

第一章 函数

1.1 函数的基本概念与特性

1.1.1 函数的概念

定义 1.1.1: 函数定义

设数集 $D \subset \mathbb{R}$, 则称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$.

函数的定义中, 对每个 $x \in D$, 按对应法则 f , 总有唯一确定的值 y 与之对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系, 通常称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$ 即:

$$R_f = f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

注 1.1.1: 关于定义域的注意事项

- 定义域指的是 x 的定义域
- 括号内定义域相同

题目 1. 已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0, a] (a > 0)$, 则 $f(x)$ 的定义域为, $f(x+10)$ 的定义域为:

解答. 定义域指的是 x 的定义域, 因此 $x \in [0, a]$, 那么 $x+1 \in [1, a+1]$. 括号内定义域相同, 那么可以得知 $f(x)$ 定义域为 $[1, a+1]$. $f(x+10)$ 定义域为 $[-9, a-9]$.

1.1.2 反函数

定义 1.1.2: 反函数定义

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D^a , 值域为 R . 如果对于每一个 $y \in R$, 必存在唯一的 $x \in D$ 使得 $y = f(x)$ 成立, 则由此定义了一个新的函数 $x = \varphi(y)$, 这个函数称为函数 $y = f(x)$ 的反函数^b, 一般记作 $x = f^{-1}(y)$, 它的定义域为 R , 值域为 D . 相对于反函数来说, 原来的函数也被称为直接函数.

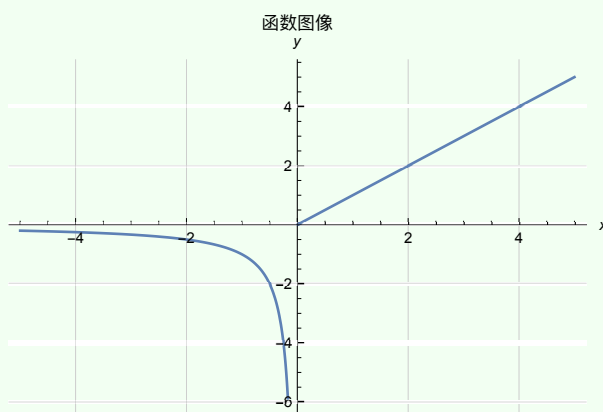
^a在求反函数时要标明区间, 函数在区间上连续且单调, 例如 $y = \arctan x$ 默认的是在 $y = \tan x$ 第一个区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的反函数

^b一般地, $y = f(x), x \in D$ 的反函数记成 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$

定义 1.1.3: 反函数的性质

- $f^{-1}f(x) = x$
- 严格单调函数必有反函数, 但是有反函数的函数不一定是单调函数. 如函数

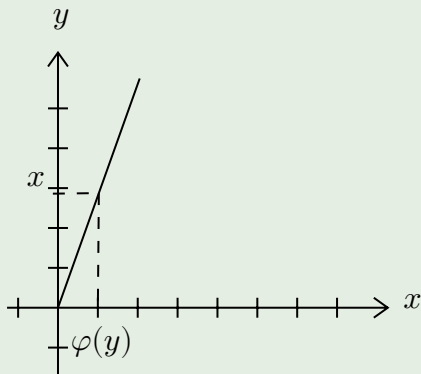
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ \frac{1}{x}, & x < 0, \end{cases}, \text{ 其函数图像为}$$

图 1.1: 分段函数 $f(x)$ 图像

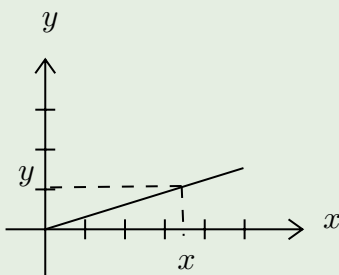
- 若函数 $f(x)$ 有反函数, 则 $f(x)$ 与任意水平线有且仅有一个交点.

注 1.1.2: 关于反函数图像和 x, y 值转换的问题

若把 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图形画在同一坐标系中, 则它们完全重合. 只有把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$ 后, 它们的图形才关于 $y = x$ 对称^a. 以函数 $y = 2x + 1$ 为例:



原函数为 $y = 2x + 1$, 其中自变量为 x , 定义域为 $[1, 2]$, 因变量 y , 值域为 $[3, 5]$. 如上图所示 $x = f^{-1}(y)$ 中自变量为 y , 定义域为 $[3, 5]$, 因变量 x , 值域为 $[1, 2]$ ^b.



最终化为 $y = f^{-1}(x)$, 其中自变量为 x , 定义域为 $[3, 5]$, 因变量 y , 值域为 $[1, 2]$.

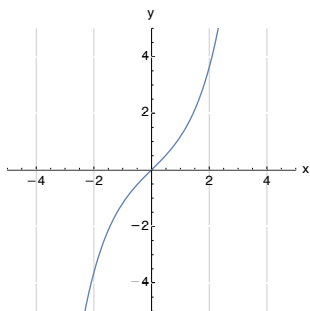
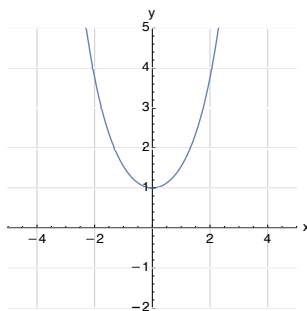
^a这是因为在 $x = f^{-1}(y)$ 中 y 是自变量而 x 是因变量, 而在 $y = f(x)$ 中恰恰相反 (这个时候的图像应该一个是 x - y 坐标系函数图像, 一个是 y - x 坐标系函数图像), 因此如果此时不交换变量, 那么其域没有变化, 画在一起会重合, 只有交换了变量之后才不会重合.

^b此时仅发生了变量改变, $x = f^{-1}(y)$ 和 $y = f(x)$ 图像在同一坐标轴中

题目 2. 求函数 $y = f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的反函数的表达式以及定义域

题目 2 的注记.

- 在上面的例子中, 函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为反双曲正弦函数, 其反函数为双曲正弦函数. 除此之外, 函数 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 是双曲余弦函数.

图 1.2: 双曲正弦函数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 图 1.3: 双曲余弦函数 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

• 下列结论需要记住

$$- x \rightarrow 0 \text{ 时, } \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \sim x.$$

$$- [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \text{ 于是 } \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$$

$$- \text{由于 } y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \text{ 是奇函数, 于是 } \int_{-1}^1 [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x^2] dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

解答. 已知 $y = f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 则 $-y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$
对两边可以进行如下操作

$$\begin{aligned} e^{-y} &= \sqrt{x^2 + 1} - x \\ e^y &= \sqrt{x^2 + 1} + x \end{aligned}$$

那么可以得到 $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ 交换之后可以得到函数 $f(x)$ 的反函数, 即 $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

1.1.3 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义, 且 $g(D) \subset D_1$, 则由

$$y = f[g(x)] (x \in D)$$

确定的函数, 称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的**复合函数**, 它的定义域为 D , u 称为中间变量. 内层函数的值域是外层函数的子集.

题目 3. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x^4, & x < 0, \end{cases} g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0, \end{cases}$ 若 $y = f(g(x))$, 则

$$(A) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 1. \quad (B) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} \text{ 不存在.} \quad (C) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (D) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} \text{ 不存在.}$$

解答. 函数 y 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 复合函数, 若求复合函数在 $x = 1$ 和 $x = 0$ 时的导数, 那么可以将复合函数写为 $f(x) = \begin{cases} g(x)^2, & x \geq 0 \\ g(x)^4, & x < 0 \end{cases}$, 由此, 作出 $g(x)$ 函数图像, 结合图像, 可以将上述

图像函数表达式更改为 $f(g(x)) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^4, & x < 0 \end{cases}$. 则函数 $f(g(x))$ 在 $x = 1$ 处的导数为 0.

1.1.4 函数的四种特性及重要结论

有界性

有界性分为三种情况, 一种是有上界, 一种是有下界, 一种是有界。其中有界包含了有上界和有下界。

定义 1.1.4: 有界性的定义

设 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $I \subset D$. 如果存在某个正数 M , 使对任一 $x \in I$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有界; 如果这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

- 有界是指, 同时有上界和下界
- 从几何上看, 如果在给定的区间, 函数 $y = f(x)$ 的图形能够被直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 完全包起来”, 则为有界; 从定义上说, 找到某个正数 M , 使得 $|f(z)| \leq M$, 则为有界.
- 在讨论有界还是无界的时候首先要指明区间, 如果没指名区间, 则无法讨论有界性. 如函数 $y = \frac{1}{x}$ 则 $(2, +\infty)$ 上有界, 但是在 $(0, 2)$ 上无界.

注 1.1.3: 有界性的判断

- 利用定义
- $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界
- $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a, b) 上有界.
- $f'(x)$ 在区间 I (有限)^a 上有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 I 上有界

证明. — 使用拉格朗日中值定理进行证明: 设区间 $I(a, b)$ 由拉格朗日中值定理可得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, 固定点 a , 那么对区间 $I(a, b)$ 上每一个点求拉格朗日中值定理, 那么 $f(x) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$, 其中 $f(a)$ 为固定值, $(x - a)$ 为固定值, $f'(\xi)$ 在 $I(a, b)$ 上有界, 综上 $f(x)$ 在区间上必有界。

— 使用斜率进行证明: 由几何意义可知, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的斜率, 那么如果 $f'(x)$ 有界, 那么斜率有界, 那么说明 $f(x)$ 的变化是有界的, 那么更说明 $f(x)$ 不可能无界。

— 使用面积进行证明: $f'(x)$ 在有限区间上有界, 则该区间上 $f'(x)$ 与 x 轴所围成的面积是有界的, 那么说明 $f(x)$ 的变化是有界的, 那么更说明 $f(x)$ 不可能无界。

□

^a长度有限

题目 4. 已知函数 $f(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 则 α 的取值范围为

解答. 如果说 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 那么 $f(x)$ 应该在区间两端点连续单侧极限存在. 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 极限存在. 下面进行分情况讨论:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha}$ 对函数使用洛必达法则. 化简为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$. 若要 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$ 有界, 那么分母应趋近于无穷. 则 $\alpha - 1 > 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha}$ 由洛必达法则可知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$. 由等价无穷小可知 $\ln(1+x^2) \sim x^2$. 那么上述等式可化为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}$, 若要该极限成立. $\alpha - 1 \leq 2$ 使得极限整体趋于 0. 综上所述, α 的取值范围应为 $(1, 3]$.

题目 5. 以下四个命题中正确的是:

- (A) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界
- (B) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界
- (C) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界
- (D) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界

解答. 一元函数中, 优先看导数, 由导数推函数¹. 同时此处可以使用有界性判断的定理三, 可以得出导函数如果在有限区间 I 上有界, 那么函数在区间 I 上有界. 本题选 C.

题目 6. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$ 使得:

- (A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加
- (B) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调减少
- (C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$
- (D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$

解答. 导数若存在, 则导数要么连续, 要么只可能有振荡间断点. A, B 选项: 一点可导推不出区间可导². D 显然错误不满足题意, 本题选 C.

单调性

定义 1.1.5

设 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间上任意两点 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**.

虽然单调性的证明一般用求导, 但是定义法也需要掌握.

对任意 $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, 有

$$\begin{aligned} f(x) \text{ 是单调增函数} &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0; \\ f(x) \text{ 是单调减函数} &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0; \\ f(x) \text{ 是单调不减函数} &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0; \\ f(x) \text{ 是单调不增函数} &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \leq 0. \end{aligned}$$

奇偶性

定义 1.1.6

设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$). 如果对于任一 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任一 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

¹因为函数导数可以刻画出函数的变化情况

²由符号函数可证得

注 1.1.4

- $f(\varphi(x))$ (内偶则偶, 内奇看外)^a
- 对任意的 x, y 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 则 $f(x)$ 是奇函数^b.
- 求导后奇偶性互换
- 设 $f(x)$ 连续, 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_a^x f(t) dt$ 是偶函数;
若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 是奇函数
- 对于任意函数 $f(x)$, 令 $u(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, $v(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, 其中, $u(x)$ 是偶函数, $v(x)$ 是奇函数. 因为 $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = u(x) + v(x)$
- 连续的奇函数的一切原函数都是偶函数, 连续的偶函数的原函数中仅有一个原函数是奇函数^c
- 奇函数 $y = f(x)$ 的图形关于坐标原点对称, 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有定义时, 必有 $f(0) = 0$.
- 偶函数 $y = f(x)$ 的图形关于 y 轴对称, 且当 $f(0)$ 存在时, 必有 $f'(0) = 0$.
- 设 $f(x)$ 是定义在 $[-l, l]$ 上的任意函数, 则

$$F_1(x) = f(x) - f(-x) \text{ 必为奇函数; } F_2(x) = f(x) + f(-x) \text{ 必为偶函数}^d$$

^a奇 [偶] \Rightarrow 偶; 偶 [奇] \Rightarrow 偶; 奇 [奇] \Rightarrow 奇; 偶 [偶] \Rightarrow 偶; 非奇非偶 [偶] \Rightarrow 偶

^b证明如下: 令 $x = y = 0$, 则 $f(0) = 2 * f(0)$, 则 $f(0) = 0$, 令 $y = -x$, 则 $f(0) = f(x) + f(-x)$.

^c因为奇函数必须过原点, 但是偶函数的原函数后面有一个常数 c 因此仅有一个原函数是奇函数

^d证明如下: 已知 $f(x)$ 是任意函数, -1 带入可得, $F_1(-x) = f(-x) - f(x) = -F_1(x)$, 同理可证 F_2 成立.

题目 7. 设 $f(x)$ 连续且为奇函数, 则下列函数中必为偶函数的为

- (A) $\int_0^x du \int_0^u tf(t)dt$ (B) $\int_a^x du \int_0^u f(t)dt$
(C) $\int_a^x du \int_0^u tf(t)dt$ (D) $\int_0^x du \int_a^u f(t)dt$

周期性

定义 1.1.7

设 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 T , 使得对于任一 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 从几何图形上看, 在周期函数的定义域内, 相邻两个长度为 T 的区间上, 函数的图形完全一样.

需要注意的是函数的周期性只与 x 的参数有关, 比如若函数 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(ax + b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期. 可以观察到其周期只与 x 的系数有关

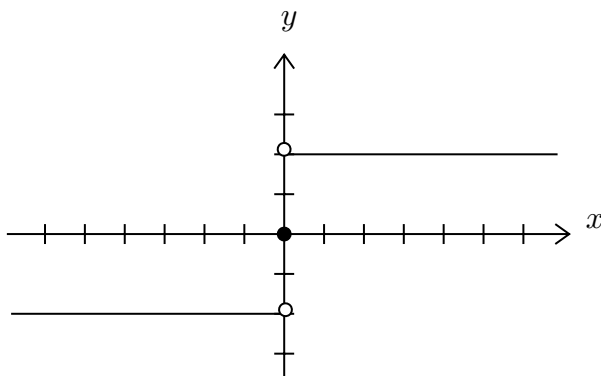
重要结论

- 若 $f(x)$ 是可导的周期为 T 的周期函数, 则 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.
- 设 $f(x)$ 连续且以 T 为周期, 则 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数 $\Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx = 0$.
- 周期函数的原函数是周期函数的充要条件是其在一个周期上的积分为 0.

1.1.5 三种特殊函数

符号函数

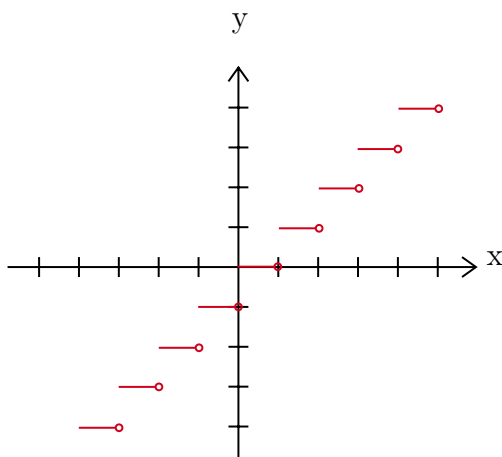
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



取整函数

$$y = [x]$$

函数值向左移³, 即 $x - 1 < [x] \leq x$



³坐标轴上向左移

狄利克雷函数

4

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{Q}^c. \end{cases}$$

1.2 函数图像

1.2.1 常数函数

$y = A, A$ 为常数, 其图形为平行于 x 轴的水平直线

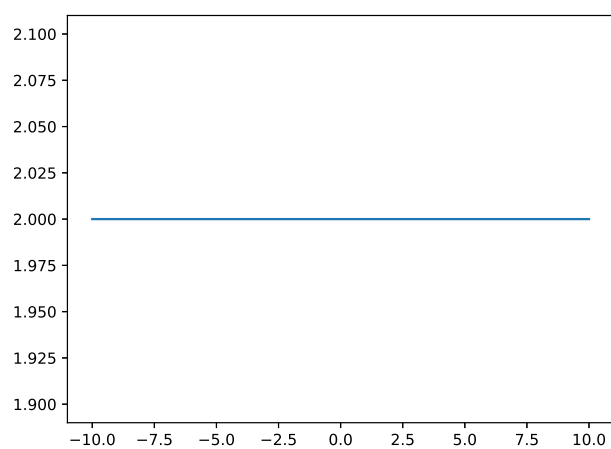


图 1.4: 常数函数图像

1.2.2 幂函数

$$y = x^\mu (\mu \text{ 是实数})$$

⁴本函数图像无法绘制

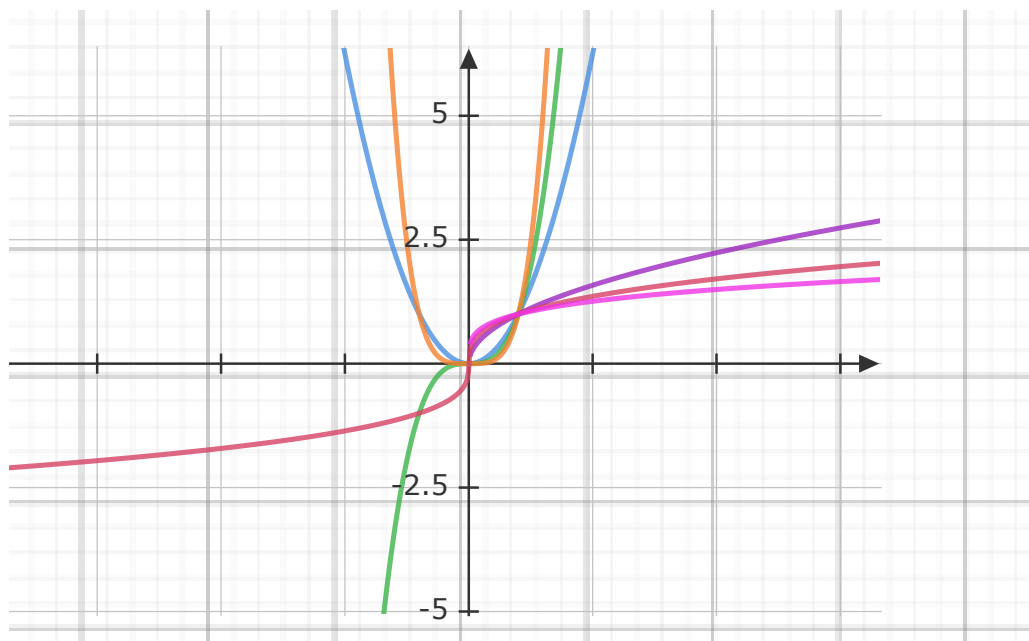


图 1.5: 幂函数图像

注 1.2.1: 幂函数常用技巧

- 当 $\mu > 0$ 且 $0 < x < 1$ 时, 函数随着 μ 的增大而变小 (越大越低)
- 当 $\mu > 0$ 且 $x > 1$ 时, 函数随着 μ 的增大而变大 (越大越高)
- 当 $\mu < 0$ 且 $0 < x < 1$ 时, 函数随着 μ 的增大而变小 (越大越低)
- 当 $\mu < 0$ 且 $x > 1$ 时, 函数随着 μ 的增大而变大 (越大越高)
- 当 $x > 0$ 时, 由 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}, y = \ln x$ 具有相同的单调性, 因此可以利用这一特性来研究最值
- 见到 $\sqrt{u}, \sqrt[3]{u}$ 时, 可用 u 来研究最值
- 见到 $|u|$ 时, 由 $|u| = \sqrt{u^2}$, 可用 u^2 来研究最值
- 见到 $u_1, u_2, u_3, \ln(u_1 + u_2 + u_3) = \ln u_1 + \ln u_2 + \ln u_3$ 来研究最值
- 见到 $\frac{1}{u}$ 时, 可用 u 来研究最值 (结论相反), 即 $\frac{1}{u}$ 与 u 的最大值点、最小值点相反

1.2.3 指数函数

$$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$$

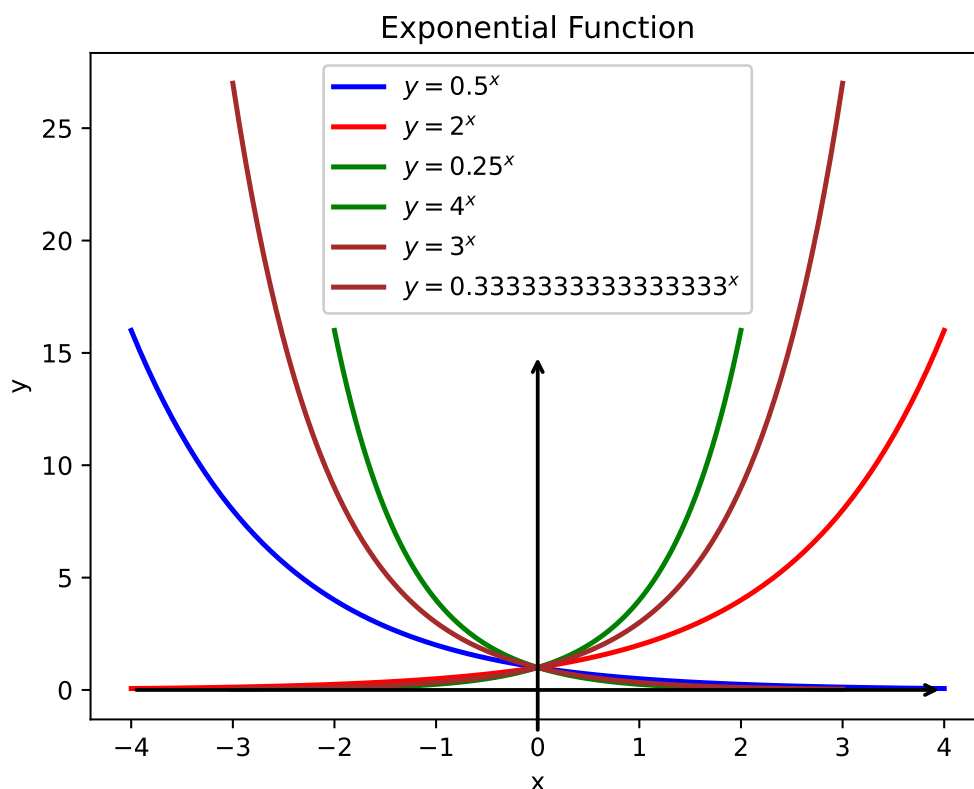


图 1.6: 指数函数图像

注 1.2.2: 指数函数相关性质

- 定义域: $(-\infty, +\infty)$. 值域: $(0, +\infty)$.
- 单调性: 常用的指数函数 $y = e^x$
- 极限: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ (由于极限的唯一性, 因此在趋于不同的无穷时, 极限值的不同).
- 特殊函数值: $a^0 = 1, e^0 = 1$
- 指数运算法则:

$$a^\alpha \times a^\beta = a^{\alpha+\beta}, \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}, (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}, (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha, \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha},$$

$$^a e g : e^{\tan x} - e^{\sin x} = e^{\sin x} (e^{\tan x - \sin x} - 1)$$

1.2.4 对数函数

$$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$$

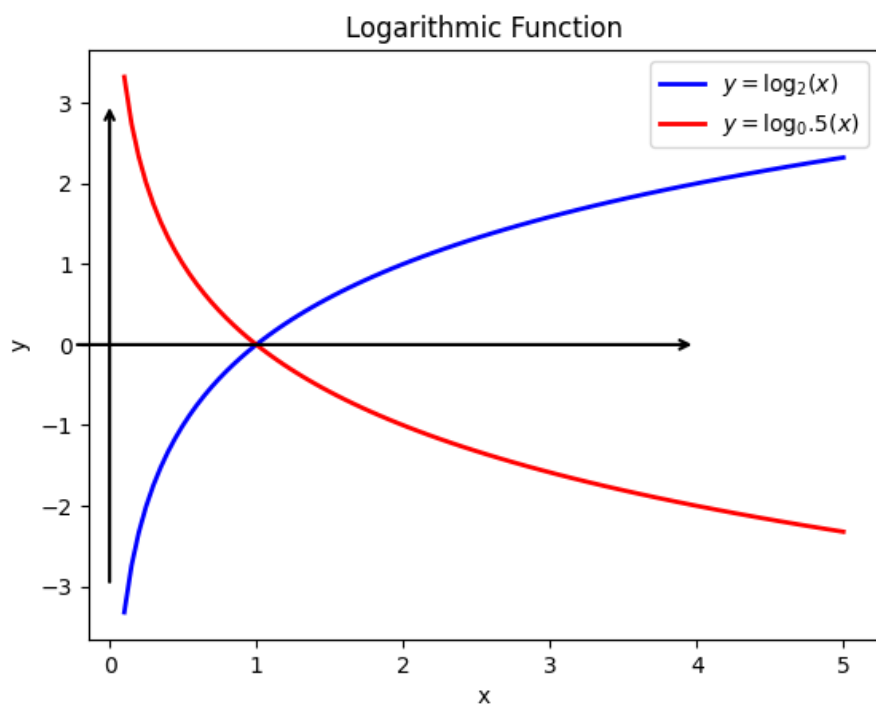


图 1.7: 对数函数图像

注 1.2.3: 对数函数相关性质

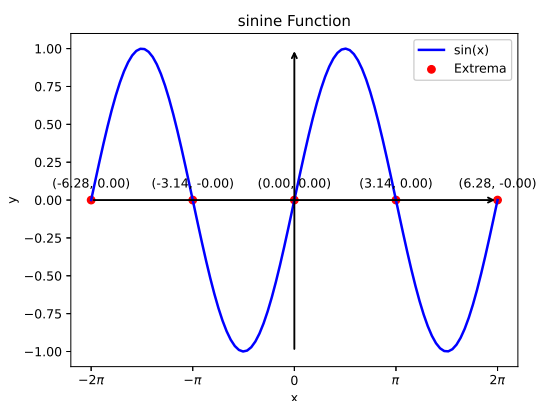
- 定义域: $(0, +\infty)$. 值域: $(-\infty, +\infty)$.
- 单调性: 当 $a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 单调增加; 当 $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a x$ 单调减少;
- 常用对数函数: $y = \ln x$
- 特殊函数值: $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \ln 1 = 0, \ln e = 1$
- 极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
- 对数运算法则
 - $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$ (积的对数 = 对数的和).
 - $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ (= 对数的差).
 - $\log_a M^n = n \log_a M, \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$ (幂的对数 = 对数的倍数).
- 常用公式: $x = e^{\ln x} (x > 0), u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u} (u > 0)$
- 当 $x > 0$ 时, 常用于中值定理:

$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x; \ln \frac{1}{x} = -\ln x; \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln \frac{x+1}{x} = \ln(x+1) - \ln x.$$

1.2.5 三角函数

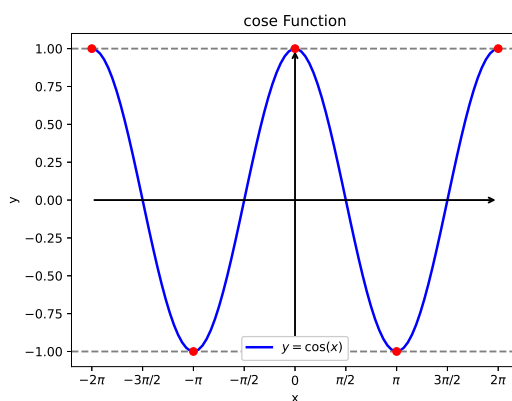
正弦和余弦函数

$$y = \sin x$$



(a) 正弦函数图像

$$y = \cos x$$



(b) 余弦函数图像

图 1.8: 正余弦函数图像

注 1.2.4: 正余弦函数相关性质

- 定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域: $[-1, 1]$
- 奇偶性: $y = \sin x$ 是奇函数, $y = \cos x$ 是偶函数, $x \in (-\infty, +\infty)$
- 周期性: $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 均以 2π 为最小正周期. $x \in (-\infty, +\infty)$
- 有界性: $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

正切和余切函数

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

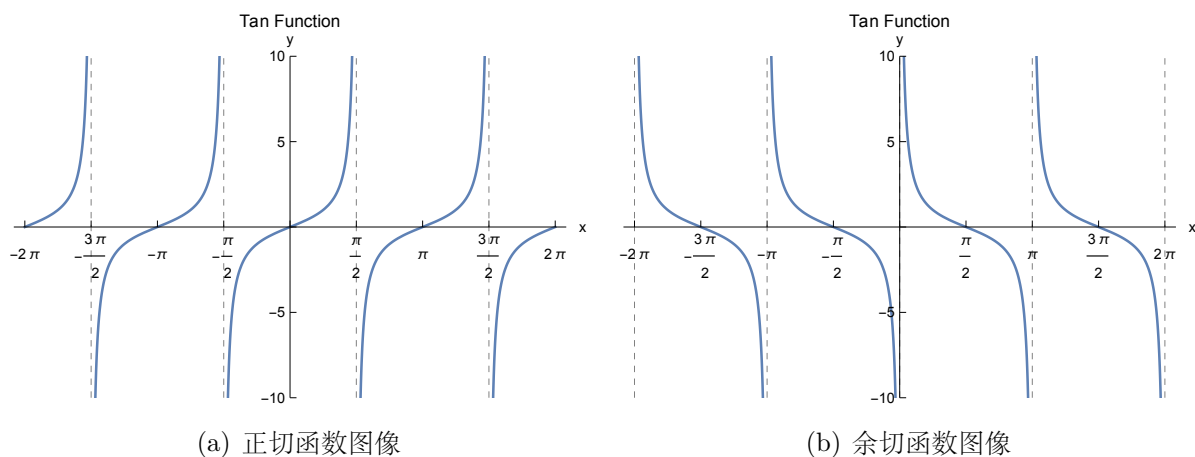


图 1.9: 正余切函数图像

注 1.2.5: 正余切函数相关性质

- $y = \tan x$ 的定义域为 $\{x | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})\}$;
 $y = \cot x$ 的定义域为 $\{x | x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})\}$;
 值域均为 $(-\infty, +\infty)$
- 奇偶性: 均为奇函数
- 周期性: 均以 π 为最小正周期

正割和余割函数

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

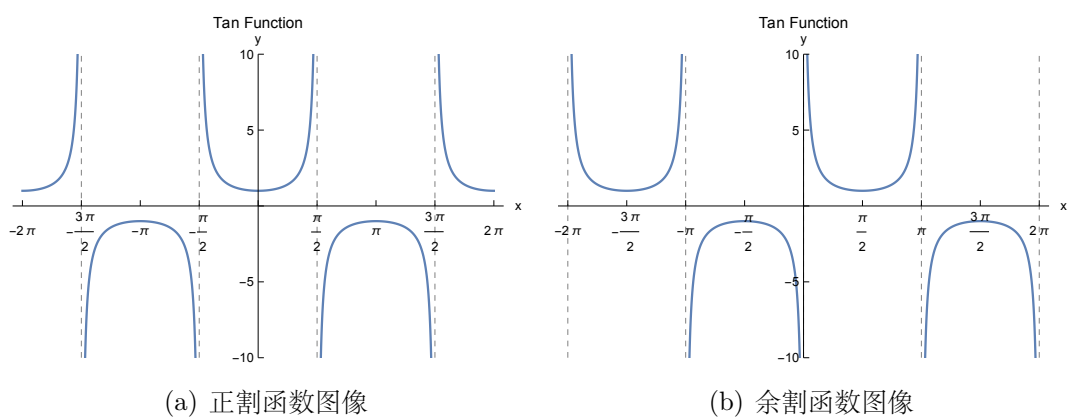


图 1.10: 正余割函数图像

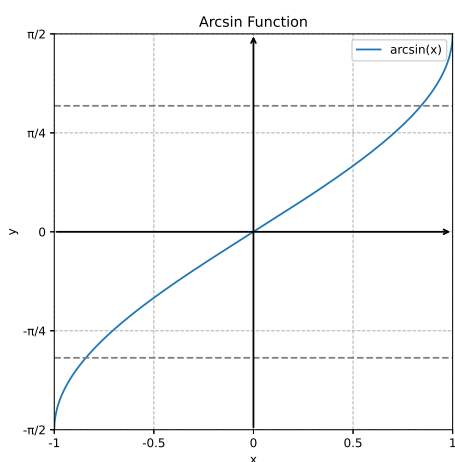
注 1.2.6: 正余割函数相关性质

- 定义域: $y = \sec x$ 的定义域是 $\{x | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})\}$; $y = \csc x$ 的定义域为 $\{x | x \neq k\pi, (k \in \mathbf{Z})\}$ 值域均为: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- 奇偶性: $y = \sec x$ 为偶函数, $y = \csc x$ 为奇函数
- 周期性: 最小正周期均为 2π
- $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$; $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$

反三角函数

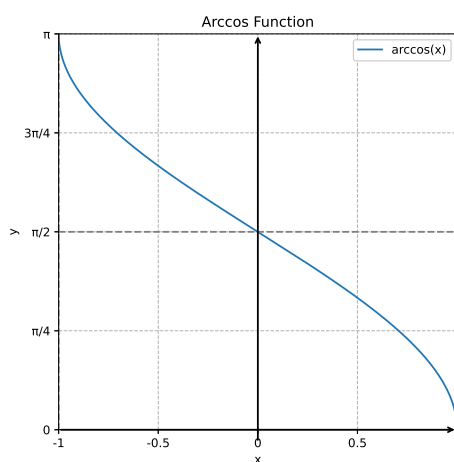
反正弦和反余弦函数

$$y = \arcsin x$$



(a) 反正弦函数图像

$$y = \arccos x$$



(b) 反余弦函数图像

图1.11: 反正余弦函数图像

由于这两个函数分别是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的反函数, 因此可以知道的是, $\sin x$ 的值域是 $\arcsin x$ 的定义域. 因此可以得到下面的结论

注 1.2.7: 反正余弦函数相关性质

- 定义域 $[-1, 1]$, $y = \arcsin x$ 值域 (主值区间) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y = \arccos x$ 值域 (主值区间) $[0, \pi]$
- 性质: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ (求导后可以发现导数为 0)

注 1.2.8: 反三角函数恒等式

$$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1, 1], \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 1];$$

$$\cos(\arccos x) = x, x \in [-1, 1], \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 1]^a;$$

上述两个式子可抽象为 $f^{-1}f(x) = x$. 需要注意的是其值需要在值域内.

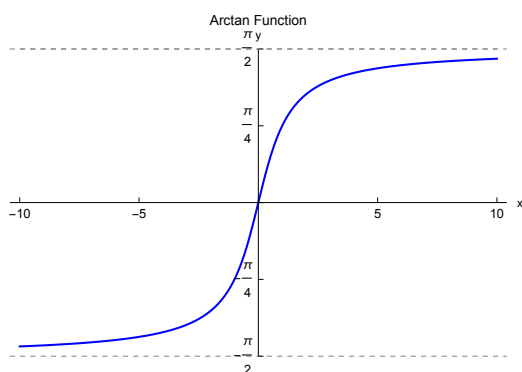
$$\arcsin(\sin y) = y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos(\cos y) = y, y \in [0, \pi]$$

^a证明如下: 令 $t = \arccos x \in [0, \pi], \cos t = x$, 又 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, 那么 $\sin t = \sqrt[3]{1-x^2}$, 即 $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

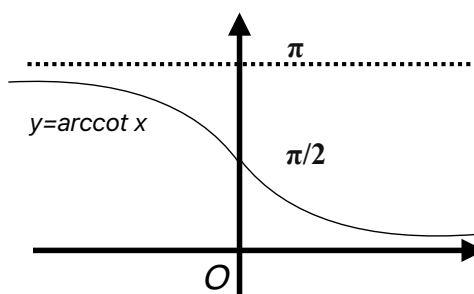
反正切和反余切函数

$$y = \arctan x$$



(a) 反正切函数图像

$$y = \operatorname{arccot} x$$



(b) 反余切函数图像

图 1.12: 反正余切函数图像

注 1.2.9: 反正余切函数相关性质

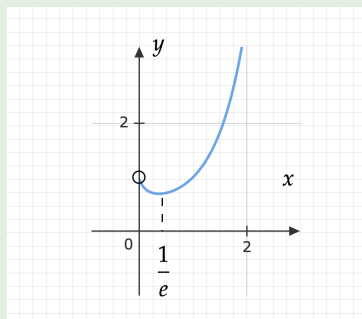
- 定义域 $[-\infty, +\infty], y = \arctan x$ 值域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), y = \operatorname{arccot} x$ 值域 $(0, \pi)$
- 性质: $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$ (求导后可以发现导数为 0)

1.2.6 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算, 以及有限次的复合步骤所构成的并且可以由一个式子所表示的函数称为初等函数.

注 1.2.10

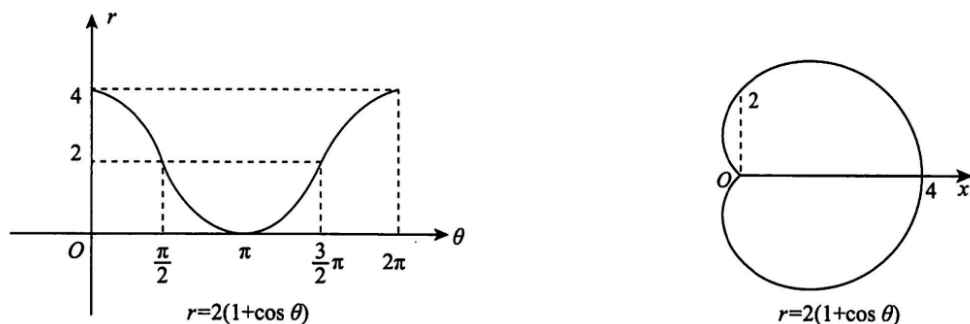
幂指函数 $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$ 也是初等函数, 如 $x > 0$ 时, $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$. 其函数图像如下所示:

图 1.13: 函数 x^x 图像

1.2.7 图像绘制

极坐标下的图像

- 用描点法绘制函数图像: 就是把每一个点求出来, 然后连接起来即可, 但是需要点足够多
- 用直角坐标系观点画极坐标系的图像, 以函数 $r = 2(1 + \cos \theta)$ 为例.

图 1.14: 函数 $r = 2(1 + \cos \theta)$ 图像

可以看到 $\theta - r$ 的坐标系的关键点为 $(0, 4), (\frac{\pi}{2}, 2), (\pi, 0), (\frac{3}{2}\pi, 2), (2\pi, 4)$ 这五个点, 那么在极坐标系下可以绘制出这些点, 比如在 $x = 4$ 时, $\theta = 0$, $x = 2$ 时, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ 时, $\theta = \pi$.

参数方程

通过第三个变量即参数来表示别的两个变量.

摆线参数方程:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

星型线参数方程:

$$\begin{cases} x = r \cos^3 t \\ y = r \sin^3 t \end{cases}$$

1.3 常用函数知识

1.3.1 数列

等差数列

首项为 a_1 , 公差为 $d (d \neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$.

注 1.3.1: 等差数列相关性质

- 通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$
- 前 n 项的和 $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

等比数列

首项为 a_1 , 公比为 $r (r \neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1 r, a_1 r^2, \dots, a_1 r^{n-1}, \dots$

注 1.3.2: 等比数列相关性质

- 通项公式 $a_n = a_1 r^{n-1}$
- 前 n 项的和 $S_n = \begin{cases} na_1, & r = 1, \\ \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1. \end{cases}$
- $1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} (r \neq 1).$

常见数列前 n 项和

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

1.3.2 三角函数

三角函数基本关系

$$\begin{array}{lll} \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} & \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} & \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \\ \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} & \end{array}$$

倍角公式

$$\begin{array}{l} \sin 2a = 2 \sin a \cos a, \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 \\ \sin 3a = -4 \sin^3 a + 3 \sin a, \quad \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \\ \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}, \quad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}. \end{array}$$

半角公式

$$\begin{array}{l} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha), \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha), \\ \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \\ \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}. \end{array}$$

和差公式

$$\begin{array}{l} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}. \end{array}$$

积化和差公式

$$\begin{array}{l} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)], \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \end{array}$$

和差化积公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.\end{aligned}$$

万能公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \cos \alpha &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

1.3.3 指数运算法则

$$a^a \times a^b = a^{a+b}, \quad \frac{a^a}{a^b} = a^{a-b}, \quad (a^a)^b = a^{a \cdot b}, \quad (ab)^a = a^a b^a, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^a = \frac{a^a}{b^a}$$

1.3.4 对数运算法则

$$\begin{aligned}\log_a(MN) &= \log_a M + \log_a N \\ \log_a \frac{M}{N} &= \log_a M - \log_a N \\ \log_a M^n &= n \log_a M. \\ \log_a \sqrt[n]{M} &= \frac{1}{n} \log_a M.\end{aligned}$$

1.3.5 一元二次方程基础

- 一元二次方程组: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$
- 根的公式: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- 根与系数的关系: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.
- 判别式: $\Delta = b^2 - 4ac$
- 抛物线顶点坐标: $(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$

1.3.6 因式分解公式

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
 (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) & (a^3 - b^3) &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\
 a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\
 a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n \text{ 是正整数}) \\
 n \text{ 是正奇数时, } a^n + b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
 (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \\
 a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n
 \end{aligned}$$

1.3.7 阶乘与双阶乘

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, 规定 $0! = 1$.
- $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n \cdot n!$
- $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$

1.3.8 常用不等式

1. 设 a, b 为实数, 则 $|a+b| \leq |a| + |b|$; $||a| - |b|| \leq |a-b|$

注 1.3.3

可以将第一个式子推广为:

离散情况: 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为实数, 则 $|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

连续情况: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ ($a < b$) 上可积, 则 $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

2. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad (a, b > 0)$

注 1.3.4

还有一个不等式是 $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

3. $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \quad (a, b, c > 0)$

4. 设 $a > b > 0$, 则 $\begin{cases} \text{当 } n > 0 \text{ 时, } a^n > b^n, \\ \text{当 } n < 0 \text{ 时, } a^n < b^n. \end{cases}$

5. 若 $0 < a < x < b, 0 < c < y < d$, 则 $\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}$.

注 1.3.5

当 $n\pi < x < (n+1)\pi$, $2n < S(x) < 2(n+1)$ 时, $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$.

6. $\sin x < x < \tan x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

7. $\sin x < x (x > 0)$

注 1.3.6

当 $x_n > 0$ 时, $x_{n+1} = \sin x_n < x_n$, 故 x_n 单调减少

8. $\arctan x \leq x \leq \arcsin x (0 \leq x \leq 1)$

9. $e^x \geq x + 1 (\forall x)$

注 1.3.7

当 $x_{n+1} = e^{x_n} - 1$ 时, 由 $e^{x_n} - 1 \geq x_n$, 得 $x_{n+1} \geq x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调不减

10. $x - 1 \geq \ln x (x > 0)$

注 1.3.8

当 $x_n > 0$ 时, 若 $x_{n+1} = \ln x_n + 1$, 由 $\ln x_n + 1 \leq x_n$, 得 $x_{n+1} \leq x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调不增

11. $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} (x > 0)$

注 1.3.9

令 $f(x) = \ln x$, 并在区间 $[x, x+1]$ 上对其使用拉格朗日中值定理, 有

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}$$

其中 $0 < x < \xi < x+1$, 因此对任意的 $x > 0$, 有 $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$

12. 在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如 $(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}})$, 可化为 $(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}}) * \frac{4}{3}$

1.3.9 绝对值等式

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$$

$$\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$$