第一章　导数

1.1　导数的概念

1.1.1　导数的定义

定义 1.1.1: 导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx(点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内) 时, 相应地, 因变量取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$; 如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在, 那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**, 记为 $f'(x_0)$, 即

$$f^{'}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记作 $y'|_{x=x_0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

注 1.1.1: 导数定义的注意事项

1. 在考题中, 增量 Δx 一般会被命题人广义化为"□", 即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\xlongequal{\text{广义化}}\lim_{\square\to 0}\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$$

需要知道的是 □ 需要同时趋近于 0^+ 和 0^- 该点导数才存在, 如果仅趋近于其中的一个, 则是 □ 处的单侧导数

若在上式中, 令 $x_0+\Delta x=x$, 则可将导数定义式写成

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

观察上式, 可以观察到上式有以下特点:

- 分母同时趋近于 0^+ 和 0^-
- Δx 在趋于 0 的过程中没有间断点
- 分子为一个动点一个定点

2. 以下的三种说法是等价的:
   - $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导
   - $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数存在
   - $f'(x_0)=A\,(A\text{为有限数})$
3. 原函数可导无法推出导函数连续
4. 需要区分一点处的右导数和导数的右极限
   - $f'_+(x_0)\Rightarrow$ 表示一点处的右导数 $\Rightarrow \lim_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
   - $f'(x_0^+)=f'(x_0+0)\Rightarrow$ 导数的右极限 $\Rightarrow \lim_{x\to x_0^+}f'(x)$
   - $f(x_0^+)=f(x_0+0)\Rightarrow$ 函数的右极限 $\Rightarrow \lim_{x\to x_0^+}f(x)$

   如果函数 $f(x)$ 连续可导或者 $f'(x)$ 连续, 那么 $f'_+(x_0)=f'(x_0^+)$, 即一点处的右导数等于导数的右极限. 此处如果可以这样理解: 把导数降一个纬度理解, 令 $f'(x)=F(x)$, 那么如果 $F(x)$ 在 x_0 处左侧的值和 $F(x)$ 左侧极限相等, 则 $F(x)$ 必须可导或者连续, 那么可以得到 $f'(x)$ 连续或 $f(x)$ 连续可导. 如果不连续, 以函数 $f(x)=\begin{cases}x,x\leqslant 0\\ x+1,x>0\end{cases}$ 为例: 显然该函数在 $x=0$ 处不连续. 那么:

   - 左导数:$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x-0}{x}=1$

- 右导数:$f'_+(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x+1-0}{x}=\dfrac{1}{0}=\infty$
- 导数的右极限:$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)'=1$

题目 1. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左, 右导数都存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处

(A) 可导　(B) 连续　(C) 不可导　(D) 不一定连续

解答. 左右导数存在说明左右可导, 左可导说明左连续, 右可导说明右连续[1]. 左连续说明左侧极限等于该点函数值, 右连续说明右侧极限等于该点函数值, 那么左右极限相等且等于该点函数值, 那么函数在该点连续. 因此 B 选项正确.

题目 2. 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

(A)$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在　(B)$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

(C)$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　(D)$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

解答. A: $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}$, 若 $h\to 0$ 可以知道的是 $1-\cos h$ 趋近于 0^+,$\dfrac{1-\cos h}{h^2}\to 1$, 那么 $\dfrac{1}{2}f'_+(0)$ 存在

B: $\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)=\lim_{h\to 0}\dfrac{1-e^h}{h}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}$, 易知 $1-e^h$ 同时趋近于 0^+ 和 0^-, 那么函数 $f'(0)$ 存在

C:$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\dfrac{h-\sin h}{h^2}$, 已知 $h-\sin h\sim\dfrac{1}{6}h^3$, 那么 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\dfrac{h}{1}$ 极限存在, 同时 $h\to 0$, 但是不可以推出 $\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}$ 极限存在, 只能得到该极限是为定式, 那么更无法推出该导数存在

D: 若 $\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在, 那么其实什么都推不出来, 因为不知道 $\dfrac{f(2h)}{h}$ 和 $\dfrac{f(h)}{h}$ 是否存在, 如果写成下列形式 $\lim_{h\to 0}\dfrac{[f(2h)-f(0)]-[f(h)-f(0)]}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{f(2h)-f(0)}{h}-\dfrac{f(h)-f(0)}{h}\right)$, 则违反了极限的运算法则.

综上答案选择 B 选项

[1]一点可导的必要条件

结论 1.1.1: 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则必须满足下面的四个条件:

1. 一动减一定: 必须是一个动点减一个定点. 比如上题中的 D 选项, 本质上是两个动点相减.
2. 可正可负: 指的是分母, 即定义中的 □, 需要同时趋近于 0^+ 和 0^-, 如果只能趋近于一个, 则为单侧导数.
3. 上下同阶: 即分子的阶数小于等于分母阶数. 但是如果要求是充要条件则必须是同阶. 比如下面的例子: 若 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)-f(0)}{x^4}$ 存在, 那么 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)-f(0)}{x-\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x^4}$, 其中 $x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$, 那么 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)-f(0)}{(x-\sin x)-0}\cdot\dfrac{1}{6x}$, 其中 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{6x}\to\infty$, 那么 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)-f(0)}{(x-\sin x)-0}$ 必定存在且 $\dfrac{f(x-\sin x)-f(0)}{(x-\sin x)-0}=0\Rightarrow f'(0)=0$
4. 填满邻域: 在定义中的 □ 需要把其附近邻域都给填满. 比如下面的例子:$\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=0$, 无法推出 $f'_+(0)=0$ 存在, 因为 $\dfrac{1}{n}$ 取不到无理数, 无法包含 □ 邻域

上述结论的本质还是导数的定义表达式的特点.

题目 3. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0)>0$, 则存在 $\delta>0$ 使得:

(A)$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加　(B)$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调减少

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$　(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$

解答. A,B 选项[2]: 已知函数 $f(x)$ 连续, 且函数在 $f'(0)$ 处的导数大于 0, 那么只能说明函数在 $x=0$ 点导数存在且大于 0,0 可能是函数的震荡间断点. 因此函数无法说明函数在邻域内单增或者单减.C,D 选项: 对函数在 $x=0$ 求导数, 即 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$, 则 C 选项成立.

注 1.1.2: 函数可导性与连续的关系

1. 导数若存在, 则导数要么连续, 要么只可能有震荡间断点

   导数若存在有震荡间断点的证明: 以函数 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ 为例:

[2] 在本题中, 答案给出了一个例子可以满足该题 (但是本题中例子并不重要，重要的是思想) 即 $f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$, 在考研中常用的一个例子是$k\times\sin\dfrac{1}{x^b}\pm M\pm f(x)$

根据导数定义对函数在 $x = 0$ 处求导:$F'(0) = \lim_{x\to0} \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x} = \lim_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ 因此函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处导数存在. 那么对函数求导:

$F'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, 那么易知 $\lim_{x\to0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}\right)$ 是震荡的. 虽然函数导数存在, 但是这是震荡间断点. □

同时, 导数震荡的话, 则导数极限不存在, 由此可以推出衍生推论: 导数极限定理1.1.1

2. 函数在一点可导的必要条件: 若 $f(x)$ 在一点可导, 则 $f(x)$ 在该点连续[a]

[a]上面两个结论非常重要, 经常和高阶导数一起考察

定理 1.1.1: 导数极限定理

如果 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内连续, 在 x_0 的去心邻域内可导, 且导函数在 x_0 处的极限存在 (等于 a), 则 $f(x)$ 在 x_0 处的导数也存在并且等于导函数的极限 (等于 a)

上述定理可解释为导数如果在某点极限存在, 那么在该点导函数一定连续. 因为导数存在要么有震荡间断点, 要么连续. 如果说该点导函数极限存在, 那么一定连续.

题目 4. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有二阶导数, 则

(A) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时,$f'(x_0) > 0$. (B) 当 $f'(x_0) > 0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加

(C) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时,$f''(x_0) > 0$. (D) 当 $f''(x_0) > 0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数

解答. A: 当函数 $f(x)$ 在 x_0 处的邻域内单增,$f'(x_0)$ 的值可以为 0, 这样函数也是单调递增.

B: 已知 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有二阶导数, 那么 $f'(x)$ 在 x_0 处连续. 当函数 $f'(x_0) > 0$ 时, 排除了震荡的情况, 因此 B 选项正确

C: 领域内 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 为凹函数, 反之则不行, 因为可能存在二阶导为 0 的点, 但是依然为凹函数, 如 $f(x) = x^2$

D:$f''(x_0) > 0$ 可能存在震荡间断点, 因此不能推出邻域内 $f''(x) > 0$

题目 4 的注记. D 选项, 如果增加条件,$f''(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续或 $f'''(x_0)$ 存在, 则 D 选项也成立.

题目 5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{f(x)}=1$, 则下列结论中正确的个数为

(1)$f'(0)$ 存在, 且 $f'(0)=0$.　(2)$f''(0)$ 存在, 且 $f''(0)=2$.

(3)$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值　(4)$f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续.

解答.

题目 5 的注记.

题目 6. 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有定义, 且 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, 则

(A) 当 $\lim_x \to 0\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时 , $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 (B) 当 $\lim_x \to 0\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时 , $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时 , $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$　(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时 , $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

解答.

题目 6 的注记.

题目 7. 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$, 则当 $\Delta x\to 0$ 时 , $f(x)$ 在 x_0 处的微分 dy 是 Δx 的无穷小.

A. 等价　B. 同阶　C. 低阶　D. 高阶

解答.

题目 7 的注记.

题目 8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leq\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots, \end{cases}$ 则:

(A)$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.　(C)$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.　(D)$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解答.

题目 8 的注记.

题目 9. 下列命题正确的个数为:

1. 设 $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必连续
2. 设 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必连续
3. 设 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必连续
4. 设 $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ 中至少有一个不存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必不可导

解答.

题目 9 的注记.

1.1.2 单侧导数

定义 1.1.2: 单侧导数的定义

函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导的充分必要条件是左导数和右导数存在且相等, 其表达式为

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{\text{记}}{=\!=} f'_-(x_0)$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{\text{记}}{=\!=} f'_+(x_0)$$

注 1.1.3: 一点可导与邻域的关系

- 一点可导 $\neq$ 点邻域可导: 以函数 $f(x) = x^2D(x) = \begin{cases} x^2, x\in \text{有理数} \\ 0, x\in \text{无理数}\end{cases}$ 为例
- 一点可导邻域内连续: 若函数在一点可导, 则函数在该点连续, 而无法断言函数在这点附近的连续性, 仍可以 $f(x) = x^2D(x)$ 为例

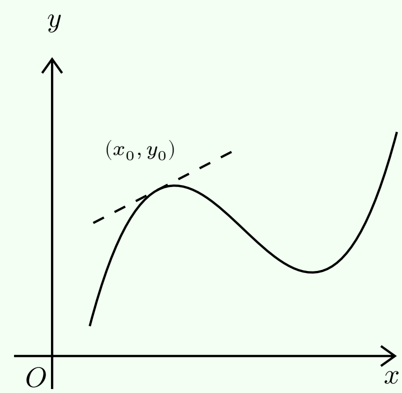
1.1.3 导数的几何意义

定义 1.1.3: 导数的几何意义

$y = f(x)$ 在 x_0 处导数是 $f(x)$ 在 x_0 处切线的斜率 $k_{切} = f'(x_0)$ 并且 $k_{切} * k_{法} = -1$

在 (x_0,y_0) 处, 切线方程:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$



如上图所示, 点 (x_0, y_0) 处的切线为虚线

法线方程:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

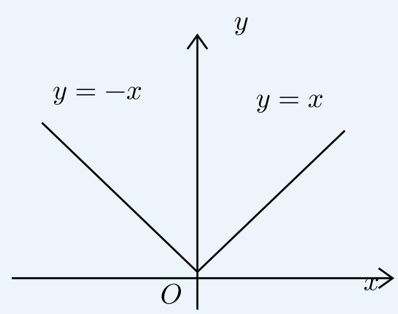
注 1.1.4: 角点与无穷导数

- 研究 $y = f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处的切线问题

  解答. 从 $x = 0$ 出发, 取增量 Δx, 有 $\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x|$

  当 $\Delta x > 0$ 时,$\Delta y = \Delta x$, 则 $f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \overset{记}{=\!=} k_+$

  当 $\Delta x < 0$ 时,$\Delta y = -\Delta x$, 则 $f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \overset{记}{=\!=} k_-$



- 研究 $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x = 0$ 处的切线问题

解答. 显然, 在 $x=0$ 处 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}$ 当 $\Delta x>0$ 时,$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=+\infty$ $\Delta x<0$ 时,$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=+\infty$ 这样的结果称为无穷导数. 又 $\pm\infty$ 被叫作广义的数, 所以无穷导数在有些数学场合也可被视为导数存在的特殊情形. 但是在考研中无穷被认为是不存在

1.1.4 高阶导数

定义 1.1.4: 高阶导数的定义

函数 $y=f(x)$ 具有 n 阶导数, 也常说成函数 $f(x)$ 为 n 阶可导, 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数, 那么 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数. 记作:

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}\text{或}f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

当 $n=2$ 时:

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}\text{或}f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

注 1.1.5: n 阶导数与 $n-1$ 阶导数的关系

如果 $f(x)$ 在点 x_0 处有二阶导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有一阶导数且 $f'(x)$ 在 x_0 处连续.

如果 $f(x)$ 在点 x_0 处有 n 阶导数, 则 $f(x)$ x_0 的某个邻域内有 $1\sim(n-1)$ 阶的各阶导数.

1.2 微分

1.2.1 微分的概念

定义 1.2.1: 微分的定义

设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义,x_0 及 $x_0 + \Delta x$ 在这个区间内, 如果函数的增量为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是可微的, 而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作 dy, 即:

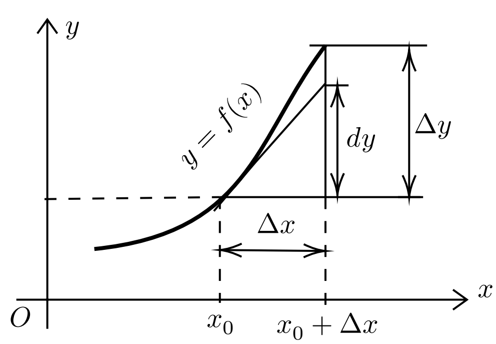
$$dy = A\Delta x$$

函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 的微分, 称为函数的微分, 记作 dy 或 $df(x_0)$, 即

$$dy = f'(x)\Delta x$$

1.2.2 微分的几何意义

若 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则在点 (x_0, y_0) 附近可以用切线段近似代替曲线段, 这是可微的几何意义.



1.3 导数的计算

1.3.1 基本求导公式

$(C)' = 0;$	$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1};$
$(a^x)' = a^x \ln a;$	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x;$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a};$	$(\ln \lvert x \rvert)' = \dfrac{1}{x};$
$(\sin x)' = \cos x;$	$(\cos x)' = -\sin x;$
$(\tan x)' = \sec^2 x;$	$(\cot x)' = -\csc^2 x;$
$(\sec x)' = \sec x \tan x;$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x;$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$	$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$
$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}};$	$[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

1.3.2 有理运算法则

设 $u = u(x), v = v(x)$ 在 x 处可导, 则

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

1.3.3 复合函数的导数与微分形式不变性

复合函数导数

定义 1.3.1: 复合函数导数的定义

设 $y = f(g(x))$ 是由 $y = f(z)$,$z = g(x)$ 复合而成, 且 $f(z)$,$g(x)$ 均可导, 则 $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$

微分形式不变形

定义 1.3.2: 微分形式不变形

设 $u=g(x)$ 在点 x(没有下标是泛指的点, 下同) 处可导,$y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 处可导, 则

$$\mathrm{d}\{f[g(x)]\}=f'[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x=f'[g(x)]\mathrm{d}[g(x)]$$

指无论 u 是中间变量还是自变量,$dy=f'(u)du$ 都成立.

1.3.4 分段函数的导数

设 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\geqslant x_0, \\ f_2(x), & x<x_0, \end{cases}$ 其中 $f_1(x),f_2(x)$ 分别在 $x>x_0,x<x_0$ 时可导, 则

- 在分段点 x_o 处用导数定义求导：$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\dfrac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}, f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\dfrac{f_2(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 根据 $f'_+(x_0)$ 是否等于 $f'_-(x_0)$ 来判定 $f'(x_0)$;
- 在非分段点用导数公式求导, 即 $x>x_0$ 时,$f'(x)=f'_1(x); x<x_0$ 时,$f'(x)=f'_2(x)$

1.3.5 反函数的导数

定义 1.3.3: 反函数导数的定义

设 $y=f(x)$ 为单调、可导函数, 且 $f'(x)\neq 0$, 则存在反函数 $x=\varphi(y)$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$, 即 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

注 1.3.1: 反函数的二阶导数

在 $y=f(x)$ 单调, 且二阶可导的情况下, 若 $f'(x)\neq 0$, 则存在反函数 $x=\varphi(y)$, 记 $f'(x)=y'_x,\varphi'(y)=x'_y$, 则有

$$y'_x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{x'_y}$$

$$y''_{xx}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{1}{x'_y}=-\frac{1}{(x'_y)^2}\cdot(x'_y)'_y\cdot\frac{1}{x'_y}=-\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^2}\cdot\frac{1}{x'_y}=-\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}$$

反过来则有:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$$

1.3.6 参数方程求导

定义 1.3.4: 参数方程所确定的函数的导数

设 $y = f(x)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} (\alpha < t < \beta)$ 确定的函数

如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$ 则其一阶导可写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\, x^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \times \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^2(t)} \times \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}\end{aligned}$$

1.3.7 对数函数求导法

对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子, 一般先取对数再求导. 设 $y = f(x)(f(x) > 0)$, 则

- 等式两边取对数, 得 $\ln y = \ln f(x)$
- 两边对自变量 x 求导 (同样注意 $y = f(x)$, 即将 y 看作中间变量), 得

$$\frac{1}{y}y' = \Big[\ln f(x)\Big]' \Rightarrow y' = \frac{yf'(x)}{f(x)}$$

1.3.8 幂指函数求导法

对于 $u(x)^{v(x)}$ 函数, 可采用 $e^{v(x)\ln u(x)}$ 进行转换求导然后求导, 得

$$\left[u(x)^{\nu(x)}\right]' = \left[\mathrm{e}^{\nu(x)\ln u(x)}\right]' = u(x)^{\nu(x)}\left[\nu'(x)\ln u(x) + \nu(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

1.3.9 隐函数求导

隐函数的定义

定义 1.3.5: 隐函数与显函数的定义

- 隐函数:y 与 x 的关系隐含在一个等式中,$F(x,y)=0$, 如 $x^2+y^2=4$
- 显函数: 因变量与自变量在等式两端,y 和 x 各占一边, 如 $y=3x$

隐函数求导

定义 1.3.6: 隐函数求导法则

设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的可导函数则

- 方程 $F(x,y)=0$ 两边对自变量 x 求导, 注意 $y=y(x)$, 即将 y 看作中间变量, 得到一个关于 y' 的方程
- 解该方程便可求出 y'

1.3.10 高阶导数求导

归纳法求高阶导数

常用高阶导数:

$$[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right) \quad [\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$[\ln(ax+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1}a^n\frac{(n-1)!}{(ax+b)^n} \qquad \left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n a^n\frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$\left(e^{ax+b}\right)^{(n)} = a^n e^{ax+b}$$

莱布尼兹公式求高阶导数

设 $u=u(x),\nu=\nu(x)$ 均 n 阶可导, 则

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$$

$$(u\nu)^{(n)}=u^{(n)}\nu+C_n^1u^{(n-1)}\nu'+C_n^2u^{(n-2)}\nu''+\cdots+C_n^ku^{(n-k)}\nu^{(k)}+\cdots+C_n^{n-1}u'\nu^{(n-1)}+u\nu^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}\nu^{(k)}$$

泰勒公式求高阶导数

已知带佩亚诺余项的 n 阶泰勒展开式的条件为, 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么该函数的抽象展开为

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

具体展开为:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$

当 $x_0=0$ 时

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

具体展开为:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

函数泰勒展开式的唯一性: 无论 $f(x)$ 由何种方法展开, 其泰勒展开式具有唯一性, 那么就可以通过比较抽象展开和具体展开的系数, 获得 $f^{(n)}(x_0)$ 或者 $f^{(n)}(0)$

1.4　导数的几何应用

1.4.1　极值

极值的定义

定义 1.4.1: 极值的定义

对于函数 $f(x)$, 若存在点 x_0 的某个邻域, 使得在该邻域内任意一点 x, 均有

$$f(x) \leqslant f(x_0)(\text{或} f(x) \geqslant f(x_0))$$

成立, 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点 (或极小值点),$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值 (或极小值).

注 1.4.1: 极值的注意事项

- 端点出不讨论极值, 因为单侧可能不存在
- 常函数某任一邻域内处处都是极值点
- 间断点也可以极值点, 只要满足其邻域内最大值即可.
- 极值点只能有两种情况, 即驻点和不可导点:
  1. 驻点:$f'(x_0) = 0$, 如 $y = x^2$ 在 $(0,0)$ 处的情形
  2. 不可导点:$f'(x_0)$ 不存在, 如 $y = |x|$ 在 $(0,0)$ 处的情形

极值的判定

定义 1.4.2: 极值判定的必要条件

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且在点 x_0 处取得极值, 则必有 $f'(x_0) = 0$

定义 1.4.3: 极值判定的第一充分条件

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)(\delta > 0)$ 内可导.

1. 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 , $f'(x) < 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 , $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值

2. 若 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 时 ,$f'(x)>0$, 而 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时 ,$f'(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值

3. 若 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0+\delta)$ 内不变号, 则点 x_0 不是极值点

定义 1.4.4: 极值判定的第二充分条件

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导, 且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$

1. 若 $f''(x_0)<0$, $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

2. 若 $f''(x_0)>0$, $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

证明. 极值判定的第二充分条件

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0} \end{aligned}$$

若 $x-x_0>0$ 且 $f''(x_0)<0$, 则 $f'(x)<0$. 若 $x-x_0<0$ 且 $f''(x_0)<0$, 则 $f'(x)>0$, 那么 x_0 为极小值点. 同理可得极大值点. □

定义 1.4.5: 极值判定的第三充分条件

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\cdots,n-1), f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 2)$, 则

1. 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

2. 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值

1.4.2 单调性判别

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.

- 如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geqslant 0$, 且等号仅在有限个点处成立, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加
- 如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leqslant 0$, 且等号仅在有限个点处成立, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调减少

1.4.3 凹凸性

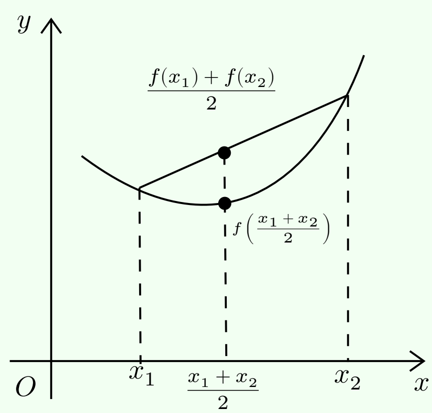
凹凸性第一种的定义

定义 1.4.6: 凹凸性的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续. 如果对 I 上任意不同两点 x_1, x_2, 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

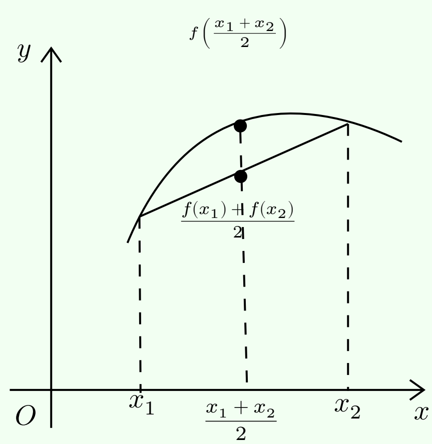
则称 $y=f(x)$ 在 I 上的图形是凹的 (或凹弧), 即如下图所示



如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上的图形是凸的 (或凸弧), 即如下图所示



定义 1.4.7: 凹凸性的第二种定义

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 若对 (a,b) 内的任意 x 及 $x_0(x \neq x_0)$, 均有

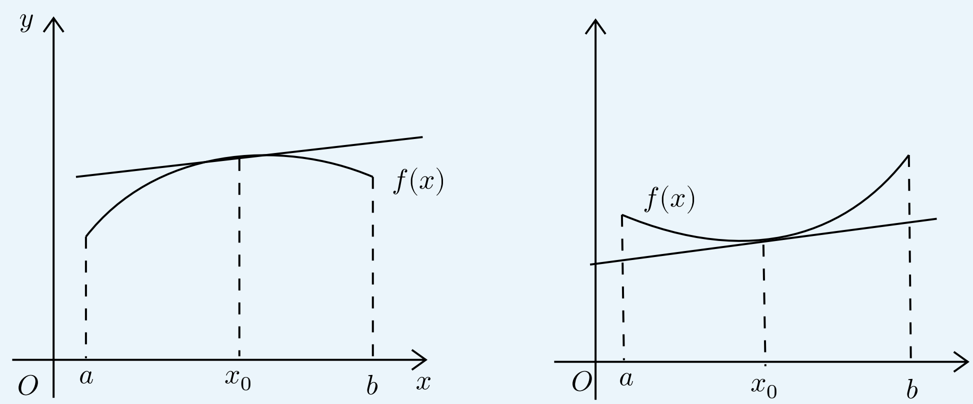
$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) < f(x)$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的图形上是凹的

同理, 当上式 > 0 时, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的图形上是凸的

注 1.4.2: 凹凸性第二种定义的几何意义

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程, 因此该表达式的几何意义如下图所示. 若曲线 $y = f(x)(a < x < b)$ 在任意点处的切线 (除该点外) 总在曲线的下方 (上方), 则该曲线是凹 (凸) 的.



凹凸性的判别

定义 1.4.8: 凹凸性的判别

设函数 $f(x)$ 在 I 上二阶可导:

1. 若在 I 上 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的
2. 若在 I 上 $f''(x)$ <0, 则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的

1.4.4 拐点

拐点的定义

定义 1.4.9: 拐点的定义

连续曲线的凹弧与凸弧的分界点称为该曲线的拐点

注 1.4.3: 拐点存在的情况

若点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 则只有以下两种情况

1. $f''(x_0) = 0$, 如 $y = x^3$ 在 $(0,0)$ 处的情形
2. $f''(x_0)$ 不存在, 如 $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $(0,0)$ 处的情形

拐点的判别

定义 1.4.10: 拐点的判别的必要条件

设 $f''(x_0)$ 存在, 且点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点, 则 $f''(x_0) = 0$

定义 1.4.11: 拐点的判别的第一充分条件

设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 在点 $x = x_0$ 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内二阶导数存在, 且在该点的左、右邻域内 $f''(x)$ 变号 (无论是由正变负, 还是由负变正), 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点[a].

[a] $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 并不要求 $f(x)$ 在点 x_0 的导数存在

定义 1.4.12: 拐点的判别的第二充分条件

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内三阶可导, 且 $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点.

定义 1.4.13: 拐点的判别的第三充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0(m = 2, \cdots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0(n \geqslant 3)$, 则当 n 为奇数时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点.

极值点和拐点的重要结论

结论 1.4.1: 极值点和拐点的重要结论

1. 曲线的可导点不可同时为极值点和拐点；曲线的不可导点可同时为极值点和拐点
2. 设多项式函数 $f(x)=(x-a)^n g(x)(n>1)$, 且 $g(a)\neq 0$, 则当 n 为偶数时,$x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点; 当 n 为奇数时, 点 $(a,0)$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点.
3. 设多项式函数 $f(x)=(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}...(x-a_k)^{n_k}$, 其中 n_i 是正整数,a_i 是实数且 a_i 两两不等,$i=1,2,\cdots,k$.

   记 k_1 为 $n_i=1$ 的个数,k_2 为 $n_i>1$ 且 n_i 为偶数的个数,k_3 为 $n_i>1$ 且 n_i 为奇数的个数, 则 $f(x)$ 的极值点个数为 $k_1+2k_2+k_3-1$, 拐点个数为 $k_1+2k_2+3k_3-2$.

1.4.5 渐近线

铅直渐近线

定义 1.4.14: 铅直渐近线定义

若 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$(或 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$), 则 $x=x_0$ 为一条铅直渐近线.

水平渐近线

定义 1.4.15: 水平渐近线定义

若 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_1$, 则 $y=y_1$ 为一条水平渐近线.

若 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_2$, 则 $y=y_2$ 为一条水平渐近线.

若 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0$, 则$y=y_0$ 为一条水平渐近线

斜渐近线

定义 1.4.16: 斜渐近线定义

若 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a_1(a_1\neq 0), \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-a_1x\right]=b_1$, 则 $y=a_1x+b_1$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a_2(a_2\neq 0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=b_2$, 则 $y=a_2x+b_2$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线

若 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a(a\neq 0),\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$, $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

1.4.6 最值

最值的定义

定义 1.4.17: 最值的定义

设 x_0 为 $f(x)$ 定义域内一点, 若对于 $f(x)$ 的定义域内任意一点 x, 均有

$$f(x)\leqslant f(x_0)(\text{或}f(x)\geqslant f(x_0))$$

成立, 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的最大值 (或最小值).

结论 1.4.2: 有关极值点和最值点的结论

如果 $f(x)$ 在区间 I 上有最值点 x_0, 并且此最值点 x_0 不是区间 I 的端点而是 I 内部的点, 那么此 x_0 必是 $f(x)$ 的一个极值点.

1.4.7 曲率与曲率半径

定义 1.4.18: 曲率与曲率半径的计算公式

设 $y(x)$ 二阶可导, 则曲线 $y=y(x)$ 在点 $(x,y(x))$ 处的曲率公式为

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径的计算公式

$$R=\frac{1}{k}=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}(y''\neq 0)$$