第一章　极限

1.1　数列的极限

1.1.1　数列极限的定义

定义 1.1.1: 数列极限的定义

设 $|x_n|$ 为一数列, 若存在常数 a, 对于任意的 $\varepsilon > 0$(不论它多么小),总存在正整数 N, 使得当$n > N$时 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称数 a 是数列 $|x_n|$ 的极限, 或者称数列 $|x_n|$ 收敛于 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a 或 x_n \to a (n \to \infty)$$

该定义的 $\varepsilon - N$[a]语言描述是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists 正整数 N, 当 n > N 时, 有 |x_n, -a| < \varepsilon.$$

[a] $\varepsilon - N$几何意义: 对于点 a 的任何 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 一定存在 N, 当 $n < N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内, 而只有有限个 (最多有 N 个) 在区间之外.

在上面的定义中,$\varepsilon > 0$ 的 ε 任意性是非常重要的, 只有这样才能表示出无限接近的意义. 总存在正整数 N, 使得 $n > N$ 这个条件用于表达 $n \to \infty$ 的过程.

注 1.1.1: 数列极限的性质

- 数列收敛[a]等价于数列极限存在
- 数列的极限值与数列的前有限列无关, 只与后面无穷项有关

- 数列的最值只能在前有限项中取得，前有限项有比极限值大的，则数列存在最大值. 前有限项有比极限值小的，则数列存在最小值
- 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则其任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛，且 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$[b]
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1(a > 0)$
- 关于数列 $(1+\dfrac{1}{n})^n$ 的结论
  - 单调增加
  - $\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$

[a]区别于级数收敛

[b]此条定理提供了一个判断数列发散的方法:1. 至少一个子数列发散.2. 两个子数列收敛，但是收敛值不同.

题目 1. 已知 $a_n = \sqrt[n]{n} - \frac{(-1)^n}{n}(n = 1, 2, \cdots)$, 则 a_n

(A) 有最大值, 有最小值 (B) 有最大值, 没有最小值

(C) 没有最大值, 有最小值 (D) 没有最大值, 没有最小值

解答. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - 0$,$a_1 = 2, a_2 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$, 因此 a_n 既有最大值又有最小值

题目 2. 证明:若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 则 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$

证明. 已知数列 a_n 极限为 A, 那么 $|a_n - A| < \varepsilon$, 由不等式1可得,$||a_n| - |A|| \leqslant |a_n - A| < \varepsilon$, 因此 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$. □

题目 2 的注记.

1. 此命题反过来则错误, 如取 $a_n = (-1)^n$, 则 $\lim_{n\to\infty} |(-1)^n| = 1$. 但 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.
2. 在本题中若 $A = 0$, 则 $||a_n| - |A|| = ||a_n| - 0| = |a_n - 0|$, 即有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0\,,$$

此结论常用, 即若要证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 可转换为证明 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 由于 $|a_n| \geq 0$, 若使用了夹逼准则, 只需证明 $|a_n| \leqslant 0$ 即可

3. 此结论对函数亦成立, 即若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$.

题目 3. 设 $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有

(A) $| a_n |> \dfrac{| a |}{2}$. (B) $| a_n |< \dfrac{| a |}{2}$. (C)$a_n > a - \dfrac{1}{n}$. (D)$a_n < a + \dfrac{1}{n}$.

解答. 根据结论若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$. 可得 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$, 即 $|a_n| > |a| > \dfrac{|a|}{2}$.

题目 3 的注记. 对于 C,D 选项, 只知道 a_n 的极限是 a, 那么就是说两者之间的距离是无穷小, 但是题目中没有给出两者相距的量级, 因此一定错误的. 反例为 $a_n = a \pm \dfrac{1}{n^2}$.

题目 4. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, 则下列命题正确的是

(A) 若 x_n 发散，则 y_n, 必发散 (B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小 (D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

解答. A 选项: 令 $x_n = \begin{cases} 0, n\text{为奇数} \\ n, n\text{为偶数} \end{cases}$,$y_n \equiv 0$. 显然 x_n 发散, 但是 y_n 收敛.

B 选项: 令 $x_n = \begin{cases} 0, n\text{为奇数} \\ n, n\text{为偶数} \end{cases}$,$y_n = \begin{cases} n, n\text{为偶数} \\ 0, n\text{为奇数} \end{cases}$. 虽然二者都无界, 但是也满足题意.

C 选项: 令 $x_n \equiv 0$,$y_n = \begin{cases} n, n\text{为奇数} \\ 0, n\text{为偶数} \end{cases}$. 同理也满足题意, 但是 y_n 为无穷大

D 选项:$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{\frac{1}{x_n}} = 0 \Rightarrow y_n = o(\dfrac{1}{x_n})$

题目 4 的注记. 数列极限概念题一个很好的办法是举反例. 经典反例:(1) 分奇偶.(2) 恒为 0.

题目 5. 设 x_n 与 y_n 为两个数列，则下列说法正确的是

(A) 若 x_n 与 y_n 无界，则x_n+y_n 无界

(B) 若 x_n 与 y_n 无界，则x_ny_n 无界

(C) 若 x_n 与 y_n 中，一个有界，一个无界，则x_ny_n 无界

(D) 若 x_n 与 y_n 均为无穷大，则 x_ny_n 一定为无穷大

解答. A 选项: 令 $a_n=n$,$b_n=-n$, 显然 x_n,y_n 无界, 但是 x_n+y_n 有界

B 选项: 令 $x_n=\begin{cases}0,n\text{为奇数}\\ n,n\text{为偶数}\end{cases}$,$y_n=\begin{cases}n,n\text{为奇数}\\ 0,n\text{为偶数}\end{cases}$, 显然 x_n,y_n 无界, 但是 x_ny_n 有界

C 选项: 令 $x_n=\begin{cases}0,n\text{为奇数}\\ n,n\text{为偶数}\end{cases}$,$y_n\equiv 0$, 显然 x_n 一个有界, 一个无界, 但是二者相乘为有界

D 选项: 无穷大 × 无穷大 = 无穷大

题目 6. 设 x_n 与 y_n 为两个数列，则下列说法正确的是

(A) 若 $\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0$, 则必有 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ 或 $\lim_{n\to\infty}y_n=0$

(B) 若 $\lim_{n\to\infty}x_ny_n=\infty$, 则必有 $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$ 或 $\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$

(C) 若 x_ny_n 有界，则必有 x_n 与 y_n 都有界.

(D) 若 x_ny_n 无界，则必有 x_n 无界或 y_n 无界

解答. A 选项: 令 $x_n=\begin{cases}0,n\text{为奇数}\\ n,n\text{为偶数}\end{cases}$,$y_n=\begin{cases}n,n\text{为奇数}\\ 0,n\text{为偶数}\end{cases}$, 显然 $x_n\cdot y_n\equiv 0$, 但是 x_ny_n 两者都无界.

B 选项: 令 $x_n=\begin{cases}1,n\text{为奇数}\\ n,n\text{为偶数}\end{cases}$,$y_n=\begin{cases}n,n\text{为奇数}\\ 1,n\text{为偶数}\end{cases}$, 显然二者相乘为 ∞, 但是二者都是无界, 没有极限

C 选项: 同 A 选项

D 选项: 使用逆否命题: 若 x_n 有界且 y_n 有界, 则 $x_n\cdot y_n$ 有界, 显然成立, 有界 × 有界 = 有界

题目 6 的注记. 在证明中, 使用逆否命题可以减少复杂度, 如本题的 D 选项.

题目 7. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 与 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 均不存在，则下列选项正确的是

A. 若 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 不存在，则 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必不存在

B. 若 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 不存在，则 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必存在

C. 若 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 存在，则 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必不存在

D. 若 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 存在，则 $\lim(a_n-b_n)$ 必存在

解答. A 选项:$a_n=e^n, b_n=e^n$, 显然 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 不存在, 但是 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 存在

B 选项:$a_n=e^n, b_n=2e^n$, 显然 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 不存在, 但是 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 也不存在

C 选项: 若 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 存在, 假设 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 存在, 那么 $\lim_{n\to\infty}[(a_n+b_n)-(a_n-b_n)]$ 也应该存在, 但是 $\lim_{n\to\infty}=2b_n$, 根据题意可知不存在, 因此假设错误

D 选项:$a_n=e^n, b_n=-e^n$, 显然 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 存在, 但是 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 不存在

1.1.2 收敛数列的性质

唯一性

定义 1.1.2: 数列极限唯一性的定义

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一

有界性

定义 1.1.3: 数列收敛的有界性的定义

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界[a].

[a]如果数列有界, 但是不一定存在极限, 如数列 $(-1)^n$

保号性

定义 1.1.4: 数列极限保号性的定义

如果 $\lim_{n\to\infty} x_n=a$, 且 $a>b$(或 $a<b$), 那么存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 都有 $x_n>b$(或 $x_n<b$.

如果数列 $\mid x_n \mid$ 从某项起有 $x_n\geqslant b$(或 $x_n\leqslant b$), 且 $\lim_{n\to\infty} x_n=a$, 那么 $a\geqslant b$($a\leqslant b$)[a].

[a]其中 b 可以为任意实数, 常考 b=0 的情况

题目 8. 下列结论中错误的是

(A) 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 1$, 则存在 $M > 1$, 当 n 充分大时，有 $a_n > M$

(B) 设 $a = \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n = b$, 则当 n 充分大时，有 $a_n < b_n$

(C) 设 $M \leqslant a_n \leqslant N(n = 1, 2, ...)$, 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $M \leqslant a \leqslant N$

(D) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, 则当 n 充分大时，$a_n > a - \dfrac{1}{n}$

解答. A 选项: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 那么当 n 充分大时,a_n 的值趋近于 a, 那么肯定存在一个 M, 满足 $a_n = a \geqslant M > 1$.

B 选项: 若 a_n 的极限 $> b_n$ 的极限, 则当 n 充分大时,$a_n > b_n$.

C 选项: 不等式左右取极限可得 C 选项正确

D 选项: 题目 3 解析1.1.1出有解释, 同理

题目 8 的注记. 数列极限的保号性可写为:两个数列 a_n 和 b_n, 若 $a_i > b_i$ 恒成立, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 都存在. 则 n 趋于无穷时,a_n 的极限 $\geqslant b_n$ 的极限.(对不等式取极限时,$>$ 要变成 $\geqslant$,$<$ 要变成 $\leqslant$,$\geqslant$ 不用变,$\leqslant$ 不用变).

若 a_n 的极限 $> b_n$ 的极限, 则当 n 充分大时,$a_n > b_n$.[1]

若 a_n 的极限 $\geqslant b_n$ 的极限, 则当 n 充分大时,a_n 和 b_n 大小无法确定.

1.2 函数的极限

1.2.1 超实数系

定义 1.2.1: 超实数系的概念

超实数 (Hyperreal number) 是一个包含实数以及无穷大和无穷小的域, 它们的绝对值分别大于和小于任何正实数.

[1] 证明如下: 令 $x_n = b_n - a_n$, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = b - a > 0$. 由极限的保号性可知, 当 n 充分大的时候,$x_n > 0$, 即 $b_n > a_n$

注 1.2.1

- 超实数集是为了严格处理无穷量 (无穷大量和无穷小量) 而提出的.
- 超实数集, 或称为非标准实数集, 记为 $^*\mathbb{R}$, 是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个扩张.

1.2.2 邻域

[2]

定义 1.2.2: 邻域的相关概念

- δ 邻域: 设 x_0 是数轴上一个点,δ 是某一正数, 则称 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0,\delta)$, 即:

$$U(x_0,\delta)=\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x|\,|x-x_0|<\delta\}$$

- 去心 δ 邻域: 定义点 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$
- 左, 右 δ 邻域:$\{x|0<x-x_0<\delta\}$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域, 记作 $U^+(x_0,\delta)$; $\{x|0<x_0-x<\delta\}$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域, 记作 $U^-(x_0,\delta)$.

1.2.3 函数极限的定义

函数极限的定义主要分为自变量趋于有限值 $(x\to x_0)$ 时的极限和自变量趋于无穷大时函数的极限 $(x\to\infty)$

自变量趋于有限值时的函数极限

定义 1.2.3: 当自变量趋于有限值时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)[a], 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

[2]邻域与区间不同, 邻域属于区间的范畴. 但是邻域通常表示"一个局部位置". 比如"点 x_0 的 δ"邻域, 可以理解为"点 x_0"的附近, 而区间是明确指出在实数系下的范围

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限, 记作:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} f(x) \to A(\text{当} x \to x_0)$$

其 $\varepsilon - N$ 语言为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} 0 < |x - x_0| < \delta \text{时}, \text{有} |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 在证明中, 这两句是白给, 直接写. 后面的才是关键.

[a] ε 用于衡量 $|f(x) - A|$ 的值有多小

注 1.2.2

1. 在函数极限中 $x \to \infty$ 指的是 $|x| \to \infty$, 需要 x 趋于正无穷和负无穷, 但在数列中的 $n \to \infty$ 是 $n \to +\infty$
2. 函数的极限值只与邻域内的函数值有关, 而与该点的函数值无关.

题目 9. 设 $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{\ln x} = 1$, 则:

$(A) f(1) = 0$ $\quad (B) \lim_{x \to 1} f(x) = 0$ $\quad (C) f'(1) = 1$ $\quad (D) \lim_{x \to 1} f'(x) = 1$

解答. $\lim_{x \to 1} \ln x = 0$, 根据极限四则运算法则1.4.1,$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$, 对于其他选项, 需要知道的是函数的极限值与该点的函数值无关, 只与邻域内的函数值有关.

单侧极限

定义 1.2.4: 单侧极限的定义

若当 $x \to x_0^-$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 A, 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限, 记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^-) = A.$$

若当 $x \to x_0^+$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 A, 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限, 记为

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) = A$

题目 10. 已知 $\lim_{x\to 0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x} + (1+\mid x\mid)^{\frac{1}{x}}\right]$存在, 求$a$的值

解答. 由于存在 arctan 与 $|x|$ 函数, 则对于 0 点的极限值需要分左右进行计算.

$$\lim_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x} + (1+\mid x\mid)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to 0^-} a\arctan\frac{1}{x} + \lim_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}} = -\frac{\pi}{2}a + \frac{1}{\mathrm{e}}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x} + (1+\mid x\mid)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to 0^+} a\arctan\frac{1}{x} + \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}a + \mathrm{e}\text{ 若极限存在, 则 } a = \frac{1-e^2}{\pi e}$$

题目 10 的注记. 由于自变量趋向的双向性, 以下类型的函数因此需要进行特殊讨论:

- 形如 $f(x) = max\{h(x), g(x)\}$ 此类函数也需要注意在函数变化点的自变量取值问题
- $\lim_{x\to\infty} e^x$:$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$:$\lim_{x\to 0^+} = \dfrac{\sin x}{x} = 1$,$\lim_{x\to 0^-} = \dfrac{\sin x}{-x} = -1$
- $\lim_{x\to\infty}\arctan x$:$\lim_{x\to+\infty}\arctan x = \dfrac{\pi}{2}$,$\lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$
- $\lim_{x\to 0}[x]$:$\lim_{x\to 0^+}[x] = 0, \lim_{x\to 0^-}[x] = -1$

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 1.2.5: 自变量趋于无穷大时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ε.(不论它多么小), 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 的极限, 记作:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A\text{或}f(x) \to A(\text{当}x \to x_0)$$

其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时},\text{有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 在证明中, 这两句是白给, 直接写. 后面的才是关键.

需要注意的是趋向的值不同时,$\varepsilon-N$ 写法不同, 不能照抄. 其 $\varepsilon-N$ 的表达为如下表格:

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\|x-x_0\|<\delta$ 时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\|x-x_0\|<\delta$ 时, 即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\|x-x_0\|<\delta$时, 即有 $f(x)>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\|x-x_0\|<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\|f(x)\|>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $f(x)>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\|f(x)\|>M.$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使当 $\|x\|>X$ 时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 $\|x\|>X$ 时, 即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 $\|x\|>X$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 |x|>X 时, 即有 $f(x)<-M.$
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使当 x>X 时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x>X$ 时, 即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x>X$时, 即有 $f(x)>M.$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 x>X 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$ 时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon.$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$ 时, 即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$时, 即有 $f(x)<-M.$

注 1.2.3: 上表的部分解释

- 以 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ 为例: 不管 $f(x)$ 与 A 的距离多近 $(\forall\varepsilon > 0)$, 总有 x 不断靠近 x_0, 使得 $|f(x) - A| < \varepsilon$.
- 以 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 为例: 不管 M 多大, 总有当 $x > \infty$ 时, 使得 $|f(x) > M|$, 即满足 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

1.2.4 函数极限的性质

唯一性

定理 1.2.1

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 那么极限唯一

注 1.2.4: 关于唯一性的说明

- 对于 $x\to\infty$, 意味着 $x\to+\infty$ 且 $x\to-\infty$
- 对于 $x\to x_0$, 意味着 $x\to x_0^+$ 且 $x\to x_0^-$

  对于上述问题, 我们称为自变量取值的“双向性”. 以下有一些常见的问题:

  - $\lim_{x\to\infty} e^x$ 不存在, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$ 不存在, $\lim_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在, $\lim_{x\to x_0}[x]$ 不存在.
  - 其不存在的原因均为分段函数分段点极限表达式不同, 需要分别求左右极限.

注 1.2.5: 极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A, \text{且} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A^{a}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0(\text{无穷小量}\alpha(x) = 0)^{b}$$

[a] 左右极限都存在且相等

[b] 对于此概念, 如果引入超实数系的解释应为 A 是 $f(x)$ 的标准实数部分, 而 $f(x)$ 的值是超实数系下的值, 因此其值应为 $f(x) = A + \alpha(x)$

注 1.2.6: 极限不存在的情况

- 函数在该点附近趋于无穷
- 函数在该点的左右极限只存在一个, 或两者都存在但不相等
- 函数在该点附近不停地震荡
- 该点是函数无定义点的聚点

局部有界性

定理 1.2.2

若极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在[a], 则 $f(x)$ 在点 x_0 某去心邻域内有界.

[a]对局部有界性的描述需要指明是在那个区间上

注 1.2.7: 局部有界性的性质

- 极限存在必有界, 有界函数极限不一定存在.
- 若 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有界.
- 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内为连续函数, 且 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内必定有界.
- 有界函数与有界函数的和, 差, 积仍为有界函数[a].

[a]商不是有界函数, 因为:$y_1 = 1, y_2 = 0, \frac{y_1}{y_2} = \infty$

题目 11. 在下列区间内, 函数 $f(x) = \dfrac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$ 有界的是:

A:(-2,1)　　B:(-1,0)　　C:(1,2)　　D:(2,3)

解答. 又题意可知, 函数的分段点为 $x = 3, 0, 1$, 对上述三点求极限, 分析可得, 当 $x = 3, 1$ 时, 函数极限为 ∞, 因此函数在上述两点的极限不存在, 因此根据局部有界性的性质可得, 含这两个点的区间无界, 因此排除 A,C,D. 答案为 B.

局部保号性

定理 1.2.3

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$(或 $A<0$), 那么存在常数 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>0(\ f(x)<0)$[a].

如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$), 而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 那么 $A\leqslant 0$ 或 $(A\leq 0)$[b].

[a]如果函数在 x_0 附近的极限值为正, 那么 x_0 附近的函数值为正
[b]如果函数在 x_0 附近的函数值 ≤ 0, 那么 x_0 此处的极限值 ≤ 0

对上述定理中, 为什么一个可以等于 0, 一个不能等于 0? 其解释如下: 如果第一个定理中 $A\leqslant 0, f(x)\leqslant 0$, 那么以函数 $f(x)=x^2$ 为例, 虽然 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, 但是邻域内的函数值都大于 0. 对于第二个定理中如果 $f(x)<0, A<0$, 那么以函数 $f(x)=-x^2$ 为例, 虽然邻域内的函数值都小于 0, 但是 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

注 1.2.8

由保号性可推出保序性: 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 则:

1. 若 $A>B\Rightarrow \exists\delta>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,$f(x)>\mathbf{g}(x)$.
2. 若 $\exists\delta>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,$f(x)\geqslant g(x)\Rightarrow A\geqslant B$.

推论 1.2.1: 局部保号性的推论

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A>0(A\neq 0)$, 那么就存在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$, 当 $x\in U^{\circ}(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$

保号性推论的证明. 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A>0$, 所以, 取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$, $\exists\delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}\Rightarrow f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0.$$

□

1.2.5 函数极限与数列极限的关系 (海涅定理)

需要知道一点, 数列极限不可以直接使用洛必达法则, 但是可以使用拉格朗日中值定理, 泰勒公式, 等价无穷小. 如果想使用洛必达法则, 则需要使用海涅定理将数列极限改写为函数极限的形式. 即 x 改写成 n, 考研数

学中默认 n 为非负整数, 所以 n 趋于无穷要改写成 x 趋于正无穷.

定理 1.2.4: 海涅定理

设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}\,(x_n\neq x_0)$, 极限 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$ 存在.

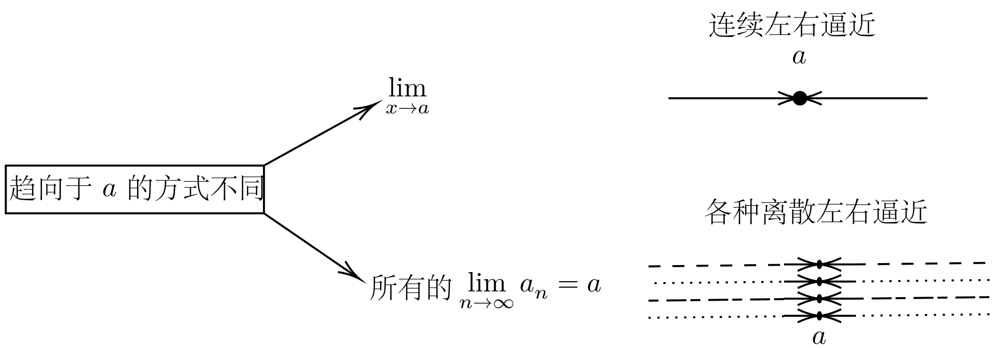
把这个定理简化一下, 主要意思就是

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

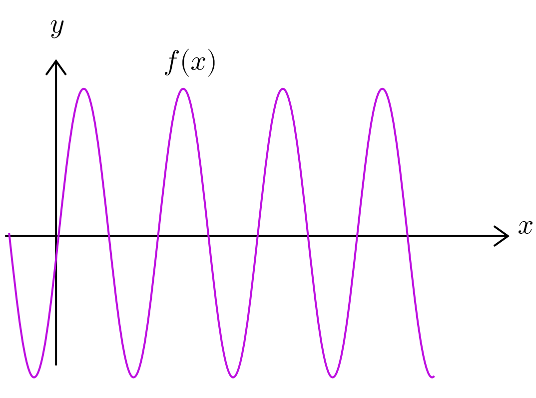
$$\Updownarrow$$

$$\text{所有的}\lim_{n\to\infty} a_n=a,\ \text{有}\lim_{n\to\infty} f(a_n)=L$$

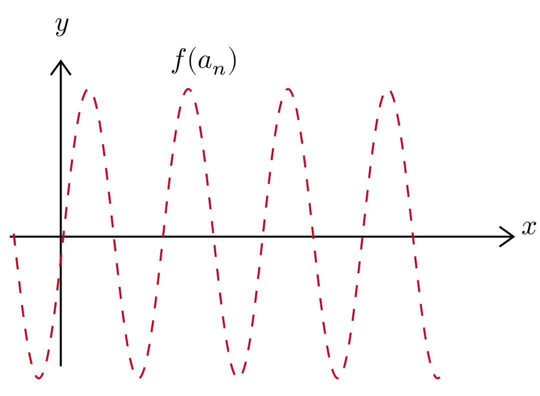
其不同之处在于是离散的趋近还是连续的趋近



除此之外,$f(x)$ 和 $f(a_n)$ 的函数图像如下所示

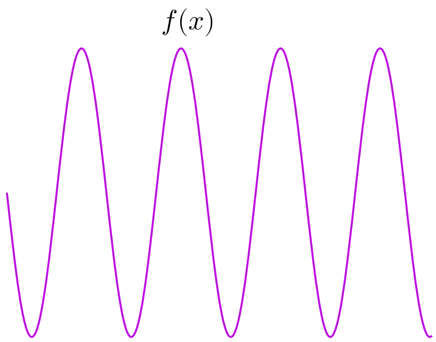


函数 $f(x)$

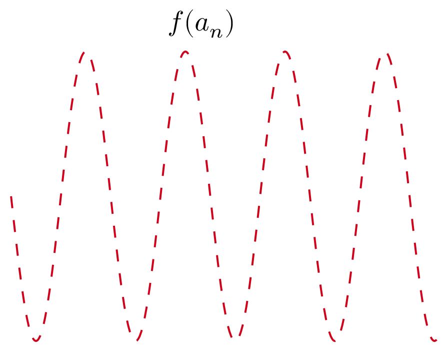


函数 $f(a_n)$

如上图所示 $f(a_n)$ 其实是 $f(x)$ 的抽样



用 $\varepsilon-\delta$ 求它的极限



用海涅定理求它的极限

需要注意的是, 是所有的数列（抽样）才能完全代表整体. 不能说我选了某个数列有极限就代表函数有极限. 总结:海涅定理表述了离散与连续、数列极限与函数极限的关系.

题目 12. 求极限 $\lim_{n\to\infty} n(\arctan n-\dfrac{\pi}{2})$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\arctan n-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= -1
\end{aligned}
$$

题目 12 的注记. 数列极限不可以直接使用洛必达法则, 若要使用洛必达法则, 则需要使用海涅定理进行替换.

题目 13. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left[\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right]^n$

解答.

$$
\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{\mathrm{e}}\right]^n
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})-n}
\end{aligned}
$$

对 $\lim_{n\to\infty} n^2\ln(1+\dfrac{1}{n})-n$ 求极限得:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

综上函数极限为 $e^{-\frac{1}{2}}$

题目 13 的注记. 数列极限可以直接使用等价无穷小和泰勒公式

题目 14. 求极限$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}))} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})-\tan\frac{\pi}{4})} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\sec^2\varepsilon\cdot\frac{2}{n}} \quad \varepsilon\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}) \\
&= e^4
\end{aligned}
$$

题目 14 的注记. 数列极限可以使用拉格朗日中值定理

1.3 无穷小与无穷大

1.3.1 无穷小

定义 1.3.1: 无穷小的定义

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷小.

$f(x)$ 是可以本身为 0 或者无限趋近于零, 其中 0 可以作为无穷小唯一常数.

注 1.3.1: 无穷小与函数极限的关系 (脱帽法)

$\lim_{x\to\cdot} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x\to\cdot} f(x)$ 为超实数值, 其实数部分为 A, 函数 $f(x)$ 的函数值为 $A + \alpha$

无穷小的性质

1 有限个无穷小的和是无穷小[3]

证明. 设 α_1 和 α_2 为无穷小量. 则 $0 \leqslant |\alpha_1 + \alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|$,$|\alpha_1| + |\alpha_2|$ 的极限为 0. 证明完毕. □

2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小[4]

证明. $|\alpha_1| \leqslant M$,α_2 是无穷小量. 那么 $0 \leqslant |\alpha_1 \times \alpha_2| = |\alpha_1| \times |\alpha_2| \leqslant M \times |\alpha_2|$ 证明完毕. □

3 有限个无穷小的乘积是无穷小[5]

无穷小的比阶

定义 1.3.2: 不同无穷小的比阶

- 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么就说 β 与 α 是同阶无穷小;

[3] 无穷个无穷小的和不一定是无穷小, 如 $\lim_{n\to\infty} = (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{n+n}) = \ln 2$

[4] 无界函数 × 无穷小量不一定是无穷小, 如 $\lim_{x\to\infty} x \times \frac{1}{x} = 1$

[5] 这个地方虽然张宇老师给出了证明, 但是好像存在一定的争议性

- 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$, 那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小[a];
- 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么就说 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$

[a]不是相等, 超实数系下没有加减运算, 只可以进行替换运算

前三个定义解释:$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$ 是指分子趋于 0 的速度比分母快,$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$ 是指分子趋于 0 的速度比分母慢,$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ 是指趋于 0 的速度一样. 同时需要注意的是,并不是任意两个无穷小都可进行比阶的[6].

对 $o(x)$ 的理解: 它是一个无穷小, 但是它趋向于 0 的速度比 x 要快, 也就是 $\lim_{x\to 0} \dfrac{o(x)}{x} = 0$, 也就是精度更高. 举一个实际的例子: $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)$, 那么就应该知道 $\tan x - x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5 = o\left(x^5\right)$, 也就是这玩意趋于 0 的速度非常之快! 速度相当于 x^5 , 这给我们的精度分析提供了一些帮助. 由此可以解释加减法不推荐用等价无穷小, 例如 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3} \neq \lim_{x\to 0} \dfrac{x - x}{x^3}$ 等价无穷小本身就是一种近似替换, 直接把 $\tan x$ 近似成 x 显然精度太低 (毕竟分母可是以 x^3 的速度趋于 0), 那么我们就需要更高精度的近似了, 也就是 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right) - x}{x^3}$, 这样我们就得到 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3} = \dfrac{1}{3} + \lim_{x\to 0} \dfrac{o(x^5)}{x^3}$, 显然, 后者分子趋于 0 的速度大概是 x^5 级别比分母更快所以忽略不计.

无穷小比阶的结论: 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续, 且当 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 是 x 的 m 阶无穷小,$\varphi(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小, 则当 $x \to 0$ 时 $F(x) = \int_0^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 是 x 的 $n(m+1)$ 阶无穷小

题目 15. 把 $x \to 0^+$ 时的无穷小 $a = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 进行排序, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列顺序是

解答. α:$n = 1, \lim_{x\to 0} \cos x^2 = 1$, 因此 $m = 0$, 那么 $n(m+1) = 1$;β:$n = 2, m = \frac{1}{2}$, 那么 $n(m+1) = 3$.γ:$m = \frac{1}{2}x, n = 2$, 那么 $n(m+1) = 2$. 因此顺序为 $\alpha\gamma\beta$

题目 16. 当 $x \to 0$ 时, 下列无穷小中最高阶的是:

$(A)\, (2+\tan x)^x - 2^x$ $\quad (B)\, (\cos x^2)^{\frac{1}{x}} - 1$ $\quad (C)\, \int_0^{1-\cos x} e^x \sin t^2 \mathrm{d}t$ $\quad (D)\, \int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3)dt$

解答. A 选项:$2^x[(1 + \dfrac{\tan x}{2})^x - 1] = \dfrac{\tan x}{2} \times x = \dfrac{1}{2}x^2$.

[6]例如, 当 $x \to 0$ 时,$x \sin \dfrac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小, 但是却不可以比阶, 也就是说既无高低阶之分, 也无同阶可言, 因为 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$ 不存在, 其值为 ∞ 和 0

B 选项:$-\dfrac{x^4}{2x}=-\dfrac{x^3}{2}$.

C 选项:$n=\dfrac{1}{2}x^2,m=x^2$ 那么 $n(m+1)=6$.

D 选项:$\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}}\ln(1+t^3)\mathrm{d}t=\int_{\sin x}^{0}\ln(1+t^3)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1-\sqrt{\cos x}}\ln(1+t^3)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1-\sqrt{\cos x}}\ln(1+t^3)\mathrm{d}t-\int_{0}^{\sin x}\ln(1+t^3)dt$ 那么 $1-\sqrt{\cos x}\sim\frac{\frac{1}{2}x^2}{2}$, $\int_{0}^{1-\sqrt{\cos x}}\ln(1+t^3)\mathrm{d}t$, 那么 $n(m+1)=8$, $\int_{0}^{\sin x}\ln\left(1+t^3\right)\mathrm{d}t$ 那么 $n(m+1)=8$, $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}}\ln(1+t^3)\mathrm{d}t$. 的阶数为 4. 综上 C 选项的阶数最高.

题目 16 的注记. D 选项: 如果为变上下限的形式, 则转化为变上限的形式, 然后使用结论进行计算, 之后按照无穷小的运算法则计算即可.

题目 17. 设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$. 当 $x\to 0$ 时，若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列结论中错误的是:

$(A)a=0$　　$(B)b=1$　　$(C)c=0$　　$(D)d=\dfrac{1}{6}$

解答. 对 $\dfrac{p(x)-\tan x}{x^3}$ 泰勒展开可得:$\dfrac{p(x)-(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5)}{x^3}=\dfrac{a+bx+cx^2+dx^3-x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{15}x^5}{x^3}$

综上易知:$a=0,b=1,c=0,d=\dfrac{1}{3}$. 因此,D 选项是错误的.

题目 18. 当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶的是

$(A)\int_0^{x^2}\ln(1+\sqrt{t})\mathrm{d}t$　　$(B)\int_{x^3}^{x^2}\sqrt{1-\sqrt{\cos t}}\,\mathrm{d}t$　　$(C)\int_x^{2\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t$　　$(D)\int_x^{\sin x}(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t$

解答. A:$\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$, 其 $n(m+1)=3$.

B:$\sqrt{1-\sqrt{\cos t}}=\frac{1}{2}x$, 其 $n(m+1)$ 的最小值为 4.

C: 使用积分中值定理可得:$\sin^2\varepsilon\times(2\sin x-x),\varepsilon\in(2\sin x,x)$, 使用等价无穷小可得:$2\sin x-x\sim x,\sin^2\varepsilon\sim\varepsilon^2\sim x^2$, 那么其最终化为 x^3.

D 选项:$(\sin x-x)(e^{\varepsilon^2}-1),\varepsilon\in(\sin x,x)$. 使用等价无穷小可得:$(-\dfrac{1}{6}x^5\times\varepsilon)\sim x^6$. 最终选择 D 选项.

题目 18 的注记. 如果上下限同阶的情况, 如本题的 C,D 选项, 则不可进行拆分, 需要使用积分中值定理1.4.7进行计算.

无穷小的运算

[7] 设 m, n 为无穷小, 则

1. $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min\{m, n\}$
2. $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}), x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
3. $o(x^m) = o(kx^m) = k \cdot o(x^m), k \neq 0$

题目 19. 若当 $x \to 0$ 时,$\alpha(x), \beta(x)$ 是非零无穷小量, 则以下的命题中正确的是:

A. 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha^2(x) - \beta^2(x)$; B. 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

C. 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$; D. 若 $\alpha(x) \sim \beta(x) = o(\alpha(x))$, 则 $\alpha(x)\ -\beta(x)$

解答.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 那么 $\lim_{x\to 0} [\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}]^2 = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)^2}{\beta(x)^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \pm 1$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 0$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 1$

题目 19 的注记. 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 那么 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$

题目 20. 设对任意的 x 总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, 且 $\lim_{x\to\infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x\to\infty} f(x)$

(A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定为零. (C) 一定不存在. (D) 不一定存在

解答. 令 $\varphi(x) = f(x) = g(x) = \begin{cases} x \\ 1 \\ 0 \end{cases}$, 易知 D 选项正确

题目 20 的注记. 遇见 $\leq, \geq$ 的形式, 可以一律取 $=$

[7]此处多用于泰勒公式的应用中, 会对上述高阶无穷小的运算提出要求

1.3.2 无穷大

定义 1.3.3: 无穷大的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于来一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大), 总存在正数 δ(或数 X), 只要 x 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)|>M$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$[a]) 时的无穷大.[b] 其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时,有}|f(x)|>M.$$

[a] 等价于 $x\to-\infty$ 同时 $x\to+\infty$

[b] 无穷大一定无界, 但无界不一定是无穷大量.与无穷小相同, 都是一个极限过程, 因此无穷大也是一个极限, 所以无界不一定是无穷大量

无穷大的比阶

- 当 $x\to+\infty$ 时,$\ln^a x \ll x^\beta \ll a^x$,其中$\alpha>0,\beta>0,a>1$.[8]
- 当 $n\to\infty$ 时,$\ln^a n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$,其中$\alpha>0,\beta>0,a>1$.

无穷大的性质

- 两个无穷大量的积仍未无穷大量
- 无穷大量与有界变量的和仍是无穷大量

无穷大与无界变量的关系

无穷大量一定是无界变量, 但无界变量不一定是无穷大量.[9]

[8] 由洛必达公式证明

[9] 如数列 $x_n=\begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数}\end{cases}$, 是无界变量, 但不是无穷大. 无穷大是一个极限

1.3.3 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中, 若 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小; 若 $f(x)$ 是无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

1.4 函数极限的运算

1.4.1 极限的四则运算法则

利用极限的四则运算法则求极限

[10] 如果极限不存在, 那么极限属于超实数系的范畴, 在超实数系下不可以进行代数运算, 只可以进行替换运算.但是如果极限均存在, 那么可以进行代数计算. 那么就可以使用下面的运算法则:

若 $\lim f(x) = A$,$\lim g(x) = B$, 那么

- $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k\lim f(x) \pm l\lim g(x) = kA \pm lB$, 其中 k, l 为常数
- $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) \equiv A \cdot B$, 特别的, 若 $\lim f(x)$ 存在,n 为正整数, 则 $\lim[f(x)]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$
- $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$

注 1.4.1: 常用结论

存在 $\pm$不存在 $=$ 不存在[a]	不存在 $\pm$不存在 $=$不一定[b]
存在 $\times(\div)$ 不存在 $=$ 不一定	不存在 $\times(\div)$ 不存在 $=$ 不一定

[a]只有这一个是不存在, 其余都是不一定或者存在

[b]反例:$\lim_{x\to 0}(\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}) = 0$

题目 21.

1. 证明:$\lim f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x) = A\lim g(x)$

[10]易错, 在计算中往往容易忽视极限不存在的情况

2. 证明:$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在,$\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$

3. 证明: 若 $\lim_{x\to x_0} g(x) = A, \lim_{x\to A} f(x) = B$, 能否推出 $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = B$, 若不能, 则满足什么条件可以推出该结论?

证明. 1. $\lim f(x) = \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim g(x) = A \cdot 0 = 0.$

2. **由于** $g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$**, 则** $\lim g(x) = \lim \dfrac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim \frac{f(x)}{g(x)}} = \dfrac{0}{A} = 0$

3. 无法推出, 有如下反例

- $g(x) = x\sin\dfrac{1}{x}, f(x) = \begin{cases} x, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$,$\lim_{x\to 0} g(x) = 0, \lim_{x\to 0} f(x) = 0$, 但是当 $x \to 0$ 时,$g(x) = x\sin\frac{1}{x}$ 不仅趋于 0, 同时还能在 $\dfrac{1}{n\pi}$ 这样的点处严格等于 0. 此时 $\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1$, 所以 $\lim_{x\to 0} f(g(x))$ 不存在, 其极限值在 $(0, 1)$ 之间反复横跳.
- $g(x) \equiv 0, f(x) = \begin{cases} x, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$,$\lim_{x\to 0} g(x) = 0, \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. 但 $\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1$

因此结论不成立. 若要成立, 则应改为:

- 若 $\lim_{x\to x_0} g(x) = A, \lim_{x\to A} f(x) = B$, 且 $g(x) \neq A$[11],则 $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = B$
- 若 $\lim_{x\to x_0} g(x) = A, \lim_{x\to A} f(x) = B$, 即 $f(x)$ 在 $x = A$ 处连续[12],则 $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = B$

□

题目 21 的注记. 此题的三个证明是常用结论

题目 22. 求 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$. 极限

解答. 由于该极限的分子 e^x 的极限为无穷大, 无穷大属于极限中的不存在情况, 因此不可以使用极限的四则

[11] 从根本上排除了常值函数和振荡间断点的反例

[12] 不管内函数能否取到极限值, 只要外函数连续, 复合之后极限一定存在

运算法则1.4.1, 也不可以对分母使用两个重要无穷小进行化简. 只能使用等价变换进行求解. 即

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}}\\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})}\\
&\xlongequal{\text{泰勒展开}} \lim_{x\to+\infty} e^{x-x+\frac{1}{2}}\\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

题目 23. 已知 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)\neq 0$, 求$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{f'(x)}$

解答. 如果想把分子写 $x\to 0$ 时的导数形式, 然后进行计算, 即 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{f'(0)}=\frac{f'(0)}{f'(0)}=1$ 进行运算, 则不满足极限四则运算法则1.4.1, 因为其分母为 0, 违背了极限的四则运算法则, 因此不可这样计算, 需要对其进行恒等变形计算. 即

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}\\
&= \frac{1}{f''(0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x^2}\\
&\xlongequal{\text{洛必达法则}} \frac{1}{f''(0)}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} \quad \text{(易错: 此处的处理不可再次使用洛必达, 因为二阶导在此不连续)}\\
&= \frac{1}{f''(0)}\frac{1}{2}f''(0)\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

题目 23 的注记. 使用极限运算法则的注意事项: 在求分式这种形式的极限时, 一定要注意分子的极限是不是无穷, 如果极限为无穷则不可以使用极限运算法则对极限进行拆分计算, 同时还要注意分母的极限是不是 0, 如果是 0, 则也不可以使用极限运算法则计算, 只能进行等价替换进行运算.

题目 24. 求 $\lim_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x)$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^x x}) \\
&= \frac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{x^2\times\tan^2 x} \\
&= \frac{2x\times\frac{1}{3}x^3}{x^4} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

题目 24 的注记. 本题的有另一个解法, 但是相较上面的解法相比有些复杂, 但是记录一个常见的错误, 即什么时候可以用等价无穷小的问题, 其写法为:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x) = (\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}) \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0}(\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^4})
\end{aligned}
$$

此处有一个常见的错误, 就是能不能把 $\cos^2 x$ 代换为 1, 其实是不能的, 即使最后答案正确, 此时 $x\to 0$ 时, 分母也趋于 0, 如果进行替换, 则违背了极限的运算法则, 因此不能进行替换

$$
\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x\cos x)(\sin x + x\cos x)}{x^4} \xlongequal{\text{泰勒公式}} \frac{2}{3}
$$

1.4.2 泰勒公式

泰勒公式的目的是提高精确度, 用更高次的多项式来逼近函数

带拉格朗日余项的 n 阶泰勒展开式

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 **的某个邻域** $U(x_0)$ **内具有 (n +1) 阶导数**, 那么对任一 $x \in U(x_0)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

带佩亚诺余项的 n 阶泰勒展开式

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 **处具有** n **阶导数, 那么存在** x_0 **的一个邻域, 对于该邻域内的任一** x, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$

带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

对带有佩亚诺余项的泰勒公式取 $x_0=0$, 则可以得到带有佩亚诺余项的麦克劳林公式[13]

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

当 $x \to 0$ 时, 由带有佩亚诺余项的麦克劳林公式可得, 有以下结论

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$
$\arcsin x = x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$\arccos x = \frac{\pi}{2}-\arcsin x=\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$
$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$	$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$
$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$(1+x)^a = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$
$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$	$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$
$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots$ [1]	$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

[13]此处有一个易被忽略的地方, 只有函数在 x_0 处,n 阶导数存在, 才可以展开到 n 阶

[1]该函数为反双曲正弦函数

注 1.4.2: 泰勒公式应用时的展开原则

- $\frac{A}{B}$ 型, 适用于”上下同阶”原则: 具体来说, 如果分母或者分子是 x 的 k 次幂, 则应把分子或分母展开到 x 的 k 次幂. 如:$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$, 此处 $\ln(1+x)$ 应展开为 $x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$
- $A-B$ 型, 适用”幂次最低”原则: 将 A,B 分别展开到他们系数不相等的 x 的最低次幂为止. 如: 已知当 $x\to 0$ 时,$\cos x-e^{\frac{x^2}{2}}$ 与 ax^b 为等价无穷小, 求 a,b. 则应展开为 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)$.

注 1.4.3: 泰勒公式的解题技巧

1. 泰勒公式构建了函数与其高阶导之间的联系, 因此看见高阶导数, 要条件反射的想到泰勒公式
2. 奇函数的泰勒展式只有奇数次幂, 偶函数的泰勒展式只有偶数次幂[a]
3. 极限当中, 用佩亚诺余项 $O(x$ 的 n 次幂), 证明题中, 用拉格朗日余项, 找提供信息最多的点作为展开点
4. 等价无穷小的本质是泰勒的低精度形式, 加减法不建议使用等价无穷小, 建议直接泰勒
5. 加项减项的本质也是泰勒[b]

[a]如 $\sin x$ 和 $\cos x$
[b]如 $\ln(x)=\ln(1+x-1)\sim x-1$

题目 25. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+x^2\right)-x}{x^2}$

解答. 对等式进行泰勒展开即:

$$\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2}=\frac{(x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

题目 26. $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导且满足 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)\sin x+\ln(1+x)}{x^3}=0$ ，求 $f(0),f'(0),f''(0)$

解答. 对原式中 $f(x)$ 和 $\sin x$ 和 $\ln(1+x)$ 各项进行泰勒展开得:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x+\ln(1+x)}{x^3}=0\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2)(x-\frac{1}{6}x^3)-(x-\frac{1}{6}x^3)+(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3})}{x^3}=0\\&=\frac{(f(0)+1)x+(f''(0)-\frac{1}{2})x^2+(-\frac{1}{6}f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{1}{3})x^3+o(x^3)}{x^3}=0.\end{aligned}$$

可以得到的是, 分子的极限一定为 0, 那么 $\begin{cases}f(0)+1=0\\ f'(0)-\dfrac{1}{2}=0\\ -\dfrac{1}{6}f(0)+\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{1}{3}=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}f(0)=-1\\ f'(0)=\dfrac{1}{2}\\ f''(0)=-1\end{cases}$

题目 26 的注记. 看见各阶导数应想到泰勒公式

题目 27. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=2$, 试求 $f(0),f'(0)$

解答. 对原式进行通分然后对 $\sin x$ 进行泰勒展开:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^2}=2\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x+xf(x)+o(x^2)}{x^2}=2\end{aligned}$$

根据函数极限与无穷小的关系1.3.1可知,$1+f(x)=2x+o(x)$,$f(x)=2x-1+o(x)$ 因为函数在 $x=0$ 上连续, 因此 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$,$f(x)=2x-1+o(x)$ 的表达式是 $x\to 0$ 时的表达式, 将 $x=0$ 带入可得 $f(0)=-1$, 使用导数定义求得 $f(x)$ 在点 0 处的导数, 即 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{2x+o(x)}{x}=2$

题目 27 的注记. 看见此类问题, 第一步应先通分, 然后将具体函数的泰勒进行展开 (因为此题中的条件是连续而不是可导, 如果是可导的话可以全部进行展开), 然后把 $f(x)$ 的表达式给求出来

题目 28. 设函数 $f(x)\ = \sec x$ 在 $x = 0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1 + ax + bx^2$, 则

$(A)a = 1, b = \frac{1}{2}$ $\quad$ $(B)a = 1.b = \frac{1}{2}$ $\quad$ $(C)a = 0, b = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $(D)a = 0, b = \frac{1}{2}$

解答. $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, 该函数为偶函数, 因此泰勒展开只有偶数次幂, 那么 $a = 0$, 该函数一定大于 0, 因此 $b \geq 0$, 排除 C,A,B.

题目 28 的注记. 本题也可以将 $\sec x$ 展开, 但是较为麻烦, 可以采用上述的方法进行运算.

题目 29. 设函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x = 0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax + bx^2 + cx^3$, 则

(A)$a = 1, b = 0, c = -\frac{7}{6}$ $\quad$ (B)$a = 1, b = 0, c = \frac{7}{6}$

(C)$a = -1, b = -1, c = -\frac{7}{6}$ $\quad$ (D)$a = -1, b = -1, c = \frac{7}{6}$

解答. 法 1: 对分子进行泰勒展开, 然后使用整式除法

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-\frac{7}{6}x^3 \\ \hline
1+x^2 & x-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5 \\ \hline
 & x+x^3 \\ \hline
 & -\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5 \\ \hline
 & -\frac{7}{6}x^3-\frac{7}{6}x^5
\end{array}
$$

法 2: 对整式进行泰勒展开与等价无穷小替换 $f(x) = (x - \dfrac{x^3}{6})(1 - x^2) = x - \dfrac{7}{6}x^3$

法 3: 对整式进行泰勒展开计算可得 $x - \dfrac{7}{6}x^3$

题目 29 的注记. 遇见此类问题, 解题方法的优先级为长除法, 利用等价替换, 使用定义 (利用泰勒公式直接所有项都展开)

1.4.3 洛必达法则

定义 1.4.1: 洛必达法则定义

- $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0(\infty)$
- $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x)\neq 0$
- $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或∞)

则 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$

需要注意的是使用过洛必达法则之后的极限必须存在, 即 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 必须存在.

题目 30. 求 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\times\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$

解答. 该函数也是 $\dfrac{0}{0}$ 型, 但是如果使用洛必达法则, 则 $2x\times\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$, 极限显然不存在, 因此不可以使用洛必达法则. 则正确求法为 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\times\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\times\sin\dfrac{1}{x}=0.$

注 1.4.4: 洛必达可以洛到几阶

- n 阶导连续, 则最多可以洛到 n 阶.
- n 阶导存在/n 阶邻域内可导, 则最多能洛到 $n-1$ 阶.
- 实际上,n 阶等连续, 不一定能够洛到 n 阶[a]. 结论如下:
  $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 到底能用多少次洛必达法则假设 m 和 n 均为正整数, 并且 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0.$

  1. 如果 $f(x)$ 在 x_0 的 n 阶导数连续, 则:
     (a) 若 $m\leqslant n$, 则 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 可以用 m 次洛必达 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f^{(m)}(x)}{m!}=\dfrac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$
     (b) 若 $m>n$, 则 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 则一次都不能用洛必达.
  2. 如果 $f(x)$ 在 x_0 有 n 阶导数 (没说 n 阶导函数连续), 则:

(a) 若 $m \leqslant n-1$, 则 $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 可以用 m 次洛必达 $\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} = \dfrac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$

(b) 若 $m = n$, 则 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x^m}$ 可以用 $m-1$ 次洛必达出现 $\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(m-1)}(x)}{m!(x-x_0)}$, 然后利用导数定义 $f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$ 进一步计算

(c) 若 $m \geq n+1$, 则 $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{(x-x_0)^m}$ 一次都不能用洛必达

[a]但是考研中这点没有难为过人, 因此可以粗略的认为上述两条是成立的

题目 31. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 并且 $f(0)$=0, $f'(0)$=0, $f''(0)$=0, 并且 $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^3} = 1$, 问 $\dfrac{f(x)}{x^3}$ 是否可以进行洛必达法则? 如果可以请求出 $f'''(0)$; 如果不存在, 请说明理由.

解答. 看到此题的二阶导数连续, 一般都认为可以进行洛必达, 但是其实该方程式一次洛必达都不可以进行, 假设函数 $f(x)$ 表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{28}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^3, x \neq 0 \\ \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

那么

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{28}{9} x^{\frac{19}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3} x^{\frac{16}{9}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3x^2, x \neq 0 \\ \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

二阶导为

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{532}{82} x^{\frac{10}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{44}{27} x^{\frac{7}{9}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{9} x^{\frac{4}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 6x, x \neq 0 \\ \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

可知函数 $f'(0) = 0$, 且 $f''(0) = 0$, 该函数完全满足题意, 但是对 $\frac{f(x)}{x^3}$ 使用第一次洛必达时, 为

$$1 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{28}{9} x^{\frac{19}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3} x^{\frac{16}{9}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3x^2}{3x^2}$$

洛必达之后的极限显然不存在, 因此该情况下不可以使用洛必达法则.

题目 31 的注记. 本题需要注意, 不是所有的条件下都可以进行洛必达法则, 由此可以抽象出来一个样例:

$$f(x)=\begin{cases}x^a\sin\dfrac{1}{\sqrt[b]{x}}+x^c, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$$

题目 32. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导, 且 $\lim_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=2$, 试求 $f(0), f'(0)$ 以及 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)+e^x}$

解答. 本题中未说明 $f(x)$ 在邻域内连续可导, 只说明一阶导存在, 因此一阶都不可以进行洛必达法则, 但是可以使用泰勒公式对上述式子进行泰勒展开, 因此上述式子的解法为对原式进行通分然后对 $\sin x$ 进行泰勒展开:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^2}=2\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{x+xf(x)+o(x^2)}{x^2}=2\end{aligned}$$

根据函数极限与无穷小的关系1.3.1可知,$1+f(x)=2x+o(x)$,$f(x)=2x-1+o(x)$ 因为函数在 $x=0$ 上连续, 因此 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$,$f(x)=2x-1+o(x)$ 的表达式是 $x\to 0$ 时的表达式, 将 $x=0$ 带入可得 $f(0)=-1$, 使用导数定义求得 $f(x)$ 在点 0 处的导数, 即 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{2x+o(x)}{x}=2$, 然后带入极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)+e^x}=\dfrac{x}{-1+2x+e^x}=\dfrac{1}{3}$

题目 32 的注记. 看见此类问题, 第一步应先通分, 然后将具体函数的泰勒进行展开 (因为此题中的条件是连续而不是可导, 如果是可导的话可以全部进行展开), 然后把 $f(x)$ 的表达式给求出来

题目 33. 求极限 $\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-e^{\pi})$

解答. (1) 拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to+\infty}x\times e^{(\varepsilon)}(\arctan x-\frac{\pi}{2})\\ &=e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

$$= -e^{\pi}$$

(2) 提后项:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty} e^{\pi}(e^{\arctan\frac{\pi}{2}} - 1) \\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{\pi} \times \arctan\frac{-\pi x}{2} \\
&= -e^{\pi}
\end{aligned}$$

(3) 直接洛:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{\pi+\arctan x}{2}} - e^{\pi}}{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x} \times \dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} \\
&= -e^{\pi}
\end{aligned}$$

题目 33 的注记. 该形式为无穷大乘以无穷小, 可以构造无穷大比无穷大, 或无穷小比无穷小, 之后进行洛必达. 方法多了, 往往会忽视洛必达, 但有时洛必达反而会简单一些.

题目 34. 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' + 2y' + y = e^{3x}$ 的解, 且满足 $y(0) = y'(0) = 0$, 则当 $x \to 0$ 时, 与 $y(x)$ 为等价无穷小的是 ()

(A).$\sin x^2$ (B).$\sin x$ (C).$\ln(1+x^2)$ (D). $\ln\sqrt{1+x^2}$

解答. 等价无穷小具有传递性, 因此 $\sin x^2 \sim x^2$,$\sin x \sim x$,$\ln(1+x^2) \sim x^2$,$\ln(\sqrt{1+x^2}) \sim \dfrac{1}{2}x^2$. 若与 $y(x)$ 为等价无穷小, 那么 $\lim_{x\to 0}\dfrac{y(x)}{f(x)} = 1$. 对 $y(x)$ 进行泰勒展开 $y(x) = y(0) + y'(0)x + \dfrac{y''(0)}{2}x^2$. 当 $x = 0$ 时, 有 $y''(0) = 1$, 易知一阶导是连续的, 对函数形式进行分析, 可知函数在二阶导也是连续的, 那么就可以展开到二阶, 那么 $y(x) = \dfrac{1}{2}x^2$.

除此之外, 还可以这样解决, 已知二阶导连续, 那么对 $\dfrac{y(x)}{A/B/C/D}$ 进行洛必达可知 D 选项正确.

1.4.4 等价替代求极限

两个重要极限

$$\boxed{\lim_{\square\to\infty}(1+|\square|)^{\frac{1}{\square}}=e^{|\square|\frac{1}{\square}} \qquad \lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1}$$

等价无穷小

等价无穷小的本质是泰勒的低精度形式

关于等价无穷小, 有以下两个定理

定义 1.4.2: 等价无穷小的充要条件

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha)$$

定义 1.4.3: 等价无穷小的替换准则

设 $\alpha\sim\tilde{\alpha}$,$\beta\sim\tilde{\beta}$, 且 $\lim\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在, 则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

等价无穷小的本质还是在做恒等替换, 所以一般情况下整式的乘除法可以直接用等价无穷小替换, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 但是需要遵循以下代换原则[a]

- 乘除关系可以换: 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$
- 加减关系一定条件下可以换[b]
  - 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq 1$, 则$\alpha-\beta\sim\alpha_1-\beta_1$
  - 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq -1$, 则$\alpha+\beta\sim\alpha_1+\beta_1$

加减关系代换准则证明如下:

证明.

$$\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\beta_1}=\lim \frac{\beta(\dfrac{\alpha}{\beta}-1)}{\beta_1(\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}-1)}=1$$

□

[a]其实没有什么替换原则, 本质其实是因为超实数系下不能进行实数运算, 只能进行替换运算
[b]这样的形式其实不经常用, 看见加减最好使用泰勒公式进行替换运算

以下为常用等价无穷小

当 $x \to 0$ 时, 有

1.

$$\boxed{\begin{aligned} & x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \\ & \quad \sim \ln(1+x) \\ & \quad \sim e^x - 1 \end{aligned}}$$

2.

$$\boxed{\begin{aligned} & (1+x)^a \sim 1+ax \\ & a^x - 1 \sim x \ln a \\ & 1-\cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2}x^2 \end{aligned}}$$

3. 上述结论的推广:

   当 $x \to 0$ 时, 若

$$(1+x)^a - 1 \sim ax,$$

   则

$$\alpha(x) \to 0, \alpha(x)\beta(x) \to 0,$$

   那么

$$[1+\alpha(x)]^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$$

4.

$$\boxed{\frac{1}{2}x^2 \sim \sec x - 1 \sim x - \ln(1+x)}$$

5.

$$\boxed{\frac{1}{6}x^3 \sim x - \sin x \sim \arcsin x - x}$$

6.

$$\boxed{\frac{1}{3}x^3 \sim x - \arctan x \sim \tan x - x}$$

7. $x \to 1$ 时,$\ln x \sim x - 1$, 因为 $\ln(1 + x - 1) \sim x - 1$

8. 当 $A \to 0, B \to 0$ 时,$e^A - e^B \sim A - B$, 因为 $e^B(e^{A-B} - 1) \sim A - B$

题目 35. 假设 $\lim_{x\to0} \dfrac{f(x)}{1-\cos x}$ 存在

解答. 若 $\lim_{x\to0} \dfrac{f(x)}{1-\cos x}$ 存在, 那么构造恒等变形:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} \times \frac{\frac{1}{2}x^2}{1-\cos x}\right) \\ &\xlongequal{\text{等价无穷小}} \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

题目 35 的注记. 整体的乘除法本质是构造恒等变形

等价无穷小替换的本质是构造恒等变形.需要谨记: 在使用等价无穷小时, 需要按照上述步骤进行编写, 不可以省去恒等变形步骤, 如果省去则可能导致错误. 如下题

题目 36. <u>求极限</u>$\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$

解答. 由常用不等式1.5.2的 $x \to 0, |\sin x| \leq |x|$, 那么

$$|\frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}| \leq |\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}|$$

由夹逼准则得:

$$0 \leqslant \lim_{x\to 0} |\frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}| \leqslant \lim_{x\to 0} |\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}|$$

左右极限都为 0, 因此 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$ 极限为 0

题目 36 的注记. 本题有一个常见的错误做法, 就是直接把 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$ 进行等价无穷小替代, 写为 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$, 但是这是错误的, 如果这样写, 那么 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x^2 \sin \frac{1}{x}} \times \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$, 在 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x^2 \sin \frac{1}{x}}$ 的分母中, 存在 $x = \dfrac{1}{n\pi}$ 的间断点, 根据极限定义, 极限如果存在, 那么去心邻域一定要有定义, 那这样写就违背了极限的存在准则, 因此极限 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$ 不存在, 不可以这样写.

抽象函数使用等价无穷小求极限

抽象函数等价的条件是$f(x) \to 0$ 只有 $f(x) \neq 0$, 才能将 $\sin(f(x)) \sim f(x)$,

题目 37. 设 $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0$, 则下列命题中正确的个数为

(1)$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

(2)$\lim_{x\to 0} (1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = \mathrm{e}$.

(3)若$f'(x_0) = A$, 则 $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x_0 + \varphi(x)) - f(x_0)}{\varphi(x)} = A$

解答. 这三个都是错的, 因为 $\varphi(x)$ 在分母上, 都可能为 0. 比如函数 $\varphi(x) = x \times \sin \dfrac{1}{x}$, 其极限为 0, 但是又存在 $x = \dfrac{1}{n\pi}$ 的无定义点.

积分等价替换求极限

定义 1.4.4: 积分等价替换法则

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \sim \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

定义 1.4.5: 变限积分求导公式

设 $F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$, 其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 可导函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的值域在 $[a,b]$ 上, 则在函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的公共定义域上, 有

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

题目 38. 求 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\,\mathrm{e}^{x^2}+x^2}$

解答. 看见变上限积分类型计算题应首先想到洛必达法则, 对原式进行进行洛必达法则得:

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}+x^2\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+2x^2\mathrm{e}^{x^2}+2x}\\&=\frac{1+x^2}{1+2x^2+\frac{2x}{e^{x^2}}}\end{aligned}$$

对极限取大头可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{1+2x^2+\frac{2x}{e^{x^2}}}=\frac{1}{2}$$

题目 38 的注记. 在极限中, 处理变上限积分的最好办法是洛必达. 能洛则洛, 不能洛的话就换元之后再洛.

题目 39. 若 $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}dt}{bx-\sin x}=1$, 求 a,b, 其中 a,b 为正数

解答.

$$\begin{aligned}原式&=\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{b-\cos x}\\&=\frac{1}{a}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^2}{b-\cos x}\end{aligned}$$

若分子趋近于零, 但是该等式的极限为 1, 那么该分母的极限一定趋近于 0, 那么 b 一定为 1

$$\text{原式} = \frac{1}{a} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$a = 2$$

综上所述 $a = 2, b = 1$

题目 39 的注记. 对于本题, 还可以可被积函数进行等价运算1.4.4, 但是这不是通法, 因此应当对此类问题首先进行洛必达. 以下为使用被积函数等价运算计算过程: 由于当 $t \to 0$ 时,$\frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \sim \frac{t^2}{a^2}$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\mathrm{d}t}{bx - \sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{a}\mathrm{d}t}{bx - \sin x} \\
&= \frac{1}{3a} \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{bx - \sin x} \xlongequal{b\neq 1} \frac{1}{3a} \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{bx - x} = 0
\end{aligned}$$

等式矛盾, 因此 $b = 1$, 对上式进行泰勒展开得:

$$1 = \frac{1}{3a} \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin x} = \frac{1}{3a} \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\frac{x^3}{6}} = \frac{2}{a}$$

综上所述 $a = 2, b = 1$

题目 40. 求极限 $\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^2 - \sin^2 x}$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{(x - \sin x)(x + \sin x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{2x \times \frac{1}{6}x^3}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$$

题目 40 的注记. 看见形如 $x^2 - \sin x^2$ 的形式, 就应当想到 $(x+\sin x)(x-\sin x)$ 的展开, 然后可以通过泰勒展开进行计算

题目 41. 设函数$f(x)$ 连续, 且$f(0) \neq 0$, 求极限$\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x (x-t)\, f(t)\, \mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\, \mathrm{d}t}$

解答. **由于分母有两个变量, 因此不好进行洛必达, 那么此时就要对分母进行换元**, 换元过程如下: 令 $(x-t) = u$, 对等式两边求微分得:$d(-t) = du$.

首先, 对分子展开, 对分母换元得:

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

对原式进行进行洛必达法则得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x)}\end{aligned}$$

如果此时还要进行洛必达, 那么分母则会出现 $f'(x)$, 那么最后是不可计算的, 因此此时应进行积分中值定理, 则 $\int_0^x f(t)dt = xf(\varepsilon)(\varepsilon \in (0,x))$[14]

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{xf(c)}{xf(c) + xf(x)}$$

[14]这个地方一定要可以夹起来, 如果夹起来的极限不一样, 那么则不可以使用积分中值定理

$$= \frac{f(0)}{f(0)+f(0)} = \frac{1}{2}$$

题目 41 的注记. **如果出现两个变量则换元之后再洛，如果实在洛不了的话，再考虑使用积分中值定理. 积分中值定理和拉格朗日中值定理中出现的 ε，最后一步想说明最终结果时，严格来说需要夹逼准则.(卷面上可以不体现出来，但脑子里必须把这些事情想明白)**

本题也可以积分替换进行计算, 但是不推荐, 写法如下:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}. \\
&= 1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t} \\
&= 1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(0)}{2}x^2}{f(0)\,x^2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

1.4.5 抓大头和抓小头

本质是同时处以最高阶/最低阶

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0\text{，当}n>m\\ \frac{a_0}{b_0}\text{，当}n=m\\ \infty\text{，当}n<m\end{cases}$$

还有一个重要的等价为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\sim e^{-1}\times n$该等价由斯特林公式 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$ 而来, 又可写为$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}$

题目 42. 求 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^2+3x+10}{3x^3+2x+7}$

解答. 对等式上下同除以 x^3 得 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{10}{x^3}}{3+\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\dfrac{4}{3}$

题目 43. 求 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+2x^2+3x^4}{2x+4x^3+x^5}$

解答. 上下同除以 x 得 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+2x+3x^3}{2+4x^2+x^4}=\dfrac{1}{2}$

1.4.6 利用函数性质求极限

幂指函数性质求极限

一般主要是使用幂指函数的性质进行恒等变换, 即$a^b = e^{b\ln a}$. **如果两个函数的指数相同, 则可以提后项/前项**.

除此之外, 还有一个常用的结论:对于 $\forall a,b>0$ 均有:$\lim_{x\to 0^+} x^a(\ln x)^b=0$, 证明如下:

证明.

$$\begin{aligned}
原式 &= \lim_{x\to 0^+} x^a\cdot \ln^b x\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^b x}{x^{-a}}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{b\ln^{b-1} x\cdot \frac{1}{x}}{-ax^{-a-1}}
\end{aligned}$$

每洛一次, 分子次数-1. 分母次数不变, 一直洛下去, 分子次数要么洛到 0(即 $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{c}{x^{-a}}=\lim_{x\to o^+} cx^a=0$), 要么洛成负数 ($\lim_{x\to 0^+} c\dfrac{\ln^m x}{x^{-a}}=0$), 最终结果都是 0 □

题目 44. 求极限 $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x-1)}$

解答.

$$\begin{aligned}
原式 &= \lim_{x\to 0^+} x^{e^{x\ln x}-1}\\
&= \lim_{x\to 0^+} x^{x\ln x}\\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln^2 x}=1
\end{aligned}$$

题目 45. 求极限 $\lim_{x\to 0}(\cos 2x + 2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^4}\ln(\cos 2x+2x\sin x)} \\
&= e^{lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\ln((1-\frac{4x^2}{2}+\frac{(2x)^4}{24})+x-\frac{x^3}{6})} \\
&= e^{lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{3}x^4}{x^4}} \\
&= e^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

题目 46. 求极限$\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$

解答. 本题方法较多, 因此分阶段进行分析:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln x}-e^{x\ln\sin x}}{x^2\ln(1+x)} \\
&= \frac{e^{x\ln x}-e^{x\ln\sin x}}{x^3}
\end{aligned}
$$

接下来, 可以对上述式子进行中值定理计算或者使用提后项的方法:

中值定理:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\varepsilon}(x\ln x - x\ln sinx)}{x^3} \\
&= \frac{\ln x-\ln\sin x}{x^2}
\end{aligned}
$$

提后项:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\sin x}(e^{x\ln x-x\ln\sin x}-1)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x\ln x-x\ln\sin x}-1)}{x^3}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\ln x - \ln\sin x}{x^2}$$

然后对于 $\dfrac{\ln x - \ln\sin x}{x^2}$ 可使用中值定理和对数运算法则进行计算:

拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}(x-\sin x)}{x^2} \qquad (x<\varepsilon<\sin x)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^2\varepsilon}\\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

对数运算法则:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{x}{\sin x})}{x^2}\\
&= \frac{\ln(1+\frac{x}{\sin x}-1)}{x^2}\\
&= \frac{\frac{x}{\sin x}-1}{x^2}\\
&= \frac{x-\sin x}{x^2\sin x}\\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

题目 47. 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^{\sin x}-3^{\sin x}}{x^2}$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{3^{\sin x}[(1+\frac{x}{3})^{\sin x}-1]}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}\sin x}{x^2}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

对数函数性质求极限

极限当中, 见到 $\ln A$,A 趋于 1 时, 优先想到构造成 $\ln(1+\text{无穷小})$ 的形式, 如果这个式子本身进行恒等变形之后的结果过于复杂, 则要想到利用对数运算法则构造 $\ln(1+\text{无穷小})$.

题目 48. 已知当 $x \to 0$ 时,$f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x} - 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是 x 的 n 阶无穷小, 则 $n =$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}(\ln(1+x) - \ln(1-x) - 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})) \\
&= \lim_{x\to 0}(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{1}{3}x^3) \\
&= x^3
\end{aligned}
$$

综上易知:$n = 3$

题目 49. 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x + \mathrm{e}^x) - x}{\ln(\mathrm{e}^{2x} - x^2) - 2x}$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - \ln e^x}{\ln(\mathrm{e}^{2x} - x^2) - \ln e^{2x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin^2 x + e^x}{e^x}}{\ln\frac{e^{2x} - x^2}{e^{2x}}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + \frac{\sin^2 x}{e^x})}{\ln(1 - \frac{x^2}{e^{2x}})} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{e^x}}{\frac{x^2}{e^{2x}}} \\
&= \lim_{x\to 0} e^x = 1
\end{aligned}
$$

题目 50. 已知 $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^p}=c\neq 0$

A.$p=3,c=-\dfrac{4}{3}$ B. $p=-3,c=\dfrac{4}{3}$ C.$p=\dfrac{4}{3},c=3$ D. $p=-\dfrac{4}{3},c=-3$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\arctan x-\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^p}=c\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{2x^3}{3}-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}}{x^p}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4}{3}x^3}{x^p}
\end{aligned}$$

综上易知:$p=3,c=-\dfrac{4}{3}$

题目 51. $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x}\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}\\
&=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\frac{\ln x}{x}}{\ln x}\times\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln\frac{\ln x}{x}}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\ln x-\ln x}{\ln x}}=e^{-1}
\end{aligned}$$

题目 51 的注记. 注意:$a^b=e^{b\ln a}$在这个题中非常易错

1.4.7 中值定理求极限

中值定理求极限通常和夹逼准则配合求极限

夹逼准则

定义 1.4.6: 函数极限夹逼准则

如果

- 当 $x \in U^{\circ}(x_0, r)$(或 $|x| > M$) 时

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

- $\lim_{x \to x_0(x \to \infty)} g(x) = A, \lim_{x \to x_0(x \to \infty)} h(x) = A$

那么 $\lim_{x \to x_0(x \to \infty)} f(x)$ 存在, 且等于 A.

积分中值定理

定义 1.4.7

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则在积分区间 $[a, b]$ 上至少存在一个点 ε , 使下式成立

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\varepsilon)(b - a)$$

其中,a、b、ε 满足：$a \leq \varepsilon \leq b$

拉格朗日中值定理求极限

如果两个函数的形式一样, 那么可以使用拉格朗日中值定理进行计算, 但是处理之后的 ε 需要可以使用夹逼准则.

题目 52. $\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\right)(a > 0)$

解答. 该题存在相近的函数形式, 使用拉格朗日中值定理进行解析 $a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} = a^{\frac{1}{\varepsilon}} \ln a \frac{1}{\varepsilon^2}, \varepsilon \in (x, x+1)$

$$\text{原式} = x^2 a^{\frac{1}{\varepsilon}} \ln a \frac{1}{\varepsilon^2}$$

当 $\varepsilon \to x+1$ 时, 原式的极限为 $x^2 a^{\frac{1}{x+1}} \ln a \frac{1}{(x+1)^2} = \ln a$

当 $\varepsilon \to x$ 时, 原式的极限为 $x^2 a^{\frac{1}{x}} \ln a \frac{1}{x^2} = \ln a$

综上, 函数极限为 $\ln a$

题目 53. $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1}\right)(a>0)$

解答. 该题存在相近的函数形式, 使用拉格朗日中值定理进行解析 $\arctan\dfrac{a}{n} - \arctan\dfrac{a}{a+1} = -\dfrac{a}{\varepsilon^2+a^2}$

$$原式 = \lim_{n\to\infty} n^2(-\frac{a}{\varepsilon^2+a^2}), (\varepsilon \in (n, n+1))$$

当 $\varepsilon \to n+1$ 时, 原式的极限为 $\lim_{n\to\infty} n^2(-\dfrac{a}{(n+1)^2+a^2}) = a$

当 $\varepsilon \to n$ 时, 原式的极限为 $\lim_{n\to\infty} n^2(-\dfrac{a}{(n)^2+a^2}) = a$

综上, 函数极限为 a

题目 54. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x) - \cos x}{x^2}$

解答. 对分子进行泰勒展开得:

$$\begin{aligned} 原式 &= \frac{1-\frac{4}{2}x^2 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

题目 54 的注记. 本题看似可以存在两个形式相同的函数形式, 但是如果对其使用拉格朗日中值定理解析, 则 $\sin\varepsilon, \varepsilon \in (x, 2x)$, 此时 $\sin\varepsilon$ 的极限不可以通过夹逼准则得到, 因此不可以使用这种方法, 只可以使用泰勒展开.

1.4.8　七种未定式的计算

主要有以下类型 $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty, \infty^0, 1^\infty$

形如 $\dfrac{0}{0}$,$\dfrac{\infty}{\infty}$,$0\times\infty$

$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0\times\infty$ 可以直接计算或者简单转换可以直接计算.

题目 55. 设函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$, 则 $f(x)=$

解答. 分情况讨论, 当 $\sin^2\pi x=0$ 和 $\sin^2\pi x\neq 0$ 时进行讨论.

当 $\sin^2\pi x=0$ 时:

$$\text{原式}=x^2$$

当 $\sin^2\pi x\neq 0$ 时:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{n}+x(1-x)\sin^2\pi x}{\dfrac{1}{n}+\sin^2\pi x}\\&=\frac{x(1-x)\sin^2\pi x}{\sin^2\pi x}\\&=x(1-x)\end{aligned}$$

综上 $f(x)$ 表达式为:

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x=0,\pm1,\pm2,\cdots\\ x(1-x), & x\text{取其他值}.\end{cases}$$

题目 56. 求极限$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}-1}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}\\&=\frac{2-1}{1}\\&=1\end{aligned}$$

题目 56 的注记. 这个题直接用抓大头会错, 因为后面还有一个同阶的 x, 然后还有就是下面是趋于 $-\infty$

形如 $\infty-\infty$

分式类型的 $\infty-\infty$, 直接通分:

题目 57. $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x})$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+x)(x-\sin x)}{x^2\times\sin^2 x}\\
&= \frac{(x+x-\frac{x^3}{6})(x-x+\frac{x^3}{6})}{x^4}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

非分式的 $\infty-\infty$:

1. 通法:提最高阶无穷, 构造无穷大乘以无穷小. 之后可以对后面的无穷小进行等价/泰勒, 或者把无穷大乘以无穷小改造成无穷小比无穷小, 或无穷大比无穷大, 之后洛必达. 提最高阶无穷之前, 能算的极限要先算出来.
2. 见到两个根式相减, 可以考虑有理化. 但注意只能是平方根, 立方根就不适用了.
3. 看见函数形式相同, 可以考虑使用拉格朗日中值定理.

题目 58. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{x}\right)$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}(\frac{x(e^x+xe^x)-e^x+1}{x(e^x-1)})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{xe^x+x^2e^x-e^x+1}{x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x(x+x^2-1)+1}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}{2}\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

题目 58 的注记. 本题可能上去第一步就把 e^x-1 直接给替换, 但是不能这样写, 因为等价无穷小不可以进行部分替代

题目 59. 求极限 $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x\sqrt{x}}}}}-1\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}\,\text{[1]}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

题目 59 的注记. 上述解法为通法, 即提最高阶无穷 $\sqrt{x}$. 除此之外, 还可以使用有理化进行通分:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}+1}}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

[1] 此处不能把后面的极限算出来的原因是 $\dfrac{1}{x}$ 极限为不存在, 因此如果拆分计算则违背了极限的运算法则

题目 60. $\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty} x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}-2)\\
&=[1+\frac{1}{2x}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\frac{1}{x^2}+1-\frac{1}{2x}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-\frac{1}{x})^2+0(\frac{1}{x^2})-2]\\
&=\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot[-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})]\\
&=\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

题目 60 的注记. 本题有一个错误的做法:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{x}(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2)\\
&=x^2(1+1-2)\\
&=0
\end{aligned}
$$

此处不能把后面的极限算出来的原因与上题一样也是 $\dfrac{1}{x}$ 极限为不存在, 因此如果拆分计算则违背了极限的运算法则

题目 61. 设 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^{2023}}{n^\alpha-(n-1)^\alpha}=\beta\neq 0$, 求 α 及 β

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2023}}{n^\alpha(1-(1-\frac{1}{n})^\alpha)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2023}}{-n^\alpha((1-\frac{1}{n})^\alpha-1)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2023}}{\frac{a}{n}}
\end{aligned}
$$

综上可知:$\alpha = 2023, \beta = \dfrac{1}{2023}$

题目 62. 求极限$\lim_{x\to+\infty}[\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \dfrac{x}{e}]$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} - \frac{x}{e}\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]}{\mathrm{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{-1}{\mathrm{e}^2}\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}}{t} \\
&= \frac{-1}{\mathrm{e}^2}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}}-\mathrm{e}}{t} \\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)-t}{t}}-1}{t} \\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2} \\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2} = \frac{1}{2\mathrm{e}}
\end{aligned}
$$

形如 $\infty^0, 0^0$

∞^0 与 0^0 通常使用$u^v = e^{v\ln u}$来计算

形如 1^∞

1^∞ 通常使用$\lim u^v = e^{\lim(u-1)v}$来计算[15]. 之后将 $(u-1)v$ 摘出, 然后使用替换法则或者泰勒公式进行求解

题目 63. 设 n 为正整数, 则 $\lim_{x\to\infty}[\dfrac{x^n}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}]^x$

[15]其实本质还是使用了幂指函数的性质进行计算, 因为 $\lim u^v = e^{\lim v\ln(u)} = e^{\lim v\ln(1+u-1)} = e^{\lim v(u-1)}$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^n}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}\right]^x \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x\left(\frac{x}{x-2}\right)^x\cdots\left(\frac{x}{x-n}\right)^x \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{-x}\cdots\left(\frac{x-n}{x}\right)^{-x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-x}\cdots\left(1-\frac{n}{x}\right)^{-x} \\
&= \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^2\cdots\mathrm{e}^n = \mathrm{e}^{\dfrac{n(n+1)}{2}}
\end{aligned}
$$

题目 64. 已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线过点 $(1,2)$, 则 $\lim_{x\to0}\left(\cos x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$

解答. 已知 $f(0)=0,f'(0)=2$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to0} e^{\dfrac{\ln\left(\cos x+\int_0^x f(t)dt\right)}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to0} e^{\dfrac{\cos x-1+\int_0^x f(t)dt}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to0} e^{\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}-\dfrac{1}{2}} \\
&= \lim_{x\to0} e^{\dfrac{f(x)}{2x}-\dfrac{1}{2}} \\
&= \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

题目 65. 求极限$\lim_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}}{3}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}$.

解答.

$$
\text{原式} = \lim_{x\to0} e^{\frac{e}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}}
$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{e}{x}(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}-1)}$$

把分子摘出来:

$$\begin{aligned}\frac{e}{3}\lim_{x\to 0}(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{x}-3) &= \frac{e}{3}\lim_{x\to 0}(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}+\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{x}) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{x}\end{aligned}$$

综上原式为 $e^{\frac{e}{3}(1+2+3)} = e^{2e}$

题目 66. 求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x$

解答.

$$\begin{aligned}原式 &= e^{x\ln\left(\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}\right)} \\ &= e^{x\left(\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}-1\right)} \\ &= e^{\frac{ax^2-bx^2+abx}{x^2-ax+bx}} \\ &= e^{\frac{2ax-2bx+ab}{2x+b-a}} \\ &= e^{a-b}\end{aligned}$$

题目 67. 求极限$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n$

解答.

$$原式 = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})}}{e^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n^2\ln(1+\dfrac{1}{n})-n}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} -n^2\left[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right]}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} -n^2\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{n})^2}$$

$$= e^{-\dfrac{1}{2}}$$

题目 67 的注记. 本题易错点，一是直接把 $(1+\dfrac{1}{n})^n$ 直接替换成 e，二是在计算 $\dfrac{e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})}}{e^n}$ 时，替换成 $\dfrac{e^{n^2\frac{1}{n}}}{e^n}$，这两个错误的点都是在计算时进行了部分替代.

题目 68. 求极限$\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\dfrac{n}{x}}$，其中 $a_i>0, i=1,2,\cdots,n$.

解答. 已知 $\lim_{x\to 0} a_i^x=1$，则函数形式为 1^∞ 型

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{n}{x}(\dfrac{a_1^x+a_2^x+a_3^x+...+a_n^x}{n}-1)}$$

$$= e^{\left\{\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{a_2^x-1}{x}+\cdots+\lim_{x\to 0}\frac{a_n^x-1}{x}\right\}}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}$$

$$= a_1a_2a_3...a_n$$

题目 68 的注记. 本题需注意的是 $\lim_{x\to 0} a_i^x=1$，然后可以观察出该极限类型为 1^∞ 型，之后可以利用等价无穷小替换求的极限

1.5 数列极限的运算

1.5.1 n 项数列极限求解

n 项连加的数列极限

常用结论:

$1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$	$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}=\ln n+c$	$(n\to\infty\text{时})n^n \gg n! \gg k^n_{(k>1)} \gg n^k_{(k>1)} \gg \ln n$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n\cdots+a_n^n}=\max\{a_1,a_2\cdots a_n\}$	斯特林公式1.4.5 : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\sim e^{-1}\times n$

放缩技巧:

$$\begin{cases} n\times u_{\min}\leqslant u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant n\times u_{\max}, \\ \text{当}u_i\geqslant 0\text{时},1\times u_{\max}\leqslant u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant n\times u_{\max}. \end{cases}$$

处理手法:

1. 优先看变化部分[16]的最大值是主体部分[17]的同量级或次量级
    - 次量级使用夹逼进行求解
    - 同量级使用定积分定义进行求解[18]
2. 放缩的通用手法是分子/分母取最大的或最小的, 即取两头

题目 69. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

解答. 对原式进行放缩可得:

$$\frac{n^2}{n^2+n}\leqslant\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)\leqslant\frac{n^2}{n^2+1}$$

[16]分母中随项的变化而变化, 称其为变化部分

[17]不随项的变化而变化, 称其为主体部分

[18]可爱因子 $\dfrac{1}{n}$, 然后构造形如$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-c}f(\dfrac{\varepsilon}{n})=\int_0^1 f(x)dx$的表达式进行求解, 其中 C 为任意常数,$\varepsilon\in[k-1,k]$.

对不等式两侧取极限可得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$$

易知左右两侧不等式极限均为 1, 解得不等式极限为 1

题目 69 的注记. 对本题的分析: 主体部分与变化部分的最大值是次量级关系. 即 n^2 与 n 不是同一个变化量级. 那么就可以使用夹逼准则进行夹逼运算出最大值

题目 70. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\ldots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}f(\frac{\varepsilon}{n})\quad f(x)\text{函数表达式为}\frac{1}{1+x^2}\\
&=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

题目 70 的注记. 主体部分与变化部分的最大值是同量级关系. 即 n^2 与 n^2 不是同一个变化量级. 那么就可以使用夹逼准则进行夹逼运算出最大值

题目 71. 求极限$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{e^n+1^2}+\frac{e^2}{e^n+2^2}+\cdots+\frac{e^n}{e^n+n^2}\right)$

解答.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e-e^{n+1}}{1-e}}{e^n+n^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{e^n+1^2}+\frac{e^2}{e^n+2^2}+\cdots+\frac{e^n}{e^n+n^2}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e-e^{n+1}}{1-e}}{e^n+1^2}$$

根据抓大头的思路可化为

$$\frac{-e}{1-e}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{e^n+1^2}+\frac{e^2}{e^n+2^2}+\cdots+\frac{e^n}{e^n+n^2}\right)\leqslant\frac{-e}{1-e}$$

可知原式极限为 $\dfrac{-e}{1-e}$

题目 72. 求极限$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$

解答.

$$\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)\leqslant\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\sqrt{n^6+n}}$$

取极限得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\sqrt{n^6+n}}$$

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)\leqslant\frac{2n^3+3n^2+n}{\sqrt{n^6+n}}$$

根据抓大头的思路可知原式极限为 $\dfrac{1}{3}$

题目 73. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right)\\
&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\\
&=\ln(x+\sqrt{1+x^2})|_0^1\\
&=\ln(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

题目 74. 求极限$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\\
&= \int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x^2\\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1+x)\bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

题目 75. 求极限$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{n}}\right)$

解答. 首先对等式进行化简, 使用夹逼准则可以得到:

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_1^k\sin\frac{k\pi}{n}}{n+1}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\dfrac{n\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{n}}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_1^k\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}
$$

等式左右两侧可等价为如下形式:

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_1^k\sin\frac{k\pi}{n}}{n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\dfrac{n\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{n}}\right)\leqslant\frac{\sum_1^k\sin\frac{k\pi}{n}}{n}
$$

左右两侧使用定积分定义可得:

$$
\int_0^1\sin(\pi x)dx\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\dfrac{n\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{n}}\right)\leqslant\int_0^1\sin(\pi x)dx
$$

其中 $\int_0^1\sin(\pi x)dx=\dfrac{2}{\pi}$, 综上, 等式极限为 $\dfrac{2}{\pi}$

题目 75 的注记. 本题分析, 首先看到分母的变化部分的最大值与主体部分是次量级关系的, 那么如果想使用

夹逼进行计算, 那么就会发现分子的大小无法计算, 没有一个等差或者等比数列的公式可以计算出分子的各项和, 因此应该最终应该使用定积分定义进行计算.

题目 76. 求极限$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{1^2+n^2}+\frac{n+\frac{1}{2}}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n^2}\right)$

解答. 令 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{1^2+n^2}+\frac{n+\frac{1}{2}}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n^2}\right)=I$

$$\lim_{n\to\infty}(n+\frac{1}{n})(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+...+\frac{1}{n^2+n^2})\leqslant\lim_{n\to\infty}I\leqslant\lim_{n\to\infty}(n+1)(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+...+\frac{1}{n^2+n^2})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(n+\frac{1}{n})(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}}+...+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}})\leqslant\lim_{n\to\infty}I\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(n+1)(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}}+...+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}})$$

左右两侧等价得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}}+...+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}})\leqslant\lim_{n\to\infty}I\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}}+...+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}})$$

使用定积分定义可得:

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\leqslant\lim_{n\to\infty}I\leqslant\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$, 综上, 等式极限为 $\frac{\pi}{4}$

题目 77. 已知$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$, 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,...)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛

解答. 令 $a_{n+1}-a_n$ 得 $(\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n}))<0$

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n\\&>\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+...+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n\\&=\ln(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times...\times\frac{n+1}{n})-\ln n\\&=\ln(1+n)-\ln n>0\end{aligned}$$

综上所诉, 由于数列单调递减且有下界, 因此收敛

题目 77 的注记. 此题的方法为非常规的方法, 需要考虑上下问, 结合进行分析.

n 项连乘的数列极限

主要有以下两种方法:

1. 夹逼准则
2. 取对数化为 n 项和[19]

题目 78. 极限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{n(1+2+\cdots+n)}}$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{n^2(n+1)}{2}}} \\
&= \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right) \\
&= \sqrt{2}\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

题目 79. 设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$, 则 $\lim_{n\to\infty}x_n=$

解答. 对原式取对数可知: $\ln x_n=\ln(1+\dfrac{1}{n^2})+\ln(1+\dfrac{2}{n^2})+\cdots+\ln(1+\dfrac{n}{n^2})$ 当 $x>0$ 时,$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, 则

$$\frac{k}{n^2+n}\leqslant\frac{k}{n^2+k}=\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k}{n^2}}<\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\frac{k}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2},\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\frac{1}{2}$$

[19] 通法

则 $\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\dfrac{1}{2},\lim_{n\to\infty}x_n=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

题目 80. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,...,x_n$ 是 $[a,b]$ 上的一个点列,求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{f(x_k)}}$

解答. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 已知 $e^{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上非负连续, 且 $0<m\leqslant e^{f(x)}\leqslant M$, 其中 M,m 分别是 $e^{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值, 于是 $0<m\leqslant\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{f(x)}\leqslant M$, 故 $\sqrt[n]{m}\leqslant\sqrt[n]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{f(x_k)}}\leqslant\sqrt[n]{M}$, 又 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1$[20], 根据夹逼准则，得 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{f(x_k)}}=1$

题目 81. 求$a_n=\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}}$, 求极限 $\lim_{n\to\infty}a_n$

解答. 显然 $a_n\leqslant 1$, 又

$$a_n=\sqrt[n]{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}}=\sqrt[n]{\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-2}\times\frac{1}{2n}}\geqslant\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}=1$$

则 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

题目 81 的注记. 这题的方法不是常规方法, 如果按照一般的处理方法, 应该写为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times...\times\frac{2n-1}{2n})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{4}+...+\ln\frac{2n-1}{2n}]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{2}}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{3}{4}}{n}+...+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2n-1}{2n}}{n}\\&=0+0+0+...+0\\&=0\end{aligned}$$

但是这显然是错误的, 无穷多个无穷小相加, 结果仍是未定式.

[20]写成幂函数形式配合泰勒公式即可看出, 来自此处数列的性质:1.1.1

题目 82. 求$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$

解答. 令 $a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)...(n+n)}$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln a_n&=\lim_{n\to\infty}\{\ln\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\ln[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]-\ln n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(n+1)+\ln(n+2)+...+\ln(n+n)-n\ln n]\\&=\lim_{n\to\infty}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+...+\ln(1+\frac{n}{n})]\\&=\int_0^1\ln(1+x)dx\\&=\int_0^1\ln(1+x)d(x+1)\\&=(x+1)\ln(1+x)|_0^1-1\\&=2\ln 2-1\end{aligned}$$

综上 $\lim_{n\to\infty}a_n=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$

题目 83. 证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\sim e^{-1}\times n$

解答.

$$\begin{aligned}a_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\ln a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(n\times(n-1)\times...\times 1)-\ln n\\&=\lim_{n\to\infty}[\ln n+\ln(n-1)+...+\ln 1-n\ln n]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln\frac{n}{n}+\ln\frac{n-1}{n}+...+\ln\frac{1}{n}]\\&=\int_0^1\ln x dx\\&=x\ln x|_0^1-1=-1\end{aligned}$$

综上 $\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\sim e^{-1}\cdot n$

1.5.2 常用不等式

- 利用如下重要不等式

1. 设 a,b 为实数, 则 $|a+b|\le|a|+|b|;|\ |a|-|b|\ |\leqslant|a-b|$ [21]
2. $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}(a,b>0)$[22]
3. $\sqrt[3]{abc}\leqslant\dfrac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}(a,b,c>0)$
4. 设$a\ge b\ge 0$,则$\begin{cases}\text{当}n\ge 0\text{ 时},a^n\ge b^n,\\ \text{当}n\leqslant 0\text{ 时},a^n\leqslant b^n.\end{cases}$
5. 若$0<a<x<b,0<c<y<d$,则$\dfrac{c}{b}<\dfrac{y}{x}<\dfrac{d}{a}$.[23]
6. $\sin x<x<\tan x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$
7. $\sin x<x(x>0)$
8. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时,$x<\tan x<\dfrac{4}{\pi}x$
9. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$
10. $\arctan x\leqslant x\leqslant\arcsin x(0\leqslant x\leqslant 1)$
11. $e^x\geqslant x+1(\forall x)$[24]
12. $x-1\geqslant\ln x(x>0)$[25]
13. $\dfrac{1}{1+x}<\ln(1+\dfrac{1}{x})<\dfrac{1}{x}(x>0)$ 或 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x(x>0)$[26]
14. 在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如 $(1+\dfrac{1}{2^2})(1+\dfrac{1}{2^{2^2}})...(1+\dfrac{1}{2^{2^n}})$, 可化为 $(1-\dfrac{1}{4})(1+\dfrac{1}{2^2})(1+\dfrac{1}{2^{2^2}})...(1+\dfrac{1}{2^{2^n}})*\dfrac{4}{3}$
15. 关于重要数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的重要结论:

---

[21]可以将上述式子推广为 n 个实数的情况:$|a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

[22]还有一个不等式是 $|ab|\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$

[23]当$n\pi<x<(n+1)\pi,2n<S(x)<2(n+1)$时, $\dfrac{2n}{(n+1)\pi}<\dfrac{S(x)}{x}<\dfrac{2(n+1)}{n\pi}$.

[24]当$x_{n+1}=\mathrm{e}^{x_n}-1$ 时, 由$\mathrm{e}^{x_n}-1\geqslant x_n$,得$x_{n+1}\geqslant x_n$,即$\{x_n\}$单调不减

[25]当$x_n>0$时, 若$x_{n+1}=\ln x_n+1$,由$\ln x_n+1\leqslant x_n$,得$x_{n+1}\leqslant x_n$,即$\{x_n\}$单调不增

[26]令 $f(x)=\ln x$, 并在区间 $[x,x+1]$ 上对其使用拉格朗日中值定理, 有 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\ln(1+x)-\ln x=\dfrac{1}{\xi}$ 其中 $0<x<\xi<x+1$, 因此对任意的 $x>0$, 有 $\dfrac{1}{1+x}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{x}$

  - 单调递增
  - $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

1.5.3 递推关系式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 数列极限

1. 单调有界 (先证明极限存在, 之后对 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两端取极限)

定理 1.5.1: 数列的单调有界准则

单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在

证明数列单调性的方法:

(a) $x_{n+1}-x_n \underset{(<)}{>} 0$ 或 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \underset{(<)}{>} 1$(同号)

(b) 利用数学归纳法

定义 1.5.1: 第一数学归纳法的定义

第一数学归纳法是证明当 n 等于任意一个自然数时某命题成立. 证明分下面两步:

i. 证明: 当 $n=1$ 时命题成立.[a]

ii. 证明: 若假设在 $n=m$ 时命题成立, 可推导出在 $n=m+1$ 时命题成立.

这种方法的原理在于: 首先证明在某个起点值时命题成立，然后证明从一个值到下一个值的过程有效. 当这两点都已经证明，那么任意值都可以通过反复使用这个方法推导出来.

[a]选择数字 1 因其作为自然数中的最小值

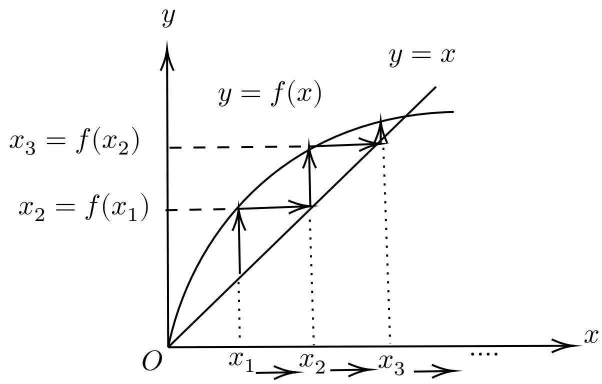
(c) 利用重要不等式

(d) x_n-x_{n-1} 与 $x_{n-1}-x_{n-2}$ 同号, 则 x_n 单调

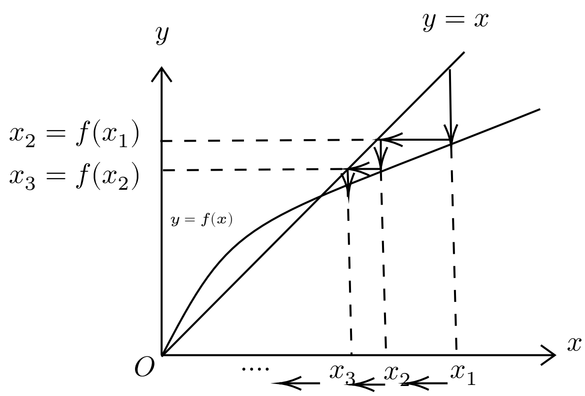
(e) 利用结论: 对 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,...)$,$x_n\in$ 区间I

- 若$f'(x)>0, x\in$ 区间I,则数列$\{x_n\}$单调, 且 $\begin{cases} \text{当}x_2>x_1\text{时, 数列 }\{x_n\}\text{ 单调增加} \\ \text{当}x_2<x_1\text{时, 数列 }\{x_n\}\text{ 单调减少} \end{cases}$

证明. 若 $f(x)$ 单调增加, 且 $x_1<x_2$, 则数列单增的图像是这样的:



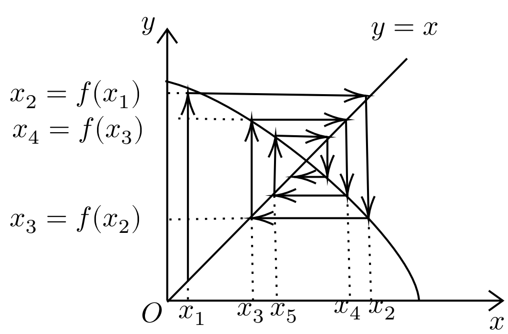
若 $f(x)$ 单调增加, 且 $x_1 > x_2$, 则数列单增的图像是这样的



□

- 若 $f'(x) < 0$,$x \in$ 区间 I, 则数列 $\{x_n\}$ 不单调

证明. 若 $f(x)$ 单调递减, 且 $x_1 < x_2$ 时, 则图像为



□

2. 利用压缩映射 (先斩后奏): 先令 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 然后等式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两端取极限解得 A, 得到极限初步结果, 最后再证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$.核心是用 $x_n = f(x_{n-1})$ 证明一个递推不等式 $|x_n - a| \leqslant A|x_{n-1} - a|$, 其中 $0 < A < 1$

题目 84. 设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n\left(3 - x_n\right)}\left(n = 1, 2, ...\right)$, 证明: 数列 x_n 极限存在并求此极限

解答. 由 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$ 可得:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)} \leqslant \frac{3}{2}$$

可知数列 x_n 存在上界, 令 $x_{n+1} - x_n$ 可得:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sqrt{x_n(3 - x_n)} - x_n \\ &= \frac{x_n(3 - x_n) - x_n^2}{\sqrt{x_n(3 - x_n)} + x_n} \\ &= \frac{x_n(3 - 2x_n)}{\sqrt{x_n(3 - x_n)} + x_n} \geqslant 0 \end{aligned}$$

故 x_n 单调递增, 根据数列单调有界定理, 该数列极限存在, 因此设 $\lim_{x_n} = a$, 对等式 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$ 左右两边取极限得:$a = \sqrt{a(3 - a)}$. 解得 $a = \frac{3}{2}$

综上, 数列极限为 $\frac{3}{2}$

题目 84 的注记. 出现本题的形式 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$ 可以使用常用不等式1.5.2, 对不等式放缩计算极限.

题目 85. 设 $x_1 = \sqrt{6}, x_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \cdots, x_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}}}$, 求极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$

解答. 由题意可知, 讲数列的表达式可抽象为 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, 其函数表达式为 $f(x) = \sqrt{6 + x}$, 对其求导可得:$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6 + x}} > 0$, 由于 $x_1 < x_2$ 因此数列单调递增. 又因为 $x_1 = \sqrt{6} < 3$, 若 $x_n < 3$, 则 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} < 3$, 从而 $x_n < 3$, 即数列 x_n 有上界, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 由于 $0 < x_n < 3$, 故由极限的保序性可得:$0 \leqslant a \leqslant 3.x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, 两侧取极限得:$a = \sqrt{6 + a}$, 解得 a=3, 综上数列极限为 $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$

题目 85 的注记. 除此之外, 本题还可以使用压缩映射进行求解:

解答. 直接证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$, 由 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ 知:

$$原式 = |x_n - 3| = |\sqrt{6 + x_{n-1}} - 3|$$

对于此处的运算, 我们可以使用拉格朗日中值定理进行化简, 即

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= |\sqrt{6+x_{n-1}}-3| \\
&= |\sqrt{6+x_{n-1}}-\sqrt{9}| \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}|x_{n-1}-3| < \frac{1}{2}|x_{n-1}-3| < \frac{1}{2^2}|x_{n-2}-3| < \ldots < \frac{1}{2^{n-1}}|x_1-3| \to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

则 $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$

当然也可以使用有理化进行化简:

$$\text{原式} = \frac{|x_{n-1}-3|}{\sqrt{6+x_{n-1}}+3} < \frac{1}{3} \mid x_{n-1}-3 \mid < \frac{1}{3^2} \mid x_{n-2}-3 \mid < \cdots < \frac{1}{3^{n-1}} \mid x_1-3 \mid \to 0 \quad (n\to\infty)$$

综上

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} |x_n-3| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n-1}}|x_1-3|$$

使用夹逼准则可以得到 $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$

题目 86. 设 $x_1=2, x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}(n=1,2,\ldots)$, 求极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$

解答. 令 $f(x)=2+\dfrac{1}{x}$, 则 $x_{n+1}=f(x_n)$, 显然 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减，故 $\{x_n\}$ 不具有单调性, 因此只能使用压缩映射.

令 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 2+\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n} \Rightarrow a = 2+\dfrac{1}{a}$, 解得 $a=1\pm\sqrt{2}$.

由题设知 $x_n \geq 2$, 故由极限的保号性知，$a \geq 2$, 从而 $a=1\pm\sqrt{2}$, 以下证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = 1+\sqrt{2}$

$\mid x_n - a \mid = \left|\left(2+\dfrac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(2+\dfrac{1}{a}\right)\right| = \left|\dfrac{x_{n-1}-a}{ax_{n-1}}\right| \leqslant \dfrac{|x_{n-1}-a|}{2a} \leqslant \dfrac{|x_{n-1}-a|}{2} \leqslant \dfrac{\mid x_{n-2}-a \mid}{2^2} \leqslant \cdots \leqslant \dfrac{\mid x_1-a \mid}{2^{n-1}} \to 0$

题目 86 的注记. 需要切记的是在压缩映射中, 极限值为根式时, 要用极限时的等式对极限值进行替换, 比如在本题中在证明数列极限为 $1+\pm\sqrt{2}$ 中, 应写为 $|x_n-a|$, 而不是 $|x_n-1-\sqrt{2}|$

题目 87. 设 $x_1=\sqrt{a}(a>0), x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$, 证明:$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求其值.

本题有四种方法, 下面依次给出求解:

解答. 法 1: 数学归纳法找上界: 数列形式可写为 $f(x)=\sqrt{a+x}$, 则 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{a+x}}>0$, 因此 $f(x)$ 单增, 又 $x_1=\sqrt{a}, x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}, x_2>x_1$, 因此 x_n 单增.

假设 $\lim_{n\to\infty}x_n=A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. 由第一数学归纳法可得:

验证 $x_1=\sqrt{a}<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, 即证:

$$2\sqrt{a}<1+\sqrt{1+4a}$$

$$4a<2+4a+2\sqrt{1+4a}$$

假设 $x_n<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ 成立, 验证 $x_{n+1}<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ 即证:

$$2\sqrt{a+x_n}<1+\sqrt{1+4a}$$

$$4a+4x_n<2+4a+2\sqrt{1+4a}$$

$$4x_n<2+2\sqrt{1+4a}$$

即证:$x_n<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, 显然成立.

综上:$x_n<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, 且 x_n 单增, 那么 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在, 令 $\lim_{n\to\infty}x_n=A$, 则 $A=\sqrt{a+A}$, 解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

综上 $\lim_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

解答. 法 2: 对方法一进行化简 (最佳): 数列形式可写为 $f(x)=\sqrt{a+x}$, 则 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{a+x}}>0$, 因此 $f(x)$ 单增, 又 $x_1=\sqrt{a}, x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}, x_2>x_1$, 因此 x_n 单增.

设 $A=\sqrt{a+A}$ 假设 $\lim_{n\to\infty}x_n=A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. 由第一数学归纳法可得:

验证 $x_1<A$, 即证:

$$x_1=\sqrt{a}, A=\sqrt{a+A}$$

$$\sqrt{a}<\sqrt{a+A}\Rightarrow x_1<A$$

假设 $x_n < A$ 成立, 验证 $x_{n+1} < A$ 即证:

$$x_{n+1} = \sqrt{x + x_n} < \sqrt{a + A} = A$$

即证:$x_n < A$, 显然成立.

综上:$x_n < A$, 且 x_n 单增, 那么 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 令 $\lim_{n\to\infty} x_n = M$, 则 $M = \sqrt{a+M}$, 解得 $M = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

解答. 法 3: 构造不等式进行放缩[27] 易知 x_n, 单调递增, 且 $x_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} > x_n > \ldots > x_1 = \sqrt{a} \\ \dfrac{x_n}{x_{n+1}} < 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{a + x_n} \\ &\Rightarrow x_{n+1}^2 = a + x_n \\ &\Rightarrow \frac{a}{x_{n+1}} + \frac{x_n}{x_{n+1}} \\ &\Rightarrow x_{n+1} < \frac{a}{x_{n+1}} + 1 \end{aligned}$$

x_n 单增且有上界, 因此 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $A = \sqrt{a+A}$, 解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

综上 $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

解答. 法 4: 压缩映射 + 有理化

$$\begin{aligned} |x_n - A| &= |\sqrt{a + x_{n+1}} - \sqrt{a+A}| \\ &= \frac{|x_{n-1} - A|}{\sqrt{a + x_{n-1}} + \sqrt{a+A}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}} |x_{n+1} - A| \end{aligned}$$

题目 88. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 : $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n\to\infty} x_n$

解答.

$$x_{n+1} - x_n = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n}\right) - x_n = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n \mathrm{e}^{x_n}}\right).$$

令 $f(x) = e^x - 1 - xe^x$, 则 $f'(x) = -xe^x$. 当 $x > 0$ 时,$f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调减少, 于是,$f(x) < f(0) = 0$. 从

[27] 其实不好放缩, 但是可以硬往条件上凑

而, 当 $x>0$ 时

$$\frac{\mathrm{e}^x-1}{x\mathrm{e}^x}-1=\frac{\mathrm{e}^x-1-x\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x}<0$$

即 $\dfrac{e^x-1}{xe^x}<1$ 又因为对所有的正整数 n, 都有 $x_n>0$, 所以 $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n\mathrm{e}^{x_n}}\right)<\ln 1=0$, 即 $x_{n+1}-x_n<0$. 因此, 数列 $|x_n|$ 单调减少.

由单调有界准则可知, 数列 $|x_n|$ 收敛. 由于对所有的正整数 n, 都有 $x_n>0$, 故 $\lim_{n\to\infty}x_n=a\geqslant 0$.

对 $x_n\mathrm{e}^{x_n+1}=\mathrm{e}^{x_n}-1$ 两端同时令 $n\to\infty$, 可得 $a\mathrm{e}^n=\mathrm{e}^a-1$, 由前面的结果可知，$x=0$ 是 $f(x)=e^x-1-xe^x$ 在 $[0,+\infty)$ 上的唯一零点，因此，$a=0$, 即 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.