# 第一章　极限

## 1.1　数列的极限

### 1.1.1　数列极限的定义

**定义 1.1.1**

设 $|x_n|$ 为一数列, 若存在常数 $a$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$(不论它多么小),总存在正整数 $N$, 使得当$n > N$时 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称数 $a$ 是数列 $|x_n|$ 的极限, 或者称数列 $|x_n|$ 收敛于 $a$, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或} x_n \to a(n \to \infty).$$

该定义的 $\varepsilon - N$ 语言描述是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists \text{正整数} N, \text{当} n > N \text{时}, \text{有} |x_n, -a| < \varepsilon.$$

其中 $\forall\varepsilon > 0$ 是白给的信息, 随便写.$\exists$正整数$N$ 是关键. 因为第二句话说的是一定存在正整数 N, 你怎么才能够证明存在正整数 N 呢? 那就必须把这个正整数 N 给找出来，你找出来才能够证明这个 N 是存在的. 关键第三句话叫做桥梁，桥梁什么意思? 就是 n 大于 N 的时候 n 大于 N 的时候，也就意味着 N 趋近于无穷的过程中. 在大 N 项之后的所有的项. 最后一句话叫做突破口., 不是要去找这个 N 吗? 你找到 N 才能够证明这个 N 是存在的, 我们一般情况下就用第四句话来寻找大 N.

在上面的定义中,$\varepsilon > 0$ 的 $\varepsilon$ 任意性是非常重要的, 只有这样才能表示出无限接近的意义. 总存在正整数 $N$, 使得 $n > N$ 这个条件用于表达 $n \to \infty$ 的过程.

**注 1.1.1**

- 数列的极限值与数列的前有限列无关, 只与后面无穷项有关
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$
- **$\varepsilon - N$ 几何意义: 对于点 $a$ 的任何 $\varepsilon$ 邻域即开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 一定存在 $N$, 当 $n < N$ 即第 $N$ 项以后的点 $x_n$ 都落在开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内, 而只有有限个 (最多有 $N$ 个) 在区间之外.**

**题目 1.** 已知 $x_n=\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n+1\right)^2}$, 证明数列 $x_n$ 的极限是 0

**题目 1 的注记.** 根据数列极限的定义可知,$\forall\varepsilon>0$,$\exists$正整数$N$,当$n>N$ 时,有$|x_n-0=\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n+1\right)^2}|<\varepsilon.$, 即 $x_n=\frac{1}{\left(n+1\right)^2}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{n^2}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 即令 $N>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 是一个确定的实数, 大于它的正整数有无穷个, 仍取其中一个作为 $N$ 即可.

**解答.** $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+1$, 则总有 $x_n=\frac{1}{\left(n+1\right)^2}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{n^2}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 则数列 $x_n$ 的极限是 0

### 1.1.2 收敛数列的性质

**唯一性**

**定理 1.1.2**

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一

**有界性**

**定理 1.1.3**

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

**注 1.1.4**

需要注意的是, 如果数列有界, 但是不一定存在极限, 如数列 $(-1)^n$

**保号性**

**定理 1.1.5**

如果 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$,且$a$>0( 或$a$<0),那么存在正整数$N$,当$n$>$N$ 时,都有$x_n$>0 ( 或$x_n$<0)

**推论 1.1.6**

如果数列 $|\ x_n\ |$ 从某项起有$x_n\geqslant 0$(或$x_n\leqslant 0$),且 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ , 那么$a\geqslant 0$( 或$a\leqslant 0$).

**收敛数列与其子数列之间的关系**

如果数列 $x_n$ 收敛于 $a$, 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 $a$

**注 1.1.7**

需要注意的是, 证明数列极限存在一般通过证明数列有界并且单调, 证明有界则一般通过放缩法. 但是证明数列发散则一般通过一下两种方法:1. 至少一个子数列发散.2. 两个子数列收敛, 但是收敛值不同.

## 1.2 函数的极限

### 1.2.1 超实数系

**定义 1.2.1: 超实数系的概念**

超实数 (Hyperreal number) 是一个包含实数以及无穷大和无穷小的域，它们的绝对值分别大于和小于任何正实数。

**注 1.2.1**

- 超实数集**是为了严格处理无穷量 (无穷大量和无穷小量) 而提出的**。
- 超实数集, 或称为非标准实数集, 记为 $^*\mathbb{R}$, 是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个扩张.

### 1.2.2 邻域

[1]

**定义 1.2.2: 邻域的相关概念**

- $\delta$ 邻域: 设 $x_0$ 是数轴上一个点,$\delta$ 是某一正数, 则称 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域, 记作 $U(x_0,\delta)$, 即:

$$U(x_0,\delta)=\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x|\,|x-x_0|<\delta\}$$

- 去心 $\delta$ 邻域: 定义点 $x_0$ 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$
- 左, 右 $\delta$ 邻域:$\{x|0<x-x_0<\delta\}$ 称为点 $x_0$ 的右 $\delta$ 邻域, 记作 $U^+(x_0,\delta)$;$\{x|0<x_0-x<\delta\}$ 称为点 $x_0$ 的左 $\delta$ 邻域, 记作 $U^-(x_0,\delta)$.

### 1.2.3 函数极限的定义

函数极限的定义主要分为自变量趋于有限值 $(x\to x_0)$ 时的极限和自变量趋于无穷大时函数的极限 $(x\to\infty)$

[1]邻域与区间不同, 邻域属于区间的范畴. 但是邻域通常表示“一个局部位置”. 比如“点 $x_0$ 的 $\delta$”邻域, 可以理解为“点 $x_0$”的附近, 而区间是明确指出在实数系下的范围

**自变量趋于有限值时的函数极限**

**定义 1.2.3: 当自变量趋于有限值时函数极限定义**

设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 $A$, 对于任意给定的正数 $\varepsilon$**(不论它多么小)**[a], 总存在正数 $\delta$, 使得当 $x$ 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 $A$ 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限, 记作:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 f(x)\to A(当 x\to x_0)$$

其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, 当 0<|x-x_0|<\delta 时, 有 |f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 在证明中，这两句是白给，直接写。后面的才是关键。

[a] $\varepsilon$ 用于衡量 $|f(x)-A|$ 的值有多小

**注 1.2.2**

在函数极限中 $x\to\infty$ 指的是 $|x|\to\infty$, 需要 $x$ 趋于正无穷和负无穷, 但在数列中的 $n\to\infty$ 是 $n\to+\infty$

**单侧极限**

**定义 1.2.4: 单侧极限的定义**

若当 $x\to x_0^-$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 $A$, 则常数 $A$ 叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**, 记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A 或 f(x_0^-)=A.$$

若当 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 $A$, 则常数 $A$ 叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**, 记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A 或 f(x_0^+)=A$$

**题目 2.** 已知 $\lim_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$存在, 求$a$的值

**解答.** 由于存在 arctan 与 $|x|$ 函数, 则对于 0 点的极限值需要分左右进行计算.
$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to 0^-} a\arctan\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}=-\frac{\pi}{2}a+\frac{1}{\mathrm{e}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}a\arctan\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}$ 若极限存在,则 $a=\frac{1-e^2}{\pi e}$

**自变量趋于无穷大时函数的极限**

**定义 1.2.5: 自变量趋于无穷大时函数极限定义**

设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 $A$, 对于任意给定的正数 $\varepsilon$.(不论它多么小), 总存在正数 $\delta$, 使得当 $x$ 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 $A$ 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限, 记作:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{或}f(x)\to A(\text{当}x\to x_0)$$

其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时},\text{有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 在证明中，这两句是白给，直接写。后面的才是关键。

需要注意的是趋向的值不同时,$\varepsilon-N$ 写法不同, 不能照抄. 其 $\varepsilon-N$ 的表达为如下表格:

| | $f(x)\to A$ | $f(x)\to\infty$ | $f(x)\to+\infty$ | $f(x)\to-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x\to x_0$ | $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $\mid f(x)-A\mid<\varepsilon.$ | $\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $\mid f(x)\mid>M$ | $\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$时, 即有 $f(x)>M.$ | $\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$ |
| $x\to x_0^+$ | $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\mid f(x)-A\mid<\varepsilon.$ | $\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\mid f(x)\mid>M.$ | $\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $f(x)>M.$ | $\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0<x-x_0<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$ |
| $x\to x_0^-$ | $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\mid f(x)-A\mid<\varepsilon.$ | $\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\mid f(x)\mid>M.$ | $\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)>M$ | $\forall M>0,\exists\delta>0,$ 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$ |

继续下一页

| | $f(x)\to A$ | $f(x)\to\infty$ | $f(x)\to+\infty$ | $f(x)\to-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x\to\infty$ | $\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使当 $\mid x\mid> X$ 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon.$ | $\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 $\mid x\mid> X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$ | $\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 $\mid x\mid> X$ 时, 即有 $f(x)>M$ | $\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 \|x\|>X 时, 即有 $f(x)<-M.$ |
| $x\to+\infty$ | $\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使当 x>X 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon.$ | $\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x>X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$ | $\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x>X$时, 即有 $f(x)>M.$ | $\forall M>0,\exists X>0,$ 使当 x>X 时, 即有 $f(x)<-M$ |
| $x\to-\infty$ | $\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$ 时, 即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon.$ | $\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$ 时, 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$ | $\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$ 时, 即有 $f(x)>M$ | $\forall M>0,\exists X>0,$ 使当$x<-X$时, 即有 $f(x)<-M.$ |

**注 1.2.3: 上表的部分解释**

- 以 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ 为例: 不管 $f(x)$ 与 $A$ 的距离多近 $(\forall\varepsilon>0)$, 总有 $x$ 不断靠近 $x_0$, 使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$.
- 以 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 为例: 不管 $M$ 多大, 总有当 $x>\infty$ 时, 使得 $|f(x)>M|$, 即满足 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

### 1.2.4　函数极限的性质

**唯一性**

**定理 1.2.4**

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 那么极限唯一

**注 1.2.5: 关于唯一性的说明**

- 对于 $x\to\infty$, 意味着 $x\to+\infty$ 且 $x\to-\infty$
- 对于 $x\to x_0$, 意味着 $x\to x_0^+$ 且 $x\to x_0^-$
  对于上述问题, 我们称为自变量取值的"双向性". 以下有一些常见的问题:
  - $\lim_{x\to\infty}e^x$ 不存在, $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{|x|}$ 不存在, $\lim_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在, $\lim_{x\to x_0}[x]$ 不存在.
  - 其不存在的原因均为分段函数分段点极限表达式不同, 需要分别求左右极限.

**注 1.2.6: 极限存在的充要条件**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A, \text{且} \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A^a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x), \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0(\text{无穷小量}\alpha(x)=0)^b$$

[a] 左右极限都存在且相等

[b] 对于此概念, 如果引入超实数系的解释应为 $A$ 是 $f(x)$ 的标准实数部分, 而 $f(x)$ 的值是超实数系下的值, 因此其值应为 $f(x)=A+\alpha(x)$

**注 1.2.7: 极限不存在的情况**

- **函数在该点附近趋于无穷**
- 函数在该点的左右极限只存在一个, 或两者都存在但不相等
- 函数在该点附近不停地震荡
- 该点是函数无定义点的聚点

**注 1.2.8: 一些重要的函数极限问题**

以下类型的函数由于自变量取值的双向性因此需要进行特殊讨论:

- $\lim_{x\to\infty} e^x$:$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty, \lim_{x\to-\infty} e^x=0$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$:$\lim_{x\to 0^+}=\frac{\sin x}{x}=1$,$\lim_{x\to 0^-}=\frac{\sin x}{-x}=-1$
- $\lim_{x\to\infty}\arctan x$:$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$,$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x\to 0}[x]$:$\lim_{x\to 0^+}[x]=0, \lim_{x\to 0^-}[x]=-1$

### 局部有界性

**定理 1.2.9**

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时[a], 有 $|f(x)|\le M$.

[a] 对局部有界性的描述需要指明是在那个区间上

**注 1.2.10: 局部有界性的性质**

- 极限存在必有界, 有界函数极限不一定存在.
- 若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.
- **若 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内为连续函数, 且 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内必定有界.**
- 有界函数与有界函数的和, 差, 积仍为有界函数[a].

[a] 商不是有界函数, 因为:$y_1=1, y_2=0, \frac{y_1}{y_2}=\infty$

**题目 3.** 在下列区间内, 函数 $f(x)=\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$ 有界的是:
A:(-2,1)　　B:(-1,0)　　C:(1,2)　　D:(2,3)

**解答.** 又题意可知, 函数的分段点为 $x=3,0,1$, 对上述三点求极限, 分析可得, 当 $x=3,1$ 时, 函数极限为 $\infty$, 因此函数在上述两点的极限不存在, 因此根据局部有界性的性质可得, 含这两个点的区间无界, 因此排除 A,C,D. 答案为 B.

**局部保号性**

**定理 1.2.11**

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$(或 $A<0$), 那么存在常数 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>0$( $f(x)<0$)[a].
如果在 $x_0$ 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$), 而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 那么 $A\leqslant 0$ 或 $(A\leq 0)$[b].

[a] 如果函数在 $x_0$ 附近的极限值为正, 那么 $x_0$ 附近的函数值为正
[b] 如果函数在 $x_0$ 附近的函数值 $\leq 0$, 那么 $x_0$ 此处的极限值 $\leq 0$

对上述定理中, 为什么一个可以等于 0, 一个不能等于 0? 其解释如下: 如果第一个定理中 $A\leqslant 0, f(x)\leqslant 0$, 那么以函数 $f(x)=x^2$ 为例, 虽然 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, 但是邻域内的函数值都大于 0. 对于第二个定理中如果 $f(x)<0, A<0$, 那么以函数 $f(x)=-x^2$ 为例, 虽然邻域内的函数值都小于 0, 但是 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

**注 1.2.12: 局部保号性的证明**

*证明.* 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A>0$, 所以, 取 $\varepsilon=\frac{A}{2}>0$, $\exists\delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}\Rightarrow f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0.$$

□

由上述证明可得如下推论

**推论 1.2.13**

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0(A \neq 0)$, 那么就存在 $x_0$ 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$, 当 $x \in U^{\circ}(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

**函数极限与数列极限的关系 (海涅定理)**

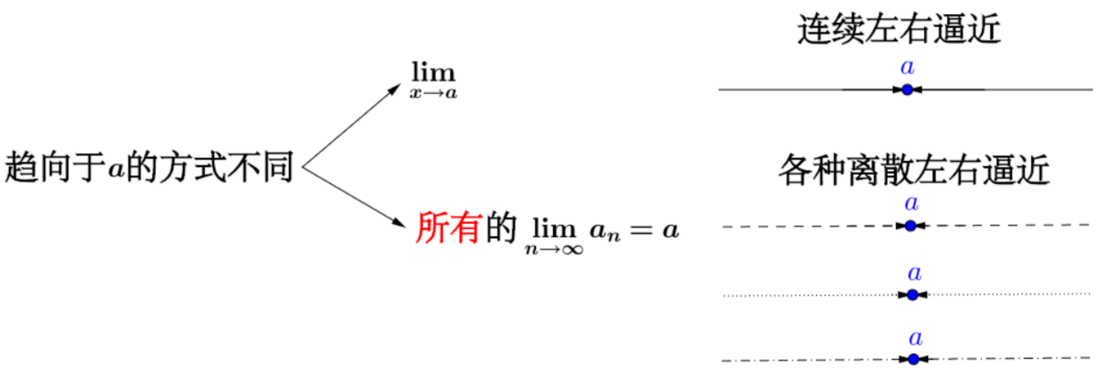
**定理 1.2.14**

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ 存在的充要条件是: 对属于函数 $f(x)$ 定义域的任意数列, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,$a_n$ 不等于 $a$, 有 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$.

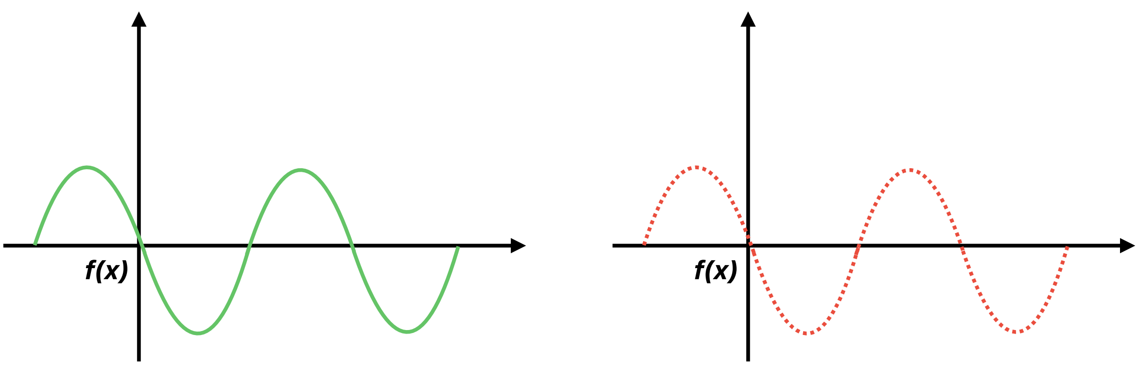
把这个定理简化一下, 主要意思就是

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{所有的} \lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{有} \lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$$

其不同之处在于是离散的趋近还是连续的趋近



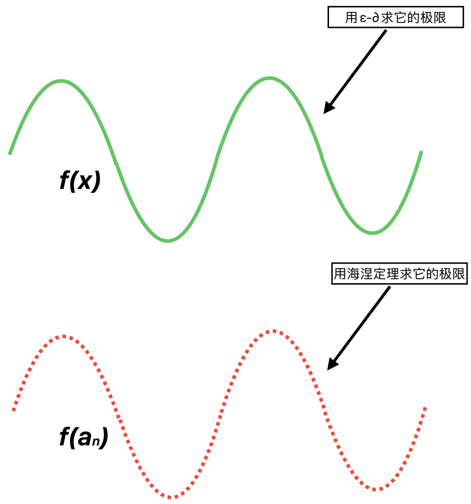

除此之外,$f(x)$ 和 $f(a_n)$ 的函数图像如下所示




(a) 函数 $f(x)$ 图像　　(b) 函数 $f(a_n)$ 图像

图 1.1: $f(x)$ 与 $f(a_n)$ 函数图像

$f(a_n)$ 其实是 $f(x)$ 的抽样




需要注意的是, 是所有的数列（抽样）才能完全代表整体. 不能说我选了某个数列有极限就代表函数有极限.

总结:海涅定理表述了离散与连续、数列极限与函数极限的关系.

## 1.3　无穷小与无穷大

### 1.3.1　无穷小

**定义 1.3.1: 无穷小的定义**

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷小.

$f(x)$ **是可以本身为** 0 **或者无限趋近于零, 其中** 0 **可以作为无穷小唯一常数**.

**注 1.3.1: 无穷小与函数极限的关系 (脱帽法)**

$\lim_{x \to \bullet} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x \to \bullet} f(x)$ 为超实数值，其实数部分为 $A$，函数 $f(x)$ 的函数值为 $A + \alpha$

### 1.3.2　无穷小的性质

1 有限个无穷小的和是无穷小[2]

证明. 设 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 为无穷小量。则 $0 \leqslant |\alpha_1 + \alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|$,$|\alpha_1| + |\alpha_2|$ 的极限为 0。证明完毕。 □

[2]无穷个无穷小的和不一定是无穷小，如 $\lim_{n\to\infty} = (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{n+n}) = \ln 2$

2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小[3]

**证明.** $|\alpha_1| \leqslant M$,$\alpha_2$ 是无穷小量。那么 $0 \leqslant |\alpha_1 \times \alpha_2| = |\alpha_1| \times |\alpha_2| \leqslant M \times |\alpha_2|$ 证明完毕。 □

3 有限个无穷小的乘积是无穷小[4]

### 1.3.3 无穷小的比阶

**定义 1.3.2**

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么就说 $\beta$ 是比 $\alpha$ 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么就说 $\beta$ 是比 $\alpha$ 低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么就说 $\beta$ 与 $\alpha$ 是同阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$,$k > 0$, 那么就说 $\beta$ 是关于 $\alpha$ 的 $k$ 阶无穷小[a];
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么就说 $\beta$ 与 $\alpha$ 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$

[a]不是相等，超实数系下没有加减运算，只可以进行替换运算

前三个定义解释:$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ 是指分子趋于 0 的速度比分母快,$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ 是指分子趋于 0 的速度比分母慢,$\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ 是指趋于 0 的速度一样.

同时需要注意的是, **并不是任意两个无穷小都可进行比阶的**. 例如, 当 $x \to 0$ 时,$x \sin \frac{1}{x}$ 与 $x^2$ 虽然都是无穷小, 但是却不可以比阶, 也就是说既无高低阶之分, 也无同阶可言, 因为 $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 其值为 $\infty$ 和 0。

[3]无界函数 × 无穷小量不一定是无穷小，如 $\lim_{x\to\infty} x \times \frac{1}{x} = 1$

[4]这个地方虽然张宇老师给出了证明，但是好像存在一定的争议性

### 1.3.4 无穷大

**定义 1.3.3: 无穷大的定义**

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于来一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 $M$(不论它多么大), 总存在正数 $\delta$(或数 $X$), 只要 $x$ 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)|>M$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$[a]) 时的无穷大.[b] 其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时},\text{有}|f(x)|>M.$$

[a]等价于 $x\to-\infty$ 同时 $x\to+\infty$

[b]**无穷大一定无界，但无界不一定是无穷大量**。与无穷小相同，都是一个极限过程，因此无穷大也是一个极限，所以无界不一定是无穷大量

**题目 4.** 证明 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$

**解答.** $\forall M>0$ 令 $\delta=\frac{1}{4M}>0$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 即 $0<|x-1|<\frac{1}{4M}$ 时,$|x-1|<\frac{1}{M}$, 所以 $\frac{1}{|x-1|}>M$ 这就证明了 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$

**注 1.3.2: 无穷大与无穷小的关系**

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x)\neq0$, 那么存在常数 $\frac{1}{f(x)}$

### 1.3.5 无穷大的比阶

- 当 $x\to+\infty$ 时,$\ln^a x\ll x^\beta\ll a^x$,其中$\alpha>0,\beta>0,a>1$.[5]
- 当 $n\to\infty$ 时,$\ln^a n\ll n^\beta\ll a^n\ll n!\ll n^n$,其中$\alpha>0,\beta>0,a>1$.

### 1.3.6 无穷大的性质

- 两个无穷大量的积仍未无穷大量
- 无穷大量与有界变量的和仍是无穷大量

[5]由洛必达公式证明

# 1.4　函数极限的运算

## 1.4.1　极限的四则运算法则

如果极限不存在，那么极限属于超实数系的范畴，在超实数系下不可以进行代数运算，只可以进行替换运算。但是如果极限均存在，那么可以进行代数计算。

若 $\lim f(x) = A$,$\lim g(x) = B$, 那么

- $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k\lim f(x) \pm l\lim g(x) = kA \pm lB$, 其中 $k, l$ 为常数
- $\lim[f(x) \bullet g(x)] = \lim f(x) \bullet \lim g(x) \equiv A \bullet B$, 特别的，若 $\lim f(x)$ 存在,$n$ 为正整数，则 $\lim[f(x)]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}(B \neq 0)$

**注 1.4.1: 常用结论**

- 存在 $\pm$ 不存在 $=$ 不存在 (只有这一个是不存在，其余都是不一定或者存在)
- 不存在 $\pm$ 不存在 $=$ 不一定[a]
- 存在 $\times(\div)$ 不存在 $=$ 不一定
- 不存在 $\times(\div)$ 不存在 $=$ 不一定
- 若 $\lim f(x) = A \neq 0$, 则 $\lim f(x)\lim g(x) = A \times \lim g(x)$

[a]反例：$\lim_{x\to 0}(\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}) = 0$

**题目 5.** **若** $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$**, 则** $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$

证明. $g(x) = \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$。求极限得 $\lim g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\lim f(x)}{\lim \frac{f(x)}{g(x)}} = 0$. 证明完毕[6]。 □

## 1.4.2　洛必达法则

**定义 1.4.1**

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0(\infty)$
- $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x_0$ 的某去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或$\infty$)

则 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

需要注意的是使用过洛必达法则之后的极限必须存在，即 $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 必须存在.

[6]此证明为结论，经常使用

**证明.** 以 $\lim_{x\to 0}=\frac{x^2-\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 为例, 可以看到此时结果是震荡的, 因此函数极限不存在, 但是显然是错误的. 正确的方法是这样的 $\lim_{x\to x_0}=\frac{x^2-\sin\frac{1}{x}}{x}=x\sin\frac{1}{x}$ □

### 1.4.3 泰勒公式

当 $x\to 0$ 时, 有以下结论

| | |
|---|---|
| $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$ | $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$ |
| $\arcsin x=x+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$ | $\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ |
| $\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ | $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ |
| $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$ | $(1+x)^a=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$ |

**注 1.4.2: 泰勒公式使用注意事项**

- 泰勒公式是在一点处展开, 函数必须在那一点处 n 阶倒数存在
- 分子分母上下同阶

### 1.4.4 夹逼准则

**定理 1.4.3: 数列极限存在准则**

如果数列 $\{|x_n|\},\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

- 从某项开始, 即 $\exists n_0\in N_+(\text{即}n\to\infty)$, 当 $n>n_0$ 时, 有
$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$$
- $\lim_{n\to\infty}y_n=a,\lim_{n\to\infty}z_n=a$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$

现在将上述数列极限存在准则推广至函数极限

**定理 1.4.4: 函数极限存在准则**

如果

- 当 $x\in U^\circ(x_0,r)$( 或 $|x|>M$) 时
$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$
- $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)}g(x)=A,\lim_{x\to x_0(x\to\infty)}h(x)=A$

那么 $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)}f(x)$ 存在, 且等于 $A$.

定理 2.4.1 和定理 2.4.2 称为**夹逼准则**

### 1.4.5 单调有界准则

**定理 1.4.5: 数列的单调有界准则**

单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在

**定理 1.4.6: 函数的单调有界准则**

设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 的左极限 $f(x_0^-)$ 一定存在

### 1.4.6 柯西极限存在准则

该准则表示, 数列 $x_n$ 收敛的**充分必要条件**是: 该数列中的元素随着序数的增加而愈发靠近, 即足够靠后的任意两项都无限接近.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in N^+, 当m > N, n > N时.总有|x_n - x_m| < \varepsilon$$

### 1.4.7 极限存在准则的两个应用 (两个重要极限)

$$\lim_{\square\to\infty}(1+\frac{1}{\square})^{\square} = e$$

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square} = 1$$

### 1.4.8 数列极限的运算法则

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则

- $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$
- 若 $b \neq 0, y_n \neq 0$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

上述运算规则可推广至有限个数列的情况

### 1.4.9 函数极限的运算法则

**定理 1.4.7**

如果 $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$, 而 $\lim\varphi(x) = A$, $lim\psi(x) = B$ , 那么 $A \geqslant B$

**定理 1.4.8: 复合函数极限运算法则**

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 $x_0$ 的某去心领域内有定义，若 $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$,$\lim_{u\to u_0} f(u)=A$, 且存在 $\delta_0>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

**引理 1.4.9: 常用的结论**

- $\lim f(x)=A\neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x)=A\lim g(x)$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在,$\lim g(x)=0 \Rightarrow \lim f(x)=0$

## 1.4.10　函数极限的计算

### 无穷大与无穷小的关系

根据定理 1.3.2 可以用于函数极限的计算

### 单调有界准则

前面已经赘述

**定理 1.4.10: 数列的单调有界准则**

单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在

**定理 1.4.11: 函数的单调有界准则**

设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 的左极限 $f(x_0^-)$ 一定存在

### 等价无穷小替代

关于等价无穷小, 有以下两个定理

**定理 1.4.12**

$\beta$ 与 $\alpha$ 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha)$$

**定理 1.4.13**

设 $\alpha \sim \tilde{\alpha}$,$\beta \sim \tilde{\beta}$, 且 $\lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

定理 2.5.2 表明, 求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 但是需要遵循以下代换原则

- 乘除关系可以换: 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$
- 加减关系一定条件下可以换
  - 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$, 则$\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$
  - 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$, 则$\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$

加减关系代换准则证明如下:

*证明.*

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha_1 - \beta_1} = \lim \frac{\beta(\frac{\alpha}{\beta} - 1)}{\beta_1(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - 1)} = 1$$

□

当 $x \to 0$ 时, 有

$$\boxed{\begin{aligned} & x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \\ & \quad \sim \ln(1+x) \\ & \quad \sim e^x - 1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & (1+x)^a \sim 1 + ax \\ & a^x - 1 \sim x \ln a \end{aligned}}$$

**注 1.4.14: 上述结论的推广**

当 $x \to 0$ 时, 若 $(1+x)^a - 1 \sim ax$, 则 $\alpha(x) \to 0, \alpha(x)\beta(x) \to 0$, 则

$$[1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}x^2 \sim 1 - \cos x \sim \sec x - 1 \sim x - \ln(1+x)}$$

$$\boxed{\frac{1}{6}x^3 \sim x - \sin \sim \arcsin x - x}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}x^3 \sim x-\arctan x \sim \tan x - x}$$

**幂指函数求极限**

**定义 1.4.2**

一般地，对于形如 $u(x)^{v(x)}\,(u(x)>0, u(x)\neq 1)$ 的函数 (通常称为幂指函数), 如果

$$\lim u(x)=a>0, \lim v(x)=b$$

那么

$$\lim u(x)^{v(x)}=a^b$$

**利用基本极限求极限**

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim\limits_{\square\to\infty}(1+|\square|)^{\frac{1}{\square}}=e^{|\square|\frac{1}{\square}} & \lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 & \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0) \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a & \end{array}}$$

**夹逼准则求极限**

- 主要通过放缩来求极限
- 常用的结论有: 若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+...+a_m^n}$, 其中 $a_i>0(i=1,2,3,...,m)$, 令 $\max a_i=a$, 则 $\sqrt[n]{a^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{ma^n}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a, \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m\cdot a^n}=a$, 则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a$

**定积分求极限**