第一章　导数

1.1　导数的概念

1.1.1　导数的定义

定义 1.1.1: 导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx(点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内) 时, 相应地, 因变量取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$; 如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在, 那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**, 记为 $f'(x_0)$, 即

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记作 $y'|_{x=x_0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

注 1.1.1: 导数定义的注意事项

1. 在考题中, 增量 Δx 一般会被命题人广义化为"$\square$", 即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\xlongequal{\text{广义化}}\lim_{\square\to 0}\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$$

需要知道的是 $\square$ 需要同时趋近于 0^+ 和 0^- 该点导数才存在, 如果仅趋近于其中的一个, 则是 $\square$ 处的单侧导数

若在上式中, 令 $x_0+\Delta x=x$, 则可将导数定义式写成

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

观察上式, 可以观察到上式有以下特点:

- 分母同时趋近于 0^+ 和 0^-
- Δx 在趋于 0 的过程中没有间断点
- 分子为一个动点一个定点

2. 以下的三种说法是等价的:
   - $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导
   - $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数存在
   - $f'(x_0)=A\,(A\text{为有限数})$
3. 原函数可导无法推出导函数连续
4. 需要区分一点处的右导数和导数的右极限
   - $f'_+(x_0)\Rightarrow$ 表示一点处的右导数 $\Rightarrow \lim_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
   - $f'(x_0^+)=f'(x_0+0)\Rightarrow$ 导数的右极限 $\Rightarrow \lim_{x\to x_0^+}f'(x)$
   - $f(x_0^+)=f(x_0+0)\Rightarrow$ 函数的右极限 $\Rightarrow \lim_{x\to x_0^+}f(x)$

   如果函数 $f(x)$ 连续可导或者 $f'(x)$ 连续, 那么 $f'_+(x_0)=f'(x_0^+)$, 即一点处的右导数等于导数的右极限. 此处如果可以这样理解: 把导数降一个纬度理解, 令 $f'(x)=F(x)$, 那么如果 $F(x)$ 在 x_0 处左侧的值和 $F(x)$ 左侧极限相等, 则 $F(x)$ 必须可导或者连续, 那么可以得到 $f'(x)$ 连续或 $f(x)$ 连续可导. 如果不连续, 以函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\leqslant 0\\ x+1, x>0\end{cases}$ 为例: 显然该函数在 $x=0$ 处不连续. 那么:

   - 左导数:$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x-0}{x}=1$
   - 右导数:$f'_+(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x+1-0}{x}=\dfrac{1}{0}=\infty$
   - 导数的右极限:$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)'=1$

题目 1. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左, 右导数都存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处

(A) 可导　(B) 连续　(C) 不可导　(D) 不一定连续

解答. 左右导数存在说明左右可导, 左可导说明左连续, 右可导说明右连续[1]. 左连续说明左侧极限等于该点函数值, 右连续说明右侧极限等于该点函数值, 那么左右极限相等且等于该点函数值, 那么函数在该点连续. 因此 B 选项正确.

题目 2. 下列命题正确的个数为:

1. 设 $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续

2. 设 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续

3. 设 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续

4. 设 $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ 中至少有一个不存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必不可导

解答. 1 选项中,$\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ 为导数的左极限和右极限, 这两个存在不能说明该点连续.

2 选项中, 左导数和右导数都存在, 则导数存在, 则在该点必定连续.

3 选项中, 函数的左右极限都存在, 不能得到该点连续 (跳跃间断点)

4 选项中, 使用逆否命题, 本选项写为: 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 则 $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ 都存在. 显然 $f'(x)$ 可能震荡, 极限不存在.

题目 3. 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

(A)$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在　(B)$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

(C)$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　(D)$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

解答. A: $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}$, 若 $h\to 0$ 可以知道的是 $1-\cos h$ 趋近于 0^+,$\dfrac{1-\cos h}{h^2}\to 1$, 那么 $\dfrac{1}{2}f'_+(0)$ 存在

B: $\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)=\lim_{h\to 0}\dfrac{1-e^h}{h}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}$, 易知 $1-e^h$ 同时趋近于 0^+ 和 0^-, 那么函数 $f'(0)$ 存在

[1]这个地方可以用一点可导的必要条件, 将其中的 $x\to 0$ 改写为 $x\to 0^-$ 和 $x\to 0^+$, 最终可以引申为单侧函数可导 $\to$ 单侧函数连续

C:$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\frac{h-\sin h}{h^2}$, 已知 $h-\sin h\sim\frac{1}{6}h^3$, 那么 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\frac{h}{1}$ 极限存在, 同时 $h\to 0$, 但是不可以推出 $\frac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}$ 极限存在, 只能得到该极限是为定式, 那么更无法推出该导数存在

D: 若 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在, 那么其实什么都推不出来, 因为不知道 $\frac{f(2h)}{h}$ 和 $\frac{f(h)}{h}$ 是否存在, 如果写成下列形式 $\lim_{h\to 0}\frac{[f(2h)-f(0)]-[f(h)-f(0)]}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(2h)-f(0)}{h}-\frac{f(h)-f(0)}{h}\right)$, 则违反了极限的运算法则.

综上答案选择 B 选项

结论 1.1.1: 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则必须满足下面的四个条件:

1. 一动减一定: 根据导数定义必须是一个动点减一个定点. 比如上题中的 D 选项, 本质上是两个动点相减.
2. 可正可负: 指的是分母, 即定义中的 □, 需要同时趋近于 0^+ 和 0^-, 如果只能趋近于一个, 则为单侧导数.
3. 上下同阶: 即分子的阶数小于等于分母阶数. 但是如果要求是充要条件则必须是同阶. 比如下面的例子: 若 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x-\sin x)-f(0)}{x^4}$ 存在, 那么 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x-\sin x)-f(0)}{x-\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^4}$, 其中 $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$, 那么 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x-\sin x)-f(0)}{(x-\sin x)-0}\cdot\frac{1}{6x}$, 其中 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{6x}\to\infty$, 那么 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x-\sin x)-f(0)}{(x-\sin x)-0}$ 必定存在且 $\frac{f(x-\sin x)-f(0)}{(x-\sin x)-0}=0\Rightarrow f'(0)=0$
4. 填满邻域: 在定义中的 □ 需要把其附近邻域都给填满. 比如下面的例子:$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=0$, 无法推出 $f'_+(0)=0$ 存在, 因为 $\frac{1}{n}$ 取不到无理数, 无法包含 □ 邻域

上述结论的本质还是导数的定义表达式的特点.

题目 4. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0)>0$, 则存在 $\delta>0$ 使得:

(A)$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加　(B)$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调减少

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$　(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$

解答. A,B 选项[2]: 已知函数 $f(x)$ 连续, 且函数在 $f'(0)$ 处的导数大于 0, 那么只能说明函数在 $x=0$ 点导数

[2] 在本题中, 答案给出了一个例子可以满足该题 (但是本题中例子并不重要，重要的是思想) 即 $f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$, 在考研中常用的一个例子是$k\times\sin\frac{1}{x^b}\pm M\pm f(x)$

存在且大于 0,0 可能是函数的震荡间断点. 因此函数无法说明函数在邻域内单增或者单减.C,D 选项: 对函数在 $x=0$ 求导数, 即 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$, 则 C 选项成立.

注 1.1.2: 函数可导性与连续的关系

1. 导数若存在, 则导数要么连续, 要么只可能有震荡间断点

   导数若存在有震荡间断点的证明: 以函数 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ 为例:

   根据导数定义对函数在 $x=0$ 处求导:$F'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 因此函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处导数存在. 那么对函数求导:

   $F'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$, 那么易知 $\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ 是震荡的. 虽然函数导数存在, 但是这是震荡间断点. □

   上述推论还可以用几何来解释. 如果 $x=0$ 处的导数存在, 那么其函数图像在原点一定有切线.

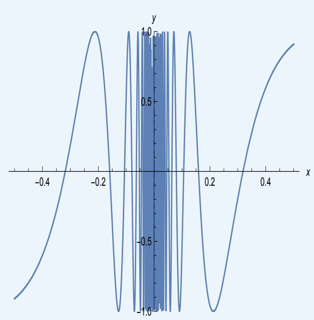


图 1.1: 振荡间断点函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 图像

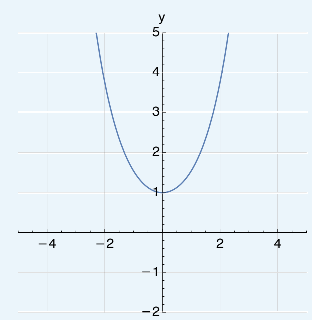


图 1.2: 双曲余弦函数 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

   同时, 导数震荡的话, 则导数极限不存在, 由此可以推出衍生推论: 导数极限定理1.1.1

2. 函数在一点可导的必要条件: 若 $f(x)$ 在一点可导, 则 $f(x)$ 在该点连续[a]

[a] 上面两个结论非常重要, 经常和高阶导数一起考察

题目 5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leq\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots, \end{cases}$ 则:

(A)$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. (C)$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点. (D)$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解答. AB: 对 $x=0$ 处求导数,$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0$,$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 不存在间断点.

CD: 对 $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1$,$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{x}$, $\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}$, 由夹逼准则可以得到,$f'_+(0)=1$,$f'(0)=1$

综上, 本题应选择 D 选项.

题目 5 的注记. 在此题中,$f'_+(0)=\lim_{\frac{1}{n}\to 0^+}\dfrac{f\left(0+\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}$, 这样写是正确的, 因为已经通过证明证得 $f'(0)$ 存在, 因此可以这样写. 但是一般情况下,$f'_+(0)\xlongequal{\text{并不一定}}\lim_{\frac{1}{n}+0^+}\dfrac{f\left(0+\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}$. 因为 n 为正整数, 导致区间不能完全覆盖, 因此不一定能做到等价, 除非证明该点导数存在.

定理 1.1.1: 导数极限定理

如果 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内连续, 在 x_0 的去心邻域内可导, 且导函数在 x_0 处的极限存在 (等于 a), 则 $f(x)$ 在 x_0 处的导数也存在并且等于导函数的极限 (等于 a)

上述定理可解释为导数如果在某点极限 (导数的极限) 存在, 那么在该点导函数一定连续. 因为导数存在要么有震荡间断点, 要么连续. 如果说该点导函数的极限存在, 那么一定连续.

题目 6. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有二阶导数, 则

(A) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内严格单调增加时,$f'(x_0)>0$. (B) 当 $f'(x_0)>0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加

(C) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时,$f''(x_0)>0$. (D) 当 $f''(x_0)>0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数

解答. 如果该点二阶导数存在, 那么该点导数存在且连续.A,C 选项错误的原因是未考虑严格单增.B,D 选项错误的原因是未考虑震荡间断点.

A: 当函数 $f(x)$ 在 x_0 处的邻域内单增,$f'(x_0)$ 的值可以为 0, 这样函数也是单调递增.

B: 已知 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有二阶导数, 那么 $f'(x)$ 在 x_0 处连续. 当函数 $f'(x_0)>0$ 时, 排除了震荡的情况, 因此 B 选项正确

C: 邻域内 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 为凹函数, 反之则不行, 因为可能存在二阶导为 0 的点, 但是依然为凹函数, 如 $f(x)=x^2$

D:$f''(x_0)>0$ 可能存在震荡间断点, 因此不能推出邻域内 $f''(x)>0$

题目 6 的注记. D 选项, 如果增加条件,$f''(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续或 $f'''(x_0)$ 存在, 则 D 选项也成立.

此外本题应注意两个问题:1.在考虑函数导数存在时, 应考虑到震荡间断点和连续的情况2.在考虑函数在区间内单增和单减时, 应考虑是严格单增还是单增.

题目 7. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{f(x)}=1$, 则下列结论中正确的个数为

(1)$f'(0)$ 存在, 且 $f'(0)=0$. (2)$f''(0)$ 存在, 且 $f''(0)=2$.

(3)$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 (4)$f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续.

解答. (1) 选项: 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 并且 $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{f(x)}=1$, 则 $\lim_{x\to0}f(x)=0$, 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 那么 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$, 导数在 $x=0$ 处的定义式为 $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$. 那么 $f'(0)=0$

(2) 选项: 本题无法得到有关二阶导的任何信息.

(3) 选项: $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{f(x)}=1$, 显然 $f(x)$ 在邻域内是大于 0 的, 又因为该点连续, 则 $x=0$ 显然为极小值.

(4) 选项: 一点可导只能推一点处连续, 推不出邻域内连续

题目 7 的注记. 本题有两个易错点,1:一点可导只能推一点处连续, 推不出邻域内连续.2:只有等价可以替代, 极限相等不是等价.

此外, 在本题的 2 选项中, 有一个易错的思路, 即认为一点处的导数 ($\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$)= 导数的极限 ($\lim_{x\to0}f'(x)$),需要注意的是, 在极限中, 只有等价可以进行替换, 例如等价无穷小使用等价替换, 即:$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, 在此题中,$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim_{x\to0}f'(x)$, 因为二者只是极限相等, 极限相等不可以等价. 综上, 本题正确的个数是 2 个, 分别为 1,3 选项.

题目 8. 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有定义, 且 $\lim_{x\to0}f(x)=0$, 则

(A) 当 $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时 ,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 (B) 当 $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时 ,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时 ,$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ (D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时 ,$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

解答. 如果下列选项想在 $x=0$ 处可导, 那么 $f(0)=0$.

A,B 选项无法得到 $f(0)=0$

C:$\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{|x|}}=f'(0)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{|x|}}=0$

D:$\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{x^2}=f'(0)\cdot\dfrac{x}{x^2}=\infty$

题目 8 的注记. 在一元函数中优先看可导推极限, 在本题中,CD 选项为可导推极限,AB 选项为极限推可导. 因此应该先看 CD 选项.

1.1.2 带绝对值的函数的可导性

- 可导 + 可导 = 可导
- 可导 + 不可导 = 不可导
- 不可导 + 不可导 = 无法确定

结论 1.1.2: 带绝对值函数可导的充要条件

设 $f(x)=\varphi(x)\,|x-a|$, 其 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 则 $f\,(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $\varphi\,(a)=0$[a]

[a] "如果该点不可导的话, 在 a 点应该函数图像应该由于绝对值的存在, 导致存在一个" 尖"(绝对值的分段点), 最终导致不可导, 如果想导, 则要在此点可导, 整体函数必须为 0

题目 9. 设 $f(x)$ 可导 ,$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导的

(A) 充分必要条件　(B) 充分条件但非必要条件

(C) 必要条件但非充分条件　(D) 既非充分条件又非必要条件

解答. $F(x)=f(x)+f(x)|\sin x|$ 根据结论, 应当是充要条件, 选择 A 选项.

题目 10. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\mid x^3-x\mid$ 不可导的点的个数是

解答. $f(x)=(x-2)(x+1)|x+1||x-1||x|$ 易知 $\pm 1,0$ 为 $|x+1||x-1||x|$ 不可导点.$\varphi(-1)=0$, 因此该点可导. 综上, 函数不可导点为 $1,0$.

题目 11. 设函数 $f(x) = \mid x^3 - 1 \mid \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，则 $\varphi(1) = 0$ 是 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导的

(A) 充分必要条件　(B) 充分条件但非必要条件

(C) 必要条件但非充分条件　(D) 既非充分条件又非必要条件

解答.

题目 12. 设 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处可导，则函数 $\mid f(x) \mid$ 在点 $x = a$ 处不可导的充分条件是

(A)$f(a) = 0$, 且 $f'(a) = 0$.　$(C) f(a) > 0$, 且 $f'(a) > 0$.

(B)$f(a) = 0$, 且 $f'(a) \neq 0$.　(D)$f(a) < 0$, 且 $f'(a) < 0$.

解答.

题目 13. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有定义, 则 $F(x) = f(x)|\sin x|$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件是 ( ).

A. $\lim_{x \to 0} f(x)$ 存在

B. $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

C. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

D. $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ 均存在, 且 $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\lim_{x \to 0^+} f(x)$

解答.

1.1.3　单侧导数

定义 1.1.2: 单侧导数的定义

函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导的充分必要条件是左导数和右导数存在且相等, 其表达式为

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xlongequal{\text{记}} f'_-(x_0)$$
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xlongequal{\text{记}} f'_+(x_0)$$

注 1.1.3: 一点可导与邻域的关系

- 一点可导 $\neq$ 点邻域可导: 以函数 $f(x) = x^2D(x) = \begin{cases} x^2, x \in \text{有理数} \\ 0, x \in \text{无理数} \end{cases}$ 为例
- 一点可导邻域内连续: 若函数在一点可导, 则函数在该点连续, 而无法断言函数在这点附近的连续性, 仍可以 $f(x) = x^2D(x)$ 为例

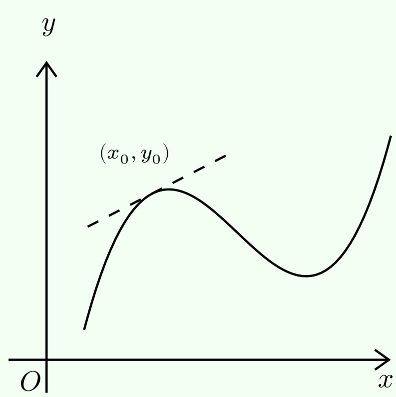
1.1.4 导数的几何意义

定义 1.1.3: 导数的几何意义

$y = f(x)$ 在 x_0 处导数是 $f(x)$ 在 x_0 处切线的斜率 $k_{切} = f'(x_0)$ 并且 $k_{切} * k_{法} = -1$

在 (x_0,y_0) 处, 切线方程:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$



如上图所示, 点 (x_0, y_0) 处的切线为虚线

法线方程:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

题目 14. 曲线 $\tan\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为

解答. 对方程两边求导可得 $\sec^2\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right)(1 + y') = e^y y'$, 将 $(0,0)$ 代入可 $y'(0) = -2$, 则切线方程为 $y = -2x$

题目 15. 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为

解答. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = t$, 则该曲线上对应于 $t=1$ 的点处的法线斜率为 -1, 而当 $t=1$ 时,$x=\dfrac{\pi}{4}, y=\dfrac{1}{2}\ln 2$, 则所求法线方程为 $y-\dfrac{1}{2}\ln 2 = -(x-\dfrac{\pi}{4})$.

题目 16. 已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$, 求该曲线上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线和法线的直角坐标方程.

解答. 由 $r=1-\cos\theta$ 可知该曲线的参数方程为 $\begin{cases} x=(1-\cos\theta)\cos\theta, \\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta, \end{cases}$ 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin^2\theta + (1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta - \sin\theta(1-\cos\theta)}$$

将 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 代人上式得该曲线上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线的斜率为 $k=-1$. 而当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时 $x=0, y=1$. 则该曲线上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线和法线的直角坐标方程分别为 $y-1=-x$ 和 $y-1=x$.

题目 17. 设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}, \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线. 当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点；当 $0\leqslant x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$. 求 $y(x)$ 的表达式

解答.

题目 17 的注记. 曲线光滑 = 曲线连续且一阶导数连续

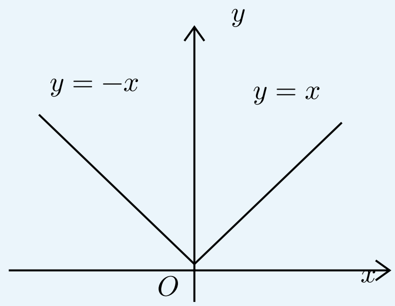
注 1.1.4: 角点与无穷导数

- 研究 $y=f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的切线问题

  解答. 从 $x=0$ 出发, 取增量 Δx, 有 $\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0) = |\Delta x|$

  当 $\Delta x>0$ 时,$\Delta y=\Delta x$, 则 $f'_+(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \xlongequal{\text{记}} k_+$

  当 $\Delta x<0$ 时,$\Delta y=-\Delta x$, 则 $f'_-(0) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \xlongequal{\text{记}} k_-$



- 研究 $y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处的切线问题

  解答. 显然, 在 $x=0$ 处 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}$ 当 $\Delta x>0$ 时,$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=+\infty$ $\Delta x<0$ 时,$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=+\infty$ 这样的结果称为无穷导数. 又 $\pm\infty$ 被叫作广义的数, 所以无穷导数在有些数学场合也可被视为导数存在的特殊情形. 但是在考研中无穷被认为是不存在

1.1.5 高阶导数

定义 1.1.4: 高阶导数的定义

函数 $y=f(x)$ 具有 n 阶导数, 也常说成函数 $f(x)$ 为 n 阶可导, 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数, 那么 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数. 记作:

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}\text{或}f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

当 $n=2$ 时:

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}\text{或}f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

推论 1.1.1: n 阶导数与 $n-1$ 阶导数的关系

如果 $f(x)$ 在点 x_0 处有二阶导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有一阶导数且 $f'(x)$ 在 x_0 处连续.

如果 $f(x)$ 在点 x_0 处有 n 阶导数, 则 $f(x)$ x_0 的某个邻域内有 $1\sim(n-1)$ 阶连续的各阶导数.

1.2　微分

1.2.1　微分的概念

定义 1.2.1: 微分的定义

设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义,x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这个区间内, 如果函数的增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$ 其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是可微的, 而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作 dy, 即: $dy=A\Delta x$

函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 的微分, 称为函数的微分, 记作 dy 或 $df(x_0)$, 即 $dy=f'(x)\Delta x$

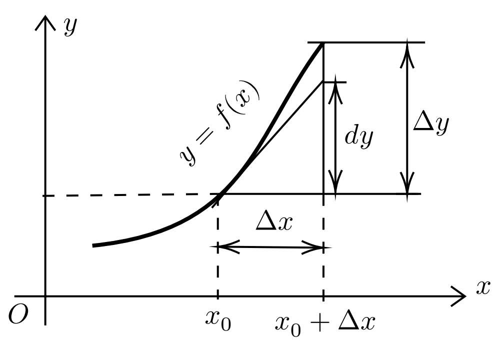
题目 18. 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$, 则当 $\Delta x\to 0$ 时 ,$f(x)$ 在 x_0 处的微分 dy 是 Δx 的 ( ) 无穷小.

A. 等价　B. 同阶　C. 低阶　D. 高阶

解答. 因为 $dy=f'(x)\Delta x=\dfrac{1}{2}\Delta x$, 显然为同阶无穷小.

1.2.2　微分的几何意义

若 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则在点 (x_0,y_0) 附近可以用切线段近似代替曲线段, 这是可微的几何意义.



1.3　导数的计算

1.3.1　导数定义求极限

可以利用如下的公式进行导数定义求极限.

$$f^{'}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

题目 19. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$　(B) $-f'(0)$　(C) $f'(0)$　(D)0

解答. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在该 $x=0$ 处一定连续, 且 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$, 则 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}(\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{2f(x^3)}{x^3})=-f'(0)$

题目 19 的注记. 看见函数在 0 点可导且 $f(0)=0$, 应想到 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$

题目 20. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线, 则 $\lim_{n\to\infty}nf(\dfrac{n}{n+2})=$

解答. 已知 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线, 则 $f(1)=0,f'(1)=1$. 则 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{n}{n+2})}{\frac{1}{n}}=$ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(1-\frac{2}{n+2})-f(1)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(1-\frac{2}{n+2})-f(1)}{-\frac{2}{n+2}}\cdot\dfrac{-\frac{2}{2+n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-2n}{2+n}=-2$

题目 20 的注记. 此类题目应想办法结合题意构造导数定义式

题目 21. 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}x &=2t+|t|,\\ y &=|t|\sin t\end{cases}$ 确定，则

(A)$f(x)$ 连续 ,$f'(0)$ 不存在.　(B)$f'(0)$ 存在 ,$f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

(C)$f'(x)$ 连续，$f''(0)$ 不存在.　(D)$f''(0)$ 存在 ,$f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

解答. $x=\begin{cases}3t,t\geq 0\\ t,t<0\end{cases}$，联立 $y=|t|\sin t$ 消去 t 可得 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3},x\geq 0\\ -x\sin x,x<0\end{cases}$. $\lim_{x\to 0^-}=0=\lim_{x\to 0^+}$，又 $f(0)=0$, 又因为当 $x\neq 0$ 时函数显然连续, 综上函数 $f(x)$ 为连续函数. 排除 BD 选项.$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}}{x}=0$,$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sin x}{x}=0$. 综上 $f'(0)$ 存在. 排除 A 选项. 综上本题应该选择 C 选项.

题目 21 的注记. 此题不能使用参数方程求导公式, 因此只能将函数求出来. 此外 CD 选项如果的后面的 $f''(x)$ 的关系, 应该使用二阶导数单侧的定义式来求解.

题目 22. 设 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2\end{cases}$ $(t\geqslant 0)$ 确定，则 $\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{2n+1}{n}\right)-3\right]=$

解答. $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2n+1}{n})-3}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(2+\frac{1}{n})-3}{\frac{1}{n}}$, 如果 $f(2)=3$, 则上式值为 $f'(2)$
令 $x=2$, 代入参数方程可得 $y=3$. 使用参数方程求导公式可得 $f'(2)=1$

1.3.2 基本求导公式

$(C)'=0;$	$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1};$
$(a^x)'=a^x\ln a;$	$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x;$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a};$	$(\ln\lvert x\rvert)'=\frac{1}{x};$
$(\sin x)'=\cos x;$	$(\cos x)'=-\sin x;$
$(\tan x)'=\sec^2 x;$	$(\cot x)'=-\csc^2 x;$
$(\sec x)'=\sec x\tan x;$	$(\csc x)'=-\csc x\cot x;$
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2};$	$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$
$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$	$[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

1.3.3　导数运算法则

导数运算四则运算

设 $u=u(x),v=v(x)$ 在 x 处可导, 则

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad (v\neq 0)$$

复合函数导数运算法则

定义 1.3.1: 复合函数导数的定义

设 $y=f(g(x))$ 是由 $y=f(z)$,$z=g(x)$ 复合而成, 且 $f(z)$,$g(x)$ 均可导, 则 $\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]g'(x)$

1.3.4　分段函数的导数

设 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\geqslant x_0, \\ f_2(x), & x<x_0, \end{cases}$ 其中 $f_1(x),f_2(x)$ 分别在 $x>x_0,x<x_0$ 时可导, 则

- 在分段点 x_o 处用导数定义求导：$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\dfrac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}, f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\dfrac{f_2(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 根据 $f'_+(x_0)$ 是否等于 $f'_-(x_0)$ 来判定 $f'(x_0)$;
- 在非分段点用导数公式求导, 即 $x>x_0$ 时,$f'(x)=f'_1(x)$; $x<x_0$ 时,$f'(x)=f'_2(x)$

1.3.5　反函数的导数

定义 1.3.2: 反函数导数的定义

设 $y=f(x)$ 为单调、可导函数, 且 $f'(x)\neq 0$, 则存在反函数 $x=\varphi(y)$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$, 即 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

注 1.3.1: 反函数的二阶导数

在 $y=f(x)$ 单调, 且二阶可导的情况下, 若 $f'(x)\neq 0$, 则存在反函数 $x=\varphi(y)$, 记 $f'(x)=y'_x, \varphi'(y)=x'_y$, 则有

$$y'_x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{x'_y}$$

$$y''_{xx}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{1}{x'_y}=-\frac{1}{(x'_y)^2}\cdot(x'_y)'_y\cdot\frac{1}{x'_y}=-\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^2}\cdot\frac{1}{x'_y}=-\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}$$

反过来则有:

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}, x''_{yy}=-\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$$

[a]

[a]显然反函数的二阶导数不是简单的 $\frac{1}{f''(x)}$

题目 23. 设 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=\varphi(y)$, 且 $f(x)=\int_1^{2x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+1$, 则 $\varphi''(1)=$

解答. 由反函数求导法得

$$\varphi'(y)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{f'(x)}$$

上式两端对 y 求导得

$$\varphi''(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}.$$

由 $f(x)=\int_1^{2x}\mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t+1$ 知, $x=\frac{1}{2}$ 时 $y=1$, 且

$$f'(x)=2\mathrm{e}^{4x^2}, f''(x)=16x\mathrm{e}^{4x^2}$$

则 $\varphi''(1)=-\frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{\left[f'\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}=-\frac{8\mathrm{e}}{8\mathrm{e}^3}=-\frac{1}{\mathrm{e}^2}.$

题目 23 的注记. 代入时一定要注意变量是自变量还是因变量, 不可以带错.

1.3.6 参数方程求导

定义 1.3.3: 参数方程所确定的函数的导数

设 $y=f(x)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $(\alpha<t<\beta)$ 确定的函数

如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$ 则其一阶导可写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}&=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\times\frac{1}{\varphi'(t)}\\&=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^2(t)}\times\frac{1}{\varphi'(t)}\\&=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}\end{aligned}$$

题目 24. 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

解答.

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{y''(0)x'(0)-x''(0)y'(0)}{x'^3(0)}.$$

由 $x=3t^2+2t+3$ 知 $x'=6t+2, x''=6$, 则 $x'(0)=2, x''(0)=6$. 由 $e^v\sin t-y+1=0$ 知 $y(0)=1$, 且

$$\mathrm{e}^y y'\sin t+\mathrm{e}^y\cos t-y'=0$$

$$(\mathrm{e}^y y')\cos t+(\mathrm{e}^y y')'\sin t+\mathrm{e}^y y'\cos t-\mathrm{e}^y\sin t-y''=0$$

令 $t=0$, 得 $y'(0)=\mathrm{e}, y''(0)=2\mathrm{e}^2$. 于是 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{2\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}}{4}$.

题目 24 的注记. 参数方程的二阶导, 优先考虑套公式

题目 25. 设 $f''(t)\neq 0$, 有 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t)\,, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

解答. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=1\times\dfrac{1}{x'(t)}=\dfrac{1}{f''(t)}.$

题目 25 的注记. 由于公式法的使用会出现三阶导数, 但是本题没有说明三阶导数是否存在因此不可以使用公式法进行求解.

1.3.7 变上下限求导

题目 26. 设 $y=f(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\dfrac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 确定, 则 $\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$

解答. 令方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\dfrac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 的上下限 $y-x=1$, 得 $x=0, y=1$, 即 $f(0)=1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=f'(0).$$

对方程对 x 求导得,$1=(y'-1)\sin^2[\dfrac{\pi}{4}(y-x)]$, 代入 $x=0, y=1$ 得 $f'(0)=3$.

题目 26 的注记. 看见变上下限积分, 应想到令其上下限相等来得到特殊条件.

题目 27. 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin x-\int_x^y\varphi(u)du=0$ 确定，其中可导函数 $\varphi(u)>0$, 且 $\varphi(0)=\varphi'(0)=1$, 求 $y''(0)$.

解答. 令方程 $\sin x-\int_x^y\varphi(u)du=0$ 中的 $\int_x^y\varphi(u)du$ 上下限相等得 $x=y=0$. 对方程两侧关于 x 求导得: $\cos x-[\varphi(y)y'-\varphi(x)]=0.x=0,y=0$ 代入 $y(x)$ 得 $y'(0)=2$. 对 $\cos x-[\varphi(y)y'-\varphi(x)]=0.x=0,y=0$ 两端对 x 求导得 $-\sin x-[\varphi'(y)y'^2+\varphi(y)y''-\varphi'(x)]=0$, 代入可得 $y''(0)=-3$.

1.3.8 隐函数求导

隐函数的定义

定义 1.3.4: 隐函数与显函数的定义

- 隐函数:y 与 x 的关系隐含在一个等式中,$F(x,y)=0$, 如 $x^2+y^2=4$
- 显函数: 因变量与自变量在等式两端,y 和 x 各占一边, 如 $y=3x$

隐函数求导

定义 1.3.5: 隐函数求导法则

设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的可导函数则

- 方程 $F(x,y)=0$ 两边对自变量 x 求导, 注意 $y=y(x)$, 即将 y 看作中间变量, 得到一个关于 y' 的方程
- 解该方程便可求出 y'

题目 28. 设函数 $y=y(x)$ 由 $y-x\mathrm{e}^y=1$ 确定, 试求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$

解答. 对方程 $y-x\mathrm{e}^y=1$ 对 x 求导得:$y'-e^y-xy'e^y=0$, 再次求导得 $y''-y'e^y-y'e^y-x\left(y'e^y\right)'=0$, 将 $x=0$ 代入上述方程易知 $x=0,y=1,y'(0)=e$, 从而可以得到 $y''=2e^2$

1.3.9 利用函数性质求导数

对数函数求导法

对于**多项相乘、相除、开方、乘方**的式子, 一般先取对数再求导. 设 $y=f(x)(f(x)>0)$, 则

- 等式两边取对数, 得 $\ln y=\ln f(x)$
- 两边对自变量 x 求导 (同样注意 $y=f(x)$, 即将 y 看作中间变量), 得

$$\frac{1}{y}y'=\Big[\ln f(x)\Big]'\Rightarrow y'=\frac{yf'(x)}{f(x)}$$

题目 29. 设 $y=\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{x(1+x^2)}}$, 求 y'

解答.

$$
\begin{aligned}
\ln|y| = &= \frac{1}{3}[\ln|x+1|+\ln|x+2|-\ln|x|-\ln(1+x^2)] \\
\frac{y'}{y} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}-\frac{2x}{1+x^2}\right) \\
y' &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{x(1+x^2)}}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}-\frac{2x}{1+x^2}\right).
\end{aligned}
$$

幂指函数求导法

对于 $u(x)^{v(x)}$ 函数, 可采用 $e^{v(x)\ln u(x)}$ 进行转换求导然后求导, 得

$$
\left[u(x)^{\nu(x)}\right]' = \left[\mathrm{e}^{\nu(x)\ln u(x)}\right]' = u(x)^{\nu(x)}\left[\nu'(x)\ln u(x)+\nu(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right]
$$

题目 30. $y=(1+x^2)^{\sin x}$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= e^{\sin x\ln(1+x^2)} \\
&= e^{\sin x\ln(1+x^2)} \times [\cos x\cdot\ln(1+x^2)+\sin x\cdot\frac{2x}{1+x^2}] \\
&= (1+x^2)^{\sin x}\cdot[\cos x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}]
\end{aligned}
$$

题目 31. 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0)=$

解答. **方法一:** 显然 $f(0)=0$, 则由导数定义得

$$
f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)}{x}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)\\
&= (1-2)(1-3)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!.
\end{aligned}
$$

解答. **方法二:** 显然 $f(0)=0$, 令 $g(x)=(e^{2x}-2)\dots(e^{nx}-n)$, 则 $f(x)=(e^x-1)g(x)$, 对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=e^xg(x)+(e^x-1)g'(x)$, 则 $f'(0)=g(0)=-2\cdot-3\cdots-n=(-1)^{n-1}(n-1)!$

题目 31 的注记. 此类问题的特征是函数一边为 0, 一边不为 0. 方法一是利用导数求导公式进行计算, 在使用导数定义时, 一般在极限问题上会遇见等价无穷小或者拉格朗日中值定理. 方法二是将两个函数分开, 然后使用复合函数求导公式进行计算. 遇见此类问题应采用法二把等于 0 的和不为 0 的单独拎出来进行计算.

题目 32. 设函数 $f(x)=\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1\right]\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)-2\right]\cdots\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x^{100}\right)-100\right]$, 则 $f'(1)$

解答. 令 $g(x)=\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)-2\right]\cdots\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x^{100}\right)-100\right]$, 则 $f(x)=\left[\tan(\frac{\pi}{4}x)-x\right]g(x)$. 则 $f'(x)=\frac{\pi}{4}\sec^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)g(x)+\left[\tan(\frac{\pi}{4}x)-x\right]g'(x), f'(1)=\frac{\pi}{2}g(1)+0\cdot g(1)=-\frac{99!}{2}\pi$

题目 32 的注记. 此题还可以使用导数的定义式进行计算.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{[\tan(\frac{\pi}{4}x)-1]\cdot g(1)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(x-1)g(1)}{x-1}\\
&= \frac{\pi}{2}(1-2)(1-3)\dots(1-100)\\
&= -\frac{99!}{2}\pi
\end{aligned}
$$

1.3.10 高阶导数求导

归纳法求高阶导数

常用高阶导数:

$$[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right) \quad [\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$[\ln(ax+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n \frac{(n-1)!}{(ax+b)^n} \qquad \left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n a^n \frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}$$
$$\left(e^{ax+b}\right)^{(n)} = a^n e^{ax+b}$$

莱布尼兹公式求高阶导数

设 $u=u(x), \nu=\nu(x)$ 均 n 阶可导, 则

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$(u\nu)^{(n)} = u^{(n)}\nu + C_n^1 u^{(n-1)}\nu' + C_n^2 u^{(n-2)}\nu'' + \cdots + C_n^k u^{(n-k)}\nu^{(k)} + \cdots + C_n^{n-1} u' \nu^{(n-1)} + u\nu^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} \nu^{(k)}$$

泰勒公式求高阶导数

已知带佩亚诺余项的 n 阶泰勒展开式的条件为, 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么该函数的抽象展开为

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

具体展开为:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

当 $x_0 = 0$ 时

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

具体展开为:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

函数泰勒展开式的唯一性: 无论 $f(x)$ 由何种方法展开, 其泰勒展开式具有唯一性, 那么就可以通过比较抽象展开和具体展开的系数, 获得 $f^{(n)}(x_0)$ 或者 $f^{(n)}(0)$

1.4　导数的几何应用

1.4.1　单调性判别

设函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.

- 如果在 (a,b) 内 $f'(x) \geqslant 0$, 且等号仅在有限个点处成立, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加
- 如果在 (a,b) 内 $f'(x) \leqslant 0$, 且等号仅在有限个点处成立, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调减少

1.4.2　极值

极值的定义

定义 1.4.1: 极值的定义

对于函数 $f(x)$, 若存在点 x_0 的某个邻域, 使得在该邻域内任意一点 x, 均有

$$f(x) \leqslant f(x_0)(\text{或} f(x) \geqslant f(x_0))$$

成立, 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点 (或极小值点),$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值 (或极小值).

注 1.4.1: 极值的注意事项

- 端点出不讨论极值, 因为单侧可能不存在
- 常函数某任一邻域内处处都是极值点
- 间断点也可以极值点, 只要满足其邻域内最大值即可.
- 极值点只能有两种情况, 即驻点和不可导点:
  1. 驻点:$f'(x_0) = 0$, 如 $y = x^2$ 在 $(0,0)$ 处的情形
  2. 不可导点:$f'(x_0)$ 不存在, 如 $y = |x|$ 在 $(0,0)$ 处的情形

极值的判定

定义 1.4.2: 极值判定的必要条件

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且在点 x_0 处取得极值, 则必有 $f'(x_0) = 0$

定义 1.4.3: 极值判定的第一充分条件

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)(\delta > 0)$ 内可导.

1. 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 , $f'(x) < 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 , $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值
2. 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 , $f'(x) > 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 , $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值
3. 若 $f'(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内不变号, 则点 x_0 不是极值点

定义 1.4.4: 极值判定的第二充分条件

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$

1. 若 $f''(x_0) < 0$, $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值
2. 若 $f''(x_0) > 0$, $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

极值判定的第二充分条件证明:

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} \end{aligned}$$

若 $x - x_0 > 0$ 且 $f''(x_0) < 0$, 则 $f'(x) < 0$. 若 $x - x_0 < 0$ 且 $f''(x_0) < 0$, 则 $f'(x) > 0$, 那么 x_0 为极小值点. 同理可得极大值点. □

定义 1.4.5: 极值判定的第三充分条件

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0(m = 1, 2, \cdots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0(n \geqslant 2)$, 则

1. 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 处取得极大值
2. 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值

1.4.3 最值

最值的定义

定义 1.4.6: 最值的定义

设 x_0 为 $f(x)$ 定义域内一点, 若对于 $f(x)$ 的定义域内任意一点 x, 均有

$$f(x) \leqslant f(x_0)(\text{或} f(x) \geqslant f(x_0))$$

成立, 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的最大值 (或最小值).

结论 1.4.1: 有关极值点和最值点的结论

如果 $f(x)$ 在区间 I 上有最值点 x_0, 并且此最值点 x_0 不是区间 I 的端点而是 I 内部的点, 那么此 x_0 必是 $f(x)$ 的一个极值点.

1.4.4 凹凸性

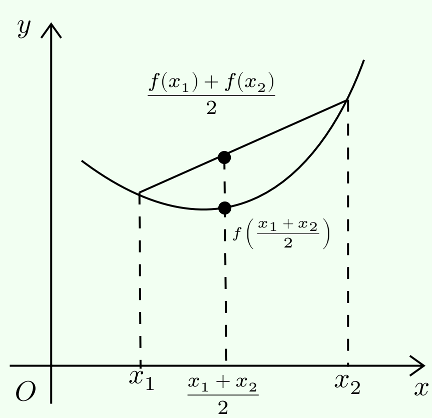
凹凸性第一种的定义

定义 1.4.7: 凹凸性的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续. 如果对 I 上任意不同两点 x_1, x_2, 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

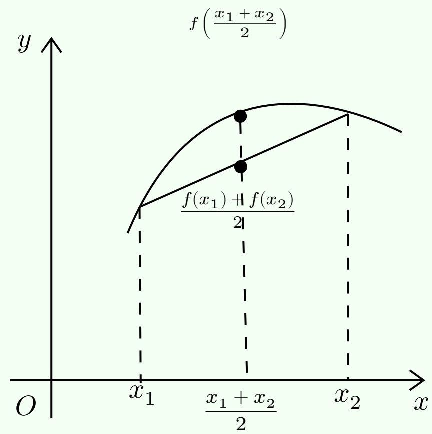
则称 $y=f(x)$ 在 I 上的图形是凹的 (或凹弧), 即如下图所示



如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上的图形是凸的 (或凸弧), 即如下图所示



定义 1.4.8: 凹凸性的第二种定义

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 若对 (a,b) 内的任意 x 及 $x_0(x\neq x_0)$, 均有

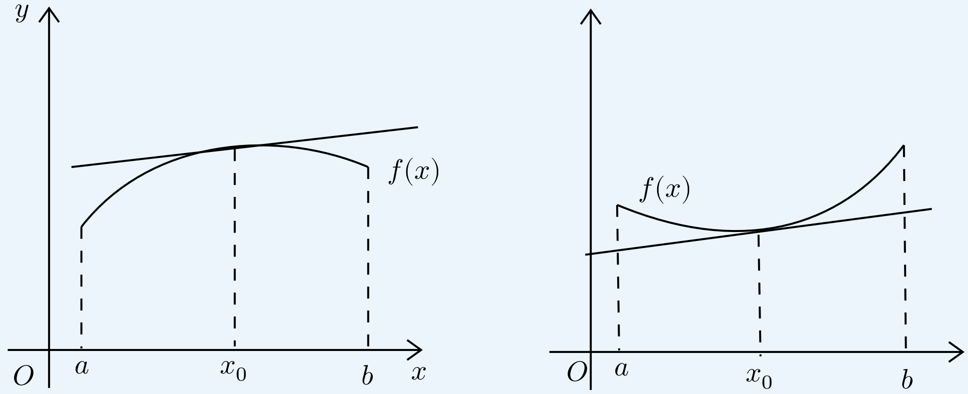
$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)<f(x)$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的图形上是凹的

同理, 当上式 >0 时, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的图形上是凸的

注 1.4.2: 凹凸性第二种定义的几何意义

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程, 因此该表达式的几何意义如下图所示. 若曲线 $y=f(x)(a<x<b)$ 在任意点处的切线 (除该点外) 总在曲线的下方 (上方), 则该曲线是凹 (凸) 的.



凹凸性的判别

定义 1.4.9: 凹凸性的判别

设函数 $f(x)$ 在 I 上二阶可导:

1. 若在 I 上 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的
2. 若在 I 上 $f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的

1.4.5　拐点

拐点的定义

定义 1.4.10: 拐点的定义

连续曲线的凹弧与凸弧的分界点称为该曲线的拐点

注 1.4.3: 拐点存在的情况

若点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点, 则只有以下两种情况

1. $f''(x_0)=0$, 如 $y=x^3$ 在 $(0,0)$ 处的情形
2. $f''(x_0)$ 不存在, 如 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $(0,0)$ 处的情形

拐点的判别

定义 1.4.11: 拐点的判别的必要条件

设 $f''(x_0)$ 存在, 且点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点, 则 $f''(x_0)=0$

定义 1.4.12: 拐点的判别的第一充分条件

设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 在点 $x=x_0$ 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内二阶导数存在, 且在该点的左、右邻域内 $f''(x)$ 变号 (无论是由正变负, 还是由负变正), 则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点[a].

[a] $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点, 并不要求 $f(x)$ 在点 x_0 的导数存在

定义 1.4.13: 拐点的判别的第二充分条件

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内三阶可导, 且 $f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$, 则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点.

定义 1.4.14: 拐点的判别的第三充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=2,\cdots,n-1), f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 3)$, 则当 n 为奇数时, 点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点.

极值点和拐点的重要结论

结论 1.4.2: 极值点和拐点的重要结论

1. 曲线的可导点不可同时为极值点和拐点；曲线的不可导点可同时为极值点和拐点
2. 设多项式函数 $f(x)=(x-a)^n g(x)(n>1)$, 且 $g(a)\neq 0$, 则当 n 为偶数时,$x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点; 当 n 为奇数时, 点 $(a,0)$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点.
3. 设多项式函数 $f(x)=(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}...(x-a_k)^{n_k}$, 其中 n_i 是正整数,a_i 是实数且 a_i 两两不等,$i=1,2,\cdots,k$.

   记 k_1 为 $n_i=1$ 的个数,k_2 为 $n_i>1$ 且 n_i 为偶数的个数,k_3 为 $n_i>1$ 且 n_i 为奇数的个数, 则 $f(x)$ 的极值点个数为 $k_1+2k_2+k_3-1$, 拐点个数为 $k_1+2k_2+3k_3-2$.

1.4.6　曲率与曲率半径

定义 1.4.15: 曲率与曲率半径的计算公式

设 $y(x)$ 二阶可导, 则曲线 $y=y(x)$ 在点 $(x,y(x))$ 处的曲率公式为

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径的计算公式

$$R=\frac{1}{k}=\frac{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}(y''\neq 0)$$

1.4.7　渐近线

铅直渐近线

定义 1.4.16: 铅直渐近线定义

若 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$(或 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$), 则 $x=x_0$ 为一条铅直渐近线.

水平渐近线

定义 1.4.17: 水平渐近线定义

若 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_1$, 则 $y=y_1$ 为一条水平渐近线.

若 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_2$, 则 $y=y_2$ 为一条水平渐近线.

若 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0$, 则$y=y_0$ 为一条水平渐近线

斜渐近线

定义 1.4.18: 斜渐近线定义

若 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a_1(a_1\neq 0),\lim_{x\to+\infty}\Big[f(x)-a_1x\Big]=b_1$, 则 $y=a_1x+b_1$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a_2(a_2\neq 0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=b_2$, 则 $y=a_2x+b_2$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线

若 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a(a\neq 0),\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$, $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.