第一章　连续

1.1　函数的连续性

定义 1.1.1: 连续点的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

那就称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

注 1.1.1

- 当极限需要讨论时: $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 处连续
- 连续性的四则运算: 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在点 $x=x_0$ 处连续, 则 $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 当 $g(x_0)\neq 0$ 时,$f(x)/g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处也连续。
- 复合函数的连续性: 设 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续,$y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续, 且 $u_0=\varphi(x_0)$, 则 $f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续。
- 反函数的连续性: 设 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调且连续, 则反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应的区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上连续且有相同的单调性
- **$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 且 $f(x_0)>0$(或 $f(x_0)<0$), 则存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>0$ (或$f(x)<0$).**

1.2　函数的间断点

1.2.1　间断点的相关概念

- 可去间断点: 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$($f(x_0)$ 甚至可以无定义), 则这类间断点称为可去间断点

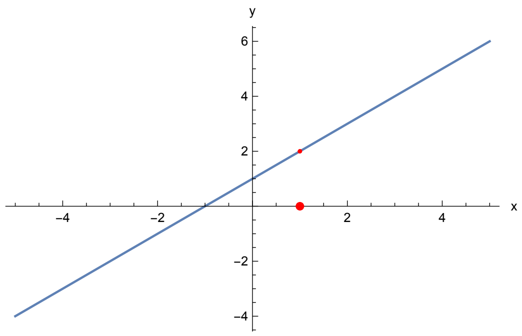

图 1.1: 可去间断点函数图像

- 跳跃间断点[1]: 若 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在, 但 $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, 则这类间断点称为跳跃间断点

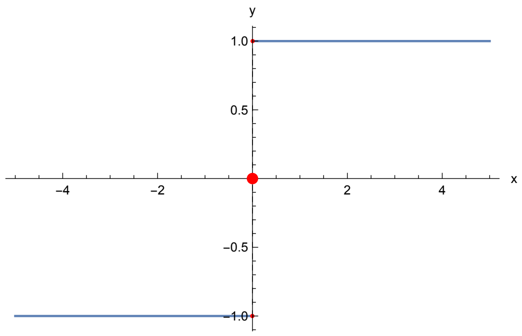

图 1.2: 跳跃间断点函数图像

- 无穷间断点: 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, 则这类间断点称为无穷间断点, 如 $y = \tan x$

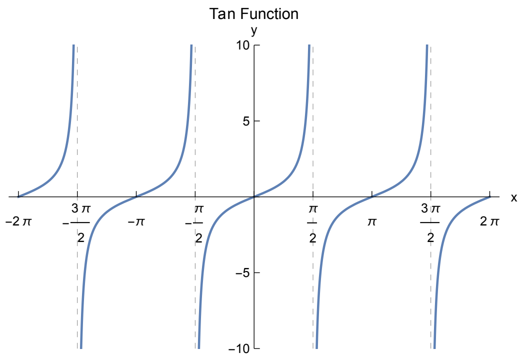

图 1.3: 无穷间断点函数 tan 图像

- 振荡间断点: 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 振荡不存在, 则这类间断点称为振荡间断点

[1]一点极限存在 f(x) 在 x_0 连续

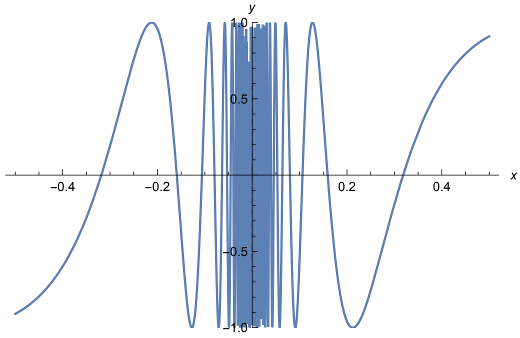

图 1.4: 振荡间断点函数 $\sin\frac{1}{x}$ 图像

1.2.2　间断点的分类

通过求函数在该点的左右极限来判断

- 第一类间断点：$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在
  - 可去[2]：$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$
  - 跳跃：$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
- 第二类间断点：除第一类以外的间断点 $\implies$ $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 均至少一个不存在

[2] 可去间断点上极限存在但是导数不存在