第一章　极限

1.1　数列的极限

1.1.1　数列极限的定义

定义 1.1.1

设 $|x_n|$ 为一数列, 若存在常数 a, 对于任意的 $\varepsilon > 0$(不论它多么小), 总存在正整数 N, 使得当$n > N$时 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称数 a 是数列 $|x_n|$ 的极限, 或者称数列 $|x_n|$ 收敛于 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或} x_n \to a(n \to \infty).$$

该定义的 $\varepsilon - N$[a]语言描述是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \text{正整数} N, \text{当} n > N \text{时}, \text{有} |x_n, -a| < \varepsilon.$$

[a] **$\varepsilon - N$ 几何意义：对于点 a 的任何 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 一定存在 N，当 $n < N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，而只有有限个（最多有 N 个）在区间之外.**

在上面的定义中,$\varepsilon > 0$ 的 ε 任意性是非常重要的, 只有这样才能表示出无限接近的意义. 总存在正整数 N, 使得 $n > N$ 这个条件用于表达 $n \to \infty$ 的过程.

注 1.1.1

- 数列的极限值与数列的前有限列无关, 只与后面无穷项有关
- 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则其任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛，且 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$[a]
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$
- 关于数列 $(1+\frac{1}{n})^n$ 的结论
  - 单调增加
  - $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

[a] 此条定理提供了一个判断数列发散的方法:1. 至少一个子数列发散.2. 两个子数列收敛, 但是收敛值不同.

题目 1. 证明: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 则 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$

证明. □

1.1.2 收敛数列的性质

唯一性

定理 1.1.2

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一

有界性

定理 1.1.3

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界[a].

[a]如果数列有界, 但是不一定存在极限, 如数列 $(-1)^n$

保号性

定理 1.1.4

如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 且$a>b$(或$a<b$), 那么存在正整数$N$, 当$n>N$ 时, 都有$x_n>b$ (或$x_n<b$)
如果数列 $\mid x_n \mid$ 从某项起有$x_n \geqslant b$(或$x_n \leqslant b$), 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 那么$a \geqslant b$(或$a \leqslant b$)[a].

[a]其中 b 可以为任意实数，常考 b=0 的情况

1.2 函数的极限

1.2.1 超实数系

定义 1.2.1: 超实数系的概念

超实数 (Hyperreal number) 是一个包含实数以及无穷大和无穷小的域，它们的绝对值分别大于和小于任何正实数。

注 1.2.1

- 超实数集**是为了严格处理无穷量 (无穷大量和无穷小量) 而提出的**。
- 超实数集, 或称为非标准实数集, 记为 $^*\mathbb{R}$, 是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个扩张.

1.2.2 邻域

[1]

定义 1.2.2: 邻域的相关概念

- δ 邻域: 设 x_0 是数轴上一个点,δ 是某一正数, 则称 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0,\delta)$, 即:

$$U(x_0,\delta)=\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x|\,|x-x_0|<\delta\}$$

- 去心 δ 邻域: 定义点 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<\left|x-x_0\right|<\delta\}$
- 左, 右 δ 邻域:$\{x|0<x-x_0<\delta\}$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域, 记作 $U^+(x_0,\delta)$;$\{x|0<x_0-x<\delta\}$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域, 记作 $U^-(x_0,\delta)$.

1.2.3 函数极限的定义

函数极限的定义主要分为自变量趋于有限值 $(x\to x_0)$ 时的极限和自变量趋于无穷大时函数的极限 $(x\to\infty)$

自变量趋于有限值时的函数极限

定义 1.2.3: 当自变量趋于有限值时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ε**(不论它多么小)**[a], 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限, 记作:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad 或f(x)\to A(当x\to x_0)$$

其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,当0<|x-x_0|<\delta时,有|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 在证明中，这两句是白给，直接写。后面的才是关键。

[a] ε 用于衡量 $|f(x)-A|$ 的值有多小

[1] 邻域与区间不同, 邻域属于区间的范畴. 但是邻域通常表示“一个局部位置”. 比如“点 x_0 的 δ”邻域, 可以理解为“点 x_0”的附近, 而区间是明确指出在实数系下的范围

注 1.2.2

在函数极限中 $x \to \infty$ 指的是 $|x| \to \infty$, 需要 x 趋于正无穷和负无穷, 但在数列中的 $n \to \infty$ 是 $n \to +\infty$

单侧极限

定义 1.2.4: 单侧极限的定义

若当 $x \to x_0^-$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 A, 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**左极限**, 记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^-) = A.$$

若当 $x \to x_0^+$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 A, 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**, 记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^+) = A$$

题目 2. 已知 $\lim_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x} + (1+\mid x\mid)^{\frac{1}{x}}\right]$存在, 求$a$的值

解答. 由于存在 arctan 与 $|x|$ 函数, 则对于 0 点的极限值需要分左右进行计算.
$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x} + (1+\mid x\mid)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim\limits_{x\to 0^-} a\arctan\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}} = -\frac{\pi}{2}a + \frac{1}{\mathrm{e}}$
$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x} + (1+\mid x\mid)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} a\arctan\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}a + \mathrm{e}$ 若极限存在, 则 $a = \frac{1-e^2}{\pi e}$

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 1.2.5: 自变量趋于无穷大时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ε.(不论它多么小), 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限, 记作:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\text{或}f(x)\to A(\text{当}x\to x_0)$$

其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时},\text{有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 在证明中，这两句是白给，直接写。后面的才是关键。

需要注意的是趋向的值不同时,$\varepsilon-N$ 写法不同, 不能照抄. 其 $\varepsilon-N$ 的表达为如下表格:

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $\mid f(x)-A\mid<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $\mid f(x)\mid>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$时, 即有 $f(x)>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\mid f(x)-A\mid<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\mid f(x)\mid>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $f(x)>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\mid f(x)-A\mid<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\mid f(x)\mid>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$

继续下一页

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使当 $\mid x\mid > X$ 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 $\mid x\mid > X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 $\mid x\mid > X$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 |x|>X 时, 即有 $f(x)<-M.$
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使当 x>X 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x>X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x>X$时, 即有 $f(x)>M.$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 x>X 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$ 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$时, 即有 $f(x)<-M.$

注 1.2.3: 上表的部分解释

- 以 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 为例: 不管 $f(x)$ 与 A 的距离多近 $(\forall\varepsilon>0)$, 总有 x 不断靠近 x_0, 使得 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.
- 以 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 为例: 不管 M 多大, 总有当 $x>\infty$ 时, 使得 $\lvert f(x)>M\rvert$, 即满足 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

1.2.4 函数极限的性质

唯一性

定理 1.2.4

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 那么极限唯一

注 1.2.5: 关于唯一性的说明

- 对于 $x\to\infty$, 意味着 $x\to+\infty$ 且 $x\to-\infty$
- 对于 $x\to x_0$, 意味着 $x\to x_0^+$ 且 $x\to x_0^-$
  对于上述问题, 我们称为自变量取值的"双向性". 以下有一些常见的问题:
  - $\lim_{x\to\infty} e^x$ 不存在, $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\lvert x\rvert}$ 不存在, $\lim_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在, $\lim_{x\to x_0}[x]$ 不存在.
  - 其不存在的原因均为分段函数分段点极限表达式不同, 需要分别求左右极限.

注 1.2.6: 极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A, \text{且} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A^a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0(\text{无穷小量}\alpha(x) = 0)^b$$

---

[a]左右极限都存在且相等

[b]对于此概念, 如果引入超实数系的解释应为 A 是 $f(x)$ 的标准实数部分, 而 $f(x)$ 的值是超实数系下的值, 因此其值应为 $f(x) = A + \alpha(x)$

注 1.2.7: 极限不存在的情况

- **函数在该点附近趋于无穷**
- 函数在该点的左右极限只存在一个, 或两者都存在但不相等
- 函数在该点附近不停地震荡
- 该点是函数无定义点的聚点

注 1.2.8: 一些重要的函数极限问题

以下类型的函数由于自变量取值的双向性因此需要进行特殊讨论:

- $\lim_{x\to\infty} e^x$:$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|}$:$\lim_{x\to 0^+} = \frac{\sin x}{x} = 1$,$\lim_{x\to 0^-} = \frac{\sin x}{-x} = -1$
- $\lim_{x\to\infty} \arctan x$:$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x\to 0}[x]$:$\lim_{x\to 0^+}[x] = 0, \lim_{x\to 0^-}[x] = -1$

局部有界性

定理 1.2.9

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时[a], 有 $|f(x)| \le M$.

---

[a]对局部有界性的描述需要指明是在那个区间上

注 1.2.10: 局部有界性的性质

- 极限存在必有界, 有界函数极限不一定存在.
- 若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.
- **若 $f(x)$ 在 (a,b) 内为连续函数, 且 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必定有界.**
- 有界函数与有界函数的和, 差, 积仍为有界函数[a].

[a]商不是有界函数, 因为:$y_1=1, y_2=0, \frac{y_1}{y_2}=\infty$

题目 3. 在下列区间内, 函数 $f(x)=\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$ 有界的是:
A:(-2,1) B:(-1,0) C:(1,2) D:(2,3)

解答. 又题意可知, 函数的分段点为 $x=3,0,1$, 对上述三点求极限, 分析可得, 当 $x=3,1$ 时, 函数极限为 ∞, 因此函数在上述两点的极限不存在, 因此根据局部有界性的性质可得, 含这两个点的区间无界, 因此排除 A,C,D. 答案为 B.

局部保号性

定理 1.2.11

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$(或 $A<0$), 那么存在常数 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>0$($f(x)<0$)[a].
如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$), 而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 那么 $A\leqslant 0$ 或 $(A\le 0)$[b].

[a]如果函数在 x_0 附近的极限值为正, 那么 x_0 附近的函数值为正
[b]如果函数在 x_0 附近的函数值 ≤ 0, 那么 x_0 此处的极限值 ≤ 0

对上述定理中, 为什么一个可以等于 0, 一个不能等于 0? 其解释如下: 如果第一个定理中 $A\leqslant 0, f(x)\leqslant 0$, 那么以函数 $f(x)=x^2$ 为例, 虽然 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, 但是邻域内的函数值都大于 0. 对于第二个定理中如果 $f(x)<0, A<0$, 那么以函数 $f(x)=-x^2$ 为例, 虽然邻域内的函数值都小于 0, 但是 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

注 1.2.12: 局部保号性的证明

证明. 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A>0$, 所以, 取 $\varepsilon=\frac{A}{2}>0$, $\exists\delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}\Rightarrow f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0.$$

□

由上述证明可得如下推论

推论 1.2.13

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0(A \neq 0)$, 那么就存在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$, 当 $x \in U^{\circ}(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

函数极限与数列极限的关系 (海涅定理)

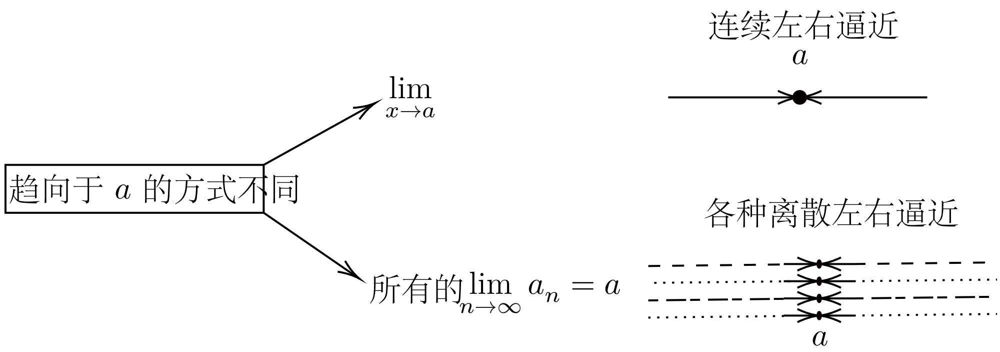
定理 1.2.14

设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内有定义，则 $\lim_{x\to\ x_0} f(x) = A$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}\,(x_n \neq x_0)$, 极限 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ 存在.

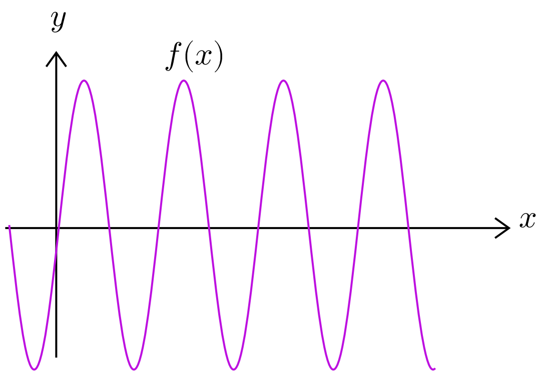
把这个定理简化一下, 主要意思就是

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{所有的} \lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \text{有} \lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$$

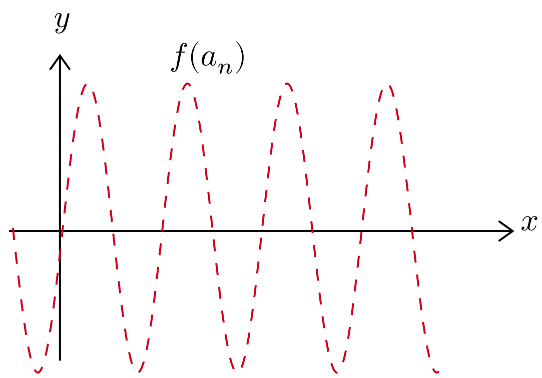
其不同之处在于是离散的趋近还是连续的趋近



除此之外,$f(x)$ 和 $f(a_n)$ 的函数图像如下所示

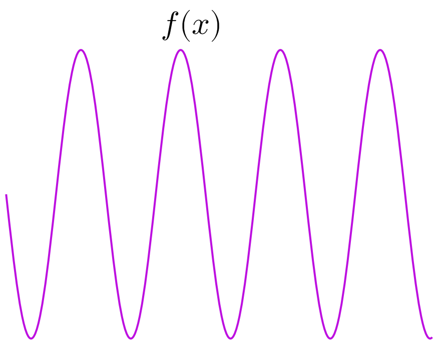


函数 $f(x)$

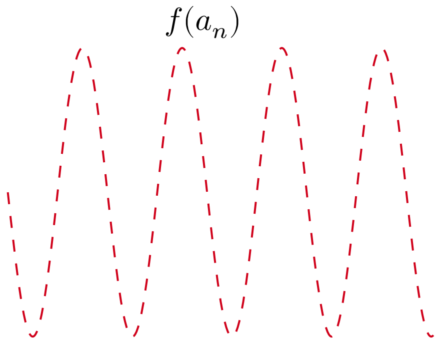


函数 $f(a_n)$

如上图所示 $f(a_n)$ 其实是 $f(x)$ 的抽样



用 $\varepsilon-\delta$ 求它的极限



用海涅定理求它的极限

需要注意的是, 是所有的数列（抽样）才能完全代表整体. 不能说我选了某个数列有极限就代表函数有极限.

总结:海涅定理表述了离散与连续、数列极限与函数极限的关系.

1.3　无穷小与无穷大

1.3.1　无穷小

定义 1.3.1: 无穷小的定义

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷小.

$f(x)$ **是可以本身为 0 或者无限趋近于零, 其中 0 可以作为无穷小唯一常数**.

注 1.3.1: 无穷小与函数极限的关系 (脱帽法)

$\lim_{x\to\bullet} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x\to\bullet} f(x)$ 为超实数值，其实数部分为 A，函数 $f(x)$ 的函数值为 $A+\alpha$

1.3.2　无穷小的性质

1 有限个无穷小的和是无穷小[2]

证明. 设 α_1 和 α_2 为无穷小量。则 $0 \leqslant |\alpha_1+\alpha_2| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|$,$|\alpha_1|+|\alpha_2|$ 的极限为 0。证明完毕。 □

2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小[3]

证明. $|\alpha_1| \leqslant M$,α_2 是无穷小量。那么 $0 \leqslant |\alpha_1 \times \alpha_2| = |\alpha_1| \times |\alpha_2| \leqslant M \times |\alpha_2|$ 证明完毕。 □

[2]无穷个无穷小的和不一定是无穷小，如 $\lim_{n\to\infty} = (\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\cdots+\frac{1}{n+n}) = \ln 2$

[3]无界函数 × 无穷小量不一定是无穷小，如 $\lim_{x\to\infty} x \times \frac{1}{x} = 1$

3 有限个无穷小的乘积是无穷小[4]

1.3.3 无穷小的比阶

定义 1.3.2

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么就说 β 与 α 是同阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$, 那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小[a];
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么就说 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$

[a]不是相等，超实数系下没有加减运算，只可以进行替换运算

前三个定义解释:$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ 是指分子趋于 0 的速度比分母快,$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ 是指分子趋于 0 的速度比分母慢,$\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ 是指趋于 0 的速度一样.

同时需要注意的是, **并不是任意两个无穷小都可进行比阶的**. 例如, 当 $x \to 0$ 时,$x \sin \frac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小, 但是却不可以比阶, 也就是说既无高低阶之分, 也无同阶可言, 因为 $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 其值为 ∞ 和 0。

1.3.4 无穷小的运算

[5] 设 m, n 为无穷小，则

1. $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min\{m, n\}$
2. $o(x^m) \bullet o(x^n) = o(x^{m+n}), x^m \bullet o(x^n) = o(x^{m+n})$
3. $o(x^m) = o(kx^m) = k \bullet o(x^m), k \neq 0$

[4]这个地方虽然张宇老师给出了证明，但是好像存在一定的争议性

[5]此处多用于泰勒公式的应用中，会对上述高阶无穷小的运算提出要求

1.3.5 无穷大

定义 1.3.3: 无穷大的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于来一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大), 总存在正数 δ(或数 X), 只要 x 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)|>M$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$[a]) 时的无穷大.[b] 其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0, \text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时}, \text{有}|f(x)|>M.$$

[a]等价于 $x\to-\infty$ 同时 $x\to+\infty$

[b]**无穷大一定无界，但无界不一定是无穷大量**。与无穷小相同，都是一个极限过程，因此无穷大也是一个极限，所以无界不一定是无穷大量

题目 4. 证明 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$

解答. $\forall M>0$ 令 $\delta=\frac{1}{4M}>0$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 即 $0<|x-1|<\frac{1}{4M}$ 时,$|x-1|<\frac{1}{M}$, 所以 $\frac{1}{|x-1|}>M$ 这就证明了 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$

注 1.3.2: 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x)\neq0$, 那么存在常数 $\frac{1}{f(x)}$

1.3.6 无穷大的比阶

- 当 $x\to+\infty$ 时,$\ln^a x\ll x^\beta\ll a^x$,其中$\alpha>0,\beta>0,a>1$.[6]
- 当 $n\to\infty$ 时,$\ln^a n\ll n^\beta\ll a^n\ll n!\ll n^n$,其中$\alpha>0,\beta>0,a>1$.

1.3.7 无穷大的性质

- 两个无穷大量的积仍未无穷大量
- 无穷大量与有界变量的和仍是无穷大量

[6]由洛必达公式证明

1.4 函数极限的运算

1.4.1 极限的四则运算法则

如果极限不存在，那么极限属于超实数系的范畴，在超实数系下不可以进行代数运算，只可以进行替换运算。但是如果极限均存在，那么可以进行代数计算。

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 那么

- $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k \lim f(x) \pm l \lim g(x) = kA \pm lB$, 其中 k, l 为常数
- $\lim[f(x) \bullet g(x)] = \lim f(x) \bullet \lim g(x) \equiv A \bullet B$, 特别的, 若 $\lim f(x)$ 存在,n 为正整数, 则 $\lim[f(x)]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}(B \neq 0)$

注 1.4.1: 常用结论

- 存在 $\pm$ 不存在 = 不存在 (只有这一个是不存在, 其余都是不一定或者存在)
- 不存在 $\pm$ 不存在 = 不一定[a]
- 存在 $\times(\div)$ 不存在 = 不一定
- 不存在 $\times(\div)$ 不存在 = 不一定
- 若 $\lim f(x) = A \neq 0$, 则 $\lim f(x) \lim g(x) = A \times \lim g(x)$

[a]反例: $\lim_{x\to 0}(\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}) = 0$

题目 5. **若** $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, **则** $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$

证明. $g(x) = \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$。求极限得 $\lim g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\lim f(x)}{\lim \frac{f(x)}{g(x)}} = 0$. 证明完毕[7]。 □

1.4.2 洛必达法则

定义 1.4.1

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0(\infty)$
- $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或∞)

则 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

需要注意的是使用过洛必达法则之后的极限必须存在, 即 $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **必须存在.**

[7]此证明为结论，经常使用

题目 6. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\times\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

解答. 该函数也是 $\frac{0}{0}$ 型，但是如果使用洛必达法则，则 $2x\times\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, 极限显然不存在，因此不可以使用洛必达法则。则正确求法为 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\times\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\times\sin\frac{1}{x}=0$.

1.4.3 泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处 n 阶可导[8], 则存在 $x=0$ 的一个邻域，对于该领域内的任一点 x, 有:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

当 $x\to 0$ 时, 有以下结论

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$
$\arcsin x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$
$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$	$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$
$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$(1+x)^a=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$

注 1.4.2: 泰勒公式应用时的展开原则

- $\frac{A}{B}$ 型，适用于”上下同阶”原则: 具体来说，如果分母或者分子是 x 的 k 次幂，则应把分子或分母展开到 x 的 k 次幂。如:$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$，此处 $\ln(1+x)$ 应展开为 $x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$
- $A-B$ 型, 适用”幂次最低”原则: 将 A,B 分别展开到他们系数不相等的 x 的最低次幂为止。如: 已知当 $x\to 0$ 时，$\cos x-e^{\frac{x^2}{2}}$ 与 ax^b 为等价无穷小, 求 a,b. 则应展开为 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)$.

1.4.4 极限存在准则的两个应用 (两个重要极限)

$$\lim_{\Box\to\infty}(1+\frac{1}{\Box})^{\Box}=e$$

$$\lim_{\Box\to 0}\frac{\sin\Box}{\Box}=1$$

[8]泰勒公式是在一点处展开, 函数必须在那一点处 n 阶导数存在

1.4.5 夹逼准则

定义 1.4.2: 函数极限存在准则

如果

- 当 $x \in U^{\circ}(x_0, r)$(或 $|x| > M$) 时

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

- $\lim_{x \to x_0 (x \to \infty)} g(x) = A, \lim_{x \to x_0 (x \to \infty)} h(x) = A$

那么 $\lim_{x \to x_0 (x \to \infty)} f(x)$ 存在, 且等于 A.

- 夹逼准则处主要通过放缩来求极限
- 常用的结论有: 若 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n}$, 其中 $a_i > 0 (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$, 令 $\max a_i = a$, 则 $\sqrt[n]{a^n} \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leqslant \sqrt[n]{m a^n}$, $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a^n} = a, \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{m \cdot a^n} = a$, 则 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a$

1.4.6 单调有界准则

定义 1.4.3: 函数的单调有界准则

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 一定存在

1.4.7 函数极限的运算法则

定义 1.4.4

如果 $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$, 而 $\lim \varphi(x) = A$, $lim \psi(x) = B$, 那么 $A \geqslant B$

定义 1.4.5: 复合函数极限运算法则

设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义，若 $\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0$,$\lim_{u \to u_0} f(u) = A$, 且存在 $\delta_0 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 时，有 $g(x) \neq u_0$, 则

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = A.$$

注 1.4.3: 常用的结论

- $\lim f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim f(x) g(x) = A \lim g(x)$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在,$\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$

1.4.8 等价无穷小替代

关于等价无穷小, 有以下两个定理

定义 1.4.6

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha)$$

定义 1.4.7

设 $\alpha\sim\tilde{\alpha}$,$\beta\sim\tilde{\beta}$, 且 $\lim\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在, 则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 但是需要遵循以下代换原则[a]

- 乘除关系可以换: 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$
- 加减关系一定条件下可以换
  - 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq 1$, 则$\alpha-\beta\sim\alpha_1-\beta_1$
  - 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq -1$, 则$\alpha+\beta\sim\alpha_1+\beta_1$

加减关系代换准则证明如下:

证明.

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\beta_1}=\lim\frac{\beta(\frac{\alpha}{\beta}-1)}{\beta_1(\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1)}=1$$

□

[a] 其实没有什么替换原则，本质其实是因为超实数系下不能进行实数运算，只能进行替换运算

以下为常用等价无穷小

当 $x\to 0$ 时, 有

$$\boxed{\begin{aligned}&x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\\&\quad\sim\ln(1+x)\\&\quad\sim e^x-1\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(1+x)^a\sim 1+ax\\&a^x-1\sim x\ln a\end{aligned}}$$

注 1.4.4: 上述结论的推广

当 $x \to 0$ 时, 若 $(1+x)^a - 1 \sim ax$, 则 $\alpha(x) \to 0, \alpha(x)\beta(x) \to 0$, 则

$$[1+\alpha(x)]^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}x^2 \sim 1 - \cos x \sim \sec x - 1 \sim x - \ln(1+x)}$$

$$\boxed{\frac{1}{6}x^3 \sim x - \sin \sim \arcsin x - x}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}x^3 \sim x - \arctan x \sim \tan x - x}$$

1.4.9　利用基本极限求极限

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{\square\to\infty}(1+|\square|)^{\frac{1}{\square}} = e^{|\square|\frac{1}{\square}} \qquad \lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square} = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1(a>0) \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a \end{array}}$$

1.4.10　定积分求极限

1.4.11　七种未定式的计算

形如 $\frac{0}{0}$,$\frac{\infty}{\infty}$,$0 \times \infty$

形如 $\infty - \infty$

形如 $\infty^0, 0^0$

形如 1^∞

1.5　数列极限的运算

1.5.1　数列极限的运算法则

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则

- $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$

- $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$
- 若 $b \neq 0, y_n \neq 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

上述运算规则可推广至有限个数列的情况

1.5.2 夹逼准则

定理 1.5.1: 数列极限存在准则

如果数列 $\{|x_n|\}, \{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

- 从某项开始, 即 $\exists n_0 \in N_+$(即$n \to \infty$), 当 $n > n_0$ 时, 有

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

- $\lim_{n\to\infty} y_n = a, \lim_{n\to\infty} z_n = a$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

以下为放缩的常用方法

- 利用简单放大与缩小

$$\begin{cases} n \times u_{\min} \leqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant n \times u_{\max}, \\ \text{当}u_i \geqslant 0\text{时},1 \times u_{\max} \leqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant n \times u_{\max}. \end{cases}$$

- 利用如下重要不等式

题目 7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right)$

证明. □

题目 8. 求极限 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$, 其中 $a_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 都是非负数

证明. □

1. 设 a, b 为实数, 则 $|a + b| \leq |a| + |b|;| \ |a| - |b| \ |\leqslant |a - b|$[9]
2. $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a,b>0)$[10]
3. $\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}(a, b, c > 0)$

[9]可以将上述式子推广为 n 个实数的情况:$|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

[10]还有一个不等式是 $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

4. 设$a \geq b \geq 0$,则$\begin{cases} 当n \geq 0 \text{ 时}, a^n \geq b^n, \\ 当n \leqslant 0 \text{ 时}, a^n \leqslant b^n. \end{cases}$
5. 若$0 < a < x < b, 0 < c < y < d$,则$\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}$.[11]
6. $\sin x < x < \tan x \,(0 < x < \frac{\pi}{2})$
7. $\sin x < x (x > 0)$
8. 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时，$x < \tan x < \frac{4}{\pi} x$
9. 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x > \frac{2}{\pi} x$
10. $\arctan x \leqslant x \leqslant \arcsin x (0 \leqslant x \leqslant 1)$
11. $e^x \geqslant x + 1 (\forall x)$[12]
12. $x - 1 \geqslant \ln x (x > 0)$[13]
13. $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x} (x > 0)$ 或 $\frac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x (x > 0)$[14]
14. 在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如 $(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}})...(1 + \frac{1}{2^{2^n}})$, 可化为 $(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}})...(1 + \frac{1}{2^{2^n}}) * \frac{4}{3}$

- 利用闭区间上连续函数必有最大值与最小值
- 利用压缩映射原理

1.5.3 单调有界准则

定理 1.5.2: 数列的单调有界准则

单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{n \to \infty} x_n$ 存在

[11] 当$n\pi < x < (n+1)\pi, 2n < S(x) < 2(n+1)$时, $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$.

[12] 当$x_{n+1} = \mathrm{e}^{x_n} - 1$ 时, 由$\mathrm{e}^{x_n} - 1 \geqslant x_n$, 得$x_{n+1} \geqslant x_n$, 即$\{x_n\}$单调不减

[13] 当$x_n > 0$时, 若$x_{n+1} = \ln x_n + 1$, 由$\ln x_n + 1 \leqslant x_n$, 得$x_{n+1} \leqslant x_n$, 即$\{x_n\}$单调不增

[14] 令 $f(x) = \ln x$, 并在区间 $[x, x+1]$ 上对其使用拉格朗日中值定理, 有 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}$ 其中 $0 < x < \xi < x + 1$, 因此对任意的 $x > 0$, 有 $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$