高等数学笔记

作者：LoafPhilosopher

2024 年 3 月 10 日

前言

If a job is worth doing,it's worth doing well

2024 年 3 月 10 日

如果一件事值得去做，那就值得去做好

目录

第一章　函数

1.1　函数的基本概念与特性

1.1.1　函数的概念

定义 1.1.1: 函数定义

设**数集** $D \subset \mathbb{R}$, 则称映射 $f: D \to \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域, 记作 D_f, 即 $D_f = D$.

函数的定义中, 对**每个** $x \in D$, 按对应法则 f, 总有**唯一确定**的值 y 与之对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系, 通常称为**函数关系**. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$ 即:

$$R_f = f(D) = \{y|y = f(x), x \in D\}$$

注 1.1.1: 关于定义域的注意事项

- 定义域指的是 x 的定义域
- 括号内定义域相同

题目 1. 已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a](a>0)$, 则 $f(x)$ 的定义域为,$f(x+10)$ 的定义域为:

解答. 定义域指的是 x 的定义域, 因此 $x \in [0,a]$, 那么 $x+1 \in [1,a+1]$. 括号内定义域相同, 那么可以得知 $f(x)$ 定义域为 $[1,a+1]$.$f(x+10)$ 定义域为 $[-9,a-9]$.

1.1.2 反函数

定义 1.1.2: 反函数定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D[a], 值域为 R. 如果对于每一个 $y\in R$, 必存在**唯一的** $x\in D$ 使得 $y=f(x)$ 成立, 则由此定义了一个新的函数 $x=\varphi(y)$, 这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**[b], 一般记作 $x=f^{-1}(y)$, 它的定义域为 R, 值域为 D. 相对于反函数来说, 原来的函数也被称为**直接函数**.

[a] **在求反函数时要标明区间, 函数在区间上连续且单调, 例如 $y=\arctan x$ 默认的是在 $y=\tan x$ 第一个区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的反函数**

[b] 一般地,$y=f(x), x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x), x\in f(D)$

定义 1.1.3: 反函数的性质

- $f^{-1}f(x)=x$
- **严格单调函数必有反函数，但是有反函数的函数不一定是单调函数**. 如函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x<0,\end{cases}$, 其函数图像为

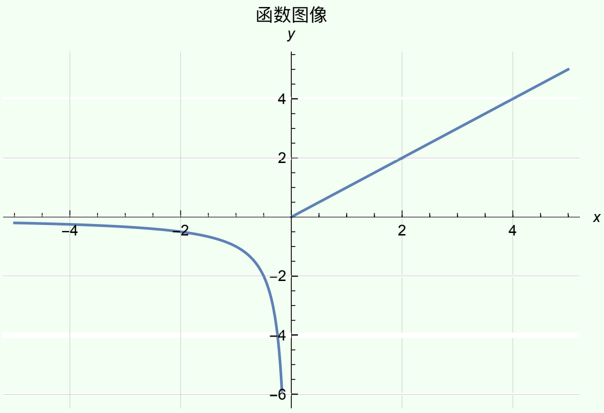
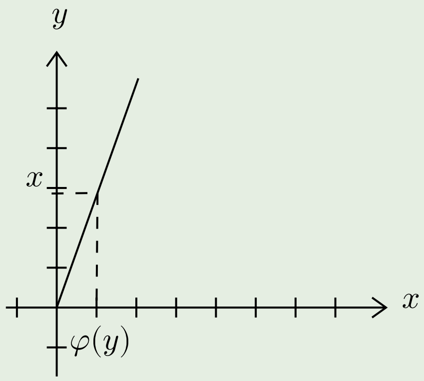


图 1.1: 分段函数 $f(x)$ 图像

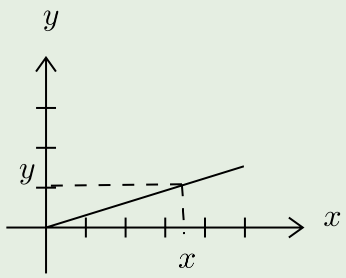
- 若函数 $f(x)$ 有反函数, 则 $f(x)$ 与任意水平线有且仅有一个交点.

注 1.1.2: 关于反函数图像和 x, y 值转换的问题

若把 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图形画在同一坐标系中，则它们完全重合. 只有把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$ 后，它们的图形才关于 $y = x$ 对称[a].
以函数 $y = 2x + 1$ 为例:



原函数为 $y = 2x + 1$, 其中自变量为 x, 定义域为 $[1, 2]$, 因变量 y, 值域为 $[3, 5]$.
如上图所示 $x = f^{-1}(y)$ 中自变量为 y, 定义域为 $[3, 5]$, 因变量 x, 值域为 $[1, 2]$[b].



最终化为 $y = f^{-1}(x)$，其中自变量为 x, 定义域为 $[3, 5]$, 因变量 y, 值域为 $[1, 2]$.

[a]这是因为在 $x = f^{-1}(y)$ 中 y 是自变量而 x 是因变量, 而在 $y = f(x)$ 中恰恰相反 (这个时候的图像应该一个是 x-y 坐标系函数图像, 一个是 y-x 坐标系函数图像), 因此如果此时不交换变量, 那么其域没有变化, 画在一起会重合, 只有交换了变量之后才不会重合.

[b]此时仅发生了变量改变，$x = f^{-1}(y)$ 和 $y = f(x)$ 图像在同一坐标轴中

题目 2. 求函数 $y = f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的反函数的表达式以及定义域

题目 2 的注记.

- 在上面的例子中, 函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为反双曲正弦函数, 其反函数为双曲正弦函数. 除此之外, 函数 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 是双曲余弦函数.

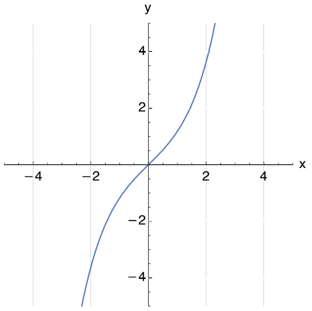


图 1.2: 双曲正弦函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

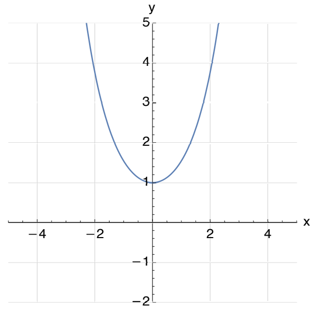


图 1.3: 双曲余弦函数 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

- 下列结论需要记住
  - $x\to 0$时, $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sim x$.
  - $\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, 于是 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$.
  - 由于$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$是奇函数, 于是 $\int_{-1}^{1}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+x^2\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.

解答. 已知 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 则 $-y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$
对两边可以进行如下操作

$$e^{-y}=\sqrt{x^2+1}-x$$
$$e^{y}=\sqrt{x^2+1}+x$$

那么可以得到 $x=\frac{1}{2}(e^y-e^{-y})$ 交换之后可以得到函数 $f(x)$ 的反函数, 即 $y=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

1.1.3 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,, 函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义, 且 $g(D)\subset D_1$, 则由

$$y=f[\mathrm{g}(x)](x\in D)$$

确定的函数, 称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**, 它的定义域为 D,u 称为中间变量. 内层函数的值域是外层函数的子集.

题目 3. 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^4, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-\sqrt{x}, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 若$y=f(g(x))$, 则

(A)$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=1$. (B)$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$不存在. (C)$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$. (D)$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$不存在.

解答. 函数 y 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 复合函数, 若求复合函数在 $x=1$ 和 $x=0$ 时的导数, 那么可以将复合函数写为 $f(x)=\begin{cases} g(x)^2, & x \geqslant 0 \\ g(x)^4, & x<0 \end{cases}$, 由此, 作出 $g(x)$ 函数图像, 结合图像, 可以将上述图像函数表达式更改为 $f(g(x))=\begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ x^4, & x<0 \end{cases}$. 则函数 $f(g(x))$ 在 $x=1$ 处的导数为 0.

1.1.4 函数的四种特性及重要结论

有界性

有界性分为三种情况, 一种是有上界, 一种是有下界, 一种是有界。其中有界包含了有上界和有下界。

定义 1.1.4: 有界性的定义

设 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $I \subset D$. 如果存在某个正数 M, 使对任一 $x \in I$, 有 $|f(x)| \leqslant M$, 则称 $f(z)$ 在 I 上有界; 如果这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

- **有界是指, 同时有上界和下界**
- 从几何上看, 如果在给定的区间, 函数 $y=f(x)$ 的图形能够被直线 $y=-M$ 和 $y=M$" 完全包起来", 则为有界; 从定义上说, 找到某个正数 M, 使得 $|f(z)| \leqslant M$, 则为有界.
- **在讨论有界还是无界的时候首先要指明区间**, 如果没指名区间, 则无法讨论有界性. 如函数 $y=\frac{1}{x}$ 则 $(2,+\infty)$ 上有界, 但是在 $(0,2)$ 上无界.

注 1.1.3: 有界性的判断

- 利用定义
- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界
- $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 且 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 上有界.
- **$f'(x)$ 在区间 I(有限)[a]上有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 I 上有界**

证明.
- 使用拉格朗日中值定理进行证明: 设区间 $I(a,b)$ 由拉格朗日中值定理可得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，固定点 a，那么对区间 $I(a,b)$ 上每一个点求拉格朗日中值定理，那么 $f(x)=f(a)+f'(\xi)(b-a)$, 其中 $f(a)$ 为固定值,$(x-a)$ 为固定值，$f'(\xi)$ 在 $I(a,b)$ 上有界，综上 $f(x)$ 在区间上必有界。
- 使用斜率进行证明: 由几何意义可知,$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的斜率, 那么如果 $f'(x)$ 有界, 那么斜率有界, 那么说明 $f(x)$ 的变化是有界的, 那么更说明 $f(x)$ 不可能无界。
- 使用面积进行证明:$f'(x)$ 在有限区间上有界, 则该区间上 $f'(x)$ 与 x 轴所围成的面积是有界的, 那么说明 $f(x)$ 的变化是有界的, 那么更说明 $f(x)$ 不可能无界。

$\square$

[a]长度有限

题目 4. 已知函数 $f(x)=\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}\,t}{x^a}$在$(0,+\infty)$ 上有界, 则 a 的取值范围为

解答. 如果说 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界, 那么 $f(x)$ 应该在区间两端点连续单侧极限存在. 则 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x\to 0+} f(x)$ 极限存在。下面进行分情况讨论:
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$ 对函数使用洛必达法则. 化简为 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$. 若要 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$ 有界, 那么分母应趋近于无穷。则 $\alpha-1>0$.
$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}=$ 由洛必达法则可知 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha}-1}$. 由等价无穷小可知 $\ln(1+x^2)\sim x^2$. 那么上述等式可化为 $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}$, 若要该极限成立。$\alpha-1\leqslant 2$ 使得极限整体趋于 0. 综上所述,α 的取值范围应为 $(1,3]$.

题目 5. 以下四个命题中正确的是:
(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界
(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界
(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界
(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

解答. **一元函数中，优先看导数，由导数推函数**[1]。同时此处可以使用有界性判断的定理三，可以得出导函数如果在有限区间 I 上有界，那么函数在区间 I 上有界。本题选 C。

题目 6. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$ 使得:
(A)$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加
(B)$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调减少
(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$
(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$

解答. **导数若存在，则导数要么连续，要么只可能有振荡间断点**。A,B 选项：一点可导推不出区间可导[2]。D 显然错误不满足题意，本题选 C。

单调性

定义 1.1.5

设 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间上任意两点 x_1,x_2 当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2 当 $x_1<x_2$，时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**.

虽然单调性的证明一般用求导，但是定义法也需要掌握.

$$
\begin{aligned}
&\text{对任意}x_1,x_2\in D,x_1\neq x_2,\text{有}\\
&\qquad f(x)\text{是单调增函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)\Big[f(x_1)-f(x_2)\Big]{>}0;\\
&\qquad f(x)\text{是单调减函数.}\Leftrightarrow(x_1-x_2)\Big[f(x_1)-f(x_2)\Big]<0;\\
&\qquad f(x)\text{是单调不减函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]{\geqslant}0;\\
&\qquad f(x)\text{是单调不增函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\leqslant0.
\end{aligned}
$$

奇偶性

定义 1.1.6

设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x\in D$，则 $-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

[1] 因为函数导数可以刻画出函数的变化情况
[2] 由符号函数可证得

注 1.1.4

- $f(\varphi(x))$(内偶则偶, 内奇看外)[a]
- 对任意的 x, y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 则 $f(x)$ 是奇函数[b].
- **求导后奇偶性互换**
- **设 $f(x)$ 连续, 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是偶函数;**
  若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是奇函数
- **对于任意函数 $f(x)$, 令 $u(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,$v(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$, 其中,$u(x)$ 是偶函数,$v(x)$ 是奇函数. 因为 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=u(x)+v(x)$**
- **连续的奇函数的一切原函数都是偶函数, 连续的偶函数的原函数中仅有一个原函数是奇函数**[c]
- 奇函数 $y=f(x)$ 的图形关于坐标原点对称, 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义时, 必有 $f(0)=0$.
- 偶函数 $y=f(x)$ 的图形关于 y 轴对称, 且当 $f(0)$ 存在时, 必有 $f'(0)=0$.
- 设 $f(x)$ 是定义在 $[-l, l]$ 上的任意函数, 则

$$F_1(x)=f(x)-f(-x)\text{必为奇函数}; F_2(x)=f(x)+f(-x)\text{必为偶函数}^d$$

[a] 奇 [偶]⇒ 偶; 偶 [奇]⇒ 偶; 奇 [奇]⇒ 奇; 偶 [偶]⇒ 偶; 非奇非偶 [偶]⇒ 偶

[b] 证明如下: 令 $x=y=0$, 则 $f(0)=2*f(0)$, 则 $f(0)=0$, 令 $y=-x$, 则 $f(0)=f(x)+f(-x)$.

[c] 因为奇函数必须过原点, 但是偶函数的原函数后面有一个常数 c 因此仅有一个原函数是奇函数

[d] 证明如下: 已知 $f(x)$ 是任意函数,-1 带入可得,$F_1(-x)=f(-x)-f(x)=-F_1(x)$, 同理可证 F_2 成立.

题目 7. 设 $f(x)$ 连续且为奇函数, 则下列函数中必为偶函数的为

(A) $\int_0^x du \int_0^u tf(t)dt$　　(B) $\int_a^x du \int_0^u f(t)dt$

(C) $\int_a^x du \int_0^u tf(t)dt$　　(D) $\int_0^x du \int_a^u f(t)dt$

周期性

定义 1.1.7

设 $f(x)$ 的定义域为 D, 如果存在一个正数 T, 使得对于任一 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x+T)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期. 从几何图形上看, 在周期函数的定义域内, 相邻两个长度为 T 的区间上, 函数的图形完全一样.

需要注意的是函数的周期性只与 x 的参数有关, 比如若函数 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期. **可以观察到其周期只与 x 的系数有关**

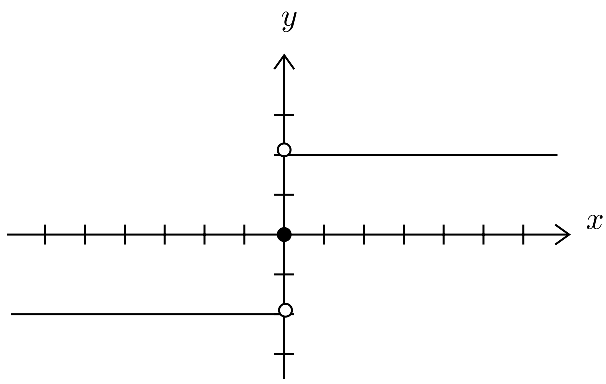
重要结论

- 若 $f(x)$ 是可导的周期为 T 的周期函数, 则 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.
- 设 $f(x)$ 连续且以 T 为周期, 则 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数 $\Leftrightarrow \int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$.
- **周期函数的原函数是周期函数的充要条件是其在一个周期上的积分为 0.**

1.1.5 三种特殊函数

符号函数

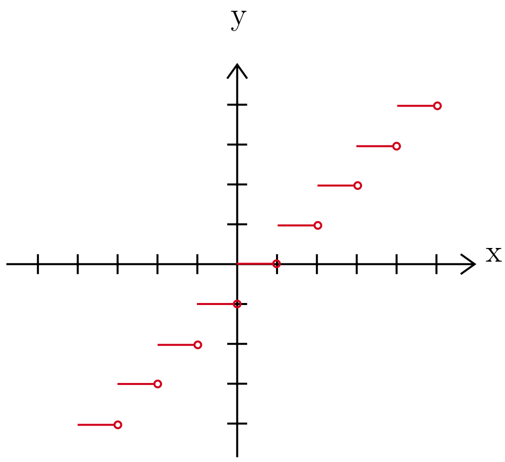
$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$



取整函数

$$y=[x]$$

函数值向左移[3], 即 $x-1<[x]\le x$



[3]坐标轴上向左移

狄利克雷函数

[4]

$$D\left(x\right)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^{c}.\end{cases}$$

1.2 函数图像

1.2.1 常数函数

$y=A$,A 为常数, 其图形为平行于 x 轴的水平直线

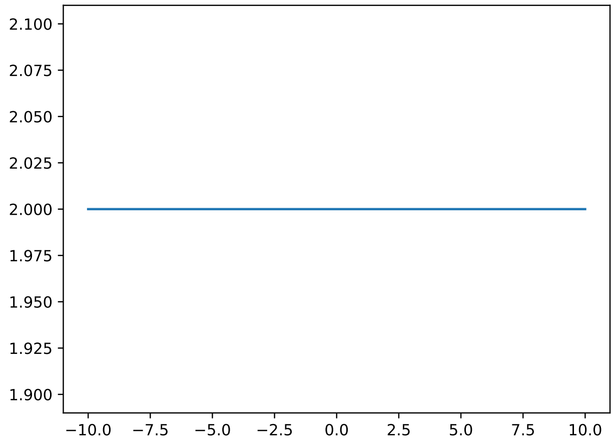


图 1.4: 常数函数图像

1.2.2 幂函数

$$y=x^{\mu}(\mu\text{是实数})$$

[4] 本函数图像无法绘制

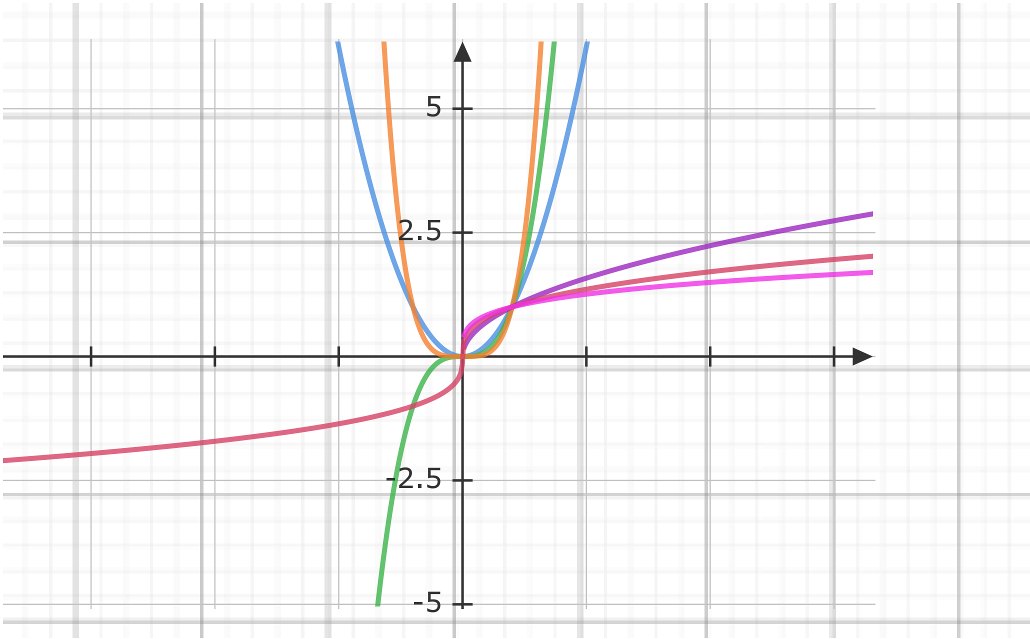


图 1.5: 幂函数图像

注 1.2.1: 幂函数常用技巧

- 当 $\mu > 0$ 且 $0 < x < 1$ 时, 函数随着 μ 的增大而变小 (越大越低)
- 当 $\mu > 0$ 且 $x > 1$ 时, 函数随着 μ 的增大而变大 (越大越高)
- 当 $\mu < 0$ 且 $0 < x < 1$ 时, 函数随着 μ 的增大而变小 (越大越低)
- 当 $\mu < 0$ 且 $x > 1$ 时, 函数随着 μ 的增大而变大 (越大越高)
- 当 $x > 0$ 时, 由 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x}$,$y = \sqrt[3]{x}$,$y = \ln x$ 具有相同的单调性, 因此可以利用这一特性来研究最值
- 见到 $\sqrt{u}$,$\sqrt[3]{u}$ 时, 可用 u 来研究最值
- 见到 $\mid u \mid$ 时, 由 $\mid u \mid = \sqrt{u^2}$, 可用 u^2 来研究最值
- 见到 u_1, u_2, u_3,$\ln(u_1 + u_2 + u_3) = \ln u_1 + \ln u_2 + \ln u_3$ 来研究最值
- 见到 $\frac{1}{u}$ 时, 可用 u 来研究最值 (结论相反), 即 $\frac{1}{u}$ 与 u 的最大值点、最小值点相反

1.2.3 指数函数

$$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$$

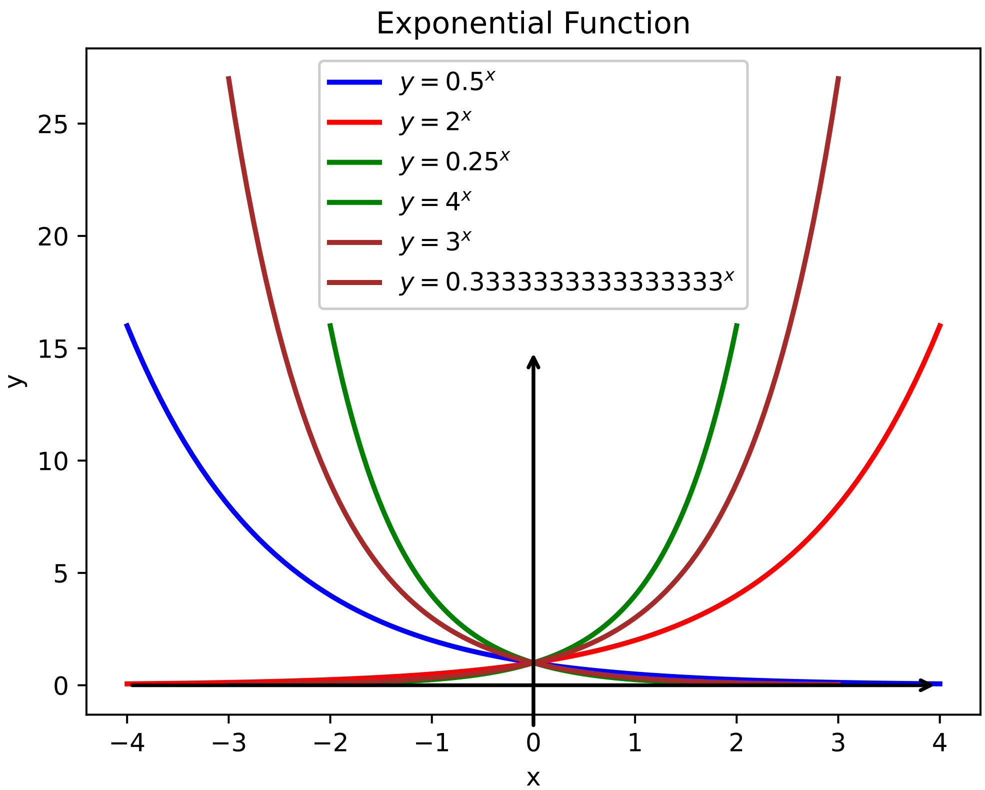


图 1.6: 指数函数图像

注 1.2.2: 指数函数相关性质

- 定义域:$(-\infty,+\infty)$. 值域:$(0,+\infty)$.
- 单调性: 常用的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$
- 极限:$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0,\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$(由于极限的唯一性, 因此在趋于不同的无穷时, 极限值的不同).
- 特殊函数值:$a^0=1$,$\mathrm{e}^0=1$
- 指数运算法则:

$$a^\alpha\times a^\beta=a^{\alpha+\beta},\frac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta a},(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta},(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha,\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha},$$

[a] $eg: e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}\left(e^{\tan x-\sin x}-1\right)$

1.2.4 对数函数

$$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$$

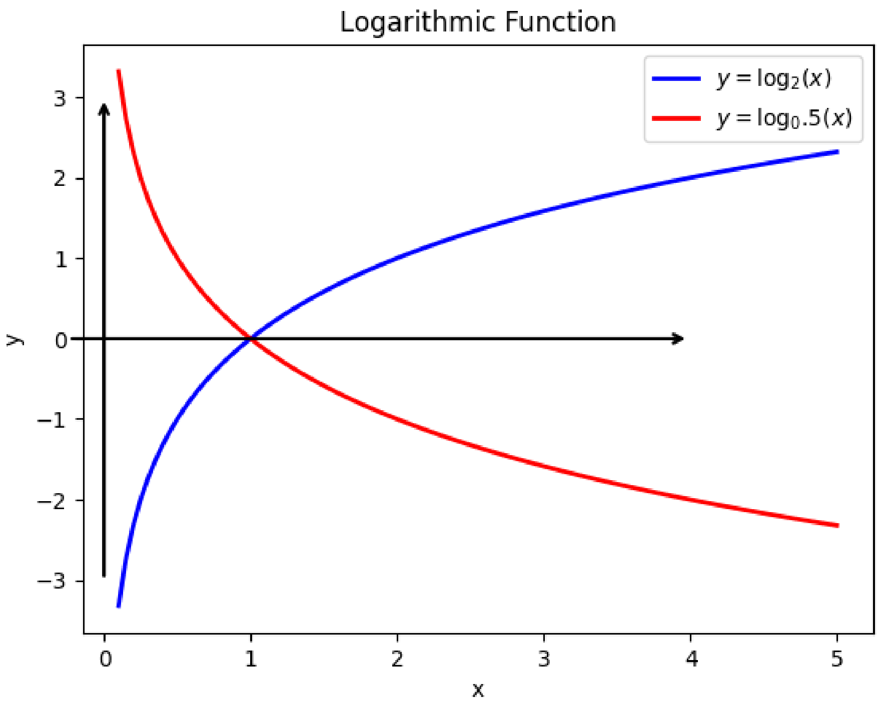


图 1.7: 对数函数图像

注 1.2.3: 对数函数相关性质

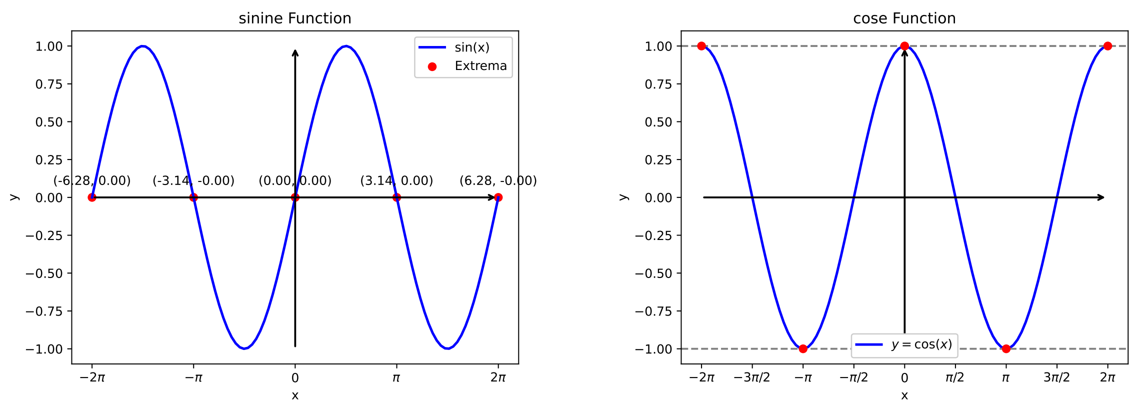
- 定义域:$(0,+\infty)$. 值域:$(-\infty,+\infty)$.
- 单调性: 当 $a>1$ 时,$y=log_a x$ 单调增加; 当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调减少;
- 常用对数函数: $y=\ln x$
- 特殊函数值:$\log_a 1=0$,$\log_a =1$,$\ln 1=0$,$\ln e=1$
- 极限 $\operatorname{limln}_{x\to 0^+} x=-\infty$,$\operatorname{limln}_{x\to +\infty} x=+\infty$.
- 对数运算法则
  - $\log_a (MN)=\log_a M+\log_a N$ (积的对数 = 对数的和) .
  - $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ (= 对数的差) .
  - $\log_a M^n=n\log_a M,\quad \log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$(幂的对数 = 对数的倍数).
- 常用公式:$x=\mathrm{e}^{\ln x}\,(x>0)\,,u^v=\mathrm{e}^{\ln u^v}=\mathrm{e}^{v\ln u}\,(u>0)$
- 当 $x>0$ 时, 常用于中值定理:

$$\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x;\ln\frac{1}{x}=-\ln x;\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{x+1}{x}=\ln(x+1)-\ln x.$$

1.2.5 三角函数

正弦和余弦函数

$$\boxed{y = \sin x} \qquad \boxed{y = \cos x}$$



(a) 正弦函数图像 (b) 余弦函数图像

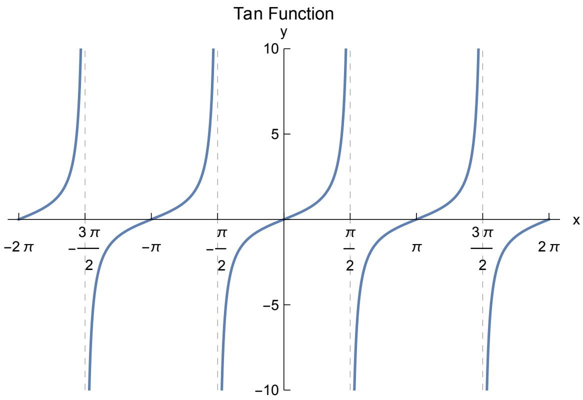
图 1.8: 正余弦函数图像

注 1.2.4: 正余弦函数相关性质

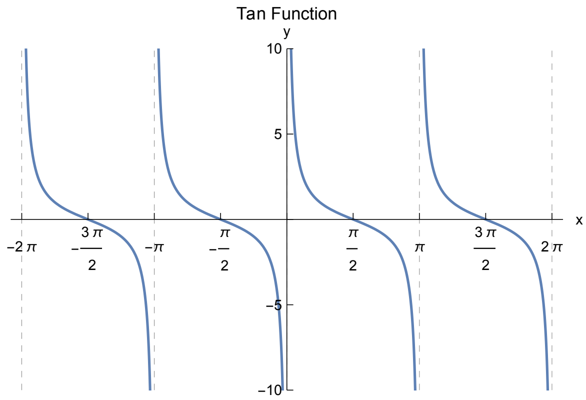
- 定义域:$(-\infty, +\infty)$, 值域:$[-1, 1]$
- 奇偶性:$y = \sin x$ 是奇函数,$y = \cos x$ 是偶函数,$x \in (-\infty, +\infty)$
- 周期性:$y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 均以 2π 为最小正周期.$x \in (-\infty, +\infty)$
- 有界性:$|\sin x| \leqslant 1, |\cos x| \leqslant 1$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

正切和余切函数

$$\boxed{y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}} \qquad \boxed{y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}}$$



(a) 正切函数图像



(b) 余切函数图像

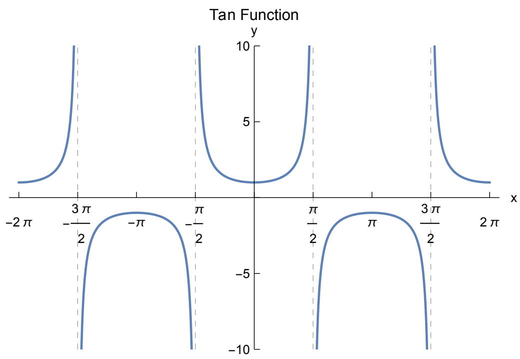
图 1.9: 正余切函数图像

注 1.2.5: 正余切函数相关性质

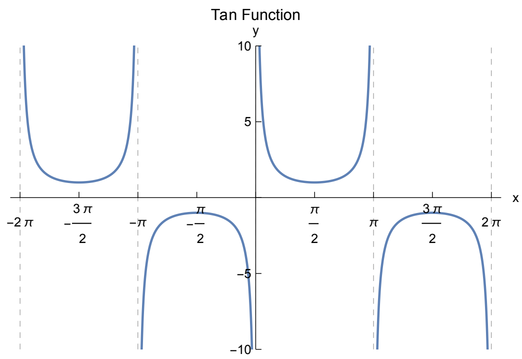
- $y = \tan x$ 的定义域为 $\{x\,|x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\,(k \in \mathbf{Z})\}$;
  $y = \cot x$ 的定义域为 $\{x\,|x \neq k\pi + (k \in \mathbf{Z})\}$;
  值域均为 $(-\infty, +\infty)$
- 奇偶性: 均为奇函数
- 周期性: 均以 π 为最小正周期

正割和余割函数

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}} \qquad \boxed{\csc x = \frac{1}{\sin x}}$$



(a) 正割函数图像



(b) 余割函数图像

图 1.10: 正余割函数图像

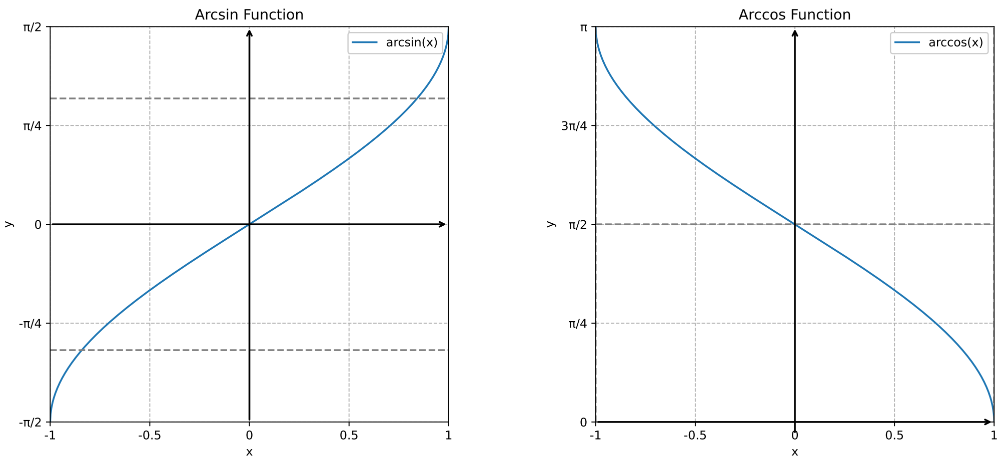
注 1.2.6: 正余割函数相关性质

- 定义域:$y = \sec x$ 的定义域是 $\{x\,|x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\,(k \in \mathbf{Z})\}$;$y = \csc x$ 的定义域为 $\{x|x \neq k\pi, (k \in \mathbf{Z})\}$ 值域均为:$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- 奇偶性:$y = \sec x$ 为偶函数,$y = \csc x$ 为奇函数
- 周期性: 最小正周期均为 2π
- $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha; 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$

反三角函数

反正弦和反余弦函数

$\boxed{y = \arcsin x}$ $\boxed{y = \arccos x}$



(a) 反正弦函数图像 (b) 反余弦函数图像

图 1.11: 反正余弦函数图像

由于这两个函数分别是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的反函数, 因此可以知道的是,$\sin x$ 的值域是 $\arcsin x$ 的定义域. 因此可以得到下面的结论

注 1.2.7: 反正余弦函数相关性质

- 定义域 $[-1, 1]$,$y = \arcsin x$ 值域 (主值区间)$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,$y = \arccos x$ 值域 (主值区间)$[0, \pi]$
- 性质:$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$(求导后可以发现导数为 0)

注 1.2.8: 反三角函数恒等式

$$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1,1], \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1];$$

$$\cos(\arccos x) = x, x \in [-1,1], \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]^{a};$$

上述两个式子可抽象为 $f^{-1}f(x) = x$. 需要注意的是其值需要在值域内.

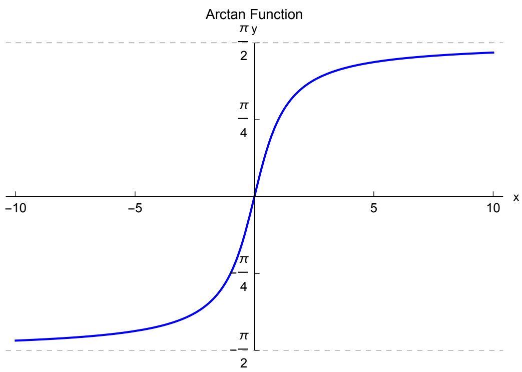
$$\arcsin(\sin y) = y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos(\cos y) = y, y \in [0, \pi]$$

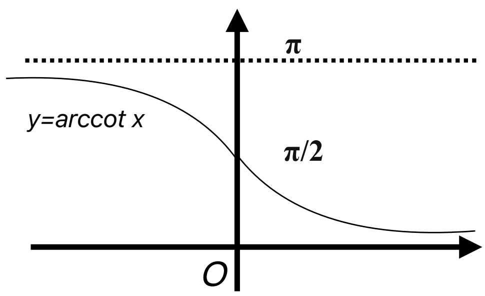
[a]证明如下: 令 $t = \arccos x \in [0,\pi]$,$\cos t = x$, 又 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, 那么 $\sin t = \sqrt[2]{1-x^2}$, 即 $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

反正切和反余切函数

$\boxed{y = \arctan x}$ $\boxed{y = \operatorname{arccot} x}$



(a) 反正切函数图像



(b) 反余切函数图像

图 1.12: 反正余切函数图像

注 1.2.9: 反正余切函数相关性质

- 定义域 $[-\infty, +\infty]$,$y = \arctan x$ 值域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,$y = \operatorname{arccot} x$ 值域 $(0, \pi)$
- 性质:$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$(求导后可以发现导数为 0)

1.2.6 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算, 以及有限次的复合步骤所构成的并且可以由一个式子所表示的函数称为初等函数.

注 1.2.10

幂指函数 $u(x)^{\nu(x)} = e^{\nu(x)\ln u(x)}$ 也是初等函数, 如 $x > 0$ 时,$f(x) = x^x = e^{x\ln x}$. 其函数图像如下所示:

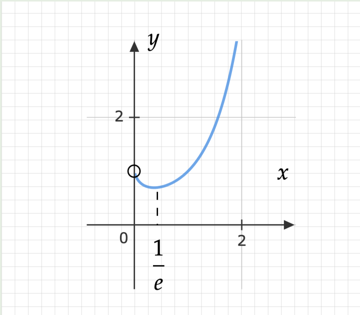


图 1.13: 函数 x^x 图像

1.2.7 图像绘制

极坐标下的图像

- 用描点法绘制函数图像: 就是把每一个点求出来, 然后连接起来即可, 但是需要点足够多
- 用直角坐标系观点画极坐标系的图像, 以函数 $r = 2(1 + \cos\theta)$ 为例.

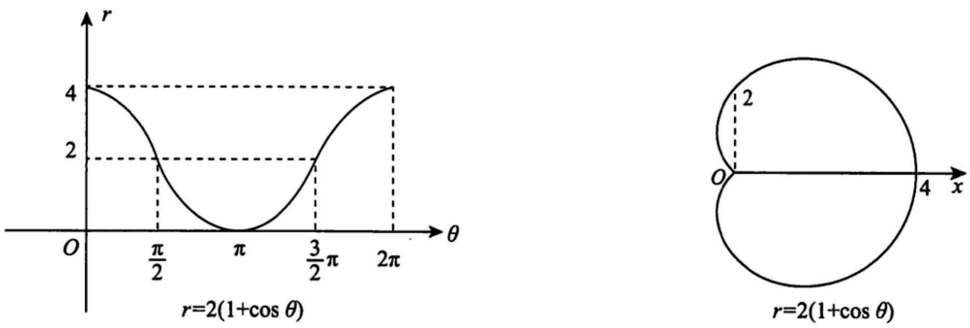


图 1.14: 函数 $r = 2(1 + \cos\theta)$ 图像

可以看到 $\theta - r$ 的坐标系的关键点为 $(0, 4), (\frac{\pi}{2}, 2), (\pi, 0), (\frac{3}{2}\pi, 2), (2\pi, 4)$ 这五个点, 那么在极坐标系下可以绘制出这些点, 比如在 $x = 4$ 时,$\theta = 0$,$x = 2$ 时,$\theta = \frac{\pi}{2}$,$x = 0$ 时,$\theta = \pi$.

参数方程

通过第三个变量即参数来表示别的两个变量.
摆线参数方程:

$$\begin{cases} x = r\left(t - \sin t\right) \\ y = r\left(1 - \cos t\right). \end{cases}$$

星型线参数方程:

$$\begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\sin^3 t \end{cases}$$

1.3 常用函数知识

1.3.1 数列

等差数列

首项为 a_1, 公差为 $d(d \neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1+d, a_1+2d, \cdots, a_1+(n-1)d, \cdots$.

注 1.3.1: 等差数列相关性质

- 通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$
- 前 n 项的和 $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

等比数列

首项为 a_1, 公比为 $r(r \neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1r, a_2r^2, \dots, a_1r^{n-1}, \dots$

注 1.3.2: 等比数列相关性质

- 通项公式 $a_n = a_1r^{n-1}$
- 前 n 项的和 $S_n = \begin{cases} na_1, & r=1, \\ \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1. \end{cases}$
- $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}(r \neq 1)$.

常见数列前 n 项和

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}. \\ &\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \\ &\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}}$$

1.3.2 三角函数

三角函数基本关系

$$
\begin{array}{|lll|}
\hline
\csc\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha} & \sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha} & \cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}\\
\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} & \\
\hline
\end{array}
$$

倍角公式

$$
\boxed{\begin{aligned}
&\sin 2a=2\sin a\cos a,\quad \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=1-2\sin^2 a=2\cos^2 a-1\\
&\sin 3\alpha=-4\sin^3 a+3\sin\alpha,\quad \cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a\\
&\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\quad \cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}.
\end{aligned}}
$$

半角公式

$$
\boxed{\begin{aligned}
&\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha),\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha),\\
&\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\\
&\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\\
&\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.
\end{aligned}}
$$

和差公式

$$
\boxed{\begin{aligned}
&\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta cos\alpha\sin\beta\\
&\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\\
&\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\
&\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.
\end{aligned}}
$$

积化和差公式

$$
\boxed{\begin{aligned}
&\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],\\
&\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].
\end{aligned}}
$$

和差化积公式

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2},\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2},\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}.\end{array}}$$

万能公式

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\\ \\ \cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\end{array}}$$

1.3.3 指数运算法则

$$\boxed{a^a\times a^\beta=a^{a+\beta},\quad \frac{a^a}{a^\beta}=a^{a-\beta},\quad (a^a)^\beta=a^{a\beta},\quad (ab)^a=a^ab^a,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^a=\frac{a^a}{b^a}}$$

1.3.4 对数运算法则

$$\boxed{\begin{array}{l}log_a(MN)=\log_a M+\log_a N\\ \log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N\\ \log_a M^n=n\log_a M.\\ \log_a\sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_a M.\end{array}}$$

1.3.5 一元二次方程基础

- 一元二次方程组:$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$
- 根的公式:$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- 根与系数的关系:$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}$.
- 判别式:$\Delta=b^2-4ac$
- 抛物线顶点坐标:$(-\frac{b}{2a},c-\frac{b^2}{4a})$

1.3.6 因式分解公式

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \qquad (a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$ (n 是正整数)

n 是正奇数时, $a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k=$$

$$a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+nab^{n-1}+b^n$$

1.3.7 阶乘与双阶乘

- $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$, 规定$0!=1$.
- $(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)=2^n\cdot n!$
- $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$

1.3.8 常用不等式

1. 设 a,b 为实数, 则 $|a+b|\leq|a|+|b|;|\ |a|-|b|\ |\leqslant|a-b|$

注 1.3.3

可以将第一个式子推广为:
离散情况: 设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 为实数, 则 $|a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$
连续情况: 设 $f(x)$ 在 $[a,b](a<b)$ 上可积, 则 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$

2. $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a,b>0)$

注 1.3.4

还有一个不等式是 $|ab|\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$

3. $\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}(a,b,c>0)$
4. 设$a>b>0$, 则 $\begin{cases}\text{当}n>0\text{ 时}, a^n>b^n,\\ \text{当}n<0\text{ 时}, a^n<b^n.\end{cases}$
5. 若$0<a<x<b,0<c<y<d$, 则$\frac{c}{b}<\frac{y}{x}<\frac{d}{a}$.

注 1.3.5

当$n\pi < x < (n+1)\pi, 2n < S(x) < 2(n+1)$时, $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$.

6. $\sin x < x < \tan x\,(0 < x < \frac{\pi}{2})$
7. $\sin x < x(x > 0)$

注 1.3.6

当 $x_n > 0$ 时,$x_{n+1} = \sin x_n < x_n$, 故 x_n 单调减少

8. $\arctan x \leqslant x \leqslant \arcsin x(0 \leqslant x \leqslant 1)$
9. $e^x \geqslant x + 1(\forall x)$

注 1.3.7

当$x_{n+1} = \mathrm{e}^{x_n} - 1$ 时, 由$\mathrm{e}^{x_n} - 1 \geqslant x_n$,得$x_{n+1} \geqslant x_n$,即$\{x_n\}$单调不减

10. $x - 1 \geqslant \ln x(x > 0)$

注 1.3.8

当$x_n > 0$时, 若$x_{n+1} = \ln x_n + 1$,由$\ln x_n + 1 \leqslant x_n$,得$x_{n+1} \leqslant x_n$,即$\{x_n\}$单调不增

11. $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}(x > 0)$

注 1.3.9

令 $f(x) = \ln x$, 并在区间 $[x, x+1]$ 上对其使用拉格朗日中值定理, 有

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}$$

其中 $0 < x < \xi < x + 1$, 因此对任意的 $x > 0$, 有 $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$

12. 在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如 $(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}})...(1 + \frac{1}{2^{2^n}})$, 可化为 $(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}})...(1 + \frac{1}{2^{2^n}}) * \frac{4}{3}$

1.3.9 绝对值等式

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$$

$$\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$$

第二章　极限

2.1　数列的极限

2.1.1　数列极限的定义

定义 2.1.1

设 $|x_n|$ 为一数列, 若存在常数 a, 对于任意的 $\varepsilon > 0$(不论它多么小),总存在正整数 N, 使得当$n > N$时 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称数 a 是数列 $|x_n|$ 的极限, 或者称数列 $|x_n|$ 收敛于 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或} x_n \to a(n \to \infty).$$

该定义的 $\varepsilon - N$ 语言描述是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists \text{正整数} N, \text{当} n > N \text{时}, \text{有} |x_n, -a| < \varepsilon.$$

其中 $\forall\varepsilon > 0$ 是白给的信息, 随便写.$\exists$正整数N 是关键. 因为第二句话说的是一定存在正整数 N, 你怎么才能够证明存在正整数 N 呢? 那就必须把这个正整数 N 给找出来，你找出来才能够证明这个 N 是存在的. 关键第三句话叫做桥梁，桥梁什么意思? 就是 n 大于 N 的时候 n 大于 N 的时候，也就意味着 N 趋近于无穷的过程中. 在大 N 项之后的所有的项. 最后一句话叫做突破口., 不是要去找这个 N 吗? 你找到 N 才能够证明这个 N 是存在的, 我们一般情况下就用第四句话来寻找大 N.

在上面的定义中,$\varepsilon > 0$ 的 ε 任意性是非常重要的, 只有这样才能表示出无限接近的意义. 总存在正整数 N, 使得 $n > N$ 这个条件用于表达 $n \to \infty$ 的过程.

注 2.1.1

- 数列的极限值与数列的前有限列无关, 只与后面无穷项有关
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$
- **$\varepsilon - N$ 几何意义: 对于点 a 的任何 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 一定存在 N, 当 $n < N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内, 而只有有限个 (最多有 N 个) 在区间之外.**

题目 8. 已知 $x_n=\dfrac{\left(-1\right)^n}{\left(n+1\right)^2}$, 证明数列 x_n 的极限是 0

题目 8 的注记. 根据数列极限的定义可知,$\forall\varepsilon>0,\exists$正整数$N$,当$n>N$ 时,有$|x_n-0=\dfrac{\left(-1\right)^n}{\left(n+1\right)^2}|<\varepsilon.$, 即 $x_n=\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{n^2}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 即令 $N>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 是一个确定的实数, 大于它的正整数有无穷个, 仍取其中一个作为 N 即可.

解答. $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+1$, 则总有 $x_n=\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{n^2}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 则数列 x_n 的极限是 0

2.1.2 收敛数列的性质

唯一性

定理 2.1.2

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一

有界性

定理 2.1.3

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

注 2.1.4

需要注意的是, 如果数列有界, 但是不一定存在极限, 如数列 $(-1)^n$

保号性

定理 2.1.5

如果 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$,且$a>0$(或$a<0$),那么存在正整数N,当$n>N$ 时,都有$x_n>0$ (或$x_n<0$)

推论 2.1.6

如果数列 $|\ x_n\ |$ 从某项起有$x_n\geqslant 0$(或$x_n\leqslant 0$),且 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, 那么$a\geqslant 0$(或$a\leqslant 0$).

收敛数列与其子数列之间的关系

如果数列 x_n 收敛于 a, 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 a

注 2.1.7

需要注意的是, 证明数列极限存在一般通过证明数列有界并且单调, 证明有界则一般通过放缩法. 但是证明数列发散则一般通过一下两种方法:1. 至少一个子数列发散.2. 两个子数列收敛, 但是收敛值不同.

2.2 函数的极限

2.2.1 超实数系

定义 2.2.1: 超实数系的概念

超实数 (Hyperreal number) 是一个包含实数以及无穷大和无穷小的域，它们的绝对值分别大于和小于任何正实数。

注 2.2.1

- 超实数集**是为了严格处理无穷量 (无穷大量和无穷小量) 而提出的**。
- 超实数集, 或称为非标准实数集, 记为 $^*\mathbb{R}$, 是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个扩张.

2.2.2 邻域

[1]

定义 2.2.2: 邻域的相关概念

- δ 邻域: 设 x_0 是数轴上一个点,δ 是某一正数, 则称 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0,\delta)$, 即:
$$U(x_0,\delta)=\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x|\,|x-x_0|<\delta\}$$
- 去心 δ 邻域: 定义点 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$
- 左, 右 δ 邻域:$\{x|0<x-x_0<\delta\}$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域, 记作 $U^+(x_0,\delta)$;$\{x|0<x_0-x<\delta\}$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域, 记作 $U^-(x_0,\delta)$.

2.2.3 函数极限的定义

函数极限的定义主要分为自变量趋于有限值 $(x\to x_0)$ 时的极限和自变量趋于无穷大时函数的极限 $(x\to\infty)$

[1]邻域与区间不同, 邻域属于区间的范畴. 但是邻域通常表示"一个局部位置". 比如"点 x_0 的 δ"邻域, 可以理解为"点 x_0"的附近, 而区间是明确指出在实数系下的范围

自变量趋于有限值时的函数极限

定义 2.2.3: 当自变量趋于有限值时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ε(**不论它多么小**)[a], 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限, 记作:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 f(x)\to A(当 x\to x_0)$$

其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, 当 0<|x-x_0|<\delta 时, 有 |f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 在证明中，这两句是白给，直接写。后面的才是关键。

[a] ε 用于衡量 $|f(x)-A|$ 的值有多小

注 2.2.2

在函数极限中 $x\to\infty$ 指的是 $|x|\to\infty$, 需要 x 趋于正无穷和负无穷, 但在数列中的 $n\to\infty$ 是 $n\to+\infty$

单侧极限

定义 2.2.4: 单侧极限的定义

若当 $x\to x_0^-$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 A, 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**, 记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A.$$

若当 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 A, 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**, 记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A$$

题目 9. 已知 $\lim_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$存在, 求$a$的值

解答. 由于存在 arctan 与 $|x|$ 函数, 则对于 0 点的极限值需要分左右进行计算.
$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to 0^-} a\arctan\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}=-\frac{\pi}{2}a+\frac{1}{\mathrm{e}}$

$\lim_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to 0^+}a\arctan\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}$ 若极限存在，则 $a=\frac{1-e^2}{\pi e}$

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 2.2.5: 自变量趋于无穷大时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ε.(不论它多么小), 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限, 记作:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{或}f(x)\to A(\text{当}x\to x_0)$$

其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时},\text{有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 在证明中，这两句是白给，直接写。后面的才是关键。

需要注意的是趋向的值不同时,$\varepsilon-N$ 写法不同, 不能照抄. 其 $\varepsilon-N$ 的表达为如下表格:

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时, 即有 $f(x)>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $f(x)>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$

继续下一页

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$, 使当 $\mid x\mid> X$ 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当 $\mid x\mid> X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当 $\mid x\mid> X$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当 |x|>X 时, 即有 $f(x)<-M$.
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$, 使当 x>X 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当$x>X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当$x>X$时, 即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当 x>X 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$, 使当$x<-X$ 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当$x<-X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当$x<-X$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当$x<-X$时, 即有 $f(x)<-M$.

注 2.2.3: 上表的部分解释

- 以 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 为例: 不管 $f(x)$ 与 A 的距离多近 ($\forall\varepsilon>0$), 总有 x 不断靠近 x_0, 使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$.
- 以 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 为例: 不管 M 多大, 总有当 $x>\infty$ 时, 使得 $|f(x)>M|$, 即满足 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

2.2.4 函数极限的性质

唯一性

定理 2.2.4

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 那么极限唯一

注 2.2.5: 关于唯一性的说明

- 对于 $x\to\infty$, 意味着 $x\to+\infty$ 且 $x\to-\infty$
- 对于 $x\to x_0$, 意味着 $x\to x_0^+$ 且 $x\to x_0^-$
  对于上述问题, 我们称为自变量取值的"双向性". 以下有一些常见的问题:
  - $\lim_{x\to\infty} e^x$ 不存在, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$ 不存在, $\lim_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在, $\lim_{x\to x_0}[x]$ 不存在.
  - 其不存在的原因均为分段函数分段点极限表达式不同, 需要分别求左右极限.

注 2.2.6: 极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A, \text{且} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A^a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0(\text{无穷小量}\alpha(x) = 0)^b$$

[a] 左右极限都存在且相等

[b] 对于此概念, 如果引入超实数系的解释应为 A 是 $f(x)$ 的标准实数部分, 而 $f(x)$ 的值是超实数系下的值, 因此其值应为 $f(x) = A + \alpha(x)$

注 2.2.7: 极限不存在的情况

- **函数在该点附近趋于无穷**
- 函数在该点的左右极限只存在一个, 或两者都存在但不相等
- 函数在该点附近不停地震荡
- 该点是函数无定义点的聚点

注 2.2.8: 一些重要的函数极限问题

以下类型的函数由于自变量取值的双向性因此需要进行特殊讨论:

- $\lim_{x\to\infty} e^x$:$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|}$:$\lim_{x\to 0^+} = \frac{\sin x}{x} = 1$,$\lim_{x\to 0^-} = \frac{\sin x}{-x} = -1$
- $\lim_{x\to\infty} \arctan x$:$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x\to 0}[x]$:$\lim_{x\to 0^+}[x] = 0, \lim_{x\to 0^-}[x] = -1$

局部有界性

定理 2.2.9

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时[a], 有 $|f(x)| \le M$.

[a] 对局部有界性的描述需要指明是在那个区间上

注 2.2.10: 局部有界性的性质

- 极限存在必有界, 有界函数极限不一定存在.
- 若 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.
- **若 $f(x)$ 在 (a,b) 内为连续函数, 且 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必定有界.**
- 有界函数与有界函数的和, 差, 积仍为有界函数[a].

[a]商不是有界函数, 因为:$y_1 = 1, y_2 = 0, \frac{y_1}{y_2} = \infty$

题目 10. 在下列区间内, 函数 $f(x) = \frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$ 有界的是:
A:(-2,1) B:(-1,0) C:(1,2) D:(2,3)

解答. 又题意可知, 函数的分段点为 $x = 3, 0, 1$, 对上述三点求极限, 分析可得, 当 $x = 3, 1$ 时, 函数极限为 ∞, 因此函数在上述两点的极限不存在, 因此根据局部有界性的性质可得, 含这两个点的区间无界, 因此排除 A,C,D. 答案为 B.

局部保号性

定理 2.2.11

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > 0$($f(x) < 0$)[a].
如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$), 而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 那么 $A \leqslant 0$ 或 $(A \leq 0)$[b].

[a]如果函数在 x_0 附近的极限值为正, 那么 x_0 附近的函数值为正
[b]如果函数在 x_0 附近的函数值 ≤ 0, 那么 x_0 此处的极限值 ≤ 0

对上述定理中, 为什么一个可以等于 0, 一个不能等于 0? 其解释如下: 如果第一个定理中 $A \leqslant 0, f(x) \leqslant 0$, 那么以函数 $f(x) = x^2$ 为例, 虽然 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, 但是邻域内的函数值都大于 0. 对于第二个定理中如果 $f(x) < 0, A < 0$, 那么以函数 $f(x) = -x^2$ 为例, 虽然邻域内的函数值都小于 0, 但是 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

注 2.2.12: 局部保号性的证明

证明. 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0$, 所以, 取 $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$, $\exists\delta > 0$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

□

由上述证明可得如下推论

推论 2.2.13

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0(A \neq 0)$，那么就存在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x \in U^\circ(x_0)$ 时，就有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

函数极限与数列极限的关系 (海涅定理)

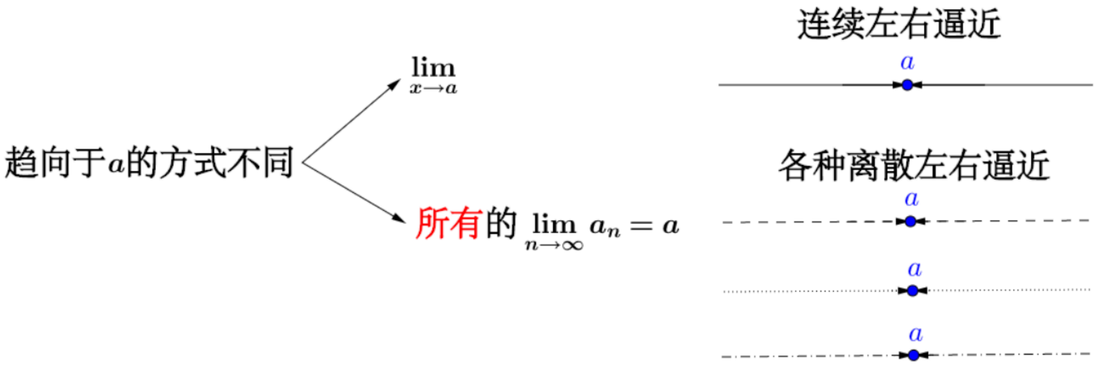
定理 2.2.14

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ 存在的充要条件是：对属于函数 $f(x)$ 定义域的任意数列，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,$a_n$ 不等于 a，有 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$.

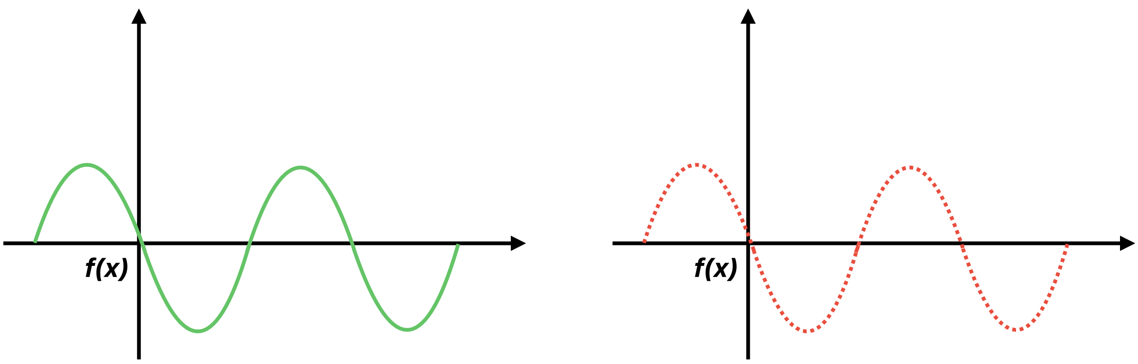
把这个定理简化一下，主要意思就是

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{所有的} \lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{有} \lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$$

其不同之处在于是离散的趋近还是连续的趋近



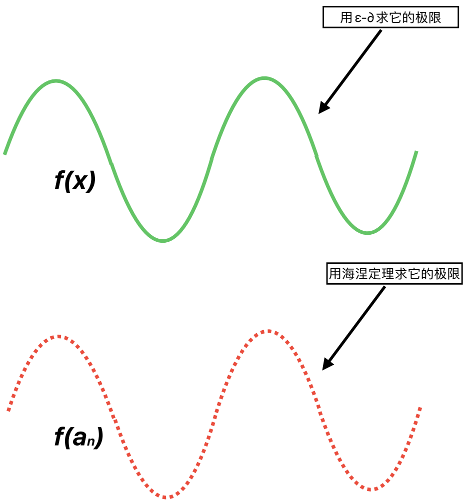
除此之外,$f(x)$ 和 $f(a_n)$ 的函数图像如下所示



(a) 函数 $f(x)$ 图像　　(b) 函数 $f(a_n)$ 图像

图 2.1: $f(x)$ 与 $f(a_n)$ 函数图像

$f(a_n)$ 其实是 $f(x)$ 的抽样



需要注意的是, 是所有的数列（抽样）才能完全代表整体. 不能说我选了某个数列有极限就代表函数有极限.

总结:海涅定理表述了离散与连续、数列极限与函数极限的关系.

2.3 无穷小与无穷大

2.3.1 无穷小

定义 2.3.1: 无穷小的定义

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷小.

$f(x)$ **是可以本身为** 0 **或者无限趋近于零, 其中** 0 **可以作为无穷小唯一常数**.

注 2.3.1: 无穷小与函数极限的关系 (脱帽法)

$\lim_{x \to \bullet} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x \to \bullet} f(x)$ 为超实数值，其实数部分为 A，函数 $f(x)$ 的函数值为 $A + \alpha$

2.3.2 无穷小的性质

1 有限个无穷小的和是无穷小[2]

证明. 设 α_1 和 α_2 为无穷小量。则 $0 \leqslant |\alpha_1 + \alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|$,$|\alpha_1| + |\alpha_2|$ 的极限为 0。证明完毕。 □

[2]无穷个无穷小的和不一定是无穷小，如 $\lim_{n\to\infty} = (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{n+n}) = \ln 2$

2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小[3]

证明. $|\alpha_1| \leqslant M$,α_2 是无穷小量。那么 $0 \leqslant |\alpha_1 \times \alpha_2| = |\alpha_1| \times |\alpha_2| \leqslant M \times |\alpha_2|$ 证明完毕。 □

3 有限个无穷小的乘积是无穷小[4]

2.3.3 无穷小的比阶

定义 2.3.2

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么就说 β 与 α 是同阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$,$k > 0$, 那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小[a];
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么就说 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$

[a]不是相等，超实数系下没有加减运算，只可以进行替换运算

前三个定义解释:$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ 是指分子趋于 0 的速度比分母快,$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ 是指分子趋于 0 的速度比分母慢,$\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ 是指趋于 0 的速度一样.

同时需要注意的是, **并不是任意两个无穷小都可进行比阶的**. 例如, 当 $x \to 0$ 时,$x \sin \frac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小, 但是却不可以比阶, 也就是说既无高低阶之分, 也无同阶可言, 因为 $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 其值为 ∞ 和 0。

2.3.4 无穷小的运算

[5] 设 m, n 为无穷小，则

1. $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min\{m, n\}$
2. $o(x^m) \bullet o(x^n) = o(x^{m+n}), x^m \bullet o(x^n) = o(x^{m+n})$
3. $o(x^m) = o(kx^m) = k \bullet o(x^m), k \neq 0$

[3]无界函数 × 无穷小量不一定是无穷小，如 $\lim_{x\to\infty} x \times \frac{1}{x} = 1$
[4]这个地方虽然张宇老师给出了证明，但是好像存在一定的争议性
[5]此处多用于泰勒公式的应用中，会对上述高阶无穷小的运算提出要求

2.3.5 无穷大

定义 2.3.3: 无穷大的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于来一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大), 总存在正数 δ(或数 X), 只要 x 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)|>M$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$[a]) 时的无穷大.[b] 其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0, \text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时}, \text{有}|f(x)|>M.$$

[a]等价于 $x\to-\infty$ 同时 $x\to+\infty$

[b]**无穷大一定无界，但无界不一定是无穷大量。**与无穷小相同，都是一个极限过程，因此无穷大也是一个极限，所以无界不一定是无穷大量

题目 11. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$

解答. $\forall M>0$ 令 $\delta=\frac{1}{4M}>0$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 即 $0<|x-1|<\frac{1}{4M}$ 时,$|x-1|<\frac{1}{M}$, 所以 $\frac{1}{|x-1|}>M$ 这就证明了 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$

注 2.3.2: 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x)\neq 0$, 那么存在常数 $\frac{1}{f(x)}$

2.3.6 无穷大的比阶

- 当 $x\to+\infty$ 时,$\ln^a x \ll x^\beta \ll a^x$,其中$\alpha>0,\beta>0,a>1$.[6]
- 当 $n\to\infty$ 时,$\ln^a n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$,其中$\alpha>0,\beta>0,a>1$.

2.3.7 无穷大的性质

- 两个无穷大量的积仍未无穷大量
- 无穷大量与有界变量的和仍是无穷大量

[6]由洛必达公式证明

2.4 函数极限的运算

2.4.1 极限的四则运算法则

如果极限不存在，那么极限属于超实数系的范畴，在超实数系下不可以进行代数运算，只可以进行替换运算。但是如果极限均存在，那么可以进行代数计算。

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 那么

- $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k\lim f(x) \pm l\lim g(x) = kA \pm lB$, 其中 k, l 为常数
- $\lim[f(x) \bullet g(x)] = \lim f(x) \bullet \lim g(x) \equiv A \bullet B$, 特别的，若 $\lim f(x)$ 存在,n 为正整数，则 $\lim[f(x)]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}(B \neq 0)$

注 2.4.1: 常用结论

- 存在 $\pm$ 不存在 $=$ 不存在 (只有这一个是不存在，其余都是不一定或者存在)
- 不存在 $\pm$ 不存在 $=$ 不一定[a]
- 存在 $\times(\div)$ 不存在 $=$ 不一定
- 不存在 $\times(\div)$ 不存在 $=$ 不一定
- 若 $\lim f(x) = A \neq 0$, 则 $\lim f(x) \lim g(x) = A \times \lim g(x)$

[a] 反例：$\lim_{x\to 0}(\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}) = 0$

题目 12. 若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, 则 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$

证明. $g(x) = \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$。求极限得 $\lim g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\lim f(x)}{\lim \frac{f(x)}{g(x)}} = 0$. 证明完毕[7]。 □

2.4.2 洛必达法则

定义 2.4.1

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0(\infty)$
- $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或∞)

则 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

需要注意的是使用过洛必达法则之后的极限必须存在，即 $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 必须存在.

[7] 此证明为结论，经常使用

题目 13. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\times\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

解答. 该函数也是 $\frac{0}{0}$ 型，但是如果使用洛必达法则，则 $2x\times\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, 极限显然不存在，因此不可以使用洛必达法则。则正确求法为 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\times\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\times\sin\frac{1}{x}=0$.

2.4.3 泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处 n 阶可导[8], 则存在 $x=0$ 的一个邻域，对于该领域内的任一点 x, 有:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

当 $x\to 0$ 时, 有以下结论

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$
$\arcsin x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$
$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$	$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$
$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$(1+x)^a=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$

注 2.4.2: 泰勒公式应用时的展开原则

- $\frac{A}{B}$ 型，适用于" 上下同阶" 原则: 具体来说，如果分母或者分子是 x 的 k 次幂，则应把分子或分母展开到 x 的 k 次幂。如:$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$，此处 $\ln(1+x)$ 应展开为 $x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$
- $A-B$ 型, 适用" 幂次最低" 原则: 将 A,B 分别展开到他们系数不相等的 x 的最低次幂为止。如: 已知当 $x\to 0$ 时，$\cos x-e^{\frac{x^2}{2}}$ 与 ax^b 为等价无穷小, 求 a,b. 则应展开为 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)$.

2.4.4 极限存在准则的两个应用 (两个重要极限)

$$\lim_{\square\to\infty}(1+\frac{1}{\square})^{\square}=e$$

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

[8]泰勒公式是在一点处展开, 函数必须在那一点处 n 阶导数存在

2.4.5 夹逼准则

定义 2.4.2: 函数极限存在准则

如果

- 当 $x \in U^{\circ}(x_0, r)$(或 $|x| > M$) 时

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

- $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} g(x) = A, \lim_{x\to x_0(x\to\infty)} h(x) = A$

那么 $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} f(x)$ 存在, 且等于 A.

- 夹逼准则处主要通过放缩来求极限
- 常用的结论有: 若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n}$, 其中 $a_i > 0(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$, 令 $\max a_i = a$, 则 $\sqrt[n]{a^n} \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leqslant \sqrt[n]{ma^n}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n} = a, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m \cdot a^n} = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a$

2.4.6 单调有界准则

定义 2.4.3: 函数的单调有界准则

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 一定存在

2.4.7 函数极限的运算法则

定义 2.4.4

如果 $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$, 而 $\lim \varphi(x) = A$, $lim\psi(x) = B$, 那么 $A \geqslant B$

定义 2.4.5: 复合函数极限运算法则

设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义，若 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$,$\lim_{u\to u_0} f(u) = A$, 且存在 $\delta_0 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 时，有 $g(x) \neq u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim_{u\to u_0} f(u) = A.$$

注 2.4.3: 常用的结论

- $\lim f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x) = A \lim g(x)$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在,$\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$

2.4.8 等价无穷小替代

关于等价无穷小, 有以下两个定理

定义 2.4.6

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha)$$

定义 2.4.7

设 $\alpha\sim\tilde{\alpha}$,$\beta\sim\tilde{\beta}$, 且 $\lim\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在, 则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 但是需要遵循以下代换原则[a]

- 乘除关系可以换: 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$
- 加减关系一定条件下可以换
  - 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq 1$, 则$\alpha-\beta\sim\alpha_1-\beta_1$
  - 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq -1$, 则$\alpha+\beta\sim\alpha_1+\beta_1$

加减关系代换准则证明如下:

证明.

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\beta_1}=\lim\frac{\beta(\frac{\alpha}{\beta}-1)}{\beta_1(\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1)}=1$$

□

[a]其实没有什么替换原则，本质其实是因为超实数系下不能进行实数运算，只能进行替换运算

以下为常用等价无穷小
当 $x\to 0$ 时, 有

$$\boxed{\begin{aligned}&x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\\&\quad\sim\ln(1+x)\\&\quad\sim e^x-1\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(1+x)^a\sim 1+ax\\&a^x-1\sim x\ln a\end{aligned}}$$

注 2.4.4: 上述结论的推广

当 $x \to 0$ 时, 若 $(1+x)^a - 1 \sim ax$, 则 $\alpha(x) \to 0, \alpha(x)\beta(x) \to 0$, 则

$$[1+\alpha(x)]^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}x^2 \sim 1-\cos x \sim \sec x - 1 \sim x - \ln(1+x)}$$

$$\boxed{\frac{1}{6}x^3 \sim x - \sin \sim \arcsin x - x}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}x^3 \sim x - \arctan x \sim \tan x - x}$$

2.4.9 利用基本极限求极限

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim\limits_{\square\to\infty}(1+|\square|)^{\frac{1}{\square}} = e^{|\square|\frac{1}{\square}} & \lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square} = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 & \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1(a>0) \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a & \end{array}}$$

2.4.10 定积分求极限

2.4.11 七种未定式的计算

形如 $\frac{0}{0}$,$\frac{\infty}{\infty}$,$0\times\infty$

形如 $\infty-\infty$

形如 $\infty^0, 0^0$

形如 1^∞

2.5 数列极限的运算

2.5.1 数列极限的运算法则

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则

- $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$

- $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$
- 若 $b \neq 0, y_n \neq 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

上述运算规则可推广至有限个数列的情况

2.5.2 夹逼准则

定理 2.5.1: 数列极限存在准则

如果数列 $\{|x_n|\}, \{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

- 从某项开始, 即 $\exists n_0 \in N_+$(即$n \to \infty$), 当 $n > n_0$ 时, 有

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

- $\lim_{n\to\infty} y_n = a, \lim_{n\to\infty} z_n = a$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

2.5.3 单调有界准则

定理 2.5.2: 数列的单调有界准则

单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在

第三章　连续

3.1　函数的连续性

连续函数是一条连续而不间断的曲线, 以下为函数连续的两个定义

定义 3.1.1: 连续点的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$$

那就称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

3.1.1　反函数与复合函数的连续性

定义 3.1.2

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加 (或单调减少) 且连续那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{\ \mathrm{y}\mid \mathrm{y}=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加 (或单调减少) 且连续

定义 3.1.3

设函数 $y=f\Big[g(x)\Big]$ 由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成 $\mathring{U}\ (x_0)\subset D_{f,g}$. 若 $\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续, 则

$$\lim_{x\to x_0}f\Big[g(x)\Big]=\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$$

3.2　函数的间断点

3.2.1　间断点的相关概念

- 可去间断点: 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A\neq f(x_0)(f(x_0)$ 甚至可以无定义), 则这类间断点称为可去间断点

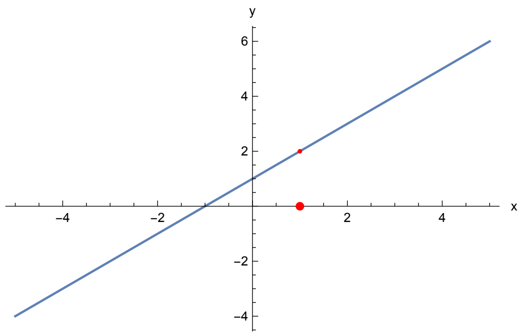


图 3.1: 可去间断点函数图像

- 跳跃间断点: 若 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在, 但 $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, 则这类间断点称为跳跃间断点

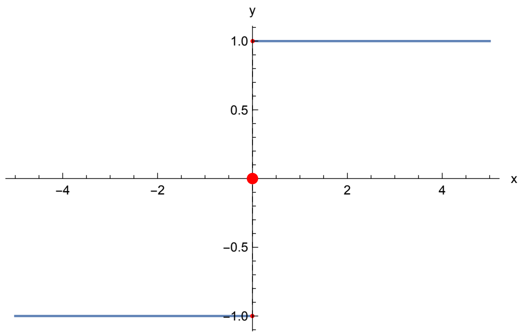


图 3.2: 跳跃间断点函数图像

- 无穷间断点: 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, 则这类间断点称为无穷间断点, 如 $y = \tan x$

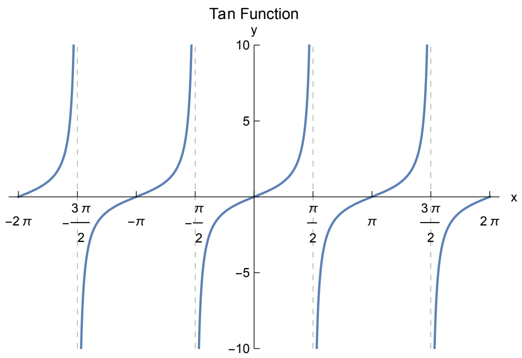


图 3.3: 无穷间断点函数 tan 图像

- 振荡间断点: 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 振荡不存在, 则这类间断点称为振荡间断点

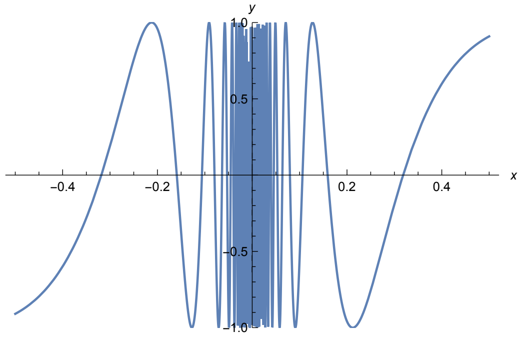


图 3.4: 振荡间断点函数 $\sin\frac{1}{x}$ 图像

3.2.2 间断点的分类

通过求函数在该点的左右极限来判断

- 第一类间断点：$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在
  - 可去：$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$
  - 跳跃：$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
- 第二类间断点：除第一类以外的间断点 $\implies$ $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 均至少一个不存在