

第一章 连续

1.1 函数的连续性

定义 1.1.1: 连续点的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

那就称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续.

注 1.1.1: 函数连续的性质

- 当极限需要讨论时:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \text{ 在点 } x_0 \text{ 处连续}$$

- 一点连续不能推出邻域连续: 以函数 $f(x) = xD(x)$ 为例, 其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数: 该函数在 $x = 0$ 时极限为 0, 函数值也为 0, 因此函数在 $x = 0$ 点连续, 但是其邻域内所有点都不连续.
- 连续性的四则运算: 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在点 $x = x_0$ 处连续, 则 $f(x) \pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 当 $g(x_0) \neq 0$ 时, $f(x)/g(x)$ 在点 $x = x_0$ 处也连续.
- 复合函数的连续性: 设 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 处连续, 且 $u_0 = \varphi(x_0)$, 则 $f[\varphi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 处连续.
- 反函数的连续性: 设 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上单调且连续, 则反函数 $x = \varphi(y)$ 在对应的区间 $I_y =$

$\{y|y=f(x), x \in I_x\}$ 上连续且有相同的单调性

- $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 且 $f(x_0) > 0$ (或 $f(x_0) < 0$), 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

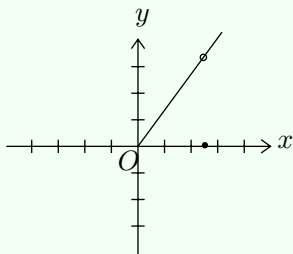
1.2 函数的间断点

1.2.1 间断点的相关概念

讨论间断点的前提: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义

定义 1.2.1: 可去间断点的定义

可去间断点: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$ ($f(x_0)$ 甚至可以无定义), 则这类间断点称为可去间断点



可去间断点函数图像

题目 1. 函数 $f(x) = \frac{(x+1)|x-1|}{e^{\frac{1}{x-2}} \ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

解答. 该题中可疑点为 $x = \pm 1, 2, 0$, 对上述四点求极限可得: $\lim_{x \rightarrow 0} = 0$, 但是函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点无定义. 因此 $x = 0$ 是可去间断点. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 时 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-}$. 因此 $x = 1$ 是跳跃间断点. $\lim_{x \rightarrow -1} = -2\sqrt[3]{e}$, 因此 $x = -1$ 是可去间断点. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty, x = 2$ 是第二类间断点.

题目 1 的记注. 如何找间断点? 主要是找可疑点

- 绝对值分段点
- 这一点本身没有定义, 但邻域内都有定义的点¹.

¹比如分母为 0 的点

$\ln(x)$ 本身不需要讨论 x 等于 0, 因为只有 0 点右邻域有定义, 0 点的左邻域内连定义都没有, 更不用谈 0 点的左极限, 所以此时 0 不可能是间断点. 但出现 $\ln|x|, \ln(x^2)$ 时, 0 点本身无定义, 但 0 点左右邻域内都有定义, 所以 0 可能是间断点.

题目 2. 函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

解答. $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 在 $x = -1, 0, 1$ 处无定义

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = \infty,$$

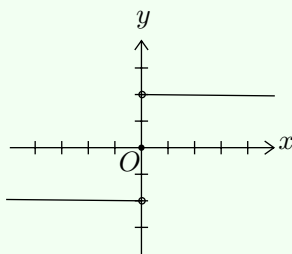
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

综上, $x = 0$ 与 $x = 1$ 为可去间断点

定义 1.2.2: 跳跃间断点的定义

跳跃间断点^a: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, 则这类间断点称为跳跃间断点

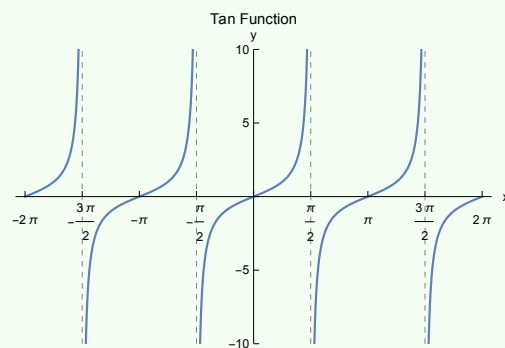


跳跃间断点函数图像

^a一点极限存在 $f(x)$ 在 x_0 连续

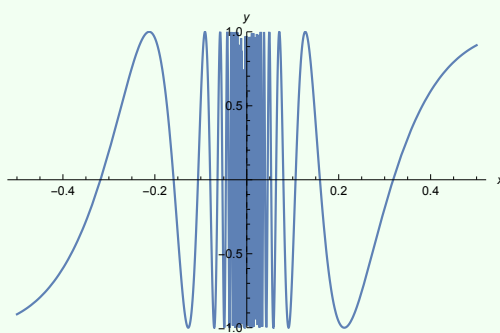
定义 1.2.3: 无穷间断点的定义

无穷间断点: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则这类间断点称为无穷间断点, 如 $y = \tan x$

图 1.1: 无穷间断点函数 \tan 图像

定义 1.2.4: 振荡间断点的定义

振荡间断点: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 振荡不存在, 则这类间断点称为振荡间断点

图 1.2: 振荡间断点函数 $\sin \frac{1}{x}$ 图像

1.2.2 间断点的分类

通过求函数在该点的左右极限来判断

- 第一类间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在
 - 可去²: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$
 - 跳跃: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
- 第二类间断点: 除第一类以外的间断点 $\implies \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均至少一个不存在

²可去间断点上极限存在但是导数不存在

题目 3. ★★☆☆☆ 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + nx(1-x)\sin^2 \pi x}{1 + n\sin^2 \pi x}$, 则 $f(x) =$

解答. 分情况讨论, 当 $\sin^2 \pi x = 0$ 和 $\sin^2 \pi x \neq 0$

当 $\sin^2 \pi x = 0$ 时,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1} \\ &= x^2\end{aligned}$$

当 $\sin^2 \pi x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{n} + x(1-x)\sin^2 \pi x}{\frac{1}{n} + \sin^2 \pi x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1-x)\sin^2 \pi x}{\sin^2 \pi x} \\ &= x(1-x)\end{aligned}$$

$$\text{综上函数 } f(x) = \begin{cases} x^2, \sin^2 \pi x = 0 \\ x(1-x), \sin^2 \pi x \neq 0 \end{cases}$$

题目 4. 求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ 的间断点并指出其类型.

$$\text{解答. 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, 有 } \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} \infty, |x| > 1 \\ 0, |x| < 1 \\ 1, x = 1 \\ (-1)^n, x = -1 \end{cases}, \text{ 那么 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} = \begin{cases} -1, 0 < |x| < -1 \\ x^2, |x| > 1 \\ 0, |x| = 1 \end{cases}$$

综上, $x = \pm 1$ 为跳跃间断点, $x = 0$ 为可去间断点.

题目 4 的注记. 对于 $f(x)$ 是 x 的函数, 表达式是以 n 的极限的形式给出的情况, 方法为把 $f(x)$ 分段解出来, n 趋于无穷时, x^n 要以 $|x| = 1$ 为界限进行分段.

同时应该结合 x^n 的解析式进行求解: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} \infty, |x| > 1 \\ 0, |x| < 1 \\ 1, x = 1 \\ (-1)^n, x = -1 \end{cases}$

题目 5. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{(n+1)x} + 1}{e^{nx} + x^n + 1}$, 则 $f(x)$:

(A) 仅有一个可去间断点. (B) 仅有一个跳跃间断点. (C) 有两个可去间断点. (D) 有两个跳跃间断点.

解答. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{nx} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x = 0 \\ +\infty, x > 0 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} \infty, |x| > 1 \\ 0, |x| < 1 \\ 1, x = 1 \\ (-1)^n, x = -1 \end{cases}$

综上所述可得: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{(n+1)x} + 1}{e^{nx} + x^n + 1} = \begin{cases} 0, x < -1 \\ 1, -1 < x < 0 \\ 2e^x, x > 0 \end{cases}$