第一章 连续

1.1 函数的连续性

定义 1.1.1: 连续点的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 **的某一邻域内有定义**, 如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

那就称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续.

注 1.1.1: 函数连续的性质

- 当极限需要讨论时:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \text{ 在点} x_0 \text{ 处连续}$$

- **一点连续不能推出邻域连续**: 以函数 $f(x) = xD(x)$ 为例, 其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数: 该函数在 $x = 0$ 时极限为 0, 函数值也为 0, 因此函数在 $x = 0$ 点连续, 但是其邻域内所有点都不连续.
- 连续性的四则运算: 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在点 $x = x_0$ 处连续, 则 $f(x) \pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 当 $g(x_0) \neq 0$ 时,$f(x)/g(x)$ 在点 $x = x_0$ 处也连续。
- 复合函数的连续性: 设 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续,$y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 处连续, 且 $u_0 = \varphi(x_0)$, 则 $f[\varphi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 处连续。
- 反函数的连续性: 设 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上单调且连续, 则反函数 $x = \varphi(y)$ 在对应的区间 $I_y =$

$\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上连续且有相同的单调性

- **$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $f(x_0)>0$(或 $f(x_0)<0$)，则存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>0$ (或$f(x)<0$).**

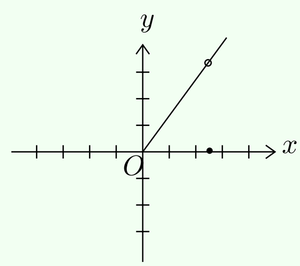
1.2 函数的间断点

1.2.1 间断点的相关概念

讨论间断点的前提: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义

定义 1.2.1: 可去间断点的定义

可去间断点: 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)(f(x_0)$ 甚至可以无定义), 则这类间断点称为可去间断点



可去间断点函数图像

题目 1. 函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)|x-1|}{e^{\frac{1}{x-2}}\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

解答. 该题中可疑点为 $x=\pm1,2,0$, 对上述四点求极限可得: $\lim_{x\to0}=0$, 但是函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点无定义. 因此 $x=0$ 是可去间断点.$\lim_{x\to1} f(x)$ 时 $\lim_{x\to1^+}\neq\lim_{x\to1^-}$. 因此 $x=1$ 是跳跃间断点.$\lim_{x\to-1}=-2\sqrt[3]{e}$, 因此 $x=-1$ 是可去间断点.$\lim_{x\to2^+} f(x)=0,\lim_{x\to2^-} f(x)=\infty$,$x=2$ 是第二类间断点.

题目 1 的注记. 如何找间断点? 主要是找可疑点

- 绝对值分段点
- 这一点本身没有定义，但邻域内都有定义的点[1].

[1]比如分母为 0 的点

$\ln(x)$ 本身不需要讨论 x 等于 0, 因为只有 0 点右邻域有定义,0 点的左邻域内连定义都没有, 更不用谈 0 点的左极限, 所以此时 0 不可能是间断点. 但出现 $\ln|x|, \ln(x^2)$ 时,0 点本身无定义, 但 0 点左右邻域内都有定义, 所以 0 可能是间断点.

题目 2. ★★★☆☆函数 $f(x)=\dfrac{|\,x\,|^x-1}{x(x+1)\ln|\,x\,|}$ 的可去间断点的个数为

解答. $f(x)=\dfrac{|\,x\,|^x-1}{x(\,x+1)\ln|\,x\,|}$ 在 $x=-1,0,1$ 处无定义

$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to-1}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to-1}\dfrac{1}{x+1}=\infty$,

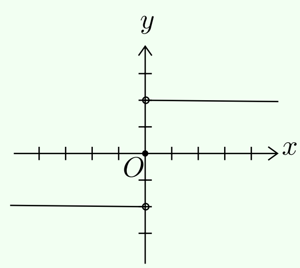
$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to0}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x+1}=1$,

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\dfrac{|\,x\,|^x-1}{x(x+1)\ln|\,x\,|}=\lim_{x\to1}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln|\,x\,|}-1}{x(x+1)\ln|\,x\,|}=\lim_{x\to1}\dfrac{x\ln|\,x\,|}{x(x+1)\ln|\,x\,|}=\lim_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

综上,$x=0$ 与 $x=1$ 为可去间断点

定义 1.2.2: 跳跃间断点的定义

跳跃间断点[a]: 若 $\lim_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在, 但 $\lim_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim_{x\to x_0^-}f(x)$, 则这类间断点称为跳跃间断点



跳跃间断点函数图像

[a]一点极限存在 f(x) 在 x_0 连续

定义 1.2.3: 无穷间断点的定义

无穷间断点: 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 则这类间断点称为无穷间断点, 如 $y=\tan x$

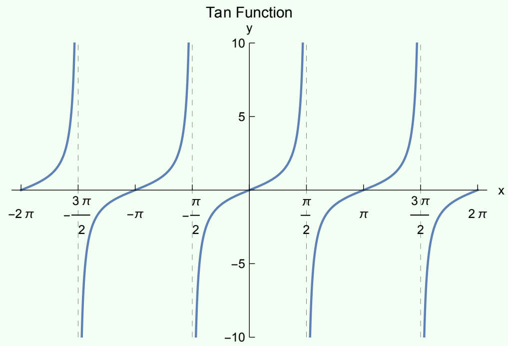


图 1.1: 无穷间断点函数 tan 图像

定义 1.2.4: 振荡间断点的定义

振荡间断点: 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 振荡不存在, 则这类间断点称为振荡间断点

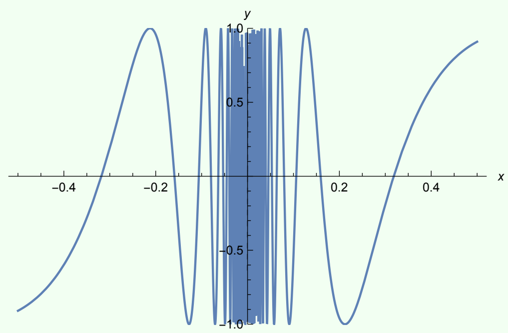


图 1.2: 振荡间断点函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 图像

1.2.2 间断点的分类

通过求函数在该点的左右极限来判断

- 第一类间断点：$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在
  - 可去[2]：$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$
  - 跳跃：$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
- 第二类间断点：除第一类以外的间断点 $\implies$ $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 均至少一个不存在

[2] 可去间断点上极限存在但是导数不存在

题目 3. ★★☆☆☆ 设函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$，则 $f(x)=$

解答. 分情况讨论, 当 $\sin^2\pi x=0$ 和 $\sin^2\pi x\neq 0$

当 $\sin^2\pi x=0$ 时,

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{1}\\&=x^2\end{aligned}$$

当 $\sin^2\pi x\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^2}{n}+x(1-x)\sin^2\pi x}{\frac{1}{n}+\sin^2\pi x}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1-x)\sin^2\pi x}{\sin^2\pi x}\\&=x(1-x)\end{aligned}$$

综上函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,\sin^2\pi x=0\\ x(1-x),\sin^2\pi x\neq 0\end{cases}$

题目 4. 求函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的间断点并指出其类型.

解答. 当 $n\to\infty$ 时, 有 $\lim_{x\to\infty}x^n=\begin{cases}\infty,|x|>1\\ 0,|x|<1\\ 1,x=1\\ (-1)^n,x=-1\end{cases}$，那么 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}=\begin{cases}-1,0<|x|<-1\\ x^2,|x|>1\\ 0,|x|=1\end{cases}$

综上,$x=\pm1$ 为跳跃间断点,$x=0$ 为可去间断点.

题目 4 的注记. 对于 $f(x)$ 是 x 的函数, 表达式是以 n 的极限的形式给出的情况, 方法为把 $f(x)$ 分段解出来,n 趋于无穷时,x^n 要以 $|x|=1$ 为界限进行分段.

同时应该结合 x^n 的解析式进行求解:$\lim_{x\to\infty} x^n = \begin{cases} \infty, |x|>1 \\ 0, |x|<1 \\ 1, x=1 \\ (-1)^n, x=-1 \end{cases}$

题目 5. 设 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^{(n+1)x}+1}{\mathrm{e}^{nx}+x^n+1}$, 则 $f(x)$:

(A) 仅有一个可去间断点. (B) 仅有一个跳跃间断点. (C) 有两个可去间断点. (D) 有两个跳跃间断点.

解答. $\lim_{x\to\infty} e^{nx} = \begin{cases} 0, x<0 \\ 1, x=0 \\ +\infty, x>0 \end{cases}$, $\lim_{x\to\infty} x^n = \begin{cases} \infty, |x|>1 \\ 0, |x|<1 \\ 1, x=1 \\ (-1)^n, x=-1 \end{cases}$

综上可得: $\lim n\to\infty = f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^{(n+1)x}+1}{\mathrm{e}^{nx}+x^n+1} = \begin{cases} 0, x<-1 \\ 1, -1<x<0 \\ 2e^x, x>0 \end{cases}$