

第一章 函数

1.1 映射

1.1.1 映射的概念

定义 1.1.1: 映射定义

设 X, Y 是两个非空集合, 如果存在一个法则 f , 使得对 X 中每个元素 x , 按法则 f , 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应, 那么称 f 为从 X 到 Y 的映射, 记作

$$f: X \rightarrow Y$$

其中 y 称为元素 x (在映射 f 下) 的像, 并记作 $f(x)$, 即

$$y = f(x)$$

而元素 x 称为元素 y (在映射 f 下) 的一个原像;

需要注意的是, 从映射的概念可以看出, 映射法则 f 可以有多个, 但是只要有一个满足即可.

1.1.2 映射的分类

- 设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射, 若 $R_f = Y$, 即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像, 则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射;
- 若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$, 它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为 X 到 Y 的单射;
- 若映射 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 为一一映射 (或双射)

1.2 函数的基本概念与特性

1.2.1 函数的概念

定义 1.2.1: 函数定义

设数集 $D \subset \mathbb{R}$, 则称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$.

函数的定义中, 对每个 $x \in D$, 按对应法则 f , 总有唯一确定的值 y 与之对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系, 通常称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$ 即:

$$R_f = f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

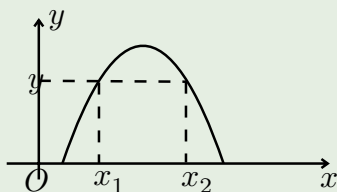
定义 1.2.2: 自然定义域

约定函数的定义域是使算式有意义的一切实数组成的集合。

例如: 函数 $y = \frac{1}{x-1}$, 即使没有指出函数的定义域是多少, 但是通过分析可得, 函数的自然定义域是 $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. 同理对于函数 $y = \sqrt{1-x^2}$, 其自然定义域是 $(-1, 1)$.

注 1.2.1: 单值函数与多值函数

事实上上述定义的函数为单值函数, 若给定一个 x_1 , 对应一个 y_1 . 给另外一个 x_2 , 对应另外一个 y_2 , 即“一对一”.



1.2.2 函数的表示

表格

x	1	2	3	4	5	6
$y = 2x$	2	4	6	8	10	12

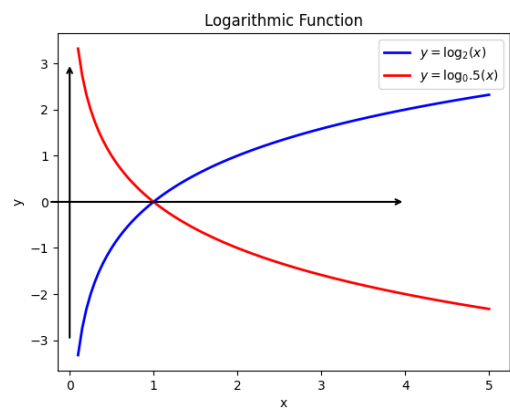


图 1.1: 对数函数图像

解析式

$y = 2x$

1.2.3 反函数

定义 1.2.3: 反函数定义

设函数 $f : D \rightarrow f(D)$ 是单射 (一对一), 则它存在逆映射 $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$, 称此映射 f^{-1} 为函数 f 的**反函数** 按此定义, 对每个 $y \in f(D)$, 有唯一的 $x \in D$, 使得 $f(x) = y$, 于是有

$$f^{-1}(y) = x$$

注 1.2.2: 解释

$y = 2x + 1$	自变量:x:[1,2] 因变量:y:[3,5]	
$x = \frac{y-1}{2}$	自变量:y:[3,5] 因变量:x:[1,2]	变量 改变
$y = \frac{x-1}{2}$	自变量:x:[3,5] 因变量:y:[1,2]	方程 改变

可以看出反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的. 以函数 $y = 2 * x + 1$ 为例. 在函数 $y = 2 * x + 1$ 中, 开始 y 为因变量,x 为自变量. 根据反函数概念 1.2.2 可以, 函数的反函数的自变量与因变量互换. 则上述函数的反函数是 $\frac{y-1}{2} = x$, 其中 x 是因变量,y 是

自变量. 但是由于习惯上 x 是自变量, y 是因变量, 上述反函数写作 $\frac{x-1}{2} = y$. 综上所述: 一般地, $y = f(x), x \in D$ 的反函数记成 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$ 除此之外, 还有两点需要说明的是

- 严格单调函数必有反函数, 但是反函数不一定是单调函数. 如函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ \frac{1}{x}, & x < 0, \end{cases}$ 其函数图像为

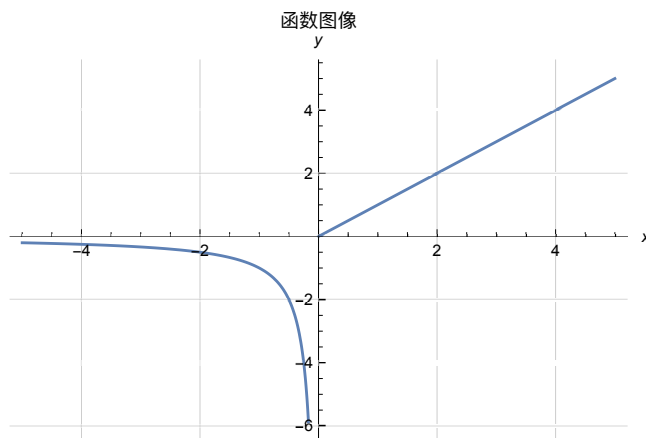


图 1.2: 分段函数 $f(x)$ 图像

- 若把 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图形画在同一坐标系中, 则它们完全重合. 只有把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$ 后, 它们的图形才关于 $y = x$ 对称. 这是因为在 $x = f^{-1}(y)$ 中 y 是自变量而 x 是因变量, 而在 $y = f(x)$ 中恰恰相反 (这个时候的图像应该一个是 x - y 坐标系函数图像, 一个是 y - x 坐标系函数图像), 因此如果此时不交换变量, 那么其域没有变化, 画在一起会重合, 只有交换了变量之后才不会重合.

题目 1. 求函数 $y = f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的反函数的表达式以及定义域

题目 1 的注记. 在上面的例子中, 函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为反双曲正弦函数, 其反函数为双曲正弦函数. 除此之外, 函数 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 是双曲余弦函数. 上述两个函数的图像为图 1.2, 图 1.3.

解答. 已知 $y = f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 则 $-y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ 对两边可以进行如下操作

$$\begin{aligned} e^{-y} &= \sqrt{x^2 + 1} - x \\ e^y &= \sqrt{x^2 + 1} + x \end{aligned}$$

那么可以得到 $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ 交换之后可以得到函数 $f(x)$ 的反函数, 即 $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

1.2.4 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义, 且 $g(D) \subset D_1$, 则由

$$y = f[g(x)](x \in D)$$

确定的函数, 称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的**复合函数**, 它的定义域为 D , u 称为中间变量. 内层函数的值域是外层函数的子集.

1.2.5 函数的四种特性及重要结论

有界性

有界性分为三种情况, 一种是有上界, 一种是有下界, 一种是有界。有界包含了有上界和有下界。

定义 1.2.4: 有上界的定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \in D$. 如果存在数 K_1 , 使得

$$f(x) \leq K_1$$

对任一 $x \in X$ 都成立, 那么称函数 $f(x)$ 上有上界, 而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上都有一个上界。

定义 1.2.5: 有下界的定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \in D$. 如果存在数 K_2 , 使得

$$f(x) \geq K_2$$

对任一 $x \in X$ 都成立, 那么称函数 $f(x)$ 上有下界, 而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上都有一个下界。

定义 1.2.6: 有界性的定义

设 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $I \subset D$. 如果存在某个正数 M , 使对任一 $x \in I$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有界; 如果这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 I 上无界。

- 有界是指, 同时有上界和下界
- 从几何上看, 如果在给定的区间, 函数 $y = f(x)$ 的图形能够被直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 完全包起来, 则为有界; 从定义上说, 找到某个正数 M , 使得 $|f(x)| \leq M$, 则为有界。
- 在讨论有界还是无界的时候首先要指明区间, 如果没指名区间, 则无法讨论有界性. 如函数 $y = \frac{1}{x}$ 则 $(2, +\infty)$ 上有界, 但是在 $(0, 2)$ 上无界。
- 事实上, 只要在区间 I 上或其端点处存在点 x_0 , 使得 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 的值为无穷大, 则没有任何两条直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 可以把 I 上的 $f(x)$ “包起来”, 这就叫无界。

单调性

定义 1.2.7

设 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间上任意两点 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**.

虽然单调性的证明一般用求导, 但是定义法也需要掌握.

对任意 $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, 有

$$f(x) \text{ 是单调增函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0;$$

$$f(x) \text{ 是单调减函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0;$$

$$f(x) \text{ 是单调不减函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0;$$

$$f(x) \text{ 是单调不增函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \leq 0.$$

奇偶性

定义 1.2.8

设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$). 如果对于任一 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任一 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**奇函数**. **偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.**

推论 1.2.3

设 $f(x)$ 是定义在 $[-l, l]$ 上的任意函数, 则

$$F_1(x) = f(x) - f(-x) \text{ 必为奇函数; } F_2(x) = f(x) + f(-x) \text{ 必为偶函数}$$

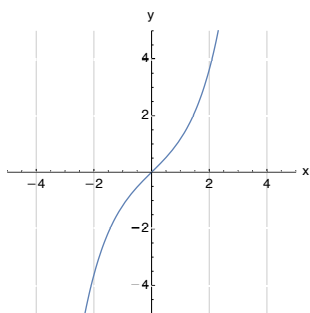


图 1.3: 双曲正弦函数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

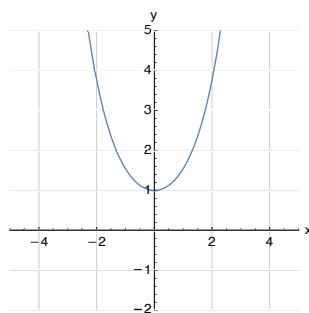


图 1.4: 双曲余弦函数 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

可以看到上面两个函数可以很好的解释推论 1.2.1, 并给出一个直观的图像, 以下为证明过程.

证明. 已知 $f(x)$ 是任意函数, -1 代入可得, $F_1(-x) = f(-x) - f(x) = -F_1(x)$, 同理可证 F_2 成立. \square

- 奇函数 $y = f(x)$ 的图形关于坐标原点对称, 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有定义时, 必有 $f(0) = 0$.
- 偶函数 $y = f(x)$ 的图形关于 y 轴对称, 且当 $f(0)$ 存在时, 必有 $f'(0) = 0$.

周期性

定义 1.2.9

设 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 T , 使得对于任一 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x + T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 从几何图形上看, 在周期函数的定义域内, 相邻两个长度为 T 的区间上, 函数的图形完全一样.

需要注意的是函数的周期性只与 x 的参数有关, 比如若函数 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(ax + b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期. 可以观察到其周期只与 x 的系数有关

重要结论

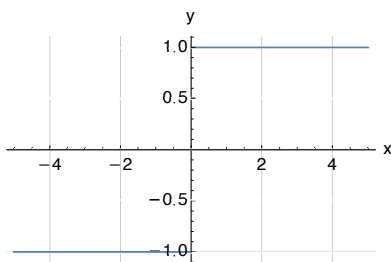
$f'(x)$ 和 $\int_a^x f(t) dt$ 的性质是重点, 提前总结如下:

- 若 $f(x)$ 是可导的偶函数, 则 $f'(x)$ 是奇函数.
- 若 $f(x)$ 是可导的奇函数, 则 $f'(x)$ 是偶函数 (求导后, 函数奇偶性互换).
- 若 $f(x)$ 是可导的周期为 T 的周期函数, 则 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.
- 连续的奇函数的一切原函数都是偶函数
- 连续的偶函数的原函数中仅有一个原函数是奇函数
- 若连续函数 $f(x)$ 以 T 为周期且 $\int_0^T f(x) dx = 0$, 则 $f(x)$ 的一切原函数也以 T 为周期.
- 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导且 $f'(x)$ 有界, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

1.2.6 三种特殊函数

符号函数

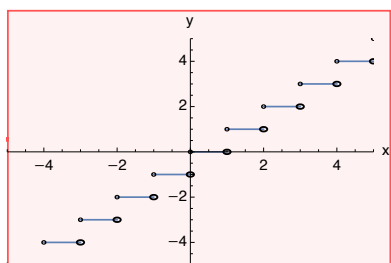
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

图 1.5: 符号函数 $\operatorname{sgn} x$ 图像

取整函数

$$y = [x]$$

函数值向左移, 现实生活中其实就是年龄, 即 $x - 1 < [x] \leq x$

图 1.6: 取整函数 $[x]$ 图像

狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{Q}^c. \end{cases}$$

1.3 函数图像

1.3.1 常数函数

$y = A, A$ 为常数, 其图形为平行于 x 轴的水平直线

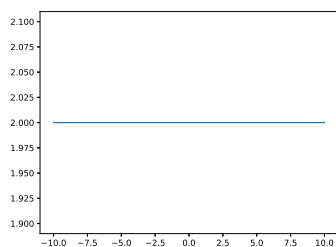


图 1.7: 常数函数图像

1.3.2 幂函数

$$y = x^\mu (\mu \text{ 是实数})$$

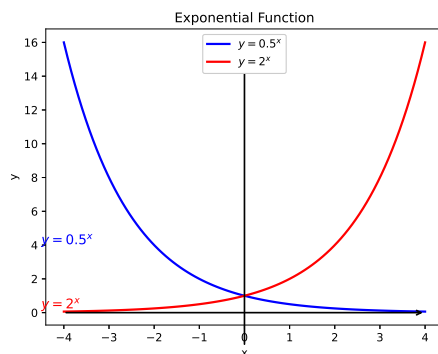


图 1.8: 常数函数图像

推论 1.3.1: 幂函数常用推论

- 当 $x > 0$ 时, 由 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}, y = \ln x$ 具有相同的单调性, 因此可以利用这一特性来研究最值
- 见到 $\sqrt{u}, \sqrt[3]{u}$ 时, 可用 u 来研究最值
- 见到 $|u|$ 时, 由 $|u| = \sqrt{u^2}$, 可用 u^2 来研究最值
- 见到 $u_1, u_2, u_3, \ln(u_1 + u_2 + u_3) = \ln u_1 + \ln u_2 + \ln u_3$ 来研究最值
- 见到 $\frac{1}{u}$ 时, 可用 u 来研究最值 (结论相反), 即 $\frac{1}{u}$ 与 u 的最大值点、最小值点相反

1.3.3 指数函数

$$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$$

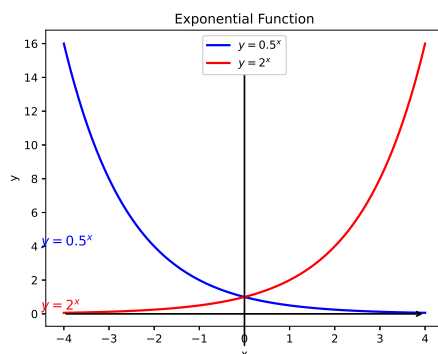


图 1.9: 指数函数图像

注 1.3.2: 指数函数相关性质

- 定义域: $(-\infty, +\infty)$. 值域: $(0, +\infty)$.
- 单调性: 常用的指数函数 $y = e^x$
- 极限: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ (由于极限的唯一性, 因此在趋于不同的无穷时, 极限值的不同).
- 特殊函数值: $a^0 = 1, e^0 = 1$

1.3.4 对数函数

$$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$$

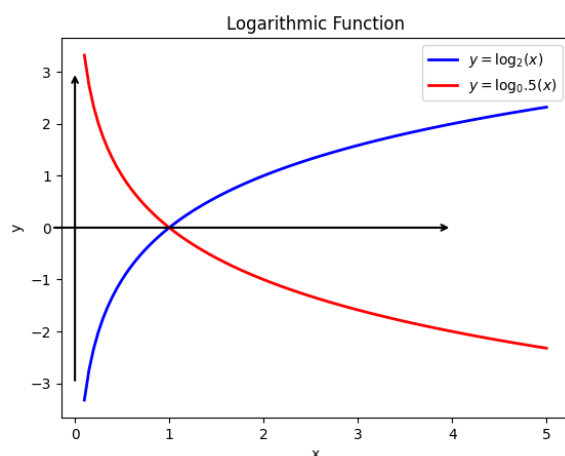


图 1.10: 对数函数图像

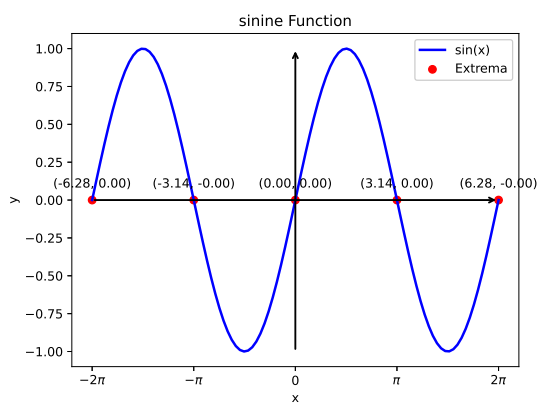
注 1.3.3: 对数函数相关性质

- 定义域: $(0, +\infty)$. 值域: $(-\infty, +\infty)$.
- 单调性: 当 $a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 单调增加; 当 $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a x$ 单调减少;
- 常用对数函数: $y = \ln x$
- 特殊函数值: $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \ln 1 = 0, \ln e = 1$
- 极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
- 常用公式: $x = e^{\ln x} (x > 0), u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u} (u > 0)$

1.3.5 三角函数

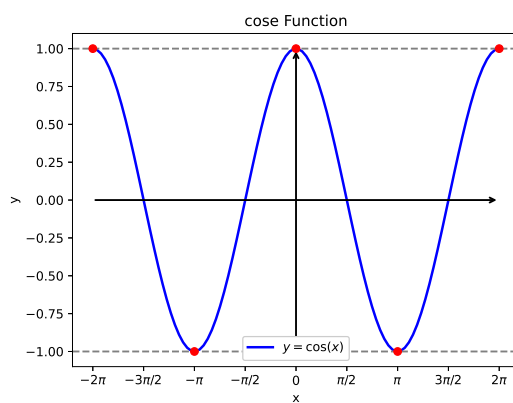
正弦和余弦函数

$$y = \sin x$$



(a) 正弦函数图像

$$y = \cos x$$

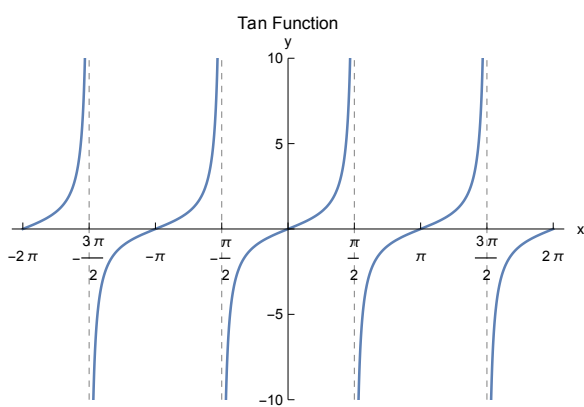


(b) 余弦函数图像

图 1.11: 正余弦函数图像

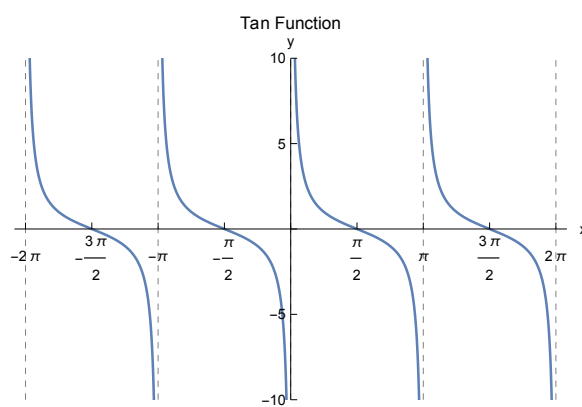
正切和余切函数

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



(a) 正切函数图像

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$



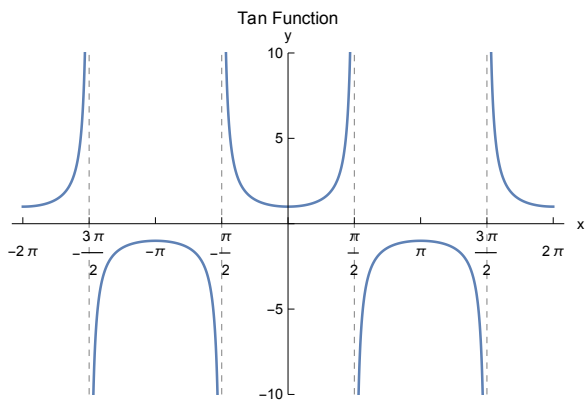
(b) 余切函数图像

图 1.12: 正余切函数图像

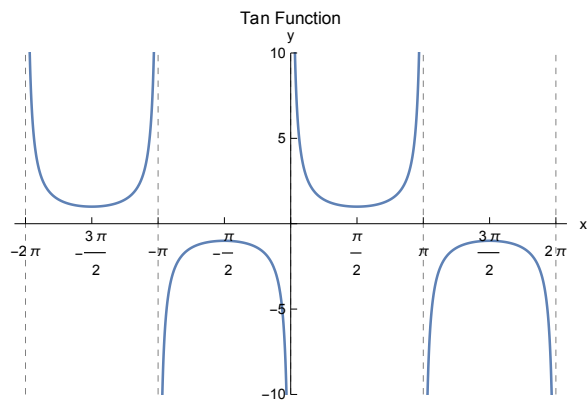
正割和余割函数

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$



(a) 正割函数图像



(b) 余割函数图像

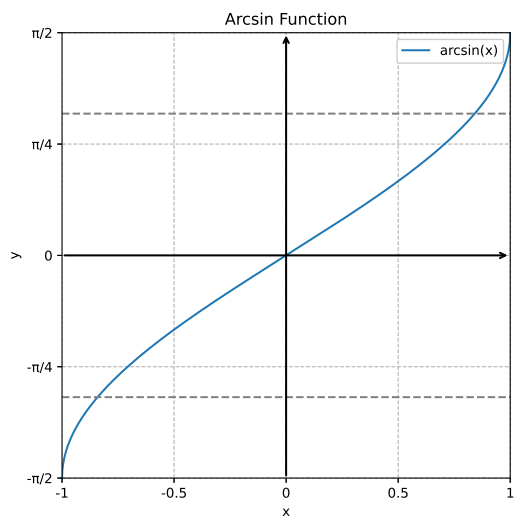
图 1.13: 正余割函数图像

反三角函数

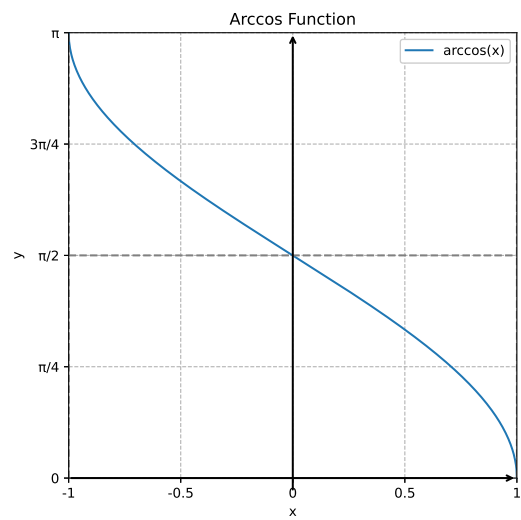
反正弦和反余弦函数

$$y = \arcsin x$$

$$y = \arccos x$$



(a) 反正弦函数图像



(b) 反余弦函数图像

图 1.14: 反正余弦函数图像

由于这两个函数分别是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的反函数, 因此可以知道的是, $\sin x$ 的值域是 $\arcsin x$ 的定义域. 因此可以得到下面的结论

注 1.3.4: 反正余弦函数相关性质

- 定义域 $[-1, 1]$, $y = \arcsin x$ 值域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y = \arccos x$ 值域 $[0, \pi]$
- 性质: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ (求导后可以发现导数为 0)

反正切和反余切函数

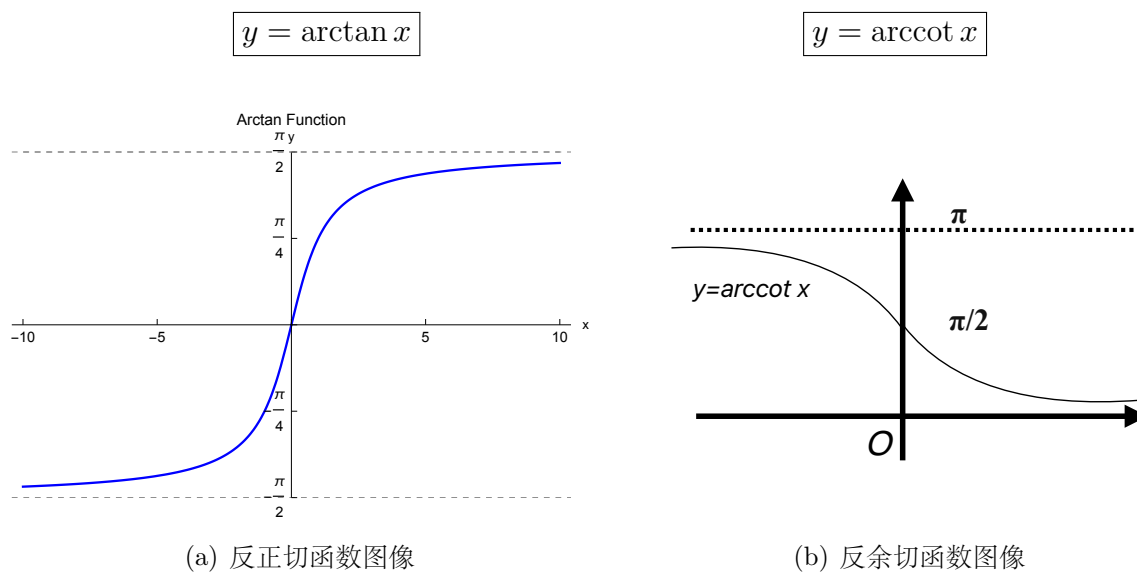


图 1.15: 反正余切函数图像

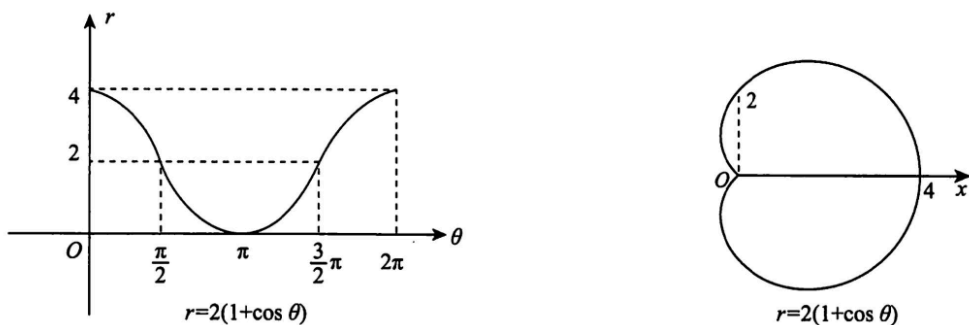
注 1.3.5: 反正余切函数相关性质

- 定义域 $[-\infty, +\infty]$, $y = \arctan x$ 值域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y = \operatorname{arccot} x$ 值域 $(0, \pi)$
- 性质: $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$ (求导后可以发现导数为 0)

1.3.6 图像绘制

极坐标下的图像

- 用描点法绘制函数图像: 就是把每一个点求出来, 然后连接起来即可, 但是需要点足够多
- 用直角坐标系观点画极坐标系的图像, 以函数 $r = 2(1 + \cos \theta)$ 为例.

图 1.16: 函数 $r = 2(1 + \cos \theta)$ 图像

可以看到 $\theta - r$ 的坐标系的关键点为 $(0, 4), (\frac{\pi}{2}, 2), (\pi, 0), (\frac{3}{2}\pi, 2), (2\pi, 4)$ 这五个点, 那么在极坐标系下可以绘制出这些点, 比如在 $x = 4$ 时, $\theta = 0, x = 2$ 时, $\theta = \frac{\pi}{2}, x = 0$ 时, $\theta = \pi$.

参数方程

通过第三个变量即参数来表示别的两个变量.

摆线参数方程:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

星型线参数方程:

$$\begin{cases} x = r \cos^3 t \\ y = r \sin^3 t \end{cases}$$

1.4 常用函数知识

1.4.1 数列

等差数列

首项为 a_1 , 公差为 $d(d \neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$.

注 1.4.1: 等差数列相关性质

- 通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$
- 前 n 项的和 $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

等比数列

首项为 a_1 , 公比为 $r(r \neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1r, a_1r^2, \dots, a_1r^{n-1}, \dots$

注 1.4.2: 等比数列相关性质

- 通项公式 $a_n = a_1 r^{n-1}$
- 前 n 项的和 $S_n = \begin{cases} na_1, & r = 1, \\ \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1. \end{cases}$
- $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} (r \neq 1).$

常见数列前 n 项和

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

1.4.2 三角函数

三角函数基本关系

$$\begin{aligned} \csc \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha} & \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} & \cot \alpha &= \frac{1}{\tan \alpha} \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

倍角公式

$$\begin{aligned} \sin 2a &= 2 \sin a \cos a, & \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 \\ \sin 3a &= -4 \sin^3 a + 3 \sin a, & \cos 3a &= 4 \cos^3 a - 3 \cos a \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, & \cot 2\alpha &= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}. \end{aligned}$$

半角公式

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha), & \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha), \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, & \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \\ \cot \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}. \end{aligned}$$

和差公式

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \mp \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}.\end{aligned}$$

积化和差公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)], \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].\end{aligned}$$

和差化积公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.\end{aligned}$$

万能公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \cos \alpha &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

1.4.3 指数运算法则

$$a^a \times a^b = a^{a+b}, \quad \frac{a^a}{a^b} = a^{a-b}, \quad (a^a)^b = a^{ab}, \quad (ab)^a = a^a b^a, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^a = \frac{a^a}{b^a}.$$

1.4.4 对数运算法则

$$\begin{aligned}\log_a(MN) &= \log_a M + \log_a N \\ \log_a \frac{M}{N} &= \log_a M - \log_a N \\ \log_a M^n &= n \log_a M. \\ \log_a \sqrt[n]{M} &= \frac{1}{n} \log_a M.\end{aligned}$$

1.4.5 一元二次方程基础

- 一元二次方程组: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$
- 根的公式: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- 根与系数的关系: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.
- 判别式: $\Delta = b^2 - 4ac$
- 抛物线顶点坐标: $(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$

1.4.6 因式分解公式

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
 (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) & (a^3 - b^3) &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\
 a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\
 a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n \text{ 是正整数}) \\
 n \text{ 是正奇数时, } a^n + b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
 (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \\
 a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n
 \end{aligned}$$

1.4.7 阶乘与双阶乘

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, 规定 $0! = 1$.
- $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n \cdot n!$
- $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$

1.4.8 常用不等式

1. 设 a, b 为实数, 则 $|a+b| \leq |a| + |b|; |a| - |b| \leq |a-b|$

注 1.4.3

可以将第一个式子推广为:

离散情况: 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为实数, 则 $|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

连续情况: 设 $f(x)$ 在 $[a, b] (a < b)$ 上可积, 则 $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

2. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a, b > 0)$

注 1.4.4

还有一个不等式是 $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

3. $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} (a, b, c > 0)$
4. 设 $a > b > 0$, 则 $\begin{cases} \text{当 } n > 0 \text{ 时, } a^n > b^n, \\ \text{当 } n < 0 \text{ 时, } a^n < b^n. \end{cases}$
5. 若 $0 < a < x < b, 0 < c < y < d$, 则 $\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}$.

注 1.4.5

当 $n\pi < x < (n+1)\pi, 2n < S(x) < 2(n+1)$ 时, $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$.

6. $\sin x < x < \tan x (0 < x < \frac{\pi}{2})$
7. $\sin x < x (x > 0)$

注 1.4.6

当 $x_n > 0$ 时, $x_{n+1} = \sin x_n < x_n$, 故 x_n 单调减少

8. $\arctan x \leq x \leq \arcsin x (0 \leq x \leq 1)$
9. $e^x \geq x + 1 (\forall x)$

注 1.4.7

当 $x_{n+1} = e^{x_n} - 1$ 时, 由 $e^{x_n} - 1 \geq x_n$, 得 $x_{n+1} \geq x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调不减

10. $x - 1 \geq \ln x (x > 0)$

注 1.4.8

当 $x_n > 0$ 时, 若 $x_{n+1} = \ln x_n + 1$, 由 $\ln x_n + 1 \leq x_n$, 得 $x_{n+1} \leq x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调不减

11. $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x} (x > 0)$

注 1.4.9

令 $f(x) = \ln x$, 并在区间 $[x, x+1]$ 上对其使用拉格朗日中值定理, 有

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}$$

其中 $0 < x < \xi < x+1$, 因此对任意的 $x > 0$, 有 $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$

12. 在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如 $(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}})$, 可化为 $(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}}) * \frac{4}{3}$

1.4.9 绝对值等式

$$\varphi(x) = \max \{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$$

$$\psi(x) = \min \{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$$