第一章　函数

1.1　映射

1.1.1　映射的概念

定义 1.1.1: 映射定义

设 X, Y 是两个非空集合, 如果**存在**一个法则 f, 使得对 X 中**每个元素** x, 按法则 f, 在 Y 中有**唯一确定的元素** y 与之对应, 那么称 f 为从 X 到 Y 的映射, 记作

$$f: X \to Y$$

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下) 的像, 并记住 $f(x)$, 即

$$y = f(x)$$

而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下) 对一个原像;

需要注意的是, 从映射的概念可以看出, 映射法则 f 可以有多个, 但是只要有一个满足即可.

1.1.2　逆映射和复合映射

定义 1.1.2: 逆映射的定义

设 f 是 X 到 Y 的单射, 则由定义, 对每个 $y \in R_f$, 有唯一的 $x \in X$, 适合 $f(x) = y$, 于是, 我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g, 即

$$g: R_f \to X$$

对每个 $y \in R_f$, 规定 $g(y) = x$, 这个 x 满足 $f(x) = y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射, 记作 f^{-1}, 其定义域为 $D_{f^{-1}} = R_f$, 值域 $R_{f^{-1}} = X$. 根据上述定义可知，只有单射才存在逆映射.

定义 1.1.3: 复合映射的定义

设有两个映射

$$g : X \to Y_1 \qquad f : Y_2 \to Z$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则, 它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$. 显然, 这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射, 这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f \circ g$，即

$$f \circ g : X \to Z, (f \circ g)(x) = f[g(x)], x \in X.$$

由复合映射的定义可知, 映射 g 和 f 构成复合映射的条件是:g 的值域 R_g，必须包含在 f 的定义域内，即 $R_g \subset D_f$. 否则, 不能构成复合映射. 由此可以知道, 映射 g 和 f 复合是有顺序的.

1.1.3 映射的分类

- 设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射, 若 $R_f = Y$, 即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像, 则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射;
- 若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$, 它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为 X 到 Y 的单射;
- 若映射 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 为一一映射 (或双射)

1.2 函数的基本概念与特性

1.2.1 函数的概念

定义 1.2.1: 函数定义

设**数集** $D \subset \mathbb{R}$, 则称映射 $f : D \to \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域, 记作 D_f, 即 $D_f = D$.

函数的定义中, 对**每个** $x \in D$, 按对应法则 f, 总有**唯一确定**的值 y 与之对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系, 通常称为**函数关系**. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$ 即:

$$R_f = f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

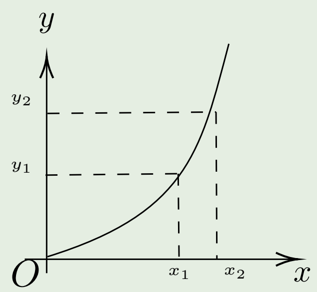
定义 1.2.2: 自然定义域

约定函数的定义域是使算式有意义的一切实数组成的集合。

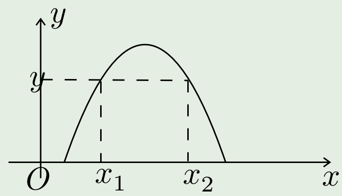
例如: 函数 $y=\frac{1}{x-1}$, 即使没有指出函数的定义域是多少, 但是通过分析可得, 函数的自然定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$。同理对于函数 $y=\sqrt[2]{1-x^2}$, 其自然定义域是 $(-1,1)$。

注 1.2.1: 单值函数与多值函数

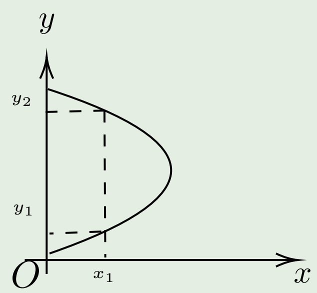
事实上上述定义的函数为**单值函数**, 若给定一个 x_1, 对应一个 y_1。给另外一个 x_2, 对应另外一个 y_2, 即"**一对一**". 其图像如下图所示



若给定 x_1 和 x_2, 且他们对应同一个 y, 则称"多对一".



所以**函数可以一对一, 也可以多对一, 统称为单值函数**.



但是, 如果一个 x 对应一个 y_1, 同时对应另一个 y_2, 也就是一对多, 这叫做多值函数.(高等数学中研究对象主要是单值函数)

1.2.2 函数的表示

表格

x	1	2	3	4	5	6
$y=2x$	2	4	6	8	10	12

图像

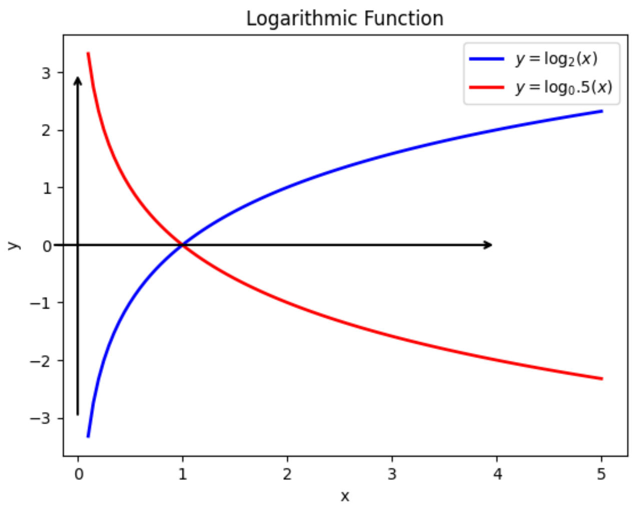


图 1.1: 对数函数图像

解析式

$$\boxed{y=2x}$$

1.2.3 反函数

定义 1.2.3: 反函数定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 R. 如果对于每一个 $y\in R$, 必存在唯一的 $x\in D$ 使得 $y=f(x)$ 成立, 则由此定义了一个新的函数 $x=\varphi(y)$, 这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**, 一般记作 $x=f^{-1}(y)$, 它的定义域为 R, 值域为 D. 相对于反函数来说, 原来的函数也被称为**直接函数**.

一般地,$y=f(x),x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x),x\in f(D)$

注 1.2.2: 解释

以函数 $y = 2x + 1$ 为例:

$y = 2x + 1$	自变量:x:[1,2] 因变量:y:[3,5]	
$x = \frac{y-1}{2}$	自变量:y:[3,5] 因变量:x:[1,2]	变量 改变
$y = \frac{x-1}{2}$	自变量:x:[3,5] 因变量:y:[1,2]	方程 改变

定义 1.2.4: 反函数的性质

- $f^{-1}f(x) = x$
- 严格单调函数必有反函数, 但是有反函数的函数不一定是单调函数. 如函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x < 0, \end{cases}$, 其函数图像为

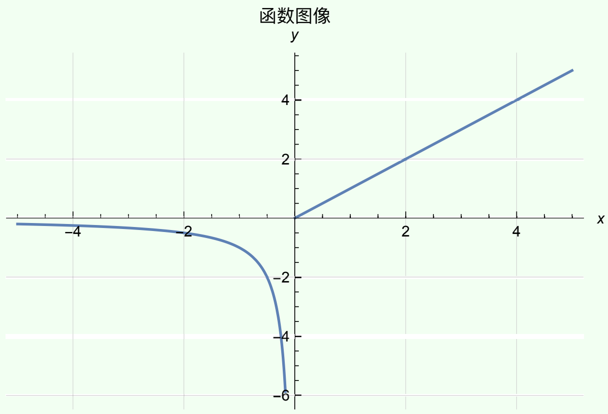


图 1.2: 分段函数 $f(x)$ 图像

- 若函数 $f(x)$ 有反函数, 则 $f(x)$ 与任意水平线有且仅有一个交点.
- **若把 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图形画在同一坐标系中, 则它们完全重合. 只有把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$ 后, 它们的图形才关于 $y = x$ 对称.**
  这是因为在 $x = f^{-1}(y)$ 中 y 是自变量而 x 是因变量, 而在 $y = f(x)$ 中恰恰相反 (这个时候的图像应该一个是 x-y 坐标系函数图像, 一个是 y-x 坐标系函数图像), 因此如果此时不交换变量, 那么其域没有变化, 画在一起会重合, 只有交换了变量之后才不会重合.

题目 1. 求函数 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数的表达式以及定义域

题目 1 的注记.

- 在上面的例子中, 函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为反双曲正弦函数, 其反函数为双曲正弦函数. 除此之外, 函数 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 是双曲余弦函数. 上述两个函数的图像为图 1.2, 图 1.3.
- 下列结论需要记住
  - $x\to 0$时, $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sim x$.
  - $\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, 于是 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$.
  - 由于$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$是奇函数, 于是 $\int_{-1}^{1}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+x^2\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.

解答. 已知 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 则 $-y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$
对两边可以进行如下操作

$$e^{-y}=\sqrt{x^2+1}-x$$
$$e^{y}=\sqrt{x^2+1}+x$$

那么可以得到 $x=\frac{1}{2}(e^y-e^{-y})$ 交换之后可以得到函数 $f(x)$ 的反函数, 即 $y=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

1.2.4 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,, 函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义, 且 $g(D)\subset D_1$, 则由

$$y=f[\mathrm{g}(x)](x\in D)$$

确定的函数, 称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**, 它的定义域为 D,u 称为中间变量. 内层函数的值域是外层函数的子集.

1.2.5 函数的四种特性及重要结论

有界性

有界性分为三种情况, 一种是有上界, 一种是有下界, 一种是有界。有界包含了有上界和有下界。

定义 1.2.5: 有上界的定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $X\in D$。如果存在数 K_1, 使得

$$f(x)\le K_1$$

对任一 $x\in X$ 都成立, 那么称函数 $f(x)$ 上有上界, 而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界。

定义 1.2.6: 有下界的定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $X \in D$。如果存在数 K_2, 使得

$$f(x) \geq K_2$$

对任一 $x \in X$ 都成立, 那么称函数 $f(x)$ 上有下界, 而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界。

定义 1.2.7: 有界性的定义

设 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $I \subset D$. 如果存在某个正数 M, 使对任一 $x \in I$, 有$|f(x)| \leqslant M$, 则称 $f(z)$ 在 I 上有界; 如果这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

- **有界是指, 同时有上界和下界**
- 从几何上看, 如果在给定的区间, 函数 $y = f(x)$ 的图形能够被直线 $y = -M$ 和 $y = M$" 完全包起来", 则为有界; 从定义上说, 找到某个正数 M, 使得 $|f(z)| \leqslant M$, 则为有界.
- **在讨论有界还是无界的时候首先要指明区间**, 如果没指名区间, 则无法讨论有界性. 如函数 $y = \frac{1}{x}$ 则 $(2, +\infty)$ 上有界, 但是在 $(0, 2)$ 上无界.

单调性

定义 1.2.8

设 $f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I \subset D$. 如果对于区间上任意两点 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$, 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**.

虽然单调性的证明一般用求导, 但是定义法也需要掌握.

对任意$x_1, x_2 \in D$,$x_1 \neq x_2$, 有

$$f(x)\text{是单调增函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)\Big[f(x_1) - f(x_2)\Big]{>}0;$$

$$f(x)\text{是单调减函数.} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)\Big[f(x_1) - f(x_2)\Big] < 0;$$

$$f(x)\text{是单调不减函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]{\geqslant}0;$$

$$f(x)\text{是单调不增函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \leqslant 0.$$

奇偶性

定义 1.2.9

设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则 $-xinD$). 如果对于任一 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任一 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**奇函数**.偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

注 1.2.3

- $f(\varphi(x))$(内偶则偶, 内奇看外)
  - 奇 [偶]$\Rightarrow$ 偶
  - 偶 [奇]$\Rightarrow$ 偶
  - 奇 [奇]$\Rightarrow$ 奇
  - 偶 [偶]$\Rightarrow$ 偶
  - 非奇非偶 [偶]$\Rightarrow$ 偶
- 对任意的 x, y 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 则 $f(x)$ 是奇函数.

  证明. 令 $x = y = 0$, 则 $f(0) = 2 * f(0)$, 则 $f(0) = 0$, 令 $y = -x$, 则 $f(0) = f(x) + f(-x)$. □

- 求导后奇偶性互换
- 求积后奇偶性互换
- **连续的奇函数的一切原函数都是偶函数**
- **连续的偶函数的原函数中仅有一个原函数是奇函数**
- 奇函数 $y = f(x)$ 的图形关于坐标原点对称, 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有定义时, 必有 $f(0) = 0$.
- 偶函数 $y = f(x)$ 的图形关于 y 轴对称, 且当 $f(0)$ 存在时, 必有 $f'(0) = 0$.
- 设 $f(x)$ 是定义在 $[-l, l]$ 上的任意函数, 则

$$F_1(x) = f(x) - f(-x)\text{必为奇函数}; F_2(x) = f(x) + f(-x)\text{必为偶函数}$$

原因如下:

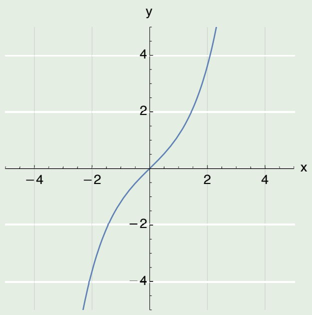


图 1.3: 双曲正弦函数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

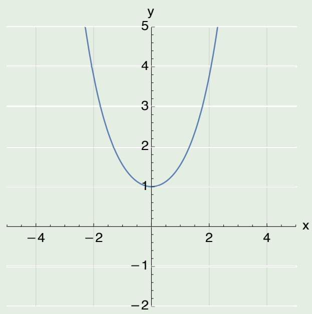


图 1.4: 双曲余弦函数 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

可以看到上面两个函数可以很好的解释, 并给出一个直观的图像, 以下为证明过程.

证明. 已知 $f(x)$ 是任意函数,-1 带入可得,$F_1(-x) = f(-x) - f(x) = -F_1(x)$, 同理可证 F_2 成立. □

周期性

定义 1.2.10

设 $f(x)$ 的定义域为 D, 如果存在一个正数 T, 使得对于任一 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x+T)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期. 从几何图形上看, 在周期函数的定义域内, 相邻两个长度为 T 的区间上, 函数的图形完全一样.

需要注意的是函数的周期性只与 x 的参数有关, 比如若函数 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期. **可以观察到其周期只与 x 的系数有关**

重要结论

- 若 $f(x)$ 是可导的周期为 T 的周期函数, 则 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.
- 若连续函数 $f(x)$ 以 T 为周期且 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 时,$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 也以 T 为周期.
- 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $f'(x)$ 有界, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

1.2.6 三种特殊函数

符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

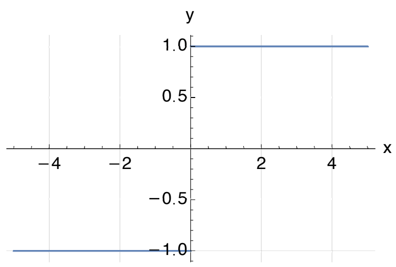


图 1.5: 符号函数 $sgn\ x$ 图像

取整函数

$$y=[x]$$

函数值向左移, **现实生活中其实就是年龄**, 即 $x-1<[x]\le x$

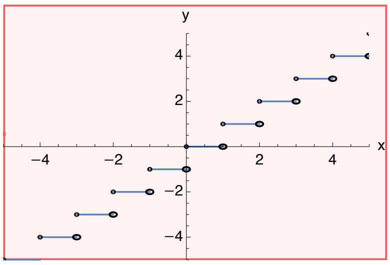


图 1.6: 取整函数 $[x]$ 图像

狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^c.\end{cases}$$

1.3　函数图像

1.3.1　常数函数

$y=A$,A 为常数, 其图形为平行于 x 轴的水平直线

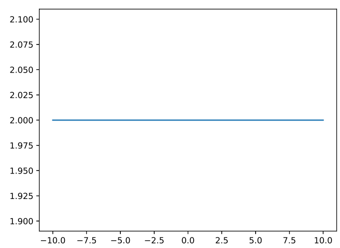


图 1.7: 常数函数图像

1.3.2　幂函数

$$y=x^{\mu}(\mu\text{是实数})$$

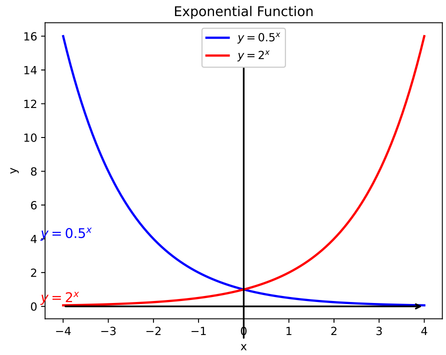


图 1.8: 常数函数图像

注 1.3.1: 幂函数常用技巧

- 当 $x>0$ 时, 由 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x}$,$y=\sqrt[3]{x}$,$y=\ln x$ 具有相同的单调性, 因此可以利用这一特性来研究最值
- 见到 $\sqrt{u}$,$\sqrt[3]{u}$ 时, 可用 u 来研究最值
- 见到 $\mid u \mid$ 时, 由 $\mid u \mid = \sqrt{u^2}$, 可用 u^2 来研究最值
- 见到 u_1, u_2, u_3,$\ln(u_1+u_2+u_3)=\ln u_1+\ln u_2+\ln u_3$ 来研究最值
- 见到 $\frac{1}{u}$ 时, 可用 u 来研究最值 (结论相反), 即 $\frac{1}{u}$ 与 u 的最大值点、最小值点相反

1.3.3　指数函数

$$y=a^x(a>0,a\neq 1)$$

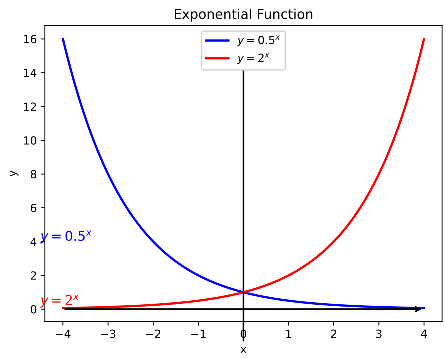


图 1.9: 指数函数图像

注 1.3.2: 指数函数相关性质

- 定义域:$(-\infty,+\infty)$. 值域:$(0,+\infty)$.
- 单调性: 常用的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$
- 极限:$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0,\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$(由于极限的唯一性, 因此在趋于不同的无穷时, 极限值的不同).
- 特殊函数值:$a^0=1$,$\mathrm{e}^0=1$
- 指数运算法则:

$$a^\alpha\times a^\beta=a^{\alpha+\beta},\frac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta},(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta},(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha,\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha},$$

$eg:e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}\left(e^{\tan x-\sin x}-1\right)$

1.3.4 对数函数

$$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$$

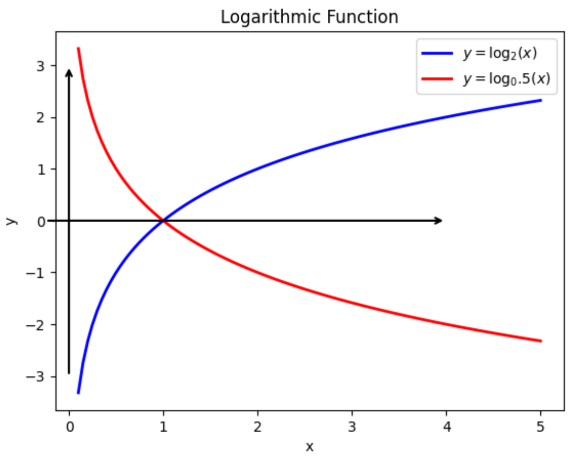


图 1.10: 对数函数图像

注 1.3.3: 对数函数相关性质

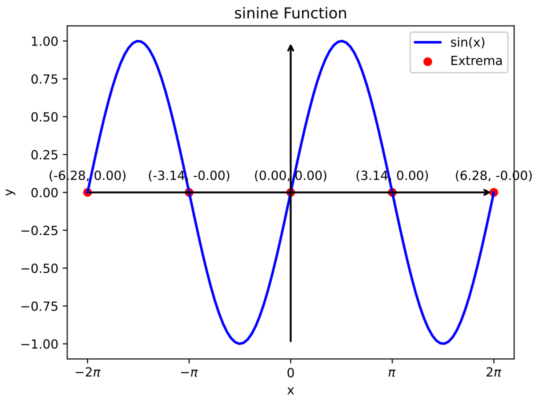
- 定义域:$(0,+\infty)$. 值域:$(-\infty,+\infty)$.
- 单调性: 当 $a>1$ 时,$y=log_a x$ 单调增加; 当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调减少;
- 常用对数函数: $y=\ln x$
- 特殊函数值:$\log_a 1=0$,$\log_a=1$,$\ln 1=0$,$\ln e=1$
- 极限 $\text{limln}_{x\to0^+}x=-\infty$,$\text{limln}_{x\to+\infty}x=+\infty$.
- 常用公式:$x=\mathrm{e}^{\ln x}\,(x>0)\,,u^v=\mathrm{e}^{\ln u^v}=\mathrm{e}^{v\ln u}\,(u>0)$

1.3.5　三角函数

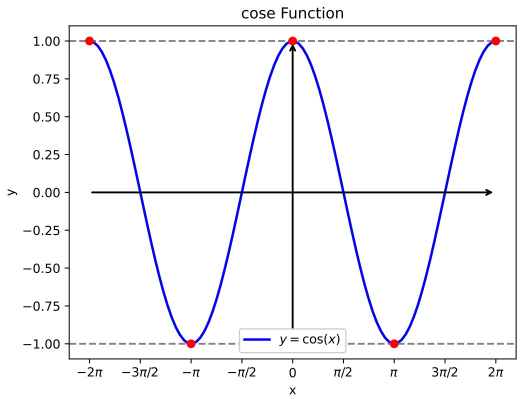
正弦和余弦函数

$$\boxed{y = \sin x}$$

$$\boxed{y = \cos x}$$



(a) 正弦函数图像



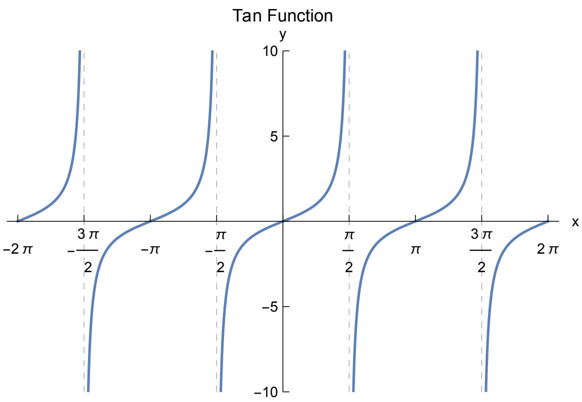
(b) 余弦函数图像

图 1.11:　正余弦函数图像

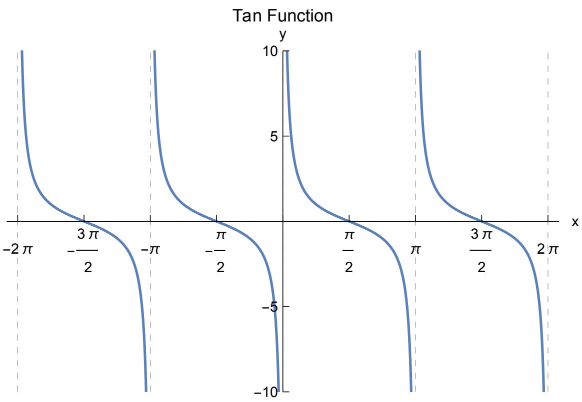
正切和余切函数

$$\boxed{y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$\boxed{y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}}$$



(a) 正切函数图像



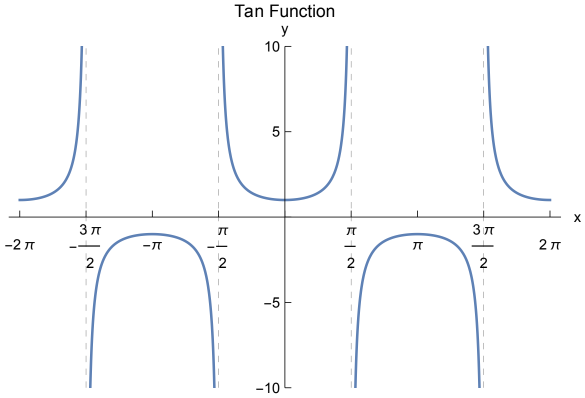
(b) 余切函数图像

图 1.12: 正余切函数图像

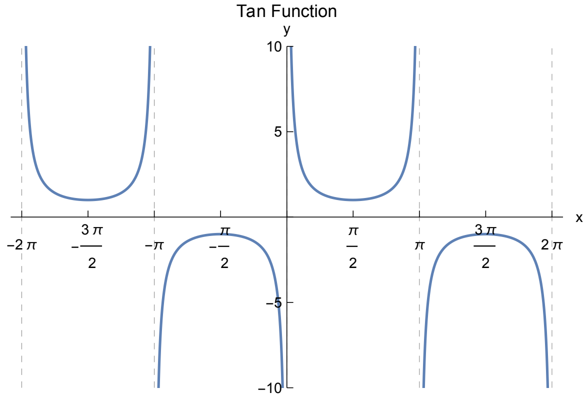
正割和余割函数

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$$

$$\boxed{\csc x = \frac{1}{\sin x}}$$



(a) 正割函数图像



(b) 余割函数图像

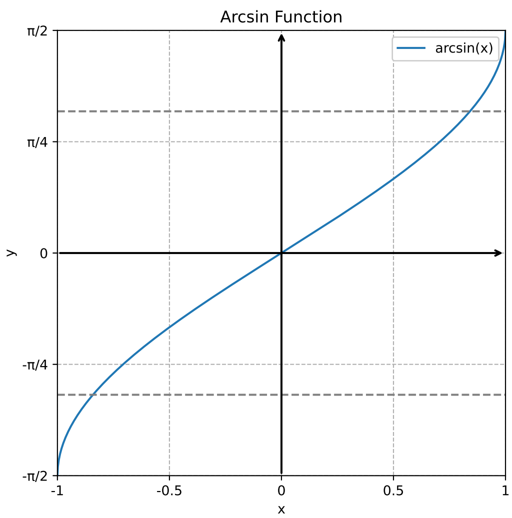
图 1.13: 正余割函数图像

反三角函数

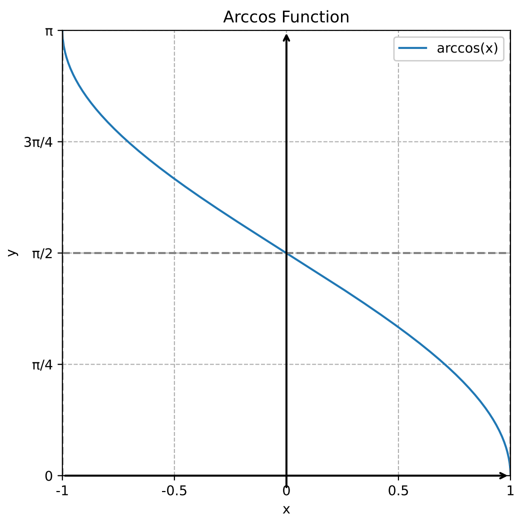
反正弦和反余弦函数

$$\boxed{y = \arcsin x}$$

$$\boxed{y = \arccos x}$$



(a) 反正弦函数图像



(b) 反余弦函数图像

图 1.14: 反正余弦函数图像

由于这两个函数分别是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的反函数, 因此可以知道的是,$\sin x$ 的值域是 $\arcsin x$ 的定义域. 因此可以得到下面的结论

注 1.3.4: 反正余弦函数相关性质

- 定义域 $[-1,1]$,$y=\arcsin x$ 值域 (主值区间)$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,$y=\arccos x$ 值域 (主值区间)$[0,\pi]$
- 性质:$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$(求导后可以发现导数为 0)

注 1.3.5: 反三角函数恒等式

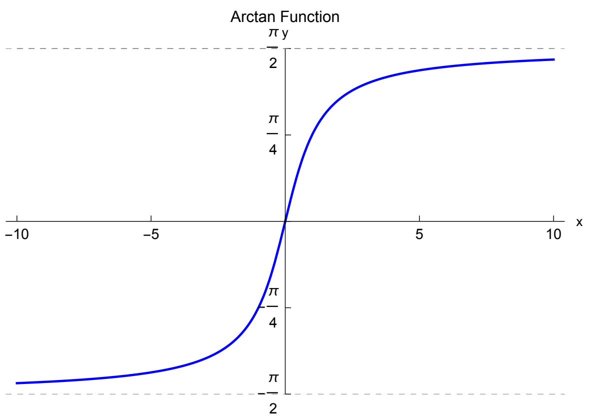
$$\sin(\arcsin x)=x, x\in[-1,1], \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1];$$
$$\cos(\arccos x)=x, x\in[-1,1], \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1];$$

上述两个式子可抽象为 $f^{-1}f(x)=x$. 需要注意的是其值需要在值域内.

$$\arcsin(\sin y)=y, y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\arccos(\cos y)=y, y\in[0,\pi]$$

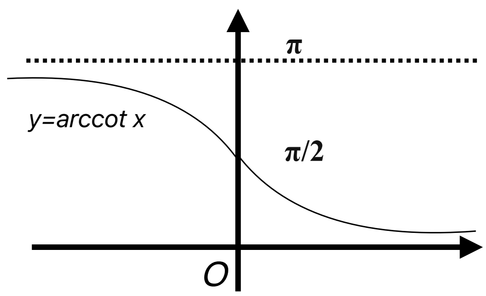
反正切和反余切函数

$\boxed{y=\arctan x}$



(a) 反正切函数图像

$\boxed{y=\operatorname{arccot} x}$



(b) 反余切函数图像

图 1.15: 反正余切函数图像

注 1.3.6: 反正余切函数相关性质

- 定义域 $[-\infty,+\infty]$,$y=\arctan x$ 值域 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,$y=\operatorname{arccot} x$ 值域 $(0,\pi)$
- 性质:$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$(求导后可以发现导数为 0)

1.3.6　图像绘制

极坐标下的图像

- 用描点法绘制函数图像: 就是把每一个点求出来, 然后连接起来即可, 但是需要点足够多
- 用直角坐标系观点画极坐标系的图像, 以函数 $r=2(1+\cos\theta)$ 为例.

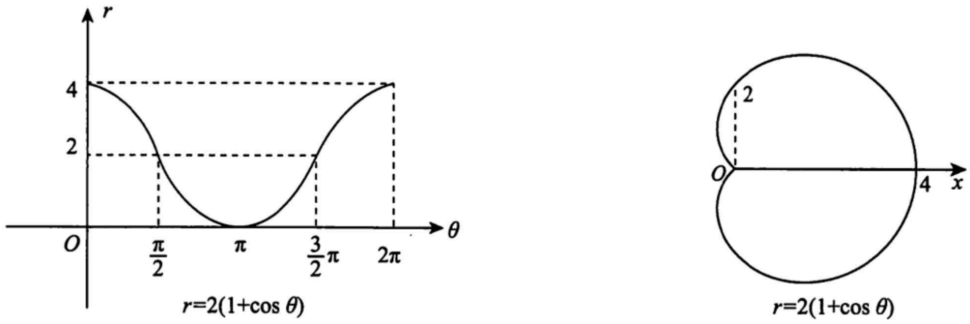


图 1.16: 函数 $r=2(1+\cos\theta)$ 图像

可以看到 $\theta-r$ 的坐标系的关键点为 $(0,4),(\frac{\pi}{2},2),(\pi,0),(\frac{3}{2}\pi,2),(2\pi,4)$ 这五个点, 那么在极坐标系下可以绘制出这些点, 比如在 $x=4$ 时,$\theta=0$,$x=2$ 时,$\theta=\frac{\pi}{2}$,$x=0$ 时,$\theta=\pi$.

参数方程

通过第三个变量即参数来表示别的两个变量.
摆线参数方程:

$$\begin{cases} x=r\,(t-\sin t) \\ y=r\,(1-\cos t)\,. \end{cases}$$

星型线参数方程:

$$\begin{cases} x=r\cos^3 t \\ y=r\sin^3 t \end{cases}$$

1.4　常用函数知识

1.4.1　数列

等差数列

首项为 a_1, 公差为 $d(d\neq 0)$ 的数列 $a_1,a_1+d,a_1+2d,\cdots,a_1+(n-1)d,\cdots$.

注 1.4.1: 等差数列相关性质

- 通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$
- 前 n 项的和 $S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

等比数列

首项为 a_1, 公比为 $r(r\neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1r, a_2r^2, \ldots, a_1r^{n-1}, \ldots$

注 1.4.2: 等比数列相关性质

- 通项公式 $a_n = a_1r^{n-1}$
- 前 n 项的和 $S_n = \begin{cases} na_1, & r=1, \\ \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & r\neq 1. \end{cases}$
- $1+r+r^2+\cdots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}(r\neq 1).$

常见数列前 n 项和

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

1.4.2　三角函数

三角函数基本关系

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

倍角公式

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a, \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1-2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3 a + 3\sin\alpha, \quad \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}, \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}.$$

半角公式

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha), & \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha),\\ \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, & \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\\ \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, & \\ \cot\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}. & \end{array}}$$

和差公式

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\\ \tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\ \cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.\end{array}}$$

积化和差公式

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)], & \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],\\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)], & \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].\end{array}}$$

和差化积公式

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, & \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, & \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\end{array}}$$

万能公式

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\\[2em] \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\end{array}}$$

1.4.3　指数运算法则

$$\boxed{a^a\times a^\beta=a^{a+\beta},\quad \frac{a^a}{a^\beta}=a^{a-\beta},\quad (a^a)^\beta=a^{a\beta},\quad (ab)^a=a^ab^a,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^a=\frac{a^a}{b^a}}$$

1.4.4 对数运算法则

$$\boxed{\begin{array}{l} log_a(MN) = \log_a M + \log_a N \\ \log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \\ \log_a M^n = n\log_a M. \\ \log_a \sqrt[n]{M} = \dfrac{1}{n}\log_a M. \end{array}}$$

1.4.5 一元二次方程基础

- 一元二次方程组:$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$
- 根的公式:$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- 根与系数的关系:$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}$.
- 判别式:$\Delta = b^2 - 4ac$
- 抛物线顶点坐标:$(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$

1.4.6 因式分解公式

$$\boxed{\begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \qquad (a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)(n \text{ 是正整数}) \\ n \text{ 是正奇数时}, a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k = \\ a^n + na^{n-1}b + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n \end{array}}$$

1.4.7 阶乘与双阶乘

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$,规定$0! = 1$.
- $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n \cdot n!$
- $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$

1.4.8 常用不等式

1. 设 a, b 为实数, 则 $|a+b| \leq |a| + |b|$;$| \ |a| - |b| \ | \leqslant |a-b|$

注 1.4.3

可以将第一个式子推广为:
离散情况: 设 $a_1, a_2, ..., a_n$ 为实数, 则 $|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$
连续情况: 设 $f(x)$ 在 $[a,b](a<b)$ 上可积, 则 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

2. $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a,b>0)$

注 1.4.4

还有一个不等式是 $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

3. $\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}(a,b,c>0)$
4. 设$a>b>0$, 则 $\begin{cases} \text{当}n>0\text{ 时}, a^n>b^n, \\ \text{当}n<0\text{ 时}, a^n<b^n. \end{cases}$
5. 若$0<a<x<b, 0<c<y<d$, 则$\frac{c}{b}<\frac{y}{x}<\frac{d}{a}$.

注 1.4.5

当$n\pi<x<(n+1)\pi, 2n<S(x)<2(n+1)$时, $\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}$.

6. $\sin x<x<\tan x\,(0<x<\frac{\pi}{2})$
7. $\sin x<x(x>0)$

注 1.4.6

当 $x_n>0$ 时,$x_{n+1}=\sin x_n<x_n$, 故 x_n 单调减少

8. $\arctan x \leqslant x \leqslant \arcsin x(0 \leqslant x \leqslant 1)$
9. $e^x \geqslant x+1(\forall x)$

注 1.4.7

当$x_{n+1}=\mathrm{e}^{x_n}-1$ 时, 由$\mathrm{e}^{x_n}-1 \geqslant x_n$,得$x_{n+1} \geqslant x_n$, 即$\{x_n\}$单调不减

10. $x-1 \geqslant \ln x(x>0)$

注 1.4.8

当$x_n>0$时, 若$x_{n+1}=\ln x_n+1$, 由$\ln x_n+1 \leqslant x_n$,得$x_{n+1} \leqslant x_n$, 即$\{x_n\}$单调不增

11. $\frac{1}{1+x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}(x>0)$

注 1.4.9

令 $f(x)=\ln x$, 并在区间 $[x,x+1]$ 上对其使用拉格朗日中值定理, 有

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}$$

其中 $0<x<\xi<x+1$, 因此对任意的 $x>0$, 有 $\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x}$

12. 在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如 $(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^{2^2}})\ldots(1+\frac{1}{2^{2^n}})$, 可化为 $(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^{2^2}})\ldots(1+\frac{1}{2^{2^n}})*\frac{4}{3}$

1.4.9 绝对值等式

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$
$$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$$