will man also die beiden Abhängigkeiten in reellen Koord.system darstellen, so sind dafür 2 Kurven nötig!

a.) Amplitudendiagramm Betrag $Z(\omega)$ → "Betragsdiagramm"

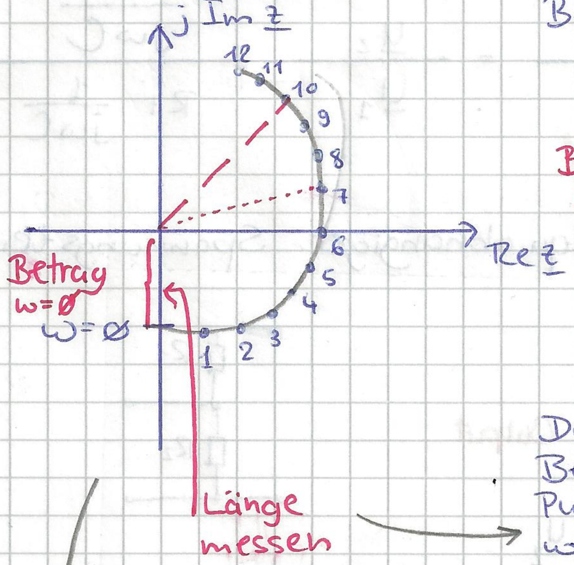
b.) Phasenwinkel $\varphi(\omega)$ → "Phasenwinkeldiagramm"

Konstruktion des Betrags / Phase Diagramms aus der Ortskurve

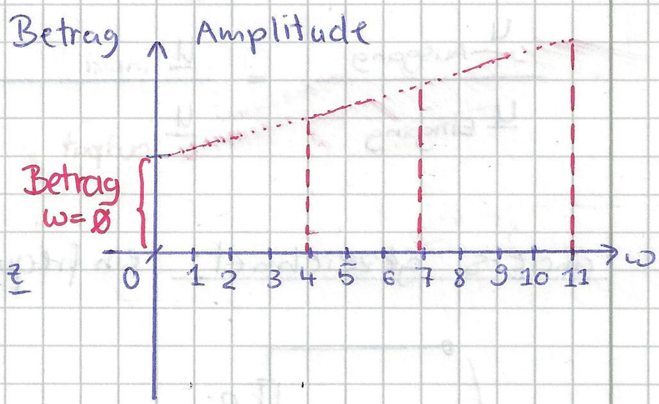
26.10.15

P.

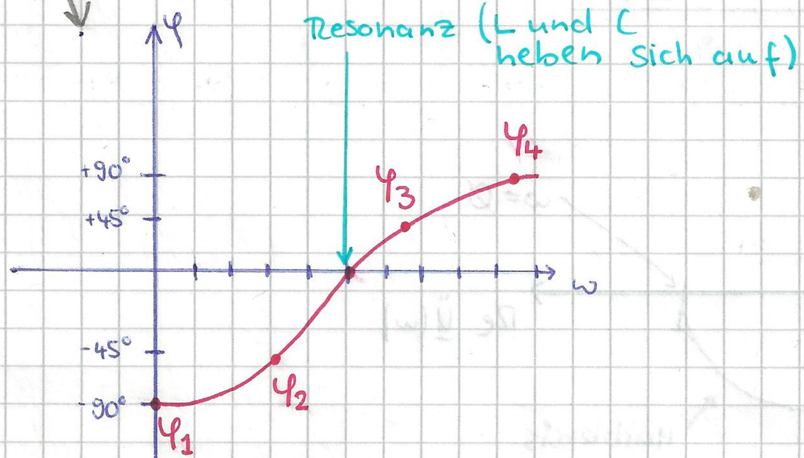
Ortskurve



Betrags



Durch das Übertragen des Betrags $|Z(\omega)|$ {Länge messen} Punkt für Punkt {ω = Ø, 1, 2, 3, ...} wird aus der Ortskurve das Betragsdiagramm gewonnen.

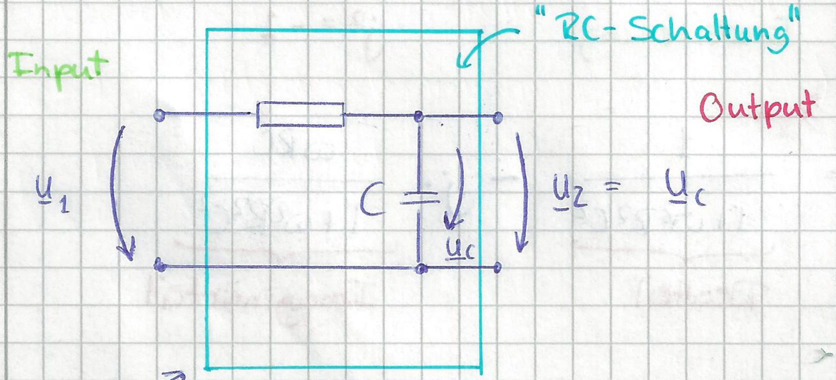


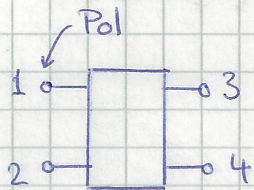
Durch das Übertragen des Winkels $\varphi(\omega)$ {Winkel messen} Punkt für Punkt {ω = Ø, 1, 2, 3, ...} wird aus der Ortskurve des Phasendiagramms gewonnen.

Dieses Verfahren geht auch geht auch umgekehrt.

⊲ Schaltungssimulation (Pspice, ...)

Beispiel: Praxisnahe Schaltung



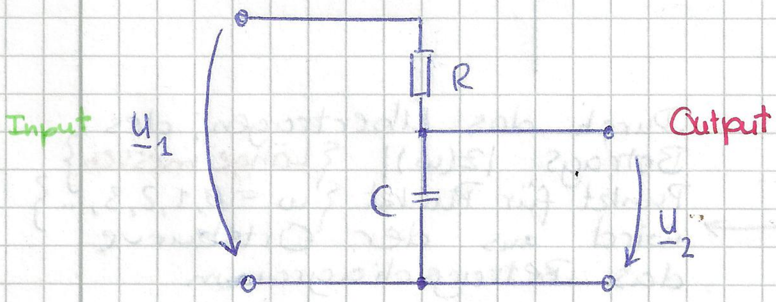


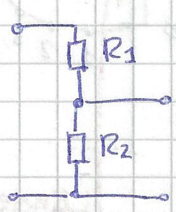
nennt man Übertragungs "Vierpol"

Übertragungsfkt.

$$\frac{\underline{U}_{Ausgang}}{\underline{U}_{Eingang}} = \frac{\underline{U}_{output}}{\underline{U}_{input}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \ldots *$$

anders gezeichnet: ein frequ. abhängiger Spannungsteiler

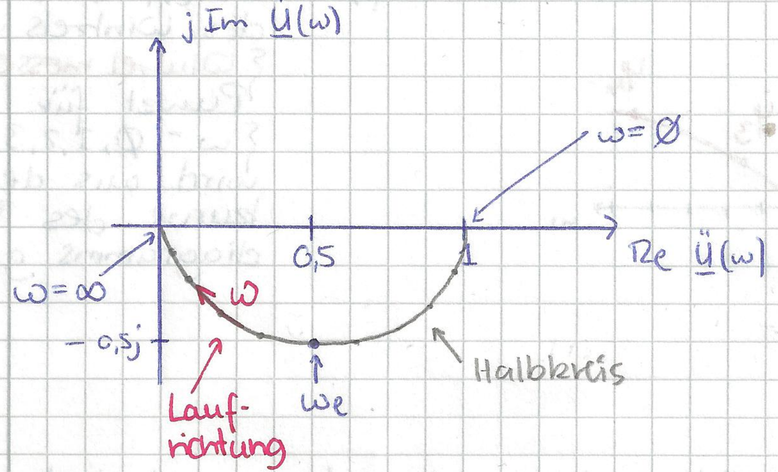




$$* = \frac{1}{1 + jR\omega C} = \ddot{\underline{U}}(\omega)$$

gleicher Nenner

Gesucht: Ortskurve $\ddot{\underline{U}}(\omega)$



Wie rechnet man das aus? Ziel: $\underset{Re}{(xx)} + j\underset{Im}{(yy)}$

$$\ddot{\underline{U}}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{(1 - j\omega RC)}{(1 - j\omega RC)} = \frac{1 - j\omega RC}{1^2 - \underbrace{j^2}_{j^2 = -1}\omega^2 R^2 C^2}$$

Erweiterung

$$= \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \underbrace{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}_{\text{Realteil}} - j \cdot \underbrace{\frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}_{\text{Imaginärteil}}$$

rein reell → $\{ 1 + \omega^2 R^2 C^2$

02.11.15

Thema: Ortskurven

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Die im Bild 1 dargestellte Schaltung besteht aus einem Wirkwiderstand R und einem Kondensator C, dessen Kapazität sich in einem Bereich einstellen läßt. Solche Kondensatoren heißen Drehkondensatoren und sind eher selten weil recht teuer.

Die Werte:
R = 50 Ω
C = 4uF .. 10uF

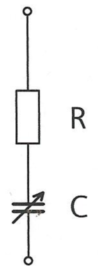


Bild 1

Aufgabe:
Zeichnen Sie die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}$ der Schaltung für die Frequenz f = 400Hz und beziffern Sie die Ortskurve mit den Werten der Kapazität C.

1a.) In welchem Quadranten liegt die Ortskurve ?
1b.) Wo liegt der Punkt C = 4uF auf der Ortskurve ?
1c.) Wo liegt der Punkt C = 10uF auf der Ortskurve ?

Aufgabe 2

Die im Bild 2 dargestellte Schaltung besteht aus einem Wirkwiderstand R und einer Induktivität L. Die Frequenz, mit der die Schaltung betrieben wird, liegt im Bereich von [20Hz .. 100Hz]

Die Werte:
R = 25 Ω
L = 50 mH

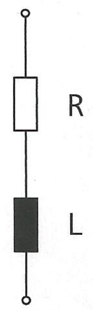
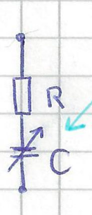


Bild 2

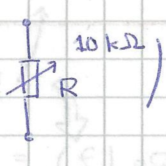
Aufgabe:
Zeichnen Sie die Ortskurven der Impedanz $\underline{Z}$ und der Admittanz $\underline{Y}$ der Schaltung für die Frequenzen im Bereich 20Hz bis 100Hz.

2a.) In welchem Quadranten liegen die Ortskurven ?
2b.) Wo liegt der Punkt f = 20Hz auf den Ortskurven ?
2c.) Wo liegt der Punkt f = 100Hz auf den Ortskurven ?

Aufgaben zu "Ortskurven"

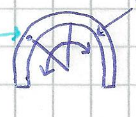


Drehkondensator
(vgl. Drehpotentiometer



)

10 kΩ bedeutet
Ø Ω bis 10 kΩ einstellbar



Widerstandsfolie

Schleif-kontakte

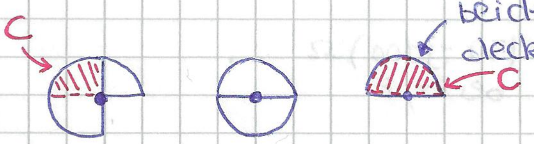
manuell bewegt

Einsatz: Lautstärke / Pegel } Steller bei Audio

Drehkondensator

2 übereinanderliegende "Platten"
beide Platten können gegeneinander um den Drehpunkt verdreht nach.

Draufsicht:



mittlere Kapazität | minimale Kapazität | maximale Kapazität

Aufgabe 1

geg: $R = 50\,\Omega$; $C = 4\,\mu F - 10\,\mu F$; $f = 400\,Hz$

ges: Ortskurve für Impedanz $\underline{Z}$

Lösungsweg: Formel für $\underline{Z}$

Reihenschaltung aus R und C

$$\Rightarrow \quad \underline{Z} = R + \underbrace{\frac{1}{j\omega C}\cdot\frac{(j)}{(j)}}_{\frac{1\cdot j}{j\cdot j\cdot \omega C}}$$

$$= R + \frac{j}{(-1)\,\omega C}$$

Bemerkung:

für $\frac{1}{j}$ gibt es keine math. Rechenregeln, deswegen muss j aus dem Nenner verschwinden.

Hier: $\cdot \frac{(j)}{(j)}$

Merke: $j^2 = j \cdot j = -1$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{Z} = \overset{re}{R} - \overset{img}{\frac{j}{\omega C}}} \quad \text{Impedanz}$$

$50\,\Omega$ konst.

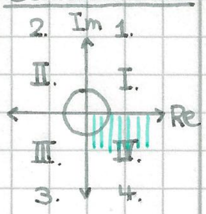
$Re(\underline{Z}) = 50\,\Omega$ konstant

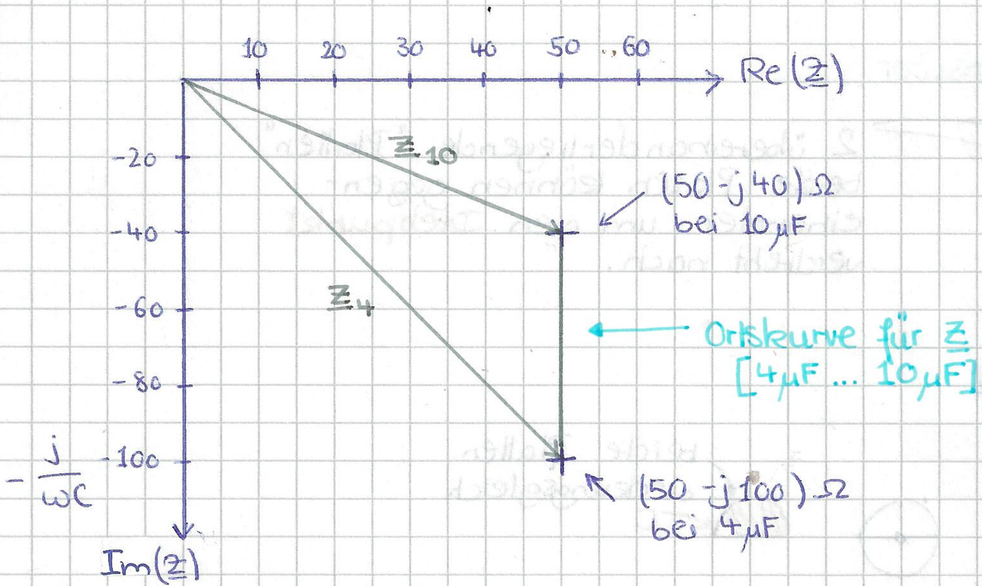
$Im(\underline{Z}) = -\frac{j}{\omega C}$ mit C = variabel

$Im(\underline{Z})$ = variabel

Diagramm:

Quadranten:





1a.)

Aufgrund der Vorzeichen "re hat +" und "imag hat −" liegt die Ortskurve im 4. Quadranten.

1b.)

Berechne $\underline{Z}_C = 4\mu F$ entspricht $\underline{Z}_4$

$$\rightarrow \underline{Z}_4 = \underbrace{50\,\Omega}_{re} - \underset{imag}{j} \cdot \frac{1}{\underbrace{2\pi \cdot 400\,Hz}_{\omega = 2\pi f} \cdot 4 \cdot \underbrace{10^{-6}}_{\mu} F}$$

$$= (50\,\Omega - j \cdot 99{,}47\,\Omega)$$

$$\approx (\underset{re}{50} - \underset{imag}{j\,100})\,\Omega$$

02.11.15

1c.)

$\underline{Z}_{C=10\mu F}$ entspricht $\underline{Z}_{10}$

$$\underline{Z}_{10} = 50\,\Omega - j\,\frac{1}{2\pi \cdot 400\,Hz \cdot 10 \cdot 10^{-6}\,F}$$

$$= (50 - j\,39{,}79)\,\Omega$$

$$\approx (50 - j\,40)\,\Omega$$

Aufgabe (2.) geg.: $R = 25\,\Omega$; $L = 50\,mH$; $f = 20\,Hz \dots 100\,Hz$ variabel

ges.: Ortskurve für $\underline{Z}$ und $\underline{Y}$

Formel für die Reihenschaltung aus R und L:

$\underline{Z} = R + j\omega L$ wobei sich ω verändert

2b.)

Berechne: $\underline{Z}_{20Hz} = 25\,\Omega + j\,2\pi \cdot 20\,Hz \cdot 50 \cdot 10^{-3}\,H$

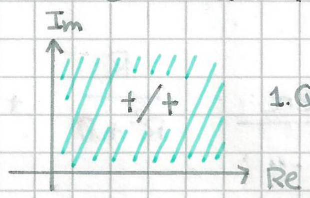
$= (25 + j \cdot 6{,}28)\,\Omega$

2c.)

$\underline{Z}_{100Hz} = 25\,\Omega + j\,2\pi \cdot 100\,Hz \cdot 50 \cdot 10^{-3}\,H$

$= (25 + j \cdot 31{,}4)\,\Omega$

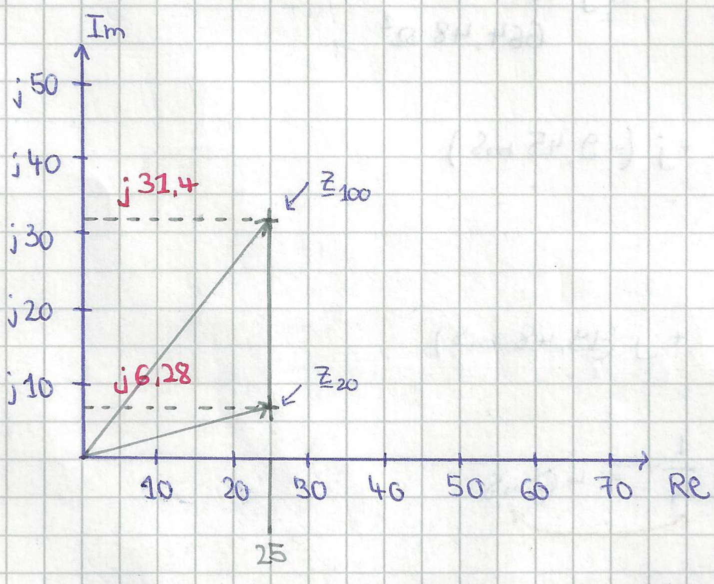
2a.) Welcher Quadrant ?



1. Quadrant

weil Re und Im positiv sind !

Ortskurve für $\underline{Z}$:



2.) $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j\omega L} \cdot \frac{(R - j\omega L)}{(R - j\omega L)}$

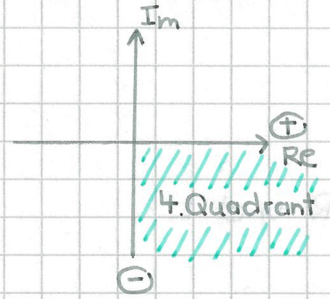
j im Nenner

konjugiert komplexe Erweiterung $= \frac{1 \cdot (R - j\omega L)}{(R + j\omega L) \cdot (R - j\omega L)} = \frac{R - j\omega L}{R^2 - \cancel{j\omega LR} + \cancel{j\omega LR} - \underbrace{j^2}_{-1}\omega^2 L^2}$

$= \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \underbrace{\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}}_{\text{Real}} - j \underbrace{\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}}_{\text{Imaginär}}$

X-Achse Y-Achse

→ Welcher Quadrant?



Ortskurve $\underline{Y}$: $\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \frac{(-\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2}$

Probiere: $\frac{R}{R^2 + \emptyset} + j \frac{(-\emptyset)}{R^2 + \emptyset} = \frac{R}{R^2} = \frac{1}{R}$ rein reell

$\underline{Y} = \frac{25\,\Omega}{25^2\,\Omega^2 + (2\pi \cdot 20H \cdot 50 \cdot 10^{-3}H)^2} + j \frac{(-2\pi \cdot 20Hz \cdot 50 \cdot 10^{-3}H)}{25^2\Omega^2 + (2\pi \cdot 20Hz \cdot 50 \cdot 10^{-3}H)^2}$

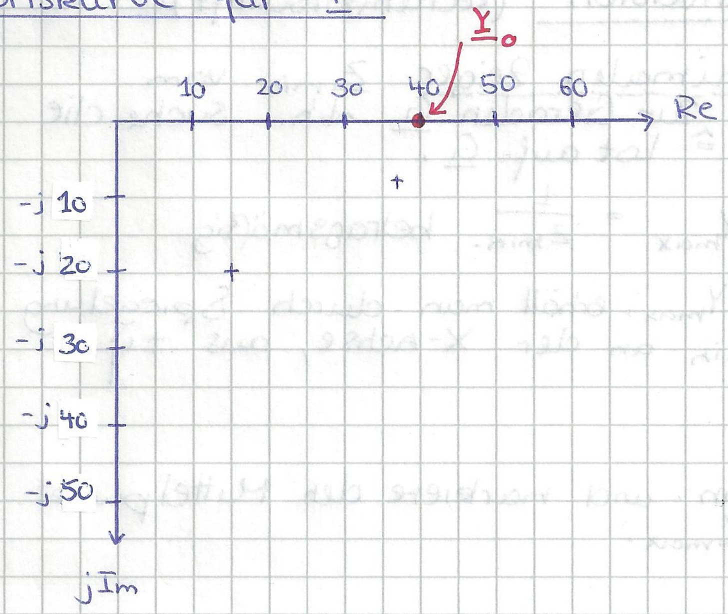
$= \frac{25\,\Omega}{664{,}48\,\Omega^2} + j \frac{(-6{,}28)\,\Omega}{664{,}48\,\Omega^2}$

$\frac{1}{\Omega} = S$ (Siemens) $= 37{,}62\,mS + j(-9{,}45\,mS)$

$\underline{Y}_{100} = 15{,}51\,mS + j(-19{,}48\,mS)$

$\underline{Y}_0 = \frac{1}{25\Omega} = 0{,}04\,\frac{1}{\Omega} = 40\,mS$

Ortskurve für $\underline{Y}$: 02.11.15



09.11.15

Inversion von Ortskurven

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Beim Ermitteln einer Ortskurve ist es oft notwendig von komplexen Größen den Kehrwert zu bilden.

Bsp.: gegeben ist Impedanz $\underline{Z} = z \cdot e^{j\varphi}$

gesucht ist Admittanz $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{z} \cdot e^{j\varphi}$

Der Rechenweg ist oftmals sehr aufwändig!

Deswegen: Algorithmus für die geometrische Konstruktion:

Aus der vorgegebenen Impedanz kann die gewünschte Admittanzkurve (mit Zirkel und Lineal) konstruiert werden.

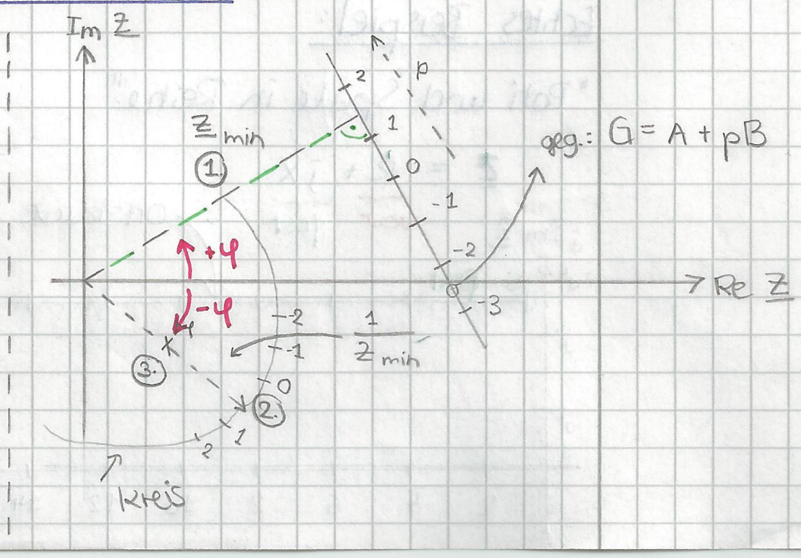
die Inversion einer Geraden

gegeben ist die Gerade G (in der komplexen Ebene) durch $\underline{A}$ und $\underline{B}$, $p \in \mathbb{R}$ ist variabel [vgl. $\underline{R} + j\omega\underline{L}$]

$\underline{G} = A + pB$ ⟶ daraus

soll konstruiert werden:

$$\frac{1}{A + pB}$$



Algorithmus zur Inversion (Rechenvorschrift)

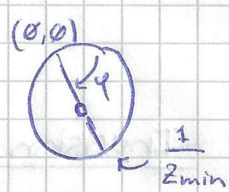
(1.) Ermittle den minimalen Zeiger $\underline{Z}_{min}$ vom Nullpunkt (0,0) zur Geraden $\underline{G}$ d.h. suche die kurzeste Strecke $\hat{=}$ Lot auf $\underline{G}$.

(2.) Berechne nun $Y_{max} = \frac{1}{Z_{min}}$ betragsmäßig.

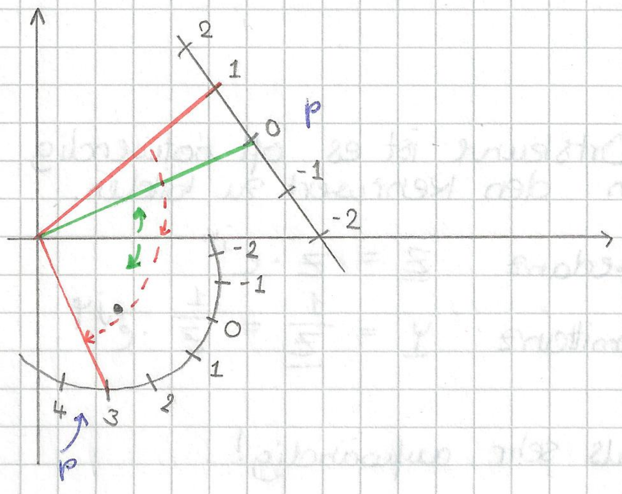
Die Richtung von Y_{max} erhält man durch Spiegelung des Zeigers $\underline{Z}_{min}$ an der X-Achse, aus $+\varphi$ mache $-\varphi$.

(3.) Zeichne Y_{max} ein und markiere den Mittelpunkt dieses Zeigers $\underline{Y}_{max}$.

(4.) Zeichne den Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r = |Y_{max}| \cdot \frac{1}{2}$



(5.) Übertrage die Vielfachen von p.

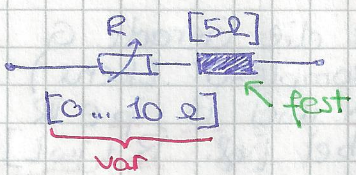


(6.) Fertig ✓

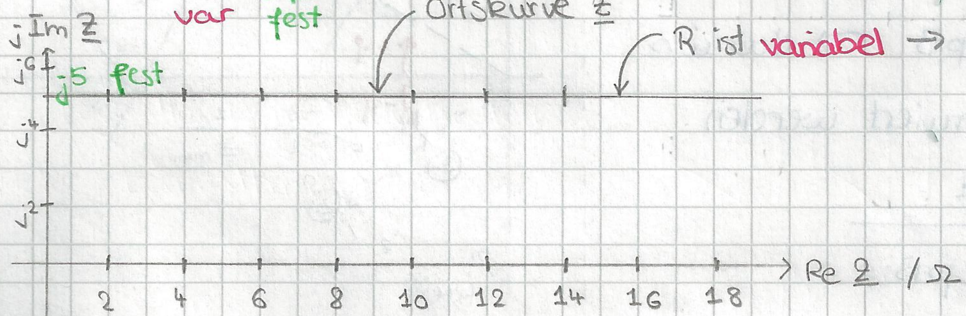
p auf Gerade $\underline{G}$ auswählen, Zeiger zum Nullpunkt zeichnen, Winkel φ bestimmen (Winkelmessung), Winkel an X-Achse spiegeln ($-\varphi$), Zeiger von (0,0) mit Winkel $-\varphi$, zeichnen bis Kreis-Schnittpunkt feststeht.

Echtes Beispiel:

"Poti und Spule in Reihe"

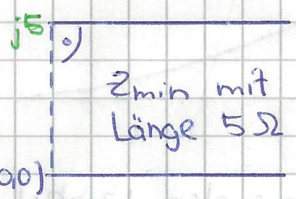


$$\underline{Z} = \underbrace{R}_{var} + \underbrace{jX}_{fest}$$

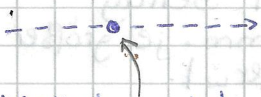


Gesucht ist $Y = \frac{1}{\underline{Z}}$ d.h. Ortskurve  muss invertiert werden.

① finde minimalen Zeiger Z_{min}



② Berechne Y_{max}: entspricht $\frac{1}{5}$ Ω = 0,2 Ω

③ Zeichne $\underline{Y}_{max}$ ein 
und markiere den Mittelpunkt

④ Zeichne Kreis mit Radius r = 0,1

⑤ übertrage die Vielfachen von p

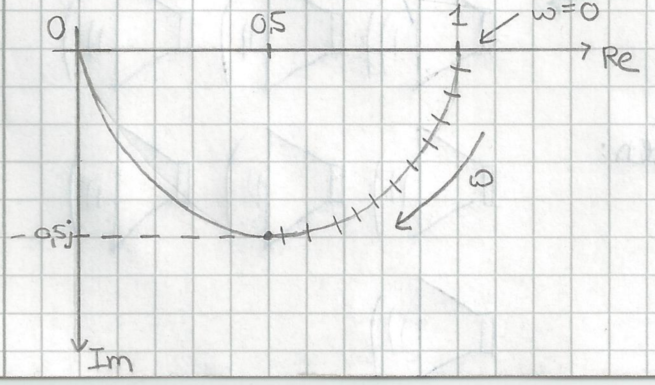
⑥ FERTIG

Die Ortskurve erhält die Information über $\left\{\begin{matrix}\text{Betrag}\\ \text{und}\\ \text{Phase}\end{matrix}\right\}$ einer Übertragungsfunktion.

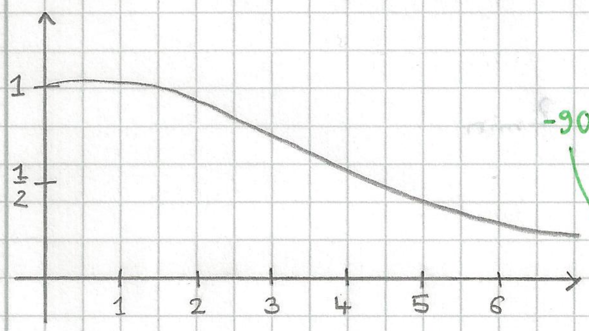
Betrag und Phase werden häufig in 2. Diagrammen dargestellt: $\left.\begin{matrix}\text{Betrags}\\ \text{Phasen}\end{matrix}\right\}$ Diagramm

Ziel: ist einen raschen Überblick über das Frequenzverhalten von Schaltungen zu erhalten!

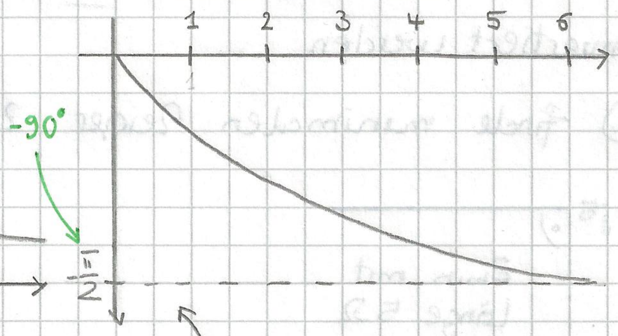
Beispiel: vorgegebene Ortskurve von $\ddot{U}(\omega)$



Betrags Diagramm



Phasen Diagramm



Zeichne die Zeiger 0, 1, 2, 3, ... jeweils von (0,0) zu $\omega_0, \omega_1, \omega_2, ...$ bestimme |Zeiger$_i$| Betrag für's Betragsdiagramm. je größer ω, desto kleiner |Zeiger ω|.

bestimme den Winkel φ_i zwischen x-Achse und Zeiger.

Aktuell: lineare Maßstäbe!

→ Logarithmische Maßstäbe

16.11.15

Lineare und logarithmische Maßstäbe

Lineare Maßstäbe verwenden wir in der E-Technik (Nachrichtenübertragung, Kommunikationstechnik, Medizintechnik, ...) selten oder garnicht.

Warum?

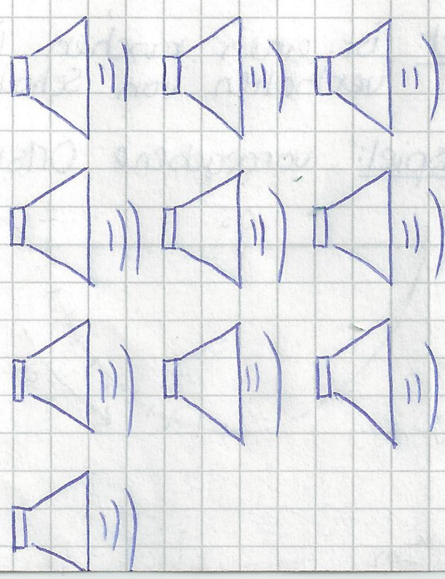
Typischerweise ist der Mensch der Benutzer dieser Techniken und die Sinne des Menschen funktionieren nicht linear!

Beispiel: Hörsinn = menschl. Ohr

Lautstärke - Empfinden:

1 Schallquelle ≙ 1 mal "laut" → 10 Schallquellen ≙ 2 mal so laut "Empfindung"

10-fache



→ Logarithmisches Verhalten:

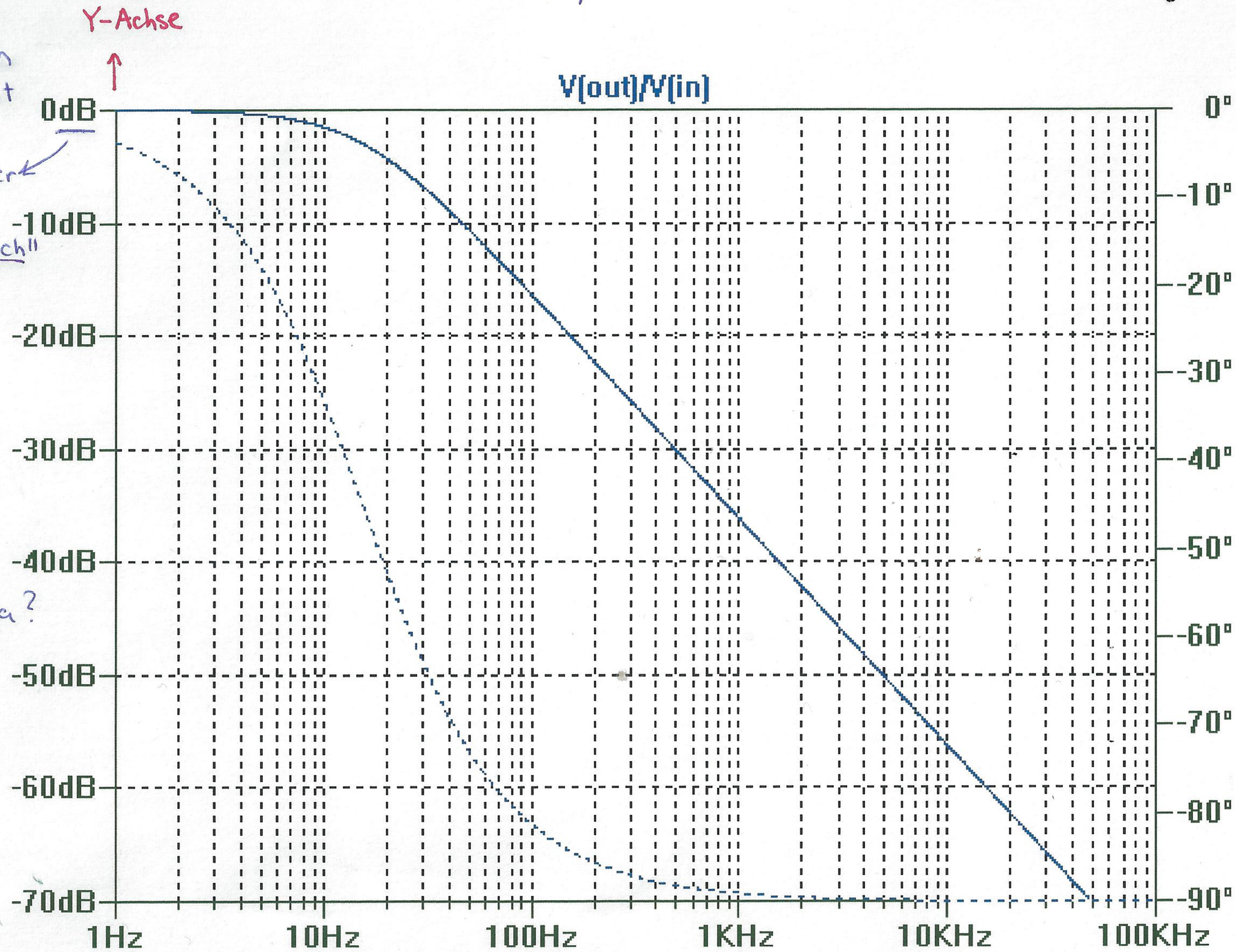
10er Logarithmus

09.11.15

16.11.15

1.)

Ist auch die Y-Achse logarithmisch eingeteilt, so nennt man das Diagramm "doppelt Logarithmisch"

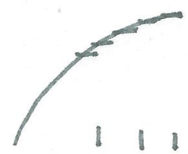


Praxis:

Wie zeichnet man von Hand eine doppelt logarithmische Skala?

← siehe weiter Skript

Log.:



Der Ausdruck zeigt auf der X-Achse eine nicht-lineare, Sondern eine logarithmische Skala (Einteilung)

Tonhöhen - Empfindung:

16.11.15

Kammerton	A	a	a'	a''
	↓	↓	↓	↓
	440 Hz	880 Hz	~~1320 Hz~~ 1760 Hz ~~lin.~~	3520 Hz
	1 mal "hoch"	2 mal	3 mal	4 mal

→ 2er Logarithmus

Wenn der Mensch diese Techniken verwendet, dann ändert sich die Meßskalen.
Diagramme mit logarithmischen Skalen sind Bode Diagramme.

Wir setzen sie ab jetzt ein, wenn wir Schaltungen (Filter etc.) beschreiben wollen (Übertragungsfunktionen)

Ausdruck

→ Praxis: Wie zeichnet man von Hand eine doppelt logarithmische Skala? (Trick)

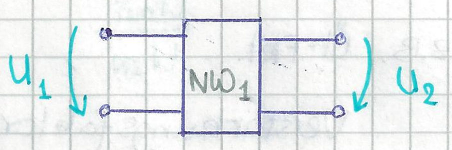
"kariertes Papier"

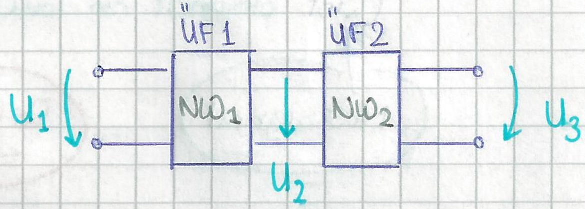
P.

2.) Praktischer Einsatz:

Erinnerung: die Übertragungsfunktion ist der Quotient zweier Größen z.B. $\frac{U_2}{U_1}$

NW = Netzwerk





Beobachtung:

bei der Hintereinanderschaltung von zwei Netzwerken NW_1 und NW_2 multiplizieren sich die Ü-funktionen.

$$\underbrace{\left(\frac{U_3}{U_2}\right)}_{ÜF2} \cdot \underbrace{\left(\frac{U_2}{U_1}\right)}_{ÜF1} = \underbrace{\left(\frac{U_3}{U_1}\right)}_{ÜF2 \cdot ÜF1}$$

Trick:

Transformiert man eine math. Funktion zu den Logarithmen ihrer Variablen, so wird (wegen logarithmischer Rechnung) aus Mult/Div dann Add/Sub

z.B. $\log \frac{x_1 \cdot x_2}{x_3} = \log x_1 + \log x_2 - \log x_3$

Zahlenbeispiel: $\frac{10^{x_1} \cdot 10^{x_2}}{10^3} = 10^{x_1 + x_2 - x_3}$

Ziel:

Rechnen mit Add/Sub geht leichter und schneller als das Rechnen mit Mult/Div.

3.) Große Wertebereiche z.B. 10^{-6} bis 10^{+4} werden durch den 10'er Logarithmus zu −6 bis +4 (kleine Zahlen)

Deshalb:

Bevorzugte Angabe technischer Verhältnisgrößen (+) als Logarithmen in der Form:

10'er Logarithmus

$$x\,[dB] = 20 \cdot \log(x)$$

"dB"

d = dezi $= \frac{1}{10}$

B = Bel nach dem Erfinder G. Bell benannt

⚠ dB ist keine physikalische Einheit

dB ist nur auf Verhältnisgrößen anwendbar!

z.B. Ü-Fkt. $\frac{U_{OUT}}{U_{IN}}$, Verstärkungsfaktor

("ist doppelt so laut wie")

Messsignal

Referenz-signal

16.11.15

Referenz:

wenn eine Normierung ($\hat{=}$ Referenz) auf eine physikalische Größe (Volt, Ampere, ...) vorliegt,

z.B. Spannungpegel [V] mit Referenz $U_0 = 775\ mV$

$$\downarrow$$

$$U\ [dB\ \ ] = 20 \cdot \log\left(\frac{U}{U_0}\right)$$

• dann kennzeichnet man diesen Sachverhalt durch anfügen eines Buchstaben $dB_{\sqcup}$.

Hier im Beispiel: dBV ← dieser Buchstabe gibt die Referenz an.

z.B. $U\ [dB\,\mu V]$ → μV gibt an, das die Referenz $= 1\mu V$ ist.

es gibt auch noch: dBu, dBv, dBU, ...

→ siehe später

Schallpegel: $P_S\ [dB] = 20 \cdot \log\left(\frac{P_S}{P_0}\right)$

↳ mit Referenz $P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ [Pa] "Pascal"

(DIN IEC 651)

Leistungsangabe: $P\ [dB] = 10 \cdot \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$

Frage: 10 ?

Referenz

23.11.15

Technische Angaben mit Bezugsgrößen

zB Schallpegel: P_S [dB] $= 20 \cdot \log\left(\frac{P_s}{P_0}\right)$

dezi Bel

{U, I, ...}

10 dB = "doppelt so viel wie"

⇓

$10 \frac{1}{10}$ B

⇓

1 Bel

dezi $= \frac{1}{10}$ wird als Skalierung verwendet um Zahlen zwischen 0 und ~100 zu bekommen (praktisch).

Bei Leistungsvergleichen wird diese Formel verwendet:

$$P\,[dB] = 10 \cdot \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

Power

weil $P \sim U^2$ gilt:

proportional

$$10 \cdot \log\left(\frac{P}{P_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{U^2}{U_0^2}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{U}{U_0}\right)$$

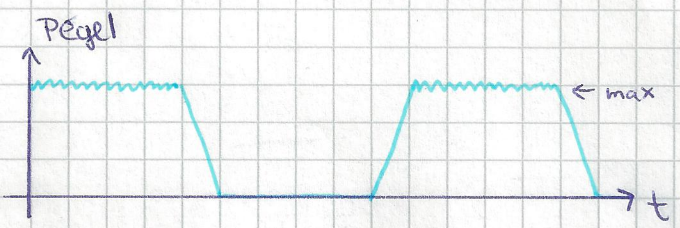
Beispiel: $P_0 = 1\,mW = 1 \cdot 10^{-3}\,W$

$$P\,[dB_m] = 10 \cdot \log\left(\frac{P}{1mW}\right)$$

Die Bezugsgröße wird durch Anhängen eines Buchstaben gekennzeichnet.
Ohne Bezugsgrößen sind die Angaben sinnlos!

Definition: Dynamik

Unter "Dynamik" verstehen wir den Quotienten → $\frac{A}{B}$ zwischen größten und kleinsten Signal eines Systems:



max $= 10^3$ V

min $= 10^{-5}$ V

Verhältniszahl

Da es sich um eine Verhältniszahl handelt, deren Wert auch sehr groß werden kann, gibt man die Dynamik $\frac{max}{min}$ in dB an!

Rechenbeispiel:

23.11.15

① Bei den Aufnahmen eines Musik-Konzerts erzeugt die leiseste Stelle die Spannung $U_{min} = 0{,}5\,\mu V$ und die lauteste Stelle eine Spannung $U_{max} = 2\,mV$ im Mikrophon.

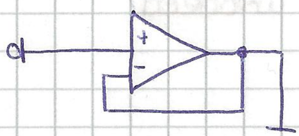
Dynamik: $\frac{2\,mV}{0{,}5\,\mu V} = 4000 = 4 \cdot 10^3 = 72\,dB \rightarrow \frac{max}{min}$ (nix)

TR [LOG (4000)] × 20

Für ein Smartphone Mikrophon sind 72dB Dynamik viel (typ. ~ 65 dB).

Für Rundfunkmikrophone sind 72 dB relativ wenig (typ. 85 – 90 dB).

Rauschen:



$\frac{max}{Rauschpegel}$

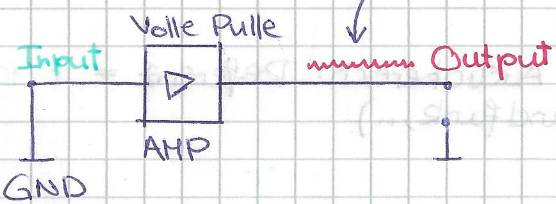
zum Vergleich:

menschl. Ohr hat 110 – 120 dB Dynamik.

② Abspielen von Musik über einen Audio-Verstärker:

"leisestes Signal" = Eigenrauschen

d.h.



Typischerweise liegt das Eigenrauschen bei 1 µW bei einer Ausgangsgleichung von 200 W (200 W Verstärker)

Dynamik:

$$\frac{200\,W}{1\,\mu W} = 2 \cdot 10^8 = \sim 83\,dB$$

max, min

LOG $(2 \cdot 10^8)$ * 10 (Watt)

⇒ für qualitativ mittelklassige Audioverstärker sollte die Dynamik > 75 dB sein.

Zum Eingewöhnen eine Tabelle für $20 \cdot \log\left(\frac{max}{min}\right)$:

$20 \cdot \log\left(\frac{max}{min}\right)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100
dB	-40	-20	-6	-3	$\boxed{0}$	+3	+6	+20	+40

negative Zahlen bedeuten das $\frac{max}{min} < 1$ ist.

Beispiele für Bezugsgrößen

Name	Bezug (relativ zu ...)	
dBV	1 V_{rms}	root mean square
dBu	0,775 V_{rms}	"u" = "unloded"
	unbelasteter Ausgang	
	dBu kann ohne Angabe einer Impedanz verwendet werden.	
dBv	= dBu	→ u steht für volt

(Hinweis: Professioneller Audiobereich: Referenz = + 4 dBu
(Tonstudios, Rundfunk, ...)

Consumer Audiobereich: Referenz = - 10 dBV
(Hifi, Heimstudio, ...))

dB (SPL)

Sound Pressure Level

d.h. Schalldruckpegel

20 µPa micro Pascal

≙ menschl. Hörschwelle

leise Signale kann ein Mensch nicht hören

1 Pa ≙ 94 dB (SPL)

Filterschaltungen

23.11.15

Praxis: viele Computersysteme (Smartphone, Tablets, PC, Maschinensteuerungen, ...) besitzen Sensoren.

...

Kompass

Mikrophone

Kamera

Beschleunigung

Wandler von Luftschwingungen

$\rightarrow U_\sim$

Wandler von Lichtstärke

$\rightarrow U_=$ oder $U_\sim$