

# 高等数学笔记

作者：于家崇

2024 年 3 月 2 日

# 前言

If a job is worth doing,it's worth doing well

2024 年 3 月 2 日

如果一件事值得去做，那就值得去做好

# 目录

# 第一章 函数

## 1.1 映射

### 1.1.1 映射的概念

#### 定义 1.1.1: 映射定义

设  $X, Y$  是两个非空集合, 如果存在一个法则  $f$ , 使得对  $X$  中每个元素  $x$ , 按法则  $f$ , 在  $Y$  中有唯一确定的元素  $y$  与之对应, 那么称  $f$  为从  $X$  到  $Y$  的映射, 记作

$$f: X \rightarrow Y$$

其中  $y$  称为元素  $x$  (在映射  $f$  下) 的像, 并记作  $f(x)$ , 即

$$y = f(x)$$

而元素  $x$  称为元素  $y$  (在映射  $f$  下) 的一个原像;

需要注意的是, 从映射的概念可以看出, 映射法则  $f$  可以有多个, 但是只要有一个满足即可.

### 1.1.2 映射的分类

- 设  $f$  是从集合  $X$  到集合  $Y$  的映射, 若  $R_f = Y$ , 即  $Y$  中任一元素  $y$  都是  $X$  中某元素的像, 则称  $f$  为  $X$  到  $Y$  上的映射或满射;
- 若对  $X$  中任意两个不同元素  $x_1 \neq x_2$ , 它们的像  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称  $f$  为  $X$  到  $Y$  的单射;
- 若映射  $f$  既是单射, 又是满射, 则称  $f$  为一一映射 (或双射)

## 1.2 函数的基本概念与特性

### 1.2.1 函数的概念

#### 定义 1.2.1: 函数定义

设数集  $D \subset \mathbb{R}$ , 则称映射  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  为定义在  $D$  上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量,  $D$  称为定义域, 记作  $D_f$ , 即  $D_f = D$ .

函数的定义中, 对**每个**  $x \in D$ , 按对应法则  $f$ , 总有**唯一确定**的值  $y$  与之对应, 这个值称为函数  $f$  在  $x$  处的函数值, 记作  $f(x)$ , 即  $y = f(x)$ . 因变量  $y$  与自变量  $x$  之间的这种依赖关系, 通常称为**函数关系**. 函数值  $f(x)$  的全体所构成的集合称为函数  $f$  的值域, 记作  $R_f$  或  $f(D)$  即:

$$R_f = f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

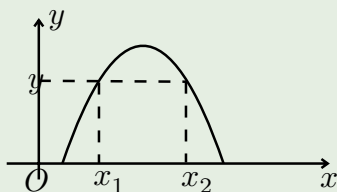
#### 定义 1.2.2: 自然定义域

约定函数的定义域是使算式有意义的一切实数组成的集合。

例如: 函数  $y = \frac{1}{x-1}$ , 即使没有指出函数的定义域是多少, 但是通过分析可得, 函数的自然定义域是  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ 。同理对于函数  $y = \sqrt{1-x^2}$ , 其自然定义域是  $(-1, 1)$ 。

#### 注 1.2.1: 单值函数与多值函数

事实上上述定义的函数为**单值函数**, 若给定一个  $x_1$ , 对应一个  $y_1$ 。给另外一个  $x_2$ , 对应另外一个  $y_2$ , 即“一对一”。



### 1.2.2 函数的表示

表格

$x$	1	2	3	4	5	6
$y = 2x$	2	4	6	8	10	12

图像

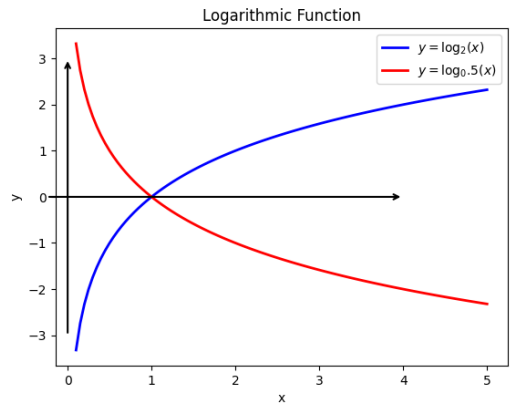


图 1.1: 对数函数图像

解析式

$y = 2x$

1.2.3 反函数

定义 1.2.3: 反函数定义

设函数  $f : D \rightarrow f(D)$  是单射 (一对一), 则它存在逆映射  $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ , 称此映射  $f^{-1}$  为函数  $f$  的**反函数** 按此定义, 对每个  $y \in f(D)$ , 有唯一的  $x \in D$ , 使得  $f(x) = y$ , 于是有

$$f^{-1}(y) = x$$

注 1.2.2: 解释

$y = 2x + 1$	自变量: $x$ : $[1,2]$ 因变量: $y$ : $[3,5]$	
$x = \frac{y-1}{2}$	自变量: $y$ : $[3,5]$ 因变量: $x$ : $[1,2]$	变量 改变
$y = \frac{x-1}{2}$	自变量: $x$ : $[3,5]$ 因变量: $y$ : $[1,2]$	方程 改变

可以看出反函数  $f^{-1}$  的对应法则是完全由函数  $f$  的对应法则所确定的. 以函数  $y = 2 * x + 1$  为例. 在函数  $y = 2 * x + 1$  中, 开始  $y$  为因变量, $x$  为自变量. 根据反函数概念 1.2.2 可以, 函数的反函数的自变量与因变量互换. 则上述函数的反函数是  $\frac{y-1}{2} = x$ , 其中  $x$  是因变量, $y$  是

自变量. 但是由于习惯上  $x$  是自变量,  $y$  是因变量, 上述反函数写作  $\frac{x-1}{2} = y$ . 综上所述: 一般地,  $y = f(x), x \in D$  的反函数记成  $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$  除此之外, 还有两点需要说明的是

- 严格单调函数必有反函数, 但是反函数不一定是单调函数. 如函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ \frac{1}{x}, & x < 0, \end{cases}$

其函数图像为

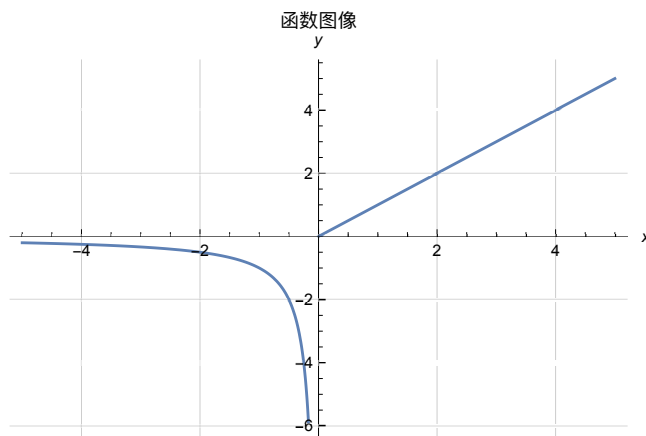


图 1.2: 分段函数  $f(x)$  图像

- 若把  $x = f^{-1}(y)$  与  $y = f(x)$  的图形画在同一坐标系中, 则它们完全重合. 只有把  $y = f(x)$  的反函数  $x = f^{-1}(y)$  写成  $y = f^{-1}(x)$  后, 它们的图形才关于  $y = x$  对称. 这是因为在  $x = f^{-1}(y)$  中  $y$  是自变量而  $x$  是因变量, 而在  $y = f(x)$  中恰恰相反 (这个时候的图像应该一个是  $x$ - $y$  坐标系函数图像, 一个是  $y$ - $x$  坐标系函数图像), 因此如果此时不交换变量, 那么其域没有变化, 画在一起会重合, 只有交换了变量之后才不会重合.

**题目 1.** 求函数  $y = f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  的反函数的表达式以及定义域

**题目 1 的注记.** 在上面的例子中, 函数  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  为反双曲正弦函数, 其反函数为双曲正弦函数. 除此之外, 函数  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  是双曲余弦函数. 上述两个函数的图像为图 1.2, 图 1.3.

**解答.** 已知  $y = f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ , 则  $-y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$   
对两边可以进行如下操作

$$\begin{aligned} e^{-y} &= \sqrt{x^2 + 1} - x \\ e^y &= \sqrt{x^2 + 1} + x \end{aligned}$$

那么可以得到  $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$  交换之后可以得到函数  $f(x)$  的反函数, 即  $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

### 1.2.4 复合函数

设函数  $y = f(u)$  的定义域为  $D_1$ , 函数  $u = g(x)$  在  $D$  上有定义, 且  $g(D) \subset D_1$ , 则由

$$y = f[g(x)](x \in D)$$

确定的函数, 称为由函数  $u = g(x)$  和函数  $y = f(u)$  构成的**复合函数**, 它的定义域为  $D$ ,  $u$  称为中间变量. 内层函数的值域是外层函数的子集.

### 1.2.5 函数的四种特性及重要结论

#### 有界性

有界性分为三种情况, 一种是有上界, 一种是有下界, 一种是有界。有界包含了有上界和有下界。

#### 定义 1.2.4: 有上界的定义

设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 数集  $X \in D$ . 如果存在数  $K_1$ , 使得

$$f(x) \leq K_1$$

对任一  $x \in X$  都成立, 那么称函数  $f(x)$  上有上界, 而  $K_1$  称为函数  $f(x)$  在  $X$  上都一个上界。

#### 定义 1.2.5: 有下界的定义

设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 数集  $X \in D$ . 如果存在数  $K_2$ , 使得

$$f(x) \geq K_2$$

对任一  $x \in X$  都成立, 那么称函数  $f(x)$  上有下界, 而  $K_2$  称为函数  $f(x)$  在  $X$  上都一个下界。

#### 定义 1.2.6: 有界性的定义

设  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 数集  $I \subset D$ . 如果存在某个正数  $M$ , 使对任一  $x \in I$ , 有  $|f(x)| \leq M$ , 则称  $f(x)$  在  $I$  上有界; 如果这样的  $M$  不存在, 则称  $f(x)$  在  $I$  上无界。

- 有界是指, 同时有上界和下界
- 从几何上看, 如果在给定的区间, 函数  $y = f(x)$  的图形能够被直线  $y = -M$  和  $y = M$  完全包起来”, 则为有界; 从定义上说, 找到某个正数  $M$ , 使得  $|f(x)| \leq M$ , 则为有界。
- 在讨论有界还是无界的时候首先要指明区间, 如果没指名区间, 则无法讨论有界性. 如函数  $y = \frac{1}{x}$  则  $(2, +\infty)$  上有界, 但是在  $(0, 2)$  上无界。
- 事实上, 只要在区间  $I$  上或其端点处存在点  $x_0$ , 使得  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  的值为无穷大, 则没有任何两条直线  $y = -M$  和  $y = M$  可以把  $I$  上的  $f(x)$  “包起来”, 这就叫无界。



## 单调性

### 定义 1.2.7

设  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 区间  $I \subset D$ . 如果对于区间上任意两点  $x_1, x_2$  当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  在区间  $I$  上**单调增加**. 如果对于区间  $I$  上任意两点  $x_1, x_2$  当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  在区间  $I$  上**单调减少**.

虽然单调性的证明一般用求导, 但是定义法也需要掌握.

对任意  $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$ , 有

$$f(x) \text{ 是单调增函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0;$$

$$f(x) \text{ 是单调减函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0;$$

$$f(x) \text{ 是单调不减函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0;$$

$$f(x) \text{ 是单调不增函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \leq 0.$$

## 奇偶性

### 定义 1.2.8

设  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称 (即若  $x \in D$ , 则  $-x \in D$ ). 如果对于任一  $x \in D$ , 恒有  $f(-x) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为**偶函数**. 如果对于任一  $x \in D$ , 恒有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $f(x)$  为**奇函数**. **偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.**

### 推论 1.2.3

设  $f(x)$  是定义在  $[-l, l]$  上的任意函数, 则

$$F_1(x) = f(x) - f(-x) \text{ 必为奇函数; } F_2(x) = f(x) + f(-x) \text{ 必为偶函数}$$

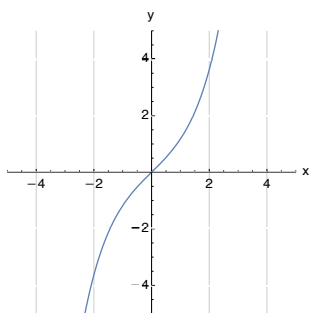


图 1.3: 双曲正弦函数  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

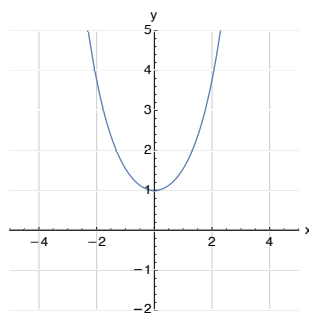


图 1.4: 双曲余弦函数  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

可以看到上面两个函数可以很好的解释推论 1.2.1, 并给出一个直观的图像, 以下为证明过程.

证明. 已知  $f(x)$  是任意函数,  $-1$  代入可得,  $F_1(-x) = f(-x) - f(x) = -F_1(x)$ , 同理可证  $F_2$  成立.  $\square$

- 奇函数  $y = f(x)$  的图形关于坐标原点对称, 当  $f(x)$  在  $x = 0$  处有定义时, 必有  $f(0) = 0$ .
- 偶函数  $y = f(x)$  的图形关于  $y$  轴对称, 且当  $f(0)$  存在时, 必有  $f'(0) = 0$ .

## 周期性

### 定义 1.2.9

设  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在一个正数  $T$ , 使得对于任一  $x \in D$ , 有  $x \pm T \in D$ , 且  $f(x + T) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为周期函数,  $T$  称为  $f(x)$  的周期. 从几何图形上看, 在周期函数的定义域内, 相邻两个长度为  $T$  的区间上, 函数的图形完全一样.

需要注意的是函数的周期性只与  $x$  的参数有关, 比如若函数  $f(x)$  以  $T$  为周期, 则  $f(ax + b)$  以  $\frac{T}{|a|}$  为周期. 可以观察到其周期只与  $x$  的系数有关

## 重要结论

$f'(x)$  和  $\int_a^x f(t) dt$  的性质是重点, 提前总结如下:

- 若  $f(x)$  是可导的偶函数, 则  $f'(x)$  是奇函数.
- 若  $f(x)$  是可导的奇函数, 则  $f'(x)$  是偶函数 (求导后, 函数奇偶性互换).
- 若  $f(x)$  是可导的周期为  $T$  的周期函数, 则  $f'(x)$  也是以  $T$  为周期的周期函数.
- 连续的奇函数的一切原函数都是偶函数
- 连续的偶函数的原函数中仅有一个原函数是奇函数
- 若连续函数  $f(x)$  以  $T$  为周期且  $\int_0^T f(x) dx = 0$ , 则  $f(x)$  的一切原函数也以  $T$  为周期.
- 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导且  $f'(x)$  有界, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有界.

## 1.2.6 三种特殊函数

### 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

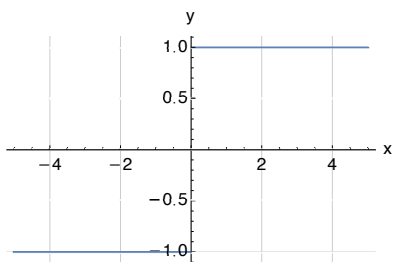


图 1.5: 符号函数  $\operatorname{sgn} x$  图像

## 取整函数

$$y = [x]$$

函数值向左移, 现实生活中其实就是年龄, 即  $x - 1 < [x] \leq x$

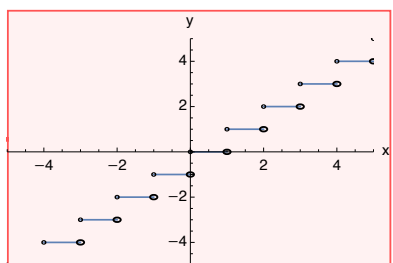


图 1.6: 取整函数  $[x]$  图像

## 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{Q}^c. \end{cases}$$

# 1.3 函数图像

## 1.3.1 常数函数

$y = A, A$  为常数, 其图形为平行于  $x$  轴的水平直线

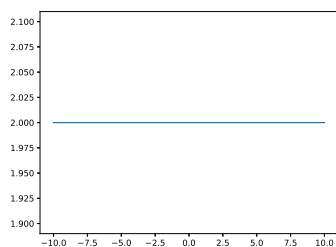


图 1.7: 常数函数图像

### 1.3.2 幂函数

$$y = x^\mu (\mu \text{ 是实数})$$

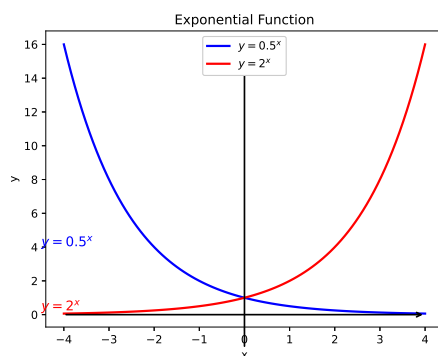


图 1.8: 常数函数图像

#### 推论 1.3.1: 幂函数常用推论

- 当  $x > 0$  时, 由  $y = x$  与  $y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}, y = \ln x$  具有相同的单调性, 因此可以利用这一特性来研究最值
- 见到  $\sqrt{u}, \sqrt[3]{u}$  时, 可用  $u$  来研究最值
- 见到  $|u|$  时, 由  $|u| = \sqrt{u^2}$ , 可用  $u^2$  来研究最值
- 见到  $u_1, u_2, u_3, \ln(u_1 + u_2 + u_3) = \ln u_1 + \ln u_2 + \ln u_3$  来研究最值
- 见到  $\frac{1}{u}$  时, 可用  $u$  来研究最值 (结论相反), 即  $\frac{1}{u}$  与  $u$  的最大值点、最小值点相反

### 1.3.3 指数函数

$$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$$

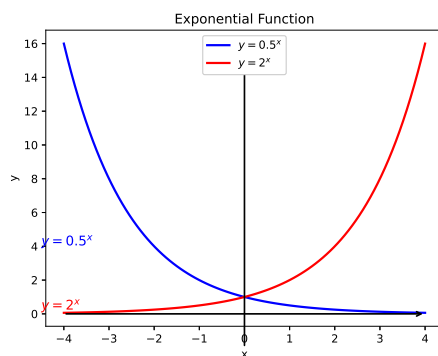


图 1.9: 指数函数图像

### 注 1.3.2: 指数函数相关性质

- 定义域: $(-\infty, +\infty)$ . 值域: $(0, +\infty)$ .
- 单调性: 常用的指数函数  $y = e^x$
- 极限: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  (由于极限的唯一性, 因此在趋于不同的无穷时, 极限值的不同).
- 特殊函数值: $a^0 = 1, e^0 = 1$

### 1.3.4 对数函数

$$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$$

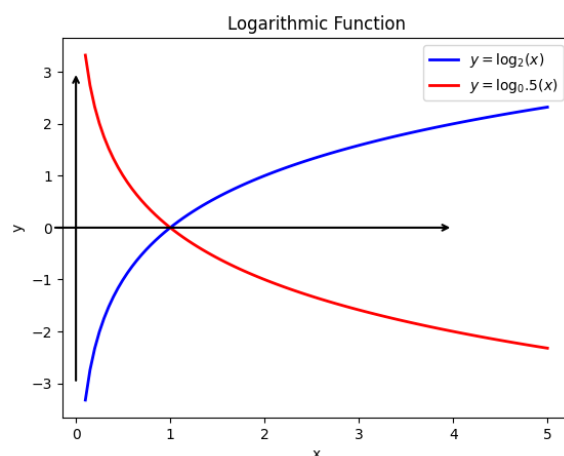


图 1.10: 对数函数图像

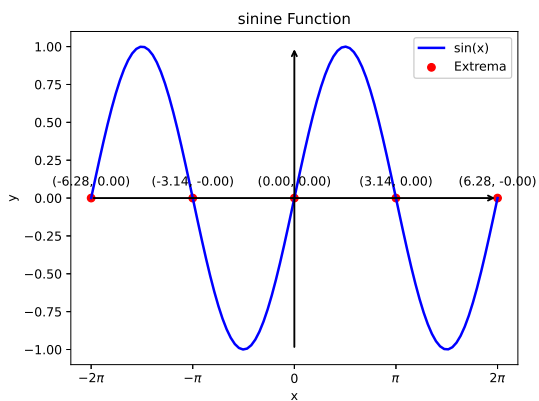
### 注 1.3.3: 对数函数相关性质

- 定义域: $(0, +\infty)$ . 值域: $(-\infty, +\infty)$ .
- 单调性: 当  $a > 1$  时,  $y = \log_a x$  单调增加; 当  $0 < a < 1$  时,  $y = \log_a x$  单调减少;
- 常用对数函数:  $y = \ln x$
- 特殊函数值: $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \ln 1 = 0, \ln e = 1$
- 极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .
- 常用公式:  $x = e^{\ln x} (x > 0), u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u} (u > 0)$

### 1.3.5 三角函数

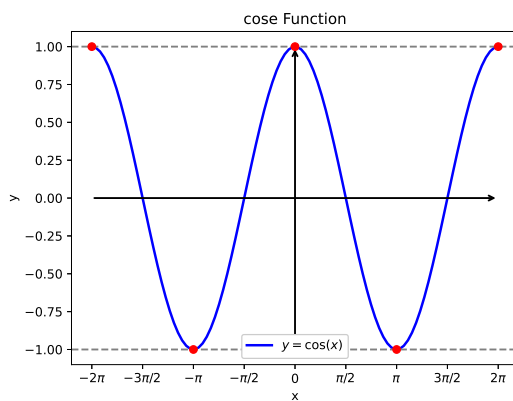
#### 正弦和余弦函数

$$y = \sin x$$



(a) 正弦函数图像

$$y = \cos x$$

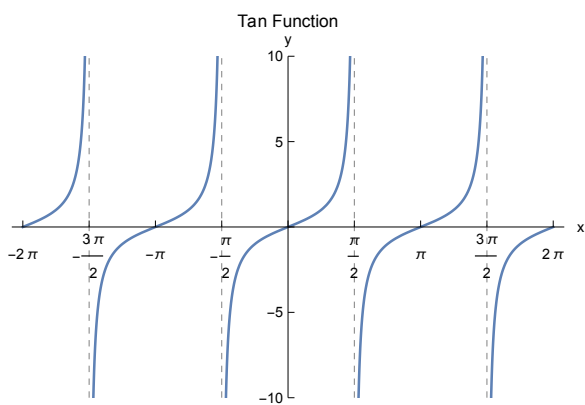


(b) 余弦函数图像

图 1.11: 正余弦函数图像

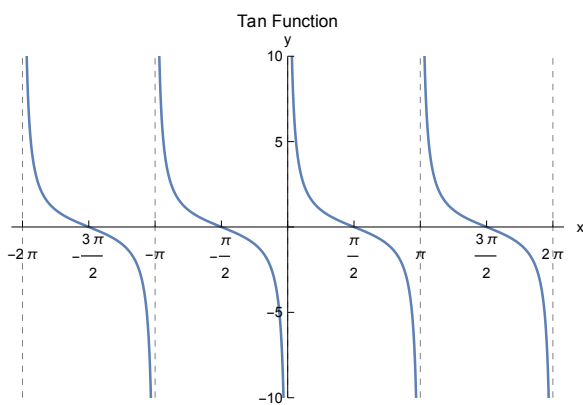
#### 正切和余切函数

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



(a) 正切函数图像

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$



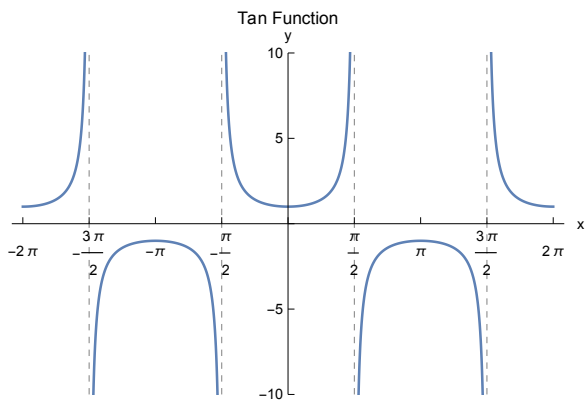
(b) 余切函数图像

图 1.12: 正余切函数图像

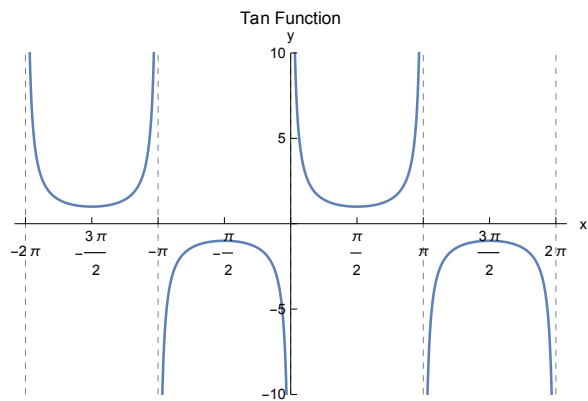
正割和余割函数

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$



(a) 正割函数图像



(b) 余割函数图像

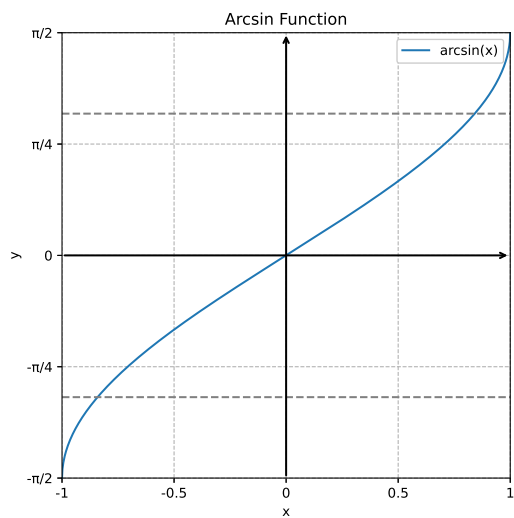
图 1.13: 正余割函数图像

反三角函数

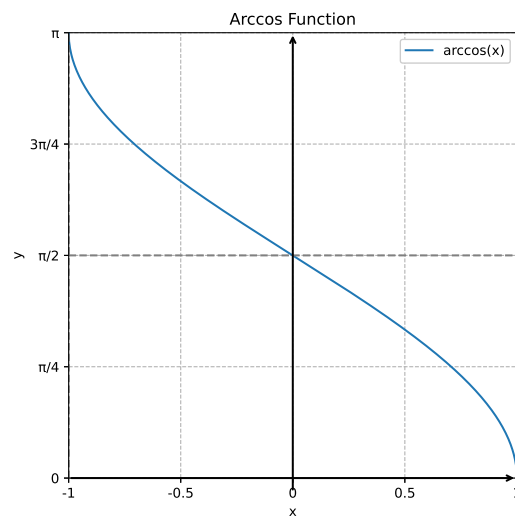
反正弦和反余弦函数

$$y = \arcsin x$$

$$y = \arccos x$$



(a) 反正弦函数图像



(b) 反余弦函数图像

图 1.14: 反正余弦函数图像

由于这两个函数分别是  $\sin x$  和  $\cos x$  的反函数, 因此可以知道的是,  $\sin x$  的值域是  $\arcsin x$  的定义域. 因此可以得到下面的结论

#### 注 1.3.4: 反正余弦函数相关性质

- 定义域  $[-1, 1]$ ,  $y = \arcsin x$  值域  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $y = \arccos x$  值域  $[0, \pi]$
- 性质:  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  (求导后可以发现导数为 0)

### 反正切和反余切函数

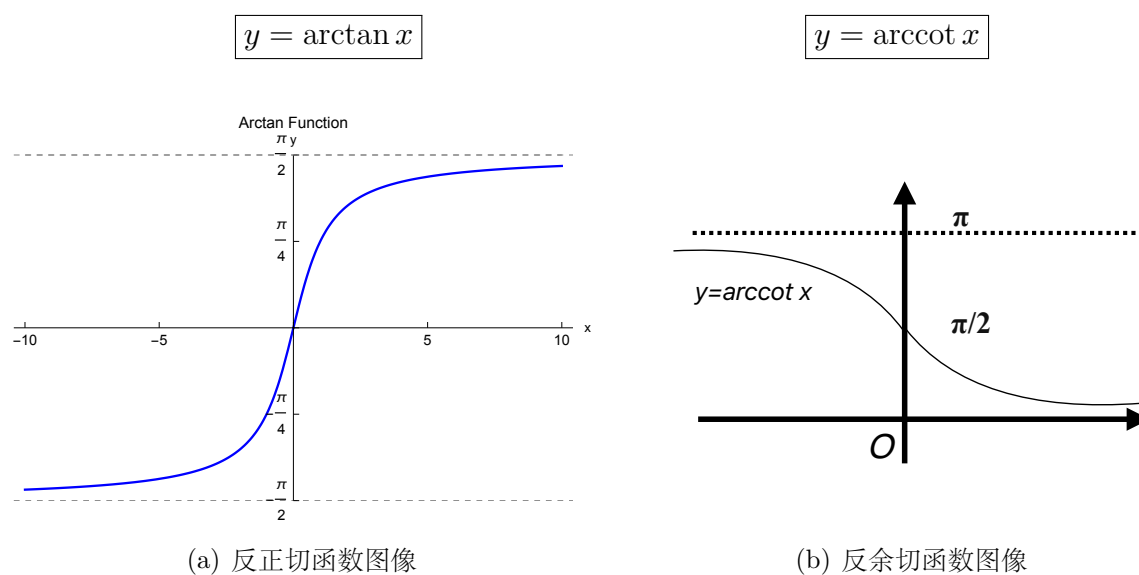


图 1.15: 反正余切函数图像

#### 注 1.3.5: 反正余切函数相关性质

- 定义域  $[-\infty, +\infty]$ ,  $y = \arctan x$  值域  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $y = \operatorname{arccot} x$  值域  $(0, \pi)$
- 性质:  $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$  (求导后可以发现导数为 0)

### 1.3.6 图像绘制

#### 极坐标下的图像

- 用描点法绘制函数图像: 就是把每一个点求出来, 然后连接起来即可, 但是需要点足够多
- 用直角坐标系观点画极坐标系的图像, 以函数  $r = 2(1 + \cos \theta)$  为例.



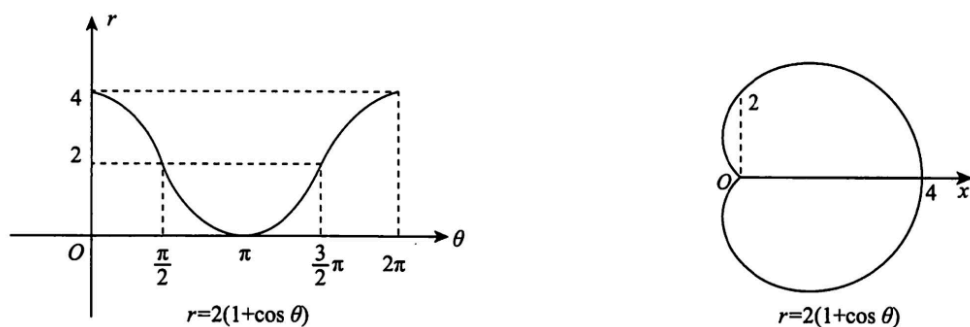


图 1.16: 函数  $r = 2(1 + \cos \theta)$  图像

可以看到  $\theta - r$  的坐标系的关键点为  $(0, 4), (\frac{\pi}{2}, 2), (\pi, 0), (\frac{3}{2}\pi, 2), (2\pi, 4)$  这五个点, 那么在极坐标系下可以绘制出这些点, 比如在  $x = 4$  时,  $\theta = 0, x = 2$  时,  $\theta = \frac{\pi}{2}, x = 0$  时,  $\theta = \pi$ .

### 参数方程

通过第三个变量即参数来表示别的两个变量.

摆线参数方程:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

星型线参数方程:

$$\begin{cases} x = r \cos^3 t \\ y = r \sin^3 t \end{cases}$$

## 1.4 常用函数知识

### 1.4.1 数列

#### 等差数列

首项为  $a_1$ , 公差为  $d(d \neq 0)$  的数列  $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n - 1)d, \dots$ .

#### 注 1.4.1: 等差数列相关性质

- 通项公式  $a_n = a_1 + (n - 1)d$
- 前  $n$  项的和  $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

#### 等比数列

首项为  $a_1$ , 公比为  $r(r \neq 0)$  的数列  $a_1, a_1r, a_1r^2, \dots, a_1r^{n-1}, \dots$

### 注 1.4.2: 等比数列相关性质

- 通项公式  $a_n = a_1 r^{n-1}$
- 前  $n$  项的和  $S_n = \begin{cases} na_1, & r = 1, \\ \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1. \end{cases}$
- $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} (r \neq 1).$

### 常见数列前 $n$ 项和

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

## 1.4.2 三角函数

### 三角函数基本关系

$$\begin{aligned} \csc \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha} & \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} & \cot \alpha &= \frac{1}{\tan \alpha} \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

### 倍角公式

$$\begin{aligned} \sin 2a &= 2 \sin a \cos a, & \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 \\ \sin 3a &= -4 \sin^3 a + 3 \sin a, & \cos 3a &= 4 \cos^3 a - 3 \cos a \\ \tan 2a &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}, & \cot 2a &= \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}. \end{aligned}$$

### 半角公式

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha), & \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha), \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, & \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \\ \cot \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}. \end{aligned}$$

## 和差公式

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \mp \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}.\end{aligned}$$

## 积化和差公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)], \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].\end{aligned}$$

## 和差化积公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.\end{aligned}$$

## 万能公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \cos \alpha &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

### 1.4.3 指数运算法则

$$a^a \times a^\beta = a^{a+\beta}, \quad \frac{a^a}{a^\beta} = a^{a-\beta}, \quad (a^a)^\beta = a^{a\beta}, \quad (ab)^a = a^a b^a, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^a = \frac{a^a}{b^a}.$$

### 1.4.4 对数运算法则

$$\begin{aligned}\log_a(MN) &= \log_a M + \log_a N \\ \log_a \frac{M}{N} &= \log_a M - \log_a N \\ \log_a M^n &= n \log_a M. \\ \log_a \sqrt[n]{M} &= \frac{1}{n} \log_a M.\end{aligned}$$

### 1.4.5 一元二次方程基础

- 一元二次方程组:  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$
- 根的公式:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- 根与系数的关系:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ .
- 判别式:  $\Delta = b^2 - 4ac$
- 抛物线顶点坐标:  $(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$

### 1.4.6 因式分解公式

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) & (a^3 - b^3) &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n \text{ 是正整数}) \\n \text{ 是正奇数时, } a^n + b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \\(a+b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \\a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

### 1.4.7 阶乘与双阶乘

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ , 规定  $0! = 1$ .
- $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n \cdot n!$
- $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$

### 1.4.8 常用不等式

- 设  $a, b$  为实数, 则  $|a+b| \leq |a| + |b|; |a| - |b| \leq |a-b|$

#### 注 1.4.3

可以将第一个式子推广为:

离散情况: 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为实数, 则  $|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

连续情况: 设  $f(x)$  在  $[a, b] (a < b)$  上可积, 则  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

- $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a, b > 0)$

#### 注 1.4.4

还有一个不等式是  $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

3.  $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} (a, b, c > 0)$
4. 设  $a > b > 0$ , 则  $\begin{cases} \text{当 } n > 0 \text{ 时, } a^n > b^n, \\ \text{当 } n < 0 \text{ 时, } a^n < b^n. \end{cases}$
5. 若  $0 < a < x < b, 0 < c < y < d$ , 则  $\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}$ .

#### 注 1.4.5

当  $n\pi < x < (n+1)\pi, 2n < S(x) < 2(n+1)$  时,  $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$ .

6.  $\sin x < x < \tan x (0 < x < \frac{\pi}{2})$
7.  $\sin x < x (x > 0)$

#### 注 1.4.6

当  $x_n > 0$  时,  $x_{n+1} = \sin x_n < x_n$ , 故  $x_n$  单调减少

8.  $\arctan x \leq x \leq \arcsin x (0 \leq x \leq 1)$
9.  $e^x \geq x + 1 (\forall x)$

#### 注 1.4.7

当  $x_{n+1} = e^{x_n} - 1$  时, 由  $e^{x_n} - 1 \geq x_n$ , 得  $x_{n+1} \geq x_n$ , 即  $\{x_n\}$  单调不减

10.  $x - 1 \geq \ln x (x > 0)$

#### 注 1.4.8

当  $x_n > 0$  时, 若  $x_{n+1} = \ln x_n + 1$ , 由  $\ln x_n + 1 \leq x_n$ , 得  $x_{n+1} \leq x_n$ , 即  $\{x_n\}$  单调不减

11.  $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x} (x > 0)$

#### 注 1.4.9

令  $f(x) = \ln x$ , 并在区间  $[x, x+1]$  上对其使用拉格朗日中值定理, 有

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}$$

其中  $0 < x < \xi < x+1$ , 因此对任意的  $x > 0$ , 有  $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$

12. 在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如  $(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}})$ , 可化为  $(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}}) * \frac{4}{3}$

#### 1.4.9 绝对值等式

$$\varphi(x) = \max \{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$$

$$\psi(x) = \min \{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$$