第一章　极限

1.1　数列的极限

1.1.1　数列极限的定义

定义 1.1.1

设 $|x_n|$ 为一数列, 若存在常数 a, 对于任意的 $\varepsilon > 0$(不论它多么小),总存在正整数 N, 使得当$n > N$时 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称数 a 是数列 $|x_n|$ 的极限, 或者称数列 $|x_n|$ 收敛于 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\text{或}x_n \to a(n \to \infty)$$

该定义的 $\varepsilon - N$[a]语言描述是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\text{正整数}N, \text{当}n > N\text{时}, \text{有}|x_n, -a| < \varepsilon.$$

[a] $\varepsilon - N$ **几何意义：对于点 a 的任何 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 一定存在 N，当 $n < N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，而只有有限个（最多有 N 个）在区间之外.**

在上面的定义中,$\varepsilon > 0$ 的 ε 任意性是非常重要的, 只有这样才能表示出无限接近的意义. 总存在正整数 N, 使得 $n > N$ 这个条件用于表达 $n \to \infty$ 的过程.

注 1.1.1

- 数列的极限值与数列的前有限列无关, 只与后面无穷项有关
- 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则其任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛, 且 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$[a]
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$
- 关于数列 $(1 + \dfrac{1}{n})^n$ 的结论
  - 单调增加
  - $\lim_{n\to\infty}(1 + \dfrac{1}{n})^n = e$

[a]此条定理提供了一个判断数列发散的方法:1. 至少一个子数列发散.2. 两个子数列收敛, 但是收敛值不同.

题目 1. 证明: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 则 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$

证明. 已知数列 a_n 极限为 A, 那么 $|a_n - A| < \varepsilon$, 由不等式1可得,$||a_n| - |A|| \leqslant |a_n - A| < \varepsilon$, 因此 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$. □

题目 1 的注记.

1. 此命题反过来则错误, 如取 $a_n = (-1)^n$, 则 $\lim_{n\to\infty} |(-1)^n| = 1$。但 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.
2. 在本题中若 $A = 0$, 则 $||a_n| - |A|| = ||a_n| - 0| = |a_n - 0|$, 即有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0\,,$$

   此结论常用, 即若要证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 可转换为证明 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 由于 $|a_n| \geq 0$, 若使用了夹逼准则, 只需证明 $|a_n| \leqslant 0$ 即可
3. 此结论对函数亦成立, 即若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$.

1.1.2 收敛数列的性质

唯一性

定理 1.1.2

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一

有界性

定理 1.1.3

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界[a].

[a]如果数列有界, 但是不一定存在极限, 如数列 $(-1)^n$

保号性

定理 1.1.4

如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $a>b$(或 $a<b$), 那么存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 都有 $x_n>b$(或 $x_n<b$.

如果数列 $|\ x_n\ |$ 从某项起有 $x_n \geqslant b$(或 $x_n \leqslant b$), 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 那么 $a \geqslant b$($a \leqslant b$)[a].

[a]其中 b 可以为任意实数, 常考 b=0 的情况

1.2 函数的极限

1.2.1 超实数系

定义 1.2.1: 超实数系的概念

超实数 (Hyperreal number) 是一个包含实数以及无穷大和无穷小的域, 它们的绝对值分别大于和小于任何正实数。

注 1.2.1

- 超实数集**是为了严格处理无穷量 (无穷大量和无穷小量) 而提出的**。
- 超实数集, 或称为非标准实数集, 记为 $^*\mathbb{R}$, 是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个扩张.

1.2.2 邻域

[1]

定义 1.2.2: 邻域的相关概念

- δ 邻域: 设 x_0 是数轴上一个点,δ 是某一正数, 则称 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0,\delta)$, 即:

$$U(x_0,\delta)=\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x|\,|x-x_0|<\delta\}$$

- 去心 δ 邻域: 定义点 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$
- 左, 右 δ 邻域:$\{x|0<x-x_0<\delta\}$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域, 记作 $U^+(x_0,\delta)$;$\{x|0<x_0-x<\delta\}$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域, 记作 $U^-(x_0,\delta)$.

1.2.3 函数极限的定义

函数极限的定义主要分为自变量趋于有限值 $(x\to x_0)$ 时的极限和自变量趋于无穷大时函数的极限 $(x\to\infty)$

[1]邻域与区间不同, 邻域属于区间的范畴. 但是邻域通常表示“一个局部位置”. 比如“点 x_0 的 δ”邻域, 可以理解为“点 x_0”的附近, 而区间是明确指出在实数系下的范围

自变量趋于有限值时的函数极限

定义 1.2.3: 当自变量趋于有限值时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ε**(不论它多么小)**[a], 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限, 记作:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{或} f(x)\to A(\text{当} x\to x_0)$$

其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时},\text{有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 在证明中, 这两句是白给, 直接写。后面的才是关键。

[a] ε 用于衡量 $|f(x)-A|$ 的值有多小

注 1.2.2

1. 在函数极限中 $x\to\infty$ 指的是 $|x|\to\infty$, 需要 x 趋于正无穷和负无穷, 但在数列中的 $n\to\infty$ 是 $n\to+\infty$
2. **函数的极限值只与邻域内的函数值有关, 而与该点的函数值无关**.

单侧极限

定义 1.2.4: 单侧极限的定义

若当 $x\to x_0^-$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 A, 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**, 记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A.$$

若当 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 A, 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**, 记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A$$

题目 2. 已知 $\lim_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$存在, 求$a$的值

解答. 由于存在 arctan 与 $|x|$ 函数, 则对于 0 点的极限值需要分左右进行计算.

$$\lim_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to 0^-}a\arctan\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}=-\frac{\pi}{2}a+\frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to 0^+}a\arctan\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}$$ 若极限存在,

则 $a=\dfrac{1-e^2}{\pi e}$

题目 2 的注记. 由于自变量趋向的双向性, 以下类型的函数因此需要进行特殊讨论:

- 形如 $f(x)=max\{h(x),g(x)\}$ 此类函数也需要注意在函数变化点的自变量取值问题
- $\lim_{x\to\infty}e^x$:$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\lim_{x\to-\infty}e^x=0$
- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$:$\lim_{x\to 0^+}=\dfrac{\sin x}{x}=1$,$\lim_{x\to 0^-}=\dfrac{\sin x}{-x}=-1$
- $\lim_{x\to\infty}\arctan x$:$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$
- $\lim_{x\to 0}[x]$:$\lim_{x\to 0^+}[x]=0,\lim_{x\to 0^-}[x]=-1$

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 1.2.5: 自变量趋于无穷大时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ε.(不论它多么小), 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限, 记作:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{或}f(x)\to A(\text{当}x\to x_0)$$

其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时},\text{有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 在证明中, 这两句是白给, 直接写。后面的才是关键。

需要注意的是趋向的值不同时,$\varepsilon-N$ 写法不同, 不能照抄. 其 $\varepsilon-N$ 的表达为如下表格:

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\|x-x_0\|<\delta$时, 即有 $f(x)>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\|f(x)\|>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $f(x)>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\|f(x)\|>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使当 $\mid x\mid>X$ 时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 $\mid x\mid>X$ 时, 即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 $\mid x\mid>X$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 |x|>X 时, 即有 $f(x)<-M.$
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使当 x>X 时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x>X$ 时, 即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x>X$时, 即有 $f(x)>M.$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 x>X 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$ 时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$ 时, 即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$时, 即有 $f(x)<-M.$

注 1.2.3: 上表的部分解释

- 以 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ 为例: 不管 $f(x)$ 与 A 的距离多近 ($\forall\varepsilon>0$), 总有 x 不断靠近 x_0, 使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$.
- 以 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 为例: 不管 M 多大, 总有当 $x>\infty$ 时, 使得 $|f(x)>M|$, 即满足 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

1.2.4　函数极限的性质

唯一性

定理 1.2.4

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 那么极限唯一

注 1.2.5: 关于唯一性的说明

- 对于 $x\to\infty$, 意味着 $x\to+\infty$ 且 $x\to-\infty$
- 对于 $x\to x_0$, 意味着 $x\to x_0^+$ 且 $x\to x_0^-$
  对于上述问题, 我们称为自变量取值的"双向性". 以下有一些常见的问题:
  - $\lim_{x\to\infty} e^x$ 不存在, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$ 不存在, $\lim_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在, $\lim_{x\to x_0}[x]$ 不存在.
  - 其不存在的原因均为分段函数分段点极限表达式不同, 需要分别求左右极限.

注 1.2.6: 极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A, \text{且} \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A^{a}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x), \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0(\text{无穷小量}\alpha(x)=0)^{b}$$

[a] 左右极限都存在且相等

[b] 对于此概念, 如果引入超实数系的解释应为 A 是 $f(x)$ 的标准实数部分, 而 $f(x)$ 的值是超实数系下的值, 因此其值应为 $f(x)=A+\alpha(x)$

注 1.2.7: 极限不存在的情况

- **函数在该点附近趋于无穷**
- 函数在该点的左右极限只存在一个, 或两者都存在但不相等
- 函数在该点附近不停地震荡
- 该点是函数无定义点的聚点

局部有界性

定理 1.2.8

若极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在[a], 则 $f(x)$ 在点 x_0 某去心邻域内有界.

[a] 对局部有界性的描述需要指明是在那个区间上

注 1.2.9: 局部有界性的性质

- 极限存在必有界, 有界函数极限不一定存在.
- 若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.
- **若 $f(x)$ 在 (a,b) 内为连续函数, 且 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必定有界.**
- 有界函数与有界函数的和, 差, 积仍为有界函数[a].

[a]商不是有界函数, 因为:$y_1=1, y_2=0, \dfrac{y_1}{y_2}=\infty$

题目 3. 在下列区间内, 函数 $f(x)=\dfrac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$ 有界的是:
A:(-2,1) B:(-1,0) C:(1,2) D:(2,3)

解答. 又题意可知, 函数的分段点为 $x=3,0,1$, 对上述三点求极限, 分析可得, 当 $x=3,1$ 时, 函数极限为 ∞, 因此函数在上述两点的极限不存在, 因此根据局部有界性的性质可得, 含这两个点的区间无界, 因此排除 A,C,D. 答案为 B.

局部保号性

定理 1.2.10

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$(或 $A<0$), 那么存在常数 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>0$($f(x)<0$)[a].
如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$), 而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 那么 $A\leqslant 0$ 或 $(A\leq 0)$[b].

[a]如果函数在 x_0 附近的极限值为正, 那么 x_0 附近的函数值为正
[b]如果函数在 x_0 附近的函数值 ≤ 0, 那么 x_0 此处的极限值 ≤ 0

对上述定理中, 为什么一个可以等于 0, 一个不能等于 0? 其解释如下: 如果第一个定理中 $A\leqslant 0, f(x)\leqslant 0$, 那么以函数 $f(x)=x^2$ 为例, 虽然 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, 但是邻域内的函数值都大于 0. 对于第二个定理中如果 $f(x)<0, A<0$, 那么以函数 $f(x)=-x^2$ 为例, 虽然邻域内的函数值都小于 0, 但是 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

注 1.2.11

由保号性可推出保序性: 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 则:

1. 若 $A>B\Rightarrow \exists\delta>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,$f(x)>\mathbf{g}(x)$.
2. 若 $\exists\delta>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,$f(x)\geqslant g(x)\Rightarrow A\geqslant B$.

题目 4. 局部保号性的证明:

证明. 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0$, 所以, 取 $\varepsilon = \dfrac{A}{2} > 0$, $\exists\delta > 0$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

$\square$

由上述证明可得如下推论

推论 1.2.12

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0 (A \neq 0)$, 那么就存在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$, 当 $x \in U^{\circ}(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)| > \dfrac{|A|}{2}$

函数极限与数列极限的关系 (海涅定理)

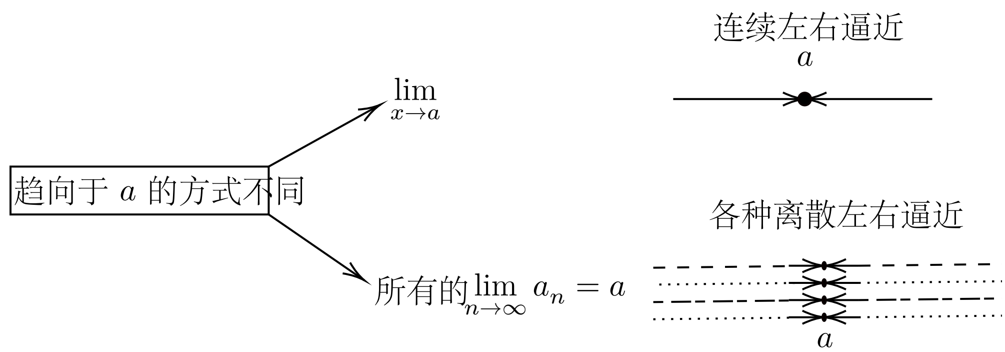
定理 1.2.13

设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内有定义, 则 $\lim_{x\to\ x_0} f(x) = A$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}\,(x_n \neq x_0)$, 极限 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ 存在.

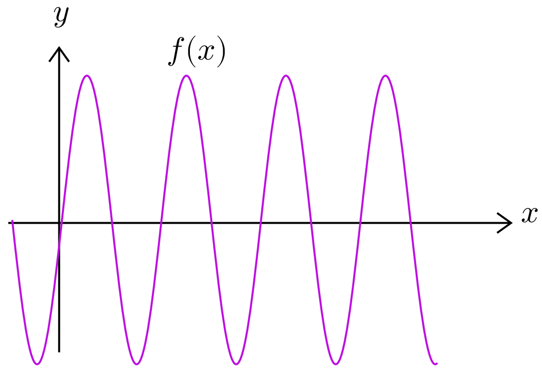
把这个定理简化一下, 主要意思就是

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{所有的} \lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \text{有} \lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$$

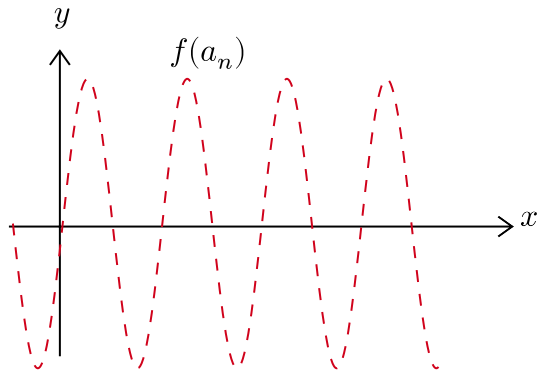
其不同之处在于是离散的趋近还是连续的趋近



除此之外,$f(x)$ 和 $f(a_n)$ 的函数图像如下所示

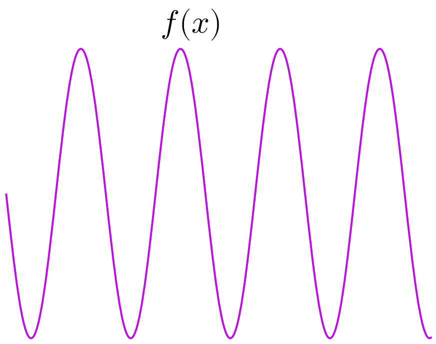


函数 $f(x)$

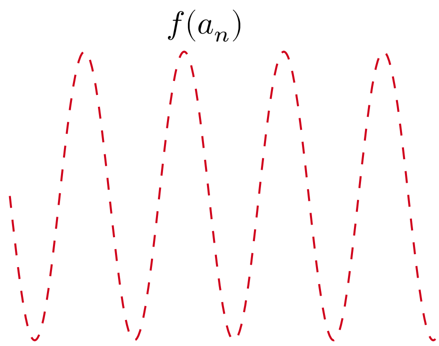


函数 $f(a_n)$

如上图所示 $f(a_n)$ 其实是 $f(x)$ 的抽样



用 $\varepsilon-\delta$ 求它的极限



用海涅定理求它的极限

需要注意的是, 是所有的数列（抽样）才能完全代表整体. 不能说我选了某个数列有极限就代表函数有极限.

总结:海涅定理表述了离散与连续、数列极限与函数极限的关系.

1.3　无穷小与无穷大

1.3.1　无穷小

定义 1.3.1: 无穷小的定义

如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的无穷小.

$f(x)$ **是可以本身为** 0 **或者无限趋近于零, 其中** 0 **可以作为无穷小唯一常数**.

注 1.3.1: 无穷小与函数极限的关系 (脱帽法)

$\lim_{x\to\cdot} f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$, 其中 $\lim_{x\to\cdot} f(x)$ 为超实数值, 其实数部分为 A, 函数 $f(x)$ 的函数值为 $A+\alpha$

1.3.2 无穷小的性质

1 有限个无穷小的和是无穷小[2]

证明. 设 α_1 和 α_2 为无穷小量。则 $0 \leqslant |\alpha_1+\alpha_2| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|$,$|\alpha_1|+|\alpha_2|$ 的极限为 0。证明完毕。 □

2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小[3]

证明. $|\alpha_1| \leqslant M$,α_2 是无穷小量。那么 $0 \leqslant |\alpha_1 \times \alpha_2| = |\alpha_1| \times |\alpha_2| \leqslant M \times |\alpha_2|$ 证明完毕。 □

3 有限个无穷小的乘积是无穷小[4]

1.3.3 无穷小的比阶

定义 1.3.2

- 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么就说 β 与 α 是同阶无穷小;
- 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$, 那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小[a];
- 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么就说 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$

[a]不是相等, 超实数系下没有加减运算, 只可以进行替换运算

前三个定义解释:$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$ 是指分子趋于 0 的速度比分母快,$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$ 是指分子趋于 0 的速度比分母慢,$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ 是指趋于 0 的速度一样.

同时需要注意的是, **并不是任意两个无穷小都可进行比阶的**. 例如, 当 $x \to 0$ 时,$x \sin \dfrac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小, 但是却不可以比阶, 也就是说既无高低阶之分, 也无同阶可言, 因为 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$ 不存在, 其值为 ∞ 和 0。

1.3.4 无穷小的运算

[5] 设 m, n 为无穷小, 则

[2]无穷个无穷小的和不一定是无穷小, 如 $\lim_{n\to\infty} = (\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} \cdots + \dfrac{1}{n+n}) = \ln 2$

[3]无界函数 × 无穷小量不一定是无穷小, 如 $\lim_{x\to\infty} x \times \dfrac{1}{x} = 1$

[4]这个地方虽然张宇老师给出了证明, 但是好像存在一定的争议性

[5]此处多用于泰勒公式的应用中, 会对上述高阶无穷小的运算提出要求

1. $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min\{m, n\}$
2. $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}), x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
3. $o(x^m) = o(kx^m) = k \cdot o(x^m), k \neq 0$

1.3.5 无穷大

定义 1.3.3: 无穷大的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于来一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大), 总存在正数 δ(或数 X), 只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)| > M$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$[a]) 时的无穷大.[b] 其 $\varepsilon - N$ 语言为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, 当 0 < |x - x_0| < \delta 时, 有 |f(x)| > M.$$

[a]等价于 $x \to -\infty$ 同时 $x \to +\infty$

[b]**无穷大一定无界，但无界不一定是无穷大量**。与无穷小相同, 都是一个极限过程, 因此无穷大也是一个极限, 所以无界不一定是无穷大量

题目 5. 证明 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$

解答. $\forall M > 0$ 令 $\delta = \dfrac{1}{4M} > 0$, 当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 即 $0 < |x-1| < \dfrac{1}{4M}$ 时,$|x-1| < \dfrac{1}{M}$, 所以 $\dfrac{1}{|x-1|} > M$ 这就证明了 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$

1.3.6 无穷大的比阶

- 当 $x \to +\infty$ 时,$\ln^a x \ll x^\beta \ll a^x$,其中$\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.[6]
- 当 $n \to \infty$ 时,$\ln^a n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$,其中$\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.

1.3.7 无穷大的性质

- 两个无穷大量的积仍未无穷大量
- 无穷大量与有界变量的和仍是无穷大量

[6]由洛必达公式证明

1.3.8　无穷大与无界变量的关系

无穷大量一定是无界变量, 但无界变量不一定是无穷大量.[7]

1.3.9　无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中, 若 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小; 若 $f(x)$ 是无穷小, 且 $f(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

1.4　函数极限的运算

1.4.1　极限的四则运算法则

利用极限的四则运算法则求极限

如果极限不存在, 那么极限属于超实数系的范畴, 在超实数系下不可以进行代数运算, 只可以进行替换运算。但是如果极限均存在, 那么可以进行代数计算。
若 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$, 那么

- $\lim[kf(x)\pm lg(x)]=k\lim f(x)\pm l\lim g(x)=kA\pm lB$, 其中 k,l 为常数
- $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)\equiv A\cdot B$, 特别的, 若 $\lim f(x)$ 存在,n 为正整数, 则 $\lim[f(x)]^n=\left[\lim f(x)\right]^n$
- $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

定义 1.4.1: 复合函数极限运算法则

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成,$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义, 若 $\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0$,$\lim_{u\to u_0}f(u)=A$, 且存在 $\delta_0>0$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时, 有 $g(x)\neq u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

题目 6. (1) 证明:$\lim f(x)=A\neq 0\Rightarrow\lim f(x)g(x)=A\lim g(x)$
(2) 证明:$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在,$\lim g(x)=0\Rightarrow\lim f(x)=0$

---

[7] 如数列 $x_n=\begin{cases}n, n \text{ 为奇数}\\ 0, n \text{ 为偶数}\end{cases}$, 是无界变量, 但不是无穷大. 无穷大是一个极限

证明. (1)$\lim f(x) = \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim g(x) = A \cdot 0 = 0.$

(2) 由于 $g(x) = \dfrac{f(x)}{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$, 则 $\lim g(x) = \lim \dfrac{f(x)}{\dfrac{f(x)}{g(x)}} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}} = \dfrac{0}{A} = 0$ □

题目 6 的注记. 此题的两个证明是常用结论

注 1.4.1: 常用结论

- 存在 ± 不存在 = 不存在 (只有这一个是不存在, 其余都是不一定或者存在)
- 不存在 ± 不存在 = 不一定[a]
- 存在 ×(÷) 不存在 = 不一定
- 不存在 ×(÷) 不存在 = 不一定

[a]反例: $\lim_{x\to 0}(\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}) = 0$

题目 7. 求 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$. 极限

解答. 由于该极限的分子 e^x 的极限为无穷大, 无穷大属于极限中的不存在情况, 因此不可以使用极限的四则运算法则1.4.1, 也不可以对分母使用两个重要无穷小进行化简. 只能使用等价变换进行求解. 即 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{(1+\dfrac{1}{x})x^2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$ 对 $\ln(1+\dfrac{1}{x})$ 进行泰勒展开, 化简为 $\lim_{x\to+\infty} e^{x-x+\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

题目 8. 已知 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$, 求 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{f(x)}{x}}{f'(x)}$

解答. 如果想把分子写 $x \to 0$ 时的导数形式, 然后进行计算, 即 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{f'(0)} = \dfrac{f'(0)}{f'(0)} = 1$ 进行运算, 则不满足极限四则运算法则1.4.1, 因为其分母为 0, 违背了极限的四则运算法则, 因此不可这样计算, 需要对其进行恒等变形计算. 即 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}} = \dfrac{1}{f''(0)} \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{x^2} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \dfrac{1}{f''(0)} \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{2}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x} = \dfrac{1}{f''(0)}\dfrac{1}{2}f''(0) = \dfrac{1}{2}$

题目 9. 求 $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)$

解答. $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^x x})=\frac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{x^2\times\tan^2 x}=\frac{2x\times\frac{1}{3}x^3}{x^4}=\frac{2}{3}$

题目 9 的注记. 本题的有另一个解法, 但是相较上面的解法相比有些复杂, 但是记录一个常见的错误, 即什么时候可以用等价无穷小的问题, 其写法为:

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)=(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x})\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\\
&=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^4})
\end{aligned}
$$

此处有一个常见的错误, 就是能不能把 $\cos^2 x$ 代换为 1, 其实是不能的, 即使最后答案正确, 此时 $x\to 0$ 时, 分母也趋于 0, 如果进行替换, 则违背了极限的运算法则, 因此不能进行替换

$$
\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)(\sin x+x\cos x)}{x^4}\xlongequal{\text{泰勒公式}}\frac{2}{3}
$$

题目 10. **若** $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$**, 则** $\lim f(x)=0,\lim g(x)=0$

证明. $g(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$。求极限得 $\lim g(x)=\lim\dfrac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim\frac{f(x)}{g(x)}}=0$. 证明完毕 □

题目 10 的注记. 此证明为结论, 经常使用

1.4.2 泰勒公式

泰勒公式的目的是提高精确度, 用更高次的多项式来逼近函数

带拉格朗日余项的 n 阶泰勒展开式

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有 (n +1) 阶导数, 那么对任一 $x\in U(x_0)$, 有

$$
f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}
$$

带佩亚诺余项的 n 阶泰勒展开式

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 **处具有** n **阶导数，那么存在** x_0 **的一个邻域，对于该邻域内的任一** x, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$

带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

对带有佩亚诺余项的泰勒公式取 $x_0=0$, 则可以得到带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

当 $x\to 0$ 时, 由麦克劳林公式可得, 有以下结论

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$
$\arcsin x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$arccosx=\frac{\pi}{2}-arcsinx=\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$
$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$	$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$
$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$(1+x)^a=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$
$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$	$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$
$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots$	$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

注 1.4.2: 泰勒公式应用时的展开原则

- $\frac{A}{B}$ 型, 适用于" 上下同阶" 原则: 具体来说, 如果分母或者分子是 x 的 k 次幂, 则应把分子或分母展开到 x 的 k 次幂。如:$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$, 此处 $\ln(1+x)$ 应展开为 $x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$
- $A-B$ 型, 适用" 幂次最低" 原则: 将 A,B 分别展开到他们系数不相等的 x 的最低次幂为止。如: 已知当 $x\to 0$ 时,$\cos x-e^{\frac{x^2}{2}}$ 与 ax^b 为等价无穷小, 求 a,b. 则应展开为 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)$.

注 1.4.3: 泰勒公式的解题技巧

1. 泰勒公式构建了函数与其高阶导之间的联系, 因此看见高阶导数, 要条件反射的想到泰勒公式
2. 奇函数的泰勒展式只有奇数次幂, 偶函数的泰勒展式只有偶数次幂[a]
3. 极限当中, 用佩亚诺余项 $O(x$ 的 n 次幂), 证明题中, 用拉格朗日余项, 找提供信息最多的点作为展开点
4. 等价无穷小的本质是泰勒的低精度形式, 加减法不建议使用等价无穷小, 建议直接泰勒
5. 加项减项的本质也是泰勒[b]

[a]如 $\sin x$ 和 $\cos x$

[b]如 $\ln(x)=\ln(1+x-1)\sim x-1$

题目 11. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)-x}{x^2}$

解答. 对等式进行泰勒展开即:

$$\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2}=\frac{(x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

题目 12. $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导且满足 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)\sin x+\ln(1+x)}{x^3}=0$, 求 $f(0),f'(0),f''(0)$

解答. 对原式中 $f(0)$ 和 $\sin x$ 和 $\ln(1+x)$ 各项进行泰勒展开得:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x+\ln(1+x)}{x^3}=0\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2)(x-\frac{1}{6}x^3)-(x-\frac{1}{6}x^3)+(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3})}{x^3}=0\\
&=\frac{(f(0)+1)x+(f''(0)-\frac{1}{2})x^2+(-\frac{1}{6}f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{1}{3})x^3+o(x^3)}{x^3}=0.
\end{aligned}$$

可以得到的是, 分子的极限一定为 0, 那么 $\begin{cases} f(0)+1=0\\ f'(0)-\dfrac{1}{2}=0\\ -\dfrac{1}{6}f(0)+\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{1}{3}=0\end{cases}\implies\begin{cases} f(0)=-1\\ f'(0)=\dfrac{1}{2}\\ f''(0)=-1\end{cases}$

题目 12 的注记. 看见各阶导数应想到泰勒公式

题目 13. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续, 且 $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x})=2$, 试求 $f(0), f'(0)$

解答. 对原式进行通分然后对 $\sin x$ 进行泰勒展开:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^2}=2\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x+xf(x)+o(x^2)}{x^2}=2\end{aligned}$$

根据函数极限与无穷小的关系1.3.1可知,$1+f(x)=2x+o(x)$,$f(x)=2x-1+o(x)$ 因为函数在 $x=0$ 上连续, 因此 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$,$f(x)=2x-1+o(x)$ 的表达式是 $x\to 0$ 时的表达式, 将 $x=0$ 带入可得 $f(0)=-1$, 使用导数定义求得 $f(x)$ 在点 0 处的导数, 即 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{2x+o(x)}{x}=2$

题目 13 的注记. 看见此类问题, 第一步应先通分, 然后将具体函数的泰勒进行展开 (因为此题中的条件是连续而不是可导, 如果是可导的话可以全部进行展开), 然后把 $f(x)$ 的表达式给求出来

题目 14. 设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$, 则
$(A)a=1, b=\frac{1}{2}$ $(B)a=1.b=\frac{1}{2}$ $(C)a=0, b=-\frac{1}{2}$ $(D)a=0, b=\frac{1}{2}$

解答. $f(x)=\sec x=\frac{1}{\cos x}$, 该函数为偶函数, 因此泰勒展开只有偶数次幂, 那么 $a=0$, 该函数一定大于 0, 因此 $b\geq 0$, 排除 C,A,B.

题目 14 的注记. 本题也可以将 $\sec x$ 展开, 但是较为麻烦, 可以采用上述的方法进行运算.

题目 15. 设函数 $f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$, 则
(A)$a=1, b=0, c=-\frac{7}{6}$ (B)$a=1, b=0, c=\frac{7}{6}$
(C)$a=-1, b=-1, c=-\frac{7}{6}$ (D)$a=-1, b=-1, c=\frac{7}{6}$

解答. 法 1: 对分子进行泰勒展开, 然后使用整式除法

$$\begin{array}{r|l}
 & x-\frac{7}{6}x^3\\ \hline
1+x^2 & x-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5\\ \cline{2-2}
 & x+x^3\\ \cline{2-2}
 & -\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5\\ \cline{2-2}
 & -\frac{7}{6}x^3-\frac{7}{6}x^5
\end{array}$$

法 2: 对整式进行泰勒展开与等价无穷小替换 $f(x)=(x-\frac{x^3}{6})(1-x^2)=x-\frac{7}{6}x^3$

法 3: 对整式进行泰勒展开计算可得 $x-\frac{7}{6}x^3$

题目 15 的注记. 遇见此类问题, 解题方法的优先级为长除法, 利用等价替换, 使用定义 (利用泰勒公式直接所有项都展开)

1.4.3 洛必达法则

定义 1.4.2

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0(\infty)$
- $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或∞)

则 $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$

需要注意的是使用过洛必达法则之后的极限必须存在, 即 $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 必须存在.

题目 16. 求 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \times \sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$

解答. 该函数也是 $\dfrac{0}{0}$ 型, 但是如果使用洛必达法则, 则 $2x \times \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$, 极限显然不存在, 因此不可以使用洛必达法则。则正确求法为 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \times \sin\dfrac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \times \sin\dfrac{1}{x} = 0.$

注 1.4.4: 洛必达可以洛到几阶

- n 阶导连续, 则最多可以洛到 n 阶.
- n 阶导存在/n 阶邻域内可导, 则最多能洛到 $n-1$ 阶.
- 实际上,n 阶等连续, 不一定能够洛到 n 阶[a]. 结论如下:
  $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 到底能用多少次洛必达法则假设 m 和 n 均为正整数，并且 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0$.
  1. 如果 $f(x)$ 在 x_0 的 n 阶导数连续，则:
     (a) 若 $m\leqslant n$, 则 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 可以用 m 次洛必达 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f^{(m)}(x)}{m!}=\dfrac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$
     (b) 若 $m>n$, 则 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 则一次都不能用洛必达.
  2. 如果 $f(x)$ 在 x_0 有 n 阶导数 (没说 n 阶导函数连续), 则:
     (a) 若 $m\leqslant n-1$, 则 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 可以用 m 次洛必达 $\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(m)}(x)}{m!}=\dfrac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$
     (b) 若 $m=n$, 则 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x^m}$ 可以用 $m-1$ 次洛必达出现 $\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(m-1)}(x)}{m!(x-x_0)}$, 然后利用导数定义 $f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$ 进一步计算
     (c) 若 $m\geq n+1$, 则 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 一次都不能用洛必达

[a]但是考研中这点没有难为过人, 因此可以粗略的认为上述两条是成立的

题目 17. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 并且 $f(0)$=0, $f'(0)$=0, $f''(0)$=0, 并且 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$, 问 $\dfrac{f(x)}{x^3}$ 是否可以进行洛必达法则? 如果可以请求出 $f'''(0)$; 如果不存在, 请说明理由.

解答. 看到此题的二阶导数连续, 一般都认为可以进行洛必达, 但是其实该方程式一次洛必达都不可以进行, 假设函数 $f(x)$ 表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{28}{9}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+x^3, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$$

那么

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{28}{9}x^{\frac{19}{9}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{3}x^{\frac{16}{9}}\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+3x^2, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$$

二阶导为

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{532}{82}x^{\frac{10}{9}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{44}{27}x^{\frac{7}{9}}\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{9}x^{\frac{4}{9}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+6x, x\neq 0\\0, x=0\end{cases}$$

可知函数 $f'(0)=0$, 且 $f''(0)=0$, 该函数完全满足题意, 但是对 $\frac{f(x)}{x^3}$ 使用第一次洛必达时, 为

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{28}{9}x^{\frac{19}{9}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{3}x^{\frac{16}{9}}\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+3x^2}{3x^2}$$

洛必达之后的极限显然不存在, 因此该情况下不可以使用洛必达法则.

题目 17 的注记. 本题需要注意, 不是所有的条件下都可以进行洛必达法则, 由此可以抽象出来一个样例:

$$f(x)=\begin{cases}x^a\sin\frac{1}{\sqrt[b]{x}}+x^c, x\neq 0\\0, x=0\end{cases}$$

题目 18. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内可导, 且 $\lim_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=2$, 试求 $f(0), f'(0)$ 以及 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)+e^x}$

解答. 本题中未说明 $f(x)$ 在邻域内连续可导, 只说明一阶导存在, 因此一阶都不可以进行洛必达法则, 但是可以使用泰勒公式对上述式子进行泰勒展开, 因此上述式子的解法为对原式进行通分然后对 $\sin x$ 进行泰勒展开:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^2}=2\\=&\lim_{x\to 0}\frac{x+xf(x)+o(x^2)}{x^2}=2\end{aligned}$$

根据函数极限与无穷小的关系1.3.1可知,$1+f(x)=2x+o(x)$,$f(x)=2x-1+o(x)$ 因为函数在 $x=0$ 上连续, 因此 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$,$f(x)=2x-1+o(x)$ 的表达式是 $x\to 0$ 时的表达式, 将 $x=0$ 带入可得 $f(0)=-1$, 使用导数定义求得 $f(x)$ 在点 0 处的导数, 即 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{2x+o(x)}{x}=2$, 然后带入极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)+e^x}=\dfrac{x}{-1+2x+e^x}=\dfrac{1}{3}$

题目 18 的注记. 看见此类问题, 第一步应先通分, 然后将具体函数的泰勒进行展开 (因为此题中的条件是连续而不是可导, 如果是可导的话可以全部进行展开), 然后把 $f(x)$ 的表达式给求出来

题目 19. 求极限 $\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-e^{\pi})$

解答. (2) 提后项:$\lim_{x\to+\infty}e^{\pi}(e^{\arctan\frac{\pi}{2}}-1)=\lim_{x\to+\infty}e^{\pi}\times\arctan\frac{-\pi x}{2}=-e^{\pi}$

(3) 直接洛:$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\pi+\arctan x}{2}}-e^{\pi}}{\frac{1}{x}}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\times\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-e^{\pi}$

题目 19 的注记. 无穷大乘以无穷小, 可以构造无穷大比无穷大, 或无穷小比无穷小, 之后进行洛必达。方法多了, 往往会忽视洛必达, 但有时洛必达反而会简单一些。

题目 20. 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''+2y'+y=e^{3x}$ 的解, 且满足 $y(0)=y'(0)=0$, 则当 $x\to 0$ 时, 与 $y(x)$ 为等价无穷小的是 ()
(A).$\sin x^2$ (B).$\sin x$ (C).$\ln(1+x^2)$ (D). $\ln\sqrt{1+x^2}$

解答. 等价无穷小具有传递性, 因此 $\sin x^2\sim x^2$,$\sin x\sim x$,$\ln(1+x^2)\sim x^2$,$\ln(\sqrt{1+x^2})\sim\dfrac{1}{2}x^2$. 若与 $y(x)$ 为等价无穷小, 那么 $\lim_{x\to 0}\dfrac{y(x)}{f(x)}=1$。对 $y(x)$ 进行泰勒展开 $y(x)=y(0)+y'(0)x+\dfrac{y''(0)}{2}x^2$. 当 $x=0$ 时, 有 $y''(0)=1$, 易知一阶导是连续的, 对函数形式进行分析, 可知函数在二阶导也是连续的, 那么就可以展开到二阶, 那么 $y(x)=\dfrac{1}{2}x^2$。
除此之外, 还可以这样解决, 已知二阶导连续, 那么对 $\dfrac{y(x)}{A/B/C/D}$ 进行洛必达可知 D 选项正确。

1.4.4 等价替代求极限

利用基本极限求极限

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim\limits_{\square\to\infty}(1+|\square|)^{\frac{1}{\square}}=e^{|\square|\frac{1}{\square}} & \lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 & \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0) \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a & \end{array}}$$

等价无穷小求极限

关于等价无穷小, 有以下两个定理

定义 1.4.3: 等价无穷小的充要条件

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha)$$

定义 1.4.4: 等价无穷小的替换准则

设 $\alpha\sim\tilde{\alpha}$,$\beta\sim\tilde{\beta}$, 且 $\lim\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在, 则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 但是需要遵循以下代换原则[a]

- 乘除关系可以换: 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$
- 加减关系一定条件下可以换[b]
  - 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq 1$, 则 $\alpha-\beta\sim\alpha_1-\beta_1$
  - 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq -1$, 则 $\alpha+\beta\sim\alpha_1+\beta_1$

加减关系代换准则证明如下:

证明.

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\beta_1}=\lim\frac{\beta(\frac{\alpha}{\beta}-1)}{\beta_1(\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1)}=1$$

□

[a] 其实没有什么替换原则, 本质其实是因为超实数系下不能进行实数运算, 只能进行替换运算

[b] 这样的形式其实不经常用, 看见加减最好使用泰勒公式进行替换运算

以下为常用等价无穷小

当 $x\to 0$ 时, 有

1.
$$\boxed{\begin{aligned}&x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\\&\quad\sim\ln(1+x)\\&\quad\sim e^x-1\end{aligned}}$$

2.
$$\boxed{\begin{aligned}&(1+x)^a\sim 1+ax\\&a^x-1\sim x\ln a\\&1-\cos^\alpha x\sim\frac{\alpha}{2}x^2\end{aligned}}$$

3. 上述结论的推广当 $x\to 0$ 时, 若 $(1+x)^a-1\sim ax$, 则 $\alpha(x)\to 0,\alpha(x)\beta(x)\to 0$, 那么 $[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}-1\sim\alpha(x)\beta(x)$

4.

$$\boxed{\frac{1}{2}x^2 \sim \sec x - 1 \sim x - \ln(1+x)}$$

5.

$$\boxed{\frac{1}{6}x^3 \sim x - \sin \sim \arcsin x - x}$$

6.

$$\boxed{\frac{1}{3}x^3 \sim x - \arctan x \sim \tan x - x}$$

7. $x \to 1$ 时,$\ln x \sim x - 1$, 因为 $\ln(1 + x - 1) \sim x - 1$

8. 当 $A \to 0, B \to 0$ 时,$e^A - e^B \sim A - B$, 因为 $e^B(e^{A-B} - 1) \sim A - B$

题目 21. 假设 $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{1-\cos x}$ 存在

解答. 若 $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{1-\cos x}$ 存在, 那么 $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}(\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} \times \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{1-\cos x}) \xlongequal{\text{等价无穷小}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}$

题目 21 的注记. 整体的乘除法本质是构造恒等变形

题目 22. 求极限 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2 \sin\frac{1}{x})}{x}$

解答. 由常用不等式1.5.2的 $x \to 0, |\sin x| \leq |x|$, 那么 $|\dfrac{\sin(x^2 \sin\frac{1}{x})}{x}| \leq |\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x}|$, 由夹逼准则得:$0 \leqslant \lim_{x\to 0} |\dfrac{\sin(x^2 \sin\frac{1}{x})}{x}| \leqslant \lim_{x\to 0} |\dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x}|$ 左右极限都为 0, 因此 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2 \sin\frac{1}{x})}{x}$ 极限为 0

题目 22 的注记. 等价无穷小替换的本质是构造恒等变形.

本题有一个常见的错误做法, 就是直接把 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2 \sin\frac{1}{x})}{x}$ 进行等价无穷小替代, 写为 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x}$, 但是这是错误的, 如果这样写, 那么 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2 \sin\frac{1}{x})}{x^2 \sin\frac{1}{x}} \times \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x}$, 在

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x^2\sin\frac{1}{x}}$ 的分母中，存在 $x=\dfrac{1}{n\pi}$ 的间断点，根据极限定义，极限如果存在，那么去心邻域一定要有定义, 那这样写就违背了极限的存在准则, 因此极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$ 不存在, 不可以这样写.

题目 23. 设 $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0$, 则下列命题中正确的个数为
(1)$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$
(2)$\lim_{x\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.
(3)若$f'(x_0)=A$, 则 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+\varphi(x))-f(x_0)}{\varphi(x)}=A$

解答. 这三个都是错的, 因为 $\varphi(x)$ 在分母上, 都可能为 0
题目 23 的注记. 抽象函数等价的条件是 $f(x)\to 0$ **只有** $f(x)\neq 0$**, 才能将** $\sin(f(x))\sim f(x)$, 比如函数 $\varphi(x)=x\times\sin\dfrac{1}{x}$, 其极限为 0, 但是又存在 $x=\dfrac{1}{n\pi}$ 的无定义点.

积分等价替换求极限

定义 1.4.5: 积分等价替换法则

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, 则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

定义 1.4.6: 变限积分求导公式

设 $F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)\mathrm{d}t$, 其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可导函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的值域在 $[a,b]$ 上，则在函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的公共定义域上, 有

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)\mathrm{d}t\right]=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

题目 24. 求 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\,\mathrm{e}^{x^2}+x^2}$ 导数

解答. 看见变上限积分类型计算题应首先想到洛必达法则，对原式进行进行洛必达法则得:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}+x^2\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+2x^2\mathrm{e}^{x^2}+2x} \\
&= \frac{1+x^2}{1+2x^2+\frac{2x}{e^{x^2}}}
\end{aligned}
$$

对极限取大头可得

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{1+2x^2+\frac{2x}{e^{x^2}}}=\frac{1}{2}
$$

题目 24 的注记. 在极限中, 处理变上限积分的最好办法是洛必达。能洛则洛, 不能洛的话就换元之后再洛。

题目 25. 若 $\lim_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}dt}{bx-\sin x}=1$, 求 a,b, 其中 a,b 为正数

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{b-\cos x} \\
&= \frac{1}{a}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^2}{b-\cos x}
\end{aligned}
$$

若分子趋近于零, 但是该等式的极限为 1, 那么该分母的极限一定趋近于 0, 那么 b 一定为 1

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{a}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} \\
a &= 2
\end{aligned}
$$

综上所述 $a=2,b=1$

题目 25 的注记. 对于本题, 还可以可被积函数进行等价运算1.4.4, 但是这不是通法, 因此应当对此类问题首先进行洛必达. 以下为使用被积函数等价运算计算过程: 由于当 $t\to0$ 时,$\frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\sim\frac{t^2}{a^2}$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\dfrac{t^2}{a}\mathrm{d}t}{bx-\sin x} \\
&= \frac{1}{3a}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{bx-\sin x}\overset{b\neq1}{=\!=\!=}\frac{1}{3a}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{bx-x}=0
\end{aligned}
$$

等式矛盾, 因此 $b=1$, 对上式进行泰勒展开得:

$$1=\frac{1}{3a}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=\frac{1}{3a}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{x^3}{6}}=\frac{2}{a}$$

综上所述 $a=2,b=1$

题目 26. 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^2-\sin^2 x}$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{(x-\sin x)(x+\sin x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{2x\times\frac{1}{6}x^3}\\&=\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=1\end{aligned}$$

题目 26 的注记. 看见形如 $x^2-\sin x^2$ 的形式, 就应当想到 $(x+\sin x)(x-\sin x)$ 的展开, 然后可以通过泰勒展开进行计算

题目 27. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$, 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}$

解答. 由于分母有两个变量, 因此不好进行洛必达, 那么此时就要对分母进行换元, 换元过程如下: 令 $(x-t)=u$, 对等式两边求微分得:$d(-t)=du$.
首先, 对分子展开, 对分母换元得:

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

对原式进行进行洛必达法则得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}\end{aligned}$$

如果此时还要进行洛必达, 那么分母则会出现 $f'(x)$, 那么最后是不可计算的, 因此此时应进行积分中值定理, 则 $\int_0^x f(t)dt = xf(\varepsilon)(\varepsilon \in (0,x))$[8]

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0} \frac{xf(c)}{xf(c)+xf(x)} \\
&= \frac{f(0)}{f(0)+f(0)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

题目 27 的注记. 如果出现两个变量则换元之后再洛, 如果实在洛不了的话, 再考虑使用积分中值定理。积分中值定理和拉格朗日中值定理中出现的 ε, 最后一步想说明最终结果时, 严格来说需要夹逼准则。(卷面上可以不体现出来, 但脑子里必须把这些事情想明白)
本题也可以积分替换进行计算, 但是不推荐, 写法如下:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}. \\
&= 1 - \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t} \\
&= 1 - \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(0)}{2}x^2}{f(0)\,x^2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

1.4.5 抓大头和抓小头

本质是同时处以最高阶/最低阶

$$
\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} 0\ , \text{当} n > m \\ \dfrac{a_0}{b_0}, \text{当} n = m \\ \infty\ , \text{当} n < m \end{cases}
$$

还有一个重要的等价为 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{!n} \sim e^{-1} \times n$ 该等价由斯特林公式 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n} = 1$ 而来, 又可写为 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$

题目 28. 求 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 + x^2 + 3x + 10}{3x^3 + 2x + 7}$

[8]这个地方一定要可以夹起来, 如果夹起来的极限不一样, 那么则不可以使用积分中值定理

解答. 对等式上下同除以 x^3 得 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{10}{x^3}}{3+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}=\dfrac{4}{3}$

题目 29. 求 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+2x^2+3x^4}{2x+4x^3+x^5}$

解答. 上下同除以 x 得 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+2x+3x^3}{2+4x^2+x^4}=\dfrac{1}{2}$

1.4.6 利用函数和函数极限的性质求极限

夹逼准则

定义 1.4.7: 函数极限夹逼准则

如果

- 当 $x\in U^{\circ}(x_0,r)$(或 $|x|>M$) 时
$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$
- $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} g(x)=A, \lim_{x\to x_0(x\to\infty)} h(x)=A$

那么 $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} f(x)$ 存在, 且等于 A.

- 夹逼准则处主要通过放缩来求极限
- 常用的结论有: 若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+...+a_m^n}$, 其中 $a_i>0(i=1,2,3,...,m)$, 令 $\max a_i=a$, 则 $\sqrt[n]{a^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{ma^n}$,
$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a, \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m\cdot a^n}=a$, 则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a$

单调有界准则

定义 1.4.8: 函数的单调有界准则

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 一定存在

幂指函数求极限

一般主要是进行恒等变换, 即 $a^b=e^{b\ln a}$. 如果两个函数的指数相同, 则可以提后项/前项
除此之外, 还有一个常用的结论:对于 $\forall a,b>0$ 均有:$\lim_{x\to 0^+} x^a(\ln x)^b=0$, 证明如下:

证明.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0^+} x^a \cdot \ln^b x \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^b x}{x^{-a}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{b\ln^{b-1} x \cdot \frac{1}{x}}{-ax^{-a-1}}
\end{aligned}$$

没洛一次, 分子次数-1. 分母次数不变, 一直洛下去, 分子次数要么洛到 0(即 $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{c}{x^{-a}} = \lim_{x\to o^+} cx^a = 0$), 要么洛成负数 ($\lim_{x\to 0^+} c\frac{\ln^m x}{x^{-a}} = 0$), 最终结果都是 0 □

对数函数性质求极限

1.4.7 拉格朗日中值定理求极限

如果两个函数的形式一样, 那么可以使用拉格朗日中值定理进行计算, 但是处理之后的 ε 需要可以使用夹逼准则.

题目 30. $\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\right) (a > 0)$

解答. 该题存在相近的函数形式, 使用拉格朗日中值定理进行解析 $a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} = a^{\frac{1}{\varepsilon}} \ln a \frac{1}{\varepsilon^2}, \varepsilon \in (x, x+1)$

$$\text{原式} = x^2 a^{\frac{1}{\varepsilon}} \ln a \frac{1}{\varepsilon^2}$$

当 $\varepsilon \to x+1$ 时, 原式的极限为 $x^2 a^{\frac{1}{x+1}} \ln a \frac{1}{(x+1)^2} = \ln a$
当 $\varepsilon \to x$ 时, 原式的极限为 $x^2 a^{\frac{1}{x}} \ln a \frac{1}{x^2} = \ln a$
综上, 函数极限为 $\ln a$

题目 31. $\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1}\right) (a > 0)$

解答. 该题存在相近的函数形式, 使用拉格朗日中值定理进行解析 $\arctan \dfrac{a}{n} - \arctan \dfrac{a}{a+1} = -\dfrac{a}{\varepsilon^2 + a^2}$

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty} n^2 (-\frac{a}{\varepsilon^2 + a^2}), (\varepsilon \in (n, n+1))$$

当 $\varepsilon \to n+1$ 时, 原式的极限为 $\lim_{n\to\infty} n^2(-\frac{a}{(n+1)^2+a^2}) = a$

当 $\varepsilon \to n$ 时, 原式的极限为 $\lim_{n\to\infty} n^2(-\frac{a}{(n)^2+a^2}) = a$

综上, 函数极限为 a

题目 32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x)-\cos x}{x^2}$

解答. 对分子进行泰勒展开得:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1-\frac{4}{2}x^2-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

题目 32 的注记. 本题看似可以存在两个形式相同的函数形式, 但是如果对其使用拉格朗日中值定理解析, 则 $\sin\varepsilon, \varepsilon \in (x, 2x)$, 此时 $\sin\varepsilon$ 的极限不可以通过夹逼准则得到, 因此不可以使用这种方法, 只可以使用泰勒展开.

1.4.8 七种未定式的计算

主要有以下类型 $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty, \infty^0, 1^\infty$

形如 $\dfrac{0}{0}$,$\dfrac{\infty}{\infty}$,$0\times\infty$

$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0\times\infty$ 可以直接计算或者简单转换可以直接计算.

形如 $\infty-\infty$

$\infty-\infty$ 可以通过取倒数或者取对数进行计算

题目 33. $\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$

解答. 原式 $\overset{\text{令}u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}^u-1-u}{u^2} = \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}^u-1}{2u} = \dfrac{1}{2}$

形如 $\infty^0, 0^0$

∞^0 与 0^0 通常使用$u^v = e^{v\ln u}$来计算

题目 34. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的自然数.

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)}{x}} \qquad \text{(洛必达法则)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{n}}{\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}\\
&= \frac{1+2+\cdots+n}{1+1+\cdots+1}\\
\text{原式} &= e^{\frac{n+1}{2}}
\end{aligned}
$$

形如 1^∞

1^∞ 通常使用$\lim u^v=e^{\lim(u-1)v}$来计算, 需要知道的是 1^∞ 可以化为第二个重要极限.

题目 35. $\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+x}{(x-a)(x-b)}\right]^x$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-a}\right)^x\times\left(\frac{x+1}{x-b}\right)^x\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^x\times\left(1+\frac{1-b}{x+b}\right)^x\\
&= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x-a}}\times e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(1-b)x}{x+b}}\\
&= e^{a+1-b}
\end{aligned}
$$

题目 36. $\lim_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}}{3\sqrt{n}}\right]^n$，其中$a>0,b>0,c>0$.

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \dfrac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}}{3\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{a}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{b}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{c}{n}}}{3}}{\dfrac{1}{n}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln \dfrac{\sqrt{1+ax}+\sqrt{1+bx}+\sqrt{1+cx}+3-3}{3}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+ax}+\sqrt{1+bx}+\sqrt{1+cx}-3}{3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{a}{2\sqrt{1+ax}}+\dfrac{b}{2\sqrt{1+bx}}+\dfrac{c}{2\sqrt{1+cx}}}{3} \\
&= \frac{a+b+c}{6}
\end{aligned}
$$

综上所述, 答案为 $e^{\dfrac{a+b+c}{6}}$

题目 37. 求极限 $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= lim_{x\to 0^+} \frac{x^x(1-(\dfrac{\sin x}{x})^x)}{x^3} \\
&= lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{x\ln\dfrac{\sin x}{x}}}{x^3} (\text{当 x 趋于 0 的时候} x^x, \text{趋于 1}) \\
&= lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln\dfrac{\sin}{x}}{x^2} (\text{此处不可以用等价无穷小}) \\
&= lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\dfrac{\sin x - x}{x})}{x^2} \\
&= lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

综上所述, 答案为 $\dfrac{1}{6}$

题目 38. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$, 其中$a_i>0, i=1,2,\cdots,n$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a'_1+a'_2+\cdots+a'_n-n}\cdot\frac{a'_1+a'_1+\cdots+a'_n-n}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x} = \ln(a_1a_2\cdots a_n) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a'_1+a'_2+\cdots+a'_n-n}} = \mathrm{e}
\end{aligned}
$$

综上所述, 答案为 $a_1a_2a_3a_4 \ldots a_n$

1.5 数列极限的运算

1.5.1 数列极限的运算法则

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则

- $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$
- 若 $b \neq 0, y_n \neq 0$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

上述运算规则可推广至有限个数列的情况

1.5.2 夹逼准则

定理 1.5.1: 数列极限夹逼准则

如果数列 $\{|x_n|\}, \{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

- 从某项开始, 即 $\exists n_0 \in N_+$(即$n\to\infty$), 当 $n > n_0$ 时, 有

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

- $\lim_{n\to\infty} y_n = a, \lim_{n\to\infty} z_n = a$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

以下为放缩的常用方法

- 利用简单放大与缩小

$$
\begin{cases}
n \times u_{\min} \leqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant n \times u_{\max}, \\
\text{当}u_i \geqslant 0\text{时},1 \times u_{\max} \leqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant n \times u_{\max}.
\end{cases}
$$

- 利用如下重要不等式
  1. 设 a, b 为实数, 则 $|a+b| \le |a|+|b|;| \ |a|-|b| \ | \leqslant |a-b|$ [9]
  2. $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a,b>0)$[10]
  3. $\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} (a,b,c>0)$
  4. 设$a \ge b \ge 0$,则$\begin{cases} 当n \ge 0 \text{ 时}, a^n \ge b^n, \\ 当n \leqslant 0 \text{ 时}, a^n \leqslant b^n. \end{cases}$
  5. 若$0<a<x<b, 0<c<y<d$,则$\frac{c}{b}<\frac{y}{x}<\frac{d}{a}$.[11]
  6. $\sin x < x < \tan x \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$
  7. $\sin x < x (x>0)$
  8. 当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时,$x<\tan x<\frac{4}{\pi}x$
  9. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$\sin x > \frac{2}{\pi}x$
  10. $\arctan x \leqslant x \leqslant \arcsin x (0 \leqslant x \leqslant 1)$
  11. $e^x \geqslant x+1 (\forall x)$[12]
  12. $x-1 \geqslant \ln x (x>0)$[13]
  13. $\frac{1}{1+x} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x} (x>0)$ 或 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x (x>0)$[14]
  14. 在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如 $(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^{2^2}})...(1+\frac{1}{2^{2^n}})$, 可化为 $(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^{2^2}})...(1+\frac{1}{2^{2^n}}) * \frac{4}{3}$
  15. 关于重要数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的重要结论:
      - 单调递增
      - $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$
- 利用闭区间上连续函数必有最大值与最小值

---

[9]可以将上述式子推广为 n 个实数的情况:$|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

[10]还有一个不等式是 $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

[11]当$n\pi < x < (n+1)\pi, 2n < S(x) < 2(n+1)$时, $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$.

[12]当$x_{n+1} = \mathrm{e}^{x_n}-1$ 时, 由$\mathrm{e}^{x_n}-1 \geqslant x_n$,得$x_{n+1} \geqslant x_n$,即$\{x_n\}$单调不减

[13]当$x_n>0$时, 若$x_{n+1}=\ln x_n+1$, 由$\ln x_n + 1 \leqslant x_n$,得$x_{n+1} \leqslant x_n$,即$\{x_n\}$单调不增

[14]令 $f(x)=\ln x$, 并在区间 $[x, x+1]$ 上对其使用拉格朗日中值定理, 有 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(1+x)-\ln x = \frac{1}{\xi}$ 其中 $0<x<\xi<x+1$, 因此对任意的 $x>0$, 有 $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$

- 利用压缩映射原理

题目 39. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

证明. □

题目 40. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$, 其中 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是非负数

证明. □

1.5.3 单调有界准则

定理 1.5.2: 数列的单调有界准则

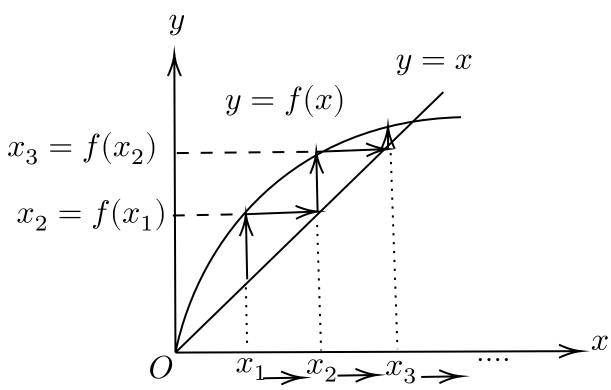
单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在

证明数列单调性的方法:

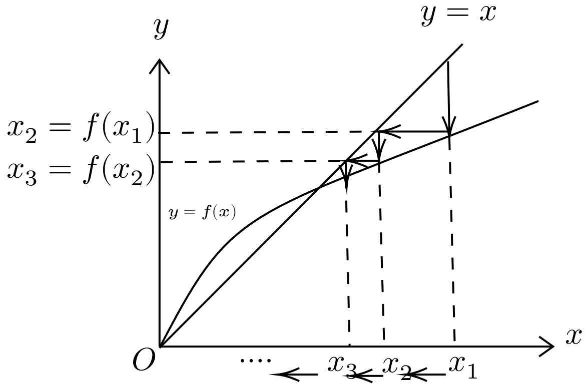
1. $x_{n+1}-x_n\underset{(<)}{>}0$ 或 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\underset{(<)}{>}1$(同号)
2. 利用数学归纳法
3. 利用重要不等式
4. x_n-x_{n-1} 与 $x_{n-1}-x_{n-2}$ 同号, 则 x_n 单调
5. 利用结论: 对 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,...)$,$x_n\in$ 区间I

   - 若$f'(x)>0,x\in$ 区间I,则数列$\{x_n\}$单调, 且 $\begin{cases}\text{当}x_2>x_1\text{时, 数列 }\{x_n\}\text{ 单调增加}\\ \text{当}x_2<x_1\text{时, 数列 }\{x_n\}\text{ 单调减少}\end{cases}$

   证明. 若 $f(x)$ 单调增加, 且 $x_1<x_2$, 则数列单增的图像是这样的:



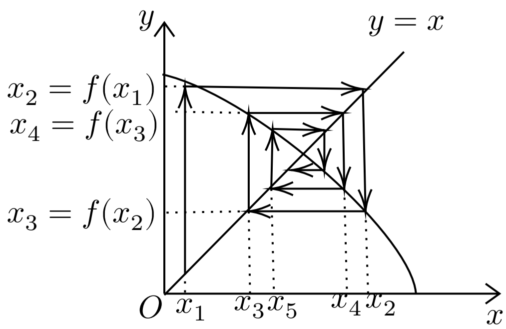
   若 $f(x)$ 单调增加, 且 $x_1>x_2$, 则数列单增的图像是这样的



□

- 若 $f'(x)<0$,$x\in$ 区间 I, 则数列 $\{x_n\}$ 不单调

  证明. 若 $f(x)$ 单调递减, 且 $x_1<x_2$ 时, 则图像为



□