第一章　不定积分

1.1　不定积分的概念

定义 1.1.1: 原函数与不定积分的定义

设函数 $f(x)$ 定义在某区间 I 上, 若存在可导函数 $F(x)$, 对于该区间上任意一点都有 $F'(x)=f(x)$ 成立, 则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数. 称 $\int f(x)dx = F(x)+C$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分.

在几何层面,$f(x)$ 在区间 I 上的面积是不定积分, 也就是 $F(x)$. 因此二者的关系与区间 I 上的面积息息相关[1]. 此外, 还可以把 $f(x)$ 理解为“导数”,$F(x)$ 理解为原函数.

定理 1.1.1: 原函数 (不定积分) 存在定理

1. 连续函数 $f(x)$ 必有原函数 $F(x)$[a].
2. 含有第一类间断点和无穷间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内必没有原函数 $F(x)$[b].
3. 含有振荡间断点的函数不一定有原函数.[c]
4. 综上, 在不定积分中, 也存在一个类似于导数中连续与振荡的关系??.

$$\text{若 } F(x) \text{ 处处可导} \Rightarrow F'(x)\begin{cases}\text{连续函数}\\ \text{含振荡间断点的函数}\end{cases}$$

[a]可理解为: 已知 $f(x)=F'(x)$, 那么如果导数连续, 原函数一定存在.
[b]可以理解为如果包含第一类间断点 (可去间断点 + 跳跃间断点 + 无穷间断点) 的函数图像无法计算面积
[c]从前面的章节可以知道, 导数存在要么连续, 要么有振荡间断点. 那么也就是说, 含有振荡间断点的导数不一定有原函数.

[1]其实严格来说不能这样讲, 但是可以这样理解

1.2　不定积分的计算

1.2.1　基本积分公式

- $\boxed{\int x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C, k \neq -1; \quad \begin{cases} \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C. \end{cases}}$
- $\boxed{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C}$
- $\boxed{\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C; \int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0\text{且}a \neq 1}$
- $$\boxed{\begin{aligned} &\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C; \int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C; \\ &\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C; \int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C; \\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C; \\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C; \\ &\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C; \int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C; \\ &\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C; \int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C. \end{aligned}}$$
- $\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C, \int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C(a > 0).}$
- $\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C, \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C(a > 0).}$
- $$\boxed{\begin{aligned} &\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C(\text{常见}a = 1), \\ &\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C(|x| > |a|). \end{aligned}}$$
- $\boxed{\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \left(\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C\right)}$
- $\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C(a > |x| \geqslant 0)}$

- $$\boxed{\begin{aligned}&\int \sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C\left(\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\right);\\&\int \cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C\left(\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\right);\\&\int \tan^2 x\mathrm{d}x=\tan x-x+C(\tan^2 x=\sec^2 x-1);\\&\int \cot^2 x\mathrm{d}x=-\cot x-x+C(\cot^2 x=\csc^2 x-1).\end{aligned}}$$

1.2.2　不定积分积分法

凑微分法

主要使用如下公式进行求解

$$\int f[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x=\int f[g(x)]\mathrm{d}[g(x)]=\int f(u)\mathrm{d}u.$$

常用凑微分公式:

- 由于 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$, 故 $\int xf(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(x^2)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int f(u)\mathrm{d}u$
- 由于 $\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\mathrm{d}(x^{\frac{3}{2}})$, 故 $\int \sqrt{x}f(x^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int f(x^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}(x^{\frac{3}{2}})=\frac{2}{3}\int f(u)\mathrm{d}u$
- 由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\mathrm{d}(\sqrt{x})$, 故 $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\int f(u)\mathrm{d}u$
- 由于 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)$, 故 $\int \frac{f\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{d}x=\int f\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=\int f(u)\mathrm{d}u$
- 由于当 $x>0$ 时,$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln x)$, 故 $\int \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)=\int f(u)\mathrm{d}u$
- 由于 $e^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$, 故 $\int \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\int f(u)\mathrm{d}u.$
- 由于 $a^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\mathrm{d}(a^x), a>0, a\neq 1$, 故 $\int a^x f(a^x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int f(a^x)\mathrm{d}(a^x)=\frac{1}{\ln a}\int f(u)\mathrm{d}u$
- 由于 $\sin x\mathrm{dx}=\mathrm{d}(-\cos x)$, 故 $\int \sin x\cdot f(-\cos x)\mathrm{dx}=\int f(-\cos x)\mathrm{d}(-\cos x)=\int f(u)\mathrm{d}u$
- 由于 $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$, 故 $\int \cos x\cdot f(\sin x)\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)=\int f(u)\mathrm{d}u$
- 由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$, 故 $\int \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)=\int f(u)\mathrm{d}u$
- 由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\csc^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cot x)$, 故 $\int \frac{f(-\cot x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int f(-\cot x)\mathrm{d}(-\cot x)=\int f(u)\mathrm{d}u$
- 由于 $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan x)$, 故 $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)=\int f(u)\mathrm{d}u.$

- 由于 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arcsin x)$, 故 $\int\dfrac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

换元法

$$\int f(x)\mathrm{d}x\xrightarrow{x=g(u)}\int f[g(u)]\mathrm{d}[g(u)]=\int f[g(u)]g'(u)\mathrm{d}u$$

- 三角函数代换, 当被积函数含有如下根式时, 可作三角函数代换, 这里 $a>0$

$$\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}\to 令x=a\sin t,|t|<\dfrac{\pi}{2},\\ \sqrt{a^2+x^2}\to 令x=a\tan t,|t|<\dfrac{\pi}{2},\\ \sqrt{x^2-a^2}\to 令x=a\sec t,\begin{cases}若x>0,则0<t<\dfrac{\pi}{2},\\ 若x<0,则\dfrac{\pi}{2}<t<\pi.\end{cases}\end{cases}$$

- 恒等变形后三角函数代换: 当被积函数含有根式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 时, 可先化为以下三种形式: $\sqrt{\varphi^2(x)+k^2},\sqrt{\varphi^2(x)-k^2},\sqrt{k^2-\varphi^2(x)}$, 再作三角函数代换。
- 根式代换: 当被积函数含有根式 $\sqrt[n]{ax+b},\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\sqrt{a\mathrm{e}^{bx}+c}$ 等时, 一般令根式 $\sqrt{*}=t$(因为事实上, 很难通过根号内换元的办法凑成平方, 所以根号无法去掉). 对既含有 $\sqrt[n]{ax+b}$, 也含有 $\sqrt[m]{ax+b}$ 的函数, 一般取 m,n 的最小公倍数 l, 令 $\sqrt[l]{ax+b}=t$。
- 倒代换: 当被积函数分母的幂次比分子高两次及两次以上时, 作倒代换, 令 $x=\dfrac{1}{t}$
- 复杂函数的直接代换: 当被积函数中含有 $a^x,\mathrm{e}^x,\ln x,\arcsin x,\arctan x$ 等时, 可考虑直接令复杂函数等于 t, 值得指出的是, 当 $\ln x,\arcsin x,\arctan x$ 与 $P_n(x)$ 或 e^{ax} 作乘法时 (其中 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式), 优先考虑分部积分法.

分部积分法

由

$$(uv)'=u'v+uv'$$

可得:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

注 1.2.1: 分部积分法的使用事项

- 该方法主要适用于求 $\int udv$ 比较困难, 而 $\int vdu$ 比较容易的情形。
- 积分后会“简单”些的函数宜取作 ν; 微分后会“简单”些的函数宜取作 u. 故 u, ν 的选取原则为反 对 幂 指 (三) 三 (指)。相对位置在左边的宜选作 u, 用来求导; 相对位置在右边的宜选作 ν, 用来积分, 即
  - 被积函数为 $P_n(x)\mathrm{e}^{kx}, P_n(x)\sin ax, P_n(x)\cos ax$ 等形式时, 一般来说选取 $u = P_n(x)$;
  - 被积函数为 $e^{ax}\sin bx, e^{ax}\cos bx$ 等形式时,u 可以取两因子中的任意一个
  - 被积函数为 $P_n(x)\ln x, P_n(x)\arcsin x, P_n(x)\arctan x$ 等形式时, 一般分别选取 $u = \ln x$, $u = \arcsin x$, $u = \arctan x$

分部积分法的推广公式与 $\int P_n(x)\mathrm{e}^{kx}dx, \int P_n(x)\sin axdx, \int P_n(x)\cos bxdx$. 设函数 $u = u(x)$ 与 $\nu = \nu(x)$ 具有直到第 $(n+1)$ 阶的连续导数, 并根据分部积分公式

$$\int u\mathrm{d}\nu = u\nu - \int \nu\mathrm{d}u\,,$$

则有

$$\int u\nu^{(n+1)}\mathrm{d}x = u\nu^{(n)} - u'\nu^{(n-1)} + u''\nu^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}\nu + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}\nu\mathrm{d}x\,.$$

以 $n = 3$ 为例, 有如下公式:

$$\int u\nu^{(4)}\mathrm{d}x = u\nu^{(3)} - u'\nu'' + u''\nu' - u^{(3)}\nu + \int u^{(4)}\nu\mathrm{d}x$$

有理函数的积分

定义 1.2.1: 有理函数积分的定义

形如 $\int \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x(n < m)$ 的积分称为有理函数的积分, 其中 $P_n(x), Q_m(x)$ 分别是 x 的 n 次多项式和 m 次多项式。

定义 1.2.2: 有理函数积分的思想

若 $Q_m(x)$ 在实数域内可因式分解, 则因式分解后再把 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 拆成若干项最简有理分式之和

定义 1.2.3: 有理函数积分的方法

- $Q_m(x)$ 的一次单因式 $ax+b$ 产生一项 $\dfrac{A}{ax+b}$
- $Q_m(x)$ 的 k 重一次因式 $(ax+b)^k$ 产生 k 项，分别为 $\dfrac{A_1}{ax+b}, \dfrac{A_2}{(ax+b)^2}, \cdots, \dfrac{A_k}{(ax+b)^k}$
- $Q_m(x)$ 的二次单因式 px^2+qx+r 产生一项 $\dfrac{Ax+B}{px^2+qx+r}$
- $Q_m(x)$ 的 k 重二次因式 $(px^2+qx+r)^k$ 产生 k 项，分别为

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r}, \frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2}, \cdots, \frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}.$$