

第一章 导数

1.1 导数的定义

定义 1.1.1: 导数的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx (点 $x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内) 时, 相应地, 因变量取得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; 如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限存在, 那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称这个极限为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$, 即

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记作 $y'|_{x=x_0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 或 $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$.

注 1.1.1

在考题中, 增量 Δx 一般会被命题人广义化为“ \square ”, 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow{\text{广义化}} \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \square) - f(x_0)}{\square}$$

1.1.1 导数与导函数

导数是一个极限, 导函数是一个函数

1.1.2 单侧导数

定义 1.1.2

函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导的充分必要条件是左导数和右导数存在且相等, 其表达式为

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \stackrel{\text{记}}{=} f'_-(x_0),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \stackrel{\text{记}}{=} f'_+(x_0),$$

1.2 导数的计算

1.2.1 基本求导公式

(1) $(C)' = 0;$	(2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$
(3) $(a^x)' = a^x \ln a;$	(4) $(e^x)' = e^x;$
(5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$	(6) $(\ln x)' = \frac{1}{x};$
(7) $(\sin x)' = \cos x;$	(8) $(\cos x)' = -\sin x;$
(9) $(\tan x)' = \sec^2 x;$	(10) $(\cot x)' = -\csc^2 x;$
(11) $(\sec x)' = \sec x \tan x;$	(12) $(\csc x)' = -\csc x \cot x;$
(13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	(14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
(15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};$	(16) $(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

1.2.2 有理运算法则

设 $u = u(x), v = v(x)$ 在 x 处可导, 则

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

1.2.3 分段函数的导数

分段函数在分段点处的导数, 一定要要用定义来求, 结果有可能是不可导的

即: 设 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \geq x_0, \\ f_2(x), & x < x_0, \end{cases}$, 则在 x_0 处用导数定义求导: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

最后还需要根据左右导数是否相等来判定分段点 $f'(x_0)$

1.2.4 复合函数的导数与微分形式不变性

复合导数

定义 1.2.1: 复合函数导数的定义

设 $y = f(g(x))$ 是由 $y = f(z), z = g(x)$ 复合而成, 且 $f(z), g(x)$ 均可导, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = f'(z) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

微分形式不变形

指无论 u 是中间变量还是自变量, $dy = f'(u)du$

1.2.5 反函数的导数

定义 1.2.2

反函数的导数等于原函数导数的倒数, 即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 1.2.1: 解释

函数类型	自变量与因变量	函数表达式
直接函数	自变量:x 因变量:y	$y = \frac{1}{6}x$
反函数	自变量:y 因变量:x	$x = 6y$
反函数	自变量:x 因变量:y	$y = 6x$

需要注意的是, 定理二中采用的是解释中第二行的形式

反函数的二阶导函数为: $y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d(\frac{1}{x'_y})}{dx} = \frac{d(\frac{1}{x'_y})}{dy} \cdot \frac{1}{x'_y} = \frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}$

1.2.6 参数方程所确定的函数的导数

定义 1.2.3

设 $y = f(x)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} (\alpha < t < \beta)$ 确定的函数

如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$ 则其一阶导可写为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right) \times \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^2(t)} \times \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)} \end{aligned}$$

1.2.7 对数函数求导法

对于多项相乘, 相除, 开方, 乘方的式子, 一般对其先求对数在求导数. 即

$$\ln y = \ln f(x)$$

然后两边对 x 求导即可.

1.2.8 幂指函数求导法

对于 $u(x)^{v(x)}$ 函数, 可采用 $e^{v(x) \ln u(x)}$ 进行转换求导

1.2.9 变上限积分

1.3 导数的几何意义

定义 1.3.1

$y = f(x)$ 在 x_0 处导数是 $f(x)$ 在 x_0 处切线的斜率 $k_{\text{切}} = f'(x_0)$ 并且 $k_{\text{切}} * k_{\text{法}} = -1$ 在 (x_0, y_0) 处, 切线:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

法线:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

1.4 函数可导性与连续性的关系

可导一定连续, 连续不一定可导.

注 1.4.1: 关于函数可导性与联系性的解释

函数在 x_0 处可导的充分必要条件是左导数和右导数均存在且相等. 但是通过对函数 $|x|$ 的分析, 可以知道的是函数在原点 O 处左右导数均存在, 但是却不相等.

1.5 高阶导数

定义 1.5.1: 高阶导数的定义

函数 $y = f(x)$ 具有 n 阶导数, 也常说成函数 $f(x)$ 为 n 阶可导, 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数, 那么 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数. 记作:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}f(x)}{dx^{(n)}}$$

- 找规律 + 归纳 $(\frac{1}{x+1})^{(n)} = (-1)^n(x+1)^{-(n+1)} \cdot n!$
- 莱布尼兹公式: 适用于两个函数相乘求高阶导数 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$

1.6 隐函数

定义 1.6.1: 隐函数与显函数的定义

- 隐函数: y 与 x 的关系隐含在一个等式中, $F(x, y) = 0$, eg: $x^2 + y^2 = 4$
- 显函数: 因变量与自变量在等式两端, y 和 x 各占一边, eg: $y = 3x$

1.6.1 隐函数求导法则

定义 1.6.2

y 看作与 x 相关的量, 等式两端同时对 x 求导. 如 $y \rightarrow y'(x)$ 或 $y^2 \rightarrow 2y(x) \cdot y'(x)$ 或 $\ln y = \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x)$

题目 1. 求 $y = x^{\sin x}$ 导数

解答. 对等式两边取对数可得: $\ln y = \sin x \ln x$

根据隐函数求导法则, 对等式两边求导可得: $\frac{y'}{y} = \cos x \times \ln x + \frac{\sin x}{x}$

化简可得导数为 $y' = x^{\sin x} \times (\cos x \times \ln x + \frac{\sin x}{x})$

题目 2. 求 $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 导数

解答. 对等式两边取对数可得: $\ln y = \frac{1}{2} \times \ln \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$

即: $2 \ln y = \ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3) - \ln(x-4)$

根据隐函数求导法则, 对等式两边求导可得: $2 \times \frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}$

化简可得导数为 $y' = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}} \times \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right)$