

第一章 极限

1.1 数列的极限

1.1.1 数列极限的定义

定义 1.1.1

设 $\{x_n\}$ 为一数列, 若存在常数 a , 对于任意的 $\varepsilon > 0$ (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

该定义的 $\varepsilon - N$ 语言描述是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \text{ 正整数 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

^a $\varepsilon - N$ 几何意义: 对于点 a 的任何 ε 邻域即开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 一定存在 N , 当 $n > N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内, 而只有有限个 (最多有 N 个) 在区间之外.

在上面的定义中, $\varepsilon > 0$ 的 ε 任意性是非常重要的, 只有这样才能表示出无限接近的意义. 总存在正整数 N , 使得 $n > N$ 这个条件用于表达 $n \rightarrow \infty$ 的过程.

注 1.1.1

- 数列的极限值与数列的前有限项无关, 只与后面无穷项有关
- 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则其任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ^a
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a$
- 关于数列 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 的结论
 - 单调增加
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

^a此条定理提供了一个判断数列发散的方法: 1. 至少一个子数列发散. 2. 两个子数列收敛, 但是收敛值不同.

题目 1. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$

证明. 已知数列 a_n 极限为 A , 那么 $|a_n - A| < \varepsilon$, 由不等式1可得, $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$. \square

题目 1 的注记.

1. 此命题反过来则错误, 如取 $a_n = (-1)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1$. 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 不存在.
2. 在本题中若 $A = 0$, 则 $||a_n| - |A|| = ||a_n| - 0| = |a_n - 0|$, 即有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0,$$

此结论常用, 即若要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 可转换为证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, 由于 $|a_n| \geq 0$, 若使用了夹逼准则, 只需证明 $|a_n| \leq 0$ 即可

3. 此结论对函数亦成立, 即若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$.

1.1.2 收敛数列的性质

唯一性

定理 1.1.2

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一

有界性

定理 1.1.3

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界^a.

^a如果数列有界, 但是不一定存在极限, 如数列 $(-1)^n$

保号性

定理 1.1.4

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > b$ (或 $a < b$), 那么存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > b$ (或 $x_n < b$)
如果数列 $|x_n|$ 从某项起有 $x_n \geq b$ (或 $x_n \leq b$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 那么 $a \geq b$ (或 $a \leq b$)^a.

^a其中 b 可以为任意实数, 常考 $b=0$ 的情况

1.2 函数的极限

1.2.1 超实数系

定义 1.2.1: 超实数系的概念

超实数 (Hyperreal number) 是一个包含实数以及无穷大和无穷小的域, 它们的绝对值分别大于和小于任何正实数。

注 1.2.1

- 超实数集是为了严格处理无穷量 (无穷大量和无穷小量) 而提出的。
- 超实数集, 或称为非标准实数集, 记为 ${}^*\mathbb{R}$, 是实数集 \mathbb{R} 的一个扩张。

1.2.2 邻域

1

定义 1.2.2: 邻域的相关概念

- δ 邻域: 设 x_0 是数轴上一个点, δ 是某一正数, 则称 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即:

$$U(x_0, \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x | |x - x_0| < \delta\}$$

- 去心 δ 邻域: 定义点 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$
- 左, 右 δ 邻域: $\{x | 0 < x - x_0 < \delta\}$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域, 记作 $U^+(x_0, \delta)$; $\{x | 0 < x_0 - x < \delta\}$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域, 记作 $U^-(x_0, \delta)$.

1.2.3 函数极限的定义

函数极限的定义主要分为自变量趋于有限值 ($x \rightarrow x_0$) 时的极限和自变量趋于无穷大时函数的极限 ($x \rightarrow \infty$)

¹邻域与区间不同, 邻域属于区间的范畴. 但是邻域通常表示“一个局部位置”. 比如“点 x_0 的 δ ”邻域, 可以理解为“点 x_0 ”的附近, 而区间是明确指出在实数系下的范围

自变量趋于有限值时的函数极限

定义 1.2.3: 当自变量趋于有限值时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小)^a, 总存在正数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0)$$

其 $\varepsilon - N$ 语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 在证明中, 这两句是白给, 直接写. 后面的才是关键。

^a ε 用于衡量 $|f(x) - A|$ 的值有多小

注 1.2.2

1. 在函数极限中 $x \rightarrow \infty$ 指的是 $|x| \rightarrow \infty$, 需要 x 趋于正无穷和负无穷, 但在数列中的 $n \rightarrow \infty$ 是 $n \rightarrow +\infty$
2. 函数的极限值只与邻域内的函数值有关, 而与该点的函数值无关.

单侧极限

定义 1.2.4: 单侧极限的定义

若当 $x \rightarrow x_0^-$ 时, $f(x)$ 无限接近于某常数 A , 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

若当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 无限接近于某常数 A , 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A$$

题目 2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right]$ 存在, 求 a 的值

解答. 由于存在 \arctan 与 $|x|$ 函数, 则对于 0 点的极限值需要分左右进行计算.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \arctan \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = -\frac{\pi}{2}a + \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} a \arctan \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}a + e$$

若极限存在, 则

$$a = \frac{1-e^2}{\pi e}$$

题目 2 的注记. 由于自变量趋向的双向性, 以下类型的函数因此需要进行特殊讨论:

- 形如 $f(x) = \max\{h(x), g(x)\}$ 此类函数也需要注意在函数变化点的自变量取值问题
- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x : \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|} : \lim_{x \rightarrow 0^+} = \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} = \frac{\sin x}{-x} = -1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x : \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} [x] : \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 1.2.5: 自变量趋于无穷大时函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0)$$

其 $\varepsilon - N$ 语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 在证明中, 这两句是白给, 直接写。后面的才是关键。

需要注意的是趋向的值不同时, $\varepsilon - N$ 写法不同, 不能照抄。其 $\varepsilon - N$ 的表达为如下表格:

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow x_0^+$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow x_0^-$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$

继续下一页

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow \infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x > X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x > X$ 时, 即有 $ f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x > X$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x > X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$
$x \rightarrow +\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \rightarrow -\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使 当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$

注 1.2.3: 上表的部分解释

- 以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 为例: 不管 $f(x)$ 与 A 的距离多近 ($\forall \varepsilon > 0$), 总有 x 不断靠近 x_0 , 使得 $|f(x) - A| < \varepsilon$.
- 以 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 为例: 不管 M 多大, 总有当 $x > \infty$ 时, 使得 $|f(x)| > M$, 即满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

1.2.4 函数极限的性质

唯一性

定理 1.2.4

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么极限唯一

注 1.2.5: 关于唯一性的说明

- 对于 $x \rightarrow \infty$, 意味着 $x \rightarrow +\infty$ 且 $x \rightarrow -\infty$
- 对于 $x \rightarrow x_0$, 意味着 $x \rightarrow x_0^+$ 且 $x \rightarrow x_0^-$

对于上述问题, 我们称为自变量取值的“双向性”. 以下有一些常见的问题:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} [x]$ 不存在.
- 其不存在的原因均为分段函数分段点极限表达式不同, 需要分别求左右极限.

注 1.2.6: 极限存在的充要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A^a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \text{ (无穷小量 } \alpha(x) = 0)^b$$

^a左右极限都存在且相等

^b对于此概念, 如果引入超实数系的解释应为 A 是 $f(x)$ 的标准实数部分, 而 $f(x)$ 的值是超实数系下的值, 因此其值应为 $f(x) = A + \alpha(x)$

注 1.2.7: 极限不存在的情况

- 函数在该点附近趋于无穷
- 函数在该点的左右极限只存在一个, 或两者都存在但不相等
- 函数在该点附近不停地震荡
- 该点是函数无定义点的聚点

局部有界性

定理 1.2.8

若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在^a, 则 $f(x)$ 在点 x_0 某去心邻域内有界.

^a对局部有界性的描述需要指明是在那个区间上

注 1.2.9: 局部有界性的性质

- 极限存在必有界, 有界函数极限不一定存在.
- 若 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有界.
- 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内为连续函数, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内必定有界.
- 有界函数与有界函数的和, 差, 积仍为有界函数^a.

^a商不是有界函数, 因为: $y_1 = 1, y_2 = 0, \frac{y_1}{y_2} = \infty$

题目 3. 在下列区间内, 函数 $f(x) = \frac{x \sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$ 有界的是:

A: $(-2, 1)$ B: $(-1, 0)$ C: $(1, 2)$ D: $(2, 3)$

解答. 又题意可知, 函数的分段点为 $x = 3, 0, 1$, 对上述三点求极限, 分析可得, 当 $x = 3, 1$ 时, 函数极限为 ∞ , 因此函数在上述两点的极限不存在, 因此根据局部有界性的性质可得, 含这两个点的区间无界, 因此排除 A, C, D. 答案为 B.

局部保号性

定理 1.2.10

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)^a.

如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \leq 0$ 或 $(A \geq 0)$ ^b.

^a如果函数在 x_0 附近的极限值为正, 那么 x_0 附近的函数值为正

^b如果函数在 x_0 附近的函数值 ≤ 0 , 那么 x_0 此处的极限值 ≤ 0

对上述定理中, 为什么一个可以等于 0, 一个不能等于 0? 其解释如下: 如果第一个定理中 $A \leq 0, f(x) \leq 0$, 那么以函数 $f(x) = x^2$ 为例, 虽然 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 但是邻域内的函数值都大于 0. 对于第二个定理中如果 $f(x) < 0, A < 0$, 那么以函数 $f(x) = -x^2$ 为例, 虽然邻域内的函数值都小于 0, 但是 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

注 1.2.11

由保号性可推出保序性: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则:

1. 若 $A > B \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > g(x)$.
2. 若 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq g(x) \Rightarrow A \geq B$.

题目 4. 局部保号性的证明:

证明. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 所以, 取 $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$, $\exists \delta > 0$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

□

由上述证明可得如下推论

推论 1.2.12

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ ($A \neq 0$), 那么就存在 x_0 的某一去心邻域 $\dot{U}(x_0)$, 当 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

函数极限与数列极限的关系 (海涅定理)

定理 1.2.13

设 $f(x)$ 在 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在 \Leftrightarrow 对任何 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$), 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 存在.

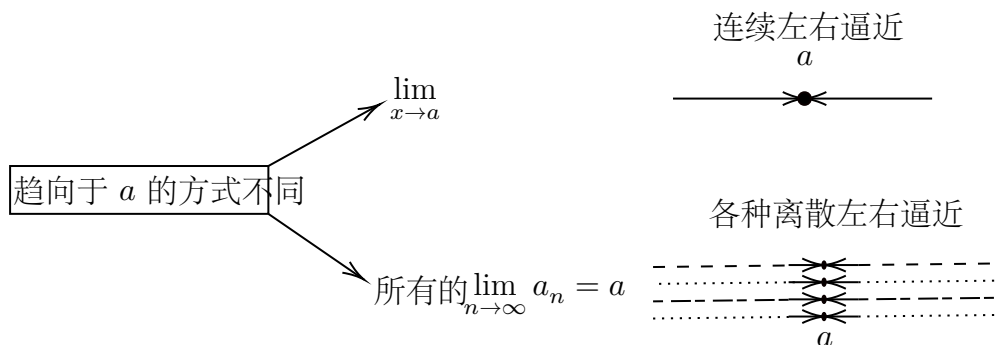
把这个定理简化一下, 主要意思就是

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

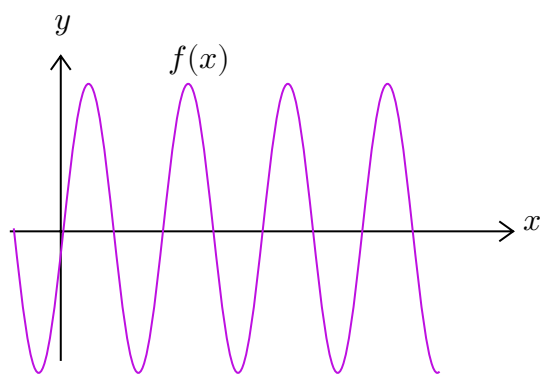
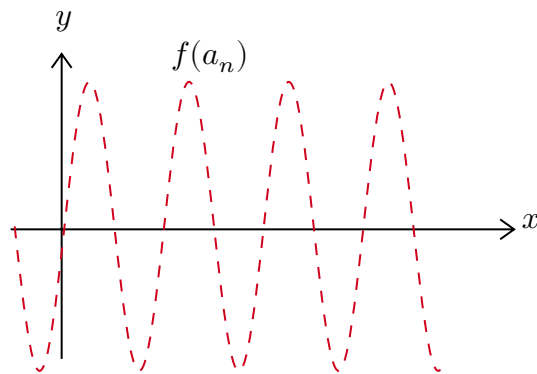
$$\Updownarrow$$

$$\text{所有的 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$$

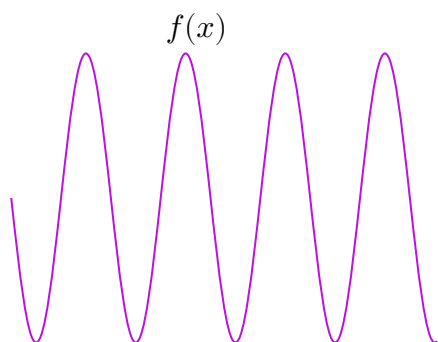
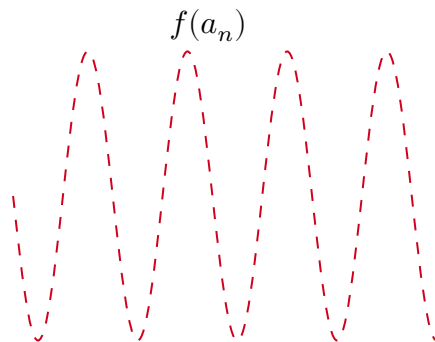
其不同之处在于是离散的趋近还是连续的趋近



除此之外, $f(x)$ 和 $f(a_n)$ 的函数图像如下所示

函数 $f(x)$ 函数 $f(a_n)$

如上图所示 $f(a_n)$ 其实是 $f(x)$ 的抽样

用 $\varepsilon - \delta$ 求它的极限

用海涅定理求它的极限

需要注意的是, 是所有的数列 (抽样) 才能完全代表整体. 不能说选了某个数列有极限就代表函数有极限.

总结: 海涅定理表述了离散与连续、数列极限与函数极限的关系.

1.3 无穷小与无穷大

1.3.1 无穷小

定义 1.3.1: 无穷小的定义

如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小.

$f(x)$ 是可以本身为 0 或者无限趋近于零, 其中 0 可以作为无穷小唯一常数.

注 1.3.1: 无穷小与函数极限的关系 (脱帽法)

$\lim_{x \rightarrow \bullet} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x \rightarrow \bullet} f(x)$ 为超实数值, 其实数部分为 A , 函数 $f(x)$ 的函数值为 $A + \alpha$

1.3.2 无穷小的性质

1 有限个无穷小的和是无穷小²

证明. 设 α_1 和 α_2 为无穷小量. 则 $0 \leq |\alpha_1 + \alpha_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2|$, $|\alpha_1| + |\alpha_2|$ 的极限为 0. 证明完毕. \square

2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小³

证明. $|\alpha_1| \leq M, \alpha_2$ 是无穷小量. 那么 $0 \leq |\alpha_1 \times \alpha_2| = |\alpha_1| \times |\alpha_2| \leq M \times |\alpha_2|$ 证明完毕. \square

3 有限个无穷小的乘积是无穷小⁴

1.3.3 无穷小的比阶

定义 1.3.2

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么就说 β 与 α 是同阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$, 那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小^a;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么就说 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$

^a不是相等, 超实数系下没有加减运算, 只可以进行替换运算

前三个定义解释: $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ 是指分子趋于 0 的速度比分母快, $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ 是指分子趋于 0 的速度比分母慢, $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ 是指趋于 0 的速度一样.

同时需要注意的是, 并不是任意两个无穷小都可进行比阶的. 例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sin \frac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小, 但是却不可以比阶, 也就是说既无高低阶之分, 也无同阶可言, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 其值为 ∞ 和 0.

1.3.4 无穷小的运算

⁵ 设 m, n 为无穷小, 则

1. $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min\{m, n\}$
2. $o(x^m) \bullet o(x^n) = o(x^{m+n}), x^m \bullet o(x^n) = o(x^{m+n})$
3. $o(x^m) = o(kx^m) = k \bullet o(x^m), k \neq 0$

²无穷个无穷小的和不一定是无穷小, 如 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{n+n}) = \ln 2$

³无界函数 \times 无穷小量不一定是无穷小, 如 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \times \frac{1}{x} = 1$

⁴这个地方虽然张宇老师给出了证明, 但是好像存在一定的争议性

⁵此处多用于泰勒公式的应用中, 会对上述高阶无穷小的运算提出要求

1.3.5 无穷大

定义 1.3.3: 无穷大的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M (不论它多么大), 总存在正数 δ (或数 X), 只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)| > M$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty^a$) 时的无穷大.^b 其 $\varepsilon - N$ 语言为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x)| > M.$$

^a等价于 $x \rightarrow -\infty$ 同时 $x \rightarrow +\infty$

^b无穷大一定无界, 但无界不一定是无穷大量. 与无穷小相同, 都是一个极限过程, 因此无穷大也是一个极限, 所以无界不一定是无穷大量

题目 5. 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

解答. $\forall M > 0$ 令 $\delta = \frac{1}{4M} > 0$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 即 $0 < |x - 1| < \frac{1}{4M}$ 时, $|x - 1| < \frac{1}{M}$, 所以 $\frac{1}{|x-1|} > M$ 这就证明了 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

1.3.6 无穷大的比阶

- 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\ln^\alpha x \ll x^\beta \ll a^x$, 其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.⁶
- 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$, 其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.

1.3.7 无穷大的性质

- 两个无穷大量的积仍未无穷大量
- 无穷大量与有界变量的和仍是无穷大量

1.3.8 无穷大与无界变量的关系

无穷大量一定是无界变量, 但无界变量不一定是无穷大量.⁷

⁶由洛必达公式证明

⁷如数列 $x_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 是无界变量, 但不是无穷大. 无穷大是一个极限

1.3.9 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中, 若 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小; 若 $f(x)$ 是无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

1.4 函数极限的运算

1.4.1 极限的四则运算法则

如果极限不存在, 那么极限属于超实数系的范畴, 在超实数系下不可以进行代数运算, 只可以进行替换运算. 但是如果极限均存在, 那么可以进行代数计算.

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 那么

- $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k \lim f(x) \pm l \lim g(x) = kA \pm lB$, 其中 k, l 为常数
- $\lim[f(x) \bullet g(x)] = \lim f(x) \bullet \lim g(x) \equiv A \bullet B$, 特别的, 若 $\lim f(x)$ 存在, n 为正整数, 则 $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

定义 1.4.1: 复合函数极限运算法则

设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成, $f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且存在 $\delta_0 > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta_0)$ 时, 有 $g(x) \neq u_0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A.$$

题目 6. (1) 证明: $\lim f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x) = A \lim g(x)$

(2) 证明: $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$

证明. (1) $\lim f(x) = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \bullet g(x) = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \bullet \lim g(x) = A \bullet 0 = 0.$

(2) 由于 $g(x) = \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$, 则 $\lim g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\lim f(x)}{\lim \frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{0}{A} = 0$

□

题目 6 的注记. 此题的两个证明是常用结论

- 存在 \pm 不存在 = 不存在 (只有这个是不存在, 其余都是不一定或者存在)
- 不存在 \pm 不存在 = 不一定^a
- 存在 $\times(\div)$ 不存在 = 不一定
- 不存在 $\times(\div)$ 不存在 = 不一定

题目 7. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$. 极限

题目 8. 已知 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{f'(x)}$

题目 9. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x)$

题目 9 的注记. 本题的有另一个写法, 但是相较上面的写法相比有些复杂, 但是记录一个常见的错误, 什么时候可以用等价无穷小的问题, 其写法为: $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x) = (\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4})^8 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cos x)(\sin x + x \cos x)}{x^4} \xrightarrow{\text{泰勒公式}} \frac{2}{3}$

证明. $g(x) = \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}$. 求极限得 $\lim g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \lim \frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = 0$. 证明完毕

⁸此处有一个常见的错误,就是能不能把 $\cos^2 x$ 替换为 1, 其实是不能的, 即使最后答案正确, 此时 $x \rightarrow 0$ 时, 分母也趋于 0, 如果进行替换, 则违背了极限的运算法则, 因此不能进行替换

1.4.2 洛必达法则

定义 1.4.2

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0(\infty)$
- $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或 ∞)

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

需要注意的是使用过洛必达法则之后的极限必须存在, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 必须存在.

题目 11. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \times \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

解答. 该函数也是 $\frac{0}{0}$ 型, 但是如果使用洛必达法则, 则 $2x \times \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, 极限显然不存在, 因此不可以使用洛必达法则. 则正确求法为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \times \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \times \sin \frac{1}{x} = 0$.

1.4.3 泰勒公式

泰勒公式的目的是提高精确度, 用更高次的多项式来逼近函数

带拉格朗日余项的 n 阶泰勒展开式

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 阶导数, 那么对任一 $x \in U(x_0)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

带佩亚诺余项的 n 阶泰勒展开式

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内的任一 x , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

对带有佩亚诺余项的泰勒公式取 $x_0 = 0$, 则可以得到带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 由麦克劳林公式可得, 有以下结论

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$	$(1+x)^a = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 5}x^5 + \cdots$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

注 1.4.2: 泰勒公式应用时的展开原则

- $\frac{A}{B}$ 型, 适用于“上下同阶”原则: 具体来说, 如果分母或者分子是 x 的 k 次幂, 则应把分子或分母展开到 x 的 k 次幂。如: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$, 此处 $\ln(1+x)$ 应展开为 $x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $A - B$ 型, 适用“幂次最低”原则: 将 A, B 分别展开到他们系数不相等的 x 的最低次幂为止。如: 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}$ 与 ax^b 为等价无穷小, 求 a, b . 则应展开为 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o(x^4)$.

注 1.4.3: 泰勒公式的解题技巧

1. 泰勒公式构建了函数与其高阶导之间的联系, 因此看见高阶导数, 要条件反射的想到泰勒公式
2. 奇函数的泰勒展式只有奇数次幂, 偶函数的泰勒展式只有偶数次幂^a
3. 极限当中, 用佩亚诺余项 $O(x$ 的 n 次幂), 证明题中, 用拉格朗日余项, 找提供信息最多的点作为展开点
4. 等价无穷小的本质是泰勒的低精度形式, 加减法不建议使用等价无穷小, 建议直接泰勒
5. 加项减项的本质也是泰勒^b

^a如 $\sin x$ 和 $\cos x$

^b如 $\ln(x) = \ln(1+x-1) \sim x-1$

题目 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2}$

解答. 对等式进行泰勒展开 $\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2} = \frac{(x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2-x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$

题目 13. $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x + \ln(1+x)}{x^3} = 0$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$

解答. 对原式中 $f(x)$ 和 $\sin x$ 和 $\ln(1+x)$ 各项进行泰勒展开得:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x + \ln(1+x)}{x^3} &= 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2)(x - \frac{1}{6}x^3) - (x - \frac{1}{6}x^3) + (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})}{x^3} = 0 \\ &= \frac{(f(0) + 1)x + (f''(0) - \frac{1}{2})x^2 + (-\frac{1}{6}f(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{1}{3})x^3 + o(x^3)}{x^3} = 0. \end{aligned}$$

可以得到的是, 分子的极限一定为 0, 那么
$$\begin{cases} f(0) + 1 = 0 \\ f'(0) - \frac{1}{2} = 0 \\ -\frac{1}{6}f(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \\ f'(0) = \frac{1}{2} \\ f''(0) = -1 \end{cases}$$

题目 13 的注记. 看见各阶导数应想到泰勒公式

题目 14. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x}) = 2$, 试求 $f(0), f'(0)$

解答. 对原式进行通分然后对 $\sin x$ 进行泰勒展开:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + xf(x)}{x^2} &= 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + xf(x) + o(x^2)}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

根据函数极限与无穷小的关系1.3.1可知, $1 + f(x) = 2x + o(x), f(x) = 2x - 1 + o(x)$ 因为函数在 $x=0$ 上连续, 因此 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(x) = 2x - 1 + o(x)$ 的表达式是 $x \rightarrow 0$ 时的表达式, 将 $x=0$ 带入可得 $f(0) = -1$, 使用导数定义求得 $f(x)$ 在点 0 处的导数, 即 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2x + o(x)}{x} = 2$

题目 14 的注记. 看见此类问题, 第一步应先通分, 然后将具体函数的泰勒进行展开 (因为此题中的条件是连续而不是可导, 如果是可导的话可以全部进行展开), 然后把 $f(x)$ 的表达式给求出来

题目 15. 设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1 + ax + bx^2$, 则

$$(A)a = 1, b = \frac{1}{2} \quad (B)a = 1, b = \frac{1}{2} \quad (C)a = 0, b = -\frac{1}{2} \quad (D)a = 0, b = \frac{1}{2}$$

解答. $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, 该函数为偶函数, 因此泰勒展开只有偶数次幂, 那么 $a = 0$, 该函数一定大于 0, 因此 $b \geq 0$, 排除 C, A, B.

题目 15 的注记. 本题也可以将 $\sec x$ 展开, 但是较为麻烦, 可以采用上述的方法进行运算.

题目 16. 设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$, 则
 (A) $a=1, b=0, c=-\frac{7}{6}$ (B) $a=1, b=0, c=\frac{7}{6}$
 (C) $a=-1, b=-1, c=-\frac{7}{6}$ (D) $a=-1, b=-1, c=\frac{7}{6}$

解答. 法 1: 对分子进行泰勒展开, 然后使用整式除法

$$1+x^2 \begin{array}{r} x - \frac{7}{6}x^3 \\ \hline x - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \\ \hline x + x^3 \\ \hline -\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \\ \hline -\frac{7}{6}x^3 - \frac{7}{6}x^5 \end{array}$$

法 2: 对整式进行泰勒展开与等价无穷小替换 $f(x) = (x - \frac{x^3}{6})(1 - x^2) = x - \frac{7}{6}x^3$

法 3: 对整式进行泰勒展开计算可得 $x - \frac{7}{6}x^3$

题目 16 的注记. 遇见此类问题, 解题方法的优先级为长除法, 利用等价替换, 使用定义 (利用泰勒公式直接所有项都展开)

1.4.4 抓大头和抓小头

本质是同时处以最高阶/最低阶

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m \\ \infty, & \text{当 } n < m \end{cases}$$

还有一个重要的等价 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \sim e^{-1} \times n$ 该等价由斯特林公式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$ 而来, 又可写为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$

题目 17. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3+x^2+3x+10}{3x^3+2x+7}$

解答. 对等式上下同除以 x^3 得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{10}{x^3}}{3+\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}$

题目 18. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2x^2+3x^4}{2x+4x^3+x^5}$

解答. 上下同除以 x 得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x+3x^3}{2+4x^2+x^4} = \frac{1}{2}$

1.4.5 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

1.4.6 夹逼准则

定义 1.4.3: 函数极限夹逼准则

如果

- 当 $x \in U^\circ(x_0, r)$ (或 $|x| > M$) 时

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} h(x) = A$

那么 $\lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} f(x)$ 存在, 且等于 A .

- 夹逼准则处主要通过放缩来求极限
- 常用的结论有: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n}$, 其中 $a_i > 0 (i = 1, 2, 3, \dots, m)$, 令 $\max a_i = a$, 则 $\sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma^n}$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m \cdot a^n} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = a$

1.4.7 单调有界准则

定义 1.4.4: 函数的单调有界准则

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 一定存在

1.4.8 等价无穷小替代

关于等价无穷小, 有以下两个定理

定义 1.4.5: 等价无穷小的充要条件

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta = \alpha + o(\alpha)$$

定义 1.4.6: 等价无穷小的替换准则

设 $\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$, 且 $\lim_{\alpha} \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 但是需要遵循以下代换原则^a

- 乘除关系可以换: 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta}$
- 加减关系一定条件下可以换^b
 - 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$, 则 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$
 - 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$, 则 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$

加减关系代换准则证明如下:

证明.

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha_1 - \beta_1} = \lim \frac{\beta(\frac{\alpha}{\beta} - 1)}{\beta_1(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - 1)} = 1$$

□

^a其实没有什么替换原则, 本质其实是因为超实数系下不能进行实数运算, 只能进行替换运算

^b这样的形式其实不经常用, 看见加减最好使用泰勒公式进行替换运算

以下为常用等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

1.

$$\begin{aligned} x &\sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \\ &\sim \ln(1+x) \\ &\sim e^x - 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (1+x)^a &\sim 1+ax \\ a^x - 1 &\sim x \ln a \\ 1 - \cos^\alpha x &\sim \frac{\alpha}{2} x^2 \end{aligned}$$

3. 上述结论的推广当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $(1+x)^a - 1 \sim ax$, 则 $\alpha(x) \rightarrow 0, \alpha(x)\beta(x) \rightarrow 0$, 那么 $[1+\alpha(x)]^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$

4.

$$\frac{1}{2}x^2 \sim \sec x - 1 \sim x - \ln(1+x)$$

5.

$$\frac{1}{6}x^3 \sim x - \sin \sim \arcsin x - x$$

6.

$$\frac{1}{3}x^3 \sim x - \arctan x \sim \tan x - x$$

7. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则 $\int_0^x f(t)dt \sim \int_0^x g(t)dt$

8. $x \rightarrow 1$ 时, $\ln x \sim x - 1$, 因为 $\ln(1 + x - 1) \sim x - 1$

9. 当 $A \rightarrow 0, B \rightarrow 0$ 时, $e^A - e^B \sim A - B$, 因为 $e^B(e^{A-B} - 1) \sim A - B$

题目 19. 假设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x}$ 存在

解答. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x}$ 存在, 那么 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} \times \frac{\frac{1}{2}x^2}{1 - \cos x} \right)$ 等价无穷小
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}$

题目 19 的注记. 整体的乘除法本质是构造恒等变形

题目 20. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$

解答. 由常用不等式 1.5.2 的 $x \rightarrow 0, |\sin x| \leq |x|$, 那么 $|\frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}| \leq |\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}|$, 由夹逼准则得: $0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} |\frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}|$ 左右极限都为 0, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$ 极限为 0

题目 20 的注记. 等价无穷小替换的本质是构造恒等变形.

本题有一个常见的错误做法, 就是直接把 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$ 进行等价无穷小替换, 写为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$, 但是这是错误的, 如果这样写, 那么 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x^2 \sin \frac{1}{x}} \times \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$, 在 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x^2 \sin \frac{1}{x}}$ 的分母中, 存在 $x = \frac{1}{n\pi}$ 的间断点, 根据极限定义, 极限如果存在, 那么去心邻域一定要有定义, 那这样写就违背了极限的存在准则, 因此极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$ 不存在, 不可以这样写.

题目 21. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, 则下列命题中正确的个数为

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$.

(3) 若 $f'(x_0) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varphi(x)) - f(x_0)}{\varphi(x)} = A$

解答. 这三个都是错的, 因为 $\varphi(x)$ 在分母上, 都可能为 0

题目 21 的注记. 抽象函数等价的条件是 $f(x) \rightarrow 0$ 只有 $f(x) \neq 0$, 才能将 $\sin(f(x)) \sim f(x)$, 比如函数 $\varphi(x) = x \times \sin \frac{1}{x}$, 其极限为 0, 但是又存在 $x = \frac{1}{n\pi}$ 的无定义点.

1.4.9 利用基本极限求极限

$$\begin{aligned} \lim_{\square \rightarrow \infty} (1 + |\square|)^{\frac{1}{\square}} &= e^{|\square|^{\frac{1}{\square}}} & \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1 (a > 0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a \end{aligned}$$

1.4.10 定积分求极限

1.4.11 七种未定式的计算

主要有以下类型 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty$

形如 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$ 可以直接计算或者简单转换可以直接计算.

形如 $\infty - \infty$

$\infty - \infty$ 可以通过取倒数或者取对数进行计算

题目 22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 (e^{\frac{1}{x}} - 1) - x]$

解答. 原式 $\stackrel{\text{令 } u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1 - u}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1}{2u} = \frac{1}{2}$

形如 $\infty^0, 0^0$

∞^0 与 0^0 通常使用 $u^v = e^{v \ln u}$ 来计算

题目 23. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 n 是给定的自然数.

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)}{x}} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x + 2e^{2x} + \dots + ne^{nx}}{n}}{\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \dots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}} \\ &= \frac{1 + 2 + \dots + n}{1 + 1 + \dots + 1} \\ \text{原式} &= e^{\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

形如 1^∞

1^∞ 通常使用 $\lim u^v = e^{\lim(u-1)v}$ 来计算, 需要知道的是 1^∞ 可以化为第二个重要极限.

题目 24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2+x}{(x-a)(x-b)} \right]^x$

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-a} \right)^x \times \left(\frac{x+1}{x-b} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x-a} \right)^x \times \left(1 + \frac{1-b}{x+b} \right)^x \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x-a}} \times e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-b)x}{x+b}} \\ &= e^{a+1-b} \end{aligned}$$

题目 25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{n+a} + \sqrt{n+b} + \sqrt{n+c}}{3\sqrt{n}} \right]^n$, 其中 $a > 0, b > 0, c > 0$.

解答.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{\sqrt{n+a} + \sqrt{n+b} + \sqrt{n+c}}{3\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{\sqrt{1+\frac{a}{n}} + \sqrt{1+\frac{b}{n}} + \sqrt{1+\frac{c}{n}}}{3}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sqrt{1+ax} + \sqrt{1+bx} + \sqrt{1+cx} + 3 - 3}{3}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} + \sqrt{1+bx} + \sqrt{1+cx} - 3}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{2\sqrt{1+ax}} + \frac{b}{2\sqrt{1+bx}} + \frac{c}{2\sqrt{1+cx}}}{3} \\ &= \frac{a+b+c}{6} \end{aligned}$$

综上所述, 答案为 $e^{\frac{a+b+c}{6}}$

题目 26. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \ln(1+x)}$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x(1 - (\frac{\sin x}{x})^x)}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{x \ln \frac{\sin x}{x}}}{x^3} \quad (\text{当 } x \text{ 趋于 } 0 \text{ 的时候 } x^x, \text{ 趋于 } 1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} \quad (\text{此处不可以用等价无穷小}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{\sin x - x}{x})}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^3} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

综上所述, 答案为 $\frac{1}{6}$

题目 27. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{n}{x}}$, 其中 $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$

解答.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x - n}{n} \right)^{\frac{n}{a_1' + a_2' + \cdots + a_n' - n} \cdot \frac{a_1' + a_1' + \cdots + a_n' - n}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x - n}{x} = \ln(a_1 a_2 \cdots a_n) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x - n}{n} \right)^{\frac{n}{a_1' + a_2' + \cdots + a_n' - n}} = e
 \end{aligned}$$

综上所述, 答案为 $a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n$

1.5 数列极限的运算

1.5.1 数列极限的运算法则

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$
- 若 $b \neq 0, y_n \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

上述运算规则可推广至有限个数列的情况

1.5.2 夹逼准则

定理 1.5.1: 数列极限夹逼准则

如果数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

- 从某项开始, 即 $\exists n_0 \in N_+$ (即 $n \rightarrow \infty$), 当 $n > n_0$ 时, 有

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

以下为放缩的常用方法

- 利用简单放大与缩小

$$\begin{cases} n \times u_{\min} \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq n \times u_{\max}, \\ \text{当 } u_i \geq 0 \text{ 时, } 1 \times u_{\max} \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq n \times u_{\max}. \end{cases}$$

- 利用如下重要不等式

1. 设 a, b 为实数, 则 $|a + b| \leq |a| + |b|$; $||a| - |b|| \leq |a - b|$ ⁹
2. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a, b > 0)$ ¹⁰
3. $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} (a, b, c > 0)$
4. 设 $a \geq b \geq 0$, 则 $\begin{cases} \text{当 } n \geq 0 \text{ 时, } a^n \geq b^n, \\ \text{当 } n \leq 0 \text{ 时, } a^n \leq b^n. \end{cases}$
5. 若 $0 < a < x < b, 0 < c < y < d$, 则 $\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}$.¹¹
6. $\sin x < x < \tan x (0 < x < \frac{\pi}{2})$
7. $\sin x < x (x > 0)$
8. 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $x < \tan x < \frac{4}{\pi}x$
9. 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x > \frac{2}{\pi}x$
10. $\arctan x \leq x \leq \arcsin x (0 \leq x \leq 1)$
11. $e^x \geq x + 1 (\forall x)$ ¹²
12. $x - 1 \geq \ln x (x > 0)$ ¹³

⁹可以将上述式子推广为 n 个实数的情况: $|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

¹⁰还有一个不等式是 $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

¹¹当 $n\pi < x < (n+1)\pi, 2n < S(x) < 2(n+1)$ 时, $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$.

¹²当 $x_{n+1} = e^{x_n} - 1$ 时, 由 $e^{x_n} - 1 \geq x_n$, 得 $x_{n+1} \geq x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调不减

¹³当 $x_n > 0$ 时, 若 $x_{n+1} = \ln x_n + 1$, 由 $\ln x_n + 1 \leq x_n$, 得 $x_{n+1} \leq x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调不增

13. $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x} (x > 0)$ 或 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x (x > 0)$ ¹⁴

14. 在处理如下数列时, 可以在前面加一个减项, 如 $(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}})$, 可化为 $(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^{2^2}}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}}) * \frac{4}{3}$

15. 关于重要数列 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ 的重要结论:

- 单调递增
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- 利用闭区间上连续函数必有最大值与最小值
- 利用压缩映射原理

题目 28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n+n} \right)$

证明.

□

题目 29. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n}$, 其中 $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 都是非负数

证明.

□

1.5.3 单调有界准则

定理 1.5.2: 数列的单调有界准则

单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

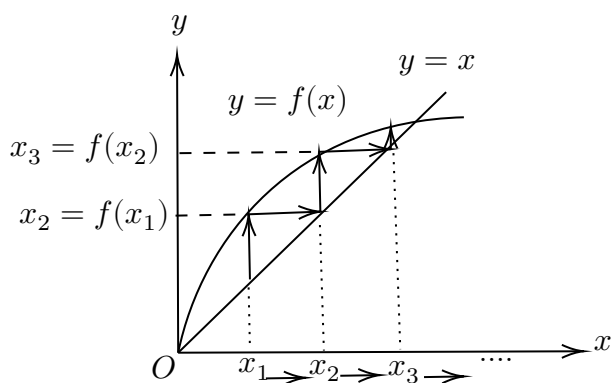
证明数列单调性的方法:

1. $x_{n+1} - x_n > 0$ 或 $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ (同号)
2. 利用数学归纳法
3. 利用重要不等式
4. $x_n - x_{n-1}$ 与 $x_{n-1} - x_{n-2}$ 同号, 则 x_n 单调
5. 利用结论: 对 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots), x_n \in \text{区间 } I$

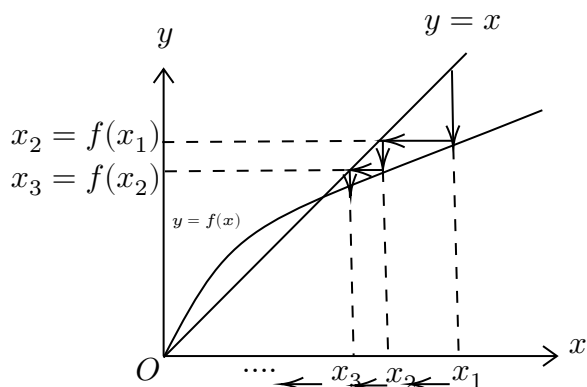
- 若 $f'(x) > 0, x \in \text{区间 } I$, 则数列 $\{x_n\}$ 单调, 且 $\begin{cases} \text{当 } x_2 > x_1 \text{ 时, 数列 } \{x_n\} \text{ 单调增加} \\ \text{当 } x_2 < x_1 \text{ 时, 数列 } \{x_n\} \text{ 单调减少} \end{cases}$

¹⁴ 令 $f(x) = \ln x$, 并在区间 $[x, x+1]$ 上对其使用拉格朗日中值定理, 有 $\ln(1 + \frac{1}{x}) = \ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}$ 其中 $0 < x < \xi < x+1$, 因此对任意的 $x > 0$, 有 $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$

证明. 若 $f(x)$ 单调增加, 且 $x_1 < x_2$, 则数列单增的图像是这样的:



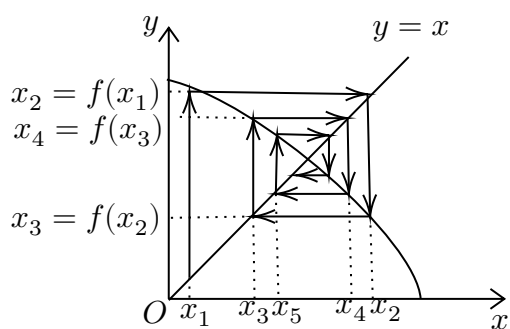
若 $f(x)$ 单调增加, 且 $x_1 > x_2$, 则数列单增的图像是这样的



□

- 若 $f'(x) < 0, x \in \text{区间 } I$, 则数列 $\{x_n\}$ 不单调

证明. 若 $f(x)$ 单调递减, 且 $x_1 < x_2$ 时, 则图像为



□