

第一章 极限

1.1 数列的极限

1.1.1 数列极限的定义

定义 1.1.1

设 $\{x_n\}$ 为一数列, 若存在常数 a , 对于任意的 $\varepsilon > 0$ (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

该定义的 $\varepsilon - N$ 语言描述是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \text{ 正整数 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

其中 $\forall \varepsilon > 0$ 是白给的信息, 随便写. \exists 正整数 N 是关键. 因为第二句话说的是“一定存在正整数 N ”, 你怎么才能够证明存在正整数 N 呢? 那就必须把这个正整数 N 给找出来, 你找出来才能够证明这个 N 是存在的. 关键第三句话叫做桥梁, 桥梁什么意思? 就是 n 大于 N 的时候 n 大于 N 的时候, 也就意味着 N 趋近于无穷的过程中. 在大 N 项之后的所有的项. 最后一句话叫做突破口, 不是要去找这个 N 吗? 你找到 N 才能够证明这个 N 是存在的, 我们一般情况下就用第四句话来寻找大 N .

在上面的定义中, $\varepsilon > 0$ 的 ε 任意性是非常重要的, 只有这样才能表示出“无限接近的意义”. 总存在正整数 N , 使得 $n > N$ 这个条件用于表达 $n \rightarrow \infty$ 的过程.

注 1.1.1

- 数列的极限值与数列的前有限项无关, 只与后面无穷项有关
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a$
- $\varepsilon - N$ 几何意义: 对于点 a 的任何 ε 邻域即开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 一定存在 N , 当 $n > N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内, 而只有有限个 (最多有 N 个) 在区间之外.

题目 1. 已知 $x_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, 证明数列 x_n 的极限是 0

题目 1 的注记. 根据数列极限的定义可知, $\forall \varepsilon > 0$, \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - 0| = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} < \varepsilon$, 即 $x_n = \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 即令 $N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 是一个确定的实数, 大于它的正整数有无穷个, 仍取其中一个作为 N 即可.

解答. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1$, 则总有 $x_n = \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 则数列 x_n 的极限是 0

1.1.2 收敛数列的性质

唯一性

定理 1.1.2

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一

有界性

定理 1.1.3

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

注 1.1.4

需要注意的是, 如果数列有界, 但是不一定存在极限, 如数列 $(-1)^n$

保号性

定理 1.1.5

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 那么存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$)

推论 1.1.6

如果数列 $|x_n|$ 从某项起有 $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 那么 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$).

收敛数列与其子数列之间的关系

如果数列 x_n 收敛于 a , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 a

注 1.1.7

需要注意的是, 证明数列极限存在一般通过证明数列有界并且单调, 证明有界则一般通过放缩法. 但是证明数列发散则一般通过一下两种方法:1. 至少一个子数列发散.2. 两个子数列收敛, 但是收敛值不同.

1.2 函数的极限

1.2.1 超实数系

定义 1.2.1: 超实数系的概念

超实数 (Hyperreal number) 是一个包含实数以及无穷大和无穷小的域, 它们的绝对值分别大于和小于任何正实数。

注 1.2.1

- 超实数集是为了严格处理无穷量 (无穷大量和无穷小量) 而提出的。
- 超实数集, 或称为非标准实数集, 记为 ${}^*\mathbb{R}$, 是实数集 \mathbb{R} 的一个扩张.

1.2.2 邻域

1

定义 1.2.2: 邻域的相关概念

- δ 邻域: 设 x_0 是数轴上一个点, δ 是某一正数, 则称 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即:

$$U(x_0, \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x | |x - x_0| < \delta\}$$

- 去心 δ 邻域: 定义点 x_0 的去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$
- 左, 右 δ 邻域: $\{x | 0 < x - x_0 < \delta\}$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域, 记作 $U^+(x_0, \delta)$; $\{x | 0 < x_0 - x < \delta\}$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域, 记作 $U^-(x_0, \delta)$.

1.2.3 函数极限的定义

函数极限的定义主要分为自变量趋于有限值 ($x \rightarrow x_0$) 时的极限和自变量趋于无穷大时函数的极限 ($x \rightarrow \infty$)

¹邻域与区间不同, 邻域属于区间的范畴. 但是邻域通常表示“一个局部位置”. 比如“点 x_0 的 δ ”邻域, 可以理解为“点 x_0 ”的附近, 而区间是明确指出在实数系下的范围

自变量趋于有限值时的函数极限

定义 1.2.3: 当自变量趋于有限值时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小)^a, 总存在正数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0)$$

其 $\varepsilon - N$ 语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 在证明中, 这两句是白给, 直接写。后面的才是关键。

^a ε 用于衡量 $|f(x) - A|$ 的值有多小

注 1.2.2

在函数极限中 $x \rightarrow \infty$ 指的是 $|x| \rightarrow \infty$, 需要 x 趋于正无穷和负无穷, 但在数列中的 $n \rightarrow \infty$ 是 $n \rightarrow +\infty$

单侧极限

定义 1.2.4: 单侧极限的定义

若当 $x \rightarrow x_0^-$ 时, $f(x)$ 无限接近于某常数 A , 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

若当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 无限接近于某常数 A , 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A$$

题目 2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right]$ 存在, 求 a 的值

解答. 由于存在 \arctan 与 $|x|$ 函数, 则对于 0 点的极限值需要分左右进行计算.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \arctan \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = -\frac{\pi}{2}a + \frac{1}{e}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} a \arctan \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}a + e$ 若极限存在, 则 $a = \frac{1-e^2}{\pi e}$

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 1.2.5: 自变量趋于无穷大时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0)$$

其 $\varepsilon - N$ 语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 在证明中, 这两句是白给, 直接写. 后面的才是关键。

需要注意的是趋向的值不同时, $\varepsilon - N$ 写法不同, 不能照抄. 其 $\varepsilon - N$ 的表达为如下表格:

| | $f(x) \rightarrow A$ | $f(x) \rightarrow \infty$ | $f(x) \rightarrow +\infty$ | $f(x) \rightarrow -\infty$ |
|-----------------------|--|---|--|--|
| $x \rightarrow x_0$ | $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$ | $\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) > M$ | $\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$ | $\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$ |
| $x \rightarrow x_0^+$ | $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$ | $\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) > M.$ | $\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$ | $\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$ |
| $x \rightarrow x_0^-$ | $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$ | $\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x) > M.$ | $\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) > M$ | $\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$ |

继续下一页

| | $f(x) \rightarrow A$ | $f(x) \rightarrow \infty$ | $f(x) \rightarrow +\infty$ | $f(x) \rightarrow -\infty$ |
|-------------------------|---|---|---|--|
| $x \rightarrow \infty$ | $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $ x > X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon$. | $\forall M > 0, \exists X > 0$, 使当 $ x > X$ 时, 即有 $ f(x) > M$ | $\forall M > 0, \exists X > 0$, 使当 $ x > X$ 时, 即有 $f(x) > M$ | $\forall M > 0, \exists X > 0$, 使当 $ x > X$ 时, 即有 $f(x) < -M$. |
| $x \rightarrow +\infty$ | $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon$. | $\forall M > 0, \exists X > 0$, 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x) > M$ | $\forall M > 0, \exists X > 0$, 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) > M$. | $\forall M > 0, \exists X > 0$, 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) < -M$ |
| $x \rightarrow -\infty$ | $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon$. | $\forall M > 0, \exists X > 0$, 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x) > M$ | $\forall M > 0, \exists X > 0$, 使当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) > M$ | $\forall M > 0, \exists X > 0$, 使 当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) < -M$. |

注 1.2.3: 上表的部分解释

- 以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 为例: 不管 $f(x)$ 与 A 的距离多近 ($\forall \varepsilon > 0$), 总有 x 不断靠近 x_0 , 使得 $|f(x) - A| < \varepsilon$.
- 以 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 为例: 不管 M 多大, 总有当 $x > \infty$ 时, 使得 $|f(x)| > M$, 即满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

1.2.4 函数极限的性质

唯一性

定理 1.2.4

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么极限唯一

注 1.2.5: 关于唯一性的说明

- 对于 $x \rightarrow \infty$, 意味着 $x \rightarrow +\infty$ 且 $x \rightarrow -\infty$
- 对于 $x \rightarrow x_0$, 意味着 $x \rightarrow x_0^+$ 且 $x \rightarrow x_0^-$
对于上述问题, 我们称为自变量取值的“双向性”. 以下有一些常见的问题:
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} [x]$ 不存在.
 - 其不存在的原因均为分段函数分段点极限表达式不同, 需要分别求左右极限.

注 1.2.6: 极限存在的充要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A^a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \text{ (无穷小量 } \alpha(x) = 0 \text{)}^b$$

^a左右极限都存在且相等

^b对于此概念, 如果引入超实数系的解释应为 A 是 $f(x)$ 的标准实数部分, 而 $f(x)$ 的值是超实数系下的值, 因此其值应为 $f(x) = A + \alpha(x)$

注 1.2.7: 极限不存在的情况

- 函数在该点附近趋于无穷
- 函数在该点的左右极限只存在一个, 或两者都存在但不相等
- 函数在该点附近不停地震荡
- 该点是函数无定义点的聚点

局部有界性

定理 1.2.8

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时^a, 有 $|f(x)| \leq M$.

^a对局部有界性的描述需要指明是在那个区间上

注 1.2.9: 局部有界性的性质

- 极限存在必有界, 有界函数极限不一定存在.
- 若 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有界.
- 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内为连续函数, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内必定有界.
- 有界函数与有界函数的和, 差, 积仍为有界函数^a.

^a商不是有界函数, 因为: $y_1 = 1, y_2 = 0, \frac{y_1}{y_2} = \infty$

题目 3. 在下列区间内, 函数 $f(x) = \frac{x \sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$ 有界的是:
A: $(-2, 1)$ B: $(-1, 0)$ C: $(1, 2)$ D: $(2, 3)$

解答. 又题意可知, 函数的分段点为 $x = 3, 0, 1$, 对上述三点求极限, 分析可得, 当 $x = 3, 1$ 时, 函数极限为 ∞ , 因此函数在上述两点的极限不存在, 因此根据局部有界性的性质可得, 含这两

个点的区间无界, 因此排除 A,C,D. 答案为 B.

局部保号性

定理 1.2.10

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$)^a.

如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \leq 0$ 或 $(A \leq 0)^b$.

^a如果函数在 x_0 附近的极限值为正, 那么 x_0 附近的函数值为正

^b如果函数在 x_0 附近的函数值 ≤ 0 , 那么 x_0 此处的极限值 ≤ 0

对上述定理中, 为什么一个可以等于 0, 一个不能等于 0? 其解释如下: 如果第一个定理中 $A \leq 0, f(x) \leq 0$, 那么以函数 $f(x) = x^2$ 为例, 虽然 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 但是邻域内的函数值都大于 0. 对于第二个定理中如果 $f(x) < 0, A < 0$, 那么以函数 $f(x) = -x^2$ 为例, 虽然邻域内的函数值都小于 0, 但是 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

注 1.2.11: 局部保号性的证明

证明. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 所以, 取 $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$, $\exists \delta > 0$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

□

由上述证明可得如下推论

推论 1.2.12

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ ($A \neq 0$), 那么就存在 x_0 的某一去心邻域 $\dot{U}(x_0)$, 当 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

函数极限与数列极限的关系 (海涅定理)

定理 1.2.13

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 存在的充要条件是: 对属于函数 $f(x)$ 定义域的任意数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n$ 不等于 a , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$.

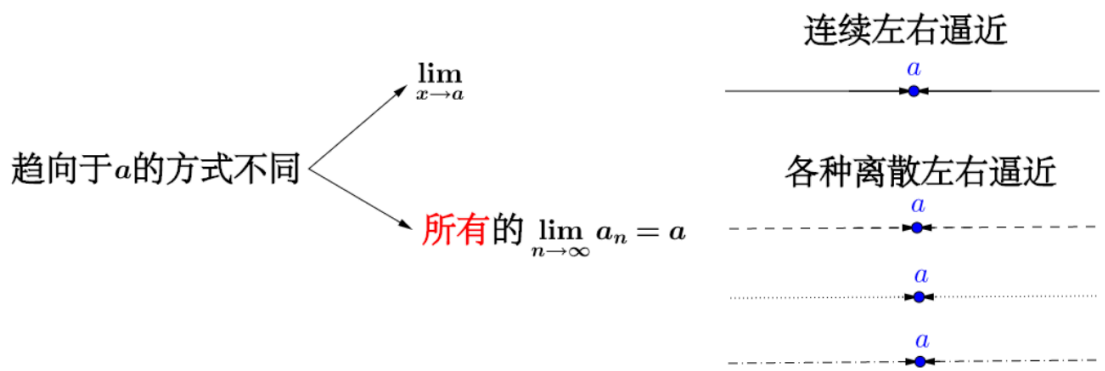
把这个定理简化一下, 主要意思就是

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\Updownarrow$$

所有的 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$

其不同之处在于是离散的趋近还是连续的趋近



除此之外, $f(x)$ 和 $f(a_n)$ 的函数图像如下所示

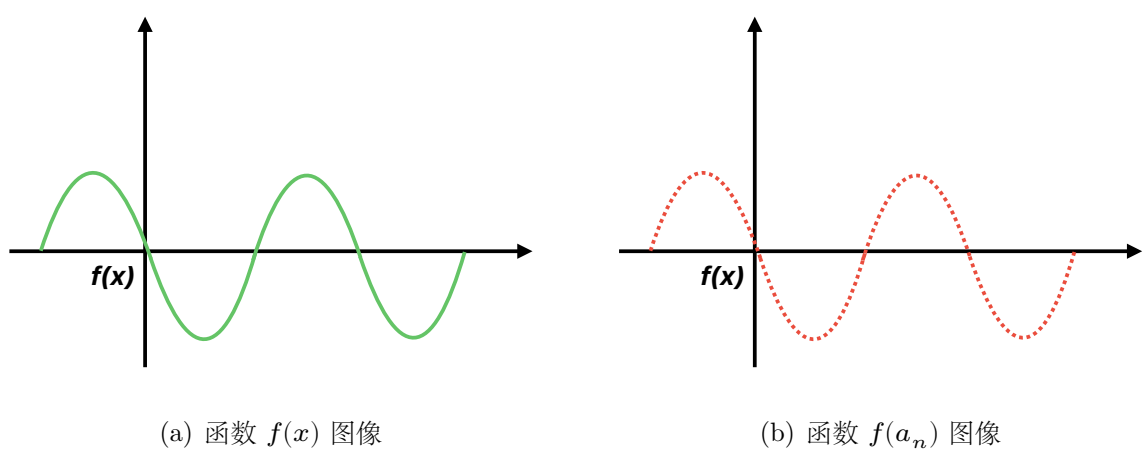
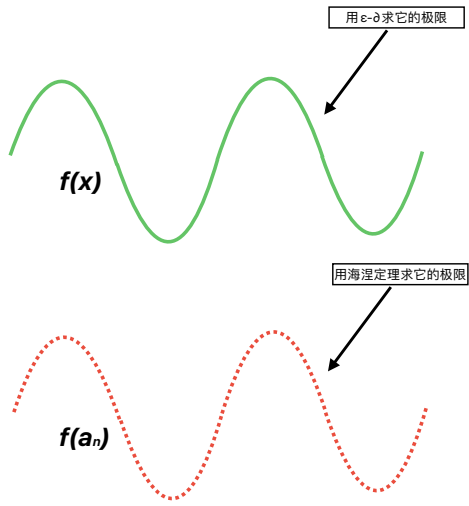


图 1.1: $f(x)$ 与 $f(a_n)$ 函数图像

$f(a_n)$ 其实是 $f(x)$ 的抽样



需要注意的是, 是所有的数列 (抽样) 才能完全代表整体. 不能说我选了某个数列有极限就代表函数有极限.

总结: 海涅定理表述了离散与连续、数列极限与函数极限的关系.

1.3 无穷小与无穷大

1.3.1 无穷小

定义 1.3.1: 无穷小的定义

如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小.

$f(x)$ 是可以本身为 0 或者无限趋近于零, 其中 0 可以作为无穷小唯一常数.

注 1.3.1: 无穷小与函数极限的关系 (脱帽法)

$\lim_{x \rightarrow \bullet} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x \rightarrow \bullet} f(x)$ 为超实数值, 其实数部分为 A , 函数 $f(x)$ 的函数值为 $A + \alpha$

1.3.2 无穷小的性质

1 有限个无穷小的和是无穷小²

证明. 设 α_1 和 α_2 为无穷小量. 则 $0 \leq |\alpha_1 + \alpha_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2|$, $|\alpha_1| + |\alpha_2|$ 的极限为 0. 证明完毕. \square

2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小³

证明. $|\alpha_1| \leq M, \alpha_2$ 是无穷小量. 那么 $0 \leq |\alpha_1 \times \alpha_2| = |\alpha_1| \times |\alpha_2| \leq M \times |\alpha_2|$ 证明完毕. \square

3 有限个无穷小的乘积是无穷小⁴

²无穷个无穷小的和不一定是无穷小, 如 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{n+n}) = \ln 2$

³无界函数 \times 无穷小量不一定是无穷小, 如 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \times \frac{1}{x} = 1$

⁴这个地方虽然张宇老师给出了证明, 但是好像存在一定的争议性

1.3.3 无穷小的比阶

定义 1.3.2

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么就说 β 与 α 是同阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$, 那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小^a;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么就说 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$

^a不是相等, 超实数系下没有加减运算, 只可以进行替换运算

前三个定义解释: $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ 是指分子趋于 0 的速度比分母快, $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ 是指分子趋于 0 的速度比分母慢, $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ 是指趋于 0 的速度一样.

同时需要注意的是, **并不是任意两个无穷小都可进行比阶的**. 例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sin \frac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小, 但是却不可以比阶, 也就是说既无高低阶之分, 也无同阶可言, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 其值为 ∞ 和 0.

1.3.4 无穷大

定义 1.3.3: 无穷大的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M (不论它多么大), 总存在正数 δ (或数 X), 只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)| > M$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$ ^a) 时的无穷大.^b 其 $\varepsilon - N$ 语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x)| > M.$$

^a等价于 $x \rightarrow -\infty$ 同时 $x \rightarrow +\infty$

^b无穷大一定无界, 但无界不一定是无穷大量. 与无穷小相同, 都是一个极限过程, 因此无穷大也是一个极限, 所以无界不一定是无穷大量

题目 4. 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

解答. $\forall M > 0$ 令 $\delta = \frac{1}{4M} > 0$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 即 $0 < |x - 1| < \frac{1}{4M}$ 时, $|x - 1| < \frac{1}{M}$, 所以 $\frac{1}{|x-1|} > M$ 这就证明了 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

注 1.3.2: 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 那么存在常数 $\frac{1}{f(x)}$

1.3.5 无穷大的比较

- 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\ln^\alpha x \ll x^\beta \ll a^x$, 其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.
- 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$, 其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.

1.3.6 无穷大的性质

- 两个无穷大量的积仍未无穷大量
- 无穷大量与有界变量的和仍是无穷大量

1.4 函数极限的运算

1.4.1 夹逼准则

定理 1.4.1: 数列极限存在准则

如果数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

- 从某项开始, 即 $\exists n_0 \in N_+$ (即 $n \rightarrow \infty$), 当 $n > n_0$ 时, 有

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

现在将上述数列极限存在准则推广至函数极限

定理 1.4.2: 函数极限存在准则

如果

- 当 $x \in U^\circ(x_0, r)$ (或 $|x| > M$) 时

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0(x \rightarrow \infty)} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0(x \rightarrow \infty)} h(x) = A$

那么 $\lim_{x \rightarrow x_0(x \rightarrow \infty)} f(x)$ 存在, 且等于 A .

定理 2.4.1 和定理 2.4.2 称为夹逼准则

1.4.2 单调有界准则

定理 1.4.3: 数列的单调有界准则

单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

定理 1.4.4: 函数的单调有界准则

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 一定存在

1.4.3 柯西极限存在准则

该准则表示, 数列 x_n 收敛的充分必要条件是: 该数列中的元素随着序数的增加而愈发靠近, 即足够靠后的任意两项都无限接近.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{当 } m > N, n > N \text{ 时. 总有 } |x_n - x_m| < \varepsilon$$

1.4.4 极限存在准则的两个应用 (两个重要极限)

$$\lim_{\square \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\square}\right)^{\square} = e$$

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

1.5 极限运算法则

1.5.1 数列极限的运算法则

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$
- 若 $b \neq 0, y_n \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

上述运算规则可推广至有限个数列的情况

1.5.2 函数极限的运算法则

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 那么

- $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k \lim f(x) \pm l \lim g(x) = kA \pm lB$, 其中 k, l 为常数

- $\lim[f(x) \bullet g(x)] = \lim f(x) \bullet \lim g(x) \equiv A \bullet B$, 特别的, 若 $\lim f(x)$ 存在, n 为正整数, 则 $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

除此之外还有以下定理:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m, \\ 0, & n < m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

定理 1.5.1

如果 $\varphi(x) \geq \psi(x)$, 而 $\lim \varphi(x) = A, \lim \psi(x) = B$, 那么 $A \geq B$

定理 1.5.2: 复合函数极限运算法则

设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成, $f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且存在 $\delta_0 > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta_0)$ 时, 有 $g(x) \neq u_0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A.$$

注 1.5.3: 常用结论

- 存在 \pm 不存在 = 不存在 (只有这一个是不存在, 其余都是不一定或者存在)
- 不存在 \pm 不存在 = 不一定
- 存在 $\times(\div)$ 不存在 = 不一定
- 不存在 $\times(\div)$ 不存在 = 不一定

引理 1.5.4: 常用的结论

- $\lim f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x) = A \lim g(x)$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$

1.5.3 函数极限的计算

无穷大与无穷小的关系

根据定理 1.3.2 可以用于函数极限的计算

单调有界准则

前面已经赘述

定理 1.5.5: 数列的单调有界准则

单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

定理 1.5.6: 函数的单调有界准则

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 一定存在

等价无穷小替代

关于等价无穷小, 有以下两个定理

定理 1.5.7

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta = \alpha + o(\alpha)$$

定理 1.5.8

设 $\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$, 且 $\lim_{\alpha} \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

定理 2.5.2 表明, 求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 但是需要遵循以下代换原则

- 乘除关系可以换: 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta}$
- 加减关系一定条件下可以换
 - 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$, 则 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$
 - 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$, 则 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$

加减关系代换准则证明如下:

证明.

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha_1 - \beta_1} = \lim \frac{\beta(\frac{\alpha}{\beta} - 1)}{\beta_1(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - 1)} = 1$$

□

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} x &\sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \\ &\sim \ln(1+x) \\ &\sim e^x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+x)^a &\sim 1+ax \\ a^x - 1 &\sim x \ln a \end{aligned}$$

注 1.5.9: 上述结论的推广

当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $(1+x)^a - 1 \sim ax$, 则 $\alpha(x) \rightarrow 0, \alpha(x)\beta(x) \rightarrow 0$, 则

$$[1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$$

$$\frac{1}{2}x^2 \sim 1 - \cos x \sim \sec x - 1 \sim x - \ln(1+x)$$

$$\frac{1}{6}x^3 \sim x - \sin x \sim \arcsin x - x$$

$$\frac{1}{3}x^3 \sim x - \arctan x \sim \tan x - x$$

幂指函数求极限

定义 1.5.1

一般地, 对于形如 $u(x)^{v(x)}$ ($u(x) > 0, u(x) \neq 1$) 的函数 (通常称为幂指函数), 如果

$$\lim u(x) = a > 0, \lim v(x) = b$$

那么

$$\lim u(x)^{v(x)} = a^b$$

利用基本极限求极限

$$\begin{aligned} \lim_{\square \rightarrow \infty} (1 + |\square|)^{\frac{1}{\square}} &= e^{|\square|^{\frac{1}{\square}}} & \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1 (a > 0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a \end{aligned}$$

洛必达法则

定义 1.5.2

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0(\infty)$
- $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或 ∞)

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

需要注意的是使用过洛必达法则之后的极限必须存在, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 必须存在.

证明. 以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ 为例, 可以看到此时结果是震荡的, 因此函数极限不存在, 但是显然是错误的. 正确的方法是这样的 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin \frac{1}{x}}{x} = x \sin \frac{1}{x}$ \square

洛必达法则多用于 7 种未定式的计算主要有以下类型 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty$

- $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$ 可以直接计算或者简单转换可以直接计算.
- $\infty - \infty$ 可以通过取倒数或者取对数进行计算

$$\text{题目 5. } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right]$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \\ \text{解答. } &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{题目 6. } \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 (e^{\frac{1}{x}} - 1) - x]$$

$$\text{解答. 原式} \stackrel{\text{令 } u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1 - u}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1}{2u} = \frac{1}{2}$$

题目 7. 设 $f(x)$ 二阶可导, $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 2$. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - 1}{2x} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - 1}{x} \end{aligned}$$

解答. $\because f'(0) = 1$

$$\begin{aligned} &\therefore \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \\ &= \frac{1}{2} f''(0) = 1 \end{aligned}$$

题目 7 的注记. 在使用洛必达法则时候, 如果想对 n 阶进行求导使用洛必达法则, 那么需要注意的是 $n+1$ 阶导函数存在.

- ∞^0 与 0^0 通常使用 $\lim u^v = e^{\lim v \ln u}$ 来计算

题目 8. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 n 是给定的自然数.

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)}{x}} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x + 2e^{2x} + \dots + ne^{nx}}{n}}{\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \dots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}} \\ &= \frac{1 + 2 + \dots + n}{1 + 1 + \dots + 1} \\ \text{原式} &= e^{\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

- 1^∞ 通常使用 $\lim u^v = e^{\lim (u-1)v}$ 来计算, 需要知道的是 1^∞ 可以化为第二个重要极限.

题目 9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + x}{(x-a)(x-b)} \right]^x$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-a} \right)^x \times \left(\frac{x+1}{x-b} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x-a} \right)^x \times \left(1 + \frac{1-b}{x+b} \right)^x \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x-a}} \times e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-b)x}{x+b}} \\ &= e^{a+1-b} \end{aligned}$$

题目 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{n+a} + \sqrt{n+b} + \sqrt{n+c}}{3\sqrt{n}} \right]^n$, 其中 $a > 0, b > 0, c > 0$.

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{\sqrt{n+a} + \sqrt{n+b} + \sqrt{n+c}}{3\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{\sqrt{1+\frac{a}{n}} + \sqrt{1+\frac{b}{n}} + \sqrt{1+\frac{c}{n}}}{3}}{\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sqrt{1+ax} + \sqrt{1+bx} + \sqrt{1+cx} + 3 - 3}{3}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} + \sqrt{1+bx} + \sqrt{1+cx} - 3}{3x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{2\sqrt{1+ax}} + \frac{b}{2\sqrt{1+bx}} + \frac{c}{2\sqrt{1+cx}}}{3} \\
 &= \frac{a+b+c}{6}
 \end{aligned}$$

综上所述, 答案为 $e^{\frac{a+b+c}{6}}$

题目 11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \ln(1+x)}$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x (1 - (\frac{\sin x}{x})^x)}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{x \ln \frac{\sin x}{x}}}{x^3} \quad (\text{当 } x \text{ 趋于 } 0 \text{ 的时候 } x^x, \text{ 趋于 } 1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} \quad (\text{此处不可以用等价无穷小}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{\sin x - x}{x})}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^3} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

综上所述, 答案为 $\frac{1}{6}$

题目 12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{n}{x}}$, 其中 $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x - n}{n} \right)^{\frac{n}{a_1' + a_2' + \cdots + a_n' - n} \cdot \frac{a_1' + a_1' + \cdots + a_n' - n}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x - n}{x} = \ln(a_1 a_2 \cdots a_n) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x - n}{n} \right)^{\frac{n}{a_1' + a_2' + \cdots + a_n' - n}} = e
 \end{aligned}$$

综上所述, 答案为 $a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n$

泰勒公式

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有以下结论

| | |
|--|--|
| $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ | $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ |
| $\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ | $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ |
| $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ | $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ |
| $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ | $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x^2)$ |

注 1.5.10: 泰勒公式使用注意事项

- 泰勒公式是在一点处展开, 函数必须在那一点处 n 阶倒数存在
- 分子分母上下同阶

夹逼准则求极限

- 主要通过放缩来求极限
- 常用的结论有: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$, 其中 $a_i > 0 (i = 1, 2, 3, \dots, m)$, 令 $\max a_i = a$, 则 $\sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{m a^n}$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m \cdot a^n} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a$

定积分求极限