

# 第一章 极限

## 1.1 数列的极限

### 1.1.1 数列极限的定义

#### 定义 1.1.1

设  $|x_n|$  为一数列, 若存在常数  $a$ , 对于任意的  $\varepsilon > 0$  (不论它多么小), 总存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时  $|x_n - a| < \varepsilon$  恒成立, 则称数  $a$  是数列  $|x_n|$  的极限, 或者称数列  $|x_n|$  收敛于  $a$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$$

该定义的  $\varepsilon - N$  语言描述是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \text{ 正整数 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

<sup>a</sup> $\varepsilon - N$  几何意义: 对于点  $a$  的任何  $\varepsilon$  邻域即开区间  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  一定存在  $N$ , 当  $n > N$  即第  $N$  项以后的点  $x_n$  都落在开区间  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  内, 而只有有限个 (最多有  $N$  个) 在区间之外.

在上面的定义中,  $\varepsilon > 0$  的  $\varepsilon$  任意性是非常重要的, 只有这样才能表示出无限接近的意义. 总存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  这个条件用于表达  $n \rightarrow \infty$  的过程.

#### 注 1.1.1

- 数列的极限值与数列的前有限项无关, 只与后面无穷项有关
- 若数列  $\{a_n\}$  收敛, 则其任何子列  $\{a_{n_k}\}$  也收敛, 且  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a$
- 关于数列  $(1 + \frac{1}{n})^n$  的结论
  - 单调增加
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

<sup>a</sup>此条定理提供了一个判断数列发散的方法:1. 至少一个子数列发散.2. 两个子数列收敛, 但是收敛值不同.

**题目 1.** 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$

证明. 已知数列  $a_n$  极限为  $A$ , 那么  $|a_n - A| < \varepsilon$ , 由不等式1可得,  $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$ .  $\square$

**题目 1 的注记.**

1. 此命题反过来则错误, 如取  $a_n = (-1)^n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1$ . 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  不存在.
2. 在本题中若  $A = 0$ , 则  $||a_n| - |A|| = ||a_n| - 0| = |a_n - 0|$ , 即有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0,$$

此结论常用, 即若要证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 可转换为证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , 由于  $|a_n| \geq 0$ , 若使用了夹逼准则, 只需证明  $|a_n| \leq 0$  即可

3. 此结论对函数亦成立, 即若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$ .

### 1.1.2 收敛数列的性质

唯一性

#### 定义 1.1.2

如果数列  $\{x_n\}$  收敛, 那么它的极限唯一

有界性

#### 定义 1.1.3

如果数列  $\{x_n\}$  收敛, 那么数列  $\{x_n\}$  一定有界<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>如果数列有界, 但是不一定存在极限, 如数列  $(-1)^n$

保号性

#### 定义 1.1.4

如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 且  $a > b$  (或  $a < b$ ), 那么存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n > b$  (或  $x_n < b$ ).

如果数列  $|x_n|$  从某项起有  $x_n \geq b$  (或  $x_n \leq b$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 那么  $a \geq b$  ( $a \leq b$ )<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>其中  $b$  可以为任意实数, 常考  $b=0$  的情况

## 1.2 函数的极限

### 1.2.1 超实数系

#### 定义 1.2.1: 超实数系的概念

超实数 (Hyperreal number) 是一个包含实数以及无穷大和无穷小的域, 它们的绝对值分别大于和小于任何正实数。

#### 注 1.2.1

- 超实数集是为了严格处理无穷量 (无穷大量和无穷小量) 而提出的。
- 超实数集, 或称为非标准实数集, 记为  ${}^*\mathbb{R}$ , 是实数集  $\mathbb{R}$  的一个扩张。

### 1.2.2 邻域

1

#### 定义 1.2.2: 邻域的相关概念

- $\delta$  邻域: 设  $x_0$  是数轴上一个点,  $\delta$  是某一正数, 则称  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  为点  $x_0$  的  $\delta$  邻域, 记作  $U(x_0, \delta)$ , 即:
 
$$U(x_0, \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x | |x - x_0| < \delta\}$$
- 去心  $\delta$  邻域: 定义点  $x_0$  的去心邻域  $\dot{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$
- 左, 右  $\delta$  邻域:  $\{x | 0 < x - x_0 < \delta\}$  称为点  $x_0$  的右  $\delta$  邻域, 记作  $U^+(x_0, \delta)$ ;  $\{x | 0 < x_0 - x < \delta\}$  称为点  $x_0$  的左  $\delta$  邻域, 记作  $U^-(x_0, \delta)$ .

### 1.2.3 函数极限的定义

函数极限的定义主要分为自变量趋于有限值 ( $x \rightarrow x_0$ ) 时的极限和自变量趋于无穷大时函数的极限 ( $x \rightarrow \infty$ )

<sup>1</sup>邻域与区间不同, 邻域属于区间的范畴. 但是邻域通常表示“一个局部位置”. 比如“点  $x_0$  的  $\delta$  邻域”, 可以理解为“点  $x_0$ ”的附近, 而区间是明确指出在实数系下的范围

## 自变量趋于有限值时的函数极限

## 定义 1.2.3: 当自变量趋于有限值时函数极限定义

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\varepsilon$  (不论它多么小)<sup>a</sup>, 总存在正数  $\delta$ , 使得当  $x$  满足不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数  $A$  就叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \text{ (当 } x \rightarrow x_0 \text{)}$$

其  $\varepsilon - N$  语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  在证明中, 这两句是白给, 直接写。后面的才是关键。

<sup>a</sup> $\varepsilon$  用于衡量  $|f(x) - A|$  的值有多小

## 注 1.2.2

1. 在函数极限中  $x \rightarrow \infty$  指的是  $|x| \rightarrow \infty$ , 需要  $x$  趋于正无穷和负无穷, 但在数列中的  $n \rightarrow \infty$  是  $n \rightarrow +\infty$
2. 函数的极限值只与邻域内的函数值有关, 而与该点的函数值无关.

题目 2. 设  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$ , 则:

(A)  $f(1) = 0$  (B)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$  (C)  $f'(1) = 1$  (D)  $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$

解答.  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$ , 根据极限四则运算法则 1.4.1,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ , 对于其他选项, 需要知道的是函数的极限值与该点的函数值无关, 只与邻域内的函数值有关.

## 单侧极限

## 定义 1.2.4: 单侧极限的定义

若当  $x \rightarrow x_0^-$  时,  $f(x)$  无限接近于某常数  $A$ , 则常数  $A$  叫作函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

若当  $x \rightarrow x_0^+$  时,  $f(x)$  无限接近于某常数  $A$ , 则常数  $A$  叫作函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^+) = A$$

题目 3. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|) \frac{1}{x} \right]$  存在, 求  $a$  的值

解答. 由于存在  $\arctan$  与  $|x|$  函数, 则对于 0 点的极限值需要分左右进行计算.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|) \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \arctan \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x) \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}a + \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|) \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} a \arctan \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x) \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}a + e$$

若极限存在, 则  $a = \frac{1 - e^2}{\pi e}$

题目 3 的注记. 由于自变量趋向的双向性, 以下类型的函数因此需要进行特殊讨论:

- 形如  $f(x) = \max\{h(x), g(x)\}$  此类函数也需要注意在函数变化点的自变量取值问题
- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x: \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}: \lim_{x \rightarrow 0^+} = \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} = \frac{\sin x}{-x} = -1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x: \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} [x]: \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$

### 自变量趋于无穷大时函数的极限

#### 定义 1.2.5: 自变量趋于无穷大时函数极限定义

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\varepsilon$  (不论它多么小), 总存在正数  $\delta$ , 使得当  $x$  满足不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数  $A$  叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0)$$

其  $\varepsilon - N$  语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  在证明中, 这两句是白给, 直接写. 后面的才是关键。

需要注意的是趋向的值不同时,  $\varepsilon - N$  写法不同, 不能照抄. 其  $\varepsilon - N$  的表达为如下表格:

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 即有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow x_0^+$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x)  > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow x_0^-$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x)  > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow \infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x  > X$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x  > X$ 时, 即有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x  > X$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x  > X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$
$x \rightarrow +\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow -\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使 当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$

## 注 1.2.3: 上表的部分解释

- 以  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  为例: 不管  $f(x)$  与  $A$  的距离多近 ( $\forall \varepsilon > 0$ ), 总有  $x$  不断靠近  $x_0$ , 使得  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .
- 以  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  为例: 不管  $M$  多大, 总有当  $x > \infty$  时, 使得  $|f(x)| > M$ , 即满足

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

### 1.2.4 函数极限的性质

唯一性

#### 定理 1.2.1

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 那么极限唯一

#### 注 1.2.4: 关于唯一性的说明

- 对于  $x \rightarrow \infty$ , 意味着  $x \rightarrow +\infty$  且  $x \rightarrow -\infty$
- 对于  $x \rightarrow x_0$ , 意味着  $x \rightarrow x_0^+$  且  $x \rightarrow x_0^-$

对于上述问题, 我们称为自变量取值的“双向性”. 以下有一些常见的问题:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow x_0} [x]$  不存在.
- 其不存在的原因均为分段函数分段点极限表达式不同, 需要分别求左右极限.

#### 注 1.2.5: 极限存在的充要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A^a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 (\text{无穷小量 } \alpha(x) = 0)^b$$

<sup>a</sup>左右极限都存在且相等

<sup>b</sup>对于此概念, 如果引入超实数系的解释应为  $A$  是  $f(x)$  的标准实数部分, 而  $f(x)$  的值是超实数系下的值, 因此其值应为  $f(x) = A + \alpha(x)$

#### 注 1.2.6: 极限不存在的情况

- 函数在该点附近趋于无穷
- 函数在该点的左右极限只存在一个, 或两者都存在但不相等
- 函数在该点附近不停地震荡
- 该点是函数无定义点的聚点

## 局部有界性

## 定理 1.2.2

若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在<sup>a</sup>, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  某去心邻域内有界.

<sup>a</sup>对局部有界性的描述需要指明是在那个区间上

## 注 1.2.7: 局部有界性的性质

- 极限存在必有界, 有界函数极限不一定存在.
- 若  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上为连续函数, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必有界.
- 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内为连续函数, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  都存在, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内必定有界.
- 有界函数与有界函数的和, 差, 积仍为有界函数<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>商不是有界函数, 因为:  $y_1 = 1, y_2 = 0, \frac{y_1}{y_2} = \infty$

题目 4. 在下列区间内, 函数  $f(x) = \frac{x \sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$  有界的是:  
A:  $(-2, 1)$       B:  $(-1, 0)$       C:  $(1, 2)$       D:  $(2, 3)$

解答. 又题意可知, 函数的分段点为  $x = 3, 0, 1$ , 对上述三点求极限, 分析可得, 当  $x = 3, 1$  时, 函数极限为  $\infty$ , 因此函数在上述两点的极限不存在, 因此根据局部有界性的性质可得, 含这两个点的区间无界, 因此排除 A, C, D. 答案为 B.

## 局部保号性

## 定理 1.2.3

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 且  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 那么存在常数  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时有  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ )<sup>a</sup>.

如果在  $x_0$  的某去心邻域内  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ ), 而且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 那么  $A \leq 0$  或  $(A \leq 0)^b$ .

<sup>a</sup>如果函数在  $x_0$  附近的极限值为正, 那么  $x_0$  附近的函数值为正

<sup>b</sup>如果函数在  $x_0$  附近的函数值  $\leq 0$ , 那么  $x_0$  此处的极限值  $\leq 0$

对上述定理中, 为什么一个可以等于 0, 一个不能等于 0? 其解释如下: 如果第一个定理中  $A \leq 0, f(x) \leq 0$ , 那么以函数  $f(x) = x^2$  为例, 虽然  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 但是邻域内的函数值都大于 0. 对于第二个定理中如果  $f(x) < 0, A < 0$ , 那么以函数  $f(x) = -x^2$  为例, 虽然邻域内的函数值都小于 0, 但是  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .



## 注 1.2.8

由保号性可推出保序性: 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 则:

1. 若  $A > B \Rightarrow \exists \delta > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  时,  $f(x) > g(x)$ .
2. 若  $\exists \delta > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  时,  $f(x) \geq g(x) \Rightarrow A \geq B$ .

## 题目 5. 局部保号性的证明:

证明. 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ , 所以, 取  $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

□

由上述证明可得如下推论

## 推论 1.2.1

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0 (A \neq 0)$ , 那么就存在  $x_0$  的某一去心邻域  $\dot{U}(x_0)$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0)$  时, 就有  $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

## 函数极限与数列极限的关系 (海涅定理)

## 定理 1.2.4

设  $f(x)$  在  $\dot{U}(x_0, \delta)$  内有定义, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  存在  $\Leftrightarrow$  对任何  $\dot{U}(x_0, \delta)$  内以  $x_0$  为极限的数列  $\{x_n\} (x_n \neq x_0)$ , 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  存在.

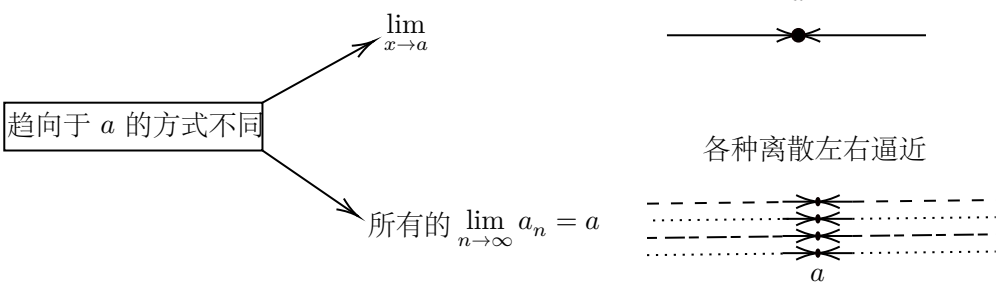
把这个定理简化一下, 主要意思就是

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

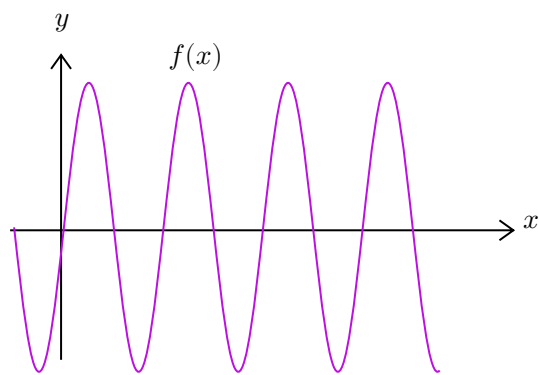
$$\Updownarrow$$

$$\text{所有的 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$$

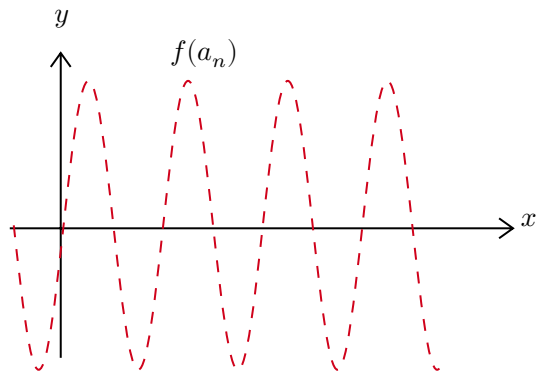
其不同之处在于是离散的趋近还是连续的趋近



除此之外,  $f(x)$  和  $f(a_n)$  的函数图像如下所示

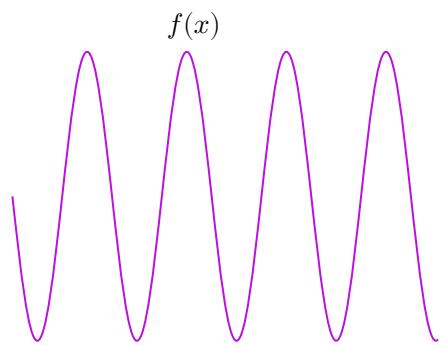


函数  $f(x)$

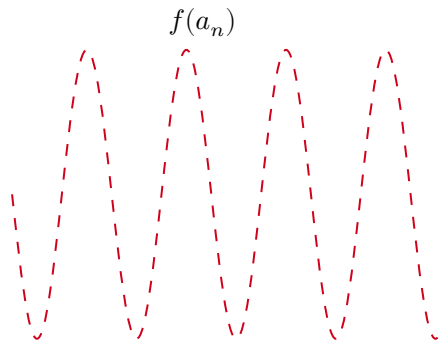


函数  $f(a_n)$

如上图所示  $f(a_n)$  其实是  $f(x)$  的抽样



用  $\varepsilon - \delta$  求它的极限



用海涅定理求它的极限

需要注意的是, 是所有的数列(抽样)才能完全代表整体. 不能说我选了某个数列有极限就代表函数有极限. 总结:海涅定理表述了离散与连续、数列极限与函数极限的关系.

## 1.3 无穷小与无穷大

### 1.3.1 无穷小

#### 定义 1.3.1: 无穷小的定义

如果函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的极限为零, 那么称函数  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷小.

$f(x)$  是可以本身为 0 或者无限趋近于零, 其中 0 可以作为无穷小唯一常数.

#### 注 1.3.1: 无穷小与函数极限的关系 (脱帽法)

$\lim_{x \rightarrow \cdot} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ , 其中  $\lim_{x \rightarrow \cdot} f(x)$  为超实数值, 其实数部分为  $A$ , 函数  $f(x)$  的函数值为  $A + \alpha$

#### 无穷小的性质

1 有限个无穷小的和是无穷小<sup>2</sup>

证明. 设  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  为无穷小量. 则  $0 \leq |\alpha_1 + \alpha_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2|$ ,  $|\alpha_1| + |\alpha_2|$  的极限为 0. 证明完毕.  $\square$

2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小<sup>3</sup>

证明.  $|\alpha_1| \leq M$ ,  $\alpha_2$  是无穷小量. 那么  $0 \leq |\alpha_1 \times \alpha_2| = |\alpha_1| \times |\alpha_2| \leq M \times |\alpha_2|$  证明完毕.  $\square$

3 有限个无穷小的乘积是无穷小<sup>4</sup>

#### 无穷小的比阶

#### 定义 1.3.2: 不同无穷小的比阶

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么就说  $\beta$  是比  $\alpha$  高阶的无穷小, 记作  $\beta = o(\alpha)$ ;
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么就说  $\beta$  是比  $\alpha$  低阶的无穷小;
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么就说  $\beta$  与  $\alpha$  是同阶无穷小;
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$ , 那么就说  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小<sup>a</sup>;
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么就说  $\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小, 记作  $\alpha \sim \beta$

<sup>2</sup>无穷个无穷小的和不一定是无穷小, 如  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{n+n}) = \ln 2$

<sup>3</sup>无界函数  $\times$  无穷小量不一定是无穷小, 如  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \times \frac{1}{x} = 1$

<sup>4</sup>这个地方虽然张宇老师给出了证明, 但是好像存在一定的争议性

\*不是相等, 超实数系下没有加减运算, 只可以进行替换运算

前三个定义解释:  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$  是指分子趋于 0 的速度比分母快,  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$  是指分子趋于 0 的速度比分母慢,  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$  是指趋于 0 的速度一样. 同时需要注意的是, **并不是任意两个无穷小都可进行比阶的**<sup>5</sup>.

**对  $o(x)$  的理解:** 它是一个无穷小, 但是它趋向于 0 的速度比  $x$  要快, 也就是  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$ , 也就是精度更高. 举一个实际的例子:  $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ , 那么就应该知道  $\tan x - x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5 = o(x^5)$ , 也就是这玩意趋于 0 的速度非常之快! 速度相当于  $x^5$ , 这给我们的精度分析提供了一些帮助. 由此可以解释加减法不推荐用等价无穷小, 例如  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3}$  等价无穷小本身就是一种近似替换, 直接把  $\tan x$  近似成  $x$  显然精度太低 (毕竟分母可是以  $x^3$  的速度趋于 0), 那么我们就需要更高精度的近似了, 也就是  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x}{x^3}$ , 这样我们就得到  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3}$ , 显然, 后者分子趋于 0 的速度大概是  $x^5$  级别比分母更快所以忽略不计.

**无穷小比阶的结论:** 若  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内连续, 且当  $x \rightarrow 0$  时  $f(x)$  是  $x$  的  $m$  阶无穷小,  $\varphi(x)$  是  $x$  的  $n$  阶无穷小, 则当  $x \rightarrow 0$  时  $F(x) = \int_0^{\varphi(x)} f(t)dt$  是  $x$  的  $n(m+1)$  阶无穷小

**题目 6.** 把  $x \rightarrow 0^+$  时的无穷小  $a = \int_0^x \cos t^2 dt$ ,  $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$ ,  $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$  进行排序, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列顺序是

**解答.**  $\alpha: n=1, \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^2 = 1$ , 因此  $m=0$ , 那么  $n(m+1)=1$ ;  $\beta: n=2, m=\frac{1}{2}$ , 那么  $n(m+1)=3$ ;  $\gamma: m=\frac{1}{2}, n=2$ , 那么  $n(m+1)=2$ . 因此顺序为  $\alpha\gamma\beta$

**题目 7.** 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列无穷小中最高阶的是:

(A)  $(2 + \tan x)^x - 2^x$  (B)  $(\cos x^2)^{\frac{1}{x}} - 1$  (C)  $\int_0^{1-\cos x} e^x \sin t^2 dt$  (D)  $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt$

**解答.** A 选项:  $2^x[(1 + \frac{\tan x}{2})^x - 1] = \frac{\tan x}{2} \times x = \frac{1}{2}x^2$ . B 选项:  $-\frac{x^4}{2x} = -\frac{x^3}{2}$ . C 选项:  $n = \frac{1}{2}x^2, m = x^2$  那么  $n(m+1) = 6$ . D 选项:  $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt = \int_{\sin x}^0 \ln(1+t^3) dt + \int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt = \int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt - \int_0^{\sin x} \ln(1+t^3) dt$  那么  $1 - \sqrt{\cos x} \sim \frac{1}{2}x^2$ ,  $\int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt$ , 那么  $n(m+1) = 8$ ,  $\int_0^{\sin x} \ln(1+t^3) dt$  那么  $n(m+1) = 8$ ,  $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt$  的阶数为 4. 综上 C 选项的阶数最高.

**题目 7 的注记.** D 选项: 如果为变上下限的形式, 则转化为变上限的形式, 然后使用结论进行计算, 之后按照无穷小的运算法则计算即可.

<sup>5</sup>例如, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x \sin \frac{1}{x}$  与  $x^2$  虽然都是无穷小, 但是却不可以比阶, 也就是说既无高低阶之分, 也无同阶可言, 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  不存在, 其值为  $\infty$  和 0

**题目 8.** 设  $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ . 当  $x \rightarrow 0$  时, 若  $p(x) - \tan x$  是比  $x^3$  高阶的无穷小, 则下列结论中错误的是:

(A)  $a = 0$       (B)  $b = 1$       (C)  $c = 0$       (D)  $d = \frac{1}{6}$

**解答.** 对  $\frac{p(x) - \tan x}{x^3}$  泰勒展开可得:  $\frac{p(x) - (x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5)}{x^3} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 - x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5}{x^3}$

综上易知:  $a = 0, b = 1, c = 0, d = \frac{1}{3}$ . 因此, D 选项是错误的.

**题目 9.** 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 下列无穷小量中最高阶的是

(A)  $\int_0^{x^2} \ln(1 + \sqrt{t}) dt$       (B)  $\int_{x^3}^{x^2} \sqrt{1 - \sqrt{\cos t}} dt$       (C)  $\int_x^{2\sin x} \sin t^2 dt$       (D)  $\int_x^{\sin x} (e^{t^2} - 1) dt$

**解答.** A:  $\ln(1 + \sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$ , 其  $n(m+1) = 3$ . B:  $\sqrt{1 - \sqrt{\cos t}} = \frac{1}{2}x$ , 其  $n(m+1)$  的最小值为 4. C: 使用积分中值定理可得:  $\sin^2 \varepsilon \times (2 \sin x - x), \varepsilon \in (2 \sin x, x)$ , 使用等价无穷小可得:  $2 \sin x - x \sim x, \sin^2 \varepsilon \sim \varepsilon^2 \sim x^2$ , 那么其最终化为  $x^3$ . D 选项:  $(\sin x - x)(e^{\varepsilon^2} - 1), \varepsilon \in (\sin x, x)$ . 使用等价无穷小可得:  $(-\frac{1}{6}x^5 \times \varepsilon) \sim x^6$ . 最终选择 D 选项.

**题目 9 的注记.** 如果上下限同阶的情况, 如本题的 C, D 选项, 则不可进行拆分, 需要使用积分中值定理 1.4.7 进行计算.

### 无穷小的运算

<sup>6</sup> 设  $m, n$  为无穷小, 则

1.  $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min\{m, n\}$
2.  $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}), x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
3.  $o(x^m) = o(kx^m) = k \cdot o(x^m), k \neq 0$

**题目 10.** 若当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x), \beta(x)$  是非零无穷小量, 则以下的命题中正确的是:

- A. 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则  $\alpha^2(x) - \beta^2(x)$ ;    B. 若  $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$ , 则  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ;  
C. 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则  $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$ ;    D. 若  $\alpha(x) \sim \beta(x) = o(\alpha(x))$ , 则  $\alpha(x) - \beta(x)$

**解答.**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}]^2 = 1$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)^2}{\beta(x)^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \pm 1$

<sup>6</sup> 此处多用于泰勒公式的应用中, 会对上述高阶无穷小的运算提出要求

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 1$$

题目 10 的注记. 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$

题目 11. 设对任意的  $x$  总有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定为零. (C) 一定不存在. (D) 不一定存在

解答. 令  $\varphi(x) = f(x) = g(x) = \begin{cases} x \\ 1 \\ 0 \end{cases}$ , 易知 D 选项正确

题目 11 的注记. 遇见  $\leq, \geq$  的形式, 可以一律取  $=$

### 1.3.2 无穷大

#### 定义 1.3.3: 无穷大的定义

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某一去心邻域内有定义 (或  $|x|$  大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数  $M$  (不论它多么大), 总存在正数  $\delta$  (或数  $X$ ), 只要  $x$  适合不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  (或  $|x| > X$ ), 对应的函数值  $f(x)$  总满足不等式

$$|f(x)| > M$$

那么称函数  $f(x)$  是当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty^a$ ) 时的无穷大.<sup>b</sup> 其  $\varepsilon - N$  语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x)| > M.$$

<sup>a</sup>等价于  $x \rightarrow -\infty$  同时  $x \rightarrow +\infty$

<sup>b</sup>无穷大一定无界, 但无界不一定是无穷大量. 与无穷小相同, 都是一个极限过程, 因此无穷大也是一个极限, 所以无界不一定是无穷大量

题目 12. 证明  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

解答.  $\forall M > 0$  令  $\delta = \frac{1}{4M} > 0$ , 当  $0 < |x - 1| < \delta$  时, 即  $0 < |x - 1| < \frac{1}{4M}$  时,  $|x - 1| < \frac{1}{M}$ , 所以  $\frac{1}{|x - 1|} > M$  这就证明了  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

#### 无穷大的比阶

- 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\ln^a x \ll x^\beta \ll a^x$ , 其中  $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$ .<sup>7</sup>

<sup>7</sup>由洛必达公式证明

- 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$ , 其中  $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$ .

### 无穷大的性质

- 两个无穷大量的积仍未无穷大量
- 无穷大量与有界变量的和仍是无穷大量

### 无穷大与无界变量的关系

无穷大量一定是无界变量, 但无界变量不一定是无穷大量.<sup>8</sup>

### 1.3.3 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中, 若  $f(x)$  是无穷大, 则  $\frac{1}{f(x)}$  是无穷小; 若  $f(x)$  是无穷小, 且  $f(x) \neq 0$ , 则  $\frac{1}{f(x)}$  是无穷大.

## 1.4 函数极限的运算

### 1.4.1 极限的四则运算法则

#### 利用极限的四则运算法则求极限

<sup>9</sup> 如果极限不存在, 那么极限属于超实数系的范畴, 在超实数系下不可以进行代数运算, 只可以进行替换运算。但是如果极限均存在, 那么可以进行代数计算。那么就可以使用下面的运算法则:

若  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , 那么

- $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k \lim f(x) \pm l \lim g(x) = kA \pm lB$ , 其中  $k, l$  为常数
- $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) \equiv A \cdot B$ , 特别的, 若  $\lim f(x)$  存在,  $n$  为正整数, 则  $\lim[f(x)]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

---

<sup>8</sup> 如数列  $x_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 是无界变量, 但不是无穷大. 无穷大是一个极限

<sup>9</sup> 易错, 在计算中往往容易忽视极限不存在的情况

## 注 1.4.1: 常用结论

存在 $\pm$ 不存在 = 不存在 <sup>a</sup>	不存在 $\pm$ 不存在 = 不一定 <sup>b</sup>
存在 $\times(\div)$ 不存在 = 不一定	不存在 $\times(\div)$ 不存在 = 不一定

<sup>a</sup>只有这个是不存在, 其余都是不一定或者存在

<sup>b</sup>反例:  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}) = 0$

## 题目 13.

1. 证明:  $\lim f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x) = A \lim g(x)$
2. 证明:  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$  存在,  $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$
3. 证明: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$ , 能否推出  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B$ , 若不能, 则满足什么条件可以推出该结论?

证明. 1.  $\lim f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x) = A \lim g(x)$

2. 由于  $g(x) = \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$ , 则  $\lim g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\lim f(x)}{\lim \frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{0}{A} = 0$

3. 无法推出, 有如下反例

$$\bullet g(x) = x \sin \frac{1}{x}, f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \text{ 但是当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } g(x) =$$

$x \sin \frac{1}{x}$  不仅趋于 0, 同时还能在  $\frac{1}{n\pi}$  这样的点处严格等于 0. 此时  $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 1$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$  不存在, 其极限值在  $(0, 1)$  之间反复横跳.

$$\bullet g(x) \equiv 0, f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0. \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 1$$

因此结论不成立. 若要成立, 则应改为:

- 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$ , 且  $g(x) \neq A$ <sup>10</sup>, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B$
- 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$ , 即  $f(x)$  在  $x = A$  处连续<sup>11</sup>, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = B$

□

题目 13 的注记. 此题的三个证明是常用结论

<sup>10</sup>从根本上排除了常值函数和振荡间断点的反例

<sup>11</sup>不管内函数能否取到极限值, 只要外函数连续, 复合之后极限一定存在



**题目 14.** 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}$ . 极限

**解答.** 由于该极限的分子  $e^x$  的极限为无穷大, 无穷大属于极限中的不存在情况, 因此不可以使用极限的四则运算法则1.4.1, 也不可以对分母使用两个重要无穷小进行化简. 只能使用等价变换进行求解. 即

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} \\ &\stackrel{\text{泰勒展开}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - x + \frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

**题目 15.** 已知  $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{f'(x)}$

**解答.** 如果想把分子写  $x \rightarrow 0$  时的导数形式, 然后进行计算, 即  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}} = \frac{f'(0)}{f'(0)} = 1$  进行运算, 则不满足极限四则运算法则1.4.1, 因为其分母为 0, 违背了极限的四则运算法则, 因此不可这样计算, 需要对其进行恒等变形计算. 即

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}} \\ &= \frac{1}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \\ &\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \frac{1}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \quad (\text{此处的处理不可再次使用洛必达, 因为二阶导在此不连续}) \\ &= \frac{1}{f''(0)} \frac{1}{2} f''(0) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**题目 15 的注记.** **使用极限运算法则的注意事项:** 在求分式这种形式的极限时, 一定要注意分子的极限是不是无穷, 如果极限为无穷则不可以使用极限运算法则对极限进行拆分计算, 同时还要注意分母的极限是不是 0, 如果是 0, 则也不可以使用极限运算法则计算, 只能进行等价替换进行运算.

**题目 16.** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x)$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) \\
 &= \frac{(\tan x + x)(\tan x - x)}{x^2 \times \tan^2 x} \\
 &= \frac{2x \times \frac{1}{3}x^3}{x^4} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

**题目 16 的注记.** 本题的有另一个解法, 但是相较上面的解法相比有些复杂, 但是记录一个常见的错误, 即什么时候可以用等价无穷小的问题, 其写法为:

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) = \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4} \right)
 \end{aligned}$$

此处有一个常见的错误, 就是能不能把  $\cos^2 x$  代换为 1, 其实是不能的, 即使最后答案正确, 此时  $x \rightarrow 0$  时, 分母也趋于 0, 如果进行替换, 则违背了极限的运算法则, 因此不能进行替换

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cos x)(\sin x + x \cos x)}{x^4} \xrightarrow{\text{泰勒公式}} \frac{2}{3}$$

**题目 17.** 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

证明.  $g(x) = \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$ . 求极限得  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}} = 0$ . 证明完毕  $\square$

**题目 17 的注记.** 此证明为结论, 经常使用

### 1.4.2 泰勒公式

泰勒公式的目的是提高精确度, 用更高次的多项式来逼近函数

带拉格朗日余项的  $n$  阶泰勒展开式

如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某个邻域  $U(x_0)$  内具有  $(n+1)$  阶导数, 那么对任一  $x \in U(x_0)$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

带佩亚诺余项的  $n$  阶泰勒展开式

如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  处具有  $n$  阶导数, 那么存在  $x_0$  的一个邻域, 对于该邻域内的任一  $x$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

## 带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

对带有佩亚诺余项的泰勒公式取  $x_0 = 0$ , 则可以得到带有佩亚诺余项的麦克劳林公式<sup>12</sup>

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

当  $x \rightarrow 0$  时, 由带有佩亚诺余项的麦克劳林公式可得, 有以下结论

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots$ <sup>1</sup>	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

## 注 1.4.2: 泰勒公式应用时的展开原则

- $\frac{A}{B}$  型, 适用于“上下同阶”原则: 具体来说, 如果分母或者分子是  $x$  的  $k$  次幂, 则应把分子或分母展开到  $x$  的  $k$  次幂。如:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ , 此处  $\ln(1+x)$  应展开为  $x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $A - B$  型, 适用“幂次最低”原则: 将  $A, B$  分别展开到他们系数不相等的  $x$  的最低次幂为止。如: 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}$  与  $ax^b$  为等价无穷小, 求  $a, b$ . 则应展开为  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ ,  $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ .

<sup>12</sup> 此处有一个易被忽略的地方, 只有函数在  $x_0$  处,  $n$  阶导数存在, 才可以展开到  $n$  阶

<sup>1</sup> 该函数为反双曲正弦函数

## 注 1.4.3: 泰勒公式的解题技巧

1. 泰勒公式构建了函数与其高阶导之间的联系, 因此看见高阶导数, 要条件反射的想到泰勒公式
2. 奇函数的泰勒展开只有奇数次幂, 偶函数的泰勒展开只有偶数次幂<sup>a</sup>
3. 极限当中, 用佩亚诺余项  $O(x$  的  $n$  次幂), 证明题中, 用拉格朗日余项, 找提供信息最多的点作为展开点
4. 等价无穷小的本质是泰勒的低精度形式, 加减法不建议使用等价无穷小, 建议直接泰勒
5. 加项减项的本质也是泰勒<sup>b</sup>

<sup>a</sup>如  $\sin x$  和  $\cos x$ <sup>b</sup>如  $\ln(x) = \ln(1+x-1) \sim x-1$ 

题目 18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) - x}{x^2}$

解答. 对等式进行泰勒展开即:

$$\frac{\ln(1+x+x^2) - x}{x^2} = \frac{(x+x^2 - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 - x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

题目 19.  $f(x)$  在  $x=0$  处二阶可导且满足  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x + \ln(1+x)}{x^3} = 0$ , 求  $f(0), f'(0), f''(0)$

解答. 对原式中  $f(x)$  和  $\sin x$  和  $\ln(1+x)$  各项进行泰勒展开得:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x + \ln(1+x)}{x^3} &= 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2)(x - \frac{1}{6}x^3) - (x - \frac{1}{6}x^3) + (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})}{x^3} = 0 \\ &= \frac{(f(0) + 1)x + (f''(0) - \frac{1}{2})x^2 + (-\frac{1}{6}f(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{1}{3})x^3 + o(x^3)}{x^3} = 0. \end{aligned}$$

可以得到的是, 分子的极限一定为 0, 那么

$$\begin{cases} f(0) + 1 = 0 \\ f'(0) - \frac{1}{2} = 0 \\ -\frac{1}{6}f(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \\ f'(0) = \frac{1}{2} \\ f''(0) = -1 \end{cases}$$

题目 19 的注记. 看见各阶导数应想到泰勒公式

**题目 20.** 已知函数  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x}) = 2$ , 试求  $f(0), f'(0)$

**解答.** 对原式进行通分然后对  $\sin x$  进行泰勒展开:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + xf(x)}{x^2} &= 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + xf(x) + o(x^2)}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

根据函数极限与无穷小的关系1.3.1可知,  $1 + f(x) = 2x + o(x), f(x) = 2x - 1 + o(x)$  因为函数在  $x=0$  上连续, 因此  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(x) = 2x - 1 + o(x)$  的表达式是  $x \rightarrow 0$  时的表达式, 将  $x=0$  带入可得  $f(0) = -1$ , 使用导数定义求得  $f(x)$  在点 0 处的导数, 即  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2x + o(x)}{x} = 2$

**题目 20 的注记.** 看见此类问题, 第一步应先通分, 然后将具体函数的泰勒进行展开 (因为此题中的条件是连续而不是可导, 如果是可导的话可以全部进行展开), 然后把  $f(x)$  的表达式给求出来

**题目 21.** 设函数  $f(x) = \sec x$  在  $x=0$  处的 2 次泰勒多项式为  $1 + ax + bx^2$ , 则

(A)  $a=1, b=\frac{1}{2}$       (B)  $a=1, b=\frac{1}{2}$       (C)  $a=0, b=-\frac{1}{2}$       (D)  $a=0, b=\frac{1}{2}$

**解答.**  $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ , 该函数为偶函数, 因此泰勒展开只有偶数次幂, 那么  $a=0$ , 该函数一定大于 0, 因此  $b \geq 0$ , 排除 C, A, B.

**题目 21 的注记.** 本题也可以将  $\sec x$  展开, 但是较为麻烦, 可以采用上述的方法进行运算.

**题目 22.** 设函数  $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$  在  $x=0$  处的 3 次泰勒多项式为  $ax + bx^2 + cx^3$ , 则

(A)  $a=1, b=0, c=-\frac{7}{6}$       (B)  $a=1, b=0, c=\frac{7}{6}$   
 (C)  $a=-1, b=-1, c=-\frac{7}{6}$       (D)  $a=-1, b=-1, c=\frac{7}{6}$

**解答.** 法 1: 对分子进行泰勒展开, 然后使用整式除法

$$\begin{array}{r} x - \frac{7}{6}x^3 \\ 1+x^2 \overline{) x - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5} \\ \underline{x + x^3} \phantom{+ \frac{1}{120}x^5} \\ -\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \\ \underline{-\frac{7}{6}x^3 - \frac{7}{6}x^5} \phantom{+ \frac{1}{120}x^5} \end{array}$$

法 2: 对整式进行泰勒展开与等价无穷小替换  $f(x) = (x - \frac{x^3}{6})(1 - x^2) = x - \frac{7}{6}x^3$

法 3: 对整式进行泰勒展开计算可得  $x - \frac{7}{6}x^3$

**题目 22 的注记.** 遇见此类问题, 解题方法的优先级为长除法, 利用等价替换, 使用定义 (利用泰勒公式直接所有项都展开)

### 1.4.3 洛必达法则

#### 定义 1.4.1: 洛必达法则定义

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0(\infty)$
- $f(x)$  和  $g(x)$  在  $x_0$  的某去心邻域内可导, 且  $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在 (或  $\infty$ )

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

需要注意的是使用过洛必达法则之后的极限必须存在, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  必须存在.

**题目 23.** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \times \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

**解答.** 该函数也是  $\frac{0}{0}$  型, 但是如果使用洛必达法则, 则  $2x \times \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ , 极限显然不存在, 因此不可以使用洛必达法则。则正确求法为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \times \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \times \sin \frac{1}{x} = 0$ .

#### 注 1.4.4: 洛必达可以洛到几阶

- $n$  阶导连续, 则最多可以洛到  $n$  阶.
- $n$  阶导存在/ $n$  阶邻域内可导, 则最多能洛到  $n-1$  阶.
- 实际上,  $n$  阶等连续, 不一定能够洛到  $n$  阶<sup>a</sup>. 结论如下:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$  到底能用多少次洛必达法则假设  $m$  和  $n$  均为正整数, 并且  $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ .

1. 如果  $f(x)$  在  $x_0$  的  $n$  阶导数连续, 则:

(a) 若  $m \leq n$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$  可以用  $m$  次洛必达  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$

(b) 若  $m > n$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$  则一次都不能用洛必达.

2. 如果  $f(x)$  在  $x_0$  有  $n$  阶导数 (没说  $n$  阶导函数连续), 则:

- (a) 若  $m \leq n-1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$  可以用  $m$  次洛必达  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$
- (b) 若  $m = n$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x^m}$  可以用  $m-1$  次洛必达出现  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m-1)}(x)}{m!(x-x_0)}$ , 然后利用导数定义  $f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$  进一步计算
- (c) 若  $m \geq n+1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$  一次都不能用洛必达

<sup>a</sup>但是考研中这点没有难为过人, 因此可以粗略的认为上述两条是成立的

**题目 24.** 设  $f(x)$  有二阶连续导数, 并且  $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=0$ , 并且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1$ , 问  $\frac{f(x)}{x^3}$  是否可以进行洛必达法则? 如果可以请求出  $f'''(0)$ ; 如果不存在, 请说明理由.

**解答.** 看到此题的二阶导数连续, 一般都认为可以进行洛必达, 但是其实该方程式一次洛必达都不可以进行, 假设函数  $f(x)$  表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{28}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^3, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

那么

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{28}{9} x^{\frac{19}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3} x^{\frac{16}{9}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

二阶导为

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{532}{82} x^{\frac{10}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{44}{27} x^{\frac{7}{9}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{9} x^{\frac{4}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 6x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

可知函数  $f'(0) = 0$ , 且  $f''(0) = 0$ , 该函数完全满足题意, 但是对  $\frac{f(x)}{x^3}$  使用第一次洛必达时, 为

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{28}{9} x^{\frac{19}{9}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3} x^{\frac{16}{9}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3x^2}{3x^2}$$

洛必达之后的极限显然不存在, 因此该情况下不可以使用洛必达法则.

**题目 24 的注记.** 本题需要注意, 不是所有的条件下都可以进行洛必达法则, 由此可以抽象出来一个样例:

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^c, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

**题目 25.** 已知函数  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right) = 2$ , 试求  $f(0), f'(0)$  以及  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) + e^x}$

**解答.** 本题中未说明  $f(x)$  在邻域内连续可导, 只说明一阶导存在, 因此一阶都不可以进行洛必达法则, 但是可以使用泰勒公式对上述式子进行泰勒展开, 因此上述式子的解法为对原式进行通分然后对  $\sin x$  进行泰勒展开:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + xf(x)}{x^2} &= 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + xf(x) + o(x^2)}{x^2} = 2\end{aligned}$$

根据函数极限与无穷小的关系1.3.1可知,  $1 + f(x) = 2x + o(x)$ ,  $f(x) = 2x - 1 + o(x)$  因为函数在  $x = 0$  上连续, 因此  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $f(x) = 2x - 1 + o(x)$  的表达式是  $x \rightarrow 0$  时的表达式, 将  $x = 0$  带入可得  $f(0) = -1$ , 使用导数定义求得  $f(x)$  在点 0 处的导数, 即  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2x + o(x)}{x} = 2$ , 然后带入极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) + e^x} = \frac{x}{-1 + 2x + e^x} = \frac{1}{3}$$

**题目 25 的注记.** 看见此类问题, 第一步应先通分, 然后将具体函数的泰勒进行展开 (因为此题中的条件是连续而不是可导, 如果是可导的话可以全部进行展开), 然后把  $f(x)$  的表达式给求出来

**题目 26.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} - e^\pi)$

**解答.** (1) 拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times e^{(\varepsilon)} \left( \arctan x - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= e^\pi \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -e^\pi\end{aligned}$$

(2) 提后项:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^\pi (e^{\arctan \frac{\pi}{2}} - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^\pi \times \arctan \frac{-\pi x}{2} \\ &= -e^\pi\end{aligned}$$

(3) 直接洛:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\pi + \arctan x}{2}} - e^\pi}{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} \times \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -e^\pi\end{aligned}$$

**题目 26 的注记.** 该形式为无穷大乘以无穷小, 可以构造无穷大比无穷大, 或无穷小比无穷小, 之后进行洛必达。方法多了, 往往会忽视洛必达, 但有时洛必达反而会简单一些。



**题目 27.** 设  $y = f(x)$  是方程  $y'' + 2y' + y = e^{3x}$  的解, 且满足  $y(0) = y'(0) = 0$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时, 与  $y(x)$  为等价无穷小的是 ()

(A).  $\sin x^2$       (B).  $\sin x$       (C).  $\ln(1 + x^2)$       (D).  $\ln \sqrt{1 + x^2}$

**解答.** 等价无穷小具有传递性, 因此  $\sin x^2 \sim x^2, \sin x \sim x, \ln(1 + x^2) \sim x^2, \ln(\sqrt{1 + x^2}) \sim \frac{1}{2}x^2$ . 若与  $y(x)$  为等价无穷小, 那么  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{f(x)} = 1$ . 对  $y(x)$  进行泰勒展开  $y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2$ . 当  $x = 0$  时, 有  $y''(0) = 1$ , 易知一阶导是连续的, 对函数形式进行分析, 可知函数在二阶导也是连续的, 那么就可以展开到二阶, 那么  $y(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

除此之外, 还可以这样解决, 已知二阶导连续, 那么对  $\frac{y(x)}{A/B/C/D}$  进行洛必达可知 D 选项正确。

#### 1.4.4 等价替代求极限

利用基本极限求极限

$$\begin{array}{ll} \lim_{\square \rightarrow \infty} (1 + |\square|)^{\frac{1}{\square}} = e^{|\square|^{\frac{1}{\square}}} & \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0) \end{array}$$

等价无穷小

等价无穷小的本质是泰勒的低精度形式

关于等价无穷小, 有以下两个定理

**定义 1.4.2: 等价无穷小的充要条件**

$\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta = \alpha + o(\alpha)$$

**定义 1.4.3: 等价无穷小的替换准则**

设  $\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$ , 且  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$  存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

等价无穷小的本质还是在做恒等替换, 所以一般情况下整式的乘除法可以直接用等价无穷小替换, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 但是需要遵循以下代换原则<sup>a</sup>

- 乘除关系可以换: 若  $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ , 则  $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta}$

- 加减关系一定条件下可以换<sup>b</sup>

– 若  $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ , 且  $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$ , 则  $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$

– 若  $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ , 且  $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$ , 则  $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$

加减关系代换准则证明如下:

证明.

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha_1 - \beta_1} = \lim \frac{\beta(\frac{\alpha}{\beta} - 1)}{\beta_1(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - 1)} = 1$$

□

<sup>a</sup>其实没有什么替换原则, 本质其实是因为超实数系下不能进行实数运算, 只能进行替换运算

<sup>b</sup>这样的形式其实不经常用, 看见加减最好使用泰勒公式进行替换运算

以下为常用等价无穷小

当  $x \rightarrow 0$  时, 有

1.

$$\begin{aligned} x &\sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \\ &\sim \ln(1+x) \\ &\sim e^x - 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (1+x)^a &\sim 1+ax \\ a^x - 1 &\sim x \ln a \\ 1 - \cos^\alpha x &\sim \frac{\alpha}{2} x^2 \end{aligned}$$

3. 上述结论的推广:

当  $x \rightarrow 0$  时, 若

$$(1+x)^a - 1 \sim ax,$$

则

$$\alpha(x) \rightarrow 0, \alpha(x)\beta(x) \rightarrow 0,$$

那么

$$[1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$$

4.

$$\frac{1}{2}x^2 \sim \sec x - 1 \sim x - \ln(1+x)$$

5.

$$\frac{1}{6}x^3 \sim x - \sin \sim \arcsin x - x$$

6.

$$\frac{1}{3}x^3 \sim x - \arctan x \sim \tan x - x$$

7.  $x \rightarrow 1$  时,  $\ln x \sim x - 1$ , 因为  $\ln(1 + x - 1) \sim x - 1$ 8. 当  $A \rightarrow 0, B \rightarrow 0$  时,  $e^A - e^B \sim A - B$ , 因为  $e^B(e^{A-B} - 1) \sim A - B$ 

**题目 28.** 假设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x}$  存在

**解答.** 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x}$  存在, 那么构造恒等变形:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} \times \frac{\frac{1}{2}x^2}{1 - \cos x} \right) \\ &\stackrel{\text{等价无穷小}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

**题目 28 的注记.** 整体的乘除法本质是构造恒等变形

等价无穷小替换的本质是构造恒等变形. 需要谨记: 在使用等价无穷小时, 需要按照上述步骤进行编写, 不可以省去恒等变形步骤, 如果省去则可能导致错误. 如下题

**题目 29.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$

**解答.** 由常用不等式 1.5.2 的  $x \rightarrow 0, |\sin x| \leq |x|$ , 那么

$$\left| \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x} \right| \leq \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \right|$$

由夹逼准则得:

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \right|$$

左右极限都为 0, 因此  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$  极限为 0

**题目 29 的注记.** 本题有一个常见的错误做法, 就是直接把  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$  进行等价无穷小替代, 写为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$ , 但是这是错误的, 如果这样写, 那么  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x^2 \sin \frac{1}{x}} \times \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$ , 在  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x^2 \sin \frac{1}{x}}$  的分母中, 存在  $x = \frac{1}{n\pi}$  的间断点, 根据极限定义, 极限如果存在, 那么去心邻域一定要有定义, 那这样写就违背了极限的存在准则, 因此极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$  不存在, 不可以这样写.

## 抽象函数使用等价无穷小求极限

抽象函数等价的条件是  $f(x) \rightarrow 0$  只有  $f(x) \neq 0$ , 才能将  $\sin(f(x)) \sim f(x)$ ,

**题目 30.** 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$ , 则下列命题中正确的个数为

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$ .

(3) 若  $f'(x_0) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varphi(x)) - f(x_0)}{\varphi(x)} = A$

**解答.** 这三个都是错的, 因为  $\varphi(x)$  在分母上, 都可能为 0. 比如函数  $\varphi(x) = x \times \sin \frac{1}{x}$ , 其极限为 0, 但是又存在  $x = \frac{1}{n\pi}$  的无定义点.

## 积分等价替换求极限

**定义 1.4.4: 积分等价替换法则**

设  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , 则  $\int_0^x f(t)dt \sim \int_0^x g(t)dt$ .

**定义 1.4.5: 变限积分求导公式**

设  $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$ , 其中  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 可导函数  $\varphi_1(x)$  和  $\varphi_2(x)$  的值域在  $[a, b]$  上, 则在函数  $\varphi_1(x)$  和  $\varphi_2(x)$  的公共定义域上, 有

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt \right] = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

**题目 31.** 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt}{x e^{x^2} + x^2}$  导数

**解答.** 看见变上限积分类型计算题应首先想到洛必达法则, 对原式进行洛必达法则得:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} + 2x} \\ &= \frac{1 + x^2}{1 + 2x^2 + \frac{2x}{e^{x^2}}} \end{aligned}$$

对极限取大头可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^2}{1 + 2x^2 + \frac{2x}{e^{x^2}}} = \frac{1}{2}$$

**题目 31 的注记.** 在极限中, 处理变上限积分的最好办法是洛必达。能洛则洛, 不能洛的话就换元之后再洛。

**题目 32.** 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}} dt}{bx - \sin x} = 1$ , 求  $a, b$ , 其中  $a, b$  为正数

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{b - \cos x} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{b - \cos x} \end{aligned}$$

若分子趋近于零, 但是该等式的极限为 1, 那么该分母的极限一定趋近于 0, 那么  $b$  一定为 1

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} \\ a &= 2 \end{aligned}$$

综上所述  $a = 2, b = 1$

**题目 32 的注记.** 对于本题, 还可以可被积函数进行等价运算 1.4.4, 但是这不是通法, 因此应当对此类问题首先进行洛必达. 以下为使用被积函数等价运算计算过程: 由于当  $t \rightarrow 0$  时,  $\frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \sim \frac{t^2}{a^2}$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}} dt}{bx - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{a} dt}{bx - \sin x} \\ &= \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{bx - \sin x} \stackrel{b \neq 1}{=} \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{bx - x} = 0 \end{aligned}$$

等式矛盾, 因此  $b = 1$ , 对上式进行泰勒展开得:

$$1 = \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x} = \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x^3}{6}} = \frac{2}{a}$$

综上所述  $a = 2, b = 1$

题目 33. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^2 - \sin^2 x}$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \ln(1+t^2) dt}{(x - \sin x)(x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \ln(1+t^2) dt}{2x \times \frac{1}{6}x^3} \\ &= \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

题目 33 的注记. 看见形如  $x^2 - \sin^2 x$  的形式, 就应当想到  $(x + \sin x)(x - \sin x)$  的展开, 然后可以通过泰勒展开进行计算

题目 34. 设函数  $f(x)$  连续, 且  $f(0) \neq 0$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}$

解答. 由于分母有两个变量, 因此不好进行洛必达, 那么此时就要对分母进行换元, 换元过程如下: 令  $(x-t) = u$ , 对等式两边求微分得:  $d(-t) = du$ .

首先, 对分子展开, 对分母换元得:

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(t) dt}$$

对原式进行洛必达法则得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(t) dt + xf(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt + xf(x)} \end{aligned}$$

如果此时还要进行洛必达, 那么分母则会出现  $f'(x)$ , 那么最后是不可计算的, 因此此时应进行积分中值定理, 则  $\int_0^x f(t) dt = xf(\varepsilon)(\varepsilon \in (0, x))$ <sup>13</sup>

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(c)}{xf(c) + xf(x)}$$

<sup>13</sup>这个地方一定要可以夹起来, 如果夹起来的极限不一样, 那么则不可以使用积分中值定理

$$= \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}$$

题目 34 的注记. 如果出现两个变量则换元之后再洛, 如果实在洛不了的话, 再考虑使用积分中值定理。积分中值定理和拉格朗日中值定理中出现的  $\varepsilon$ , 最后一步想说明最终结果时, 严格来说需要夹逼准则。(卷面上可以不体现出来, 但脑子里必须把这些事情想明白)

本题也可以积分替换进行计算, 但是不推荐, 写法如下:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(t) dt} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(t) dt} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(0)}{2} x^2}{f(0) x^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

#### 1.4.5 抓大头和抓小头

本质是同时处以最高阶/最低阶

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m \\ \infty, & \text{当 } n < m \end{cases}$$

还有一个重要的等价  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \sim e^{-1} \times n$  该等价由斯特林公式  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$  而来, 又可写

$$\text{为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$$

题目 35. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2 + 3x + 10}{3x^3 + 2x + 7}$

解答. 对等式上下同除以  $x^3$  得  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{10}{x^3}}{3 + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = \frac{4}{3}$

题目 36. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 + 3x^4}{2x + 4x^3 + x^5}$

解答. 上下同除以  $x$  得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x + 3x^3}{2 + 4x^2 + x^4} = \frac{1}{2}$

### 1.4.6 利用函数性质求极限

#### 幂指数函数性质求极限

一般主要是使用幂指数函数的性质进行恒等变换, 即  $a^b = e^{b \ln a}$ . 如果两个函数的指数相同, 则可以提后项/前项.

除此之外, 还有一个常用的结论: 对于  $\forall a, b > 0$  均有:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a (\ln x)^b = 0$ , 证明如下:

证明.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \cdot \ln^b x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^b x}{x^{-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b \ln^{b-1} x \cdot \frac{1}{x}}{-ax^{-a-1}} \end{aligned}$$

每洛一次, 分子次数-1. 分母次数不变, 一直洛下去, 分子次数要么洛到 0 (即  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c}{x^{-a}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} cx^a = 0$ ), 要么洛成负数 ( $\lim_{x \rightarrow 0^+} c \frac{\ln^m x}{x^{-a}} = 0$ ), 最终结果都是 0 □

题目 37. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x - 1)}$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{e^{x \ln x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln^2 x} = 1 \end{aligned}$$

题目 38. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

解答.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^4} \ln(\cos 2x + 2x \sin x)}$$



$$\begin{aligned}
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \ln((1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24}) + x - \frac{x^3}{6})} \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^4}{x^4}} \\
&= e^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

**题目 39.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \ln(1+x)}$

**解答.** 本题方法较多, 因此分阶段进行分析:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln x} - e^{x \ln \sin x}}{x^2 \ln(1+x)} \\
&= \frac{e^{x \ln x} - e^{x \ln \sin x}}{x^3}
\end{aligned}$$

接下来, 可以对上述式子进行中值定理计算或者使用提后项的方法:

中值定理:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^\varepsilon (x \ln x - x \ln \sin x)}{x^3} \\
&= \frac{\ln x - \ln \sin x}{x^2}
\end{aligned}$$

提后项:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \sin x} (e^{x \ln x - x \ln \sin x} - 1)}{x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x \ln x - x \ln \sin x} - 1)}{x^3} \\
&= \frac{\ln x - \ln \sin x}{x^2}
\end{aligned}$$

然后对于  $\frac{\ln x - \ln \sin x}{x^2}$  可使用中值定理和对数运算法则进行计算:

拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}(x - \sin x)}{x^2} \quad (x < \varepsilon < \sin x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^2 \varepsilon} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

对数运算法则:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{x}{\sin x})}{x^2} \\
&= \frac{\ln(1 + \frac{x}{\sin x} - 1)}{x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{x}{\sin x} - 1}{x^2} \\
 &= \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

题目 40. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^{\sin x} - 3^{\sin x}}{x^2}$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} [(1 + \frac{x}{3})^{\sin x} - 1]}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{3} \sin x}{x^2} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

对数函数性质求极限

极限当中, 见到  $\ln A, A$  趋于 1 时, 优先想到构造  $\ln(1 + \text{无穷小})$  的形式, 如果这个式子本身进行恒等变形之后的结果过于复杂, 则要想到利用对数运算法则构造  $\ln(1 + \text{无穷小})$ 。

题目 41. 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  是  $x$  的  $n$  阶无穷小, 则  $n =$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x) - \ln(1-x) - 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{1}{3}x^3) \\
 &= x^3
 \end{aligned}$$

综上易知:  $n = 3$

题目 42. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(e^{2x} - x^2) - 2x}$

解答.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - \ln e^x}{\ln(e^{2x} - x^2) - \ln e^{2x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin^2 x + e^x}{e^x}}{\ln \frac{e^{2x} - x^2}{e^{2x}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\sin^2 x}{e^x})}{\ln(1 - \frac{x^2}{e^{2x}})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{e^x}}{\frac{x^2}{e^{2x}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1
\end{aligned}$$

题目 43. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^p} = c \neq 0$

A.  $p = 3, c = -\frac{4}{3}$     B.  $p = -3, c = \frac{4}{3}$     C.  $p = \frac{4}{3}, c = 3$     D.  $p = -\frac{4}{3}, c = -3$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^p} = c \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{2x^3}{3} - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^p} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{4}{3}x^3}{x^p}
\end{aligned}$$

综上易知:  $p = 3, c = -\frac{4}{3}$

题目 44.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\ln x} \ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\frac{\ln \frac{\ln x}{x}}{\ln x} \times \frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln \frac{\ln x}{x}}}{\ln x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln \ln x - \ln x}{\ln x}} = e^{-1}
\end{aligned}$$

### 1.4.7 中值定理求极限

中值定理求极限通常和夹逼准则配合求极限

## 夹逼准则

## 定义 1.4.6: 函数极限夹逼准则

如果

- 当  $x \in U^\circ(x_0, r)$  (或  $|x| > M$ ) 时

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} h(x) = A$

那么  $\lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} f(x)$  存在, 且等于  $A$ .

## 积分中值定理

## 定义 1.4.7

若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则在积分区间  $[a, b]$  上至少存在一个点  $\varepsilon$ , 使下式成立

$$\int_a^b f(x) dx = f(\varepsilon)(b-a)$$

其中,  $a, b, \varepsilon$  满足:  $a \leq \varepsilon \leq b$

## 拉格朗日中值定理求极限

如果两个函数的形式一样, 那么可以使用拉格朗日中值定理进行计算, 但是处理之后的  $\varepsilon$  需要可以使用夹逼准则.

题目 45.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} \right) (a > 0)$

解答. 该题存在相近的函数形式, 使用拉格朗日中值定理进行解析  $a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} = a^{\frac{1}{\varepsilon}} \ln a \frac{1}{\varepsilon^2}, \varepsilon \in (x, x+1)$

$$\text{原式} = x^2 a^{\frac{1}{\varepsilon}} \ln a \frac{1}{\varepsilon^2}$$

当  $\varepsilon \rightarrow x+1$  时, 原式的极限为  $x^2 a^{\frac{1}{x+1}} \ln a \frac{1}{(x+1)^2} = \ln a$

当  $\varepsilon \rightarrow x$  时, 原式的极限为  $x^2 a^{\frac{1}{x}} \ln a \frac{1}{x^2} = \ln a$

综上, 函数极限为  $\ln a$

题目 46.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right) (a > 0)$

解答. 该题存在相近的函数形式, 使用拉格朗日中值定理进行解析  $\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{a+1} = -\frac{a}{\varepsilon^2 + a^2}$

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( -\frac{a}{\varepsilon^2 + a^2} \right), (\varepsilon \in (n, n+1))$$

当  $\varepsilon \rightarrow n+1$  时, 原式的极限为  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( -\frac{a}{(n+1)^2 + a^2} \right) = a$

当  $\varepsilon \rightarrow n$  时, 原式的极限为  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( -\frac{a}{(n)^2 + a^2} \right) = a$

综上, 函数极限为  $a$

题目 47.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - \cos x}{x^2}$

解答. 对分子进行泰勒展开得:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1 - \frac{4}{2}x^2 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

题目 47 的注记. 本题看似可以存在两个形式相同的函数形式, 但是如果对其使用拉格朗日中值定理解析, 则  $\sin \varepsilon, \varepsilon \in (x, 2x)$ , 此时  $\sin \varepsilon$  的极限不可以通过夹逼准则得到, 因此不可以使用这种方法, 只可以使用泰勒展开.

#### 1.4.8 七种未定式的计算

主要有以下类型  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty$

形如  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$  可以直接计算或者简单转换可以直接计算.

形如  $\infty - \infty$

分式类型的  $\infty - \infty$ , 直接通分:

题目 48.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

解答.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x)(x - \sin x)}{x^2 \times \sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x + x - \frac{x^3}{6})(x - x + \frac{x^3}{6})}{x^4} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

非分式的  $\infty - \infty$ :

1. 通法: **提最高阶无穷, 构造无穷大乘以无穷小**. 之后可以对后面的无穷小进行等价/泰勒, 或者把无穷大乘以无穷小改造成无穷小比无穷小, 或无穷大比无穷大, 之后洛必达. 提最高阶无穷之前, 能算的极限要先算出来.
2. 见到两个根式相减, 可以考虑有理化. 但注意只能是平方根, 立方根就不适用了.
3. 看见函数形式相同, 可以考虑使用拉格朗日中值定理.

**题目 49.** 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x\sqrt{x}}}}} - 1 \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}^1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

**题目 49 的注记.** 上述解法为通法, 即提最高阶无穷  $\sqrt{x}$ . 除此之外, 还可以使用有理化进行通分:

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}} + 1} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

**题目 50.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$

<sup>1</sup> 此处不能把后面的极限算出来的原因是  $x^2$  极限为不存在, 因此如果拆分计算则违背了极限的运算法则

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right) \\
 &= \left[ 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2 \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left[ -\frac{1}{4} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

题目 51. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2023}}{n^\alpha - (n-1)^\alpha} = \beta \neq 0$ , 求  $\alpha$  及  $\beta$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2023}}{n^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2023}}{-n^\alpha \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2023}}{\frac{a}{n}}
 \end{aligned}$$

综上可知:  $\alpha = 2023, \beta = \frac{1}{2023}$

形如  $\infty^0, 0^0$

$\infty^0$  与  $0^0$  通常使用  $u^v = e^{v \ln u}$  来计算

形如  $1^\infty$

$1^\infty$  通常使用  $\lim u^v = e^{\lim(u-1)v}$  来计算, 需要知道的是  $1^\infty$  可以化为第二个重要极限.

题目 52.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2 + x}{(x-a)(x-b)} \right]^x$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x-a} \right)^x \times \left( \frac{x+1}{x-b} \right)^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{x-a} \right)^x \times \left( 1 + \frac{1-b}{x+b} \right)^x \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x-a}} \times e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-b)x}{x+b}} \\
 &= e^{a+1-b}
 \end{aligned}$$

## 1.5 数列极限的运算

### 1.5.1 数列极限的运算法则

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , 则

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$
- 若  $b \neq 0, y_n \neq 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

上述运算规则可推广至有限个数列的情况

### 1.5.2 夹逼准则

#### 定理 1.5.1: 数列极限夹逼准则

如果数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$  及  $\{z_n\}$  满足下列条件:

- 从某项开始, 即  $\exists n_0 \in N_+$  (即  $n \rightarrow \infty$ ), 当  $n > n_0$  时, 有

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

那么数列  $\{x_n\}$  的极限存在, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

以下为放缩的常用方法

- 利用简单放大与缩小

$$\begin{cases} n \times u_{\min} \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq n \times u_{\max}, \\ \text{当 } u_i \geq 0 \text{ 时, } 1 \times u_{\max} \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq n \times u_{\max}. \end{cases}$$

- 利用如下重要不等式

1. 设  $a, b$  为实数, 则  $|a + b| \leq |a| + |b|; |a| - |b| \leq |a - b|$ <sup>14</sup>

2.  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a, b > 0)$ <sup>15</sup>

3.  $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} (a, b, c > 0)$

4. 设  $a \geq b \geq 0$ , 则  $\begin{cases} \text{当 } n \geq 0 \text{ 时, } a^n \geq b^n, \\ \text{当 } n \leq 0 \text{ 时, } a^n \leq b^n. \end{cases}$

<sup>14</sup>可以将上述式子推广为  $n$  个实数的情况:  $|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ .

<sup>15</sup>还有一个不等式是  $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$



5. 若  $0 < a < x < b, 0 < c < y < d$ , 则  $\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}$ .<sup>16</sup>

6.  $\sin x < x < \tan x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

7.  $\sin x < x (x > 0)$

8. 当  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  时,  $x < \tan x < \frac{4}{\pi}x$

9. 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\sin x > \frac{2}{\pi}x$

10.  $\arctan x \leq x \leq \arcsin x (0 \leq x \leq 1)$

11.  $e^x \geq x + 1 (\forall x)$ <sup>17</sup>

12.  $x - 1 \geq \ln x (x > 0)$ <sup>18</sup>

13.  $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x} (x > 0)$  或  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x (x > 0)$ <sup>19</sup>

14. 在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如  $(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}})$ , 可化为  $(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}}) * \frac{4}{3}$

15. 关于重要数列  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$  的重要结论:

– 单调递增

–  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

• 利用闭区间上连续函数必有最大值与最小值

• 利用压缩映射原理

题目 53.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$

证明.

□

题目 54. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n}$ , 其中  $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$  都是非负数

证明.

□

<sup>16</sup> 当  $n\pi < x < (n+1)\pi, 2n < S(x) < 2(n+1)$  时,  $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$ .

<sup>17</sup> 当  $x_{n+1} = e^{x_n} - 1$  时, 由  $e^{x_n} - 1 \geq x_n$ , 得  $x_{n+1} \geq x_n$ , 即  $\{x_n\}$  单调不减

<sup>18</sup> 当  $x_n > 0$  时, 若  $x_{n+1} = \ln x_n + 1$ , 由  $\ln x_n + 1 \leq x_n$ , 得  $x_{n+1} \leq x_n$ , 即  $\{x_n\}$  单调不增

<sup>19</sup> 令  $f(x) = \ln x$ , 并在区间  $[x, x+1]$  上对其使用拉格朗日中值定理, 有  $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}$  其中  $0 < x < \xi < x+1$ , 因此对任意的  $x > 0$ , 有  $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$

## 1.5.3 单调有界准则

## 定理 1.5.2: 数列的单调有界准则

单调有界数列必有极限, 即若数列  $\{x_n\}$  单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在

证明数列单调性的方法:

1.  $x_{n+1} - x_n > 0$  或  $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$  (同号)

2. 利用数学归纳法

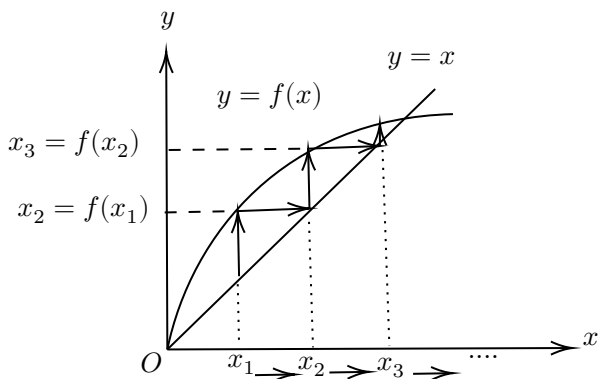
3. 利用重要不等式

4.  $x_n - x_{n-1}$  与  $x_{n-1} - x_{n-2}$  同号, 则  $x_n$  单调

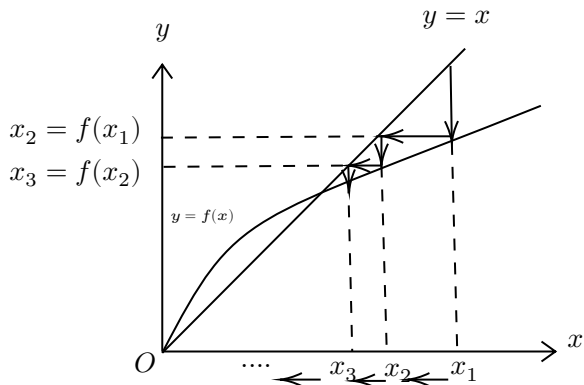
5. 利用结论: 对  $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots), x_n \in \text{区间 } I$

• 若  $f'(x) > 0, x \in \text{区间 } I$ , 则数列  $\{x_n\}$  单调, 且  $\begin{cases} \text{当 } x_2 > x_1 \text{ 时, 数列 } \{x_n\} \text{ 单调增加} \\ \text{当 } x_2 < x_1 \text{ 时, 数列 } \{x_n\} \text{ 单调减少} \end{cases}$

证明. 若  $f(x)$  单调增加, 且  $x_1 < x_2$ , 则数列单增的图像是这样的:



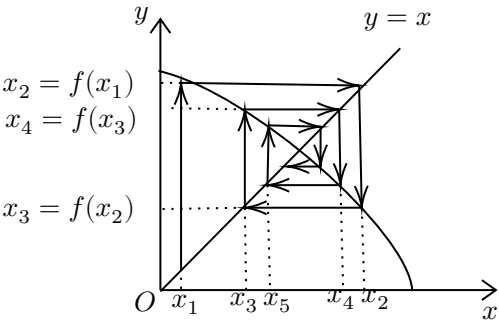
若  $f(x)$  单调增加, 且  $x_1 > x_2$ , 则数列单增的图像是这样的



□

- 若  $f'(x) < 0, x \in \text{区间 } I$ , 则数列  $\{x_n\}$  不单调

证明. 若  $f(x)$  单调递减, 且  $x_1 < x_2$  时, 则图像为



□