

# 第一章 连续

## 1.1 函数的连续性

### 定义 1.1.1: 连续点的定义

设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

那就称为函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  连续.

### 注 1.1.1: 函数连续的性质

- 当极限需要讨论时:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \text{ 在点 } x_0 \text{ 处连续}$$

- 连续性的四则运算: 设  $f(x)$  与  $g(x)$  都在点  $x = x_0$  处连续, 则  $f(x) \pm g(x)$  与  $f(x)g(x)$  在点  $x = x_0$  处连续, 当  $g(x_0) \neq 0$  时,  $f(x)/g(x)$  在点  $x = x_0$  处也连续。
- 复合函数的连续性: 设  $u = \varphi(x)$  在点  $x = x_0$  处连续,  $y = f(u)$  在点  $u = u_0$  处连续, 且  $u_0 = \varphi(x_0)$ , 则  $f[\varphi(x)]$  在点  $x = x_0$  处连续。
- 反函数的连续性: 设  $y = f(x)$  在区间  $I_x$  上单调且连续, 则反函数  $x = \varphi(y)$  在对应的区间  $I_y = \{y | y = f(x), x \in I_x\}$  上连续且有相同的单调性
- $f(x)$  在点  $x = x_0$  处连续, 且  $f(x_0) > 0$  (或  $f(x_0) < 0$ ), 则存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时

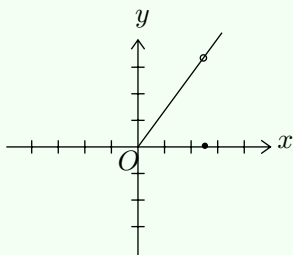
$$f(x) > 0 (\text{或} f(x) < 0).$$

## 1.2 函数的间断点

### 1.2.1 间断点的相关概念

#### 定义 1.2.1: 可去间断点的定义

可去间断点: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$  ( $f(x_0)$  甚至可以无定义), 则这类间断点称为可去间断点



可去间断点函数图像

题目 1. 函数  $f(x) = \frac{(x+1)|x-1|}{e^{\frac{1}{x-2}} \ln|x|}$  的可去间断点的个数为

解答. 该题中可疑点为  $x = \pm 1, 2, 0$ , 对上述四点求极限可得:  $\lim_{x \rightarrow 0} = 0$ , 但是函数  $f(x)$  在  $x = 0$  点无定义. 因此  $x = 0$  是可去间断点.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  时  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-}$ . 因此  $x = 1$  是跳跃间断点.  $\lim_{x \rightarrow -1} = -2\sqrt[3]{e}$ , 因此  $x = -1$  是可去间断点.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty, x = 2$  是第二类间断点.

题目 1 的注记. 如何找间断点? 主要是找可疑点

- 绝对值分段点
- 这一点本身没有定义, 但邻域内都有定义的点<sup>1</sup>.

$\ln(x)$  本身不需要讨论  $x$  等于 0, 因为只有 0 点右邻域有定义, 0 点的左邻域内连定义都没有, 更不用谈 0 点的左极限, 所以此时 0 不可能是间断点. 但出现  $\ln|x|, \ln(x^2)$  时, 0 点本身无定义, 但 0 点左右邻域内都有定义, 所以 0 可能是间断点.

<sup>1</sup> 比如分母为 0 的点

**题目 2.** 函数  $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$  的可去间断点的个数为

**解答.**  $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$  在  $x = -1, 0, 1$  处无定义

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = \infty,$$

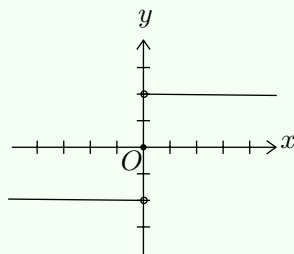
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

综上,  $x = 0$  与  $x = 1$  为可去间断点

### 定义 1.2.2: 跳跃间断点的定义

跳跃间断点<sup>a</sup>: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  都存在, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , 则这类间断点称为跳跃间断点



跳跃间断点函数图像

<sup>a</sup>一点极限存在  $f(x)$  在  $x_0$  连续

### 定义 1.2.3: 无穷间断点的定义

无穷间断点: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 则这类间断点称为无穷间断点, 如  $y = \tan x$

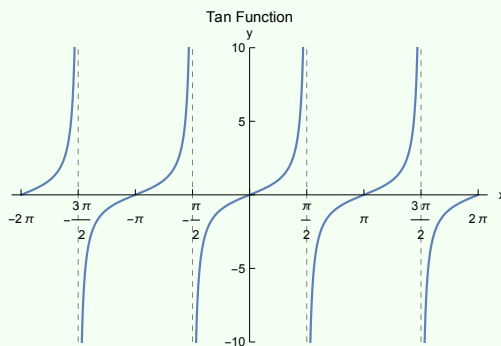


图 1.1: 无穷间断点函数  $\tan$  图像

## 定义 1.2.4: 振荡间断点的定义

振荡间断点: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  振荡不存在, 则这类间断点称为振荡间断点

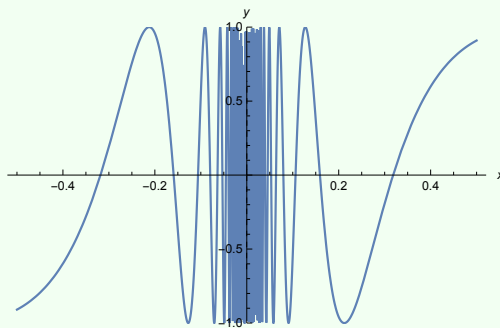


图 1.2: 振荡间断点函数  $\sin \frac{1}{x}$  图像

## 1.2.2 间断点的分类

通过求函数在该点的左右极限来判断

- 第一类间断点:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均存在
  - 可去<sup>2</sup>:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$
  - 跳跃:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
- 第二类间断点: 除第一类以外的间断点  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均至少一个不存在

题目 3. 设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + nx(1-x)\sin^2 \pi x}{1 + n \sin^2 \pi x}$ , 则  $f(x) =$

解答. 分情况讨论, 当  $\sin^2 \pi x = 0$  和  $\sin^2 \pi x \neq 0$

当  $\sin^2 \pi x = 0$  时,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>可去间断点上极限存在但是导数不存在

当  $\sin^2 \pi x \neq 0$  时,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{n} + x(1-x) \sin^2 \pi x}{\frac{1}{n} + \sin^2 \pi x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1-x) \sin^2 \pi x}{\sin^2 \pi x} \\ &= x(1-x)\end{aligned}$$

$$\text{综上函数 } f(x) = \begin{cases} x^2, \sin^2 \pi x = 0 \\ x(1-x), \sin^2 \pi x \neq 0 \end{cases}$$

**题目 4.** 求函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$  的间断点并指出其类型.

$$\text{解答. 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, 有 } \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} \infty, |x| > 1 \\ 0, |x| < 1 \\ 1, x = 1 \\ (-1)^n, x = -1 \end{cases}, \text{ 那么 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} = \begin{cases} -1, 0 < |x| < 1 \\ x^2, |x| > 1 \\ 0, |x| = 1 \end{cases}$$

综上,  $x = \pm 1$  为跳跃间断点,  $x = 0$  为可去间断点.

**题目 4 的注记.** 对于  $f(x)$  是  $x$  的函数, 表达式是以  $n$  的极限的形式给出的情况, 方法为把  $f(x)$  分段解出来,  $n$  趋于无穷时,  $x^n$  要以  $|x| = 1$  为界限进行分段..

$$\text{同时应该结合 } x^n \text{ 的解析式进行求解: } \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} \infty, |x| > 1 \\ 0, |x| < 1 \\ 1, x = 1 \\ (-1)^n, x = -1 \end{cases}$$

**题目 5.** 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{(n+1)x} + 1}{e^{nx} + x^n + 1}$ , 则  $f(x)$  :

(A) 仅有一个可去间断点. (B) 仅有一个跳跃间断点. (C) 有两个可去间断点. (D) 有两个跳跃间断点.

$$\text{解答. } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{nx} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x = 0 \\ +\infty, x > 0 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} \infty, |x| > 1 \\ 0, |x| < 1 \\ 1, x = 1 \\ (-1)^n, x = -1 \end{cases}$$

$$\text{综上所述可得: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{(n+1)x} + 1}{e^{nx} + x^n + 1} = \begin{cases} 0, x < -1 \\ 1, -1 < x < 0 \\ 2e^x, x > 0 \end{cases}$$