第一章　定积分 (黎曼积分)

1.1　定积分的概念

定义 1.1.1: 定积分的定义

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 在 (a,b) 上任取 $n-1$ 个分点 $x_i(i=1,2,3,\cdots,n-1)$, 定义 $x_0=a$ 和 $x_n=b$, 且 $a=x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 记 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}, k=1,2,3,\cdots,n$. 并任取一点 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, 记 $\lambda=\max_{1\leq k\leq n}\{\Delta x_k\}$, 若当 $\lambda\to 0$ 时, 极限 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 存在且与分点 x_i 及点 ξ_k 的取法无关, 则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f\left(\xi_k\right)\Delta x_k$$

注 1.1.1: 定积分的几何意义

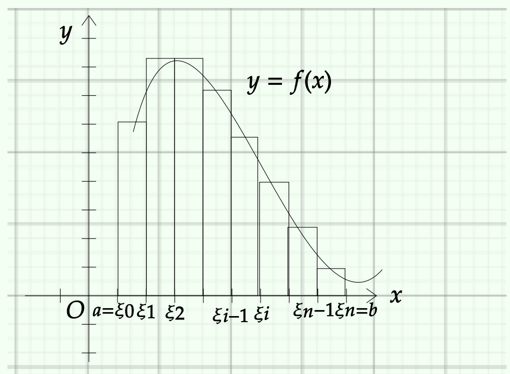
在 $[a,b]$ 上,

1. 若 $f(x)\geqslant 0$, 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、直线 $x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积
2. 若 $f(x)\leqslant 0$, 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、直线 $x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形面积的负值
3. 若 $f(x)$ 既有正值又有负值 (如下图所示), 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示 x 轴上方图形的面积减去 x 轴下方图形的面积.

定义 1.1.2: 定积分的精确定义

当定积分存在时, 存在两个“任取”: 分点 x_i 任取, 一点 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 任取. 故可作两个“特取”: 将 $[a,b]n$ 等分且取每个小区间的右端点为 ξ_i, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}$$



若将式子中的 a, b 特殊化为 0,1 这两个数, 得出的形式更为简单:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

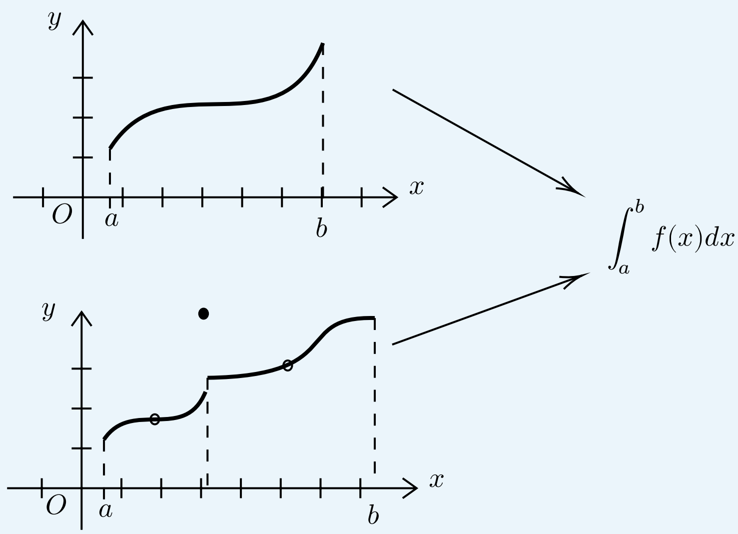
定理 1.1.1: 定积分的存在定理

定积分的存在性, 也称一元函数的 (常义) 可积性. 这里的“常义”是指“区间有限, 函数有界”, 也有人称为黎曼可积性[a].

- 定积分存在的充分条件
  1. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在
  2. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在
  3. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**有界, 且只有有限个间断点**[b], 则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在

     对于上三个充分条件, 可以结合定积分的几何意义来理解, 定积分存在就是指的围成的曲边梯形面积能算出来. 只要围出来的面积可以算出来, 即使 $f(x)$ 在有限个点的函数值发生突变,$f(x)$ 依然可积. 因为在间断点, 那条线与 x 轴围成的面积为 0, 所以第一类间断点不影响

总体面积.



- 定积分存在的必要条件

  1. 可积函数必有界, 即若定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界. [c]

[a]此处的可积性与后面的反常积分不同, 反常积分是"区间无穷, 函数无穷"

[b]其实只剩下了可去和跳跃间断点

[c]当我们任意分割图形底边为若干小段时若 $f(x)$ 在区间 $[a\ b]$ 上无界, 则至少存在一个小段 Δx, 使得"面积"$f(x)\Delta x$ 无穷大, 这样整个曲边梯形的面积就是无穷大, 则极限就不存在, 所以可积函数必有界

注 1.1.2: 定积分的性质

当 $b=a$ 时,$\int_a^a f(x)dx=0$; 当 $a>b$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)dx$

1. 求区间长度: 假设 $a<b$, 则 $\int_a^b dx=b-a=L$, 其中 L 为区间 $[a,b]$ 的长度
2. 积分的线性性质: 设 k_1,k_2 为常数, 则 $\int_a^b[k_1f(x)\pm k_2g(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
3. 积分的可加 (拆) 性: 无论 a,b,c 的大小如何, 总有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$
4. 积分的保号性: 若在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant g(x)$, 则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. 特殊地, 有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

5. 估值定理: 设 M,m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值,L 为区间 $[a,b]$ 的长度, 则有

$$mL \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant ML$$

1.2 定积分的计算

定义 1.2.1: 牛顿莱布尼茨公式

设函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

注 1.2.1: 牛顿莱布尼茨公式推广

- 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$[a]
- 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上分段有原函数, 如 $[a,c)$ 上有原函数 $F_1(x)$, $(c,b]$ 上有原函数 $F_2(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = F_1(c-0)-F_1(a)+F_2(b)-F_2(c+0)\,.$$

[b] 若 $F_1(c-0), F_2(c+0)$ 存在, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛。若 $F_1(c-0), F_2(c+0)$ 至少有一个不存在, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

[a]有原函数即可, 不需要连续

[b]其实就是以 C 为中心拆成两半进行计算

1.3 定积分积分法

1.3.1 定积分的换元积分法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 函数 $x=\varphi(t)$ 满足

1. $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$

2. $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上有连续的导数, 且其值域为 $R_{\varphi}=[a,b]$, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\,.$$

1.3.2　定积分的分部积分法

$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b \nu(x)u'(x)\mathrm{d}x$, 这里要求 $u'(x),v'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

结论 1.3.1: 定积分分部积分法常用结论

- 区间再现公式: 设 $f(x)$ 为连续函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dots\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n\ \text{为大于 1 的奇数},\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\ \text{为正偶数}.\end{cases}$

- $$\int_0^\pi \sin^n x\ \mathrm{d}x=\begin{cases}2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为大于1的奇数},\\ 2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\ \text{为正偶数},\end{cases}$$
$$\int_0^\pi \cos^n x\ \mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\ \text{为正奇数},\\ 2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\ \text{为正偶数}.\end{cases}$$

- $\int_0^{2\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}0\,, & n\ \text{为正奇数},\\ 4\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\,, & n\ \text{为正偶数}.\end{cases}$