第一章　变限积分

1.1　变限积分的概念

定义 1.1.1: 变限积分的定义

当 x 在 $[a,b]$ 上变动时, 对应于每一个 x 值, 积分 $\int_a^x f(t)dt$ 都有一个确定的值, 因此 $\int_a^x f(t)dt$ 是一个关于 x 的函数, 记作

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(a\leqslant x\leqslant b)\,,$$

称函数 $F(x)$ 为**变上限的定积分**. 同理可以定义变下限的定积分和上、下限都变化的定积分, 这些都称为**变限积分**, 事实上, 变限积分就是定积分的推广.

注 1.1.1: 变限积分的性质

[a]

1. 函数 $f(x)$ 在 I 上可积, 则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 I 上连续[b]
2. 函数 $f(x)$ 在 I 上连续, 则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 I 上可导且 $F'(x)=f(x)$.[c]
3. $x=x_0\in I$ 是 $f(x)$ 唯一的跳跃间断点, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 x_0 处不可导, 且
$$\begin{cases} F'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-} f(x) \\ F'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x). \end{cases}$$
4. 若 $x=x_0\in I$ 是 $f(x)$ 唯一的可去间断点，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 x_0 处可导，且 $F'(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$.

[a]此处应结合定积分存在定理进行理解
[b]面积存在, 那么面积连续
[c]函数连续, 那么可以求面积, 或者说连续函数必有原函数

1.2 变限积分的计算

定义 1.2.1: 变限积分计算公式

设 $F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$, 其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可导函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的值域在 $[a,b]$ 上，则在函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的公共定义域上，有

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

结论 1.2.1: 变限积分与函数性质部分的结论

此处应参考以下章节:函数-函数的四种特性及重要结论-奇偶性**??**。函数-函数的四种特性及重要结论-周期性**??**。上述两个部分对变限积分的奇偶性和周期性进行了说明。