第一章 极限

1.1 数列的极限

1.1.1 数列极限的定义

定义 1.1.1

设 $|x_n|$ 为一数列, 若存在常数 a, 对于任意的 $\varepsilon > 0$(不论它多么小), 总存在正整数 N, 使得当$n > N$时 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称数 a 是数列 $|x_n|$ 的极限, 或者称数列 $|x_n|$ 收敛于 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或} x_n \to a(n \to \infty).$$

该定义的 $\varepsilon - N$[a]语言描述是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists \text{正整数} N, \text{当} n > N \text{时}, \text{有} |x_n, -a| < \varepsilon.$$

[a] **$\varepsilon - N$ 几何意义：对于点 a 的任何 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 一定存在 N，当 $n < N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，而只有有限个 (最多有 N 个) 在区间之外.**

在上面的定义中,$\varepsilon > 0$ 的 ε 任意性是非常重要的, 只有这样才能表示出无限接近的意义. 总存在正整数 N, 使得 $n > N$ 这个条件用于表达 $n \to \infty$ 的过程.

注 1.1.1

- 数列的极限值与数列的前有限列无关, 只与后面无穷项有关
- 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则其任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛，且 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$[a]
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$
- 关于数列 $(1+\frac{1}{n})^n$ 的结论
  - 单调增加
  - $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

[a] 此条定理提供了一个判断数列发散的方法:1. 至少一个子数列发散.2. 两个子数列收敛, 但是收敛值不同.

题目 1. 证明: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 则 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$

证明. □

1.1.2 收敛数列的性质

唯一性

定理 1.1.2

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一

有界性

定理 1.1.3

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界[a].

[a]如果数列有界, 但是不一定存在极限, 如数列 $(-1)^n$

保号性

定理 1.1.4

如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 且$a>b$(或$a<b$), 那么存在正整数$N$, 当$n>N$ 时, 都有$x_n>b$ (或$x_n<b$) 如果数列 $\mid x_n \mid$ 从某项起有$x_n \geqslant b$(或$x_n \leqslant b$), 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 那么$a \geqslant b$(或$a \leqslant b$)[a].

[a]其中 b 可以为任意实数，常考 b=0 的情况

1.2 函数的极限

1.2.1 超实数系

定义 1.2.1: 超实数系的概念

超实数 (Hyperreal number) 是一个包含实数以及无穷大和无穷小的域，它们的绝对值分别大于和小于任何正实数。

注 1.2.1

- 超实数集**是为了严格处理无穷量 (无穷大量和无穷小量) 而提出的**。
- 超实数集, 或称为非标准实数集, 记为 $^*\mathbb{R}$, 是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个扩张.

1.2.2 邻域

[1]

定义 1.2.2: 邻域的相关概念

- δ 邻域: 设 x_0 是数轴上一个点,δ 是某一正数, 则称 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0,\delta)$, 即:

$$U(x_0,\delta)=\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x|\,|x-x_0|<\delta\}$$

- 去心 δ 邻域: 定义点 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$
- 左, 右 δ 邻域:$\{x|0<x-x_0<\delta\}$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域, 记作 $U^+(x_0,\delta)$; $\{x|0<x_0-x<\delta\}$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域, 记作 $U^-(x_0,\delta)$.

1.2.3 函数极限的定义

函数极限的定义主要分为自变量趋于有限值 $(x\to x_0)$ 时的极限和自变量趋于无穷大时函数的极限 $(x\to\infty)$

自变量趋于有限值时的函数极限

定义 1.2.3: 当自变量趋于有限值时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ε**(不论它多么小)**[a], 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限, 记作:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad 或f(x)\to A(当x\to x_0)$$

其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,当0<|x-x_0|<\delta时,有|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 在证明中，这两句是白给，直接写。后面的才是关键。

[a] ε 用于衡量 $|f(x)-A|$ 的值有多小

[1] 邻域与区间不同, 邻域属于区间的范畴. 但是邻域通常表示“一个局部位置”. 比如“点 x_0 的 δ”邻域, 可以理解为“点 x_0”的附近, 而区间是明确指出在实数系下的范围

注 1.2.2

1. 在函数极限中 $x \to \infty$ 指的是 $|x| \to \infty$, 需要 x 趋于正无穷和负无穷, 但在数列中的 $n \to \infty$ 是 $n \to +\infty$
2. 函数的极限值只与邻域内的函数值有关, 而与该点的函数值无关.

单侧极限

定义 1.2.4: 单侧极限的定义

若当 $x \to x_0^-$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 A, 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**左极限**, 记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^-) = A.$$

若当 $x \to x_0^+$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 A, 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**, 记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^+) = A$$

题目 2. 已知 $\lim_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x} + (1+\mid x\mid)^{\frac{1}{x}}\right]$存在, 求$a$的值

解答. 由于存在 arctan 与 $|x|$ 函数, 则对于 0 点的极限值需要分左右进行计算.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x} + (1+\mid x\mid)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim\limits_{x\to 0^-} a\arctan\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}} = -\frac{\pi}{2}a + \frac{1}{\mathrm{e}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x} + (1+\mid x\mid)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} a\arctan\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}a + \mathrm{e}$ 若极限存在, 则 $a = \frac{1-e^2}{\pi e}$

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 1.2.5: 自变量趋于无穷大时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ε.(不论它多么小), 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限, 记作:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\text{或}f(x)\to A(\text{当}x\to x_0)$$

其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时},\text{有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 在证明中，这两句是白给，直接写。后面的才是关键。

需要注意的是趋向的值不同时,$\varepsilon-N$ 写法不同, 不能照抄. 其 $\varepsilon-N$ 的表达为如下表格:

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $\mid f(x)-A\mid<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $\mid f(x)\mid>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$时, 即有 $f(x)>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\mid f(x)-A\mid<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\mid f(x)\mid>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $f(x)>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\mid f(x)-A\mid<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\mid f(x)\mid>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$

继续下一页

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$, 使当 $\mid x\mid > X$ 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当 $\mid x\mid > X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当 $\mid x\mid > X$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当 |x|>X 时, 即有 $f(x)<-M$.
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$, 使当 x>X 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当$x>X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当$x>X$时, 即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当 x>X 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$, 使当$x<-X$ 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当$x<-X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当$x<-X$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当$x<-X$时, 即有 $f(x)<-M$.

注 1.2.3: 上表的部分解释

- 以 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 为例: 不管 $f(x)$ 与 A 的距离多近 ($\forall\varepsilon>0$), 总有 x 不断靠近 x_0, 使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$.
- 以 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 为例: 不管 M 多大, 总有当 $x>\infty$ 时, 使得 $|f(x)>M|$, 即满足 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

1.2.4　函数极限的性质

唯一性

定理 1.2.4

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 那么极限唯一

注 1.2.5: 关于唯一性的说明

- 对于 $x\to\infty$, 意味着 $x\to+\infty$ 且 $x\to-\infty$
- 对于 $x\to x_0$, 意味着 $x\to x_0^+$ 且 $x\to x_0^-$
  对于上述问题, 我们称为自变量取值的“双向性”. 以下有一些常见的问题:
  - $\lim_{x\to\infty} e^x$ 不存在, $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{|x|}$ 不存在, $\lim_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在, $\lim_{x\to x_0}[x]$ 不存在.
  - 其不存在的原因均为分段函数分段点极限表达式不同, 需要分别求左右极限.

注 1.2.6: 极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A, 且 \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A^a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0(无穷小量\alpha(x) = 0)^b$$

[a] 左右极限都存在且相等

[b] 对于此概念, 如果引入超实数系的解释应为 A 是 $f(x)$ 的标准实数部分, 而 $f(x)$ 的值是超实数系下的值, 因此其值应为 $f(x) = A + \alpha(x)$

注 1.2.7: 极限不存在的情况

- **函数在该点附近趋于无穷**
- 函数在该点的左右极限只存在一个, 或两者都存在但不相等
- 函数在该点附近不停地震荡
- 该点是函数无定义点的聚点

注 1.2.8: 一些重要的函数极限问题

以下类型的函数由于自变量取值的双向性因此需要进行特殊讨论:

- 形如 $f(x) = max\{h(x), g(x)\}$ 此类函数也需要注意在函数变化点的自变量取值问题
- $\lim_{x\to\infty} e^x$:$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|}$:$\lim_{x\to 0^+} = \frac{\sin x}{x} = 1$,$\lim_{x\to 0^-} = \frac{\sin x}{-x} = -1$
- $\lim_{x\to\infty} \arctan x$:$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x\to 0}[x]$:$\lim_{x\to 0^+}[x] = 0, \lim_{x\to 0^-}[x] = -1$

局部有界性

定理 1.2.9

若极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在[a], 则 $f(x)$ 在点 x_0 某去心邻域内有界.

[a] 对局部有界性的描述需要指明是在那个区间上

注 1.2.10: 局部有界性的性质

- 极限存在必有界, 有界函数极限不一定存在.
- 若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.
- **若 $f(x)$ 在 (a,b) 内为连续函数, 且 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必定有界.**
- 有界函数与有界函数的和, 差, 积仍为有界函数[a].

[a] 商不是有界函数, 因为:$y_1=1, y_2=0, \frac{y_1}{y_2}=\infty$

题目 3. 在下列区间内, 函数 $f(x)=\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$ 有界的是:
A:(-2,1) B:(-1,0) C:(1,2) D:(2,3)

解答. 又题意可知, 函数的分段点为 $x=3,0,1$, 对上述三点求极限, 分析可得, 当 $x=3,1$ 时, 函数极限为 ∞, 因此函数在上述两点的极限不存在, 因此根据局部有界性的性质可得, 含这两个点的区间无界, 因此排除 A,C,D. 答案为 B.

局部保号性

定理 1.2.11

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$(或 $A<0$), 那么存在常数 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>0$($f(x)<0$)[a].
如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$), 而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 那么 $A\leqslant 0$ 或 $(A\leq 0)$[b].

[a] 如果函数在 x_0 附近的极限值为正, 那么 x_0 附近的函数值为正
[b] 如果函数在 x_0 附近的函数值 ≤ 0, 那么 x_0 此处的极限值 ≤ 0

对上述定理中, 为什么一个可以等于 0, 一个不能等于 0? 其解释如下: 如果第一个定理中 $A\leqslant 0, f(x)\leqslant 0$, 那么以函数 $f(x)=x^2$ 为例, 虽然 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, 但是邻域内的函数值都大于 0. 对于第二个定理中如果 $f(x)<0, A<0$, 那么以函数 $f(x)=-x^2$ 为例, 虽然邻域内的函数值都小于 0, 但是 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

注 1.2.12

由保号性可推出保序性: 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 则:

1. 若 $A>B\Rightarrow \exists\delta>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $f(x)>\mathbf{g}(x)$.
2. 若 $\exists\delta>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $f(x)\geqslant g(x)\Rightarrow A\geqslant B$.

题目 4. 局部保号性的证明:

证明. 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A>0$, 所以, 取 $\varepsilon=\frac{A}{2}>0$, $\exists\delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}\Rightarrow f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0.$$

□

由上述证明可得如下推论

推论 1.2.13

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A>0(A\neq 0)$, 那么就存在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$, 当 $x\in U^{\circ}(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)|>\frac{|A|}{2}$

函数极限与数列极限的关系 (海涅定理)

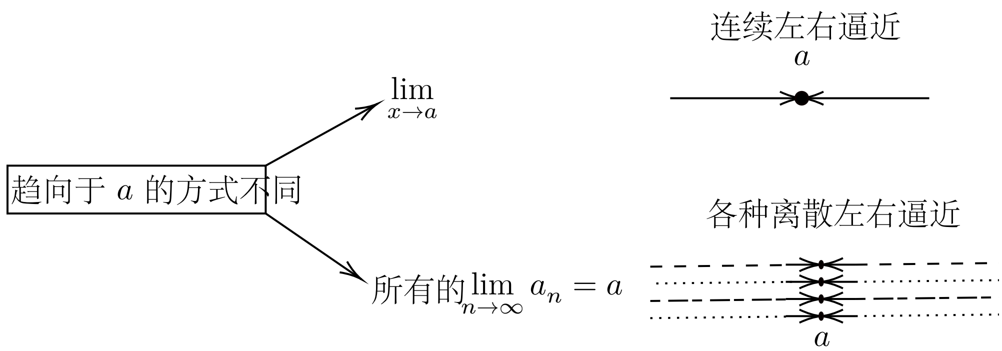
定理 1.2.14

设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}(x_n\neq x_0)$, 极限 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$ 存在.

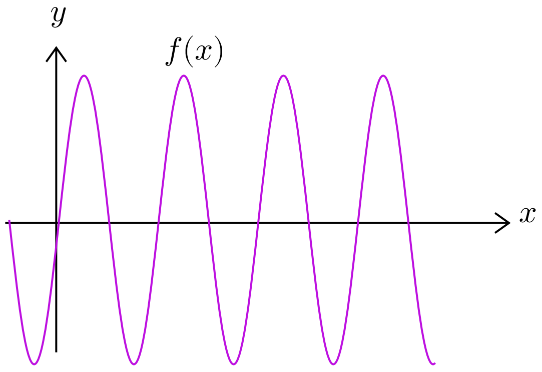
把这个定理简化一下, 主要意思就是

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{所有的}\lim_{n\to\infty} a_n=a,\ \text{有}\lim_{n\to\infty} f(a_n)=L$$

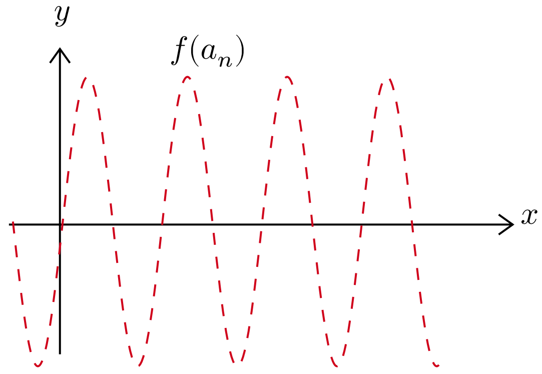
其不同之处在于是离散的趋近还是连续的趋近



除此之外,$f(x)$ 和 $f(a_n)$ 的函数图像如下所示

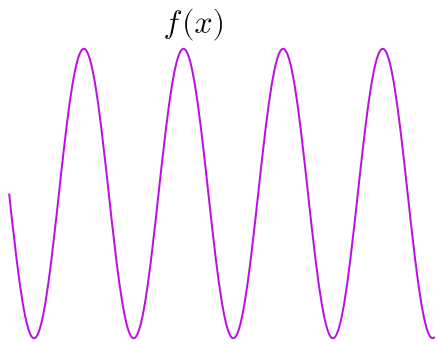


函数 $f(x)$

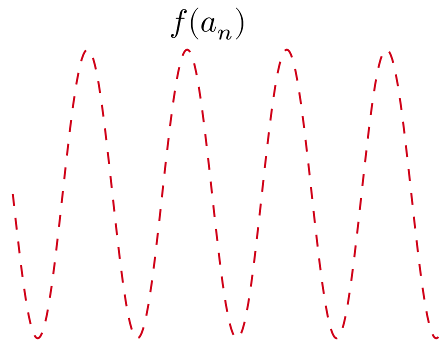


函数 $f(a_n)$

如上图所示 $f(a_n)$ 其实是 $f(x)$ 的抽样



用 $\varepsilon-\delta$ 求它的极限



用海涅定理求它的极限

需要注意的是, 是所有的数列（抽样）才能完全代表整体. 不能说我选了某个数列有极限就代表函数有极限.

总结:海涅定理表述了离散与连续、数列极限与函数极限的关系.

1.3 无穷小与无穷大

1.3.1 无穷小

定义 1.3.1: 无穷小的定义

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷小.

$f(x)$ **是可以本身为** 0 **或者无限趋近于零, 其中** 0 **可以作为无穷小唯一常数**.

注 1.3.1: 无穷小与函数极限的关系 (脱帽法)

$\lim_{x\to\bullet} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x\to\bullet} f(x)$ 为超实数值，其实数部分为 A，函数 $f(x)$ 的函数值为 $A + \alpha$

1.3.2 无穷小的性质

1 有限个无穷小的和是无穷小[2]

证明. 设 α_1 和 α_2 为无穷小量。则 $0 \leqslant |\alpha_1+\alpha_2| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|$,$|\alpha_1|+|\alpha_2|$ 的极限为 0。证明完毕。 □

2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小[3]

证明. $|\alpha_1| \leqslant M$,α_2 是无穷小量。那么 $0 \leqslant |\alpha_1 \times \alpha_2| = |\alpha_1| \times |\alpha_2| \leqslant M \times |\alpha_2|$ 证明完毕。 □

3 有限个无穷小的乘积是无穷小[4]

1.3.3 无穷小的比阶

定义 1.3.2

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么就说 β 与 α 是同阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$,$k > 0$, 那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小[a];
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么就说 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$

[a]不是相等，超实数系下没有加减运算，只可以进行替换运算

前三个定义解释:$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ 是指分子趋于 0 的速度比分母快,$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ 是指分子趋于 0 的速度比分母慢,$\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ 是指趋于 0 的速度一样.

同时需要注意的是, **并不是任意两个无穷小都可进行比阶的**. 例如, 当 $x \to 0$ 时,$x \sin \frac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小, 但是却不可以比阶, 也就是说既无高低阶之分, 也无同阶可言, 因为 $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 其值为 ∞ 和 0。

1.3.4 无穷小的运算

[5] 设 m, n 为无穷小，则

1. $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min\{m, n\}$
2. $o(x^m) \bullet o(x^n) = o(x^{m+n}), x^m \bullet o(x^n) = o(x^{m+n})$
3. $o(x^m) = o(kx^m) = k \bullet o(x^m), k \neq 0$

[2]无穷个无穷小的和不一定是无穷小，如 $\lim_{n\to\infty} = (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{n+n}) = \ln 2$

[3]无界函数 × 无穷小量不一定是无穷小，如 $\lim_{x\to\infty} x \times \frac{1}{x} = 1$

[4]这个地方虽然张宇老师给出了证明，但是好像存在一定的争议性

[5]此处多用于泰勒公式的应用中，会对上述高阶无穷小的运算提出要求

1.3.5　无穷大

定义 1.3.3: 无穷大的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于来一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大), 总存在正数 δ(或数 X), 只要 x 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)|>M$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$[a]) 时的无穷大.[b] 其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时},\text{有}|f(x)|>M.$$

[a]等价于 $x\to-\infty$ 同时 $x\to+\infty$

[b]**无穷大一定无界，但无界不一定是无穷大量**。与无穷小相同，都是一个极限过程，因此无穷大也是一个极限，所以无界不一定是无穷大量

题目 5. 证明 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$

解答. $\forall M>0$ 令 $\delta=\frac{1}{4M}>0$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 即 $0<|x-1|<\frac{1}{4M}$ 时,$|x-1|<\frac{1}{M}$, 所以 $\frac{1}{|x-1|}>M$ 这就证明了 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$

1.3.6　无穷大的比阶

- 当 $x\to+\infty$ 时,$\ln^a x\ll x^\beta\ll a^x$,其中$\alpha>0,\beta>0,a>1$.[6]
- 当 $n\to\infty$ 时,$\ln^a n\ll n^\beta\ll a^n\ll n!\ll n^n$,其中$\alpha>0,\beta>0,a>1$.

1.3.7　无穷大的性质

- 两个无穷大量的积仍未无穷大量
- 无穷大量与有界变量的和仍是无穷大量

1.3.8　无穷大与无界变量的关系

无穷大量一定是无界变量, 但无界变量不一定是无穷大量.[7]

[6]由洛必达公式证明

[7]如数列 $x_n=\begin{cases} n, n \text{ 为奇数}\\ 0, n \text{ 为偶数}\end{cases}$, 是无界变量, 但不是无穷大. 无穷大是一个极限

1.3.9 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中, 若 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小; 若 $f(x)$ 是无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

1.4 函数极限的运算

1.4.1 极限的四则运算法则

如果极限不存在，那么极限属于超实数系的范畴，在超实数系下不可以进行代数运算，只可以进行替换运算。但是如果极限均存在，那么可以进行代数计算。

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 那么

- $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k\lim f(x) \pm l\lim g(x) = kA \pm lB$, 其中 k, l 为常数
- $\lim[f(x) \bullet g(x)] = \lim f(x) \bullet \lim g(x) \equiv A \bullet B$, 特别的, 若 $\lim f(x)$ 存在,n 为正整数, 则 $\lim[f(x)]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}(B \neq 0)$

注 1.4.1: 常用结论

- 存在 $\pm$ 不存在 $=$ 不存在 (只有这一个是不存在, 其余都是不一定或者存在)
- 不存在 $\pm$ 不存在 $=$ 不一定[a]
- 存在 $\times(\div)$ 不存在 $=$ 不一定
- 不存在 $\times(\div)$ 不存在 $=$ 不一定
- 若 $\lim f(x) = A \neq 0$, 则 $\lim f(x)\lim g(x) = A \times \lim g(x)$

[a]反例：$\lim_{x\to 0}(\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}) = 0$

题目 6. **若** $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$**, 则** $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$

证明. $g(x) = \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$。求极限得 $\lim g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\lim f(x)}{\lim \frac{f(x)}{g(x)}} = 0$. 证明完毕[8]。 □

[8]此证明为结论，经常使用

1.4.2 洛必达法则

定义 1.4.1

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0(\infty)$
- $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或∞)

则 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$

需要注意的是使用过洛必达法则之后的极限必须存在, 即 $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 必须存在.

题目 7. 求 $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \times \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

解答. 该函数也是 $\frac{0}{0}$ 型，但是如果使用洛必达法则，则 $2x \times \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, 极限显然不存在，因此不可以使用洛必达法则。则正确求法为 $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \times \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \times \sin\frac{1}{x} = 0.$

1.4.3 泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处 n 阶可导[9], 则存在 $x = 0$ 的一个邻域，对于该领域内的任一点 x, 有:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

当 $x \to 0$ 时, 有以下结论

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$(1+x)^a = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$

注 1.4.2: 泰勒公式应用时的展开原则

- $\frac{A}{B}$ 型，适用于”上下同阶”原则: 具体来说，如果分母或者分子是 x 的 k 次幂，则应把分子或分母展开到 x 的 k 次幂。如:$\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$，此处 $\ln(1+x)$ 应展开为 $x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $A - B$ 型, 适用”幂次最低”原则: 将 A, B 分别展开到他们系数不相等的 x 的最低次幂为止。如: 已知当 $x \to 0$ 时，$\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}$ 与 ax^b 为等价无穷小, 求 a, b. 则应展开为 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o(x^4).$

[9]泰勒公式是在一点处展开, 函数必须在那一点处 n 阶导数存在

1.4.4　极限存在准则的两个应用 (两个重要极限)

$$\lim_{\square\to\infty}(1+\frac{1}{\square})^{\square}=e$$

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

1.4.5　夹逼准则

定义 1.4.2: 函数极限夹逼准则

如果

- 当 $x\in U^{\circ}(x_0,r)$(或 $|x|>M$) 时

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

- $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} g(x)=A, \lim_{x\to x_0(x\to\infty)} h(x)=A$

那么 $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} f(x)$ 存在, 且等于 A.

- 夹逼准则处主要通过放缩来求极限
- 常用的结论有: 若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+...+a_m^n}$, 其中 $a_i>0(i=1,2,3,...,m)$, 令 $\max a_i=a$, 则 $\sqrt[n]{a^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{ma^n}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a, \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m\cdot a^n}=a$, 则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a$

1.4.6　单调有界准则

定义 1.4.3: 函数的单调有界准则

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 一定存在

1.4.7　函数极限的运算法则

定义 1.4.4

如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$, 而 $\lim\varphi(x)=A$, $lim\psi(x)=B$, 那么 $A\geqslant B$

定义 1.4.5: 复合函数极限运算法则

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义，若 $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$,$\lim_{u\to u_0} f(u)=A$, 且存在 $\delta_0>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

注 1.4.3: 常用的结论

- $\lim f(x)=A\neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x)=A\lim g(x)$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在,$\lim g(x)=0 \Rightarrow \lim f(x)=0$

1.4.8 等价无穷小替代

关于等价无穷小, 有以下两个定理

定义 1.4.6

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha)$$

定义 1.4.7: 等价无穷小的替换准则

设 $\alpha \sim \tilde{\alpha}$,$\beta \sim \tilde{\beta}$, 且 $\lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 但是需要遵循以下代换原则[a]

- 乘除关系可以换: 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$
- 加减关系一定条件下可以换
  - 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$, 则$\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$
  - 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$, 则$\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$

加减关系代换准则证明如下:

证明.

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha_1 - \beta_1} = \lim \frac{\beta(\frac{\alpha}{\beta} - 1)}{\beta_1(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - 1)} = 1$$

□

[a] 其实没有什么替换原则，本质其实是因为超实数系下不能进行实数运算，只能进行替换运算

以下为常用等价无穷小
当 $x \to 0$ 时, 有

1.

$$\boxed{\begin{aligned} & x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \\ & \quad \sim \ln(1+x) \\ & \quad \sim e^x - 1 \end{aligned}}$$

2.

$$\boxed{\begin{aligned} & (1+x)^a \sim 1 + ax \\ & a^x - 1 \sim x \ln a \\ & 1 - \cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2} x^2 \end{aligned}}$$

3. 上述结论的推广当 $x \to 0$ 时, 若 $(1+x)^a - 1 \sim ax$, 则 $\alpha(x) \to 0, \alpha(x)\beta(x) \to 0$, 那么 $[1+\alpha(x)]^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$

4.

$$\boxed{\frac{1}{2}x^2 \sim \sec x - 1 \sim x - \ln(1+x)}$$

5.

$$\boxed{\frac{1}{6}x^3 \sim x - \sin \sim \arcsin x - x}$$

6.

$$\boxed{\frac{1}{3}x^3 \sim x - \arctan x \sim \tan x - x}$$

7. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, 则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \sim \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$

1.4.9 利用基本极限求极限

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim\limits_{\square\to\infty}(1+|\square|)^{\frac{1}{\square}} = e^{|\square|\frac{1}{\square}} & \lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 & \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0) \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a & \end{array}}$$

1.4.10 定积分求极限

1.4.11 七种未定式的计算

主要有以下类型 $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\times\infty,\infty-\infty,\infty^0,1^\infty$

形如 $\frac{0}{0}$,$\frac{\infty}{\infty}$,$0\times\infty$

$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\times\infty$ 可以直接计算或者简单转换可以直接计算.

形如 $\infty-\infty$

$\infty-\infty$ 可以通过取倒数或者取对数进行计算

题目 8. $\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$

解答. 原式 $\overset{令u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^u-1-u}{u^2} = \lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^u-1}{2u} = \dfrac{1}{2}$

形如 $\infty^0,0^0$

∞^0 与 0^0 通常使用$u^v=e^{v\ln u}$来计算

题目 9. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 n 是给定的自然数.

解答.

$$\begin{aligned}
原式 &= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)}{x}} \qquad \text{(洛必达法则)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{n}}{\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}\\
&= \frac{1+2+\cdots+n}{1+1+\cdots+1}\\
原式 &= e^{\frac{n+1}{2}}
\end{aligned}$$

形如 1^∞

1^∞ 通常使用$\lim u^v = e^{\lim (u-1)v}$来计算, 需要知道的是 1^∞ 可以化为第二个重要极限.

题目 10. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+x}{(x-a)(x-b)}\right]^x$

解答.

$$\begin{aligned}
原式 &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-a}\right)^x\times\left(\frac{x+1}{x-b}\right)^x\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^x\times\left(1+\frac{1-b}{x+b}\right)^x\\
&= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x-a}}\times e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(1-b)x}{x+b}}\\
&= e^{a+1-b}
\end{aligned}$$

题目 11. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}}{3\sqrt{n}}\right]^n$, 其中$a>0, b>0, c>0$.

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}}{3\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}}+\sqrt{1+\frac{c}{n}}}{3}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{\sqrt{1+ax}+\sqrt{1+bx}+\sqrt{1+cx}+3-3}{3}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+ax}+\sqrt{1+bx}+\sqrt{1+cx}-3}{3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a}{2\sqrt{1+ax}}+\frac{b}{2\sqrt{1+bx}}+\frac{c}{2\sqrt{1+cx}}}{3} \\
&= \frac{a+b+c}{6}
\end{aligned}$$

综上所述, 答案为 $e^{\frac{a+b+c}{6}}$

题目 12. 求极限 $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= lim_{x\to 0^+} \frac{x^x(1-(\frac{\sin x}{x})^x)}{x^3} \\
&= lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}}{x^3} (\text{当 x 趋于 0 的时候}x^x, \text{趋于 } 1) \\
&= lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln\frac{\sin}{x}}{x^2} (\text{此处不可以用等价无穷小}) \\
&= lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\frac{\sin x - x}{x})}{x^2} \\
&= lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

综上所述, 答案为 $\frac{1}{6}$

题目 13. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$, 其中$a_i>0, i=1,2,\cdots,n$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a'_1+a'_2+\cdots+a'_n-n}\cdot\frac{a'_1+a'_1+\cdots+a'_n-n}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x} = \ln(a_1a_2\cdots a_n) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a'_1+a'_2+\cdots+a'_n-n}} = \mathrm{e}
\end{aligned}
$$

综上所述, 答案为 $a_1a_2a_3a_4...a_n$

1.5　数列极限的运算

1.5.1　数列极限的运算法则

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则

- $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$
- 若 $b \neq 0, y_n \neq 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

上述运算规则可推广至有限个数列的情况

1.5.2　夹逼准则

定理 1.5.1: 数列极限夹逼准则

如果数列 $\{|x_n|\}, \{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

- 从某项开始, 即 $\exists n_0 \in N_+$(即$n \to \infty$), 当 $n > n_0$ 时, 有

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

- $\lim_{n\to\infty} y_n = a, \lim_{n\to\infty} z_n = a$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

以下为放缩的常用方法

- 利用简单放大与缩小

$$\begin{cases} n\times u_{\min} \leqslant u_1+u_2+\cdots+u_n \leqslant n\times u_{\max}, \\ \text{当}u_i \geqslant 0\text{时},1\times u_{\max} \leqslant u_1+u_2+\cdots+u_n \leqslant n\times u_{\max}. \end{cases}$$

- 利用如下重要不等式

  1. 设 a, b 为实数, 则 $|a+b| \leq |a|+|b|$;$|\ |a|-|b|\ | \leqslant |a-b|$[10]

[10]可以将上述式子推广为 n 个实数的情况:$|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

2. $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a,b>0)$[11]
3. $\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}(a,b,c>0)$
4. 设$a \geq b \geq 0$,则$\begin{cases} 当n \geq 0 \text{ 时}, a^n \geq b^n, \\ 当n \leqslant 0 \text{ 时}, a^n \leqslant b^n. \end{cases}$
5. 若$0<a<x<b, 0<c<y<d$,则$\frac{c}{b}<\frac{y}{x}<\frac{d}{a}$.[12]
6. $\sin x < x < \tan x \, (0 < x < \frac{\pi}{2})$
7. $\sin x < x (x > 0)$
8. 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时，$x < \tan x < \frac{4}{\pi}x$
9. 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x > \frac{2}{\pi}x$
10. $\arctan x \leqslant x \leqslant \arcsin x (0 \leqslant x \leqslant 1)$
11. $e^x \geqslant x+1 (\forall x)$[13]
12. $x-1 \geqslant \ln x (x>0)$[14]
13. $\frac{1}{1+x} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}(x>0)$ 或 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x(x>0)$[15]
14. 在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如 $(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^{2^2}})...(1+\frac{1}{2^{2^n}})$, 可化为 $(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^{2^2}})...(1+\frac{1}{2^{2^n}}) * \frac{4}{3}$
15. 关于重要数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的重要结论:
    - 单调递增
    - $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

- 利用闭区间上连续函数必有最大值与最小值
- 利用压缩映射原理

题目 14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

证明. □

---

[11]还有一个不等式是 $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

[12]当$n\pi < x < (n+1)\pi, 2n < S(x) < 2(n+1)$时, $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$.

[13]当$x_{n+1} = \mathrm{e}^{x_n} - 1$ 时, 由$\mathrm{e}^{x_n} - 1 \geqslant x_n$, 得$x_{n+1} \geqslant x_n$, 即$\{x_n\}$单调不减

[14]当$x_n > 0$时, 若$x_{n+1} = \ln x_n + 1$, 由$\ln x_n + 1 \leqslant x_n$, 得$x_{n+1} \leqslant x_n$, 即$\{x_n\}$单调不增

[15]令 $f(x) = \ln x$, 并在区间 $[x, x+1]$ 上对其使用拉格朗日中值定理, 有 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}$ 其中 $0 < x < \xi < x+1$, 因此对任意的 $x > 0$, 有 $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$

题目 15. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$, 其中 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是非负数

证明. □

1.5.3 单调有界准则

定理 1.5.2: 数列的单调有界准则

单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在

注 1.5.3: 证明数列单调性的方法

1. $x_{n+1}-x_n \underset{(<)}{>} 0$ 或 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \underset{(<)}{>} 1$(同号)
2. 利用数学归纳法
3. 利用重要不等式
4. x_n-x_{n-1} 与 $x_{n-1}-x_{n-2}$ 同号, 则 x_n 单调
5. 利用结论: 对 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,...)$,$x_n\in$ 区间I
   (a) 若$f'(x)>0, x\in$ 区间I, 则数列$\{x_n\}$单调, 且 $\begin{cases}\text{当}x_2>x_1\text{时, 数列 }\{x_n\}\text{ 单调增加}\\ \text{当}x_2<x_1\text{时, 数列 }\{x_n\}\text{ 单调减少}\end{cases}$
   (b) 若 $f'(x)<0$,$x\in$ 区间 I, 则数列 $\{x_n\}$ 不单调