



MESSTECHNIK AI

Prof. Dr. László Juhász

innovativ & lebendig – Bildungsregion DonauWald

Fakultät Elektrotechnik, Medientechnik und Informatik- Vorlesung - Prof. Dr. László Juhász

1. Einleitung:

1.2 Literatur zur Vorlesung:

1.2.1 Bücherauswahl

Autor	Titel	Verlag
W.-J. Becker, K. W. Bonfig, K. Höing	Handbuch Elektrische Messtechnik	Hüthig Verlag
K. Bergmann	Elektrische Messtechnik	Vieweg + Teubner
R. Felderhoff, U. Freyer	Elektrische und elektronische Messtechnik	Hanser Verlag
G. Heyne	Elektronische Messtechnik	Oldenbourg Verlag
R. Lerch	Elektrische Messtechnik	Springer Verlag
R. Lerch	Elektrische Messtechnik (Übungsbuch)	Springer Verlag
Th. Mühl	Einführung in die elektrische Messtechnik	Vieweg + Teubner
J. Niebuhr, G. Lindner	Physikalische Messtechnik mit Sensoren	Oldenbourg Verlag
R. Parthier	Messtechnik	Vieweg + Teubner
W. Pfeiffer	Elektrische Messtechnik	VDE Verlag
E. Schrüfer	Elektrische Messtechnik	Hanser Verlag
Wolf-Jürgen Becker, Walter Hofmann	Aufgabensammlung Elektrische Messtechnik	Vieweg+Teubner
N. Weichert, M. Wülker	Messtechnik und Messdatenerfassung	Oldenbourg Verlag

1. Einleitung:

1.2 Literatur zur Vorlesung:

1.2.1 Bücherauswahl



Reinhard Lerch

Elektrische Messtechnik: Analoge, digitale und computergestützte Verfahren

Verlag: Springer; 2012

Sprache: Deutsch

ISBN-10: 3642226086

ISBN-13: 978-3642226083

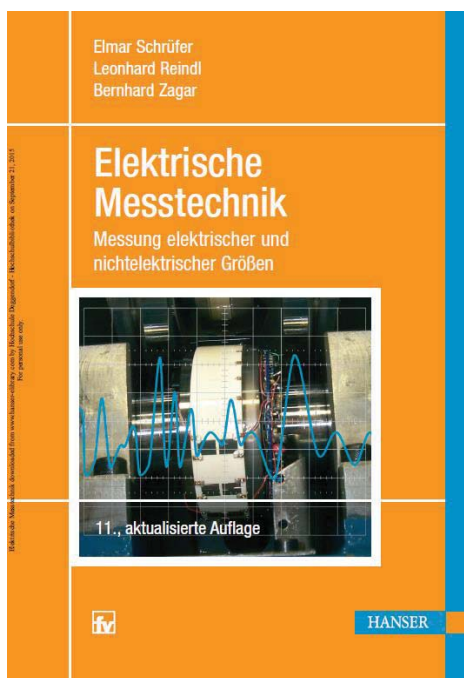
Über das Bibliothek der THD herunterladbar!*

*Funktioniert nur aus der Hochschulnetz oder durch VPN

1. Einleitung:

1.2 Literatur zur Vorlesung:

1.2.1 Bücherauswahl



Elmar Schrüfer, Leonhard M. Reindl, Bernhard Zagar

Elektrische Messtechnik: Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen

Verlag: Carl Hanser Verlag GmbH, 2014

Sprache: Deutsch

ISBN-10: 3446442081

ISBN-13: 978-3446442085

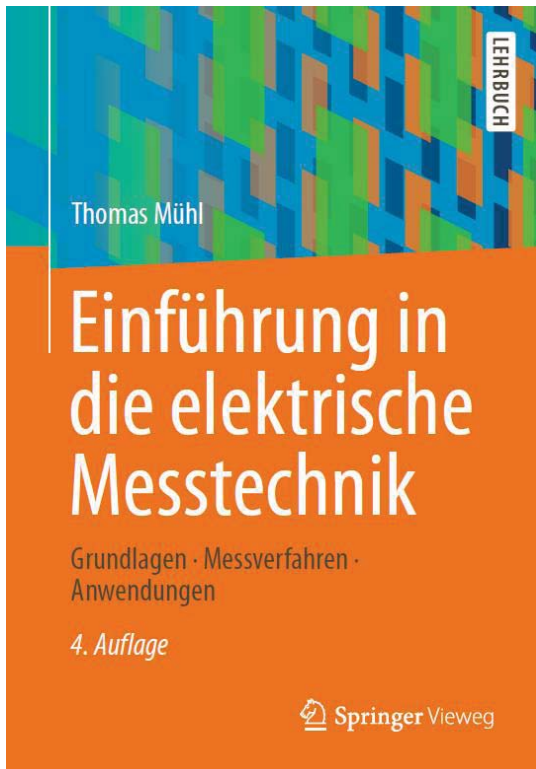
Über das Bibliothek der THD herunterladbar!*

*Funktioniert nur aus der Hochschulnetz oder durch VPN

1. Einleitung:

1.2 Literatur zur Vorlesung:

1.2.1 Bücherauswahl



Thomas Mühl

Einführung in die elektrische Messtechnik

Verlag: Springer Vieweg; Auflage: 4., 2014

Sprache: Deutsch

ISBN-10: 3834808997

ISBN-13: 978-3834808998

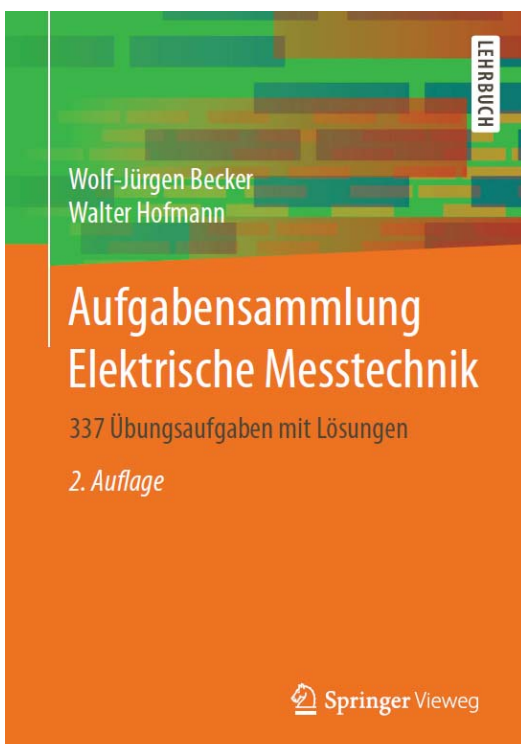
Über das Bibliothek der THD herunterladbar!*

*Funktioniert nur aus der Hochschulnetz oder durch VPN

1. Einleitung:

1.2 Literatur zur Vorlesung:

1.2.1 Bücherauswahl



Wolf-Jürgen Becker, Walter Hofmann

**Aufgabensammlung Elektrische Messtechnik:
337 Übungsaufgaben mit Lösungen**

Verlag: Vieweg+Teubner Verlag, 2014

Sprache: Deutsch

ISBN: 978-3-658-05155-6 (Print)

978-3-658-05156-3 (Online)

Über das Bibliothek der THD herunterladbar!*

*Funktioniert nur aus der Hochschulnetz oder durch VPN

1. Einleitung:

1.2 Literatur zur Vorlesung:

1.2.1 Bücherauswahl



*Reinhard Lerch, Manfred Kaltenbacher,
Franz Lindinger, Alexander Sutor*

Elektrische Messtechnik: Übungsbuch

Verlag: Springer; Auflage: 2. Aufl. (27.
September 2004)

Sprache: Deutsch

ISBN-10: 3540218831

ISBN-13: 978-3540218838

**Auch als E-Book (PDF ohne DRM
Kopierschutz) verfügbar**

<http://www.springer.com/de/book/9783540264378>

2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

2.2.1 Definitionen

Messen: experimenteller Vorgang, durch den ein spezieller **Wert einer physikalischen Größe** als **Vielfaches einer Einheit** oder eines Bezugswertes ermittelt wird [DIN 1319]

Messgröße: **physikalische Größe**, deren Wert durch eine Messung ermittelt werden soll [VDI/VDE 2600]

Messwert: gemessener spezieller **Wert einer Messgröße**, Angabe als Produkt aus Zahlenwert und Einheit [DIN 1319]

Messergebnis: ein aus mehreren Messwerten einer physikalischen Größe (oder aus Messwerten für verschiedene Größen) nach einer festgelegten Beziehung **ermittelter Wert** (oder Werteverlauf) [VDI/VDE 2600]

Messprinzip: charakteristische **physikalische Erscheinung**, die bei der Messung benutzt wird [DIN 1319]

Messverfahren (-methode): spezielle **Art der Anwendung** eines Messprinzips [VDI/VDE 2600]

Messgerät: liefert oder verkörpert Messwerte (bzw. Verknüpfung von Messwerten) [DIN 1319]

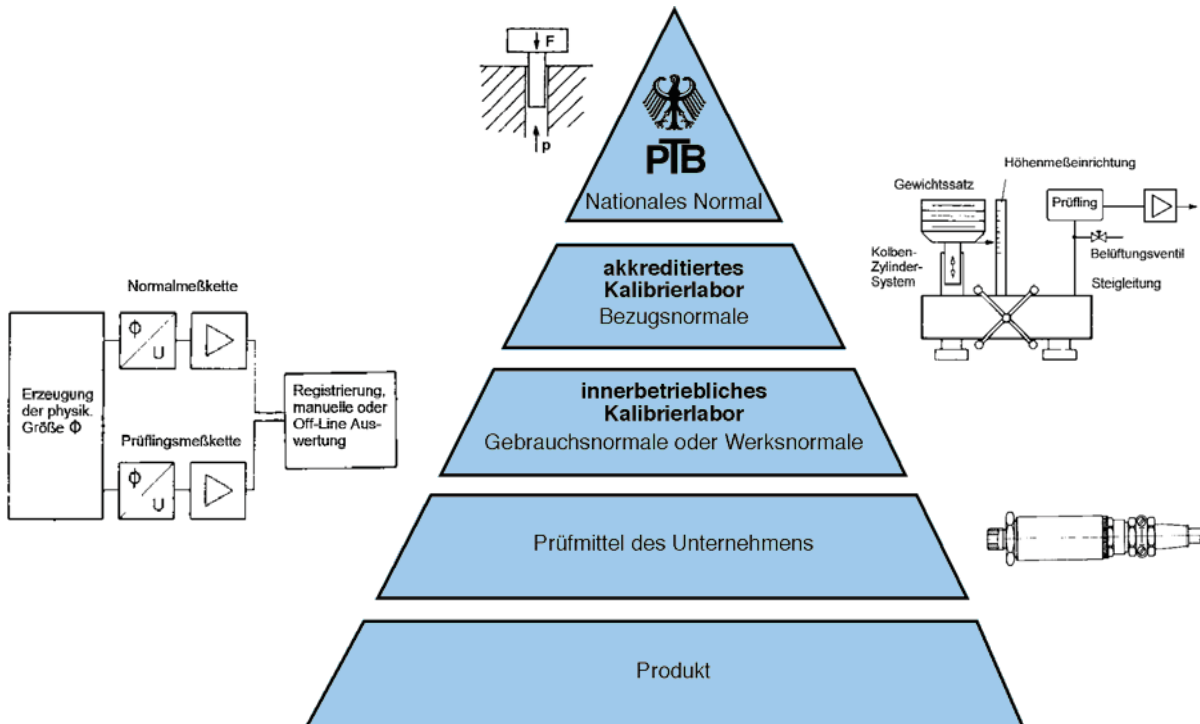
Messeinrichtung: **Messgerät** (oder mehrere zusammenhängende Messgeräte) mit zusätzlichen Einrichtungen, z.B. Hilfsgeräten [DIN 1319]

Messsignale: **Darstellung von Messgrößen** im Signalflussweg einer Messeinrichtung durch **zugeordnete physikalische Größen** (gleicher oder anderer Art) [VDI/VDE 2600]

2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

2.2.2 Hierarchie der Mess- und Prüfmittel



© DKD, PTB

2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

2.2.3 Normale

physikalische Größe	Primärnormal	typische Genauigkeit	Referenznormal	typische Genauigkeit
Spannung	Weston-Normalelement ($U = 1,0186V$)	$\frac{\Delta U}{U} = \pm 5 \cdot 10^{-6}$	Dioden-Transistor-Referenzspannungsquelle	$\frac{\Delta U}{U} = \pm 10^{-5}$
Widerstand	Manganinwiderstand (hermetisch abgeschlossen, $R = 1\Omega$)	$\frac{\Delta R}{R} \geq \pm 10^{-7}$	Manganinwiderstände im Bereich von 1Ω ... $1M\Omega$ oder Widerstandsdekaden	$\frac{\Delta R}{R} \geq \pm 10^{-5}$
Kapazität	Berechenbarer Kondensator aus vier Stäben genauer Länge $C = 10pF$ oder $1pF$	$\frac{\Delta C}{C} \geq \pm 10^{-7}$	Glas- oder Glimmerkondensator $C = 100pF$... $1nF$	$\frac{\Delta C}{C} \geq \pm 10^{-5}$
Induktivität	Lange dünne Luftspule $L = 1$... $10mH$	$\frac{\Delta L}{L} \geq \pm 10^{-6}$	Zylinderspulen, Eisenkernspulen $L = 0,1mH$... $10H$	$\frac{\Delta L}{L} \geq \pm 10^{-4}$
Zeit	„Atomuhr“, Cäsiumresonator mit nachfolgender Pulsgewinnung und Frequenzteiler auf 1s	$\frac{\Delta t}{t} \geq \pm 10^{-13}$	Normfrequenzsender DCF77, sendet auf 77,5 kHz BCD-kodierte Zeitinformation	$\frac{\Delta t}{t} \geq \pm 10^{-13}$
Frequenz	„Atomuhr“, Cäsiumresonator	$\frac{\Delta f}{f} \geq \pm 10^{-13}$	Quarzoszillator (temperaturstabilisiert)	$\frac{\Delta f}{f} \geq \pm 10^{-10}$

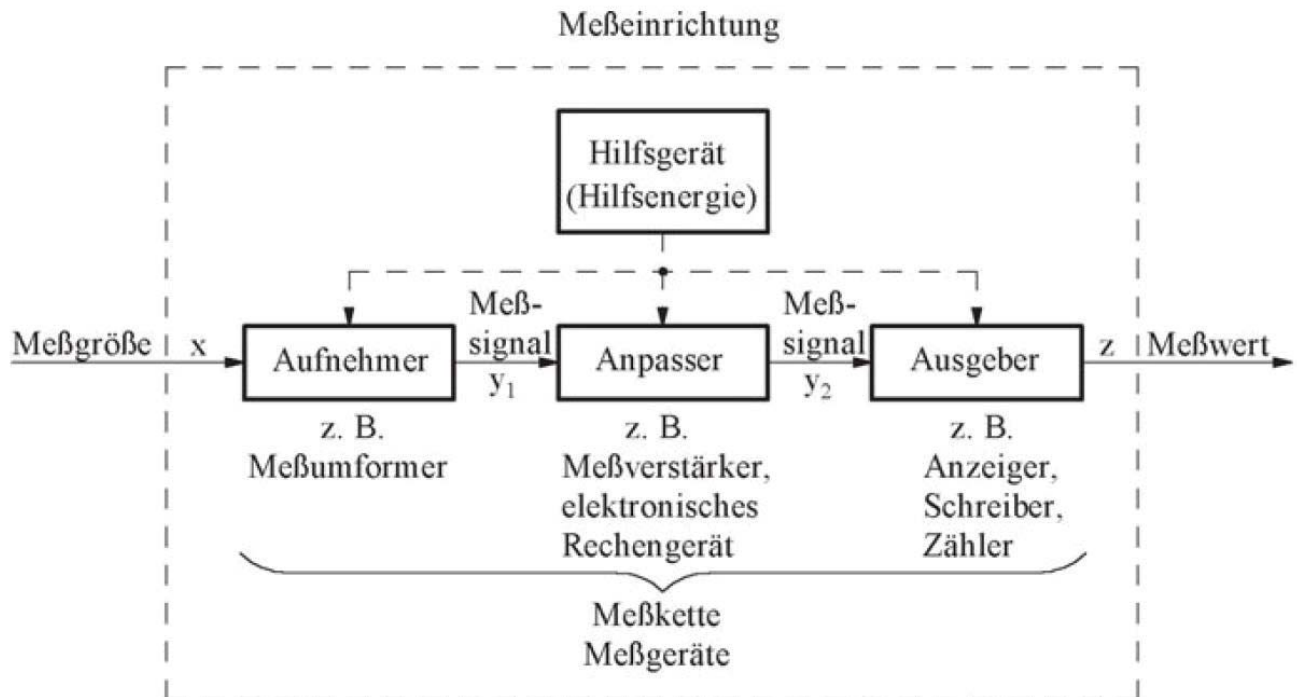
Primär- und Referenznormale

(aus: R. Parthier: Messtechnik)

2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

2.2.5 Struktur nach VDI/VDI 2600

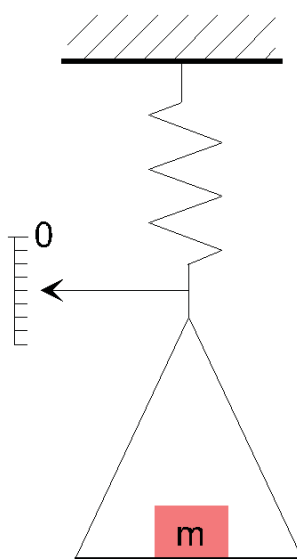


2. Grundlagen:

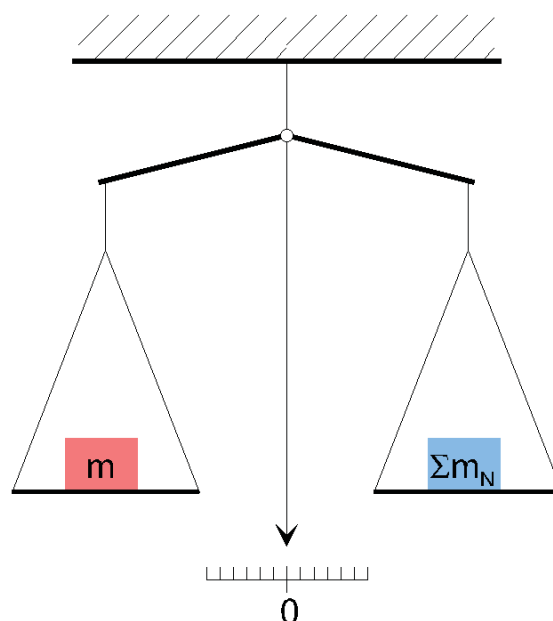
2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

2.2.4 Klassifizierung von Messverfahren:

Ausschlagmethode-Kompensationsmethode



Ausschlagverfahren

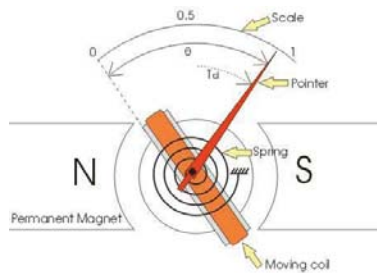


Kompensationsverfahren

2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

2.2.4 Klassifizierung von Messverfahren: Analog - Digital



Bei den *analogen Meßmethoden* wird die Meßgröße durch eine eindeutige und stetige Anzeigegröße (Meßwert) dargestellt. Häufig hat der Ausgeber einer analog arbeitenden Meßeinrichtung eine Skalenanzeige.

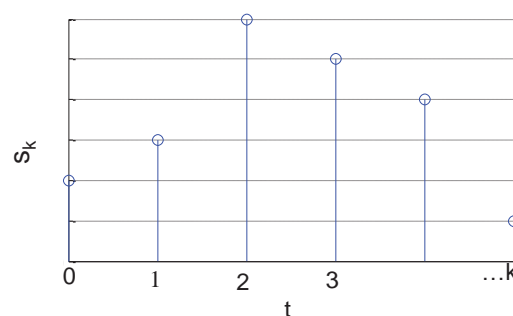
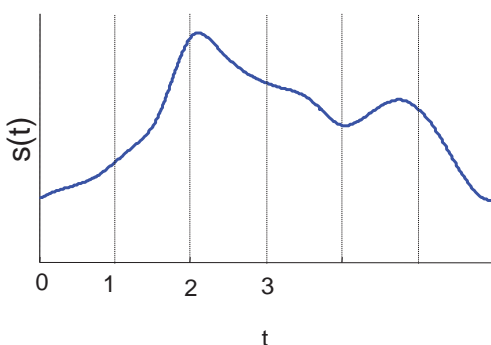
Im Gegensatz dazu wird bei den *digitalen Meßmethoden* die Meßgröße in Form einer in festgelegten Schritten quantisierten Anzeigegröße dargestellt. Der Ausgeber wird hier im allgemeinen in Form einer Ziffernanzeige oder einer Bildschirmausgabe realisiert.

aus: R. Lerch: Elektrische Messtechnik

2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

2.2.4 Klassifizierung von Messverfahren: Kontinuierlich - Diskontinuierlich



Von *kontinuierlichen Meßvorgängen* spricht man, wenn die Meßgröße ohne zeitliche Unterbrechung erfaßt und auch dargestellt wird. Von einer *diskontinuierlichen Messung* ist die Rede, wenn die Meßgröße nur zu bestimmten (diskreten) Zeitpunkten erfaßt (abgetastet) wird.

aus: R. Lerch: Elektrische Messtechnik

2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

2.2.4 Klassifizierung von Messverfahren: Direkt - Indirekt

Bei den *direkten Meßmethoden* wird die Meßgröße unmittelbar mit einer Maßverkörperung derselben physikalischen Dimension verglichen. Bei den *indirekten Methoden* wird die Meßgröße zunächst in eine proportionale Zwischengröße umgewandelt und erst diese wird schließlich mit der Maßverkörperung verglichen. Die Bestimmung des Volumens eines Zylinders über die Messung seines Durchmessers und seiner Länge ist ein typisches Beispiel für eine indirekte Messung.

aus: R. Lerch: Elektrische Messtechnik

2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

2.2.4 Die Informationsträger im Messsignal

- Das Signal ist eine physikalische Größe (*Signalträger, Informationsträger*), die sich zeitlich verändern läßt.
- Der Signalträger besitzt einen wahrnehmbaren Parameter (*Informationsparameter*), der die Werte der Meßgröße eindeutig und reproduzierbar wiedergeben kann, d.h. die Meßgröße wird auf den Informationsparameter in mathematisch eineindeutiger Weise abgebildet.

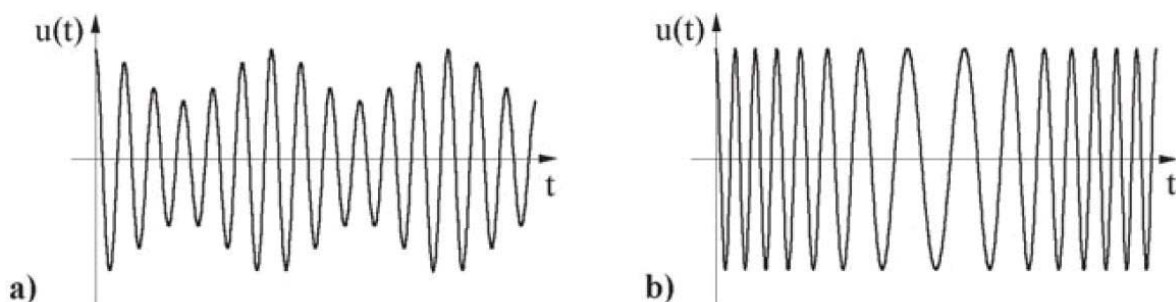


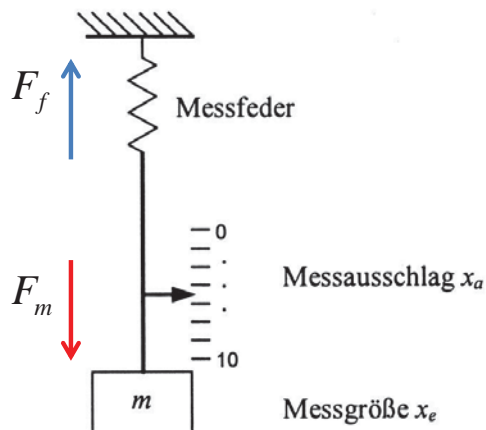
Abb. 1.3. a) Amplitudenmoduliertes Signal (Der Meßwert ist proportional zur Momentanamplitude.), b) Frequenzmoduliertes Signal (Der Meßwert ist proportional zur Momentanfrequenz.)

aus: R. Lerch: Elektrische Messtechnik

2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

2.2.4 Messmethoden (1)



$$F_f \approx c \cdot x_a = c \cdot \Delta x$$

$$F_m = x_e \cdot g = m \cdot g$$

$$F_f = F_m \rightarrow \text{ausbalancierte stationäre Lage}$$

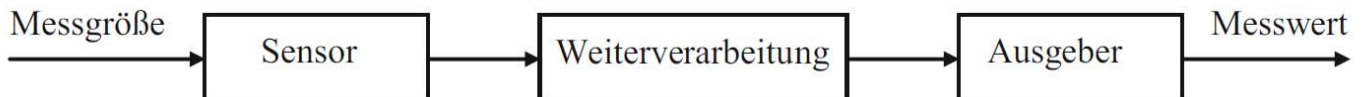
$$c \cdot \Delta x = m \cdot g$$

$$m = \frac{c}{g} \cdot \Delta x \rightarrow x_e = K \cdot x_a$$

$$x_e \sim x_a$$

Ausschlagmethode

(aus: R. Parthier: Messtechnik)

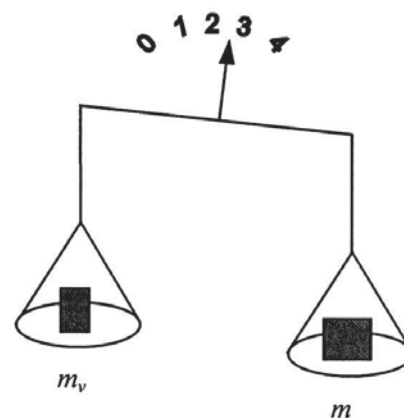


2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

2.2.4 Messmethoden (1)

$$\sum M_i = 0$$



Differenzmethode (Vergleichs- oder Unterschiedsverfahren)

Gegenüberstellung Messgröße (z.B. zu messende Masse m) / **Vergleichsgröße** (z.B. Vergleichsmasse m_v)

- Bsp. **Neigungswaage** (Balkenwaage)

Differenzmethode

Messgröße m . konstante
Vergleichsmasse m_v

(aus: R. Parthier: Messtechnik)

2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

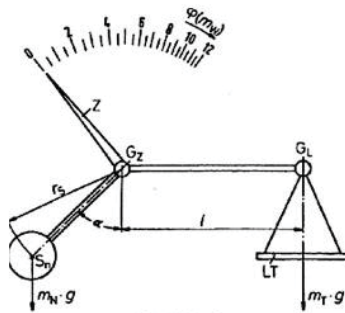
2.2.4 Messmethoden (1)

Mechanisches System Waage:

Klassische Präzisions-Feinwerktechnik

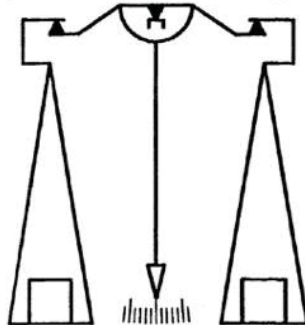
Neigungswaage:

mechanischer
Kraftaufnehmer
 $\Sigma M = 0$



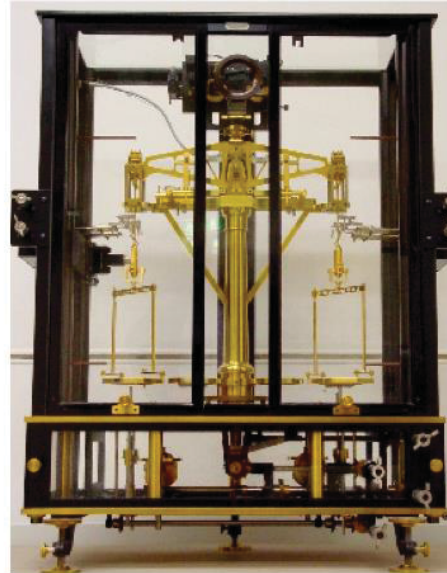
Balkenwaage:

Kraft-
kompensations-
prinzip



Gleicharmige Balkenwaage:

Historischer Massekomparator der
PTB, Laserinterferometer als
Positionsdetektor, $\Delta m = 8 \mu\text{g}$

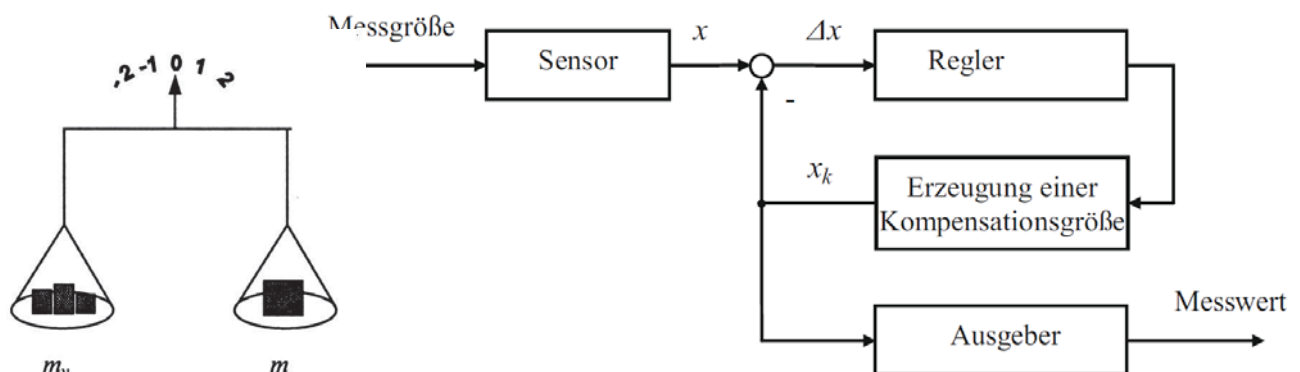


Quelle: Czichos,
Mechatronik,
Vieweg Verlag,
2006

2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

2.2.4 Messmethoden (2)



Kompensationsmethode

Messgröße m , variable
Vergleichsmasse m_v
(aus: R. Parthier: Messtechnik)

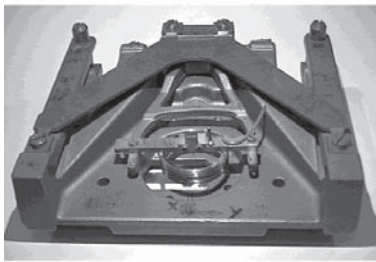
Signalfluss bei der Kompensationsmethode

(aus: R. Lerch: Elektrische Messtechnik)

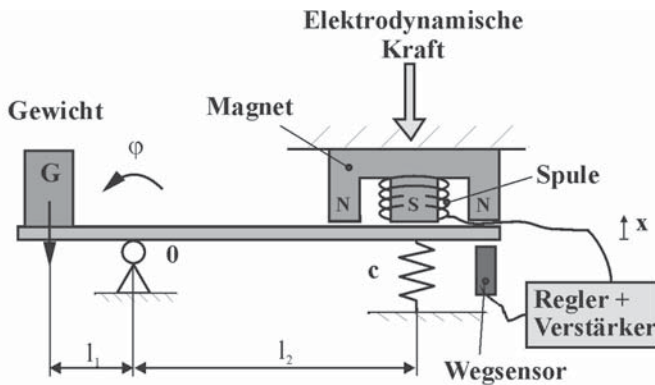
2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

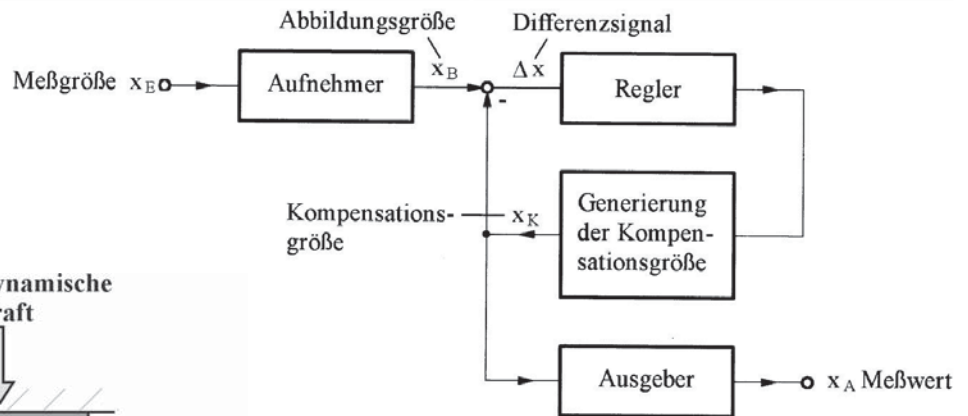
2.2.4 Messmethoden (2)



Realsystem: Kompensationswaage



Modell der Waage



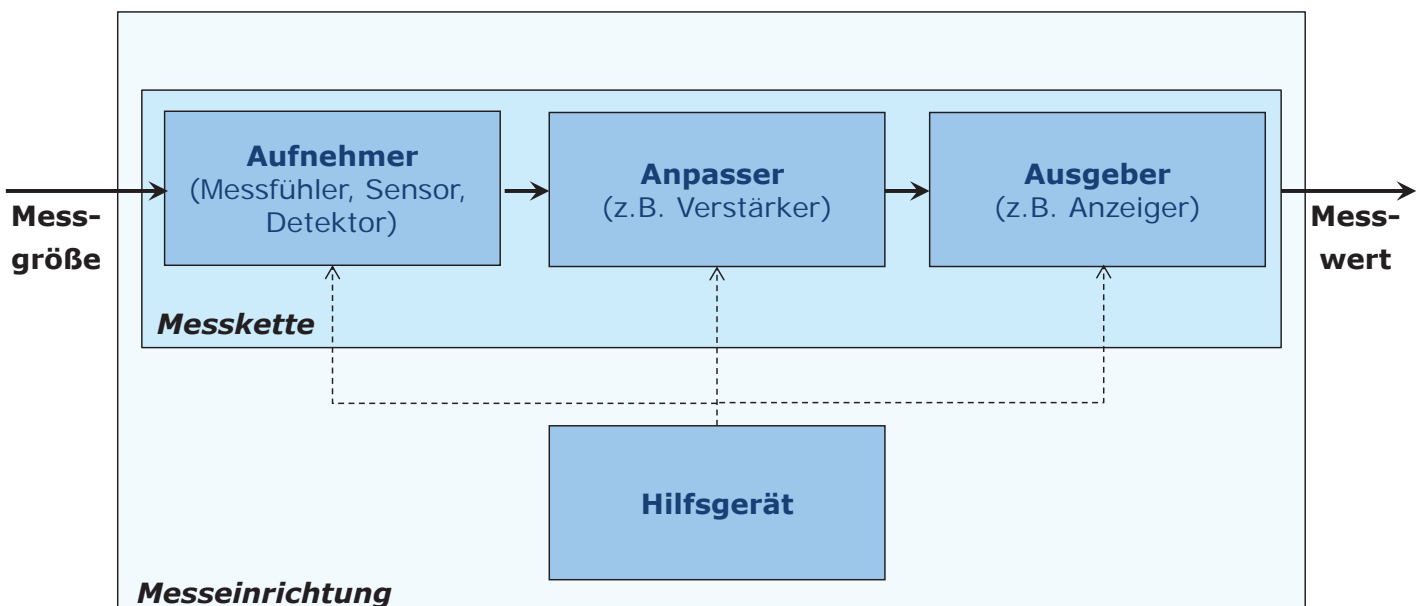
Signalfluss bei der Kompensationsmethode

(aus: R. Lerch: Elektrische Messtechnik)

2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

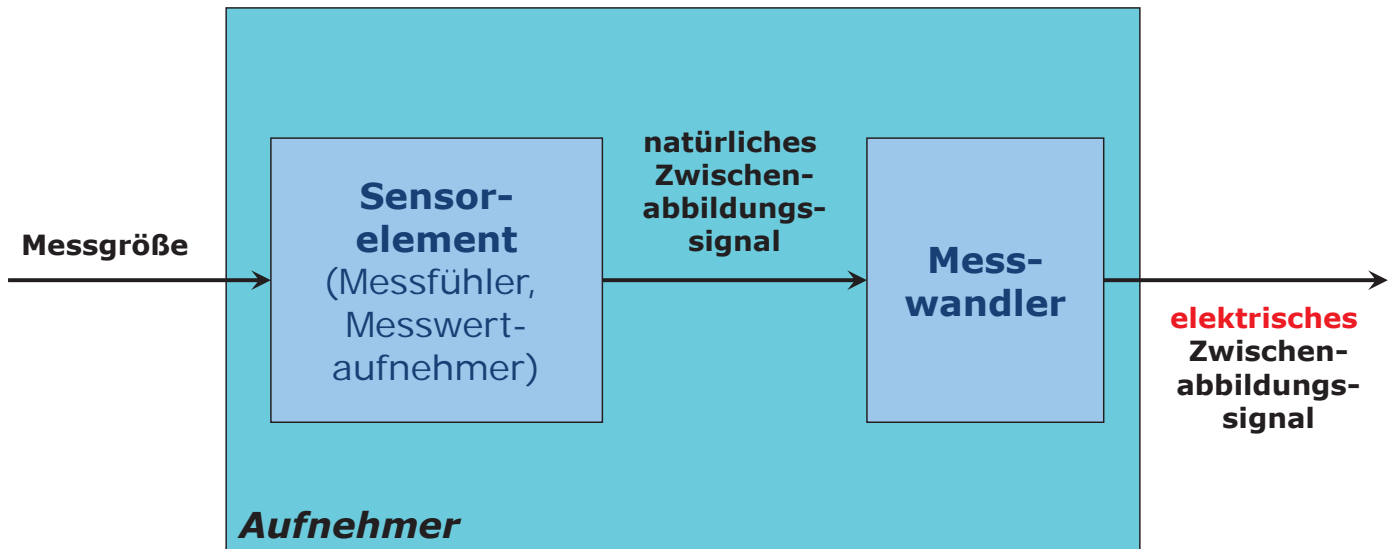
2.2.5 Struktur nach VDI/VDI 2600



2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

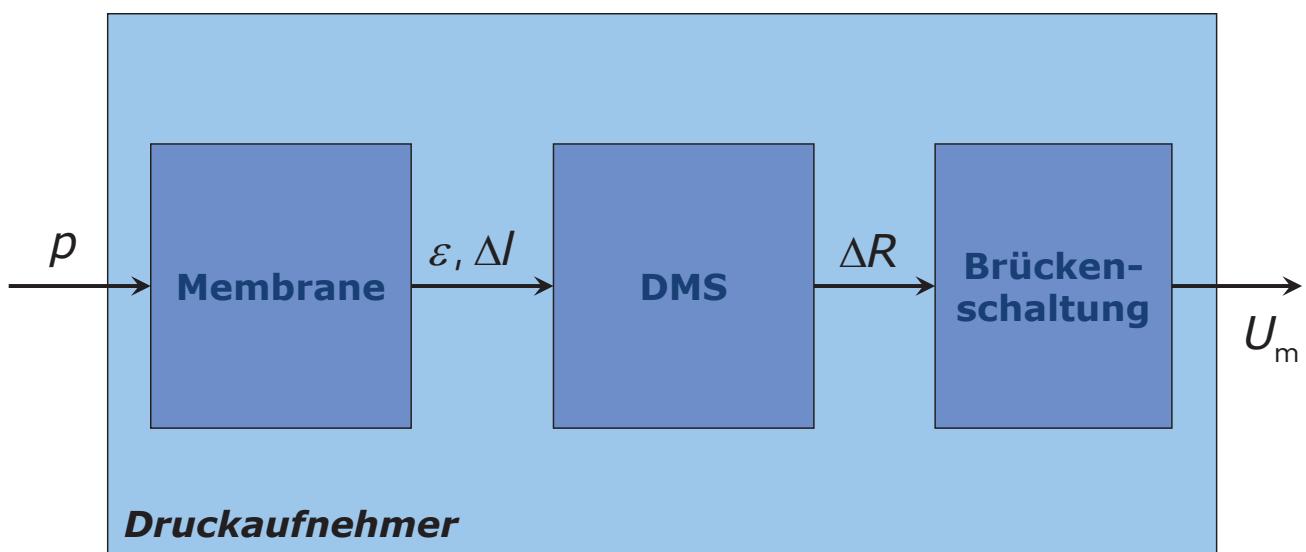
2.2.6 Aufnehmer (Struktur)



2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen

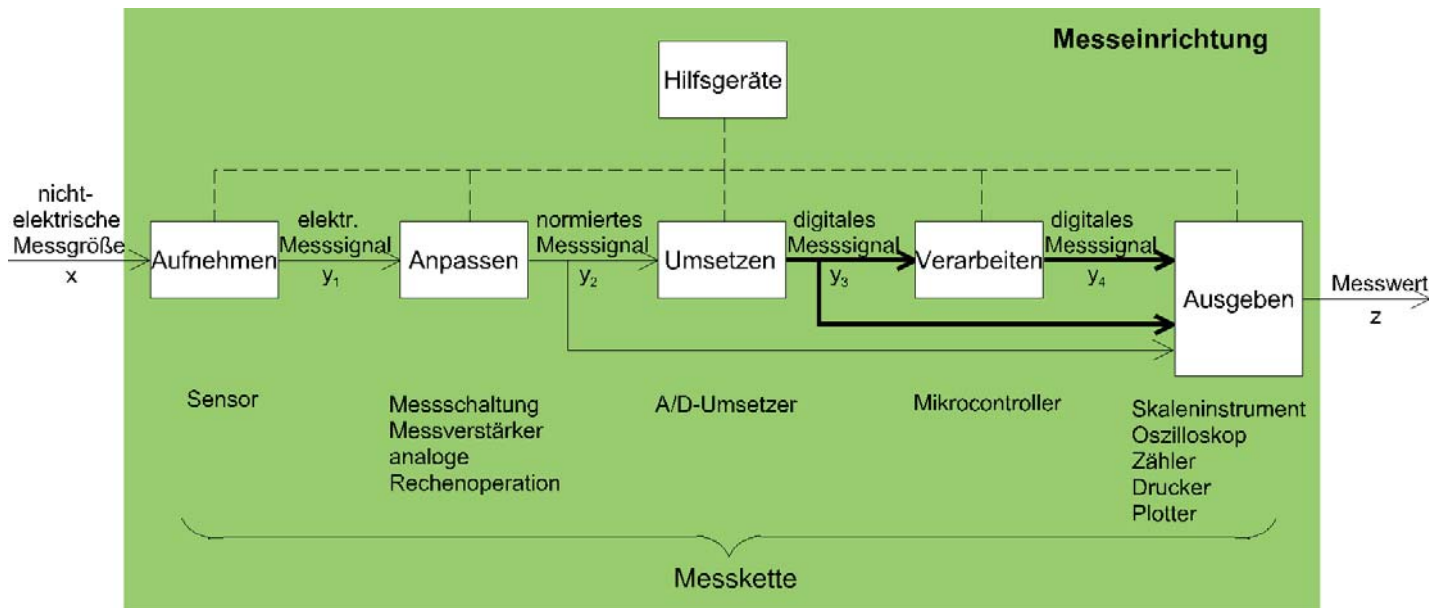
2.2.6 Aufnehmer (Beispiel)



2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen

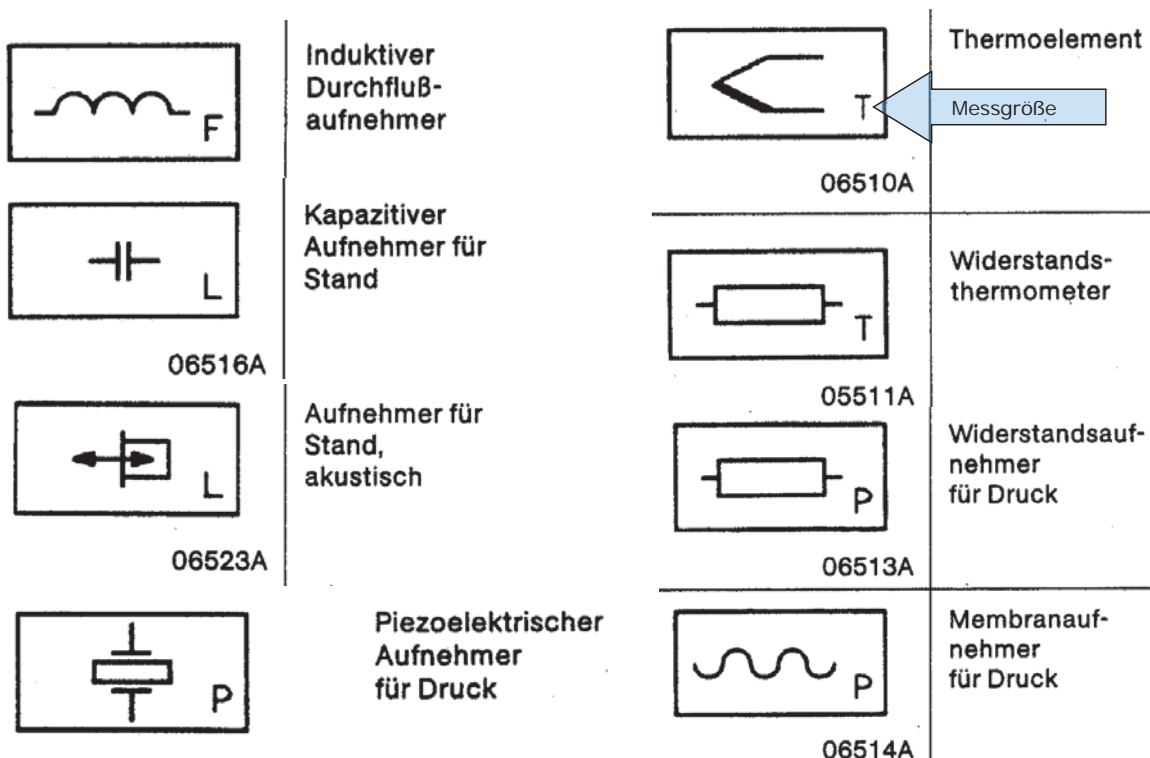
2.2.6 Struktur einer digitaler Messeinrichtung



2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen

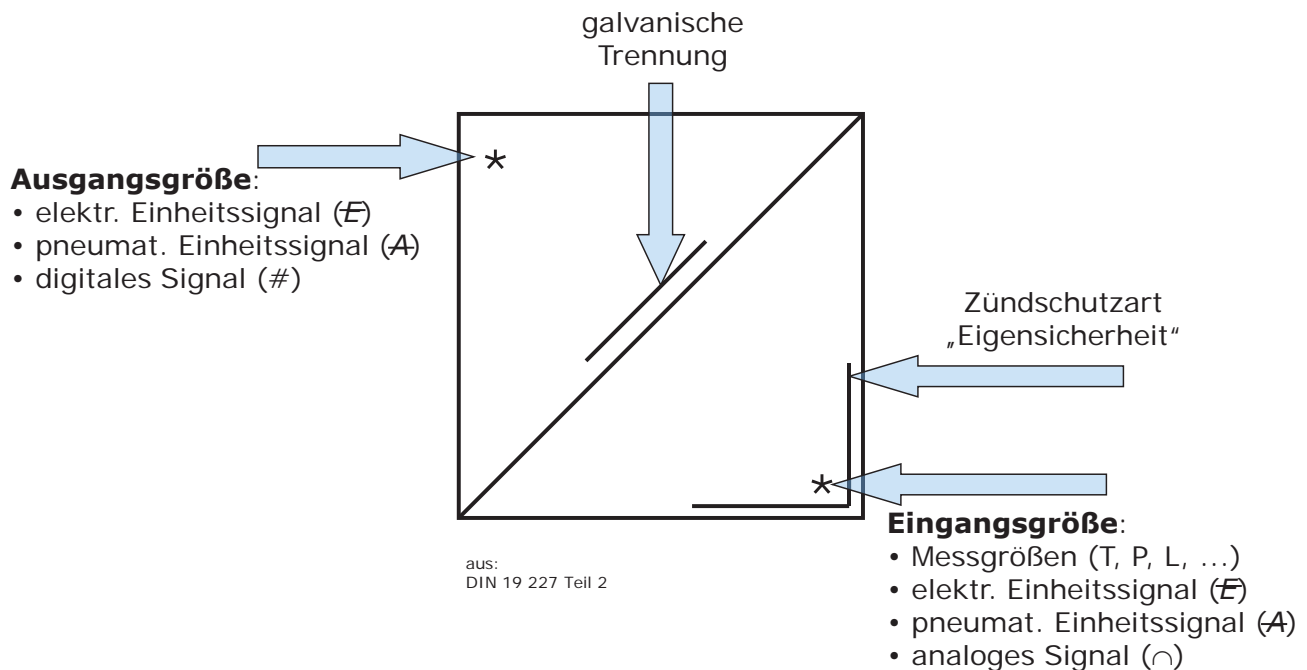
2.2.6 Aufnehmer (Typen)



2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen

2.2.7 Anpasser



2. Grundlagen:

2.2 Grundstruktur von Messeinrichtungen:

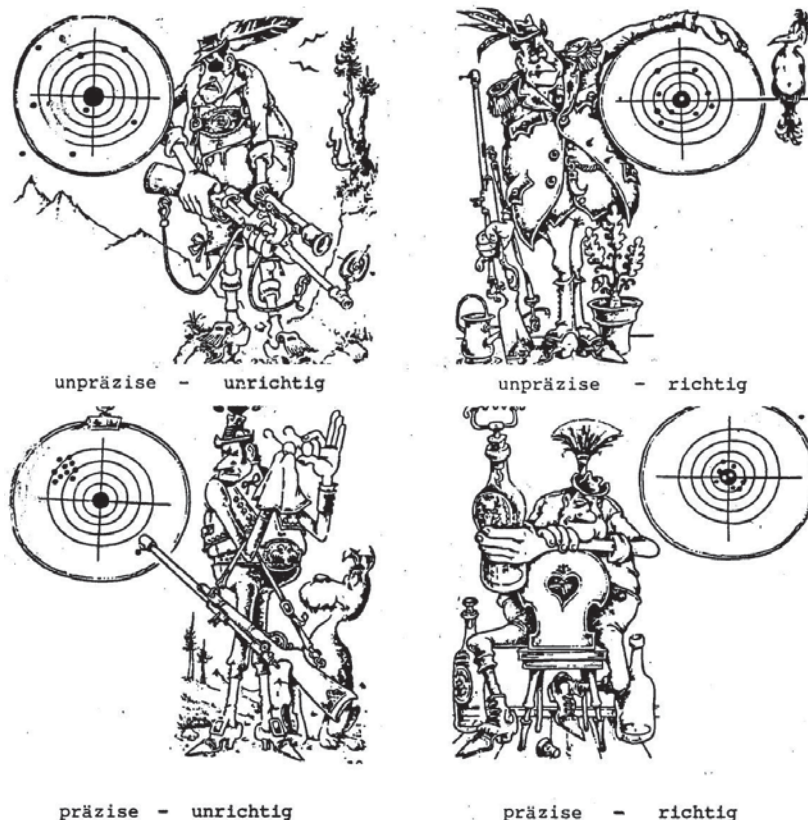
2.2.8 Ausgeber

	Zähler		Basissymbol Anzeiger, allgemein
06555A		06551A	
	Schreiber, analog Anzahl der Kanäle als Ziffer, z. B. 6		Anzeiger, analog
06556A		06552A	
	Schreiber, digital		Anzeiger, digital
06557A		06553A	
	Drucker		Grenzsinalgeber für unteren und oberen Grenzwert
		06554A	▽ links: unterer Grenzwert
			▽ rechts: oberer Grenzwert
			▽ oben: oberer Grenzwert
			▽ unten: unterer Grenzwert
		06554AA	

Empfohlene zus. Literatur für Kap. 2.1-2.2

Autor	Titel	Verlag
R. Lerch	Elektrische Messtechnik Kapitel 1 und 2	Springer Verlag
E. Schröder L. Reindl B. Zagar	Elektrische Messtechnik Kapitel 1.8	Hanser Verlag
R. Felderhoff, U. Freyer	Elektrische und elektronische Messtechnik Kapitel 1.1-1.5 inkl. Übungsaufgaben	Hanser Verlag
T. Mühl	Einführung in die elektrische Messtechnik: Grundlagen, Messverfahren, Anwendungen Kapitel 1	Springer Vieweg

2. Grundlagen: 2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung



ISAS:
aus „Statistische Bewertung
von Analyseverfahren
und -ergebnissen“

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung

2.3.1 Kriterium Richtigkeit

Formel- zeichen	Größe	Formeln
x_w	wahrer Wert [true value], richtiger Wert x_r , auch: W	
x	gemessener Wert [measured value], Messwert, Anzeigewert (auch: A , x_f)	
\bar{x}	gemessener (arithmetischer) Mittelwert (Durchschnitt) aus n Einzelmessungen [mean value]	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
u	Messunsicherheit, -fehler [measuring error]	$u = u_z + u_s$
u_z	zufällige (statistische) Abweichung	$u_z = \frac{t \cdot s}{\sqrt{n}}$
u_s	systematische konstante Abweichung [systematic error], abs. systemat. Fehler, abs. Messfehler, abs. Abweichung, abs. auch: e	$u_s = \Delta x = x_f - x_w$
f	relative Abweichung, relativer Fehler (auch: f)	$f = \frac{\Delta x}{x_w} \approx \frac{\Delta x}{x}$
\bar{x}_E	berichtigter Mittelwert, beste „Schätzung des Wertes“	$\bar{x}_E = \bar{x} + k$
k	Korrektur	$k = -u_s$
ε	relative Messunsicherheit, -abweichung [measuring error]	$\varepsilon = \frac{u}{\bar{x}_E}$

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.2 Kriterium Präzision

Formel- zeichen	Größe	Formeln
x_i	Wert der i -ten Messung (v. n Einzelmessg.) einer Stichprobe / Messreihe	
\bar{x}	gemessener (arithmetischer, empirischer) Mittelwert (Durchschnitt, [mean value]) aus Stichprobe mit Umfang n aus Grundgesamtheit (mit ∞ vielen Werten)	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
μ	Schätzwert des Erwartungswerts des Mittelwerts, Schwerpunkt der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$	$\bar{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$
s^2	Empirische Varianz, Varianz der Stichprobe	$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
σ^2	Schätzwert des Parameters der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$, Varianz	$s^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2$
s	empirische Standardabweichung, empirische Streuung, Streuungsmaß, Streuung der Stichprobe [scattering of observation]	$s = \sqrt{s^2}$
σ	Schätzwert der Standardabweichung [standard deviation] der Grundgesamtheit, mittl. quadrat. Fehler	$s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma$
v	empirischer Variationskoeffizient [coefficient of variation]	$v = \frac{s}{ \bar{x} }$
s_{ges}	empirische Standardabweichung der Mittelwerte	$s_{\text{ges}} = \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}$

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.3 Toleranzklassen (Beispiel Druckmessgeräte)

Toleranz- klasse	Verkehrs- fehlergrenze	Eich- fehlergrenze
Klasse 0,1	$\pm 0,1 \%$	$\pm 0,08 \%$
Klasse 0,2	$\pm 0,2 \%$	$\pm 0,16 \%$
Klasse 0,3	$\pm 0,3 \%$	$\pm 0,25 \%$
Klasse 0,6	$\pm 0,6 \%$	$\pm 0,5 \%$
Klasse 1,0	$\pm 1,0 \%$	$\pm 0,8 \%$
Klasse 1,6	$\pm 1,6 \%$	$\pm 1,3 \%$
Klasse 2,5	$\pm 2,5 \%$	$\pm 2 \%$
Klasse 4,0	$\pm 4,0 \%$	$\pm 3 \%$

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.4 Statische Kenngrößen (systematische Fehler)

- Bürdenfehler (Rückwirkung der Messeinrichtung)
- Umwelteinflüsse (Temperatur, Feuchte, Druck, ...)
- Einstreuung (elektrische / elektromagnetische Felder)
- Übertragungsverhalten der Messeinrichtung
 - Nullpunktfehler
 - Steigungs- (Verstärkungs-) fehler
 - Nichtlinearitäten
 - Dynamische Fehler

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.4 Statische Kenngrößen (Begriffe)

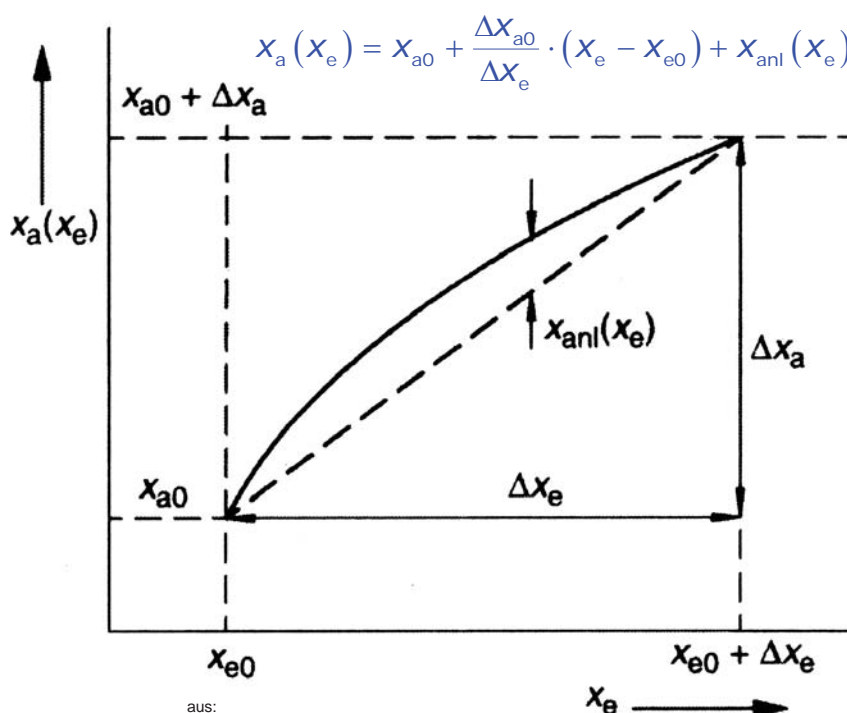
- **Anzeigebereich** ist der Bereich, der am Messinstrument abgelesen werden kann.
- **Messbereich** ist der Teil des Anzeigebereichs, für den der Messfehler innerhalb der Fehlergrenzen liegt.
- **Messgrenzen** geben die Anwendbarkeit des Messgeräts an, z.B. +10 .. +80 °C.
- **Empfindlichkeit** ist das Verhältnis der Änderung der Anzeige Δy zur Änderung der Messgröße Δx :

$$\varepsilon(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{dy_{nl}(x)}{dx}$$
- **Auflösung** ist der Kehrwert der Empfindlichkeit, falls die Umkehrspanne 0 ist.
- **Umkehrspanne** entsteht durch Reibung und Lose.

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.4 Statische Kenngrößen (Begriffe)



Spezialfall: lineare Kennlinie

$$x_a(x_e) = x_{a0} + \frac{\Delta x_{a0}}{\Delta x_e} \cdot (x_e - x_{e0})$$

Übertragungsfaktor $k = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e}$

Empfindlichkeit $E = \frac{dx_a}{dx_e}$

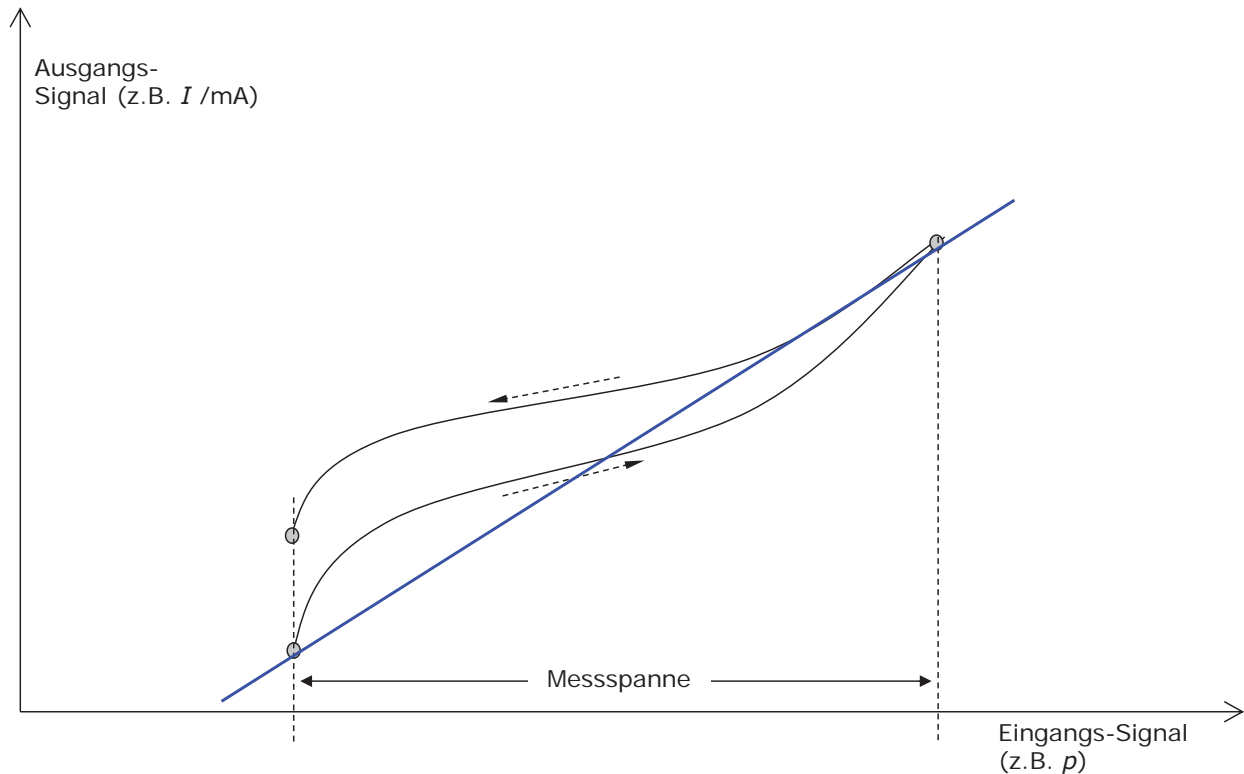
Spezialfall: lineare Kennlinie

$$Empfindlichkeit E = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e}$$

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

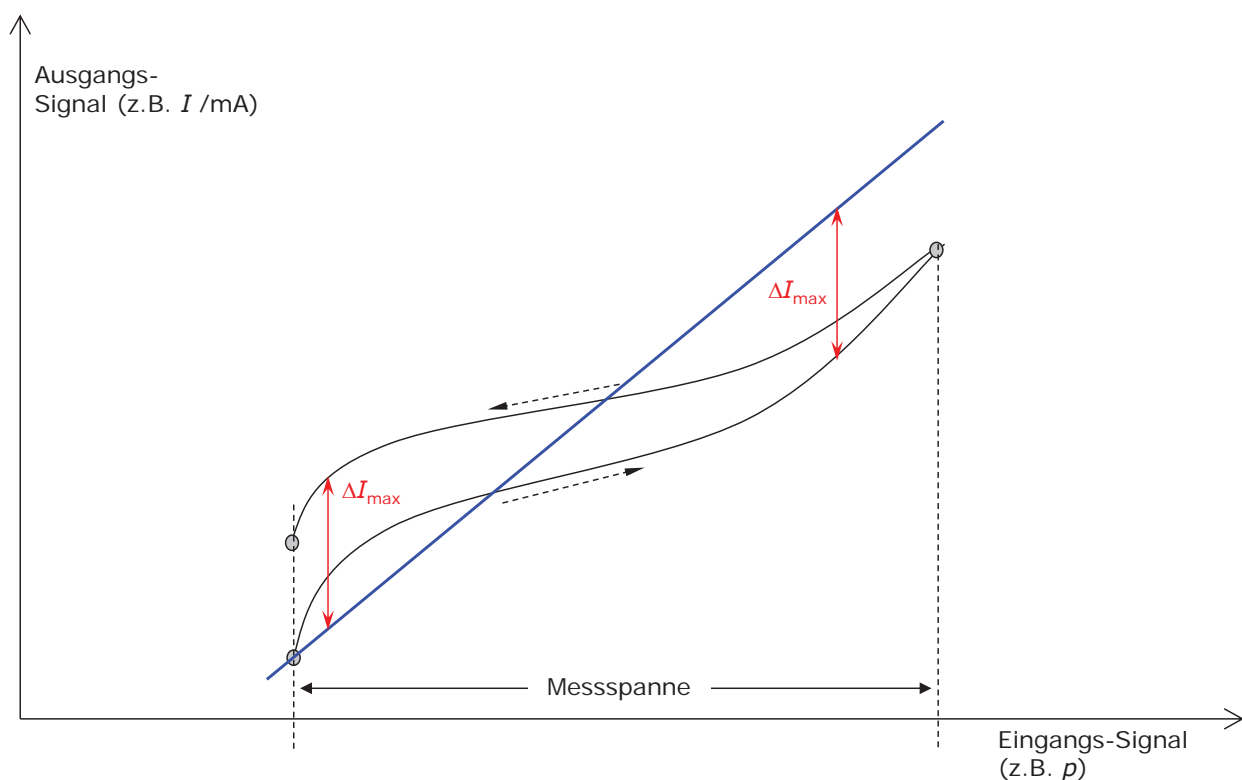
2.3.4 Statische Kenngrößen (Festpunkt-, Grenzpunkteinstellung)



2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

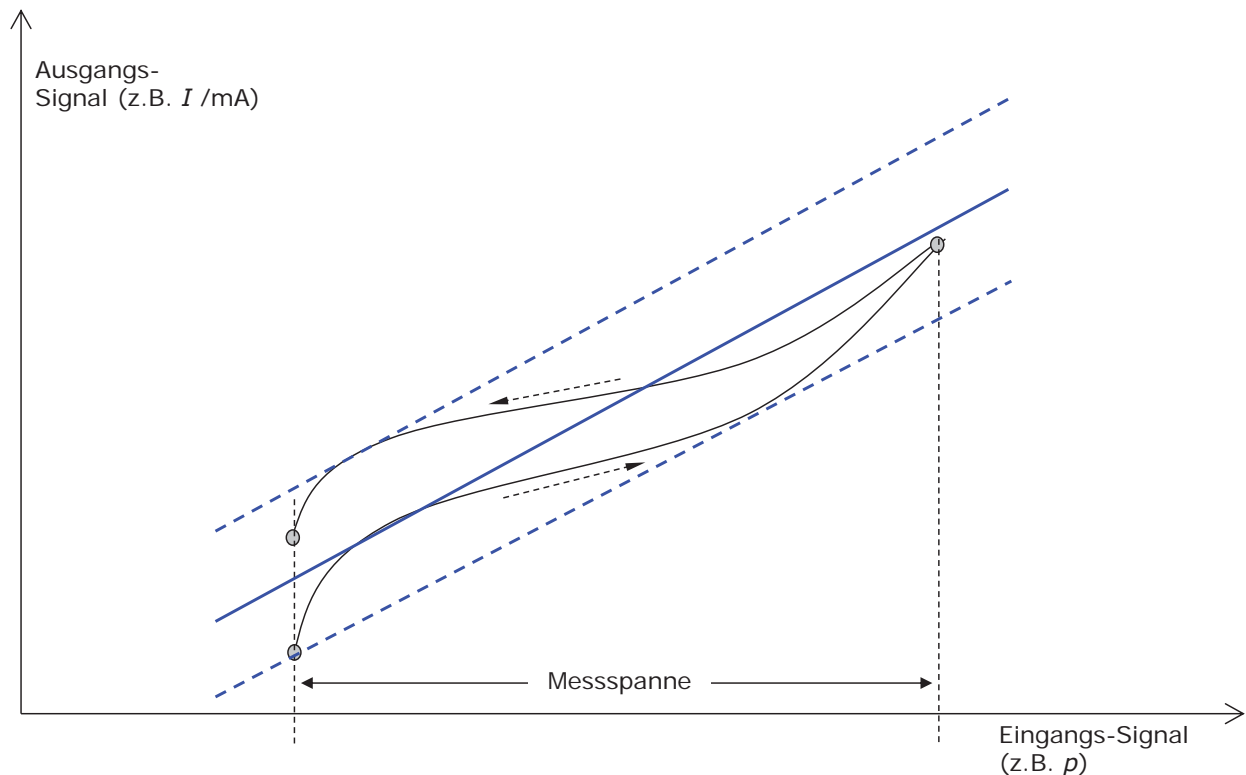
2.3.4 Statische Kenngrößen (Anfangspunkt-, Nullpunkteinstellung)



2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

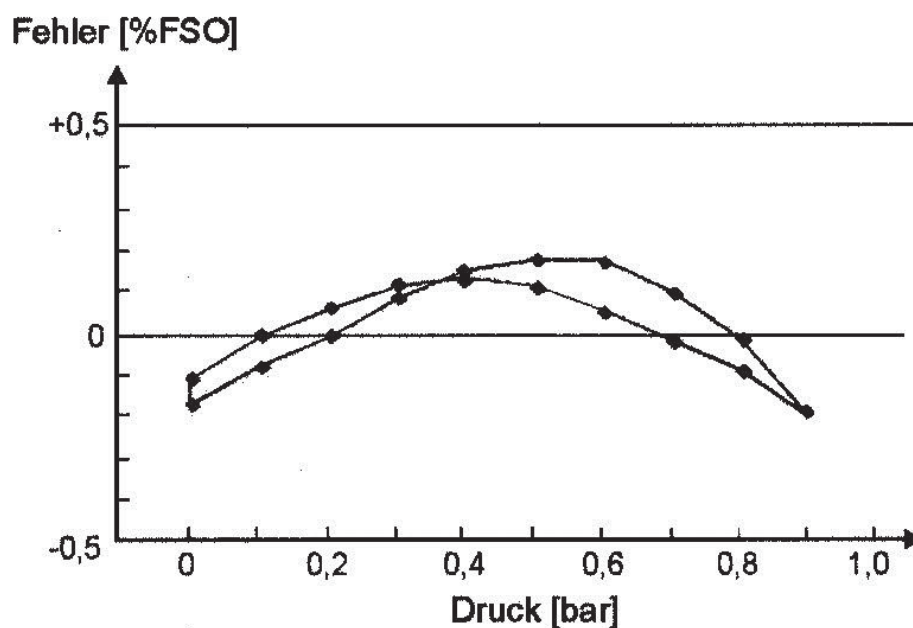
2.3.4 Statische Kenngrößen (Kleinstwert-, Toleranzbandeinstellung)



2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.4 Statische Kenngrößen (Nichtlinearität, Beispiel)



Nichtlinearität einer piezoresistiven Druckmesszelle

(Analog Microelectronics)

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

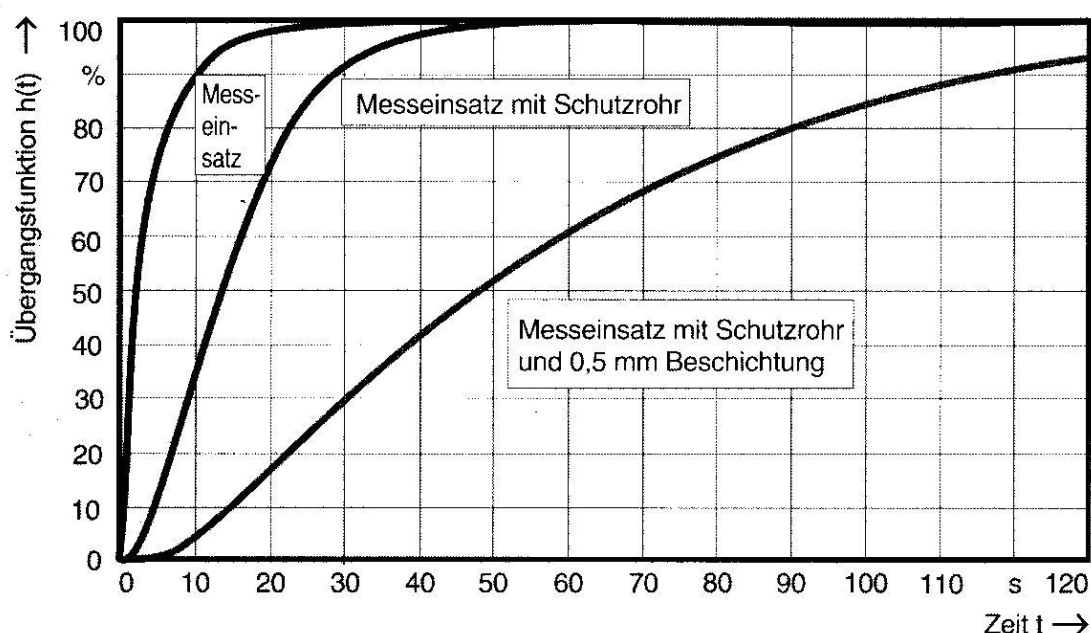
2.3.4 Statische Kenngrößen (zufällige Fehler)

- Unvollkommenheit des Beobachters von analogen Instrumenten (Interpolations- und Parallaxenfehler).
- Unvollkommenheit der Messeinrichtung, z.B. durch Rauschen in elektronischen Bauelementen.
- Einstreuungen durch elektromagnetische Felder, z.B. durch Schaltimpulse. Dies sind eigentlich systematische Fehler, aber hier wird das zeitliche Verhalten der Ursache nicht erkannt.

2. Grundlagen:

2.3 Genauigkeitskriterien einer Messung:

2.3.5 Dynamische Kenngrößen (Zeitverhalten, Beispiel)



Zeitverhalten von Widerstandsthermometern

(Messbedingungen in Wasser: $v_w = 0,4 \text{ m/s} \pm 0,05 \text{ m/s}$; $\vartheta_w = 25 \text{ °C}$)
(aus ABB: Praxis der industriellen Temperaturmessung)

2. Grundlagen:

2.4 Systematischer Fehler

2.4.1 Systematische Fehler, Fehlerfortpflanzung

Bekannte Einflüsse → bekannte systematische Abweichung: Δx

$$x_{\text{kor}} = x - \Delta x = x \cdot \left(1 - \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$\Delta x \rightarrow$ absoluter Fehler

$\frac{\Delta x}{x} \rightarrow$ relativer Fehler

Fortpflanzung der **bekannten** Messfehler

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\underbrace{y + \Delta y}_{\text{Messergebnis}} = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n)$$

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Mit Hilfe nach dem linearen Glied abgebrochenen Taylorreihe der Funktion $f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})$

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n$$

2. Grundlagen:

2.4 Systematischer Fehler

2.4.1 Systematische Fehler, Fehlerfortpflanzung

Lässt sich dann die Differenz Δy aus den partiellen Ableitungen und als klein angenommenen Änderungen Δx_i als folgt berechnen:

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \quad \text{für } \Delta x_i \ll x_i$$

Fall 1: $y = a_1 \cdot x_1 + a_1 \cdot x_1 + \dots a_n \cdot x_n \rightarrow \Delta y = a_1 \cdot \Delta x_1 + a_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + a_n \cdot \Delta x_n$

Fall 2: $y = a_1 \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot a_2 \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_n \cdot x_n^{\alpha_n}$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \alpha_1 \cdot a_1 \cdot x_1^{\alpha_1-1} \cdot a_2 \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_n \cdot x_n^{\alpha_n} = y \cdot \frac{\alpha_1}{x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} = y \cdot \frac{\alpha_i}{x_i}$$

⇒

$$\Delta y = y \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x_i} \cdot \Delta x_i = y \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i} \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

2. Grundlagen:

2.4 Systematischer Fehler

2.4.1 Systematische Fehler, Fehlerfortpflanzung

- Bei der *Addition* von Meßgrößen werden die *absoluten* Fehler *addiert*.
- Bei der *Subtraktion* von Meßgrößen werden die *absoluten* Fehler *subtrahiert*.
- Bei der *Multiplikation* von Meßgrößen werden die *relativen* Fehler *addiert*.
- Bei der *Division* von Meßgrößen werden die *relativen* Fehler *subtrahiert*.

In vielen Fällen sind die Richtungsabweichungen der Fehler und damit ihre Vorzeichen unbekannt. Dann kann man nur einen „**worst case**“ Fehlerband definieren. Δy entspricht dann den maximalen Absoluten Fehler der auftreten kann.

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right|$$

$$y \in [y_m - \Delta y, \dots, y_m + \Delta y]$$

Dann können wir nur feststellen, dass der richtige Wert im Bereich der Δy um den gemessenen Wert y_m liegt.

Empfohlene zus. Literatur für Kap. 2.4

Autor	Titel	Verlag
R. Lerch	Elektrische Messtechnik Kapitel 5.1	Springer Verlag
E. Schrüfer L. Reindl B. Zagar	Elektrische Messtechnik Kapitel 1.4.1	Hanser Verlag
T. Mühl	Einführung in die elektrische Messtechnik: Grundlagen, Messverfahren, Anwendungen Kapitel 2.1, 2.2	Springer Vieweg

Aufgabe Fehlerfortpflanzung bei syst. Fehler

Schrüfer, Beispiel 2.1, Seite 33

Elektrische Messtechnik

Hanser Verlag

Beispiel 1.2 (Schrüfer) Seite 11 Aufgabe Messtechnik AT

Messungen an dem Verbraucher mit folgenden rel. Fehler durchgeführt

$$\frac{\Delta U}{U} = -0,01 \quad \frac{\Delta I}{I} = 0,02 \quad \frac{\Delta R}{R} = -0,031$$

Relativer Fehler der Verbraucherleistung?

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

Aufgabe Fehlerfortpflanzung bei syst. Fehler

R. Lerch

Elektrische Messtechnik (Übungsbuch)

Springer Verlag

Beispiel 3.2: Systematischer Fehler bei einer Widerstandsmessung

Es wird der Wert eines ohmschen Widerstandes mittels einer Strom-Spannungsmessung ermittelt.

$F_I = 15 \text{ mA}$ absoluter Fehler des Amperemeters

$F_U = 100 \text{ mV}$ absoluter Fehler des Voltmeters

$I_m = 0,7 \text{ A}$ gemessener Strom

$U_m = 8 \text{ V}$ gemessene Spannung

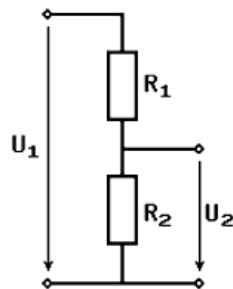
- Wie groß ist der maximale absolute systematische Fehler bei dieser Meßmethode?
- Bestimmen Sie den Fehler mit der Regel: *Bei der Division von Meßgrößen werden deren relative Fehler subtrahiert.* Zeigen Sie, daß der so ermittelte Fehler mit dem unter Punkt a) berechneten Fehler übereinstimmt.

Aufgabe Fehlerfortpflanzung bei syst. Fehler

Wird eingetragen	Wird eingetragen	Wird eingetragen
------------------	------------------	------------------

Hausaufgabe

Aufgabe Mit der in Bild dargestellten Schaltung soll die Spannung U_1 bestimmt werden. Gegeben sind: $R_1 = 4 \text{ k}\Omega - 2 \%$; $R_2 = 1 \text{ k}\Omega + 1 \%$; $U_2 = 200 \text{ V} - 1,5 \%$



Bild

- Welchen Wert hat U_1 ?
- Berechnen Sie den systematischen Fehler von U_1 (absolut und relativ).
- Berechnen Sie den maximal möglichen Fehler von U_1 (absolut und relativ).

2. Grundlagen: 2.4 Messwertstatistik 2.4.1 Definitionen

- Histogramm mit Klassenbreite Δx ,
- Absolute Häufigkeit Δy , Relative Häufigkeit $\frac{\Delta y}{y}$
- Häufigkeitsdichte $h_x = \frac{\Delta y}{y \cdot \Delta x}$ Summenhäufigkeit $S_x = \sum \frac{\Delta y}{y} = \sum h_x \cdot \Delta x$

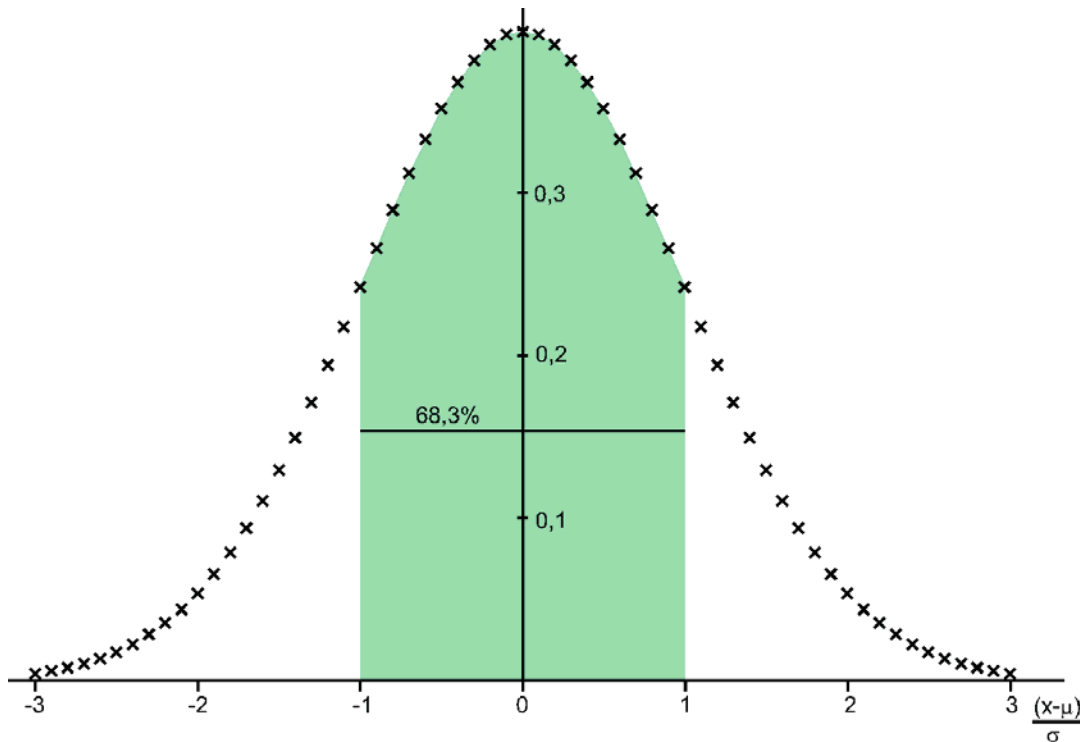
Grenzübergang für $\Delta x \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$:

- Kontinuierliche Häufigkeitsdichte $h(x)$ wird Verteilungs- oder Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(x)$.
- Kontinuierliche Summenhäufigkeit $S(x)$ wird Verteilungs- oder Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$.

2. Grundlagen:

2.4 Messwertstatistik

2.4.2 Gauß'sche Glockenkurve



2. Grundlagen:

2.4 Messwertstatistik

2.4.3 Gauß-Verteilung

Häufigkeitsdichte	$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
Summenhäufigkeit	$P(x) = \int_{-\infty}^x p(\xi) d\xi = \text{erf}(x)$
Mittelwert (Schwerpunkt, 1. statistisches Moment)	$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = E\{x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
Varianz (Zentralmo- ment 2. Ordnung)	$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x)dx = E\{(x - \mu)^2\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$
Standardabweichung	$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$
Erhaltungstendenz	$V_{xy}(\tau) = \iint (x - \mu)(y - \mu)p(x, y, \tau)dx dy = E\{(x - \mu)(y - \mu)\}$

2. Grundlagen:

2.4 Messwertstatistik

2.4.3 Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \Phi(x) = \int_0^x \varphi(\xi) d\xi$$

x	0,...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	0,...	3989	3970	3910	3814	3683	3521	3332	3123	2897	2661
Φ	0,...	0	0398	0793	1179	1554	1915	2257	2580	2881	3159
x	1,...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	0,...	2420	2179	1942	1714	1497	1295	1109	0941	0790	0656
Φ	0,...	3413	3643	3849	4032	4192	4332	4452	4554	4641	4713
x	2,...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	0,0...	5399	4398	3547	2833	2239	1753	1358	1042	0792	0595
Φ	0,4	772	821	8610	8928	9180	9379	9534	9653	9744	9813
x		3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8
φ	0,00...	4432	2384	1232	0612	0292	0134	0059	0025	0010	0004
Φ	0,49...	8650	9313	9663	9841	9928	9968	9987	9995	9998	9999

2. Grundlagen:

2.4 Messwertstatistik

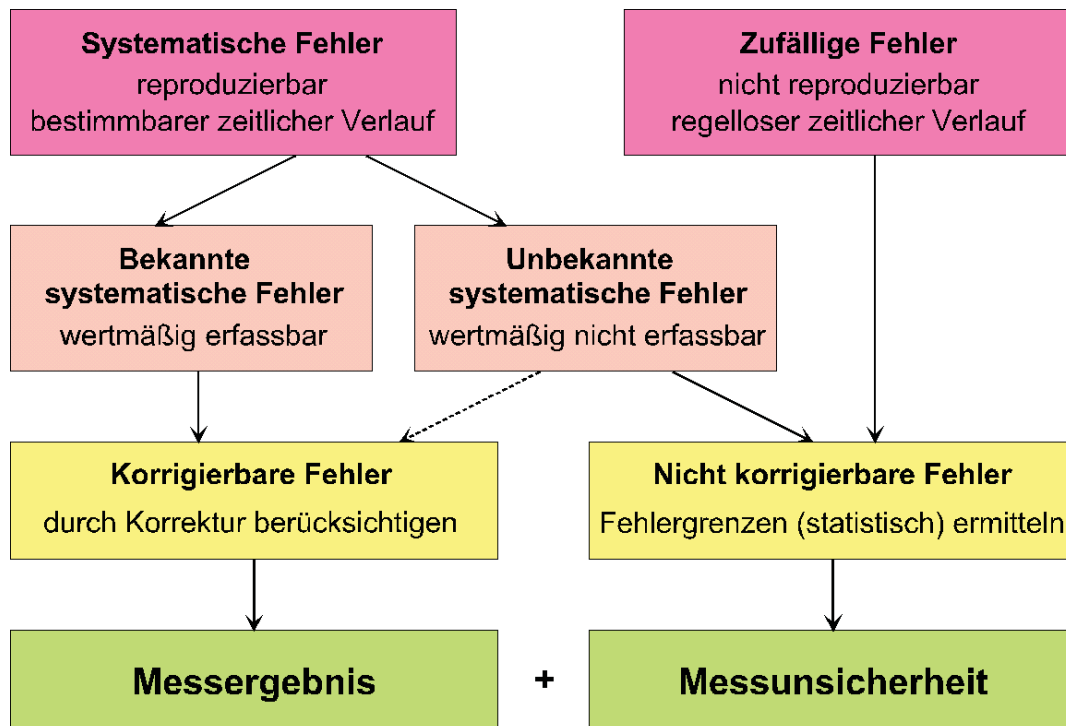
2.4.4 Student'sche Verteilung

→ (1-α)	68,3%	95%	99%
↓ n	t	t	t
2	1,84	12,71	63,66
3	1,32	4,30	9,93
4	1,20	3,18	5,84
5	1,15	2,78	4,60
6	1,11	2,57	4,03
8	1,08	2,37	3,5
10	1,06	2,26	3,25
20	1,03	2,09	2,86
50	1,01	2,01	2,68
∞	1,00	1,96	2,58

2. Grundlagen:

2.4 Messwertstatistik

2.4.5 Fehlerkorrektur



Empfohlene Literatur für Kap. 2.3-2.4

Autor	Titel	Verlag
R. Lerch	Elektrische Messtechnik Kapitel 5	Springer Verlag
E. Schrüfer L. Reindl B. Zagar	Elektrische Messtechnik Kapitel 1.3-1.7	Hanser Verlag
R. Felderhoff, U. Freyer	Elektrische und elektronische Messtechnik Kapitel 1.6-1.9 inkl. Übungen	Hanser Verlag

Aufgaben

R. Lerch

Elektrische Messtechnik (Übungsbuch)

Springer Verlag

Aufgabe 3.1: Klassengenauigkeit

Die in Abb. 3.2 gezeigte Schaltung wird zur Widerstandsmessung verwen-

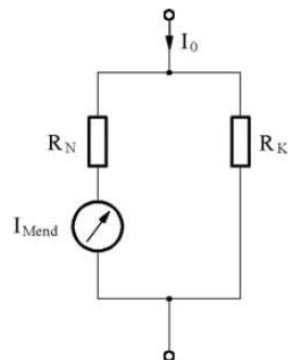


Abb. 3.2. Meßanordnung zur Widerstandsmessung

det. Das verwendete Strommeßgerät hat eine Genauigkeitsklasse von 1 %, einen Bereichsendwert $I_{Mend} = 1 \text{ mA}$ und zeigt einen Strom von 0,3 mA an. Mit welcher Genauigkeit kann der Widerstand R_K bestimmt werden,

Aufgaben

R. Lerch

Elektrische Messtechnik (Übungsbuch)

Springer Verlag

wenn die Werte für den Strom $I_0 = 1 \text{ mA}(1 \pm 0,01)$ sowie den Widerstand $R_N = 10 \text{ k}\Omega(1 \pm 0,01)$ bekannt sind? Geben Sie den Widerstand R_K in der Form

$$R_K = R_{Knom}(1 \pm f_{RK})$$

an, wobei f_{RK} den relativen Fehler von R_K bezeichnet.