

第一章 极限

1.1 数列的极限

1.1.1 数列极限的定义

定义 1.1.1: 数列极限的定义

设 $|x_n|$ 为一数列, 若存在常数 a , 对于任意的 $\varepsilon > 0$ (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称数 a 是数列 $|x_n|$ 的极限, 或者称数列 $|x_n|$ 收敛于 a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$$

该定义的 $\varepsilon - N$ 语言描述是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \text{ 正整数 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

$\varepsilon - N$ 几何意义: 对于点 a 的任何 ε 邻域即开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 一定存在 N , 当 $n > N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内, 而只有有限个 (最多有 N 个) 在区间之外.

在上面的定义中, $\varepsilon > 0$ 的 ε 任意性是非常重要的, 只有这样才能表示出无限接近的意义. 总存在正整数 N , 使得 $n > N$ 这个条件用于表达 $n \rightarrow \infty$ 的过程.

注 1.1.1: 数列极限的性质

- 数列收敛^a等价于数列极限存在
- 数列的极限值与数列的前有限列无关, 只与后面无穷项有关

- 数列的最值只能在前有限项中取得, 前有限项有比极限值大的, 则数列存在最大值. 前有限项有比极限值小的, 则数列存在最小值
- 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则其任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ^b
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a$

^a区别于级数收敛

^b此条定理提供了一个判断数列发散的方法: 1. 至少一个子数列发散. 2. 两个子数列收敛, 但是收敛值不同.

结论 1.1.1: 数列极限常用结论

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$
- 关于数列 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 的结论
 - 单调增加
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

题目 1. 已知 $a_n = \sqrt[n]{n} - \frac{(-1)^n}{n} (n = 1, 2, \dots)$, 则 a_n

- (A) 有最大值, 有最小值 (B) 有最大值, 没有最小值
(C) 没有最大值, 有最小值 (D) 没有最大值, 没有最小值

解答. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 - 0, a_1 = 2, a_2 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$, 因此 a_n 既有最大值又有最小值

题目 2. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$

证明. 已知数列 a_n 极限为 A , 那么 $|a_n - A| < \varepsilon$, 由不等式1可得, $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$. □

推论 1.1.1: 上题题目推论

1. 此命题反过来则错误, 如取 $a_n = (-1)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1$. 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 不存在.

2. 在本题中若 $A = 0$, 则 $||a_n| - |A|| = ||a_n| - 0| = |a_n - 0|$, 即有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0,$$

此结论常用, 即若要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 可转换为证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, 由于 $|a_n| \geq 0$, 若使用了夹逼准则, 只需证明 $|a_n| \leq 0$ 即可

3. 此结论对函数亦成立, 即若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$.

题目 3. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$. (B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$. (C) $a_n > a - \frac{1}{n}$. (D) $a_n < a + \frac{1}{n}$.

解答. 根据结论若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$. 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$, 即 $|a_n| > |a| > \frac{|a|}{2}$.

题目 3 的注记. 对于 C,D 选项, 只知道 a_n 的极限是 a , 那么就是说两者之间的距离是无穷小, 但是题目中没有给出两者相距的量级, 因此一定错误的. 反例为 $a_n = a \pm \frac{1}{n^2}$.

题目 4. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列命题正确的是

- (A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散 (B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界
(C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小 (D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

解答. A 选项: 令 $x_n = \begin{cases} 0, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, $y_n \equiv 0$. 显然 x_n 发散, 但是 y_n 收敛.

B 选项: 令 $x_n = \begin{cases} 0, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, $y_n = \begin{cases} n, n \text{ 为偶数} \\ 0, n \text{ 为奇数} \end{cases}$. 虽然二者都无界, 但是也满足题意.

C 选项: 令 $x_n \equiv 0, y_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$. 同理也满足题意, 但是 y_n 为无穷大

D 选项: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\frac{1}{x_n}} = 0 \Rightarrow y_n = o(\frac{1}{x_n})$

题目 4 的注记. 数列极限概念题一个很好的办法是举反例. 经典反例:(1) 分奇偶.(2) 恒为 0.

题目 5. 设 x_n 与 y_n 为两个数列, 则下列说法正确的是

- (A) 若 x_n 与 y_n 无界, 则 $x_n + y_n$ 无界
- (B) 若 x_n 与 y_n 无界, 则 $x_n y_n$ 无界
- (C) 若 x_n 与 y_n 中, 一个有界, 一个无界, 则 $x_n y_n$ 无界
- (D) 若 x_n 与 y_n 均为无穷大, 则 $x_n y_n$ 一定为无穷大

解答. A 选项: 令 $a_n = n, b_n = -n$, 显然 x_n, y_n 无界, 但是 $x_n + y_n$ 有界

B 选项: 令 $x_n = \begin{cases} 0, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}, y_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 显然 x_n, y_n 无界, 但是 $x_n y_n$ 有界

C 选项: 令 $x_n = \begin{cases} 0, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}, y_n \equiv 0$, 显然 x_n 一个有界, 一个无界, 但是二者相乘为有界

D 选项: 无穷大 \times 无穷大 = 无穷大

题目 6. 设 x_n 与 y_n 为两个数列, 则下列说法正确的是

- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$
- (B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \infty$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$
- (C) 若 $x_n y_n$ 有界, 则必有 x_n 与 y_n 都有界.
- (D) 若 $x_n y_n$ 无界, 则必有 x_n 无界或 y_n 无界

解答. A 选项: 令 $x_n = \begin{cases} 0, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}, y_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 显然 $x_n \cdot y_n \equiv 0$, 但是 $x_n y_n$ 两者都无界.

B 选项: 令 $x_n = \begin{cases} 1, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}, y_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 1, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 显然二者相乘为 ∞ , 但是二者都是无界, 没有极限

C 选项: 同 A 选项

D 选项: 使用逆否命题: 若 x_n 有界且 y_n 有界, 则 $x_n \cdot y_n$ 有界, 显然成立, 有界 \times 有界 = 有界

题目 6 的注记. 在证明中, 使用逆否命题可以减少复杂度, 如本题的 D 选项.

题目 7. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 均不存在, 则下列选项正确的是

- A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 不存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 必不存在
- B. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 不存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 必存在
- C. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 必不存在
- D. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 必存在

解答. A 选项: $a_n = e^n, b_n = e^n$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 不存在, 但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 存在

B 选项: $a_n = e^n, b_n = 2e^n$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 不存在, 但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 也不存在

C 选项: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 存在, 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 存在, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(a_n + b_n) - (a_n - b_n)]$ 也应该存在, 但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2b_n$, 根据题意可知不存在, 因此假设错误

D 选项: $a_n = e^n, b_n = -e^n$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 存在, 但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 不存在

1.1.2 收敛数列的性质

唯一性

定义 1.1.2: 数列极限唯一性的定义

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一

有界性

定义 1.1.3: 数列收敛的有界性的定义

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界^a.

^a如果数列有界, 但是不一定存在极限, 如数列 $(-1)^n$

保号性

定义 1.1.4: 数列极限保号性的定义

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > b$ (或 $a < b$), 那么存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > b$ (或 $x_n < b$).

如果数列 $|x_n|$ 从某项起有 $x_n \geq b$ (或 $x_n \leq b$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 那么 $a \geq b$ ($a \leq b$)^a.

^a其中 b 可以为任意实数, 常考 $b=0$ 的情况

题目 8. 下列结论中错误的是

- (A) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 1$, 则存在 $M > 1$, 当 n 充分大时, 有 $a_n > M$
- (B) 设 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则当 n 充分大时, 有 $a_n < b_n$
- (C) 设 $M \leq a_n \leq N (n = 1, 2, \dots)$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $M \leq a \leq N$
- (D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$, 则当 n 充分大时, $a_n > a - \frac{1}{n}$

解答. A 选项: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 那么当 n 充分大时, a_n 的值趋近于 a , 那么肯定存在一个 M , 满足 $a_n = a \geq M > 1$.

B 选项: 若 a_n 的极限 $> b_n$ 的极限, 则当 n 充分大时, $a_n > b_n$.

C 选项: 不等式左右取极限可得 C 选项正确

D 选项: 题目 3 解析 1.1.1 出有解释, 同理

题目 8 的注记. 数列极限的保号性可写为: 两个数列 a_n 和 b_n , 若 $a_i > b_i$ 恒成立, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 都存在. 则 n 趋于无穷时, a_n 的极限 $\geq b_n$ 的极限. (对不等式取极限时, $>$ 要变成 \geq , $<$ 要变成 \leq , \geq 不用变, \leq 不用变).

若 a_n 的极限 $> b_n$ 的极限, 则当 n 充分大时, $a_n > b_n$.¹

若 a_n 的极限 $\geq b_n$ 的极限, 则当 n 充分大时, a_n 和 b_n 大小无法确定.

¹证明如下: 令 $x_n = b_n - a_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = b - a > 0$. 由极限的保号性可知, 当 n 充分大的时候, $x_n > 0$, 即 $b_n > a_n$

1.2 函数的极限

1.2.1 超实数系

定义 1.2.1: 超实数系的概念

超实数 (Hyperreal number) 是一个包含实数以及无穷大和无穷小的域, 它们的绝对值分别大于和小于任何正实数.

注 1.2.1: 超实数集

- 超实数集是为了严格处理无穷量 (无穷大量和无穷小量) 而提出的.
- 超实数集, 或称为非标准实数集, 记为 ${}^*\mathbb{R}$, 是实数集 \mathbb{R} 的一个扩张.

1.2.2 邻域

2

定义 1.2.2: 邻域的相关概念

- δ 邻域: 设 x_0 是数轴上一个点, δ 是某一正数, 则称 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即:

$$U(x_0, \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x | |x - x_0| < \delta\}$$

- 去心 δ 邻域: 定义点 x_0 的去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$
- 左, 右 δ 邻域: $\{x | 0 < x - x_0 < \delta\}$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域, 记作 $U^+(x_0, \delta)$; $\{x | 0 < x_0 - x < \delta\}$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域, 记作 $U^-(x_0, \delta)$.

1.2.3 函数极限的定义

函数极限的定义主要分为自变量趋于有限值 ($x \rightarrow x_0$) 时的极限和自变量趋于无穷大时函数的极限 ($x \rightarrow \infty$)

²邻域与区间不同, 邻域属于区间的范畴. 但是邻域通常表示“一个局部位置”. 比如“点 x_0 的 δ 邻域”, 可以理解为“点 x_0 ”的附近, 而区间是明确指出在实数系下的范围

自变量趋于有限值时的函数极限

定义 1.2.3: 当自变量趋于有限值时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小)^a, 总存在正数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0)$$

其 $\varepsilon - N$ 语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 在证明中, 这两句是白给, 直接写. 后面的才是关键.

^a ε 用于衡量 $|f(x) - A|$ 的值有多小

注 1.2.2: 函数极限注意事项

1. 在函数极限中 $x \rightarrow \infty$ 指的是 $|x| \rightarrow \infty$, 需要 x 趋于正无穷和负无穷, 但在数列中的 $n \rightarrow \infty$ 是 $n \rightarrow +\infty$
2. 函数的极限值只与邻域内的函数值有关, 而与该点的函数值无关.

题目 9. 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$, 则:

(A) $f(1) = 0$ (B) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ (C) $f'(1) = 1$ (D) $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$

解答. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$, 根据极限四则运算法则 1.4.1, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, 对于其他选项, 需要知道的是函数的极限值与该点的函数值无关, 只与邻域内的函数值有关.

单侧极限

定义 1.2.4: 单侧极限的定义

若当 $x \rightarrow x_0^-$ 时, $f(x)$ 无限接近于某常数 A , 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^-) = A.$$

若当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 无限接近于某常数 A , 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^+) = A$$

题目 10. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right]$ 存在, 求 a 的值

解答. 由于存在 \arctan 与 $|x|$ 函数, 则对于 0 点的极限值需要分左右进行计算.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \arctan \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = -\frac{\pi}{2}a + \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} a \arctan \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}a + e$$

若极限存在, 则 $a = \frac{1 - e^2}{\pi e}$

题目 10 的注记. 由于自变量趋向的双向性, 以下类型的函数因此需要进行特殊讨论:

- 形如 $f(x) = \max\{h(x), g(x)\}$ 此类函数也需要注意在函数变化点的自变量取值问题
- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x: \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}: \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x: \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} [x]: \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 1.2.5: 自变量趋于无穷大时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0)$$

其 $\varepsilon - N$ 语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 在证明中, 这两句是白给, 直接写. 后面的才是关键.

需要注意的是趋向的值不同时, $\varepsilon - N$ 写法不同, 不能照抄. 其 $\varepsilon - N$ 的表达为如下表格:

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow x_0^+$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow x_0^-$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow \infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x > X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x > X$ 时, 即有 $ f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x > X$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x > X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$
$x \rightarrow +\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow -\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使 当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$

注 1.2.3: 上表的部分解释

- 以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 为例: 不管 $f(x)$ 与 A 的距离多近 ($\forall \varepsilon > 0$), 总有 x 不断靠近 x_0 , 使得 $|f(x) - A| < \varepsilon$.
- 以 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 为例: 不管 M 多大, 总有当 $x > \infty$ 时, 使得 $|f(x)| > M$, 即满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

1.2.4 函数极限的性质

唯一性

定理 1.2.1

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么极限唯一

注 1.2.4: 关于唯一性的说明

- 对于 $x \rightarrow \infty$, 意味着 $x \rightarrow +\infty$ 且 $x \rightarrow -\infty$
- 对于 $x \rightarrow x_0$, 意味着 $x \rightarrow x_0^+$ 且 $x \rightarrow x_0^-$

对于上述问题, 我们称为自变量取值的“双向性”. 以下有一些常见的问题:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} [x]$ 不存在.
- 其不存在的原因均为分段函数分段点极限表达式不同, 需要分别求左右极限.

注 1.2.5: 极限存在的充要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A^a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 (\text{无穷小量 } \alpha(x) = 0)^b$$

^a左右极限都存在且相等

^b对于此概念, 如果引入超实数系的解释应为 A 是 $f(x)$ 的标准实数部分, 而 $f(x)$ 的值是超实数系下的值, 因此其值应为 $f(x) = A + \alpha(x)$

注 1.2.6: 极限不存在的情况

- 函数在该点附近趋于无穷
- 函数在该点的左右极限只存在一个, 或两者都存在但不相等
- 函数在该点附近不停地震荡
- 该点是函数无定义点的聚点

局部有界性

定理 1.2.2

若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在^a, 则 $f(x)$ 在点 x_0 某去心邻域内有界.

^a对局部有界性的描述需要指明是在那个区间上

注 1.2.7: 局部有界性的性质

- 极限存在必有界, 有界函数极限不一定存在.
- 若 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有界.
- 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内为连续函数, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内必定有界.
- 有界函数与有界函数的和, 差, 积仍为有界函数^a.

^a商不是有界函数, 因为: $y_1 = 1, y_2 = 0, \frac{y_1}{y_2} = \infty$

题目 11. 在下列区间内, 函数 $f(x) = \frac{x \sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$ 有界的是:

A: $(-2, 1)$ B: $(-1, 0)$ C: $(1, 2)$ D: $(2, 3)$

解答. 又题意可知, 函数的分段点为 $x = 3, 0, 1$, 对上述三点求极限, 分析可得, 当 $x = 3, 1$ 时, 函数极限为 ∞ , 因此函数在上述两点的极限不存在, 因此根据局部有界性的性质可得, 含这两个点的区间无界, 因此排除 A, C, D. 答案为 B.

局部保号性

定理 1.2.3

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$)^a.

如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \leq 0$ 或 $(A \leq 0)^b$.

^a如果函数在 x_0 附近的极限值为正, 那么 x_0 附近的函数值为正

^b如果函数在 x_0 附近的函数值 ≤ 0 , 那么 x_0 此处的极限值 ≤ 0

对上述定理中, 为什么一个可以等于 0, 一个不能等于 0? 其解释如下: 如果第一个定理中 $A \leq 0, f(x) \leq 0$, 那么以函数 $f(x) = x^2$ 为例, 虽然 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 但是邻域内的函数值都大于 0. 对于第二个定理中如果 $f(x) < 0, A < 0$, 那么以函数 $f(x) = -x^2$ 为例, 虽然邻域内的函数值都小于 0, 但是 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

注 1.2.8

由保号性可推出保序性: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则:

1. 若 $A > B \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > g(x)$.
2. 若 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq g(x) \Rightarrow A \geq B$.

推论 1.2.1: 局部保号性的推论

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ ($A \neq 0$), 那么就存在 x_0 的某一去心邻域 $\dot{U}(x_0)$, 当 $x \in U^\circ(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

保号性推论的证明. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 所以, 取 $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$, $\exists \delta > 0$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

□

1.2.5 函数极限与数列极限的关系 (海涅定理)

需要知道一点, 数列极限不可以直接使用洛必达法则, 但是可以使用拉格朗日中值定理, 泰勒公式, 等价无穷小. 如果想使用洛必达法则, 则需要使用海涅定理将数列极限改写为函数极限的形式. 即 x 改写成 n , 考研数

学中默认 n 为非负整数, 所以 n 趋于无穷要改写成 x 趋于正无穷.

定理 1.2.4: 海涅定理

设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在 \Leftrightarrow 对任何 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\} (x_n \neq x_0)$, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 存在.

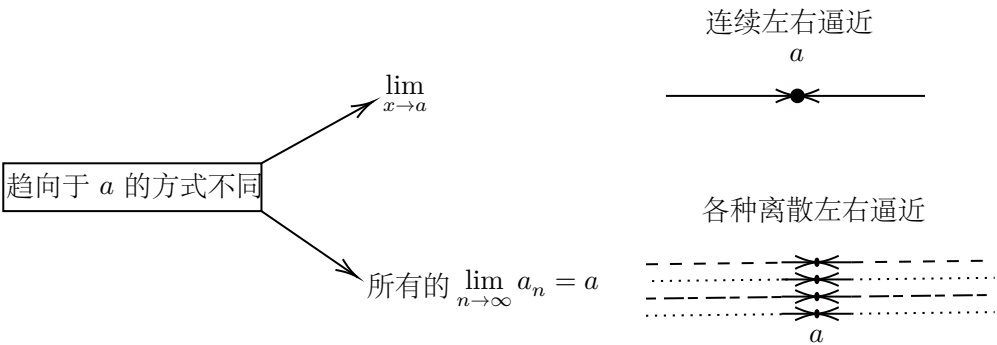
把这个定理简化一下, 主要意思就是

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

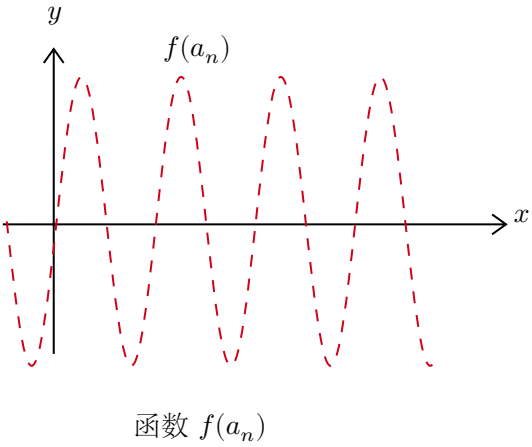
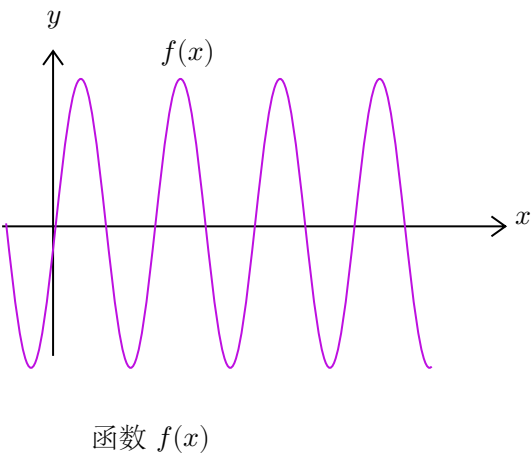
\Updownarrow

所有的 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$

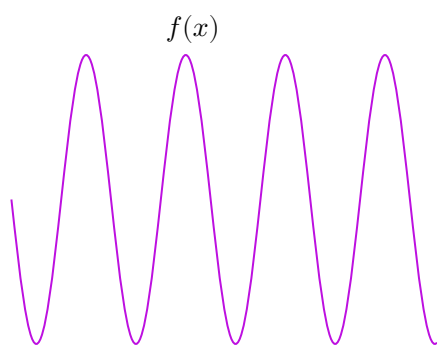
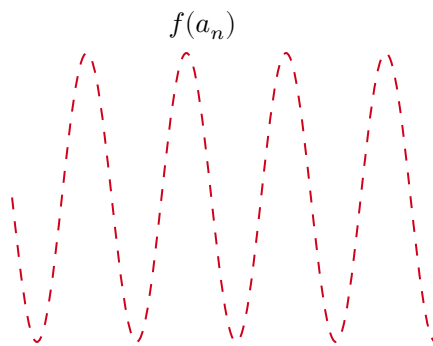
其不同之处在于是离散的趋近还是连续的趋近



除此之外, $f(x)$ 和 $f(a_n)$ 的函数图像如下所示



如上图所示 $f(a_n)$ 其实是 $f(x)$ 的抽样

用 $\varepsilon - \delta$ 求它的极限

用海涅定理求它的极限

需要注意的是, 是所有的数列 (抽样) 才能完全代表整体. 不能说我选了某个数列有极限就代表函数有极限. 总结: 海涅定理表述了离散与连续、数列极限与函数极限的关系.

题目 12. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\arctan n - \frac{\pi}{2})$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan n - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

题目 12 的注记. 数列极限不可以直接使用洛必达法则, 若要使用洛必达法则, 则需要使用海涅定理进行替换.

题目 13. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{e} \right]^n$

解答.

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}}{e} \right]^n$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}}{e^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n}
\end{aligned}$$

对 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n$ 求极限得:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

综上函数极限为 $e^{-\frac{1}{2}}$

题目 13 的注记. 数列极限可以直接使用等价无穷小和泰勒公式

题目 14. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right)$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}))} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot (\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}) - 1)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot (\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}) - \tan \frac{\pi}{4})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot \sec^2 \varepsilon \cdot \frac{2}{n}} \quad \varepsilon \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) \\
&= e^4
\end{aligned}$$

题目 14 的注记. 数列极限可以使用拉格朗日中值定理

1.3 无穷小与无穷大

1.3.1 无穷小

定义 1.3.1: 无穷小的定义

如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小.

$f(x)$ 是可以本身为 0 或者无限趋近于零, 其中 0 可以作为无穷小唯一常数.

注 1.3.1: 无穷小与函数极限的关系 (脱帽法)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 为超实数值, 其实数部分为 A , 函数 $f(x)$ 的函数值为 $A + \alpha$

无穷小的性质

1 有限个无穷小的和是无穷小³

证明. 设 α_1 和 α_2 为无穷小量. 则 $0 \leq |\alpha_1 + \alpha_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2|$, $|\alpha_1| + |\alpha_2|$ 的极限为 0. 证明完毕. \square

2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小⁴

证明. $|\alpha_1| \leq M$, α_2 是无穷小量. 那么 $0 \leq |\alpha_1 \times \alpha_2| = |\alpha_1| \times |\alpha_2| \leq M \times |\alpha_2|$ 证明完毕. \square

3 有限个无穷小的乘积是无穷小⁵

无穷小的比阶

定义 1.3.2: 不同无穷小的比阶

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么就说 β 与 α 是同阶无穷小;

³无穷个无穷小的和不一定是无穷小, 如 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{n+n}) = \ln 2$

⁴无界函数 \times 无穷小量不一定是无穷小, 如 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \times \frac{1}{x} = 1$

⁵这个地方虽然张宇老师给出了证明, 但是好像存在一定的争议性

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$, 那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小^a;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么就说 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$

^a不是相等, 超实数系下没有加减运算, 只可以进行替换运算

前三个定义解释: $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ 是指分子趋于 0 的速度比分母快, $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ 是指分子趋于 0 的速度比分母慢, $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ 是指趋于 0 的速度一样. 同时需要注意的是, **并不是任意两个无穷小都可进行比阶的**⁶.

对 $o(x)$ 的理解: 它是一个无穷小, 但是它趋向于 0 的速度比 x 要快, 也就是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$, 也就是精度更高. 举一个实际的例子: $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$, 那么就应该知道 $\tan x - x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5 = o(x^5)$, 也就是这玩意趋于 0 的速度非常之快! 速度相当于 x^5 , 这给我们的精度分析提供了一些帮助. 由此可以解释加减法不推荐用等价无穷小, 例如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3}$ 等价无穷小本身就是一种近似替换, 直接把 $\tan x$ 近似成 x 显然精度太低 (毕竟分母可是以 x^3 的速度趋于 0), 那么我们就需要更高精度的近似了, 也就是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x}{x^3}$, 这样我们就得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3}$, 显然, 后者分子趋于 0 的速度大概是 x^5 级别比分母更快所以忽略不计.

结论 1.3.1: 无穷小比阶的结论

若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是 x 的 m 阶无穷小, $\varphi(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 $F(x) = \int_0^{\varphi(x)} f(t)dt$ 是 x 的 $n(m+1)$ 阶无穷小

题目 15. 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小 $a = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 进行排序, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列顺序是

解答. $\alpha: n = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^2 = 1$, 因此 $m = 0$, 那么 $n(m+1) = 1$; $\beta: n = 2, m = \frac{1}{2}$, 那么 $n(m+1) = 3$; $\gamma: m = \frac{1}{2}x, n = 2$, 那么 $n(m+1) = 2$. 因此顺序为 $\alpha\gamma\beta$

⁶例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sin \frac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小, 但是却不可以比阶, 也就是说既无高低阶之分, 也无同阶可言, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 其值为 ∞ 和 0

题目 16. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小中最高阶的是:

(A) $(2 + \tan x)^x - 2^x$ (B) $(\cos x^2)^{\frac{1}{x}} - 1$ (C) $\int_0^{1-\cos x} e^x \sin t^2 dt$ (D) $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt$

解答. A 选项: $2^x[(1 + \frac{\tan x}{2})^x - 1] = \frac{\tan x}{2} \times x = \frac{1}{2}x^2$.

B 选项: $-\frac{x^4}{2x} = -\frac{x^3}{2}$.

C 选项: $n = \frac{1}{2}x^2, m = x^2$ 那么 $n(m+1) = 6$.

D 选项:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt \\ &= \int_{\sin x}^0 \ln(1+t^3) dt + \int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt \\ &= \int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt - \int_0^{\sin x} \ln(1+t^3) dt \end{aligned}$$

其中 $1 - \sqrt{\cos x} \sim \frac{1}{2}x^2$, 那么 $\int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt$ 那么 $n(m+1) = 8, \int_0^{\sin x} \ln(1+t^3) dt$ 那么 $n(m+1) = 8, \int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt$ 的阶数为 4. 综上 C 选项的阶数最高.

题目 16 的注记. D 选项: 如果为变上下限的形式, 则转化为变上限的形式, 然后使用结论进行计算, 之后按照无穷小的运算法则计算即可.

题目 17. 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列结论中错误的是:

(A) $a = 0$ (B) $b = 1$ (C) $c = 0$ (D) $d = \frac{1}{6}$

解答. 对 $\frac{p(x) - \tan x}{x^3}$ 泰勒展开可得: $\frac{p(x) - (x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5)}{x^3} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 - x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5}{x^3}$

综上所述知: $a = 0, b = 1, c = 0, d = \frac{1}{3}$. 因此, D 选项是错误的.

题目 18. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶的是

(A) $\int_0^{x^2} \ln(1+\sqrt{t}) dt$ (B) $\int_{x^3}^{x^2} \sqrt{1-\sqrt{\cos t}} dt$ (C) $\int_x^{2\sin x} \sin t^2 dt$ (D) $\int_x^{\sin x} (e^{t^2} - 1) dt$

解答. A: $\ln(1 + \sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$, 其 $n(m+1) = 3$.

B: $\sqrt{1 - \sqrt{\cos t}} = \frac{1}{2}x$, 其 $n(m+1)$ 的最小值为 4.

C: 使用积分中值定理可得: $\sin^2 \varepsilon \times (2 \sin x - x), \varepsilon \in (2 \sin x, x)$, 使用等价无穷小可得: $2 \sin x - x \sim x, \sin^2 \varepsilon \sim \varepsilon^2 \sim x^2$, 那么其最终化为 x^3 .

D 选项: $(\sin x - x)(e^{\varepsilon^2} - 1), \varepsilon \in (\sin x, x)$. 使用等价无穷小可得: $(-\frac{1}{6}x^5 \times \varepsilon) \sim x^6$. 最终选择 D 选项.

题目 18 的注记. 如果上下限同阶的情况, 如本题的 C, D 选项, 则不可进行拆分, 需要使用积分中值定理 1.4.7 进行计算.

无穷小的运算

⁷ 设 m, n 为无穷小, 则

1. $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min\{m, n\}$
2. $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}), x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
3. $o(x^m) = o(kx^m) = k \cdot o(x^m), k \neq 0$

题目 19. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 是非零无穷小量, 则以下的命题中正确的是:

- A. 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha^2(x) - \beta^2(x)$; B. 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;
C. 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$; D. 若 $\alpha(x) \sim \beta(x) = o(\alpha(x))$, 则 $\alpha(x) - \beta(x)$

解答.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 那么 $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}]^2 = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)^2}{\beta(x)^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \pm 1$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 1$

题目 19 的注记. 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 那么 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$

⁷ 此处多用于泰勒公式的应用中, 会对上述高阶无穷小的运算提出要求

题目 20. 设对任意的 x 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定为零. (C) 一定不存在. (D) 不一定存在

解答. 令 $\varphi(x) = f(x) = g(x) = \begin{cases} x \\ 1 \\ 0 \end{cases}$, 易知 D 选项正确

题目 20 的注记. 遇见 \leq, \geq 的形式, 可以一律取 $=$

1.3.2 无穷大

定义 1.3.3: 无穷大的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M (不论它多么大), 总存在正数 δ (或数 X), 只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)| > M$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty^a$) 时的无穷大.^b 其 $\varepsilon - N$ 语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x)| > M.$$

^a等价于 $x \rightarrow -\infty$ 同时 $x \rightarrow +\infty$

^b无穷大一定无界, 但无界不一定是无穷大量. 与无穷小相同, 都是一个极限过程, 因此无穷大也是一个极限, 所以无界不一定是无穷大量

无穷大的比阶

- 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\ln^a x \ll x^\beta \ll a^x$, 其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.⁸
- 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\ln^a n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$, 其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.

无穷大的性质

- 两个无穷大量的积仍未无穷大量

⁸由洛必达公式证明

- 无穷大量与有界变量的和仍是无穷大量

无穷大与无界变量的关系

无穷大量一定是无界变量, 但无界变量不一定是无穷大量.⁹

1.3.3 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中, 若 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小; 若 $f(x)$ 是无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

无穷小 $\times \infty$ 的值

无穷小 $\times \infty$ 的值是一个为定式. 因为低阶无穷小乘以高阶无穷大等于无穷大, 高阶无穷小乘以低阶无穷大等于 0, 同阶无穷小和无穷大相乘等于 1. 比如:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x^2} = \infty$$

1.4 函数极限的运算

1.4.1 极限的四则运算法则

利用极限的四则运算法则求极限

¹⁰ 如果极限不存在, 那么极限属于超实数系的范畴, 在超实数系下不可以进行代数运算, 只可以进行替换运算. 但是如果极限均存在, 那么可以进行代数计算. 那么就可以使用下面的运算法则:

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 那么

⁹如数列 $x_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 是无界变量, 但不是无穷大. 无穷大是一个极限

¹⁰易错, 在计算中往往容易忽视极限不存在的情况

- $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k \lim f(x) \pm l \lim g(x) = kA \pm lB$, 其中 k, l 为常数
- $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) \equiv A \cdot B$, 特别的, 若 $\lim f(x)$ 存在, n 为正整数, 则 $\lim[f(x)]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

注 1.4.1: 常用结论

存在 \pm 不存在 = 不存在 ^a	不存在 \pm 不存在 = 不一定 ^b
存在 $\times(\div)$ 不存在 = 不一定	不存在 $\times(\div)$ 不存在 = 不一定

^a只有这个是不存在, 其余都是不一定或者存在

^b反例: $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}) = 0$

题目 21.

1. 证明: $\lim f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x) = A \lim g(x)$
2. 证明: $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$
3. 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$, 能否推出 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B$, 若不能, 则满足什么条件可以推出该结论?

证明. 1. $\lim f(x) = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim g(x) = A \cdot 0 = 0$.

2. 由于 $g(x) = \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$, 则 $\lim g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\lim f(x)}{\lim \frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{0}{A} = 0$

3. 无法推出, 有如下反例

$$\bullet g(x) = x \sin \frac{1}{x}, f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \text{ 但是当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } g(x) =$$

$x \sin \frac{1}{x}$ 不仅趋于 0, 同时还能在 $\frac{1}{n\pi}$ 这样的点处严格等于 0. 此时 $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 1$, 所以

$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$ 不存在, 其极限值在 $(0, 1)$ 之间反复横跳.

$$\bullet \quad g(x) \equiv 0, f(x) = \begin{cases} x, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0. \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 1$$

因此结论不成立. 若要成立, 则应改为:

- 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$, 且 $g(x) \neq A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B$
- 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$, 即 $f(x)$ 在 $x = A$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B$

□

结论 1.4.1: 上题的三个结论

- $\lim f(x) = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim g(x) = A \cdot 0 = 0.$
- 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$, 且 $g(x) \neq A^a$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B$
- 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$, 即 $f(x)$ 在 $x = A$ 处连续^b, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B$

^a从根本上排除了常值函数和振荡间断点的反例

^b不管内函数能否取到极限值, 只要外函数连续, 复合之后极限一定存在

题目 22. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}$. 极限

解答. 由于该极限的分子 e^x 的极限为无穷大, 无穷大属于极限中的不存在情况, 因此不可以使用极限的四则运算法则1.4.1, 也不可以对分母使用两个重要无穷小进行化简. 只能使用等价变换进行求解. 即

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} \\ &\stackrel{\text{泰勒展开}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - x + \frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

题目 23. 已知 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{f'(x)}$

解答. 如果想把分子写 $x \rightarrow 0$ 时的导数形式, 然后进行计算, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{f'(0)} = \frac{f'(0)}{f'(0)} = 1$ 进行运算, 则不满足极限四则运算法则1.4.1, 因为其分母为 0, 违背了极限的四则运算法则, 因此不可这样计算, 需要对其进行恒等变形计算. 即

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{f'(x) - f'(0)}{x}} \\
 &= \frac{1}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \\
 &\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \frac{1}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \quad (\text{易错: 此处的处理不可再次使用洛必达, 因为二阶导在此不连续}) \\
 &= \frac{1}{f''(0)} \frac{1}{2} f''(0) \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

题目 23 的注记. **使用极限运算法则的注意事项:** 在求分式这种形式的极限时, 一定要注意分子的极限是不是无穷, 如果极限为无穷则不可以使用极限运算法则对极限进行拆分计算, 同时还要注意分母的极限是不是 0, 如果是 0, 则也不可以使用极限运算法则计算, 只能进行等价替换进行运算.

题目 24. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x)$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) \\
 &= \frac{(\tan x + x)(\tan x - x)}{x^2 \times \tan^2 x} \\
 &= \frac{2x \times \frac{1}{3} x^3}{x^4} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

题目 24 的注记. 本题的有另一个解法, 但是相较上面的解法相比有些复杂, 但是记录一个常见的错误, 即什么时候可以用等价无穷小的问题, 其写法为:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4} \right)\end{aligned}$$

此处有一个常见的错误, 就是能不能把 $\cos^2 x$ 代换为 1, 其实是不能的, 即使最后答案正确, 此时 $x \rightarrow 0$ 时, 分母也趋于 0, 如果进行替换, 则违背了极限的运算法则, 因此不能进行替换

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cos x)(\sin x + x \cos x)}{x^4} \xrightarrow{\text{泰勒公式}} \frac{2}{3}$$

1.4.2 泰勒公式

泰勒公式的目的是提高精确度, 用更高次的多项式来逼近函数

带拉格朗日余项的 n 阶泰勒展开式

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 阶导数, 那么对任一 $x \in U(x_0)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

带佩亚诺余项的 n 阶泰勒展开式

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内的任一 x , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

对带有佩亚诺余项的泰勒公式取 $x_0 = 0$, 则可以得到带有佩亚诺余项的麦克劳林公式¹¹

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 由带有佩亚诺余项的麦克劳林公式可得, 有以下结论

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

注 1.4.2: 泰勒公式应用时的展开原则

- $\frac{A}{B}$ 型, 适用于“上下同阶”原则: 具体来说, 如果分母或者分子是 x 的 k 次幂, 则应把分子或分母展开到 x 的 k 次幂. 如: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$, 此处 $\ln(1+x)$ 应展开为 $x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $A - B$ 型, 适用“幂次最低”原则: 将 A, B 分别展开到他们系数不相等的 x 的最低次幂为止. 如: 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}$ 与 ax^b 为等价无穷小, 求 a, b . 则应展开为 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$, $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{4} + o(x^4)$.

¹¹ 此处有一个易被忽略的地方, 只有函数在 x_0 处, n 阶导数存在, 才可以展开到 n 阶

¹ 该函数为反双曲正弦函数

注 1.4.3: 泰勒公式的解题技巧

1. 泰勒公式构建了函数与其高阶导之间的联系, 因此看见高阶导数, 要条件反射的想到泰勒公式
2. 奇函数的泰勒展式只有奇数次幂, 偶函数的泰勒展式只有偶数次幂^a
3. 极限当中, 用佩亚诺余项 $O(x$ 的 n 次幂), 证明题中, 用拉格朗日余项, 找提供信息最多的点作为展开点
4. 等价无穷小的本质是泰勒的低精度形式, 加减法不建议使用等价无穷小, 建议直接泰勒
5. 加项减项的本质也是泰勒^b

^a如 $\sin x$ 和 $\cos x$

^b如 $\ln(x) = \ln(1+x-1) \sim x-1$

题目 25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^2 \sin x}$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)][x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]-x(1+x)}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2})x^3+o(x^3)}{x^3} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

题目 25 的注记. 有的题可能泰勒公式之后多几个高阶的, 但是还是应该遵循泰勒公式展开原则1.4.2

题目 26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2}$

解答. 对等式进行泰勒展开即:

$$\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2} = \frac{(x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2-x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

题目 27. $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x + \ln(1+x)}{x^3} = 0$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$

解答. 对原式中 $f(x)$ 和 $\sin x$ 和 $\ln(1+x)$ 各项进行泰勒展开得:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x + \ln(1+x)}{x^3} &= 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2)(x - \frac{1}{6}x^3) - (x - \frac{1}{6}x^3) + (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})}{x^3} = 0 \\ &= \frac{(f(0) + 1)x + (f''(0) - \frac{1}{2})x^2 + (-\frac{1}{6}f(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{1}{3})x^3 + o(x^3)}{x^3} = 0. \end{aligned}$$

可以得到的是, 分子的极限一定为 0, 那么

$$\begin{cases} f(0) + 1 = 0 \\ f'(0) - \frac{1}{2} = 0 \\ -\frac{1}{6}f(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \\ f'(0) = \frac{1}{2} \\ f''(0) = -1 \end{cases}$$

题目 27 的注记. 看见各阶导数应想到泰勒公式

题目 28. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x}) = 2$, 试求 $f(0), f'(0)$

解答. 对原式进行通分然后对 $\sin x$ 进行泰勒展开:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + xf(x)}{x^2} &= 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + xf(x) + o(x^2)}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

根据函数极限与无穷小的关系1.3.1可知, $1 + f(x) = 2x + o(x), f(x) = 2x - 1 + o(x)$ 因为函数在 $x=0$ 上连续, 因此 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(x) = 2x - 1 + o(x)$ 的表达式是 $x \rightarrow 0$ 时的表达式, 将 $x=0$ 带入可得 $f(0) = -1$, 使用导数定义求得 $f(x)$ 在点 0 处的导数, 即 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2x + o(x)}{x} = 2$

题目 28 的注记. 看见此类问题, 第一步应先通分, 然后将具体函数的泰勒进行展开 (因为此题中的条件是连续而不是可导, 如果是可导的话可以全部进行展开), 然后把 $f(x)$ 的表达式给求出来

题目 29. 设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x = 0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1 + ax + bx^2$, 则

$$(A)a = 1, b = \frac{1}{2} \quad (B)a = 1, b = \frac{1}{2} \quad (C)a = 0, b = -\frac{1}{2} \quad (D)a = 0, b = \frac{1}{2}$$

解答. $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, 该函数为偶函数, 因此泰勒展开只有偶数次幂, 那么 $a = 0$, 该函数一定大于 0, 因此 $b \geq 0$, 排除 C, A, B.

题目 29 的注记. 本题也可以将 $\sec x$ 展开, 但是较为麻烦, 可以采用上述的方法进行运算.

题目 30. 设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x = 0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax + bx^2 + cx^3$, 则

$$(A)a = 1, b = 0, c = -\frac{7}{6} \quad (B)a = 1, b = 0, c = \frac{7}{6} \\ (C)a = -1, b = -1, c = -\frac{7}{6} \quad (D)a = -1, b = -1, c = \frac{7}{6}$$

解答. 法 1: 对分子进行泰勒展开, 然后使用整式除法

$$1+x^2 \begin{array}{r} x - \frac{7}{6}x^3 \\ \hline x - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \\ \hline x + x^3 \\ \hline -\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \\ \hline -\frac{7}{6}x^3 - \frac{7}{6}x^5 \end{array}$$

法 2: 对整式进行泰勒展开与等价无穷小替换 $f(x) = (x - \frac{x^3}{6})(1 - x^2) = x - \frac{7}{6}x^3$

法 3: 对整式进行泰勒展开计算可得 $x - \frac{7}{6}x^3$

题目 30 的注记. 遇见此类问题, 解题方法的优先级为长除法, 利用等价替换, 使用定义 (利用泰勒公式直接所有项都展开)

1.4.3 洛必达法则

定义 1.4.1: 洛必达法则定义

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0(\infty)$
- $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或 ∞)

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

需要注意的是使用过洛必达法则之后的极限必须存在, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 必须存在.

题目 31. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \times \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

解答. 该函数也是 $\frac{0}{0}$ 型, 但是如果使用洛必达法则, 则 $2x \times \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, 极限显然不存在, 因此不可以使用

洛必达法则. 则正确求法为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \times \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \times \sin \frac{1}{x} = 0$.

结论 1.4.2: 洛必达可以洛到几阶

- n 阶导连续, 则最多可以洛到 n 阶.
- n 阶导存在/ n 阶邻域内可导, 则最多能洛到 $n-1$ 阶.
- 实际上, n 阶等连续, 不一定能够洛到 n 阶^a. 结论如下:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 到底能用多少次洛必达法则假设 m 和 n 均为正整数, 并且 $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$.

1. 如果 $f(x)$ 在 x_0 的 n 阶导数连续, 则:

(a) 若 $m \leq n$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 可以用 m 次洛必达 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$

(b) 若 $m > n$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 则一次都不能用洛必达.

2. 如果 $f(x)$ 在 x_0 有 n 阶导数 (没说 n 阶导函数连续), 则:

- (a) 若 $m \leq n-1$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 可以用 m 次洛必达 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$
- (b) 若 $m = n$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x^m}$ 可以用 $m-1$ 次洛必达出现 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m-1)}(x)}{m!(x-x_0)}$, 然后利用导数定义 $f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$ 进一步计算
- (c) 若 $m \geq n+1$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 一次都不能用洛必达

^a但是考研中这点没有难为过人, 因此可以粗略的认为上述两条是成立的

题目 32. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 并且 $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=0$, 并且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1$, 问 $\frac{f(x)}{x^3}$ 是否可以洛必达法则? 如果可以请求出 $f'''(0)$; 如果不存在, 请说明理由.

解答. 看到此题的二阶导数连续, 一般都认为可以进行洛必达, 但是其实该方程式一次洛必达都不可以进行, 假设函数 $f(x)$ 表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{28}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^3, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

那么

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{28}{9} x^{\frac{19}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3} x^{\frac{16}{9}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

二阶导为

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{532}{82} x^{\frac{10}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{44}{27} x^{\frac{7}{9}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{9} x^{\frac{4}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 6x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

可知函数 $f'(0) = 0$, 且 $f''(0) = 0$, 该函数完全满足题意, 但是对 $\frac{f(x)}{x^3}$ 使用第一次洛必达时, 为

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{28}{9} x^{\frac{19}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3} x^{\frac{16}{9}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3x^2}{3x^2}$$

洛必达之后的极限显然不存在, 因此该情况下不可以使用洛必达法则.

题目 32 的注记. 本题需要注意, 不是所有的条件下都可以进行洛必达法则, 由此可以抽象出来一个样例:

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{\sqrt[n]{x}} + x^c, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

题目 33. 已知函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x}) = 2$, 试求 $f(0), f'(0)$ 以及 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) + e^x}$

解答. 本题中未说明 $f(x)$ 在邻域内连续可导, 只说明一阶导存在, 因此一阶都不可以进行洛必达法则, 但是可以使用泰勒公式对上述式子进行泰勒展开, 因此上述式子的解法为对原式进行通分然后对 $\sin x$ 进行泰勒展开:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + xf(x)}{x^2} &= 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + xf(x) + o(x^2)}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

根据函数极限与无穷小的关系1.3.1可知, $1 + f(x) = 2x + o(x), f(x) = 2x - 1 + o(x)$ 因为函数在 $x = 0$ 上连续, 因此 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(x) = 2x - 1 + o(x)$ 的表达式是 $x \rightarrow 0$ 时的表达式, 将 $x = 0$ 带入可得 $f(0) = -1$, 使用导数定义求得 $f(x)$ 在点 0 处的导数, 即 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2x + o(x)}{x} = 2$, 然后带入极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) + e^x} = \frac{x}{-1 + 2x + e^x} = \frac{1}{3}$

题目 33 的注记. 看见此类问题, 第一步应先通分, 然后将具体函数的泰勒进行展开 (因为此题中的条件是连续而不是可导, 如果是可导的话可以全部进行展开), 然后把 $f(x)$ 的表达式给求出来

题目 34. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} - e^{\pi})$

解答. (1) 拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times e^{(\varepsilon)} (\arctan x - \frac{\pi}{2}) \\ &= e^{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &= -e^\pi
 \end{aligned}$$

(2) 提后项:

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^\pi (e^{\arctan \frac{\pi}{2}} - 1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^\pi \times \arctan \frac{-\pi x}{2} \\
 &= -e^\pi
 \end{aligned}$$

(3) 直接洛:

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\pi + \arctan x}{2}} - e^\pi}{\frac{1}{x}} \\
 &= \frac{e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} \times \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &= -e^\pi
 \end{aligned}$$

题目 34 的注记. 该形式为无穷大乘以无穷小, 可以构造无穷大比无穷大, 或无穷小比无穷小, 之后进行洛必达. 方法多了, 往往会忽视洛必达, 但有时洛必达反而会简单一些.

题目 35. 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' + 2y' + y = e^{3x}$ 的解, 且满足 $y(0) = y'(0) = 0$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $y(x)$ 为等价无穷小的是 ()

(A). $\sin x^2$ (B). $\sin x$ (C). $\ln(1+x^2)$ (D). $\ln \sqrt{1+x^2}$

解答. 等价无穷小具有传递性, 因此 $\sin x^2 \sim x^2, \sin x \sim x, \ln(1+x^2) \sim x^2, \ln(\sqrt{1+x^2}) \sim \frac{1}{2}x^2$. 若与 $y(x)$ 为等价无穷小, 那么 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{f(x)} = 1$. 对 $y(x)$ 进行泰勒展开 $y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2$. 当 $x = 0$ 时, 有 $y''(0) = 1$, 易知一阶导是连续的, 对函数形式进行分析, 可知函数在二阶导也是连续的, 那么就可以展开到二阶, 那么 $y(x) = \frac{1}{2}x^2$.

除此之外, 还可以这样解决, 已知二阶导连续, 那么对 $\frac{y(x)}{A/B/C/D}$ 进行洛必达可知 D 选项正确.

1.4.4 等价替代求极限

两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + |\square|)^{\frac{1}{\square}} = e^{|\square|^{\frac{1}{\square}}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

等价无穷小

等价无穷小的本质是泰勒的低精度形式

关于等价无穷小, 有以下两个定理

定义 1.4.2: 等价无穷小的充要条件

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta = \alpha + o(\alpha)$$

定义 1.4.3: 等价无穷小的替换准则

设 $\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$, 且 $\lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

等价无穷小的本质还是在做恒等替换, 所以一般情况下整式的乘除法可以直接用等价无穷小替换, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 但是需要遵循以下代换原则^a

- 乘除关系可以换: 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$
- 加减关系一定条件下可以换^b
 - 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$, 则 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$
 - 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$, 则 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$

加减关系代换准则证明如下:

证明.

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha_1 - \beta_1} = \lim \frac{\beta(\frac{\alpha}{\beta} - 1)}{\beta_1(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - 1)} = 1$$

□

^a其实没有什么替换原则, 本质其实是因为超实数系下不能进行实数运算, 只能进行替换运算

^b这样的形式其实不经常用, 看见加减最好使用泰勒公式进行替换运算

以下为常用等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

1.

$$\begin{aligned} x &\sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \\ &\sim \ln(1+x) \\ &\sim e^x - 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (1+x)^a &\sim 1+ax \\ a^x - 1 &\sim x \ln a \\ 1 - \cos^\alpha x &\sim \frac{\alpha}{2}x^2 \end{aligned}$$

证明. $1 - \cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2}x^2$

该等价替换主要由洛必达法则证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^\alpha}{\frac{1}{2}ax^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a(\cos x)^{a-1}(-\sin x)}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{a-1} = 1.$$

□

3. 上述结论的推广:

当 $x \rightarrow 0$ 时, 若

$$(1+x)^a - 1 \sim ax,$$

则

$$\alpha(x) \rightarrow 0, \alpha(x)\beta(x) \rightarrow 0,$$

那么

$$[1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$$

4.

$$\frac{1}{2}x^2 \sim \sec x - 1 \sim x - \ln(1+x)$$

5.

$$\frac{1}{6}x^3 \sim x - \sin x \sim \arcsin x - x$$

6.

$$\frac{1}{3}x^3 \sim x - \arctan x \sim \tan x - x$$

7. $x \rightarrow 1$ 时, $\ln x \sim x - 1$, 因为 $\ln(1+x-1) \sim x-1$

8. 当 $A \rightarrow 0, B \rightarrow 0$ 时, $e^A - e^B \sim A - B$, 因为 $e^B(e^{A-B} - 1) \sim A - B$

题目 36. 假设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x}$ 存在

解答. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x}$ 存在, 那么构造恒等变形:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} \times \frac{\frac{1}{2}x^2}{1 - \cos x} \right) \\ &\stackrel{\text{等价无穷小}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

题目 36 的注记. 整体的乘除法本质是构造恒等变形

等价无穷小替换的本质是构造恒等变形. 需要谨记: 在使用等价无穷小时, 需要按照上述步骤进行编写, 不可以省去恒等变形步骤, 如果省去则可能导致错误. 如下题

题目 37. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$

解答. 由常用不等式 1.5.2 的 $x \rightarrow 0, |\sin x| \leq |x|$, 那么

$$\left| \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x} \right| \leq \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \right|$$

由夹逼准则得:

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \right|$$

左右极限都为 0, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$ 极限为 0

题目 37 的注记. 本题有一个常见的错误做法, 就是直接把 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$ 进行等价无穷小替代, 写为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$, 但是这是错误的, 如果这样写, 那么 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x^2 \sin \frac{1}{x}} \times \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$, 在 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x^2 \sin \frac{1}{x}}$ 的分母中, 存在 $x = \frac{1}{n\pi}$ 的间断点, 根据极限定义, 极限如果存在, 那么去心邻域一定要有定义, 那这样写就违背了极限的存在准则, 因此极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$ 不存在, 不可以这样写.

抽象函数使用等价无穷小求极限

结论 1.4.3: 抽象函数等价的条件

若 $f(x) \rightarrow 0$, 只有 $f(x) \neq 0$, 才能将 $\sin(f(x)) \sim f(x)$

题目 38. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, 则下列命题中正确的个数为

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$.

(3) 若 $f'(x_0) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varphi(x)) - f(x_0)}{\varphi(x)} = A$

解答. 这三个都是错的, 因为 $\varphi(x)$ 在分母上, 都可能为 0. 比如函数 $\varphi(x) = x \times \sin \frac{1}{x}$, 其极限为 0, 但是又存在 $x = \frac{1}{n\pi}$ 的无定义点.

积分等价替换求极限

定义 1.4.4: 积分等价替换法则

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则 $\int_0^x f(t)dt \sim \int_0^x g(t)dt$.

定义 1.4.5: 变限积分求导公式

设 $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 可导函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的值域在 $[a, b]$ 上, 则在函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的公共定义域上, 有

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt \right] = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

题目 39. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt}{x e^{x^2} + x^2}$

解答. 看见变上限积分类型计算题应首先想到洛必达法则, 对原式进行洛必达法则得:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} + 2x} \\ &= \frac{1 + x^2}{1 + 2x^2 + \frac{2x}{e^{x^2}}} \end{aligned}$$

对极限取大头可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^2}{1 + 2x^2 + \frac{2x}{e^{x^2}}} = \frac{1}{2}$$

题目 39 的注记. 在极限中, 处理变上限积分的最好办法是洛必达. 能洛则洛, 不能洛的话就换元之后再洛.

题目 40. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt}{bx - \sin x} = 1$, 求 a, b , 其中 a, b 为正数

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{b - \cos x} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{b - \cos x}\end{aligned}$$

若分子趋近于零, 但是该等式的极限为 1, 那么该分母的极限一定趋近于 0, 那么 b 一定为 1

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} \\ a &= 2\end{aligned}$$

综上所述 $a = 2, b = 1$

题目 40 的注记. 对于本题, 还可以可被积函数进行等价运算 1.4.4, 但是这不是通法, 因此应当对此类问题首先进行洛必达. 以下为使用被积函数等价运算计算过程: 由于当 $t \rightarrow 0$ 时, $\frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} \sim \frac{t^2}{a^2}$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt}{bx - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{a} dt}{bx - \sin x} \\ &= \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{bx - \sin x} \stackrel{b \neq 1}{=} \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{bx - x} = 0\end{aligned}$$

等式矛盾, 因此 $b = 1$, 对上式进行泰勒展开得:

$$1 = \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x} = \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x^3}{6}} = \frac{2}{a}$$

综上所述 $a = 2, b = 1$

题目 41. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^2 - \sin^2 x}$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \ln(1+t^2) dt}{(x - \sin x)(x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \ln(1+t^2) dt}{2x \times \frac{1}{6}x^3} \\ &= \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

题目 41 的注记. 看见形如 $x^2 - \sin^2 x$ 的形式, 就应当想到 $(x + \sin x)(x - \sin x)$ 的展开, 然后通过泰勒展开进行计算

题目 42. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}$

解答. 由于分母有两个变量, 因此不好进行洛必达, 那么此时就要对分母进行换元, 换元过程如下: 令 $(x-t) = u$, 对等式两边求微分得: $d(-t) = du$.

首先, 对分子展开, 对分母换元得:

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(t) dt}$$

对原式进行洛必达法则得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(t) dt + xf(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt + xf(x)} \end{aligned}$$

如果此时还要进行洛必达, 那么分母则会出现 $f'(x)$, 那么最后是不可计算的, 因此此时应进行积分中值定理,

则 $\int_0^x f(t)dt = xf(\varepsilon)(\varepsilon \in (0, x))^{12}$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(c)}{xf(c) + xf(x)} \\ &= \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

题目 42 的注记. 如果出现两个变量则换元之后再洛, 如果实在洛不了的话, 再考虑使用积分中值定理. 积分中值定理和拉格朗日中值定理中出现的 ε , 最后一步想说明最终结果时, 严格来说需要夹逼准则.(卷面上可以不体现出来, 但脑子里必须把这些事情想明白)

本题也可以积分替换进行计算, 但是不推荐, 写法如下:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt}{x \int_0^x f(t)dt} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x \int_0^x f(t)dt} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(0)}{2}x^2}{f(0)x^2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

1.4.5 抓大头和抓小头

本质是同时处以最高阶/最低阶

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m \\ \infty, & \text{当 } n < m \end{cases}$$

还有一个重要的等价 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \sim e^{-1} \times n$ 该等价由斯特林公式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$ 而来, 又可写

为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$

¹²这个地方一定要可以夹起来, 如果夹起来的极限不一样, 那么则不可以使用积分中值定理

题目 43. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2 + 3x + 10}{3x^3 + 2x + 7}$

解答. 对等式上下同除以 x^3 得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{10}{x^3}}{3 + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = \frac{4}{3}$

题目 44. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 + 3x^4}{2x + 4x^3 + x^5}$

解答. 上下同除以 x 得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x + 3x^3}{2 + 4x^2 + x^4} = \frac{1}{2}$

1.4.6 利用函数性质求极限

幂指数函数性质求极限

一般主要是使用幂指数函数的性质进行恒等变换, 即 $a^b = e^{b \ln a}$. 如果两个函数的指数相同, 则可以提后项/前项.

除此之外, 还有一个常用的结论: 对于 $\forall a, b > 0$ 均有: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a (\ln x)^b = 0$, 证明如下:

证明.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \cdot \ln^b x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^b x}{x^{-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b \ln^{b-1} x \cdot \frac{1}{x}}{-a x^{-a-1}} \end{aligned}$$

每洛一次, 分子次数-1. 分母次数不变, 一直洛下去, 分子次数要么洛到 0 (即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c}{x^{-a}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} c x^a = 0$), 要么洛成负数 ($\lim_{x \rightarrow 0^+} c \frac{\ln^m x}{x^{-a}} = 0$), 最终结果都是 0 □

题目 45. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x - 1)}$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{e^{x \ln x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln^2 x} = 1\end{aligned}$$

题目 46. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^4} \ln(\cos 2x + 2x \sin x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \ln((1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24}) + x - \frac{x^3}{6})} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^4}{x^4}} \\ &= e^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

题目 47. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \ln(1+x)}$

解答. 本题方法较多, 因此分阶段进行分析:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln x} - e^{x \ln \sin x}}{x^2 \ln(1+x)} \\ &= \frac{e^{x \ln x} - e^{x \ln \sin x}}{x^3}\end{aligned}$$

接下来, 可以对上述式子进行中值定理计算或者使用提后项的方法:

中值定理:

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^\varepsilon (x \ln x - x \ln \sin x)}{x^3}$$

$$= \frac{\ln x - \ln \sin x}{x^2}$$

提后项:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \sin x} (e^{x \ln x - x \ln \sin x} - 1)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x \ln x - x \ln \sin x} - 1)}{x^3} \\ &= \frac{\ln x - \ln \sin x}{x^2} \end{aligned}$$

然后对于 $\frac{\ln x - \ln \sin x}{x^2}$ 可使用中值定理和对数运算法则进行计算:

拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}(x - \sin x)}{x^2} \quad (x < \varepsilon < \sin x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^2\varepsilon} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

对数运算法则:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{x}{\sin x})}{x^2} \\ &= \frac{\ln(1 + \frac{x}{\sin x} - 1)}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x}{\sin x} - 1}{x^2} \\ &= \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

题目 48. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^{\sin x} - 3^{\sin x}}{x^2}$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} \left[\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{\sin x} - 1 \right]}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{3} \sin x}{x^2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

对数函数性质求极限

极限当中, 见到 $\ln A, A$ 趋于 1 时, 优先想到构造 $\ln(1 + \text{无穷小})$ 的形式, 如果这个式子本身进行恒等变形之后的结果过于复杂, 则要想到利用对数运算法则构造 $\ln(1 + \text{无穷小})$.

题目 49. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 是 x 的 n 阶无穷小, 则 $n =$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x) - \ln(1-x) - 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{1}{3}x^3 \right) \\ &= x^3\end{aligned}$$

综上所述知: $n = 3$

题目 50. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(e^{2x} - x^2) - 2x}$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - \ln e^x}{\ln(e^{2x} - x^2) - \ln e^{2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin^2 x + e^x}{e^x}}{\ln \frac{e^{2x} - x^2}{e^{2x}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\sin^2 x}{e^x})}{\ln(1 - \frac{x^2}{e^{2x}})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{e^x}}{\frac{x^2}{e^{2x}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1
\end{aligned}$$

题目 51. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^p} = c \neq 0$

A. $p = 3, c = -\frac{4}{3}$ B. $p = -3, c = \frac{4}{3}$ C. $p = \frac{4}{3}, c = 3$ D. $p = -\frac{4}{3}, c = -3$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^p} = c \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{2x^3}{3} - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^p} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{4}{3}x^3}{x^p}
\end{aligned}$$

综上所述知: $p = 3, c = -\frac{4}{3}$

题目 52. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\ln x} \ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln \frac{\ln x}{x}}{\ln x} \times \frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln \frac{\ln x}{x}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln \ln x - \ln x}{\ln x}} = e^{-1}
\end{aligned}$$

题目 52 的注记. 注意: $a^b = e^{b \ln a}$ 在这个题中非常易错

1.4.7 中值定理求极限

中值定理求极限通常和夹逼准则配合求极限

夹逼准则

定义 1.4.6: 函数极限夹逼准则

如果

- 当 $x \in U^\circ(x_0, r)$ (或 $|x| > M$) 时

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} h(x) = A$

那么 $\lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} f(x)$ 存在, 且等于 A .

积分中值定理

定义 1.4.7

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在积分区间 $[a, b]$ 上至少存在一个点 ε , 使下式成立

$$\int_a^b f(x) dx = f(\varepsilon) (b - a)$$

其中, a, b, ε 满足: $a \leq \varepsilon \leq b$

拉格朗日中值定理求极限

如果两个函数的形式一样, 那么可以使用拉格朗日中值定理进行计算, 但是处理之后的 ε 需要可以使用夹逼准则.

题目 53. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} \right) (a > 0)$

解答. 该题存在相近的函数形式, 使用拉格朗日中值定理进行解析 $a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} = a^{\frac{1}{\varepsilon}} \ln a \frac{1}{\varepsilon^2}, \varepsilon \in (x, x+1)$

$$\text{原式} = x^2 a^{\frac{1}{\varepsilon}} \ln a \frac{1}{\varepsilon^2}$$

当 $\varepsilon \rightarrow x+1$ 时, 原式的极限为 $x^2 a^{\frac{1}{x+1}} \ln a \frac{1}{(x+1)^2} = \ln a$

当 $\varepsilon \rightarrow x$ 时, 原式的极限为 $x^2 a^{\frac{1}{x}} \ln a \frac{1}{x^2} = \ln a$

综上, 函数极限为 $\ln a$

题目 54. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right) (a > 0)$

解答. 该题存在相近的函数形式, 使用拉格朗日中值定理进行解析 $\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} = -\frac{a}{\varepsilon^2 + a^2}$

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(-\frac{a}{\varepsilon^2 + a^2} \right), (\varepsilon \in (n, n+1))$$

当 $\varepsilon \rightarrow n+1$ 时, 原式的极限为 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(-\frac{a}{(n+1)^2 + a^2} \right) = a$

当 $\varepsilon \rightarrow n$ 时, 原式的极限为 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(-\frac{a}{(n)^2 + a^2} \right) = a$

综上, 函数极限为 a

题目 55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - \cos x}{x^2}$

解答. 对分子进行泰勒展开得:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1 - \frac{4}{2}x^2 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

题目 55 的注记. 本题看似可以存在两个形式相同的函数形式, 但是如果对其使用拉格朗日中值定理解析, 则 $\sin \varepsilon, \varepsilon \in (x, 2x)$, 此时 $\sin \varepsilon$ 的极限不可以通过夹逼准则得到, 因此不可以使用这种方法, 只可以使用泰勒展开.

1.4.8 七种未定式的计算

主要有以下类型 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty$

形如 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$ 可以直接计算或者简单转换可以直接计算.

题目 56. ★★☆☆☆ 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + nx(1-x)\sin^2 \pi x}{1 + n\sin^2 \pi x}$, 则 $f(x) =$

解答. 分情况讨论, 当 $\sin^2 \pi x = 0$ 和 $\sin^2 \pi x \neq 0$ 时进行讨论.

当 $\sin^2 \pi x = 0$ 时:

$$\text{原式} = x^2$$

当 $\sin^2 \pi x \neq 0$ 时:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{n} + x(1-x)\sin^2 \pi x}{\frac{1}{n} + \sin^2 \pi x} \\ &= \frac{x(1-x)\sin^2 \pi x}{\sin^2 \pi x} \\ &= x(1-x) \end{aligned}$$

综上 $f(x)$ 表达式为:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x(1-x), & x \text{ 取其他值.} \end{cases}$$

题目 57. 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}} \\ &= \frac{2-1}{1} \end{aligned}$$

$$= 1$$

题目 57 的注记. 这个题直接用抓大头会错, 因为后面还有一个同阶的 x , 然后还有就是下面是趋于 $-\infty$

形如 $\infty - \infty$

分式类型的 $\infty - \infty$, 直接通分:

$$\text{题目 58. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x)(x - \sin x)}{x^2 \times \sin^2 x} \\ &= \frac{(x + x - \frac{x^3}{6})(x - x + \frac{x^3}{6})}{x^4} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{题目 59. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2 + x} - x)$$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \left(\frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

题目 59 的注记. 本题是分式的 $\infty - \infty$ 类型, 因此需要通分计算, 本题易错处在于, 看见两个等级别的 $\infty - \infty$, 直接写 0, 因此看见两个等级别的 $\infty - \infty$, 千万不要写 0!!!!¹³最后导致答案为 $\frac{\pi}{2}$

¹³此处已经错 n 次了!!! 尤其是三大计算!!!

非分式的 $\infty - \infty$:

1. 通法: **提最高阶无穷, 构造无穷大乘以无穷小**. 之后可以对后面的无穷小进行等价/泰勒, 或者把无穷大乘以无穷小改造成无穷小比无穷小, 或无穷大比无穷大, 之后洛必达. 提最高阶无穷之前, 能算的极限要先算出来.
2. 见到两个根式相减, 可以考虑有理化. 但注意只能是平方根, 立方根就不适用了.
3. 看见函数形式相同, 可以考虑使用拉格朗日中值定理.

题目 60. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(e^x + xe^x) - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + x^2e^x - e^x + 1}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x + x^2 - 1) + 1}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3xe^x + x^2e^x}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x + xe^x}{2} \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

题目 60 的注记. 本题可能上去第一步就把 $e^x - 1$ 直接给替换, 但是不能这样写, 因为等价无穷小不可以进行部分替代

题目 61. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$

解答.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x\sqrt{x}}}}} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}^1 \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

题目 61 的注记. 上述解法为通法, 即提最高阶无穷 \sqrt{x} . 除此之外, 还可以使用有理化进行通分:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}} + 1}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

题目 62. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right) \\
&= \left[1 + \frac{1}{2x} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!} \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!} \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

题目 62 的注记. 本题有一个错误的做法:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + 1} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right) \\
&= x^2 (1 + 1 - 2)
\end{aligned}$$

¹ 此处不能把后面的极限算出来的原因是 $\frac{1}{x}$ 极限为不存在, 因此如果拆分计算则违背了极限的运算法则

$$= 0$$

此处不能把后面的极限算出来的原因与上题一样也是 $\frac{1}{x}$ 极限为不存在, 因此如果拆分计算则违背了极限的运算法则

题目 63. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2023}}{n^\alpha - (n-1)^\alpha} = \beta \neq 0$, 求 α 及 β

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2023}}{n^\alpha (1 - (1 - \frac{1}{n})^\alpha)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2023}}{-n^\alpha ((1 - \frac{1}{n})^\alpha - 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2023}}{\frac{a}{n}} \end{aligned}$$

综上可知: $\alpha = 2023, \beta = \frac{1}{2023}$

题目 64. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e}]$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{(1 + \frac{1}{x})^x} - \frac{x}{e} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[e - (1 + \frac{1}{x})^x \right]}{e (1 + \frac{1}{x})^x} \\ &= \frac{1}{e^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e - (1 + \frac{1}{x})^x}{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}} - e}{t} \\ &= \frac{-1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} - e}{t} \\ &= -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\ln(1+t)-t}{t}} - 1}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} \\
 &= -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2} = \frac{1}{2e}
 \end{aligned}$$

形如 $\infty^0, 0^0$

∞^0 与 0^0 通常使用 $u^v = e^{v \ln u}$ 来计算

形如 1^∞

1^∞ 通常使用 $\lim u^v = e^{\lim(u-1)v}$ 来计算¹⁴. 之后将 $(u-1)v$ 摘出, 然后使用替换法则或者泰勒公式进行求解

题目 65. 设 n 为正整数, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^n}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)} \right]^x$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^n}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)} \right]^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^x \left(\frac{x}{x-2} \right)^x \cdots \left(\frac{x}{x-n} \right)^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{-x} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{-x} \cdots \left(\frac{x-n}{x} \right)^{-x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{-x} \cdots \left(1 - \frac{n}{x} \right)^{-x} \\
 &= e \cdot e^2 \cdots e^n = e^{\frac{n(n+1)}{2}}
 \end{aligned}$$

题目 66. 已知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线过点 $(1, 2)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x + \int_0^x f(t) dt \right)^{\frac{1}{x^2}}$

解答. 已知 $f(0) = 0, f'(0) = 2$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \left(\cos x + \int_0^x f(t) dt \right)}{x^2}}$$

¹⁴ 其实本质还是使用了幂指函数的性质进行计算, 因为 $\lim u^v = e^{\lim v \ln(u)} = e^{\lim v \ln(1+u-1)} = e^{\lim v(u-1)}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos x - 1 + \int_0^x f(t) dt}{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} - \frac{1}{2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{f(x)}{2x} - \frac{1}{2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

题目 67. ★★★★★ 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3} \right)^{\frac{e}{x}}$.

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{e}{x} \ln \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{e}{x} \left(\frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3} - 1 \right)}
\end{aligned}$$

把分子摘出来:

$$\begin{aligned}
\frac{e}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{x} - 3 \right) &= \frac{e}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{x} + \frac{e^{3x} - 1}{x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}
\end{aligned}$$

综上原式为 $e^{\frac{e}{3}(1+2+3)} = e^{2e}$

题目 68. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x$

解答.

$$\text{原式} = e^{x \ln \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{x \left(\frac{x^2}{(x-a)(x-b)} - 1 \right)} \\
&= e^{\frac{ax^2 - bx^2 + abx}{x^2 - ax + bx}} \\
&= e^{\frac{2ax - 2bx + ab}{2x + b - a}} \\
&= e^{a-b}
\end{aligned}$$

题目 69. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}}{e^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n} \\
&= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 [\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})]} \\
&= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 \cdot \frac{1}{2} (\frac{1}{n})^2} \\
&= e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

题目 69 的注记. 本题易错点, 一是直接把 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 直接替换成 e , 二是在计算 $\frac{e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}}{e^n}$ 时, 替换成 $\frac{e^{n^2 \frac{1}{n}}}{e^n}$, 这两个错误的点都是在计算时进行了部分替代.

题目 70. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{n}{x}}$, 其中 $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

解答. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} a_i^x = 1$, 则函数形式为 1^∞ 型

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{n}{x} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + a_3^x + \cdots + a_n^x}{n} - 1 \right)}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_2^x - 1}{x} + \cdots + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_n^x - 1}{x} \right\}} \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \cdots + a_n^x \ln a_n} \\
&= a_1 a_2 a_3 \cdots a_n
\end{aligned}$$

题目 70 的注记. 本题需注意的是 $\lim_{x \rightarrow 0} a_i^x = 1$, 然后可以观察出该极限类型为 1^∞ 型, 之后可以利用等价无穷小替换求的极限

1.5 数列极限的运算

1.5.1 n 项数列极限求解

n 项连加的数列极限

常用等式:

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + c$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$	$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $(n \rightarrow \infty \text{ 时}) n^n \gg n! \gg k_{(k>1)}^n \gg n_{(k>1)}^k \gg \ln n$ <p>斯特林公式 1.4.5: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \sim e^{-1} \times n$</p>
---	--

放缩技巧:

$$\begin{cases} n \times u_{\min} \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq n \times u_{\max}, \\ \text{当 } u_i \geq 0 \text{ 时, } 1 \times u_{\max} \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq n \times u_{\max}. \end{cases}$$

处理手法:

1. 优先看变化部分¹⁵的最大值是主体部分¹⁶的同量级或次量级

- 次量级使用夹逼进行求解
- 同量级使用定积分定义进行求解¹⁷

¹⁵分母中随项的变化而变化, 称其为变化部分

¹⁶不随项的变化而变化, 称其为主体部分

¹⁷可爱因子 $\frac{1}{n}$, 然后构造形如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-c} f\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$ 的表达式进行求解, 其中 C 为任意常数, $\varepsilon \in [k-1, k]$.

2. 放缩的通用手法是分子/分母取最大的或最小的, 即取两头

题目 71. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right)$

解答. 对原式进行放缩可得:

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

对不等式两侧取极限可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1}$$

易知左右两侧不等式极限均为 1, 解得不等式极限为 1

题目 71 的注记. 对本题的分析: 主体部分与变化部分的最大值是次量级关系, 即 n^2 与 n 不是同一个变化量级. 那么就可以使用夹逼准则进行夹逼运算出最大值

题目 72. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$.

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + (\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1 + (\frac{2}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{1 + (\frac{n}{n})^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \quad f(x) \text{函数表达式为 } \frac{1}{1+x^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

题目 72 的注记. 主体部分与变化部分的最大值是同量级关系, 即 n^2 与 n^2 不是同一个变化量级. 那么就可以使用夹逼准则进行夹逼运算出最大值

题目 73. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{e^n + 1^2} + \frac{e^2}{e^n + 2^2} + \cdots + \frac{e^n}{e^n + n^2} \right)$

解答.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{e - e^{n+1}}{1 - e}}{e^n + n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{e^n + 1^2} + \frac{e^2}{e^n + 2^2} + \cdots + \frac{e^n}{e^n + n^2} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{e - e^{n+1}}{1 - e}}{e^n + 1^2}$$

根据抓大头的思路可化为

$$\frac{-e}{1 - e} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{e^n + 1^2} + \frac{e^2}{e^n + 2^2} + \cdots + \frac{e^n}{e^n + n^2} \right) \leq \frac{-e}{1 - e}$$

可知原式极限为 $\frac{-e}{1 - e}$

题目 74. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^6 + n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6 + 2n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6 + n^2}} \right)$

解答.

$$\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\sqrt{n^6 + n^2}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n^6 + n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6 + 2n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6 + n^2}} \right) \leq \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\sqrt{n^6 + n}}$$

取极限得:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\sqrt{n^6 + n^2}} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^6 + n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6 + 2n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6 + n^2}} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\sqrt{n^6 + n}} \\ \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{\sqrt{n^6 + n^2}} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^6 + n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6 + 2n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6 + n^2}} \right) \leq \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{\sqrt{n^6 + n}} \end{aligned}$$

根据抓大头的思路可知原式极限为 $\frac{1}{3}$

题目 75. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right)$

解答.

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{2}{n})^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{n}{n})^2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\
&= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 \\
&= \ln(1 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

题目 76. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\
&= \int_0^1 x \ln(1+x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) dx^2 \\
&= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

题目 77. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$

解答. 首先对等式进行化简, 使用夹逼准则可以得到:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^k \sin \frac{k\pi}{n}}{n+1} \leqslant \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right) \leqslant \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^k \sin \frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$$

等式左右两侧可等价如下形式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^k \sin \frac{k\pi}{n}}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right) \leq \frac{\sum_1^k \sin \frac{k\pi}{n}}{n}$$

左右两侧使用定积分定义可得:

$$\int_0^1 \sin(\pi x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right) \leq \int_0^1 \sin(\pi x) dx$$

其中 $\int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}$, 综上, 等式极限为 $\frac{2}{\pi}$

题目 77 的注记. 本题分析, 首先看到分母的变化部分的最大值与主体部分是次量级关系的, 那么如果想使用夹逼进行计算, 那么就会发现分子的大小无法计算, 没有一个等差或者等比数列的公式可以计算出分子的各项和, 因此应该最终应该使用定积分定义进行计算.

题目 78. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{1^2+n^2} + \frac{n+\frac{1}{2}}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n^2} \right)$

解答. 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{1^2+n^2} + \frac{n+\frac{1}{2}}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n^2} \right) = I$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \frac{1}{n}) \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (n + \frac{1}{n}) \left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (n+1) \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right)$$

左右两侧等价得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right)$$

使用定积分定义可得:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$, 综上, 等式极限为 $\frac{\pi}{4}$

题目 79. 已知 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$, 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n (n = 1, 2, \dots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛

解答. 令 $a_{n+1} - a_n$ 得 $(\frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n})) < 0$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \dots + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n \\ &= \ln(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n}) - \ln n \\ &= \ln(1+n) - \ln n > 0 \end{aligned}$$

综上所述, 由于数列单调递减且有下界, 因此收敛

题目 79 的注记. 此题的方法为非常规的方法, 需要考虑上下问, 结合进行分析.

n 项连乘的数列极限

主要有以下两种方法:

1. 夹逼准则
2. 取对数化为 n 项和¹⁸

题目 80. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{\sqrt{n(1+2+\dots+n)}}$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{n^2(n+1)}{2}}} \\ &= \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right) \end{aligned}$$

¹⁸通法

$$= \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

题目 81. 设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$

解答. 对原式取对数可知: $\ln x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$ 当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, 则

$$\frac{k}{n^2 + n} \leq \frac{k}{n^2 + k} = \frac{\frac{k}{n^2}}{1 + \frac{k}{n^2}} < \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n} = \frac{1}{2}$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e^{\frac{1}{2}}$

题目 82. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, x_1, x_2, \dots, x_n 是 $[a, b]$ 上的一个点列, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)}}$

解答. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 已知 $e^{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上非负连续, 且 $0 < m \leq e^{f(x)} \leq M$, 其中 M, m 分别是 $e^{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 于是 $0 < m \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)} \leq M$, 故 $\sqrt[n]{m} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)}} \leq \sqrt[n]{M}$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M} = 1^{19}$, 根据夹逼准则, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)}} = 1$

题目 83. 求 $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

解答. 显然 $a_n \leq 1$, 又

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}} = \sqrt[n]{\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{1}{2n}} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{2n}}$$

¹⁹写成幂函数形式配合泰勒公式即可看出, 来自此处数列的性质:1.1.1

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}} = 1$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

题目 83 的注记. 这题的方法不是常规方法, 如果按照一般的处理方法, 应该写为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{2n-1}{2n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{2}}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{3}{4}}{n} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{2n-1}{2n}}{n} \\ &= 0 + 0 + 0 + \dots + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

但是这显然是错误的, 无穷多个无穷小相加, 结果仍是未定式.

题目 84. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$

解答. 令 $a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \ln[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)] \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)] - \ln n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln(n+1) + \ln(n+2) + \dots + \ln(n+n) - n \ln n] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] \\ &= \int_0^1 \ln(1+x) dx \\ &= \int_0^1 \ln(1+x) d(x+1) \\ &= (x+1) \ln(1+x) \Big|_0^1 - 1 \\ &= 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

综上 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$

题目 85. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \sim e^{-1} \times n$

解答.

$$\begin{aligned} a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(n \times (n-1) \times \dots \times 1) - \ln n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln n + \ln(n-1) + \dots + \ln 1 - n \ln n] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln \frac{n}{n} + \ln \frac{n-1}{n} + \dots + \ln \frac{1}{n} \right] \\ &= \int_0^1 \ln x dx \\ &= x \ln x \Big|_0^1 - 1 = -1 \end{aligned}$$

综上 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \sim e^{-1} \cdot n$

1.5.2 常用不等式

- 利用如下重要不等式

1. 设 a, b 为实数, 则 $|a+b| \leq |a|+|b|$; $|a|-|b| \leq |a-b|$ ²⁰

2. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ($a, b > 0$)²¹

题目 86. 证明函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界

解答. 当 $x \neq 0$ 时, 令 $|f(x)| = \frac{|x|}{1+x^2} = \frac{1}{\frac{1}{|x|} + |x|}$, 由不等式 $\frac{1}{x} + x > 2\sqrt{\frac{1}{x} \times x} = 2$ 可得

$\frac{1}{\frac{1}{|x|} + |x|} < \frac{1}{2}$, 即 $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$

综上, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界

题目 86 的注记. 本题利用了绝对值和不等式来证明函数有界

²⁰可以将上述式子推广为 n 个实数的情况: $|a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.

²¹还有一个不等式是 $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

$$3. \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} (a, b, c > 0)$$

$$4. \text{ 设 } a \geq b \geq 0, \text{ 则 } \begin{cases} \text{当 } n \geq 0 \text{ 时, } a^n \geq b^n, \\ \text{当 } n \leq 0 \text{ 时, } a^n \leq b^n. \end{cases}$$

$$5. \text{ 若 } 0 < a < x < b, 0 < c < y < d, \text{ 则 } \frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}.^{22}$$

$$6. \sin x < x < \tan x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$7. \sin x < x (x > 0)$$

$$8. \text{ 当 } 0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ 时, } x < \tan x < \frac{4}{\pi}x$$

$$9. \text{ 当 } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \sin x > \frac{2}{\pi}x$$

$$10. \arctan x \leq x \leq \arcsin x (0 \leq x \leq 1)$$

$$11. e^x \geq x + 1 (\forall x)^{23}$$

$$12. x - 1 \geq \ln x (x > 0)^{24}$$

$$13. \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} (x > 0) \text{ 或 } \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x (x > 0)^{25}$$

$$14. \text{ 在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如 } \left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{2^2}}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right), \text{ 可化为 } \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{2^2}}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) * \frac{4}{3}$$

1.5.3 递推关系式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 数列极限

1. 单调有界 (先证明极限存在, 之后对 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两端取极限)

定理 1.5.1: 数列的单调有界准则

单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

证明数列单调性的方法:

²² 当 $n\pi < x < (n+1)\pi, 2n < S(x) < 2(n+1)$ 时, $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$.

²³ 当 $x_{n+1} = e^{x_n} - 1$ 时, 由 $e^{x_n} - 1 \geq x_n$, 得 $x_{n+1} \geq x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调不减

²⁴ 当 $x_n > 0$ 时, 若 $x_{n+1} = \ln x_n + 1$, 由 $\ln x_n + 1 \leq x_n$, 得 $x_{n+1} \leq x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调不增

²⁵ 令 $f(x) = \ln x$, 并在区间 $[x, x+1]$ 上对其使用拉格朗日中值定理, 有 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}$ 其中 $0 < x < \xi < x+1$, 因此对任意的 $x > 0$, 有 $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$

(a) $x_{n+1} - x_n > 0$ 或 $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ (同号)

(b) 利用数学归纳法

定义 1.5.1: 第一数学归纳法的定义

第一数学归纳法是证明当 n 等于任意一个自然数时某命题成立. 证明分下面两步:

i. 证明: 当 $n = 1$ 时命题成立.^a

ii. 证明: 若假设在 $n = m$ 时命题成立, 可推导出在 $n = m + 1$ 时命题成立.

这种方法的原理在于: 首先证明在某个起点值时命题成立, 然后证明从一个值到下一个值的过程有效. 当这两点都已经证明, 那么任意值都可以通过反复使用这个方法推导出来.

^a选择数字 1 因其作为自然数中的最小值

(c) 利用重要不等式

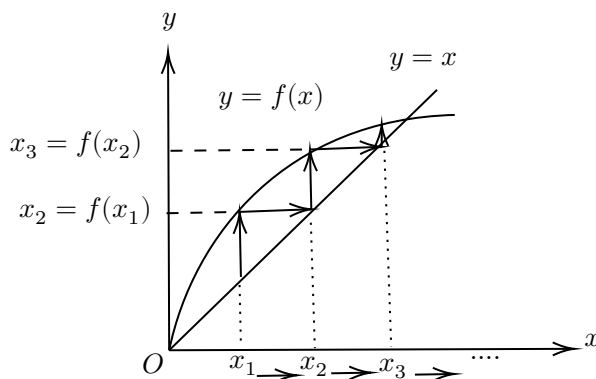
(d) $x_n - x_{n-1}$ 与 $x_{n-1} - x_{n-2}$ 同号, 则 x_n 单调

(e) 利用结论: 对 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots), x_n \in \text{区间 } I$

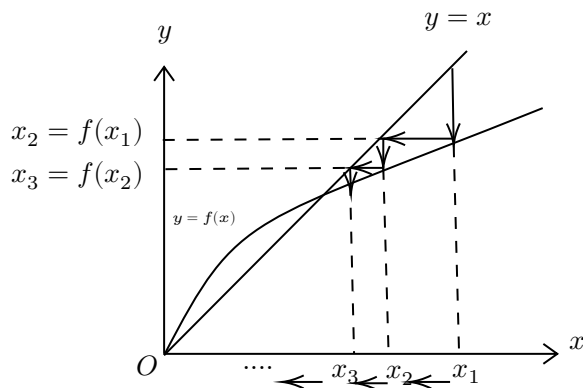
- 若 $f'(x) > 0, x \in \text{区间 } I$, 则数列 $\{x_n\}$ 单调, 且

{	当 $x_2 > x_1$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 单调增加
	当 $x_2 < x_1$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 单调减少

证明. 若 $f(x)$ 单调增加, 且 $x_1 < x_2$, 则数列单增的图像是这样的:



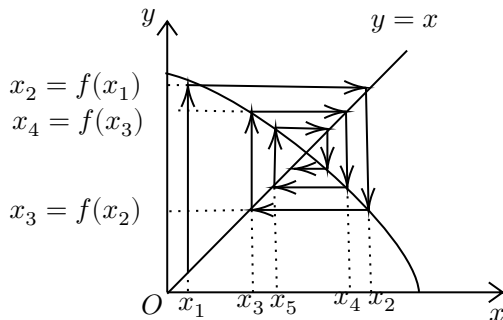
若 $f(x)$ 单调增加, 且 $x_1 > x_2$, 则数列单增的图像是这样的



□

- 若 $f'(x) < 0, x \in \text{区间 } I$, 则数列 $\{x_n\}$ 不单调

证明. 若 $f(x)$ 单调递减, 且 $x_1 < x_2$ 时, 则图像为



□

2. 利用压缩映射 (先斩后奏): 先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 然后等式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两端取极限解得 A , 得到极限初步结果, 最后再证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. 核心是用 $x_n = f(x_{n-1})$ 证明一个递推不等式 $|x_n - a| \leq A|x_{n-1} - a|$, 其中 $0 < A < 1$

题目 87. 设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} (n = 1, 2, \dots)$, 证明: 数列 x_n 极限存在并求此极限

解答. 由 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 可得:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} \leq \frac{3}{2}$$

可知数列 x_n 存在上界, 令 $x_{n+1} - x_n$ 可得:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n \\ &= \frac{x_n(3-x_n) - x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} \\ &= \frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} \geq 0 \end{aligned}$$

故 x_n 单调递增, 根据数列单调有界定理, 该数列极限存在, 因此设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 对等式 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 左右两边取极限得: $a = \sqrt{a(3-a)}$. 解得 $a = \frac{3}{2}$

综上, 数列极限为 $\frac{3}{2}$

题目 87 的注记. 出现本题的形式 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 可以使用常用不等式 1.5.2, 对不等式放缩计算极限.

题目 88. 设 $x_1 = \sqrt{6}, x_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \dots, x_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

解答. 由题意可知, 讲数列的表达式可抽象为 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, 其函数表达式为 $f(x) = \sqrt{6 + x}$, 对其求导可得: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6+x}} > 0$, 由于 $x_1 < x_2$ 因此数列单调递增. 又因为 $x_1 = \sqrt{6} < 3$, 若 $x_n < 3$, 则 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} < 3$, 从而 $x_n < 3$, 即数列 x_n 有上界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 由于 $0 < x_n < 3$, 故由极限的保序性可得: $0 \leq a \leq 3$. $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, 两侧取极限得: $a = \sqrt{6 + a}$, 解得 $a = 3$, 综上数列极限为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$

题目 88 的注记. 除此之外, 本题还可以使用压缩映射进行求解:

解答. 直接证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$, 由 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ 知:

$$\text{原式} = |x_n - 3| = |\sqrt{6 + x_{n-1}} - 3|$$

对于此处的运算, 我们可以使用拉格朗日中值定理进行化简, 即

$$\begin{aligned} \text{原式} &= |\sqrt{6 + x_{n-1}} - 3| \\ &= |\sqrt{6 + x_{n-1}} - \sqrt{9}| \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} |x_{n-1} - 3| < \frac{1}{2} |x_{n-1} - 3| < \frac{1}{2^2} |x_{n-2} - 3| < \dots < \frac{1}{2^{n-1}} |x_1 - 3| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$

当然也可以使用有理化进行化简:

$$\text{原式} = \frac{|x_{n-1} - 3|}{\sqrt{6 + x_{n-1}} + 3} < \frac{1}{3} |x_{n-1} - 3| < \frac{1}{3^2} |x_{n-2} - 3| < \dots < \frac{1}{3^{n-1}} |x_1 - 3| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

综上

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - 3| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n-1}} |x_1 - 3|$$

使用夹逼准则可以得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$

题目 89. 设 $x_1 = 2, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} (n = 1, 2, \dots)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

解答. 令 $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$, 则 $x_{n+1} = f(x_n)$, 显然 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减, 故 $\{x_n\}$ 不具有单调性, 因此只能使用压缩映射.

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = 2 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \Rightarrow a = 2 + \frac{1}{a}$, 解得 $a = 1 \pm \sqrt{2}$.

由题设知 $x_n \geq 2$, 故由极限的保号性知, $a \geq 2$, 从而 $a = 1 + \sqrt{2}$, 以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 + \sqrt{2}$

$$|x_n - a| = \left| \left(2 + \frac{1}{x_{n-1}} \right) - \left(2 + \frac{1}{a} \right) \right| = \left| \frac{x_{n-1} - a}{ax_{n-1}} \right| \leq \frac{|x_{n-1} - a|}{2a} \leq \frac{|x_{n-1} - a|}{2} \leq \frac{|x_{n-2} - a|}{2^2} \leq \dots \leq \frac{|x_1 - a|}{2^{n-1}} \rightarrow 0$$

题目 89 的注记. 需要切记的是在压缩映射中, 极限值为根式时, 要用极限时的等式对极限值进行替换, 比如在本题中在证明数列极限为 $1 + \pm\sqrt{2}$ 中, 应写为 $|x_n - a|$, 而不是 $|x_n - 1 - \sqrt{2}|$

题目 90. 设 $x_1 = \sqrt{a} (a > 0), x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值.

本题有四种方法, 下面依次给出求解:

解答. 法 1: 数学归纳法找上界: 数列形式可写为 $f(x) = \sqrt{a + x}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a + x}} > 0$, 因此 $f(x)$ 单增,

又 $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, x_2 > x_1$, 因此 x_n 单增.

假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$. 由第一数学归纳法可得:

验证 $x_1 = \sqrt{a} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$, 即证:

$$2\sqrt{a} < 1 + \sqrt{1 + 4a}$$

$$4a < 2 + 4a + 2\sqrt{1 + 4a}$$

假设 $x_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ 成立, 验证 $x_{n+1} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ 即证:

$$2\sqrt{a + x_n} < 1 + \sqrt{1 + 4a}$$

$$4a + 4x_n < 2 + 4a + 2\sqrt{1 + 4a}$$

$$4x_n < 2 + 2\sqrt{1 + 4a}$$

即证: $x_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$, 显然成立.

综上: $x_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$, 且 x_n 单增, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A = \sqrt{a + A}$, 解得 $A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

综上 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

解答. 法 2: 对方法一进行化简 (最佳): 数列形式可写为 $f(x) = \sqrt{a + x}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a + x}} > 0$, 因此 $f(x)$

单增, 又 $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, x_2 > x_1$, 因此 x_n 单增.

设 $A = \sqrt{a + A}$ 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$. 由第一数学归纳法可得:

验证 $x_1 < A$, 即证:

$$x_1 = \sqrt{a}, A = \sqrt{a + A}$$

$$\sqrt{a} < \sqrt{a + A} \Rightarrow x_1 < A$$

假设 $x_n < A$ 成立, 验证 $x_{n+1} < A$ 即证:

$$x_{n+1} = \sqrt{x + x_n} < \sqrt{a + A} = A$$

即证: $x_n < A$, 显然成立.

综上: $x_n < A$, 且 x_n 单增, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$, 则 $M = \sqrt{a + M}$, 解得 $M = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

解答. 法 3: 构造不等式进行放缩²⁶ 易知 x_n , 单调递增, 且 $x_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} > x_n > \dots > x_1 = \sqrt{a} \\ \frac{x_n}{x_{n+1}} < 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{a + x_n} \\ \Rightarrow x_{n+1}^2 &= a + x_n \\ \Rightarrow \frac{a}{x_{n+1}} + \frac{x_n}{x_{n+1}} \\ \Rightarrow x_{n+1} &< \frac{a}{x_{n+1}} + 1 \end{aligned}$$

x_n 单增且有上界, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A = \sqrt{a + A}$, 解得 $A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$
 综上 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

解答. 法 4: 压缩映射 + 有理化

$$\begin{aligned} |x_n - A| &= |\sqrt{a + x_{n+1}} - \sqrt{a + A}| \\ &= \frac{|x_{n+1} - A|}{\sqrt{a + x_{n+1}} + \sqrt{a + A}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} |x_{n+1} - A| \end{aligned}$$

题目 91. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解答.

$$x_{n+1} - x_n = \ln\left(\frac{e^{x_n} - 1}{x_n}\right) - x_n = \ln\left(\frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}}\right).$$

令 $f(x) = e^x - 1 - xe^x$, 则 $f'(x) = -xe^x$. 当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调减少, 于是, $f(x) < f(0) = 0$. 从而, 当 $x > 0$ 时

$$\frac{e^x - 1}{xe^x} - 1 = \frac{e^x - 1 - xe^x}{xe^x} < 0$$

即 $\frac{e^x - 1}{xe^x} < 1$ 又因为对所有的正整数 n , 都有 $x_n > 0$, 所以 $\ln\left(\frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}}\right) < \ln 1 = 0$, 即 $x_{n+1} - x_n < 0$. 因此, 数列 $|x_n|$ 单调减少.

由单调有界准则可知, 数列 $|x_n|$ 收敛. 由于对所有的正整数 n , 都有 $x_n > 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq 0$.

²⁶ 其实不好放缩, 但是可以硬往条件上凑

对 $x_n e^{x_n+1} = e^{x_n} - 1$ 两端同时令 $n \rightarrow \infty$, 可得 $ae^n = e^a - 1$, 由前面的结果可知, $x = 0$ 是 $f(x) = e^x - 1 - xe^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上的唯一零点, 因此, $a = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.