

# 第一章 极限

## 1.1 数列的极限

### 1.1.1 数列极限的定义

#### 定义 1.1.1

设  $\{x_n\}$  为一数列, 若存在常数  $a$ , 对于任意的  $\varepsilon > 0$  (不论它多么小), 总存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时  $|x_n - a| < \varepsilon$  恒成立, 则称数  $a$  是数列  $\{x_n\}$  的极限, 或者称数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

该定义的  $\varepsilon - N$  语言描述是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \text{ 正整数 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

<sup>a</sup> $\varepsilon - N$  几何意义: 对于点  $a$  的任何  $\varepsilon$  邻域即开区间  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  一定存在  $N$ , 当  $n > N$  即第  $N$  项以后的点  $x_n$  都落在开区间  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  内, 而只有有限个 (最多有  $N$  个) 在区间之外.

在上面的定义中,  $\varepsilon > 0$  的  $\varepsilon$  任意性是非常重要的, 只有这样才能表示出无限接近的意义. 总存在正整数  $N$ , 使得  $n > N$  这个条件用于表达  $n \rightarrow \infty$  的过程.

#### 注 1.1.1

- 数列的极限值与数列的前有限项无关, 只与后面无穷项有关
- 若数列  $\{a_n\}$  收敛, 则其任何子列  $\{a_{n_k}\}$  也收敛, 且  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ <sup>a</sup>
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a$
- 关于数列  $(1 + \frac{1}{n})^n$  的结论
  - 单调增加
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

<sup>a</sup>此条定理提供了一个判断数列发散的方法: 1. 至少一个子数列发散. 2. 两个子数列收敛, 但是收敛值不同.

**题目 1.** 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$

证明. 已知数列  $a_n$  极限为  $A$ , 那么  $|a_n - A| < \varepsilon$ , 由不等式1可得,  $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$ .  $\square$

**题目 1 的注记.**

1. 此命题反过来则错误, 如取  $a_n = (-1)^n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1$ . 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  不存在.
2. 在本题中若  $A = 0$ , 则  $||a_n| - |A|| = ||a_n| - 0| = |a_n - 0|$ , 即有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0,$$

此结论常用, 即若要证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 可转换为证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , 由于  $|a_n| \geq 0$ , 若使用了夹逼准则, 只需证明  $|a_n| \leq 0$  即可

3. 此结论对函数亦成立, 即若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$ .

### 1.1.2 收敛数列的性质

唯一性

#### 定理 1.1.2

如果数列  $\{x_n\}$  收敛, 那么它的极限唯一

有界性

#### 定理 1.1.3

如果数列  $\{x_n\}$  收敛, 那么数列  $\{x_n\}$  一定有界<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>如果数列有界, 但是不一定存在极限, 如数列  $(-1)^n$

保号性

#### 定理 1.1.4

如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 且  $a > b$  (或  $a < b$ ), 那么存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有  $x_n > b$  (或  $x_n < b$ )  
如果数列  $|x_n|$  从某项起有  $x_n \geq b$  (或  $x_n \leq b$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 那么  $a \geq b$  (或  $a \leq b$ )<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>其中  $b$  可以为任意实数, 常考  $b=0$  的情况

## 1.2 函数的极限

### 1.2.1 超实数系

#### 定义 1.2.1: 超实数系的概念

超实数 (Hyperreal number) 是一个包含实数以及无穷大和无穷小的域, 它们的绝对值分别大于和小于任何正实数。

#### 注 1.2.1

- 超实数集是为了严格处理无穷量 (无穷大量和无穷小量) 而提出的。
- 超实数集, 或称为非标准实数集, 记为  ${}^*\mathbb{R}$ , 是实数集  $\mathbb{R}$  的一个扩张。

### 1.2.2 邻域

1

#### 定义 1.2.2: 邻域的相关概念

- $\delta$  邻域: 设  $x_0$  是数轴上一个点,  $\delta$  是某一正数, 则称  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  为点  $x_0$  的  $\delta$  邻域, 记作  $U(x_0, \delta)$ , 即:

$$U(x_0, \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x | |x - x_0| < \delta\}$$

- 去心  $\delta$  邻域: 定义点  $x_0$  的去心邻域  $\mathring{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$
- 左, 右  $\delta$  邻域:  $\{x | 0 < x - x_0 < \delta\}$  称为点  $x_0$  的右  $\delta$  邻域, 记作  $U^+(x_0, \delta)$ ;  $\{x | 0 < x_0 - x < \delta\}$  称为点  $x_0$  的左  $\delta$  邻域, 记作  $U^-(x_0, \delta)$ .

### 1.2.3 函数极限的定义

函数极限的定义主要分为自变量趋于有限值 ( $x \rightarrow x_0$ ) 时的极限和自变量趋于无穷大时函数的极限 ( $x \rightarrow \infty$ )

<sup>1</sup>邻域与区间不同, 邻域属于区间的范畴. 但是邻域通常表示“一个局部位置”. 比如“点  $x_0$  的  $\delta$ ”邻域, 可以理解为“点  $x_0$ ”的附近, 而区间是明确指出在实数系下的范围

## 自变量趋于有限值时的函数极限

## 定义 1.2.3: 当自变量趋于有限值时函数极限定义

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\varepsilon$  (不论它多么小)<sup>a</sup>, 总存在正数  $\delta$ , 使得当  $x$  满足不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数  $A$  就叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0)$$

其  $\varepsilon - N$  语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  在证明中, 这两句是白给, 直接写. 后面的才是关键。

<sup>a</sup> $\varepsilon$  用于衡量  $|f(x) - A|$  的值有多小

## 注 1.2.2

1. 在函数极限中  $x \rightarrow \infty$  指的是  $|x| \rightarrow \infty$ , 需要  $x$  趋于正无穷和负无穷, 但在数列中的  $n \rightarrow \infty$  是  $n \rightarrow +\infty$
2. 函数的极限值只与邻域内的函数值有关, 而与该点的函数值无关.

## 单侧极限

## 定义 1.2.4: 单侧极限的定义

若当  $x \rightarrow x_0^-$  时,  $f(x)$  无限接近于某常数  $A$ , 则常数  $A$  叫作函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

若当  $x \rightarrow x_0^+$  时,  $f(x)$  无限接近于某常数  $A$ , 则常数  $A$  叫作函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A$$

题目 2. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right]$  存在, 求  $a$  的值

解答. 由于存在  $\arctan$  与  $|x|$  函数, 则对于 0 点的极限值需要分左右进行计算.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \arctan \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = -\frac{\pi}{2}a + \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} a \arctan \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}a + e$$

若极限存在, 则

$$a = \frac{1-e^2}{\pi e}$$

### 自变量趋于无穷大时函数的极限

#### 定义 1.2.5: 自变量趋于无穷大时函数极限定义

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\varepsilon$ . (不论它多么小), 总存在正数  $\delta$ , 使得当  $x$  满足不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数  $A$  叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0)$$

其  $\varepsilon - N$  语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  在证明中, 这两句是白给, 直接写。后面的才是关键。

需要注意的是趋向的值不同时,  $\varepsilon - N$  写法不同, 不能照抄. 其  $\varepsilon - N$  的表达为如下表格:

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 即有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 <  x - x_0  < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow x_0^+$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x)  > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow x_0^-$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x)  > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$

继续下一页

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow \infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$ , 使当 $ x  > X$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon$ .	$\forall M > 0, \exists X > 0$ , 使当 $ x  > X$ 时, 即有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0$ , 使当 $ x  > X$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0$ , 使当 $ x  > X$ 时, 即有 $f(x) < -M$ .
$x \rightarrow +\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$ , 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon$ .	$\forall M > 0, \exists X > 0$ , 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0$ , 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) > M$ .	$\forall M > 0, \exists X > 0$ , 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow -\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$ , 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x) - A  < \varepsilon$ .	$\forall M > 0, \exists X > 0$ , 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x)  > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0$ , 使当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0$ , 使 当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) < -M$ .

### 注 1.2.3: 上表的部分解释

- 以  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  为例: 不管  $f(x)$  与  $A$  的距离多近 ( $\forall \varepsilon > 0$ ), 总有  $x$  不断靠近  $x_0$ , 使得  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .
- 以  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  为例: 不管  $M$  多大, 总有当  $x > \infty$  时, 使得  $|f(x)| > M$ , 即满足  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

## 1.2.4 函数极限的性质

### 唯一性

#### 定理 1.2.4

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 那么极限唯一

### 注 1.2.5: 关于唯一性的说明

- 对于  $x \rightarrow \infty$ , 意味着  $x \rightarrow +\infty$  且  $x \rightarrow -\infty$
- 对于  $x \rightarrow x_0$ , 意味着  $x \rightarrow x_0^+$  且  $x \rightarrow x_0^-$   
对于上述问题, 我们称为自变量取值的“双向性”. 以下有一些常见的问题:
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow x_0} [x]$  不存在.
  - 其不存在的原因均为分段函数分段点极限表达式不同, 需要分别求左右极限.

## 注 1.2.6: 极限存在的充要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A^a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \text{ (无穷小量 } \alpha(x) = 0)^b$$

<sup>a</sup>左右极限都存在且相等

<sup>b</sup>对于此概念, 如果引入超实数系的解释应为  $A$  是  $f(x)$  的标准实数部分, 而  $f(x)$  的值是超实数系下的值, 因此其值应为  $f(x) = A + \alpha(x)$

## 注 1.2.7: 极限不存在的情况

- 函数在该点附近趋于无穷
- 函数在该点的左右极限只存在一个, 或两者都存在但不相等
- 函数在该点附近不停地震荡
- 该点是函数无定义点的聚点

## 注 1.2.8: 一些重要的函数极限问题

以下类型的函数由于自变量取值的双向性因此需要进行特殊讨论:

- 形如  $f(x) = \max\{h(x), g(x)\}$  此类函数也需要注意在函数变化点的自变量取值问题
- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x: \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}: \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \frac{\sin x}{-x} = -1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x: \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} [x]: \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$

## 局部有界性

## 定理 1.2.9

若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在<sup>a</sup>, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  某去心邻域内有界.

<sup>a</sup>对局部有界性的描述需要指明是在那个区间上

## 注 1.2.10: 局部有界性的性质

- 极限存在必有界, 有界函数极限不一定存在.
- 若  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上为连续函数, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必有界.
- 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内为连续函数, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  都存在, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内必定有界.
- 有界函数与有界函数的和, 差, 积仍为有界函数<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>商不是有界函数, 因为:  $y_1 = 1, y_2 = 0, \frac{y_1}{y_2} = \infty$

题目 3. 在下列区间内, 函数  $f(x) = \frac{x \sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$  有界的是:

A:  $(-2, 1)$       B:  $(-1, 0)$       C:  $(1, 2)$       D:  $(2, 3)$

解答. 又题意可知, 函数的分段点为  $x = 3, 0, 1$ , 对上述三点求极限, 分析可得, 当  $x = 3, 1$  时, 函数极限为  $\infty$ , 因此函数在上述两点的极限不存在, 因此根据局部有界性的性质可得, 含这两个点的区间无界, 因此排除 A, C, D. 答案为 B.

## 局部保号性

## 定理 1.2.11

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 且  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 那么存在常数  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时有  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ )<sup>a</sup>.

如果在  $x_0$  的某去心邻域内  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ ), 而且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 那么  $A \leq 0$  或 ( $A \leq 0$ )<sup>b</sup>.

<sup>a</sup>如果函数在  $x_0$  附近的极限值为正, 那么  $x_0$  附近的函数值为正

<sup>b</sup>如果函数在  $x_0$  附近的函数值  $\leq 0$ , 那么  $x_0$  此处的极限值  $\leq 0$

对上述定理中, 为什么一个可以等于 0, 一个不能等于 0? 其解释如下: 如果第一个定理中  $A \leq 0, f(x) \leq 0$ , 那么以函数  $f(x) = x^2$  为例, 虽然  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 但是邻域内的函数值都大于 0. 对于第二个定理中如果  $f(x) < 0, A < 0$ , 那么以函数  $f(x) = -x^2$  为例, 虽然邻域内的函数值都小于 0, 但是  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

## 注 1.2.12

由保号性可推出保序性: 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 则:

1. 若  $A > B \Rightarrow \exists \delta > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  时,  $f(x) > g(x)$ .
2. 若  $\exists \delta > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  时,  $f(x) \geq g(x) \Rightarrow A \geq B$ .



## 题目 4. 局部保号性的证明:

证明. 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ , 所以, 取  $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

□

由上述证明可得如下推论

## 推论 1.2.13

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$  ( $A \neq 0$ ), 那么就存在  $x_0$  的某去心邻域  $\dot{U}(x_0)$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0)$  时, 就有  $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

## 函数极限与数列极限的关系 (海涅定理)

## 定理 1.2.14

设  $f(x)$  在  $\dot{U}(x_0, \delta)$  内有定义, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  存在  $\Leftrightarrow$  对任何  $\dot{U}(x_0, \delta)$  内以  $x_0$  为极限的数列  $\{x_n\}$  ( $x_n \neq x_0$ ), 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  存在.

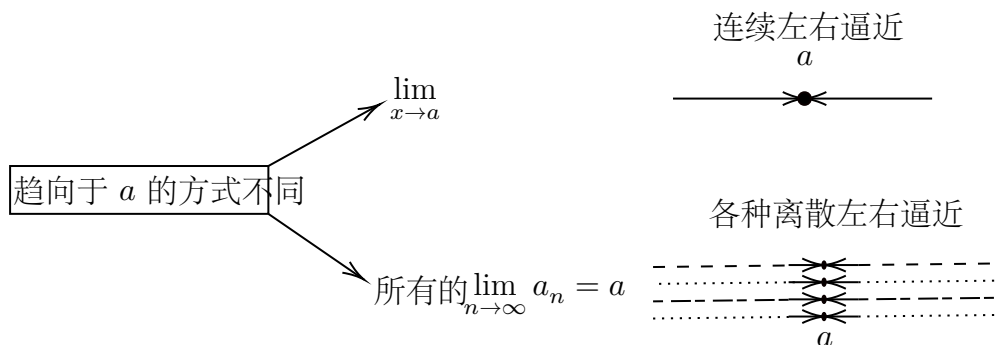
把这个定理简化一下, 主要意思就是

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

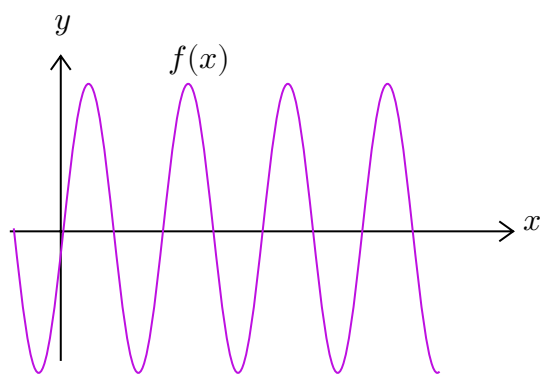
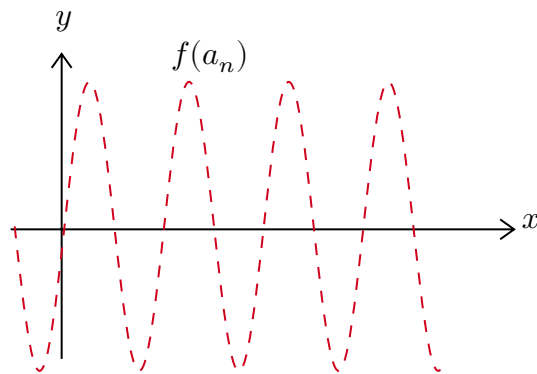
$$\Updownarrow$$

$$\text{所有的 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$$

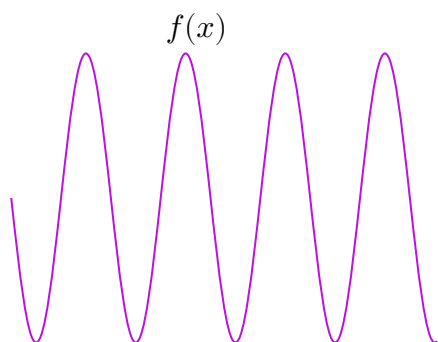
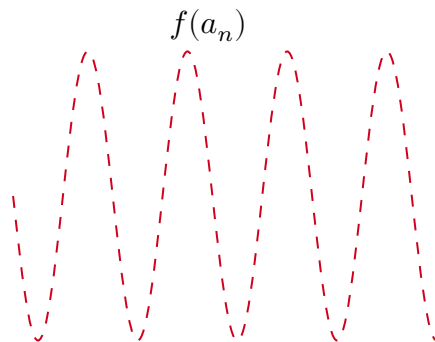
其不同之处在于是离散的趋近还是连续的趋近



除此之外,  $f(x)$  和  $f(a_n)$  的函数图像如下所示

函数  $f(x)$ 函数  $f(a_n)$ 

如上图所示  $f(a_n)$  其实是  $f(x)$  的抽样

用  $\varepsilon - \delta$  求它的极限

用海涅定理求它的极限

需要注意的是, 是所有的数列 (抽样) 才能完全代表整体. 不能说选了某个数列有极限就代表函数有极限.

总结: 海涅定理表述了离散与连续、数列极限与函数极限的关系.

## 1.3 无穷小与无穷大

### 1.3.1 无穷小

#### 定义 1.3.1: 无穷小的定义

如果函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的极限为零, 那么称函数  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷小.

$f(x)$  是可以本身为 0 或者无限趋近于零, 其中 0 可以作为无穷小唯一常数.

#### 注 1.3.1: 无穷小与函数极限的关系 (脱帽法)

$\lim_{x \rightarrow \bullet} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ , 其中  $\lim_{x \rightarrow \bullet} f(x)$  为超实数值, 其实数部分为  $A$ , 函数  $f(x)$  的函数值为  $A + \alpha$

### 1.3.2 无穷小的性质

1 有限个无穷小的和是无穷小<sup>2</sup>

证明. 设  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  为无穷小量. 则  $0 \leq |\alpha_1 + \alpha_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2|$ ,  $|\alpha_1| + |\alpha_2|$  的极限为 0. 证明完毕.  $\square$

2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小<sup>3</sup>

证明.  $|\alpha_1| \leq M, \alpha_2$  是无穷小量. 那么  $0 \leq |\alpha_1 \times \alpha_2| = |\alpha_1| \times |\alpha_2| \leq M \times |\alpha_2|$  证明完毕.  $\square$

3 有限个无穷小的乘积是无穷小<sup>4</sup>

### 1.3.3 无穷小的比阶

#### 定义 1.3.2

- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么就说  $\beta$  是比  $\alpha$  高阶的无穷小, 记作  $\beta = o(\alpha)$ ;
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么就说  $\beta$  是比  $\alpha$  低阶的无穷小;
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么就说  $\beta$  与  $\alpha$  是同阶无穷小;
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$ , 那么就说  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小<sup>a</sup>;
- 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么就说  $\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小, 记作  $\alpha \sim \beta$

<sup>a</sup>不是相等, 超实数系下没有加减运算, 只可以进行替换运算

前三个定义解释:  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$  是指分子趋于 0 的速度比分母快,  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$  是指分子趋于 0 的速度比分母慢,  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$  是指趋于 0 的速度一样.

同时需要注意的是, 并不是任意两个无穷小都可进行比阶的. 例如, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x \sin \frac{1}{x}$  与  $x^2$  虽然都是无穷小, 但是却不可以比阶, 也就是说既无高低阶之分, 也无同阶可言, 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  不存在, 其值为  $\infty$  和 0.

### 1.3.4 无穷小的运算

<sup>5</sup> 设  $m, n$  为无穷小, 则

1.  $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min\{m, n\}$
2.  $o(x^m) \bullet o(x^n) = o(x^{m+n}), x^m \bullet o(x^n) = o(x^{m+n})$
3.  $o(x^m) = o(kx^m) = k \bullet o(x^m), k \neq 0$

<sup>2</sup>无穷个无穷小的和不一定是无穷小, 如  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{n+n}) = \ln 2$

<sup>3</sup>无界函数  $\times$  无穷小量不一定是无穷小, 如  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \times \frac{1}{x} = 1$

<sup>4</sup>这个地方虽然张宇老师给出了证明, 但是好像存在一定的争议性

<sup>5</sup>此处多用于泰勒公式的应用中, 会对上述高阶无穷小的运算提出要求

## 1.3.5 无穷大

## 定义 1.3.3: 无穷大的定义

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某一去心邻域内有定义 (或  $|x|$  大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数  $M$  (不论它多么大), 总存在正数  $\delta$  (或数  $X$ ), 只要  $x$  适合不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  (或  $|x| > X$ ), 对应的函数值  $f(x)$  总满足不等式

$$|f(x)| > M$$

那么称函数  $f(x)$  是当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty^a$ ) 时的无穷大.<sup>b</sup> 其  $\varepsilon - N$  语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x)| > M.$$

<sup>a</sup>等价于  $x \rightarrow -\infty$  同时  $x \rightarrow +\infty$

<sup>b</sup>无穷大一定无界, 但无界不一定是无穷大量. 与无穷小相同, 都是一个极限过程, 因此无穷大也是一个极限, 所以无界不一定是无穷大量

题目 5. 证明  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

解答.  $\forall M > 0$  令  $\delta = \frac{1}{4M} > 0$ , 当  $0 < |x - 1| < \delta$  时, 即  $0 < |x - 1| < \frac{1}{4M}$  时,  $|x - 1| < \frac{1}{M}$ , 所以  $\frac{1}{|x-1|} > M$  这就证明了  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

## 1.3.6 无穷大的比阶

- 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\ln^\alpha x \ll x^\beta \ll a^x$ , 其中  $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$ .<sup>6</sup>
- 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$ , 其中  $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$ .

## 1.3.7 无穷大的性质

- 两个无穷大量的积仍未无穷大量
- 无穷大量与有界变量的和仍是无穷大量

## 1.3.8 无穷大与无界变量的关系

无穷大量一定是无界变量, 但无界变量不一定是无穷大量.<sup>7</sup>

<sup>6</sup>由洛必达公式证明

<sup>7</sup>如数列  $x_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 是无界变量, 但不是无穷大. 无穷大是一个极限

### 1.3.9 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中, 若  $f(x)$  是无穷大, 则  $\frac{1}{f(x)}$  是无穷小; 若  $f(x)$  是无穷小, 且  $f(x) \neq 0$ , 则  $\frac{1}{f(x)}$  是无穷大.

## 1.4 函数极限的运算

### 1.4.1 极限的四则运算法则

如果极限不存在, 那么极限属于超实数系的范畴, 在超实数系下不可以进行代数运算, 只可以进行替换运算. 但是如果极限均存在, 那么可以进行代数计算.

若  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , 那么

- $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k \lim f(x) \pm l \lim g(x) = kA \pm lB$ , 其中  $k, l$  为常数
- $\lim[f(x) \bullet g(x)] = \lim f(x) \bullet \lim g(x) \equiv A \bullet B$ , 特别的, 若  $\lim f(x)$  存在,  $n$  为正整数, 则  $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

#### 定义 1.4.1: 复合函数极限运算法则

设函数  $y = f[g(x)]$  是由函数  $u = g(x)$  与函数  $y = f(u)$  复合而成,  $f[g(x)]$  在点  $x_0$  的某去心邻域内有定义, 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ , 且存在  $\delta_0 > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta_0)$  时, 有  $g(x) \neq u_0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A.$$

题目 6. (1) 证明:  $\lim f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x) = A \lim g(x)$

(2) 证明:  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$  存在,  $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$

证明. (1)  $\lim f(x) = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \bullet g(x) = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \bullet \lim g(x) = A \bullet 0 = 0.$

(2) 由于  $g(x) = \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$ , 则  $\lim g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\lim f(x)}{\lim \frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{0}{A} = 0$

□

题目 6 的注记. 此题的两个证明是常用结论

## 注 1.4.1: 常用结论

- 存在  $\pm$  不存在 = 不存在 (只有这一个是不存在, 其余都是不一定或者存在)
- 不存在  $\pm$  不存在 = 不一定<sup>a</sup>
- 存在  $\times(\div)$  不存在 = 不一定
- 不存在  $\times(\div)$  不存在 = 不一定

<sup>a</sup>反例:  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}) = 0$

题目 7. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$ . 极限

解答. 由于该极限的分子  $e^x$  的极限为无穷大, 无穷大属于极限中的不存在情况, 因此不可以使用极限的四则运算法则 1.4.1, 也不可以对分母使用两个重要无穷小进行化简. 只能使用等价变换进行求解. 即  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{x^2 \ln(1+\frac{1}{x})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-x^2 \ln(1+\frac{1}{x})}$  对  $\ln(1+\frac{1}{x})$  进行泰勒展开, 化简为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-x+\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

题目 8. 已知  $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{f'(x)}{x}}$

解答. 如果想把分子写  $x \rightarrow 0$  时的导数形式, 然后进行计算, 即  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\frac{f'(0)}{f'(0)}} = \frac{f'(0)}{f'(0)} = 1$  进行运算, 则不满足极限四则运算法则 1.4.1, 因为其分母为 0, 违背了极限的四则运算法则, 因此不可这样计算, 需要对其进行恒等变形计算. 即  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}} = \frac{1}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \frac{1}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \frac{1}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{f''(x)}{1} = \frac{1}{f''(0)} \cdot \frac{1}{2} f''(0) = \frac{1}{2}$

题目 9. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x)$

解答.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}) = \frac{(\tan x + x)(\tan x - x)}{x^2 \times \tan^2 x} = \frac{2x \times \frac{1}{3}x^3}{x^4} = \frac{2}{3}$

题目 9 的注记. 本题的有另一个写法, 但是相较上面的写法相比有些复杂, 但是记录一个常见的错误, 什么时候可以用等价无穷小的问题, 其写法为:  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x) = (\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4})^8 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cos x)(\sin x + x \cos x)}{x^4} \xrightarrow{\text{泰勒公式}} \frac{2}{3}$

题目 10. 若  $\lim_{g(x)} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ , 则  $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$

证明.  $g(x) = \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$ . 求极限得  $\lim g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\lim f(x)}{\lim \frac{f(x)}{g(x)}} = 0$ . 证明完毕  $\square$

题目 10 的注记. 此证明为结论, 经常使用

<sup>8</sup>此处有一个常见的错误, 就是能不能把  $\cos^2 x$  代换为 1, 其实是不能的, 即使最后答案正确, 此时  $x \rightarrow 0$  时, 分母也趋于 0, 如果进行替换, 则违背了极限的运算法则, 因此不能进行替换

## 1.4.2 洛必达法则

## 定义 1.4.2

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0(\infty)$
- $f(x)$  和  $g(x)$  在  $x_0$  的某去心邻域内可导, 且  $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在 (或  $\infty$ )

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

需要注意的是使用过洛必达法则之后的极限必须存在, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  必须存在.

题目 11. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \times \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

解答. 该函数也是  $\frac{0}{0}$  型, 但是如果使用洛必达法则, 则  $2x \times \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ , 极限显然不存在, 因此不可以使用洛必达法则. 则正确求法为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \times \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \times \sin \frac{1}{x} = 0$ .

## 1.4.3 泰勒公式

设  $f(x)$  在点  $x = 0$  处  $n$  阶可导<sup>9</sup>, 则存在  $x = 0$  的一个邻域, 对于该领域内的任一点  $x$ , 有:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

当  $x \rightarrow 0$  时, 有以下结论

$$\begin{array}{ll} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) & \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ \arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) & \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) & \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) & (1+x)^a = 1 + ax + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2) \end{array}$$

## 注 1.4.2: 泰勒公式应用时的展开原则

- $\frac{A}{B}$  型, 适用于“上下同阶”原则: 具体来说, 如果分母或者分子是  $x$  的  $k$  次幂, 则应把分子或分母展开到  $x$  的  $k$  次幂. 如:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ , 此处  $\ln(1+x)$  应展开为  $x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $A - B$  型, 适用“幂次最低”原则: 将  $A, B$  分别展开到他们系数不相等的  $x$  的最低次幂为止. 如: 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}$  与  $ax^b$  为等价无穷小, 求  $a, b$ . 则应展开为  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ .

<sup>9</sup>泰勒公式是在一点处展开, 函数必须在那一点处  $n$  阶导数存在

## 1.4.4 抓大头和抓小头

本质是同时处以最高阶/最低阶

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m \\ \infty, & \text{当 } n < m \end{cases}$$

还有一个重要的等价  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \sim e^{-1} \times n$  该等价由斯特林公式  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$  而来, 又可写为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$

题目 12. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2 + 3x + 10}{3x^3 + 2x + 7}$

解答. 对等式上下同除以  $x^3$  得  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{10}{x^3}}{3 + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3}}$

题目 13. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 + 3x^4}{2x + 4x^3 + x^5}$

解答. 上下同除以  $x$  得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x + 3x^3}{2 + 4x^2 + x^4} = \frac{1}{2}$

## 1.4.5 两个重要极限

$$\lim_{\square \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\square}\right)^{\square} = e$$

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

## 1.4.6 夹逼准则

## 定义 1.4.3: 函数极限夹逼准则

如果

- 当  $x \in U^\circ(x_0, r)$  (或  $|x| > M$ ) 时

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} h(x) = A$

那么  $\lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} f(x)$  存在, 且等于  $A$ .

- 夹逼准则处主要通过放缩来求极限
- 常用的结论有: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$ , 其中  $a_i > 0 (i = 1, 2, 3, \dots, m)$ , 令  $\max a_i = a$ , 则  $\sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma^n}$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m \cdot a^n} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a$



## 1.4.7 单调有界准则

## 定义 1.4.4: 函数的单调有界准则

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某个左邻域内单调并且有界, 则  $f(x)$  在  $x_0$  的左极限  $f(x_0^-)$  一定存在

## 1.4.8 等价无穷小替代

关于等价无穷小, 有以下两个定理

## 定义 1.4.5: 等价无穷小的充要条件

$\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta = \alpha + o(\alpha)$$

## 定义 1.4.6: 等价无穷小的替换准则

设  $\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$ , 且  $\lim_{\tilde{\alpha}} \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$  存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 但是需要遵循以下代换原则<sup>a</sup>

- 乘除关系可以换: 若  $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ , 则  $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$
- 加减关系一定条件下可以换
  - 若  $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ , 且  $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$ , 则  $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$
  - 若  $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ , 且  $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$ , 则  $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$

加减关系代换准则证明如下:

证明.

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha_1 - \beta_1} = \lim \frac{\beta(\frac{\alpha}{\beta} - 1)}{\beta_1(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - 1)} = 1$$

□

<sup>a</sup>其实没有什么替换原则, 本质其实是因为超实数系下不能进行实数运算, 只能进行替换运算

以下为常用等价无穷小

当  $x \rightarrow 0$  时, 有

1.

$$\begin{aligned} x &\sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \\ &\sim \ln(1+x) \\ &\sim e^x - 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (1+x)^a &\sim 1+ax \\ a^x - 1 &\sim x \ln a \\ 1 - \cos^\alpha x &\sim \frac{\alpha}{2}x^2 \end{aligned}$$

3. 上述结论的推广当  $x \rightarrow 0$  时, 若  $(1+x)^a - 1 \sim ax$ , 则  $\alpha(x) \rightarrow 0, \alpha(x)\beta(x) \rightarrow 0$ , 那么  $[1+\alpha(x)]^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$

4.

$$\frac{1}{2}x^2 \sim \sec x - 1 \sim x - \ln(1+x)$$

5.

$$\frac{1}{6}x^3 \sim x - \sin x \sim \arcsin x - x$$

6.

$$\frac{1}{3}x^3 \sim x - \arctan x \sim \tan x - x$$

7. 设  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $x=0$  的某邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , 则  $\int_0^x f(t)dt \sim \int_0^x g(t)dt$

8.  $x \rightarrow 1$  时,  $\ln x \sim x-1$ , 因为  $\ln(1+x-1) \sim x-1$

9. 当  $A \rightarrow 0, B \rightarrow 0$  时,  $e^A - e^B \sim A - B$ , 因为  $e^B(e^{A-B} - 1) \sim A - B$

### 1.4.9 利用基本极限求极限

$$\begin{aligned} \lim_{\square \rightarrow \infty} (1 + |\square|)^{\frac{1}{\square}} &= e^{|\square|^{\frac{1}{\square}}} & \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1 (a > 0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a \end{aligned}$$

### 1.4.10 定积分求极限

### 1.4.11 七种未定式的计算

主要有以下类型  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty$

形如  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$  可以直接计算或者简单转换可以直接计算.

形如  $\infty - \infty$

$\infty - \infty$  可以通过取倒数或者取对数进行计算

题目 14.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 (e^{\frac{1}{x}} - 1) - x]$

解答. 原式  $\stackrel{\text{令 } u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1 - u}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1}{2u} = \frac{1}{2}$

形如  $\infty^0, 0^0$

$\infty^0$  与  $0^0$  通常使用  $u^v = e^{v \ln u}$  来计算

题目 15. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$ , 其中  $n$  是给定的自然数.

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)}{x}} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x + 2e^{2x} + \dots + ne^{nx}}{n}}{\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \dots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}} \\ &= \frac{1 + 2 + \dots + n}{1 + 1 + \dots + 1} \\ \text{原式} &= e^{\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

形如  $1^\infty$

$1^\infty$  通常使用  $\lim u^v = e^{\lim(u-1)v}$  来计算, 需要知道的是  $1^\infty$  可以化为第二个重要极限.

题目 16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2 + x}{(x-a)(x-b)} \right]^x$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x-a} \right)^x \times \left( \frac{x+1}{x-b} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{x-a} \right)^x \times \left( 1 + \frac{1-b}{x+b} \right)^x \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x-a}} \times e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-b)x}{x+b}} \\ &= e^{a+1-b} \end{aligned}$$

题目 17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sqrt{n+a} + \sqrt{n+b} + \sqrt{n+c}}{3\sqrt{n}} \right]^n$ , 其中  $a > 0, b > 0, c > 0$ .

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{\sqrt{n+a} + \sqrt{n+b} + \sqrt{n+c}}{3\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{\sqrt{1+\frac{a}{n}} + \sqrt{1+\frac{b}{n}} + \sqrt{1+\frac{c}{n}}}{3}}{\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sqrt{1+ax} + \sqrt{1+bx} + \sqrt{1+cx} + 3 - 3}{3}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} + \sqrt{1+bx} + \sqrt{1+cx} - 3}{3x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{2\sqrt{1+ax}} + \frac{b}{2\sqrt{1+bx}} + \frac{c}{2\sqrt{1+cx}}}{3} \\
 &= \frac{a+b+c}{6}
 \end{aligned}$$

综上所述, 答案为  $e^{\frac{a+b+c}{6}}$

题目 18. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \ln(1+x)}$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x (1 - (\frac{\sin x}{x})^x)}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{x \ln \frac{\sin x}{x}}}{x^3} \quad (\text{当 } x \text{ 趋于 } 0 \text{ 的时候 } x^x, \text{ 趋于 } 1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} \quad (\text{此处不可以用等价无穷小}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{\sin x - x}{x})}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^3} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

综上所述, 答案为  $\frac{1}{6}$

题目 19. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{n}{x}}$ , 其中  $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x - n}{n} \right)^{\frac{n}{a_1' + a_2' + \cdots + a_n' - n} \cdot \frac{a_1' + a_1' + \cdots + a_n' - n}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x - n}{x} = \ln(a_1 a_2 \cdots a_n) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x - n}{n} \right)^{\frac{n}{a_1' + a_2' + \cdots + a_n' - n}} = e
 \end{aligned}$$

综上所述, 答案为  $a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n$

## 1.5 数列极限的运算

### 1.5.1 数列极限的运算法则

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , 则

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$
- 若  $b \neq 0, y_n \neq 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

上述运算规则可推广至有限个数列的情况

### 1.5.2 夹逼准则

#### 定理 1.5.1: 数列极限夹逼准则

如果数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$  及  $\{z_n\}$  满足下列条件:

- 从某项开始, 即  $\exists n_0 \in N_+$  (即  $n \rightarrow \infty$ ), 当  $n > n_0$  时, 有

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

那么数列  $\{x_n\}$  的极限存在, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

以下为放缩的常用方法

- 利用简单放大与缩小

$$\begin{cases} n \times u_{\min} \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq n \times u_{\max}, \\ \text{当 } u_i \geq 0 \text{ 时, } 1 \times u_{\max} \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq n \times u_{\max}. \end{cases}$$

- 利用如下重要不等式

$$1. \text{ 设 } a, b \text{ 为实数, 则 } |a + b| \leq |a| + |b|; |a| - |b| \leq |a - b|^{10}$$

<sup>10</sup>可以将上述式子推广为  $n$  个实数的情况:  $|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ .

2.  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a, b > 0)$ <sup>11</sup>
  3.  $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} (a, b, c > 0)$
  4. 设  $a \geq b \geq 0$ , 则  $\begin{cases} \text{当 } n \geq 0 \text{ 时, } a^n \geq b^n, \\ \text{当 } n \leq 0 \text{ 时, } a^n \leq b^n. \end{cases}$
  5. 若  $0 < a < x < b, 0 < c < y < d$ , 则  $\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}$ .<sup>12</sup>
  6.  $\sin x < x < \tan x (0 < x < \frac{\pi}{2})$
  7.  $\sin x < x (x > 0)$
  8. 当  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  时,  $x < \tan x < \frac{4}{\pi}x$
  9. 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\sin x > \frac{2}{\pi}x$
  10.  $\arctan x \leq x \leq \arcsin x (0 \leq x \leq 1)$
  11.  $e^x \geq x + 1 (\forall x)$ <sup>13</sup>
  12.  $x - 1 \geq \ln x (x > 0)$ <sup>14</sup>
  13.  $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x} (x > 0)$  或  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x (x > 0)$ <sup>15</sup>
  14. 在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如  $(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}})$ , 可化为  $(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}}) * \frac{4}{3}$
  15. 关于重要数列  $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$  的重要结论:
    - 单调递增
    - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- 利用闭区间上连续函数必有最大值与最小值
  - 利用压缩映射原理

题目 20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n+n} \right)$

证明.

□

<sup>11</sup>还有一个不等式是  $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

<sup>12</sup>当  $n\pi < x < (n+1)\pi, 2n < S(x) < 2(n+1)$  时,  $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$ .

<sup>13</sup>当  $x_{n+1} = e^{x_n} - 1$  时, 由  $e^{x_n} - 1 \geq x_n$ , 得  $x_{n+1} \geq x_n$ , 即  $\{x_n\}$  单调不减

<sup>14</sup>当  $x_n > 0$  时, 若  $x_{n+1} = \ln x_n + 1$ , 由  $\ln x_n + 1 \leq x_n$ , 得  $x_{n+1} \leq x_n$ , 即  $\{x_n\}$  单调不增

<sup>15</sup>令  $f(x) = \ln x$ , 并在区间  $[x, x+1]$  上对其使用拉格朗日中值定理, 有  $\ln(1 + \frac{1}{x}) = \ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}$  其中  $0 < x < \xi < x+1$ , 因此对任意的  $x > 0$ , 有  $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$

题目 21. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$ , 其中  $a_i (i = 1, 2, \cdots, m)$  都是非负数

证明.

□

### 1.5.3 单调有界准则

#### 定理 1.5.2: 数列的单调有界准则

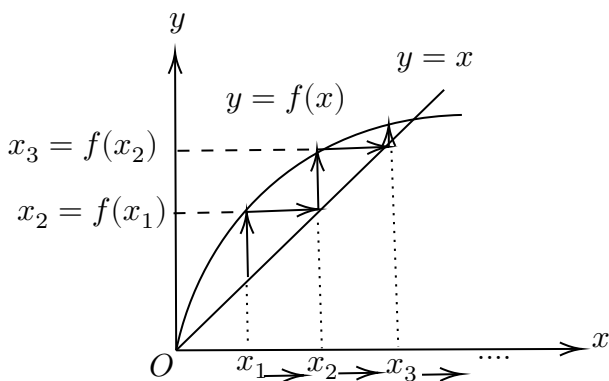
单调有界数列必有极限, 即若数列  $\{x_n\}$  单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在

证明数列单调性的方法:

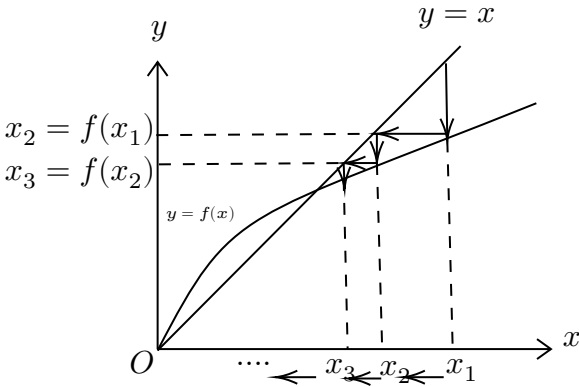
1.  $x_{n+1} - x_n > 0$  或  $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$  (同号)
2. 利用数学归纳法
3. 利用重要不等式
4.  $x_n - x_{n-1}$  与  $x_{n-1} - x_{n-2}$  同号, 则  $x_n$  单调
5. 利用结论: 对  $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots), x_n \in \text{区间 } I$

- 若  $f'(x) > 0, x \in \text{区间 } I$ , 则数列  $\{x_n\}$  单调, 且  $\begin{cases} \text{当 } x_2 > x_1 \text{ 时, 数列 } \{x_n\} \text{ 单调增加} \\ \text{当 } x_2 < x_1 \text{ 时, 数列 } \{x_n\} \text{ 单调减少} \end{cases}$

证明. 若  $f(x)$  单调增加, 且  $x_1 < x_2$ , 则数列单增的图像是这样的:



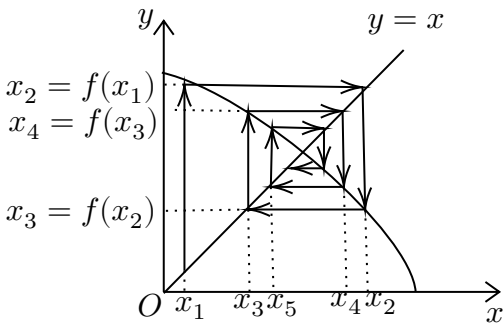
若  $f(x)$  单调增加, 且  $x_1 > x_2$ , 则数列单增的图像是这样的



□

• 若  $f'(x) < 0, x \in \text{区间 } I$ , 则数列  $\{x_n\}$  不单调

证明. 若  $f(x)$  单调递减, 且  $x_1 < x_2$  时, 则图像为



□