

# 第一章 极限

## 1.1 数列的极限

### 1.1.1 数列极限的定义

#### 定义 1.1.1: 数列极限的定义

设  $|x_n|$  为一数列, 若存在常数  $a$ , 对于任意的  $\varepsilon > 0$  (不论它多么小), 总存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时  $|x_n - a| < \varepsilon$  恒成立, 则称数  $a$  是数列  $|x_n|$  的极限, 或者称数列  $|x_n|$  收敛于  $a$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$$

该定义的  $\varepsilon - N$  语言描述是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \text{ 正整数 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

$\varepsilon - N$  几何意义: 对于点  $a$  的任何  $\varepsilon$  邻域即开区间  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  一定存在  $N$ , 当  $n > N$  即第  $N$  项以后的点  $x_n$  都落在开区间  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  内, 而只有有限个 (最多有  $N$  个) 在区间之外.

在上面的定义中,  $\varepsilon > 0$  的  $\varepsilon$  任意性是非常重要的, 只有这样才能表示出无限接近的意义. 总存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  这个条件用于表达  $n \rightarrow \infty$  的过程.

#### 注 1.1.1: 数列极限的性质

- 数列收敛<sup>a</sup>等价于数列极限存在
- 数列的极限值与数列的前有限列无关, 只与后面无穷项有关

- 数列的最值只能在前有限项中取得, 前有限项有比极限值大的, 则数列存在最大值. 前有限项有比极限值小的, 则数列存在最小值
- 若数列  $\{a_n\}$  收敛, 则其任何子列  $\{a_{n_k}\}$  也收敛, 且  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ <sup>b</sup>
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a$

<sup>a</sup>区别于级数收敛

<sup>b</sup>此条定理提供了一个判断数列发散的方法:1. 至少一个子数列发散.2. 两个子数列收敛, 但是收敛值不同.

### 结论 1.1.1: 数列极限常用结论

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$
- 关于数列  $(1 + \frac{1}{n})^n$  的结论
  - 单调增加
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

题目 1. 已知  $a_n = \sqrt[n]{n} - \frac{(-1)^n}{n} (n = 1, 2, \dots)$ , 则  $a_n$

- (A) 有最大值, 有最小值 (B) 有最大值, 没有最小值  
(C) 没有最大值, 有最小值 (D) 没有最大值, 没有最小值

解答.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 - 0, a_1 = 2, a_2 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ , 因此  $a_n$  既有最大值又有最小值

题目 2. 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$

证明. 已知数列  $a_n$  极限为  $A$ , 那么  $|a_n - A| < \varepsilon$ , 由不等式1可得,  $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$ . □

### 推论 1.1.1: 上题题目推论

1. 此命题反过来则错误, 如取  $a_n = (-1)^n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1$ . 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  不存在.

2. 在本题中若  $A = 0$ , 则  $||a_n| - |A|| = ||a_n| - 0| = |a_n - 0|$ , 即有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0,$$

此结论常用, 即若要证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 可转换为证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , 由于  $|a_n| \geq 0$ , 若使用了夹逼准则, 只需证明  $|a_n| \leq 0$  即可

3. 此结论对函数亦成立, 即若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$ .

**题目 3.** 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , 且  $a \neq 0$ , 则当  $n$  充分大时有

(A)  $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ . (B)  $|a_n| < \frac{|a|}{2}$ . (C)  $a_n > a - \frac{1}{n}$ . (D)  $a_n < a + \frac{1}{n}$ .

**解答.** 根据结论若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$ . 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ , 即  $|a_n| > |a| > \frac{|a|}{2}$ .

**题目 3 的注记.** 对于 C,D 选项, 只知道  $a_n$  的极限是  $a$ , 那么就是说两者之间的距离是无穷小, 但是题目中没有给出两者相距的量级, 因此一定错误的. 反例为  $a_n = a \pm \frac{1}{n^2}$ .

**题目 4.** 设数列  $x_n$  与  $y_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ , 则下列命题正确的是

- (A) 若  $x_n$  发散, 则  $y_n$  必发散 (B) 若  $x_n$  无界, 则  $y_n$  必有界  
(C) 若  $x_n$  有界, 则  $y_n$  必为无穷小 (D) 若  $\frac{1}{x_n}$  为无穷小, 则  $y_n$  必为无穷小

**解答.** A 选项: 令  $x_n = \begin{cases} 0, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ,  $y_n \equiv 0$ . 显然  $x_n$  发散, 但是  $y_n$  收敛.

B 选项: 令  $x_n = \begin{cases} 0, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ,  $y_n = \begin{cases} n, n \text{ 为偶数} \\ 0, n \text{ 为奇数} \end{cases}$ . 虽然二者都无界, 但是也满足题意.

C 选项: 令  $x_n \equiv 0, y_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ . 同理也满足题意, 但是  $y_n$  为无穷大

D 选项:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\frac{1}{x_n}} = 0 \Rightarrow y_n = o(\frac{1}{x_n})$

题目 4 的注记. 数列极限概念题一个很好的办法是举反例. 经典反例:(1) 分奇偶.(2) 恒为 0.

题目 5. 设  $x_n$  与  $y_n$  为两个数列, 则下列说法正确的是

- (A) 若  $x_n$  与  $y_n$  无界, 则  $x_n + y_n$  无界
- (B) 若  $x_n$  与  $y_n$  无界, 则  $x_n y_n$  无界
- (C) 若  $x_n$  与  $y_n$  中, 一个有界, 一个无界, 则  $x_n y_n$  无界
- (D) 若  $x_n$  与  $y_n$  均为无穷大, 则  $x_n y_n$  一定为无穷大

解答. A 选项: 令  $a_n = n, b_n = -n$ , 显然  $x_n, y_n$  无界, 但是  $x_n + y_n$  有界

B 选项: 令  $x_n = \begin{cases} 0, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}, y_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 显然  $x_n, y_n$  无界, 但是  $x_n y_n$  有界

C 选项: 令  $x_n = \begin{cases} 0, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}, y_n \equiv 0$ , 显然  $x_n$  一个有界, 一个无界, 但是二者相乘为有界

D 选项: 无穷大  $\times$  无穷大 = 无穷大

题目 6. 设  $x_n$  与  $y_n$  为两个数列, 则下列说法正确的是

- (A) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ , 则必有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$
- (B) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \infty$ , 则必有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$
- (C) 若  $x_n y_n$  有界, 则必有  $x_n$  与  $y_n$  都有界.
- (D) 若  $x_n y_n$  无界, 则必有  $x_n$  无界或  $y_n$  无界

解答. A 选项: 令  $x_n = \begin{cases} 0, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}, y_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 显然  $x_n \cdot y_n \equiv 0$ , 但是  $x_n y_n$  两者都无界.

B 选项: 令  $x_n = \begin{cases} 1, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}, y_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 1, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 显然二者相乘为  $\infty$ , 但是二者都是无界, 没有极限

C 选项: 同 A 选项

D 选项: 使用逆否命题: 若  $x_n$  有界且  $y_n$  有界, 则  $x_n \cdot y_n$  有界, 显然成立, 有界  $\times$  有界 = 有界

题目 6 的注记. 在证明中, 使用逆否命题可以减少复杂度, 如本题的 D 选项.

题目 7. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  与  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  均不存在, 则下列选项正确的是

- A. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$  不存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$  必不存在
- B. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$  不存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$  必存在
- C. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$  存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$  必不存在
- D. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$  存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$  必存在

解答. A 选项:  $a_n = e^n, b_n = e^n$ , 显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$  不存在, 但是  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$  存在

B 选项:  $a_n = e^n, b_n = 2e^n$ , 显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$  不存在, 但是  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$  也不存在

C 选项: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$  存在, 假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$  存在, 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} [(a_n + b_n) - (a_n - b_n)]$  也应该存在, 但是  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2b_n$ , 根据题意可知不存在, 因此假设错误

D 选项:  $a_n = e^n, b_n = -e^n$ , 显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$  存在, 但是  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$  不存在

### 1.1.2 收敛数列的性质

唯一性

**定义 1.1.2: 数列极限唯一性的定义**

如果数列  $\{x_n\}$  收敛, 那么它的极限唯一

有界性

**定义 1.1.3: 数列收敛的有界性的定义**

如果数列  $\{x_n\}$  收敛, 那么数列  $\{x_n\}$  一定有界<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>如果数列有界, 但是不一定存在极限, 如数列  $(-1)^n$

## 保号性

## 定义 1.1.4: 数列极限保号性的定义

如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 且  $a > b$  (或  $a < b$ ), 那么存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n > b$  (或  $x_n < b$ ).

如果数列  $|x_n|$  从某项起有  $x_n \geq b$  (或  $x_n \leq b$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 那么  $a \geq b$  ( $a \leq b$ )<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>其中  $b$  可以为任意实数, 常考  $b=0$  的情况

题目 8. 下列结论中错误的是

- (A) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 1$ , 则存在  $M > 1$ , 当  $n$  充分大时, 有  $a_n > M$
- (B) 设  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 则当  $n$  充分大时, 有  $a_n < b_n$
- (C) 设  $M \leq a_n \leq N (n = 1, 2, \dots)$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $M \leq a \leq N$
- (D) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$ , 则当  $n$  充分大时,  $a_n > a - \frac{1}{n}$

解答. A 选项: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 那么当  $n$  充分大时,  $a_n$  的值趋近于  $a$ , 那么肯定存在一个  $M$ , 满足  $a_n = a \geq M > 1$ .

B 选项: 若  $a_n$  的极限  $> b_n$  的极限, 则当  $n$  充分大时,  $a_n > b_n$ .

C 选项: 不等式左右取极限可得 C 选项正确

D 选项: 题目 3 解析 1.1.1 出有解释, 同理

题目 8 的注记. 数列极限的保号性可写为: 两个数列  $a_n$  和  $b_n$ , 若  $a_i > b_i$  恒成立, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  都存在. 则  $n$  趋于无穷时,  $a_n$  的极限  $\geq b_n$  的极限. (对不等式取极限时,  $>$  要变成  $\geq$ ,  $<$  要变成  $\leq$ ,  $\geq$  不用变,  $\leq$  不用变).

若  $a_n$  的极限  $> b_n$  的极限, 则当  $n$  充分大时,  $a_n > b_n$ .<sup>1</sup>

若  $a_n$  的极限  $\geq b_n$  的极限, 则当  $n$  充分大时,  $a_n$  和  $b_n$  大小无法确定.

<sup>1</sup>证明如下: 令  $x_n = b_n - a_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = b - a > 0$ . 由极限的保号性可知, 当  $n$  充分大的时候,  $x_n > 0$ , 即  $b_n > a_n$

## 1.2 函数的极限

### 1.2.1 超实数系

#### 定义 1.2.1: 超实数系的概念

超实数 (Hyperreal number) 是一个包含实数以及无穷大和无穷小的域, 它们的绝对值分别大于和小于任何正实数.

#### 注 1.2.1: 超实数集

- 超实数集是为了严格处理无穷量 (无穷大量和无穷小量) 而提出的.
- 超实数集, 或称为非标准实数集, 记为  ${}^*\mathbb{R}$ , 是实数集  $\mathbb{R}$  的一个扩张.

### 1.2.2 邻域

2

#### 定义 1.2.2: 邻域的相关概念

- $\delta$  邻域: 设  $x_0$  是数轴上一个点,  $\delta$  是某一正数, 则称  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  为点  $x_0$  的  $\delta$  邻域, 记作  $U(x_0, \delta)$ , 即:

$$U(x_0, \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x | |x - x_0| < \delta\}$$

- 去心  $\delta$  邻域: 定义点  $x_0$  的去心邻域  $\dot{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$
- 左, 右  $\delta$  邻域:  $\{x | 0 < x - x_0 < \delta\}$  称为点  $x_0$  的右  $\delta$  邻域, 记作  $U^+(x_0, \delta)$ ;  $\{x | 0 < x_0 - x < \delta\}$  称为点  $x_0$  的左  $\delta$  邻域, 记作  $U^-(x_0, \delta)$ .

### 1.2.3 函数极限的定义

函数极限的定义主要分为自变量趋于有限值 ( $x \rightarrow x_0$ ) 时的极限和自变量趋于无穷大时函数的极限 ( $x \rightarrow \infty$ )

<sup>2</sup>邻域与区间不同, 邻域属于区间的范畴. 但是邻域通常表示“一个局部位置”. 比如“点  $x_0$  的  $\delta$  邻域”, 可以理解为“点  $x_0$ ”的附近, 而区间是明确指出在实数系下的范围

## 自变量趋于有限值时的函数极限

## 定义 1.2.3: 当自变量趋于有限值时函数极限定义

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\varepsilon$  (不论它多么小)<sup>a</sup>, 总存在正数  $\delta$ , 使得当  $x$  满足不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数  $A$  就叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0)$$

其  $\varepsilon - N$  语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  在证明中, 这两句是白给, 直接写. 后面的才是关键.

<sup>a</sup> $\varepsilon$  用于衡量  $|f(x) - A|$  的值有多小

## 注 1.2.2: 函数极限注意事项

1. 在函数极限中  $x \rightarrow \infty$  指的是  $|x| \rightarrow \infty$ , 需要  $x$  趋于正无穷和负无穷, 但在数列中的  $n \rightarrow \infty$  是  $n \rightarrow +\infty$
2. 函数的极限值只与邻域内的函数值有关, 而与该点的函数值无关.

题目 9. 设  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$ , 则:

(A)  $f(1) = 0$  (B)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$  (C)  $f'(1) = 1$  (D)  $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$

解答.  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$ , 根据极限四则运算法则 1.4.1,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ , 对于其他选项, 需要知道的是函数的极限值与该点的函数值无关, 只与邻域内的函数值有关.



## 单侧极限

## 定义 1.2.4: 单侧极限的定义

若当  $x \rightarrow x_0^-$  时,  $f(x)$  无限接近于某常数  $A$ , 则常数  $A$  叫作函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^-) = A.$$

若当  $x \rightarrow x_0^+$  时,  $f(x)$  无限接近于某常数  $A$ , 则常数  $A$  叫作函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^+) = A$$

题目 10. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right]$  存在, 求  $a$  的值

解答. 由于存在  $\arctan$  与  $|x|$  函数, 则对于 0 点的极限值需要分左右进行计算.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \arctan \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = -\frac{\pi}{2}a + \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} a \arctan \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}a + e$$

若极限存在, 则  $a = \frac{1 - e^2}{\pi e}$

题目 10 的注记. 由于自变量趋向的双向性, 以下类型的函数因此需要进行特殊讨论:

- 形如  $f(x) = \max\{h(x), g(x)\}$  此类函数也需要注意在函数变化点的自变量取值问题
- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x: \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}: \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x: \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} [x]: \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$

## 自变量趋于无穷大时函数的极限

## 定义 1.2.5: 自变量趋于无穷大时函数极限定义

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\varepsilon$  (不论它多么小), 总存在正数  $\delta$ , 使得当  $x$  满足不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数  $A$  叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0)$$

其  $\varepsilon - N$  语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  在证明中, 这两句是白给, 直接写. 后面的才是关键.

需要注意的是趋向的值不同时,  $\varepsilon - N$  写法不同, 不能照抄. 其  $\varepsilon - N$  的表达为如下表格:

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 即有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow x_0^+$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x)  > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow x_0^-$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x)  > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow \infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x  > X$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x  > X$ 时, 即有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x  > X$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x  > X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$
$x \rightarrow +\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow -\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使 当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$

## 注 1.2.3: 上表的部分解释

- 以  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  为例: 不管  $f(x)$  与  $A$  的距离多近 ( $\forall \varepsilon > 0$ ), 总有  $x$  不断靠近  $x_0$ , 使得  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .
- 以  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  为例: 不管  $M$  多大, 总有当  $x > \infty$  时, 使得  $|f(x)| > M$ , 即满足  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

## 1.2.4 函数极限的性质

## 唯一性

## 定理 1.2.1

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 那么极限唯一

## 注 1.2.4: 关于唯一性的说明

- 对于  $x \rightarrow \infty$ , 意味着  $x \rightarrow +\infty$  且  $x \rightarrow -\infty$
- 对于  $x \rightarrow x_0$ , 意味着  $x \rightarrow x_0^+$  且  $x \rightarrow x_0^-$

对于上述问题, 我们称为自变量取值的“双向性”. 以下有一些常见的问题:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow x_0} [x]$  不存在.
- 其不存在的原因均为分段函数分段点极限表达式不同, 需要分别求左右极限.

## 注 1.2.5: 极限存在的充要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A^a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 (\text{无穷小量 } \alpha(x) = 0)^b$$

<sup>a</sup>左右极限都存在且相等

<sup>b</sup>对于此概念, 如果引入超实数系的解释应为  $A$  是  $f(x)$  的标准实数部分, 而  $f(x)$  的值是超实数系下的值, 因此其值应为  $f(x) = A + \alpha(x)$

## 注 1.2.6: 极限不存在的情况

- 函数在该点附近趋于无穷
- 函数在该点的左右极限只存在一个, 或两者都存在但不相等
- 函数在该点附近不停地震荡
- 该点是函数无定义点的聚点

## 局部有界性

## 定理 1.2.2

若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在<sup>a</sup>, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  某去心邻域内有界.

<sup>a</sup>对局部有界性的描述需要指明是在那个区间上

## 注 1.2.7: 局部有界性的性质

- 极限存在必有界, 有界函数极限不一定存在.
- 若  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上为连续函数, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必有界.
- 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内为连续函数, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  都存在, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内必定有界.
- 有界函数与有界函数的和, 差, 积仍为有界函数<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>商不是有界函数, 因为:  $y_1 = 1, y_2 = 0, \frac{y_1}{y_2} = \infty$

题目 11. 在下列区间内, 函数  $f(x) = \frac{x \sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$  有界的是:

A:  $(-2, 1)$     B:  $(-1, 0)$     C:  $(1, 2)$     D:  $(2, 3)$

解答. 又题意可知, 函数的分段点为  $x = 3, 0, 1$ , 对上述三点求极限, 分析可得, 当  $x = 3, 1$  时, 函数极限为  $\infty$ , 因此函数在上述两点的极限不存在, 因此根据局部有界性的性质可得, 含这两个点的区间无界, 因此排除 A, C, D. 答案为 B.

## 局部保号性

## 定理 1.2.3

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 且  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 那么存在常数  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时有  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ )<sup>a</sup>.

如果在  $x_0$  的某去心邻域内  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ ), 而且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 那么  $A \leq 0$  或  $(A \leq 0)^b$ .

<sup>a</sup>如果函数在  $x_0$  附近的极限值为正, 那么  $x_0$  附近的函数值为正

<sup>b</sup>如果函数在  $x_0$  附近的函数值  $\leq 0$ , 那么  $x_0$  此处的极限值  $\leq 0$

对上述定理中, 为什么一个可以等于 0, 一个不能等于 0? 其解释如下: 如果第一个定理中  $A \leq 0, f(x) \leq 0$ , 那么以函数  $f(x) = x^2$  为例, 虽然  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 但是邻域内的函数值都大于 0. 对于第二个定理中如果  $f(x) < 0, A < 0$ , 那么以函数  $f(x) = -x^2$  为例, 虽然邻域内的函数值都小于 0, 但是  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

## 注 1.2.8

由保号性可推出保序性: 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 则:

1. 若  $A > B \Rightarrow \exists \delta > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  时,  $f(x) > g(x)$ .
2. 若  $\exists \delta > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  时,  $f(x) \geq g(x) \Rightarrow A \geq B$ .

## 推论 1.2.1: 局部保号性的推论

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$  ( $A \neq 0$ ), 那么就存在  $x_0$  的某一去心邻域  $\dot{U}(x_0)$ , 当  $x \in U^\circ(x_0)$  时, 就有  $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

保号性推论的证明. 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ , 所以, 取  $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

□

## 1.2.5 函数极限与数列极限的关系 (海涅定理)

需要知道一点, 数列极限不可以直接使用洛必达法则, 但是可以使用拉格朗日中值定理, 泰勒公式, 等价无穷小. 如果想使用洛必达法则, 则需要使用海涅定理将数列极限改写为函数极限的形式. 即  $x$  改写成  $n$ , 考研数

学中默认  $n$  为非负整数, 所以  $n$  趋于无穷要改写成  $x$  趋于正无穷.

定理 1.2.4: 海涅定理

设  $f(x)$  在  $\mathring{U}(x_0, \delta)$  内有定义, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  存在  $\Leftrightarrow$  对任何  $\mathring{U}(x_0, \delta)$  内以  $x_0$  为极限的数列  $\{x_n\} (x_n \neq x_0)$ , 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  存在.

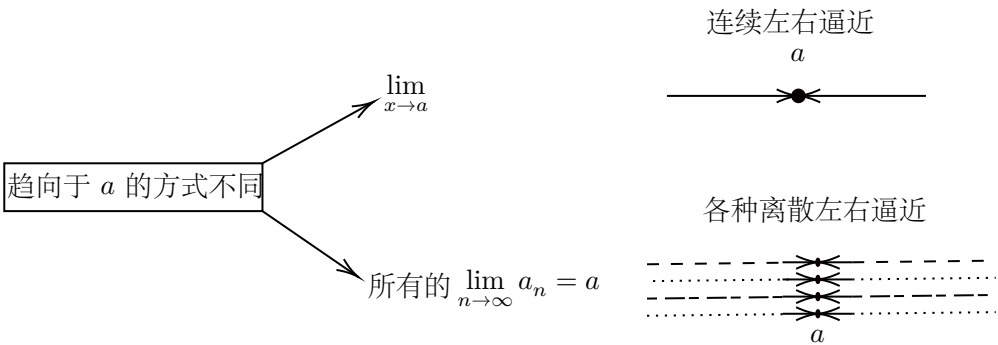
把这个定理简化一下, 主要意思就是

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

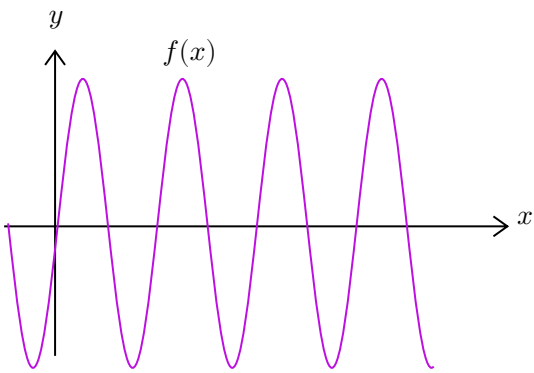
$\Updownarrow$

所有的  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$

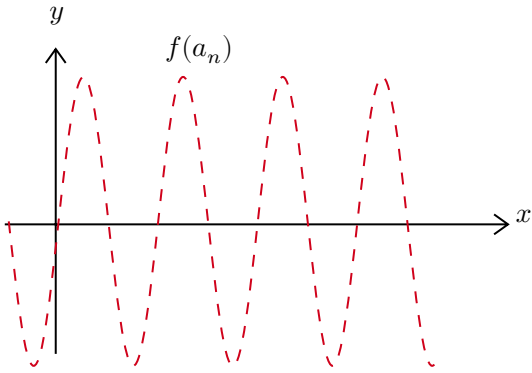
其不同之处在于是离散的趋近还是连续的趋近



除此之外,  $f(x)$  和  $f(a_n)$  的函数图像如下所示

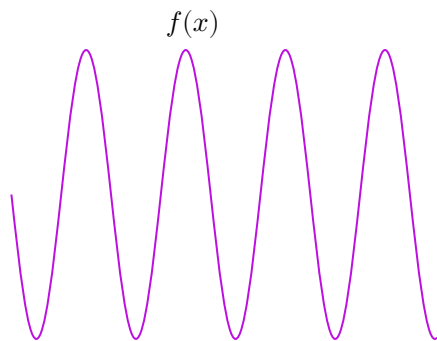


函数  $f(x)$

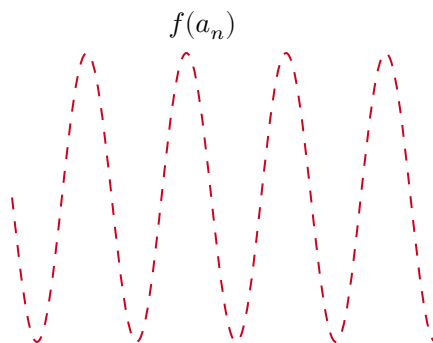


函数  $f(a_n)$

如上图所示  $f(a_n)$  其实是  $f(x)$  的抽样



用  $\varepsilon - \delta$  求它的极限



用海涅定理求它的极限

需要注意的是, 是所有的数列 (抽样) 才能完全代表整体. 不能说选了某个数列有极限就代表函数有极限. 总结: 海涅定理表述了离散与连续、数列极限与函数极限的关系.

题目 12. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}}$ .

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \cos \frac{1}{\sqrt{n}}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cos \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \left( \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \times \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \right]} = e^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

题目 12 的注记. 本题有一个易错点在于  $x \left( \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$  的极限求解时, 会认为括号内的极限为 0, 计算后的极限为 0, 导致错误



题目 13. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\arctan n - \frac{\pi}{2})$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan n - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -1 \end{aligned}$$

题目 13 的注记. 数列极限不可以直接使用洛必达法则, 若要使用洛必达法则, 则需要使用海涅定理进行替换.

题目 14. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{e} \right]^n$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}}{e} \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}}{e^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n} \end{aligned}$$

对  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n$  求极限得:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n - n^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

综上函数极限为  $e^{-\frac{1}{2}}$

题目 14 的注记. 数列极限可以直接使用等价无穷小和泰勒公式

题目 15. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right)$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}))} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot (\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}) - 1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot (\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}) - \tan \frac{\pi}{4})} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot \sec^2 \varepsilon \cdot \frac{2}{n}} \quad \varepsilon \in \left( \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) \\
 &= e^4
 \end{aligned}$$

题目 15 的注记. 数列极限可以使用拉格朗日中值定理

## 1.3 无穷小与无穷大

### 1.3.1 无穷小

#### 定义 1.3.1: 无穷小的定义

如果函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的极限为零, 那么称函数  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷小.

$f(x)$  是可以本身为 0 或者无限趋近于零, 其中 0 可以作为无穷小唯一常数.

#### 注 1.3.1: 无穷小与函数极限的关系 (脱帽法)

$\lim_{x \rightarrow \cdot} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ , 其中  $\lim_{x \rightarrow \cdot} f(x)$  为超实数值, 其实数部分为  $A$ , 函数  $f(x)$  的函数值为  $A + \alpha$

## 无穷小的性质

1 有限个无穷小的和是无穷小<sup>3</sup>

证明. 设  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  为无穷小量. 则  $0 \leq |\alpha_1 + \alpha_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2|$ ,  $|\alpha_1| + |\alpha_2|$  的极限为 0. 证明完毕.  $\square$

2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小<sup>4</sup>

证明.  $|\alpha_1| \leq M$ ,  $\alpha_2$  是无穷小量. 那么  $0 \leq |\alpha_1 \times \alpha_2| = |\alpha_1| \times |\alpha_2| \leq M \times |\alpha_2|$  证明完毕.  $\square$

3 有限个无穷小的乘积是无穷小<sup>5</sup>

## 无穷小的比阶

## 定义 1.3.2: 不同无穷小的比阶

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么就说  $\beta$  是比  $\alpha$  高阶的无穷小, 记作  $\beta = o(\alpha)$ ;
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么就说  $\beta$  是比  $\alpha$  低阶的无穷小;
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么就说  $\beta$  与  $\alpha$  是同阶无穷小;
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$ , 那么就说  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小<sup>a</sup>;
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么就说  $\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小, 记作  $\alpha \sim \beta$

<sup>a</sup>不是相等, 超实数系下没有加减运算, 只可以进行替换运算

前三个定义解释:  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$  是指分子趋于 0 的速度比分母快,  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$  是指分子趋于 0 的速度比分母慢,  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$  是指趋于 0 的速度一样. 同时需要注意的是, **并不是任意两个无穷小都可进行比阶的**<sup>6</sup>.

**对  $o(x)$  的理解:** 它是一个无穷小, 但是它趋向于 0 的速度比  $x$  要快, 也就是  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$ , 也就是精度更高. 举一个实际的例子:  $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ , 那么就应该知道  $\tan x - x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5 = o(x^5)$ , 也就是这玩意趋于 0 的速度非常之快! 速度相当于  $x^5$ , 这给我们的精度分析提供了一些帮助. 由此可以解释加

<sup>3</sup>无穷个无穷小的和不一定是无穷小, 如  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{n+n}) = \ln 2$

<sup>4</sup>无界函数  $\times$  无穷小量不一定是无穷小, 如  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \times \frac{1}{x} = 1$

<sup>5</sup>这个地方虽然张宇老师给出了证明, 但是好像存在一定的争议性

<sup>6</sup>例如, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x \sin \frac{1}{x}$  与  $x^2$  虽然都是无穷小, 但是却不可以比阶, 也就是说既无高低阶之分, 也无同阶可言, 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  不存在, 其值为  $\infty$  和 0

减法不推荐用等价无穷小, 例如  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3}$  等价无穷小本身就是一种近似替换, 直接把  $\tan x$  近似成  $x$  显然精度太低 (毕竟分母可是以  $x^3$  的速度趋于 0), 那么我们就需要更高精度的近似了, 也就是  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x}{x^3}$ , 这样我们就得到  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3}$ , 显然, 后者分子趋于 0 的速度大概是  $x^5$  级别比分母更快所以忽略不计.

### 结论 1.3.1: 无穷小比阶的结论

若  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内连续, 且当  $x \rightarrow 0$  时  $f(x)$  是  $x$  的  $m$  阶无穷小,  $\varphi(x)$  是  $x$  的  $n$  阶无穷小, 则当  $x \rightarrow 0$  时  $F(x) = \int_0^{\varphi(x)} f(t)dt$  是  $x$  的  $n(m+1)$  阶无穷小

**题目 16.** 把  $x \rightarrow 0^+$  时的无穷小  $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$ ,  $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$ ,  $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$  进行排序, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列顺序是

**解答.**  $\alpha: n = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^2 = 1$ , 因此  $m = 0$ , 那么  $n(m+1) = 1$ ;  $\beta: n = 2, m = \frac{1}{2}$ , 那么  $n(m+1) = 3$ ;  $\gamma: m = \frac{1}{2}x, n = 2$ , 那么  $n(m+1) = 2$ . 因此顺序为  $\alpha\gamma\beta$

**题目 17.** 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列无穷小中最高阶的是:

(A)  $(2 + \tan x)^x - 2^x$       (B)  $(\cos x^2)^{\frac{1}{x}} - 1$       (C)  $\int_0^{1-\cos x} e^x \sin t^2 dt$       (D)  $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt$

**解答.** A 选项:  $2^x[(1 + \frac{\tan x}{2})^x - 1] = \frac{\tan x}{2} \times x = \frac{1}{2}x^2$ .

B 选项:  $-\frac{x^4}{2x} = -\frac{x^3}{2}$ .

C 选项:  $n = \frac{1}{2}x^2, m = x^2$  那么  $n(m+1) = 6$ .

D 选项:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt \\ &= \int_{\sin x}^0 \ln(1+t^3) dt + \int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt \\ &= \int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt - \int_0^{\sin x} \ln(1+t^3) dt \end{aligned}$$

其中  $1 - \sqrt{\cos x} \sim \frac{1}{2}x^2$ , 那么  $\int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt$  那么  $n(m+1) = 8$ ;  $\int_0^{\sin x} \ln(1+t^3) dt$  那么  $n(m+1) =$

$8, \int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3)dt$  的阶数为 4. 综上 C 选项的阶数最高.

**题目 17 的注记.** D 选项: 如果为变上下限的形式, 则转化为变上限的形式, 然后使用结论进行计算, 之后按照无穷小的运算法则计算即可.

**题目 18.** 设  $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ . 当  $x \rightarrow 0$  时, 若  $p(x) - \tan x$  是比  $x^3$  高阶的无穷小, 则下列结论中错误的是:

(A)  $a = 0$       (B)  $b = 1$       (C)  $c = 0$       (D)  $d = \frac{1}{6}$

**解答.** 对  $\frac{p(x) - \tan x}{x^3}$  泰勒展开可得:  $\frac{p(x) - (x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5)}{x^3} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 - x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5}{x^3}$

综上易知:  $a = 0, b = 1, c = 0, d = \frac{1}{3}$ . 因此, D 选项是错误的.

**题目 19.** 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 下列无穷小量中最高阶的是

(A)  $\int_0^{x^2} \ln(1 + \sqrt{t})dt$       (B)  $\int_{x^3}^{x^2} \sqrt{1 - \sqrt{\cos t}} dt$       (C)  $\int_x^{2\sin x} \sin t^2 dt$       (D)  $\int_x^{\sin x} (e^{t^2} - 1)dt$

**解答.** A:  $\ln(1 + \sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$ , 其  $n(m+1) = 3$ .

B:  $\sqrt{1 - \sqrt{\cos t}} = \frac{1}{2}x$ , 其  $n(m+1)$  的最小值为 4.

C: 使用积分中值定理可得:  $\sin^2 \varepsilon \times (2\sin x - x), \varepsilon \in (2\sin x, x)$ , 使用等价无穷小可得:  $2\sin x - x \sim x, \sin^2 \varepsilon \sim \varepsilon^2 \sim x^2$ , 那么其最终化为  $x^3$ .

D 选项:  $(\sin x - x)(e^{\varepsilon^2} - 1), \varepsilon \in (\sin x, x)$ . 使用等价无穷小可得:  $(-\frac{1}{6}x^5 \times \varepsilon) \sim x^6$ . 最终选择 D 选项.

**题目 19 的注记.** 如果上下限同阶的情况, 如本题的 C, D 选项, 则不可进行拆分, 需要使用积分中值定理 1.4.7 进行计算.

## 无穷小的运算

<sup>7</sup> 设  $m, n$  为无穷小, 则

1.  $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min\{m, n\}$

2.  $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}), x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

3.  $o(x^m) = o(kx^m) = k \cdot o(x^m), k \neq 0$

<sup>7</sup> 此处多用于泰勒公式的应用中, 会对上述高阶无穷小的运算提出要求

**题目 20.** 若当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x), \beta(x)$  是非零无穷小量, 则以下的命题中正确的是:

- A. 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则  $\alpha^2(x) - \beta^2(x)$ ; B. 若  $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$ , 则  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ;  
C. 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则  $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$ ; D. 若  $\alpha(x) \sim \beta(x) = o(\alpha(x))$ , 则  $\alpha(x) - \beta(x)$

**解答.**

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \text{ 那么 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right]^2 = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)^2}{\beta(x)^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \pm 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 1$$

**题目 20 的注记.** 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$

**题目 21.** 设对任意的  $x$  总有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

- (A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定为零. (C) 一定不存在. (D) 不一定存在

**解答.** 令  $\varphi(x) = f(x) = g(x) = \begin{cases} x \\ 1 \\ 0 \end{cases}$ , 易知 D 选项正确

**题目 21 的注记.** 遇见  $\leq, \geq$  的形式, 可以一律取  $=$

### 1.3.2 无穷大

#### 定义 1.3.3: 无穷大的定义

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某一去心邻域内有定义 (或  $|x|$  大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数  $M$  (不论它多么大), 总存在正数  $\delta$  (或数  $X$ ), 只要  $x$  适合不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  (或  $|x| > X$ ), 对应的函数值  $f(x)$  总满足不等式

$$|f(x)| > M$$

那么称函数  $f(x)$  是当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty^a$ ) 时的无穷大.<sup>b</sup> 其  $\varepsilon - N$  语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x)| > M.$$

<sup>a</sup>等价于  $x \rightarrow -\infty$  同时  $x \rightarrow +\infty$

<sup>b</sup>无穷大一定无界, 但无界不一定是无穷大量. 与无穷小相同, 都是一个极限过程, 因此无穷大也是一个极限, 所以无界不一定是无穷大量

### 无穷大的比阶

- 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\ln^a x \ll x^\beta \ll a^x$ , 其中  $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$ .<sup>8</sup>
- 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\ln^a n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$ , 其中  $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$ .

### 无穷大的性质

- 两个无穷大量的积仍未无穷大量
- 无穷大量与有界变量的和仍是无穷大量

### 无穷大与无界变量的关系

无穷大量一定是无界变量, 但无界变量不一定是无穷大量.<sup>9</sup>

#### 1.3.3 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中, 若  $f(x)$  是无穷大, 则  $\frac{1}{f(x)}$  是无穷小; 若  $f(x)$  是无穷小, 且  $f(x) \neq 0$ , 则  $\frac{1}{f(x)}$  是无穷大.

#### 无穷小 $\times \infty$ 的值

无穷小  $\times \infty$  的值是一个不定式. 因为低阶无穷小乘以高阶无穷大等于无穷大, 高阶无穷小乘以低阶无穷大等于 0, 同阶无穷小和无穷大相乘等于 1. 比如:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = 0$$

<sup>8</sup>由洛必达公式证明

<sup>9</sup>如数列  $x_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 是无界变量, 但不是无穷大. 无穷大是一个极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x^2} = \infty$$

## 1.4 函数极限的运算

### 1.4.1 极限的四则运算法则

#### 利用极限的四则运算法则求极限

<sup>10</sup> 如果极限不存在, 那么极限属于超实数系的范畴, 在超实数系下不可以进行代数运算, 只可以进行替换运算. 但是如果极限均存在, 那么可以进行代数计算. 那么就可以使用下面的运算法则:

若  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , 那么

- $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k \lim f(x) \pm l \lim g(x) = kA \pm lB$ , 其中  $k, l$  为常数
- $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) \equiv A \cdot B$ , 特别的, 若  $\lim f(x)$  存在,  $n$  为正整数, 则  $\lim[f(x)]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

#### 注 1.4.1: 常用结论

存在 $\pm$ 不存在 = 不存在 <sup>a</sup>	不存在 $\pm$ 不存在 = 不一定 <sup>b</sup>
存在 $\times(\div)$ 不存在 = 不一定	不存在 $\times(\div)$ 不存在 = 不一定

<sup>a</sup> 只有这一个是不存在, 其余都是不一定或者存在

<sup>b</sup> 反例:  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}) = 0$

#### 题目 22.

1. 证明:  $\lim f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x) = A \lim g(x)$
2. 证明:  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$  存在,  $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$

<sup>10</sup> 易错, 在计算中往往容易忽视极限不存在的情况



3. 证明: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$ , 能否推出  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B$ , 若不能, 则满足什么条件可以推出该结论?

证明. 1.  $\lim f(x) = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim g(x) = A \cdot 0 = 0$ .

2. 由于  $g(x) = \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$ , 则  $\lim g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\lim f(x)}{\lim \frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{0}{A} = 0$

3. 无法推出, 有如下反例

$$\bullet \quad g(x) = x \sin \frac{1}{x}, f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \text{ 但是当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } g(x) =$$

$x \sin \frac{1}{x}$  不仅趋于 0, 同时还能在  $\frac{1}{n\pi}$  这样的点处严格等于 0. 此时  $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 1$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$  不存在, 其极限值在  $(0, 1)$  之间反复横跳.

$$\bullet \quad g(x) \equiv 0, f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0. \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 1$$

因此结论不成立. 若要成立, 则应改为:

- 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$ , 且  $g(x) \neq A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B$
- 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$ , 即  $f(x)$  在  $x = A$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B$

□

#### 结论 1.4.1: 上题的三个结论

- $\lim f(x) = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim g(x) = A \cdot 0 = 0$ .
- 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$ , 且  $g(x) \neq A^a$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B$
- 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$ , 即  $f(x)$  在  $x = A$  处连续<sup>b</sup>, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B$

<sup>a</sup>从根本上排除了常值函数和振荡间断点的反例

<sup>b</sup>不管内函数能否取到极限值, 只要外函数连续, 复合之后极限一定存在

**题目 23.** 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}$ . 极限

**解答.** 由于该极限的分子  $e^x$  的极限为无穷大, 无穷大属于极限中的不存在情况, 因此不可以使用极限的四则运算法则1.4.1, 也不可以对分母使用两个重要无穷小进行化简. 只能使用等价变换进行求解. 即

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} \\ &\stackrel{\text{泰勒展开}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - x + \frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

**题目 24.** 已知  $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{f'(x)}$

**解答.** 如果想把分子写  $x \rightarrow 0$  时的导数形式, 然后进行计算, 即  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{f'(0)} = \frac{f'(0)}{f'(0)} = 1$  进行运算, 则不满足极限四则运算法则1.4.1, 因为其分母为 0, 违背了极限的四则运算法则, 因此不可这样计算, 需要对其进行恒等变形计算. 即

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{f'(x) - f'(0)}{x}} \\ &= \frac{1}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x^2} \\ &\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \frac{1}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \quad (\text{易错: 此处的处理不可再次使用洛必达, 因为二阶导在此不连续}) \\ &= \frac{1}{f''(0)} \frac{1}{2} f''(0) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**题目 24 的注记.** **使用极限运算法则的注意事项:** 在求分式这种形式的极限时, 一定要注意分子的极限是不是无穷, 如果极限为无穷则不可以使用极限运算法则对极限进行拆分计算, 同时还要注意分母的极限是不是 0,

如果是 0, 则也不可以使用极限运算法则计算, 只能进行等价替换进行运算.

**题目 25.** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x)$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) \\ &= \frac{(\tan x + x)(\tan x - x)}{x^2 \times \tan^2 x} \\ &= \frac{2x \times \frac{1}{3}x^3}{x^4} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

**题目 25 的注记.** 本题的有另一个解法, 但是相较上面的解法相比有些复杂, 但是记录一个常见的错误, 即什么时候可以用等价无穷小的问题, 其写法为:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) = \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4} \right) \end{aligned}$$

此处有一个常见的错误, 就是能不能把  $\cos^2 x$  代换为 1, 其实是不能的, 即使最后答案正确, 此时  $x \rightarrow 0$  时, 分母也趋于 0, 如果进行替换, 则违背了极限的运算法则, 因此不能进行替换

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cos x)(\sin x + x \cos x)}{x^4} \xrightarrow{\text{泰勒公式}} \frac{2}{3}$$

### 1.4.2 泰勒公式

泰勒公式的目的是提高精确度, 用更高次的多项式来逼近函数

带拉格朗日余项的  $n$  阶泰勒展开式

如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某个邻域  $U(x_0)$  内具有  $(n+1)$  阶导数, 那么对任一  $x \in U(x_0)$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

带佩亚诺余项的  $n$  阶泰勒展开式

如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  处具有  $n$  阶导数, 那么存在  $x_0$  的一个邻域, 对于该邻域内的任一  $x$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

## 带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

对带有佩亚诺余项的泰勒公式取  $x_0 = 0$ , 则可以得到带有佩亚诺余项的麦克劳林公式<sup>11</sup>

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

当  $x \rightarrow 0$  时, 由带有佩亚诺余项的麦克劳林公式可得, 有以下结论

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots$ <sup>1</sup>	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

<sup>11</sup> 此处有一个易被忽略的地方, 只有函数在  $x_0$  处,  $n$  阶导数存在, 才可以展开到  $n$  阶

<sup>1</sup> 该函数为反双曲正弦函数

## 注 1.4.2: 泰勒公式应用时的展开原则

- $\frac{A}{B}$  型, 适用于”上下同阶”原则: 具体来说, 如果分母或者分子是  $x$  的  $k$  次幂, 则应把分子或分母展开到  $x$  的  $k$  次幂. 如:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ , 此处  $\ln(1+x)$  应展开为  $x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $A - B$  型, 适用”幂次最低”原则: 将  $A, B$  分别展开到他们系数不相等的  $x$  的最低次幂为止. 如: 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}$  与  $ax^b$  为等价无穷小, 求  $a, b$ . 则应展开为  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ ,  $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ .

## 注 1.4.3: 泰勒公式的解题技巧

1. 泰勒公式构建了函数与其高阶导之间的联系, 因此看见高阶导数, 要条件反射的想到泰勒公式
2. 奇函数的泰勒展式只有奇数次幂, 偶函数的泰勒展式只有偶数次幂<sup>a</sup>
3. 极限当中, 用佩亚诺余项  $O(x$  的  $n$  次幂), 证明题中, 用拉格朗日余项, 找提供信息最多的点作为展开点
4. 等价无穷小的本质是泰勒的低精度形式, 加减法不建议使用等价无穷小, 建议直接泰勒
5. 加项减项的本质也是泰勒<sup>b</sup>

<sup>a</sup>如  $\sin x$  和  $\cos x$

<sup>b</sup>如  $\ln(x) = \ln(1+x-1) \sim x-1$

题目 26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^2 \sin x}$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)] [x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)] - x(1+x)}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2})x^3 + o(x^3)}{x^3} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

题目 26 的注记. 有的题可能泰勒公式之后多几个高阶的, 但是还是应该遵循泰勒公式展开原则1.4.2

题目 27.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2}$

解答. 对等式进行泰勒展开即:

$$\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2} = \frac{(x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2-x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

题目 28.  $f(x)$  在  $x=0$  处二阶可导且满足  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x + \ln(1+x)}{x^3} = 0$ , 求  $f(0), f'(0), f''(0)$

解答. 对原式中  $f(x)$  和  $\sin x$  和  $\ln(1+x)$  各项进行泰勒展开得:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x + \ln(1+x)}{x^3} &= 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2)(x - \frac{1}{6}x^3) - (x - \frac{1}{6}x^3) + (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})}{x^3} = 0 \\ &= \frac{(f(0)+1)x + (f''(0) - \frac{1}{2})x^2 + (-\frac{1}{6}f(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{1}{3})x^3 + o(x^3)}{x^3} = 0. \end{aligned}$$

可以得到的是, 分子的极限一定为 0, 那么

$$\begin{cases} f(0)+1=0 \\ f'(0)-\frac{1}{2}=0 \\ -\frac{1}{6}f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{1}{3}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=-1 \\ f'(0)=\frac{1}{2} \\ f''(0)=-1 \end{cases}$$

题目 28 的注记. 看见各阶导数应想到泰勒公式

题目 29. 已知函数  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x}) = 2$ , 试求  $f(0), f'(0)$

解答. 对原式进行通分然后对  $\sin x$  进行泰勒展开:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + xf(x)}{x^2} &= 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + xf(x) + o(x^2)}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

根据函数极限与无穷小的关系1.3.1可知,  $1 + f(x) = 2x + o(x)$ ,  $f(x) = 2x - 1 + o(x)$  因为函数在  $x = 0$  上连续, 因此  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $f(x) = 2x - 1 + o(x)$  的表达式是  $x \rightarrow 0$  时的表达式, 将  $x = 0$  带入可得  $f(0) = -1$ , 使用导数定义求得  $f(x)$  在点 0 处的导数, 即  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2x + o(x)}{x} = 2$

**题目 29 的注记.** 看见此类问题, 第一步应先通分, 然后将具体函数的泰勒进行展开 (因为此题中的条件是连续而不是可导, 如果是可导的话可以全部进行展开), 然后把  $f(x)$  的表达式给求出来

**题目 30.** 设函数  $f(x) = \sec x$  在  $x = 0$  处的 2 次泰勒多项式为  $1 + ax + bx^2$ , 则

$$(A)a = 1, b = \frac{1}{2} \quad (B)a = 1, b = \frac{1}{2} \quad (C)a = 0, b = -\frac{1}{2} \quad (D)a = 0, b = \frac{1}{2}$$

**解答.**  $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ , 该函数为偶函数, 因此泰勒展开只有偶数次幂, 那么  $a = 0$ , 该函数一定大于 0, 因此  $b \geq 0$ , 排除 C, A, B.

**题目 30 的注记.** 本题也可以将  $\sec x$  展开, 但是较为麻烦, 可以采用上述的方法进行运算.

**题目 31.** 设函数  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + x^2}$  在  $x = 0$  处的 3 次泰勒多项式为  $ax + bx^2 + cx^3$ , 则

$$(A)a = 1, b = 0, c = -\frac{7}{6} \quad (B)a = 1, b = 0, c = \frac{7}{6} \\ (C)a = -1, b = -1, c = -\frac{7}{6} \quad (D)a = -1, b = -1, c = \frac{7}{6}$$

**解答.** 法 1: 对分子进行泰勒展开, 然后使用整式除法

$$1 + x^2 \begin{array}{r} x - \frac{7}{6}x^3 \\ \hline x - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \\ \hline x + x^3 \\ \hline -\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \\ \hline -\frac{7}{6}x^3 - \frac{7}{6}x^5 \end{array}$$

法 2: 对整式进行泰勒展开与等价无穷小替换  $f(x) = (x - \frac{x^3}{6})(1 - x^2) = x - \frac{7}{6}x^3$

法 3: 对整式进行泰勒展开计算可得  $x - \frac{7}{6}x^3$

**题目 31 的注记.** 遇见此类问题, 解题方法的优先级为长除法, 利用等价替换, 使用定义 (利用泰勒公式直接所有项都展开)

## 1.4.3 洛必达法则

## 定义 1.4.1: 洛必达法则定义

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0(\infty)$
- $f(x)$  和  $g(x)$  在  $x_0$  的某去心邻域内可导, 且  $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在 (或  $\infty$ )

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

需要注意的是使用过洛必达法则之后的极限必须存在, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  必须存在.

题目 32. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \times \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

解答. 该函数也是  $\frac{0}{0}$  型, 但是如果使用洛必达法则, 则  $2x \times \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ , 极限显然不存在, 因此不可以使用

洛必达法则. 则正确求法为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \times \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \times \sin \frac{1}{x} = 0$ .

## 结论 1.4.2: 洛必达可以洛到几阶

- $n$  阶导连续, 则最多可以洛到  $n$  阶.
- $n$  阶导存在/ $n$  阶邻域内可导, 则最多能洛到  $n-1$  阶.
- 实际上,  $n$  阶等连续, 不一定能够洛到  $n$  阶<sup>a</sup>. 结论如下:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$  到底能用多少次洛必达法则假设  $m$  和  $n$  均为正整数, 并且  $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ .

1. 如果  $f(x)$  在  $x_0$  的  $n$  阶导数连续, 则:

(a) 若  $m \leq n$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$  可以用  $m$  次洛必达  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$

(b) 若  $m > n$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$  则一次都不能用洛必达.

2. 如果  $f(x)$  在  $x_0$  有  $n$  阶导数 (没说  $n$  阶导函数连续), 则:



- (a) 若  $m \leq n-1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$  可以用  $m$  次洛必达  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$
- (b) 若  $m = n$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x^m}$  可以用  $m-1$  次洛必达出现  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m-1)}(x)}{m!(x-x_0)}$ , 然后利用导数定义  $f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$  进一步计算
- (c) 若  $m \geq n+1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$  一次都不能用洛必达

<sup>a</sup>但是考研中这点没有难为过人, 因此可以粗略的认为上述两条是成立的

**题目 33.** 设  $f(x)$  有二阶连续导数, 并且  $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=0$ , 并且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1$ , 问  $\frac{f(x)}{x^3}$  是否可以洛必达法则? 如果可以请求出  $f'''(0)$ ; 如果不存在, 请说明理由.

**解答.** 看到此题的二阶导数连续, 一般都认为可以进行洛必达, 但是其实该方程式一次洛必达都不可以进行, 假设函数  $f(x)$  表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{28}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^3, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

那么

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{28}{9} x^{\frac{19}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3} x^{\frac{16}{9}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

二阶导为

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{532}{82} x^{\frac{10}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{44}{27} x^{\frac{7}{9}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{9} x^{\frac{4}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 6x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

可知函数  $f'(0) = 0$ , 且  $f''(0) = 0$ , 该函数完全满足题意, 但是对  $\frac{f(x)}{x^3}$  使用第一次洛必达时, 为

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{28}{9} x^{\frac{19}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3} x^{\frac{16}{9}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3x^2}{3x^2}$$

洛必达之后的极限显然不存在, 因此该情况下不可以使用洛必达法则.

**题目 33 的注记.** 本题需要注意, 不是所有的条件下都可以进行洛必达法则, 由此可以抽象出来一个样例:

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{\sqrt[n]{x}} + x^c, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

**题目 34.** 已知函数  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x}) = 2$ , 试求  $f(0), f'(0)$  以及  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) + e^x}$

**解答.** 本题中未说明  $f(x)$  在邻域内连续可导, 只说明一阶导存在, 因此一阶都不可以进行洛必达法则, 但是可以使用泰勒公式对上述式子进行泰勒展开, 因此上述式子的解法为对原式进行通分然后对  $\sin x$  进行泰勒展开:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x f(x)}{x^2} &= 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x f(x) + o(x^2)}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

根据函数极限与无穷小的关系1.3.1可知,  $1 + f(x) = 2x + o(x), f(x) = 2x - 1 + o(x)$  因为函数在  $x = 0$  上连续, 因此  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(x) = 2x - 1 + o(x)$  的表达式是  $x \rightarrow 0$  时的表达式, 将  $x = 0$  带入可得  $f(0) = -1$ , 使用导数定义求得  $f(x)$  在点 0 处的导数, 即  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2x + o(x)}{x} = 2$ , 然后带入极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) + e^x} = \frac{x}{-1 + 2x + e^x} = \frac{1}{3}$

**题目 34 的注记.** 看见此类问题, 第一步应先通分, 然后将具体函数的泰勒进行展开 (因为此题中的条件是连续而不是可导, 如果是可导的话可以全部进行展开), 然后把  $f(x)$  的表达式给求出来

**题目 35.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} - e^{\pi})$

**解答.** (1) 拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times e^{(\varepsilon)} (\arctan x - \frac{\pi}{2}) \\ &= e^{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &= -e^\pi
 \end{aligned}$$

(2) 提后项:

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^\pi (e^{\arctan \frac{\pi}{2}} - 1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^\pi \times \arctan \frac{-\pi x}{2} \\
 &= -e^\pi
 \end{aligned}$$

(3) 直接洛:

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\pi + \arctan x}{2}} - e^\pi}{\frac{1}{x}} \\
 &= \frac{e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} \times \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &= -e^\pi
 \end{aligned}$$

**题目 35 的注记.** 该形式为无穷大乘以无穷小, 可以构造无穷大比无穷大, 或无穷小比无穷小, 之后进行洛必达. 方法多了, 往往会忽视洛必达, 但有时洛必达反而会简单一些.

**题目 36.** 设  $y = f(x)$  是方程  $y'' + 2y' + y = e^{3x}$  的解, 且满足  $y(0) = y'(0) = 0$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时, 与  $y(x)$  为等价无穷小的是 ()

(A).  $\sin x^2$       (B).  $\sin x$       (C).  $\ln(1+x^2)$       (D).  $\ln \sqrt{1+x^2}$

**解答.** 等价无穷小具有传递性, 因此  $\sin x^2 \sim x^2, \sin x \sim x, \ln(1+x^2) \sim x^2, \ln(\sqrt{1+x^2}) \sim \frac{1}{2}x^2$ . 若与  $y(x)$  为等价无穷小, 那么  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{f(x)} = 1$ . 对  $y(x)$  进行泰勒展开  $y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2$ . 当  $x = 0$  时, 有  $y''(0) = 1$ , 易知一阶导是连续的, 对函数形式进行分析, 可知函数在二阶导也是连续的, 那么就可以展开到二阶, 那么  $y(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

除此之外, 还可以这样解决, 已知二阶导连续, 那么对  $\frac{y(x)}{A/B/C/D}$  进行洛必达可知 D 选项正确.

#### 1.4.4 等价替代求极限

##### 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + |\square|)^{\frac{1}{\square}} = e^{|\square|^{\frac{1}{\square}}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

##### 等价无穷小

等价无穷小的本质是泰勒的低精度形式

关于等价无穷小, 有以下两个定理

##### 定义 1.4.2: 等价无穷小的充要条件

$\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta = \alpha + o(\alpha)$$

##### 定义 1.4.3: 等价无穷小的替换准则

设  $\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$ , 且  $\lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$  存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

等价无穷小的本质还是在做恒等替换, 所以一般情况下整式的乘除法可以直接用等价无穷小替换, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 但是需要遵循以下代换原则<sup>a</sup>

- 乘除关系可以换: 若  $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ , 则  $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$
- 加减关系一定条件下可以换<sup>b</sup>
  - 若  $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ , 且  $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$ , 则  $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$
  - 若  $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ , 且  $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$ , 则  $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$

加减关系代换准则证明如下:

证明.

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha_1 - \beta_1} = \lim \frac{\beta(\frac{\alpha}{\beta} - 1)}{\beta_1(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - 1)} = 1$$

□

<sup>a</sup>其实没有什么替换原则, 本质其实是因为超实数系下不能进行实数运算, 只能进行替换运算

<sup>b</sup>这样的形式其实不经常用, 看见加减最好使用泰勒公式进行替换运算

以下为常用等价无穷小

当  $x \rightarrow 0$  时, 有

1.

$$\begin{aligned} x &\sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \\ &\sim \ln(1+x) \\ &\sim e^x - 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (1+x)^a &\sim 1+ax \\ a^x - 1 &\sim x \ln a \\ 1 - \cos^\alpha x &\sim \frac{\alpha}{2}x^2 \end{aligned}$$

证明.  $1 - \cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2}x^2$

该等价替换主要由洛必达法则证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^\alpha}{\frac{1}{2}ax^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a(\cos x)^{a-1}(-\sin x)}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{a-1} = 1.$$

□

3. 上述结论的推广:

当  $x \rightarrow 0$  时, 若

$$(1+x)^a - 1 \sim ax,$$

则

$$\alpha(x) \rightarrow 0, \alpha(x)\beta(x) \rightarrow 0,$$

那么

$$[1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$$

4.

$$\frac{1}{2}x^2 \sim \sec x - 1 \sim x - \ln(1+x)$$

5.

$$\frac{1}{6}x^3 \sim x - \sin x \sim \arcsin x - x$$

6.

$$\frac{1}{3}x^3 \sim x - \arctan x \sim \tan x - x$$

7.  $x \rightarrow 1$  时,  $\ln x \sim x - 1$ , 因为  $\ln(1+x-1) \sim x-1$

8. 当  $A \rightarrow 0, B \rightarrow 0$  时,  $e^A - e^B \sim A - B$ , 因为  $e^B(e^{A-B} - 1) \sim A - B$

**题目 37.** 假设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x}$  存在

**解答.** 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x}$  存在, 那么构造恒等变形:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} \times \frac{\frac{1}{2}x^2}{1 - \cos x} \right) \\ &\stackrel{\text{等价无穷小}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

**题目 37 的注记.** 整体的乘除法本质是构造恒等变形

等价无穷小替换的本质是构造恒等变形. 需要谨记: 在使用等价无穷小时, 需要按照上述步骤进行编写, 不可以省去恒等变形步骤, 如果省去则可能导致错误. 如下题

**题目 38.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$

**解答.** 由常用不等式 1.5.2 的  $x \rightarrow 0, |\sin x| \leq |x|$ , 那么

$$\left| \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x} \right| \leq \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \right|$$

由夹逼准则得:

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \right|$$

左右极限都为 0, 因此  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$  极限为 0

**题目 38 的注记.** 本题有一个常见的错误做法, 就是直接把  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$  进行等价无穷小替代, 写为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$ , 但是这是错误的, 如果这样写, 那么  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x^2 \sin \frac{1}{x}} \times \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$ , 在  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x^2 \sin \frac{1}{x}}$  的分母中, 存在  $x = \frac{1}{n\pi}$  的间断点, 根据极限定义, 极限如果存在, 那么去心邻域一定要有定义, 那这样写就违背了极限的存在准则, 因此极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$  不存在, 不可以这样写.

**抽象函数使用等价无穷小求极限**

**结论 1.4.3: 抽象函数等价的条件**

若  $f(x) \rightarrow 0$ , 只有  $f(x) \neq 0$ , 才能将  $\sin(f(x)) \sim f(x)$

**题目 39.** 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$ , 则下列命题中正确的个数为

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$ .

(3) 若  $f'(x_0) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varphi(x)) - f(x_0)}{\varphi(x)} = A$

解答. 这三个都是错的, 因为  $\varphi(x)$  在分母上, 都可能为 0. 比如函数  $\varphi(x) = x \times \sin \frac{1}{x}$ , 其极限为 0, 但是又存在  $x = \frac{1}{n\pi}$  的无定义点.

### 积分等价替换求极限

#### 定义 1.4.4: 积分等价替换法则

设  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , 则  $\int_0^x f(t)dt \sim \int_0^x g(t)dt$ .

#### 定义 1.4.5: 变限积分求导公式

设  $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$ , 其中  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 可导函数  $\varphi_1(x)$  和  $\varphi_2(x)$  的值域在  $[a, b]$  上, 则在函数  $\varphi_1(x)$  和  $\varphi_2(x)$  的公共定义域上, 有

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt \right] = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

题目 40. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt}{x e^{x^2} + x^2}$

解答. 看见变上限积分类型计算题应首先想到洛必达法则, 对原式进行洛必达法则得:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} + 2x} \\ &= \frac{1 + x^2}{1 + 2x^2 + \frac{2x}{e^{x^2}}} \end{aligned}$$

对极限取大头可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^2}{1 + 2x^2 + \frac{2x}{e^{x^2}}} = \frac{1}{2}$$

题目 40 的注记. 在极限中, 处理变上限积分的最好办法是洛必达. 能洛则洛, 不能洛的话就换元之后再洛.

题目 41. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt}{bx - \sin x} = 1$ , 求  $a, b$ , 其中  $a, b$  为正数



解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{b - \cos x} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{b - \cos x}\end{aligned}$$

若分子趋近于零, 但是该等式的极限为 1, 那么该分母的极限一定趋近于 0, 那么  $b$  一定为 1

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} \\ a &= 2\end{aligned}$$

综上所述  $a = 2, b = 1$

**题目 41 的注记.** 对于本题, 还可以可被积函数进行等价运算 1.4.4, 但是这不是通法, 因此应当对此类问题首先进行洛必达. 以下为使用被积函数等价运算计算过程: 由于当  $t \rightarrow 0$  时,  $\frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} \sim \frac{t^2}{a^2}$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt}{bx - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{a} dt}{bx - \sin x} \\ &= \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{bx - \sin x} \stackrel{b \neq 1}{=} \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{bx - x} = 0\end{aligned}$$

等式矛盾, 因此  $b = 1$ , 对上式进行泰勒展开得:

$$1 = \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x} = \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x^3}{6}} = \frac{2}{a}$$

综上所述  $a = 2, b = 1$

题目 42. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^2 - \sin^2 x}$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \ln(1+t^2) dt}{(x - \sin x)(x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \ln(1+t^2) dt}{2x \times \frac{1}{6}x^3} \\ &= \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

题目 42 的注记. 看见形如  $x^2 - \sin^2 x$  的形式, 就应当想到  $(x + \sin x)(x - \sin x)$  的展开, 然后通过泰勒展开进行计算

题目 43. 设函数  $f(x)$  连续, 且  $f(0) \neq 0$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}$

解答. 由于分母有两个变量, 因此不好进行洛必达, 那么此时就要对分母进行换元, 换元过程如下: 令  $(x-t) = u$ , 对等式两边求微分得:  $d(-t) = du$ .

首先, 对分子展开, 对分母换元得:

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(t) dt}$$

对原式进行洛必达法则得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(t) dt + xf(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt + xf(x)} \end{aligned}$$

如果此时还要进行洛必达, 那么分母则会出现  $f'(x)$ , 那么最后是不可计算的, 因此此时应进行积分中值定理,

则  $\int_0^x f(t)dt = xf(\varepsilon)(\varepsilon \in (0, x))^{12}$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(c)}{xf(c) + xf(x)} \\ &= \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

题目 43 的注记. 如果出现两个变量则换元之后再洛, 如果实在洛不了的话, 再考虑使用积分中值定理. 积分中值定理和拉格朗日中值定理中出现的  $\varepsilon$ , 最后一步想说明最终结果时, 严格来说需要夹逼准则.(卷面上可以不体现出来, 但脑子里必须把这些事情想明白)

本题也可以积分替换进行计算, 但是不推荐, 写法如下:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt}{x \int_0^x f(t)dt} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x \int_0^x f(t)dt} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(0)}{2}x^2}{f(0)x^2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

### 1.4.5 抓大头和抓小头

本质是同时处以最高阶/最低阶

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m \\ \infty, & \text{当 } n < m \end{cases}$$

还有一个重要的等价  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \sim e^{-1} \times n$  该等价由斯特林公式  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$  而来, 又可写

为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$

<sup>12</sup>这个地方一定要可以夹起来, 如果夹起来的极限不一样, 那么则不可以使用积分中值定理

题目 44. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2 + 3x + 10}{3x^3 + 2x + 7}$

解答. 对等式上下同除以  $x^3$  得  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{10}{x^3}}{3 + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = \frac{4}{3}$

题目 45. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 + 3x^4}{2x + 4x^3 + x^5}$

解答. 上下同除以  $x$  得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x + 3x^3}{2 + 4x^2 + x^4} = \frac{1}{2}$

### 1.4.6 利用函数性质求极限

#### 幂指数函数性质求极限

一般主要是使用幂指数函数的性质进行恒等变换, 即  $a^b = e^{b \ln a}$ . 如果两个函数的指数相同, 则可以提后项/前项.

除此之外, 还有一个常用的结论: 对于  $\forall a, b > 0$  均有:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a (\ln x)^b = 0$ , 证明如下:

证明.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \cdot \ln^b x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^b x}{x^{-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b \ln^{b-1} x \cdot \frac{1}{x}}{-a x^{-a-1}} \end{aligned}$$

每洛一次, 分子次数-1. 分母次数不变, 一直洛下去, 分子次数要么洛到 0 (即  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c}{x^{-a}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} c x^a = 0$ ), 要么洛成负数 ( $\lim_{x \rightarrow 0^+} c \frac{\ln^m x}{x^{-a}} = 0$ ), 最终结果都是 0 □

题目 46. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x - 1)}$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{e^{x \ln x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln^2 x} = 1\end{aligned}$$

题目 47. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^4} \ln(\cos 2x + 2x \sin x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \ln((1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24}) + x - \frac{x^3}{6})} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^4}{x^4}} \\ &= e^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

题目 48. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \ln(1+x)}$

解答. 本题方法较多, 因此分阶段进行分析:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln x} - e^{x \ln \sin x}}{x^2 \ln(1+x)} \\ &= \frac{e^{x \ln x} - e^{x \ln \sin x}}{x^3}\end{aligned}$$

接下来, 可以对上述式子进行中值定理计算或者使用提后项的方法:

中值定理:

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^\varepsilon (x \ln x - x \ln \sin x)}{x^3}$$

$$= \frac{\ln x - \ln \sin x}{x^2}$$

提后项:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \sin x} (e^{x \ln x - x \ln \sin x} - 1)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x \ln x - x \ln \sin x} - 1)}{x^3} \\ &= \frac{\ln x - \ln \sin x}{x^2} \end{aligned}$$

然后对于  $\frac{\ln x - \ln \sin x}{x^2}$  可使用中值定理和对数运算法则进行计算:

拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}(x - \sin x)}{x^2} \quad (x < \varepsilon < \sin x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^2 \varepsilon} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

对数运算法则:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{x}{\sin x})}{x^2} \\ &= \frac{\ln(1 + \frac{x}{\sin x} - 1)}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x}{\sin x} - 1}{x^2} \\ &= \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

**题目 49.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^{\sin x} - 3^{\sin x}}{x^2}$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} \left[ \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{\sin x} - 1 \right]}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{3} \sin x}{x^2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

### 对数函数性质求极限

极限当中, 见到  $\ln A, A$  趋于 1 时, 优先想到构造  $\ln(1 + \text{无穷小})$  的形式, 如果这个式子本身进行恒等变形之后的结果过于复杂, 则要想到利用对数运算法则构造  $\ln(1 + \text{无穷小})$ .

**题目 50.** 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  是  $x$  的  $n$  阶无穷小, 则  $n =$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x) - \ln(1-x) - 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{1}{3}x^3 \right) \\ &= x^3\end{aligned}$$

综上易知:  $n = 3$

**题目 51.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(e^{2x} - x^2) - 2x}$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - \ln e^x}{\ln(e^{2x} - x^2) - \ln e^{2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin^2 x + e^x}{e^x}}{\ln \frac{e^{2x} - x^2}{e^{2x}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\sin^2 x}{e^x})}{\ln(1 - \frac{x^2}{e^{2x}})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{e^x}}{\frac{x^2}{e^{2x}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1
\end{aligned}$$

题目 52. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^p} = c \neq 0$

A.  $p = 3, c = -\frac{4}{3}$     B.  $p = -3, c = \frac{4}{3}$     C.  $p = \frac{4}{3}, c = 3$     D.  $p = -\frac{4}{3}, c = -3$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^p} = c \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{2x^3}{3} - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^p} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{4}{3}x^3}{x^p}
\end{aligned}$$

综上所述知:  $p = 3, c = -\frac{4}{3}$

题目 53.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\ln x} \ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln \frac{\ln x}{x}}{\ln x} \times \frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln \frac{\ln x}{x}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln \ln x - \ln x}{\ln x}} = e^{-1}
\end{aligned}$$

题目 53 的注记. 注意:  $a^b = e^{b \ln a}$  在这个题中非常易错



## 1.4.7 中值定理求极限

中值定理求极限通常和夹逼准则配合求极限

## 夹逼准则

## 定义 1.4.6: 函数极限夹逼准则

如果

- 当  $x \in U^\circ(x_0, r)$  (或  $|x| > M$ ) 时

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} h(x) = A$

那么  $\lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} f(x)$  存在, 且等于  $A$ .

题目 54. 设  $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n^2}$ .

解答. 由  $\cos a_n - \cos b_n = a_n > 0$ , 知  $0 < a_n < b_n$ , 则由夹逼准则, 得  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos b_n}{b_n^2} \cdot \frac{a_n}{1 - \cos b_n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1 - \cos a_n + a_n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1 - \cos a_n}{a_n} + 1} = \frac{1}{2}.$$

题目 54 的注记. 本题以数列极限为例, 使用夹逼准则进行求解

## 积分中值定理

## 定义 1.4.7: 积分中值定理

若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则在积分区间  $[a, b]$  上至少存在一个点  $\varepsilon$ , 使下式成立

$$\int_a^b f(x) dx = f(\varepsilon) (b - a)$$

其中,  $a, b, \varepsilon$  满足:  $a \leq \varepsilon \leq b$

## 拉格朗日中值定理求极限

如果两个函数的形式一样, 那么可以使用拉格朗日中值定理进行计算, 但是处理之后的  $\varepsilon$  需要可以使用夹逼准则.

**题目 55.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} \right) (a > 0)$

**解答.** 该题存在相近的函数形式, 使用拉格朗日中值定理进行解析  $a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} = a^{\frac{1}{\varepsilon}} \ln a \frac{1}{\varepsilon^2}, \varepsilon \in (x, x+1)$

$$\text{原式} = x^2 a^{\frac{1}{\varepsilon}} \ln a \frac{1}{\varepsilon^2}$$

当  $\varepsilon \rightarrow x+1$  时, 原式的极限为  $x^2 a^{\frac{1}{x+1}} \ln a \frac{1}{(x+1)^2} = \ln a$

当  $\varepsilon \rightarrow x$  时, 原式的极限为  $x^2 a^{\frac{1}{x}} \ln a \frac{1}{x^2} = \ln a$

综上, 函数极限为  $\ln a$

**题目 56.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right) (a > 0)$

**解答.** 该题存在相近的函数形式, 使用拉格朗日中值定理进行解析  $\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} = -\frac{a}{\varepsilon^2 + a^2}$

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( -\frac{a}{\varepsilon^2 + a^2} \right), (\varepsilon \in (n, n+1))$$

当  $\varepsilon \rightarrow n+1$  时, 原式的极限为  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( -\frac{a}{(n+1)^2 + a^2} \right) = a$

当  $\varepsilon \rightarrow n$  时, 原式的极限为  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( -\frac{a}{(n)^2 + a^2} \right) = a$

综上, 函数极限为  $a$

**题目 57.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - \cos x}{x^2}$

**解答.** 对分子进行泰勒展开得:

$$\text{原式} = \frac{1 - \frac{4}{2}x^2 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

**题目 57 的注记.** 本题看似可以存在两个形式相同的函数形式, 但是如果对其使用拉格朗日中值定理解析, 则  $\sin \varepsilon, \varepsilon \in (x, 2x)$ , 此时  $\sin \varepsilon$  的极限不可以通过夹逼准则得到, 因此不可以使用这种方法, 只可以使用泰勒展开.

#### 1.4.8 七种未定式的计算

主要有以下类型  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty$

形如  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$  可以直接计算或者简单转换可以直接计算.

**题目 58. ★★☆☆☆** 设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + nx(1-x)\sin^2 \pi x}{1 + n \sin^2 \pi x}$ , 则  $f(x) =$

**解答.** 分情况讨论, 当  $\sin^2 \pi x = 0$  和  $\sin^2 \pi x \neq 0$  时进行讨论.

当  $\sin^2 \pi x = 0$  时:

$$\text{原式} = x^2$$

当  $\sin^2 \pi x \neq 0$  时:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{n} + x(1-x)\sin^2 \pi x}{\frac{1}{n} + \sin^2 \pi x} \\ &= \frac{x(1-x)\sin^2 \pi x}{\sin^2 \pi x} \\ &= x(1-x) \end{aligned}$$

综上  $f(x)$  表达式为:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x(1-x), & x \text{ 取其他值.} \end{cases}$$

题目 59. ★★☆☆☆ 求极限  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}} \\ &= \frac{2 - 1}{1} \\ &= 1\end{aligned}$$

题目 59 的注记. 这个题直接用抓大头会错, 因为后面还有一个同阶的  $x$ , 然后还有就是下面是趋于  $-\infty$

形如  $\infty - \infty$

分式类型的  $\infty - \infty$ , 直接通分:

题目 60.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x)(x - \sin x)}{x^2 \times \sin^2 x} \\ &= \frac{(x + x - \frac{x^3}{6})(x - x + \frac{x^3}{6})}{x^4} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

题目 61.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2 + x} - x)$

解答.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \left( \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + x}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{1}{2} \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

**题目 61 的注记.** 本题是分式的  $\infty - \infty$  类型, 因此需要通分计算, 本题易错处在于, 看见两个等级别的  $\infty - \infty$ , 直接写 0, 因此看见两个等级别的  $\infty - \infty$ , 千万不要写 0!!!<sup>13</sup> 最后导致答案为  $\frac{\pi}{2}$

非分式的  $\infty - \infty$ :

1. 通法: 提最高阶无穷, 构造无穷大乘以无穷小. 之后可以对后面的无穷小进行等价/泰勒, 或者把无穷大乘以无穷小改造成无穷小比无穷小, 或无穷大比无穷大, 之后洛必达. 提最高阶无穷之前, 能算的极限要先算出来.
2. 见到两个根式相减, 可以考虑有理化. 但注意只能是平方根, 立方根就不适用了.
3. 看见函数形式相同, 可以考虑使用拉格朗日中值定理.

**题目 62.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x(e^x + xe^x) - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + x^2e^x - e^x + 1}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x + x^2 - 1) + 1}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3xe^x + x^2e^x}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x + xe^x}{2} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

<sup>13</sup> 此处已经错 n 次了!!! 尤其是三大计算!!!

**题目 62 的注记.** 本题可能上去第一步就把  $e^x - 1$  直接给替换, 但是不能这样写, 因为等价无穷小不可以进行部分替代

**题目 63.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x\sqrt{x}}}}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**题目 63 的注记.** 上述解法为通法, 即提最高阶无穷  $\sqrt{x}$ . 除此之外, 还可以使用有理化进行通分:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**题目 64.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right) \\ &= \left[ 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2 \right] \end{aligned}$$

<sup>1</sup> 此处不能把后面的极限算出来的原因是  $\frac{1}{x}$  极限为不存在, 因此如果拆分计算则违背了极限的运算法则

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left[ -\frac{1}{4} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

**题目 64 的注记.** 本题有一个错误的做法:

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{x} \left( \sqrt{\frac{1}{x} + 1} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right) \\
 &= x^2 (1 + 1 - 2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

此处不能把后面的极限算出来的原因与上题一样也是  $\frac{1}{x}$  极限为不存在, 因此如果拆分计算则违背了极限的运算法则

**题目 65.** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2023}}{n^\alpha - (n-1)^\alpha} = \beta \neq 0$ , 求  $\alpha$  及  $\beta$

**解答.**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2023}}{n^\alpha (1 - (1 - \frac{1}{n})^\alpha)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2023}}{-n^\alpha ((1 - \frac{1}{n})^\alpha - 1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2023}}{\frac{a}{n}}
 \end{aligned}$$

综上可知:  $\alpha = 2023, \beta = \frac{1}{2023}$

**题目 66.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right]$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} - \frac{x}{e} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[ e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]}{e \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} \\
 &= \frac{1}{e^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}} \\
 &= \frac{-1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}} - e}{t} \\
 &= \frac{-1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} - e}{t} \\
 &= -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\ln(1+t)-t}{t}} - 1}{t} \\
 &= -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} \\
 &= -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2} = \frac{1}{2e}
 \end{aligned}$$

形如  $\infty^0, 0^0$

$\infty^0$  与  $0^0$  通常使用  $u^v = e^{v \ln u}$  来计算

形如  $1^\infty$

$1^\infty$  通常使用  $\lim u^v = e^{\lim(u-1)v}$  来计算<sup>14</sup>. 之后将  $(u-1)v$  摘出, 然后使用替换法则或者泰勒公式进行求解

**题目 67.** 设  $n$  为正整数, 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^n}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)} \right]^x$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^n}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)} \right]^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x-1} \right)^x \left( \frac{x}{x-2} \right)^x \cdots \left( \frac{x}{x-n} \right)^x
 \end{aligned}$$

<sup>14</sup> 其实本质还是使用了幂指函数的性质进行计算, 因为  $\lim u^v = e^{\lim v \ln(u)} = e^{\lim v \ln(1+u-1)} = e^{\lim v(u-1)}$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x} \left(\frac{x-2}{x}\right)^{-x} \cdots \left(\frac{x-n}{x}\right)^{-x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-x} \cdots \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{-x} \\
&= e \cdot e^2 \cdots e^n = e^{\frac{n(n+1)}{2}}
\end{aligned}$$

题目 68. 已知曲线  $y = f(x)$  在点  $(0,0)$  处的切线过点  $(1,2)$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \int_0^x f(t)dt)^{\frac{1}{x^2}}$

解答. 已知  $f(0) = 0, f'(0) = 2$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\cos x + \int_0^x f(t)dt)}{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos x - 1 + \int_0^x f(t)dt}{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2} - \frac{1}{2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{f(x)}{2x} - \frac{1}{2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

题目 69. ★★★★★☆ 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3} \right)^{\frac{x}{x}}$ .

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{x} \ln \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{x} \left( \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3} - 1 \right)}
\end{aligned}$$

把分子摘出来:

$$\begin{aligned}\frac{e}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{x} - 3 \right) &= \frac{e}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{x} + \frac{e^{3x} - 1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}\end{aligned}$$

综上原式为  $e^{\frac{e}{3} \left( 1+2+3 \right)} = e^{2e}$

**题目 69 的注记.** 本题的关键在于对数函数形式??的变换和对于等式7的使用

**题目 70.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= e^{x \ln \left( \frac{x^2}{(x-a)(x-b)} \right)} \\ &= e^{x \left( \frac{x^2}{(x-a)(x-b)} - 1 \right)} \\ &= e^{\frac{ax^2 - bx^2 + abx}{x^2 - ax + bx}} \\ &= e^{\frac{2ax - 2bx + ab}{2x + b - a}} \\ &= e^{a-b}\end{aligned}$$

**题目 71.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}}{e^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n}\end{aligned}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 [\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})]}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 \cdot \frac{1}{2} (\frac{1}{n})^2}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}}$$

**题目 71 的注记.** 本题易错点, 一是直接把  $(1 + \frac{1}{n})^n$  直接替换成  $e$ , 二是在计算  $\frac{e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}}{e^n}$  时, 替换成  $\frac{e^{n^2 \frac{1}{n}}}{e^n}$ , 这两个错误的点都是在计算时进行了部分替代.

**题目 72.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{n}{x}}$ , 其中  $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$ .

**解答.** 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} a_i^x = 1$ , 则函数形式为  $1^\infty$  型

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{n}{x} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + a_3^x + \cdots + a_n^x}{n} - 1 \right)} \\ &= e^{\left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_2^x - 1}{x} + \cdots + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_n^x - 1}{x} \right\}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \cdots + a_n^x \ln a_n} \\ &= a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \end{aligned}$$

**题目 72 的注记.** 本题需注意的是  $\lim_{x \rightarrow 0} a_i^x = 1$ , 然后可以观察出该极限类型为  $1^\infty$  型, 之后可以利用等价无穷小替换求的极限

## 1.5 数列极限的运算

1.5.1  $n$  项数列极限求解 $n$  项连加的数列极限

常用等式:

$$\begin{array}{ll}
 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + c & (n \rightarrow \infty \text{ 时}) n^n \gg n! \gg k_{(k>1)}^n \gg n_{(k>1)}^k \gg \ln n \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} & \text{斯特林公式 1.4.5: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \sim e^{-1} \times n
 \end{array}$$

放缩技巧:

$$\begin{cases}
 n \times u_{\min} \leq u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq n \times u_{\max}, \\
 \text{当 } u_i \geq 0 \text{ 时, } 1 \times u_{\max} \leq u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq n \times u_{\max}.
 \end{cases}$$

处理手法:

1. 优先看变化部分<sup>15</sup>的最大值是主体部分<sup>16</sup>的同量级或次量级

- 次量级使用夹逼进行求解
- 同量级使用定积分定义进行求解<sup>17</sup>

2. 放缩的通用手法是分子/分母取最大的或最小的, 即取两头

**题目 73.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \right)$

解答. 对原式进行放缩可得:

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \right) \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

<sup>15</sup>分母中随项的变化而变化, 称其为变化部分<sup>16</sup>不随项的变化而变化, 称其为主体部分<sup>17</sup>可爱因子  $\frac{1}{n}$ , 然后构造形如  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-c} f\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$  的表达式进行求解, 其中  $C$  为任意常数,  $\varepsilon \in [k-1, k]$ .

对不等式两侧取极限可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

易知左右两侧不等式极限均为 1, 解得不等式极限为 1

**题目 73 的注记.** 对本题的分析: 主体部分与变化部分的最大值是次量级关系. 即  $n^2$  与  $n$  不是同一个变化量级. 那么就可以使用夹逼准则进行夹逼运算出最大值

**题目 74.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$ .

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 + (\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1 + (\frac{2}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{1 + (\frac{n}{n})^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \quad f(x) \text{函数表达式为 } \frac{1}{1+x^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

**题目 74 的注记.** 主体部分与变化部分的最大值是同量级关系. 即  $n^2$  与  $n^2$  不是同一个变化量级. 那么就可以使用夹逼准则进行夹逼运算出最大值

**题目 75.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{e}{e^n + 1^2} + \frac{e^2}{e^n + 2^2} + \cdots + \frac{e^n}{e^n + n^2} \right)$

解答.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{e-e^{n+1}}{1-e}}{e^n + n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{e}{e^n + 1^2} + \frac{e^2}{e^n + 2^2} + \cdots + \frac{e^n}{e^n + n^2} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{e-e^{n+1}}{1-e}}{e^n + 1^2}$$

根据抓大头的思路可化为

$$\frac{-e}{1-e} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{e}{e^n + 1^2} + \frac{e^2}{e^n + 2^2} + \cdots + \frac{e^n}{e^n + n^2} \right) \leq \frac{-e}{1-e}$$

可知原式极限为  $\frac{-e}{1-e}$

**题目 76.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^6+n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}} \right)$

解答.

$$\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\sqrt{n^6+n^2}} \leq \left( \frac{1}{\sqrt{n^6+n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}} \right) \leq \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\sqrt{n^6+n}}$$

取极限得:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\sqrt{n^6+n^2}} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^6+n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\sqrt{n^6+n}} \\ \frac{2n^3+3n^2+n}{\sqrt{n^6+n^2}} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^6+n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}} \right) \leq \frac{2n^3+3n^2+n}{\sqrt{n^6+n}} \end{aligned}$$

根据抓大头的思路可知原式极限为  $\frac{1}{3}$

**题目 77.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right)$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}} \right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

**题目 78.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right)$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \\
 &= \int_0^1 x \ln(1+x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) dx^2 \\
 &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

**题目 79.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$

解答. 首先对等式进行化简, 使用夹逼准则可以得到:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^k \sin \frac{k\pi}{n}}{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^k \sin \frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$$

等式左右两侧可等价如下形式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^k \sin \frac{k\pi}{n}}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right) \leq \frac{\sum_1^k \sin \frac{k\pi}{n}}{n}$$

左右两侧使用定积分定义可得:

$$\int_0^1 \sin(\pi x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right) \leq \int_0^1 \sin(\pi x) dx$$

其中  $\int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}$ , 综上, 等式极限为  $\frac{2}{\pi}$

**题目 79 的注记.** 本题分析, 首先看到分母的变化部分的最大值与主体部分是次量级关系的, 那么如果想使用

夹逼进行计算, 那么就会发现分子的大小无法计算, 没有一个等差或者等比数列的公式可以计算出分子的各项和, 因此应该最终应该使用定积分定义进行计算.

**题目 80.** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{1^2+n^2} + \frac{n+\frac{1}{2}}{2^2+n^2} + \dots + \frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n^2} \right)$

**解答.** 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{1^2+n^2} + \frac{n+\frac{1}{2}}{2^2+n^2} + \dots + \frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n^2} \right) = I$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \frac{1}{n}) \left( \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \dots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left( \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \dots + \frac{1}{n^2+n^2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (n + \frac{1}{n}) \left( \frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (n+1) \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right)$$

左右两侧等价得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right)$$

使用定积分定义可得:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}, \text{ 综上, 等式极限为 } \frac{\pi}{4}$$

**题目 81.** 已知  $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ , 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n (n = 1, 2, \dots)$ , 证明数列  $\{a_n\}$  收敛

**解答.** 令  $a_{n+1} - a_n$  得  $(\frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n})) < 0$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \dots + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n \\ &= \ln(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n}) - \ln n \\ &= \ln(1+n) - \ln n > 0 \end{aligned}$$



综上所述, 由于数列单调递减且有下界, 因此收敛

**题目 81 的注记.** 此题的方法为非常规的方法, 需要考虑上下问, 结合进行分析.

### $n$ 项连乘的数列极限

主要有以下两种方法:

1. 夹逼准则
2. 取对数化为  $n$  项和<sup>18</sup>

**题目 82.** 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{n(1+2+\cdots+n)}}$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{n^2(n+1)}{2}}} \\ &= \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{1}{n} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right) \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

**题目 83.** 设  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$

**解答.** 对原式取对数可知:  $\ln x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$  当  $x > 0$  时,  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ , 则

$$\frac{k}{n^2 + n} \leq \frac{k}{n^2 + k} = \frac{\frac{k}{n^2}}{1 + \frac{k}{n^2}} < \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n} = \frac{1}{2}$$

<sup>18</sup>通法

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e^{\frac{1}{2}}$

**题目 84.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是  $[a, b]$  上的一个点列, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)}}$

**解答.**  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 已知  $e^{f(x)}$  在  $[a, b]$  上非负连续, 且  $0 < m \leq e^{f(x)} \leq M$ , 其中  $M, m$  分别是  $e^{f(x)}$  在  $[a, b]$  上的最大值和最小值, 于是  $0 < m \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)} \leq M$ , 故  $\sqrt[n]{m} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)}} \leq \sqrt[n]{M}$ , 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M} = 1^{19}$ , 根据夹逼准则, 得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)}} = 1$

**题目 85.** 求  $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}}$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

**解答.** 显然  $a_n \leq 1$ , 又

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}} = \sqrt[n]{\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{1}{2n}} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{2n}}$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}} = 1$$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

**题目 85 的注记.** 这题的方法不是常规方法, 如果按照一般的处理方法, 应该写为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{2n-1}{2n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{2}}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{3}{4}}{n} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{2n-1}{2n}}{n} \\ &= 0 + 0 + 0 + \dots + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

但是这显然是错误的, 无穷多个无穷小相加, 结果仍是未定式.

<sup>19</sup>写成幂函数形式配合泰勒公式即可看出, 来自此处数列的性质:1.1.1

题目 86. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)}$

解答. 令  $a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3) \cdots (n+n)}$ , 则

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \ln[(n+1)(n+2) \cdots (n+n)] \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln[(n+1)(n+2) \cdots (n+n)] - \ln n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln(n+1) + \ln(n+2) + \cdots + \ln(n+n) - n \ln n] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] \\
 &= \int_0^1 \ln(1+x) dx \\
 &= \int_0^1 \ln(1+x) d(x+1) \\
 &= (x+1) \ln(1+x) \Big|_0^1 - 1 \\
 &= 2 \ln 2 - 1
 \end{aligned}$$

综上  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$

题目 87. 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \sim e^{-1} \times n$

解答.

$$\begin{aligned}
 a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(n \times (n-1) \times \cdots \times 1) - \ln n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln n + \ln(n-1) + \cdots + \ln 1 - n \ln n] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \ln \frac{n}{n} + \ln \frac{n-1}{n} + \cdots + \ln \frac{1}{n} \right] \\
 &= \int_0^1 \ln x dx \\
 &= x \ln x \Big|_0^1 - 1 = -1
 \end{aligned}$$

综上  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \sim e^{-1} \cdot n$

## 1.5.2 常用不等式

- 利用如下重要不等式

1. 设  $a, b$  为实数, 则  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ;  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ <sup>20</sup>

2.  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$  ( $a, b > 0$ )<sup>21</sup>

**题目 88.** 证明函数  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有界

**解答.** 当  $x \neq 0$  时, 令  $|f(x)| = \frac{|x|}{1+x^2} = \frac{1}{\frac{1}{|x|} + |x|}$ , 由不等式  $\frac{1}{x} + x > 2\sqrt{\frac{1}{x} \times x} = 2$  可得

$\frac{1}{\frac{1}{|x|} + |x|} < \frac{1}{2}$ , 即  $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$  当  $x = 0$  时,  $f(x) = 0$

综上,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有界

**题目 88 的注记.** 本题利用了绝对值和不等式来证明函数有界

3.  $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$  ( $a, b, c > 0$ )

4. 设  $a \geq b \geq 0$ , 则  $\begin{cases} \text{当 } n \geq 0 \text{ 时, } a^n \geq b^n, \\ \text{当 } n \leq 0 \text{ 时, } a^n \leq b^n. \end{cases}$

5. 若  $0 < a < x < b, 0 < c < y < d$ , 则  $\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}$ .<sup>22</sup>

6.  $\sin x < x < \tan x$  ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ )

7.  $\sin x < x$  ( $x > 0$ )

8. 当  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  时,  $x < \tan x < \frac{4}{\pi}x$

9. 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\sin x > \frac{2}{\pi}x$

10.  $\arctan x \leq x \leq \arcsin x$  ( $0 \leq x \leq 1$ )

11.  $e^x \geq x + 1$  ( $\forall x$ )<sup>23</sup>

<sup>20</sup>可以将上述式子推广为  $n$  个实数的情况:  $|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ .

<sup>21</sup>还有一个不等式是  $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

<sup>22</sup>当  $n\pi < x < (n+1)\pi, 2n < S(x) < 2(n+1)$  时,  $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$ .

<sup>23</sup>当  $x_{n+1} = e^{x_n} - 1$  时, 由  $e^{x_n} - 1 \geq x_n$ , 得  $x_{n+1} \geq x_n$ , 即  $\{x_n\}$  单调不减

$$12. x - 1 \geq \ln x (x > 0)^{24}$$

$$13. \frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x} (x > 0) \text{ 或 } \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x (x > 0)^{25}$$

$$14. \text{在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如 } (1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}}), \text{ 可化为 } (1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}}) * \frac{4}{3}$$

### 1.5.3 递推关系式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 数列极限

1. 单调有界 (先证明极限存在, 之后对  $x_{n+1} = f(x_n)$  两端取极限)

#### 定理 1.5.1: 数列的单调有界准则

单调有界数列必有极限, 即若数列  $\{x_n\}$  单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在

证明数列单调性的方法:

$$(a) x_{n+1} - x_n > 0 \text{ 或 } \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 (\text{同号})$$

(b) 利用数学归纳法

#### 定义 1.5.1: 第一数学归纳法的定义

第一数学归纳法是证明当  $n$  等于任意一个自然数时某命题成立. 证明分下面两步:

i. 证明: 当  $n = 1$  时命题成立.<sup>a</sup>

ii. 证明: 若假设在  $n = m$  时命题成立, 可推导出在  $n = m + 1$  时命题成立.

这种方法的原理在于: 首先证明在某个起点值时命题成立, 然后证明从一个值到下一个值的过程有效. 当这两点都已经证明, 那么任意值都可以通过反复使用这个方法推导出来.

<sup>a</sup>选择数字 1 因其作为自然数中的最小值

(c) 利用重要不等式

(d)  $x_n - x_{n-1}$  与  $x_{n-1} - x_{n-2}$  同号, 则  $x_n$  单调

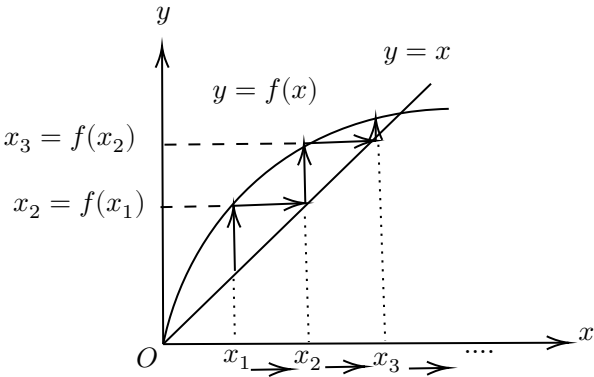
<sup>24</sup>当  $x_n > 0$  时, 若  $x_{n+1} = \ln x_n + 1$ , 由  $\ln x_n + 1 \leq x_n$ , 得  $x_{n+1} \leq x_n$ , 即  $\{x_n\}$  单调不增

<sup>25</sup>令  $f(x) = \ln x$ , 并在区间  $[x, x+1]$  上对其使用拉格朗日中值定理, 有  $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}$  其中  $0 < x < \xi < x+1$ , 因此对任意的  $x > 0$ , 有  $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$

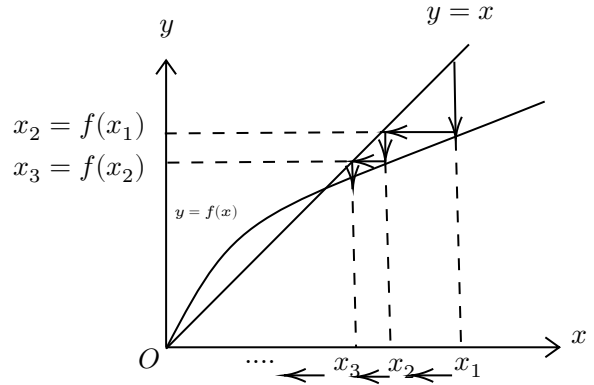
(e) 利用结论: 对  $x_{n+1} = f(x_n)(n = 1, 2, \dots), x_n \in \text{区间} I$

- 若  $f'(x) > 0, x \in \text{区间} I$ , 则数列  $\{x_n\}$  单调, 且  $\begin{cases} \text{当 } x_2 > x_1 \text{ 时, 数列 } \{x_n\} \text{ 单调增加} \\ \text{当 } x_2 < x_1 \text{ 时, 数列 } \{x_n\} \text{ 单调减少} \end{cases}$

证明. 若  $f(x)$  单调增加, 且  $x_1 < x_2$ , 则数列单增的图像是这样的:



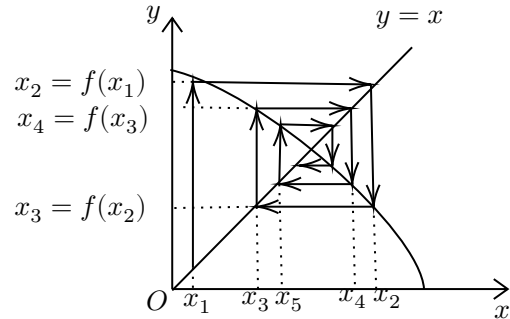
若  $f(x)$  单调增加, 且  $x_1 > x_2$ , 则数列单增的图像是这样的



□

- 若  $f'(x) < 0, x \in \text{区间} I$ , 则数列  $\{x_n\}$  不单调

证明. 若  $f(x)$  单调递减, 且  $x_1 < x_2$  时, 则图像为



□

2. 利用压缩映射 (先斩后奏): 先令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 然后等式  $x_{n+1} = f(x_n)$  两端取极限解得  $A$ , 得到极限初步结果, 最后再证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ . 核心是用  $x_n = f(x_{n-1})$  证明一个递推不等式  $|x_n - a| \leq A|x_{n-1} - a|$ , 其中  $0 < A < 1$

**题目 89.** 设  $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} (n = 1, 2, \dots)$ , 证明: 数列  $x_n$  极限存在并求此极限

**解答.** 由  $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$  可得:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} \leq \frac{3}{2}$$

可知数列  $x_n$  存在上界, 令  $x_{n+1} - x_n$  可得:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n \\ &= \frac{x_n(3-x_n) - x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} \\ &= \frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} \geq 0 \end{aligned}$$

故  $x_n$  单调递增, 根据数列单调有界定理, 该数列极限存在, 因此设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 对等式  $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$  左右两边取极限得:  $a = \sqrt{a(3-a)}$ . 解得  $a = \frac{3}{2}$

综上, 数列极限为  $\frac{3}{2}$

**题目 89 的注记.** 出现本题的形式  $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$  可以使用常用不等式 1.5.2, 对不等式放缩计算极限.

**题目 90.** 设  $x_1 = \sqrt{6}, x_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}}, \dots, x_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6}}}}$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

**解答.** 由题意可知, 讲数列的表达式可抽象为  $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ , 其函数表达式为  $f(x) = \sqrt{6+x}$ , 对其求导可得:  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6+x}} > 0$ , 由于  $x_1 < x_2$  因此数列单调递增. 又因为  $x_1 = \sqrt{6} < 3$ , 若  $x_n < 3$ , 则  $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} < 3$ , 从而  $x_n < 3$ , 即数列  $x_n$  有上界, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 由于

$0 < x_n < 3$ , 故由极限的保序性可得:  $0 \leq a \leq 3$ .  $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ , 两侧取极限得:  $a = \sqrt{6 + a}$ , 解得  $a=3$ , 综上数列极限为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$

**题目 90 的注记.** 除此之外, 本题还可以使用压缩映射进行求解:

**解答.** 直接证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ , 由  $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$  知:

$$\text{原式} = |x_n - 3| = |\sqrt{6 + x_{n-1}} - 3|$$

对于此处的运算, 我们可以使用拉格朗日中值定理进行化简, 即

$$\begin{aligned} \text{原式} &= |\sqrt{6 + x_{n-1}} - 3| \\ &= |\sqrt{6 + x_{n-1}} - \sqrt{9}| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} |x_{n-1} - 3| < \frac{1}{2} |x_{n-1} - 3| < \frac{1}{2^2} |x_{n-2} - 3| < \dots < \frac{1}{2^{n-1}} |x_1 - 3| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$

当然也可以使用有理化进行化简:

$$\text{原式} = \frac{|x_{n-1} - 3|}{\sqrt{6 + x_{n-1}} + 3} < \frac{1}{3} |x_{n-1} - 3| < \frac{1}{3^2} |x_{n-2} - 3| < \dots < \frac{1}{3^{n-1}} |x_1 - 3| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

综上

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - 3| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n-1}} |x_1 - 3|$$

使用夹逼准则可以得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$

**题目 91.** 设  $x_1 = 2, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} (n = 1, 2, \dots)$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

**解答.** 令  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ , 则  $x_{n+1} = f(x_n)$ , 显然  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调减, 故  $\{x_n\}$  不具有单调性, 因此只能使用压缩映射.

令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = 2 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \Rightarrow a = 2 + \frac{1}{a}$ , 解得  $a = 1 \pm \sqrt{2}$ .

由题设知  $x_n \geq 2$ , 故由极限的保号性知,  $a \geq 2$ , 从而  $a = 1 + \sqrt{2}$ , 以下证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 + \sqrt{2}$



$$|x_n - a| = \left| \left( 2 + \frac{1}{x_{n-1}} \right) - \left( 2 + \frac{1}{a} \right) \right| = \left| \frac{x_{n-1} - a}{ax_{n-1}} \right| \leq \frac{|x_{n-1} - a|}{2a} \leq \frac{|x_{n-1} - a|}{2} \leq \frac{|x_{n-2} - a|}{2^2} \leq \dots \leq \frac{|x_1 - a|}{2^{n-1}} \rightarrow 0$$

**题目 91 的注记.** 需要切记的是在压缩映射中, 极限值为根式时, 要用极限时的等式对极限值进行替换, 比如在本题中在证明数列极限为  $1 + \pm\sqrt{2}$  中, 应写为  $|x_n - a|$ , 而不是  $|x_n - 1 - \sqrt{2}|$

**题目 92.** 设  $x_1 = \sqrt{a} (a > 0), x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求其值.

本题有四种方法, 下面依次给出求解:

**解答. 法 1: 数学归纳法找上界:** 数列形式可写为  $f(x) = \sqrt{a + x}$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a + x}} > 0$ , 因此  $f(x)$  单增,

又  $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, x_2 > x_1$ , 因此  $x_n$  单增.

假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ . 由第一数学归纳法可得:

验证  $x_1 = \sqrt{a} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ , 即证:

$$2\sqrt{a} < 1 + \sqrt{1 + 4a}$$

$$4a < 2 + 4a + 2\sqrt{1 + 4a}$$

假设  $x_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$  成立, 验证  $x_{n+1} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$  即证:

$$2\sqrt{a + x_n} < 1 + \sqrt{1 + 4a}$$

$$4a + 4x_n < 2 + 4a + 2\sqrt{1 + 4a}$$

$$4x_n < 2 + 2\sqrt{1 + 4a}$$

即证:  $x_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ , 显然成立.

综上:  $x_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ , 且  $x_n$  单增, 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则  $A = \sqrt{a + A}$ , 解得  $A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

综上  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

**解答. 法 2: 对方法一进行化简 (最佳):** 数列形式可写为  $f(x) = \sqrt{a + x}$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a + x}} > 0$ , 因此  $f(x)$

单增, 又  $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, x_2 > x_1$ , 因此  $x_n$  单增.

设  $A = \sqrt{a+A}$  假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$ . 由第一数学归纳法可得:

验证  $x_1 < A$ , 即证:

$$x_1 = \sqrt{a}, A = \sqrt{a+A}$$

$$\sqrt{a} < \sqrt{a+A} \Rightarrow x_1 < A$$

假设  $x_n < A$  成立, 验证  $x_{n+1} < A$  即证:

$$x_{n+1} = \sqrt{x + x_n} < \sqrt{a+A} = A$$

即证:  $x_n < A$ , 显然成立.

综上:  $x_n < A$ , 且  $x_n$  单增, 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$ , 则  $M = \sqrt{a+M}$ , 解得  $M = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$

解答. 法 3: 构造不等式进行放缩<sup>26</sup> 易知  $x_n$ , 单调递增, 且  $x_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} > x_n > \dots > x_1 = \sqrt{a} \\ \frac{x_n}{x_{n+1}} < 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{a+x_n} \\ \Rightarrow x_{n+1}^2 &= a+x_n \\ \Rightarrow \frac{a}{x_{n+1}} + \frac{x_n}{x_{n+1}} \\ \Rightarrow x_{n+1} &< \frac{a}{x_{n+1}} + 1 \end{aligned}$$

$x_n$  单增且有上界, 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则  $A = \sqrt{a+A}$ , 解得  $A = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$

综上  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$

解答. 法 4: 压缩映射 + 有理化

$$\begin{aligned} |x_n - A| &= |\sqrt{a+x_{n+1}} - \sqrt{a+A}| \\ &= \frac{|x_{n+1} - A|}{\sqrt{a+x_{n+1}} + \sqrt{a+A}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}} |x_{n+1} - A| \end{aligned}$$

<sup>26</sup> 其实不好放缩, 但是可以硬往条件上凑

**题目 93.** 设数列  $\{x_n\}$  满足:  $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$ . 证明  $\{x_n\}$  收敛, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

解答.

$$x_{n+1} - x_n = \ln\left(\frac{e^{x_n} - 1}{x_n}\right) - x_n = \ln\left(\frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}}\right).$$

令  $f(x) = e^x - 1 - xe^x$ , 则  $f'(x) = -xe^x$ . 当  $x > 0$  时,  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调减少, 于是,  $f(x) < f(0) = 0$ . 从而, 当  $x > 0$  时

$$\frac{e^x - 1}{xe^x} - 1 = \frac{e^x - 1 - xe^x}{xe^x} < 0$$

即  $\frac{e^x - 1}{xe^x} < 1$  又因为对所有的正整数  $n$ , 都有  $x_n > 0$ , 所以  $\ln\left(\frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}}\right) < \ln 1 = 0$ , 即  $x_{n+1} - x_n < 0$ . 因此, 数列  $|x_n|$  单调减少.

由单调有界准则可知, 数列  $|x_n|$  收敛. 由于对所有的正整数  $n$ , 都有  $x_n > 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq 0$ .

对  $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$  两端同时令  $n \rightarrow \infty$ , 可得  $ae^a = e^a - 1$ , 由前面的结果可知,  $x = 0$  是  $f(x) = e^x - 1 - xe^x$  在  $[0, +\infty)$  上的唯一零点, 因此,  $a = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .