

# 第一章 连续

## 1.1 函数的连续性

### 定义 1.1.1: 连续点的定义

设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

那就称为函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  连续.

### 注 1.1.1

- 当极限需要讨论时:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x)$  在点  $x_0$  处连续
- 连续性的四则运算: 设  $f(x)$  与  $g(x)$  都在点  $x = x_0$  处连续, 则  $f(x) \pm g(x)$  与  $f(x)g(x)$  在点  $x = x_0$  处连续, 当  $g(x_0) \neq 0$  时,  $f(x)/g(x)$  在点  $x = x_0$  处也连续。
- 复合函数的连续性: 设  $u = \varphi(x)$  在点  $x = x_0$  处连续,  $y = f(u)$  在点  $u = u_0$  处连续, 且  $u_0 = \varphi(x_0)$ , 则  $f[\varphi(x)]$  在点  $x = x_0$  处连续。
- 反函数的连续性: 设  $y = f(x)$  在区间  $I_x$  上单调且连续, 则反函数  $x = \varphi(y)$  在对应的区间  $I_y = \{y | y = f(x), x \in I_x\}$  上连续且有相同的单调性
- $f(x)$  在点  $x = x_0$  处连续, 且  $f(x_0) > 0$  (或  $f(x_0) < 0$ ), 则存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ )。

## 1.2 函数的间断点

### 1.2.1 间断点的相关概念

- 可去间断点: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$  ( $f(x_0)$  甚至可以无定义), 则这类间断点称为可去间断点

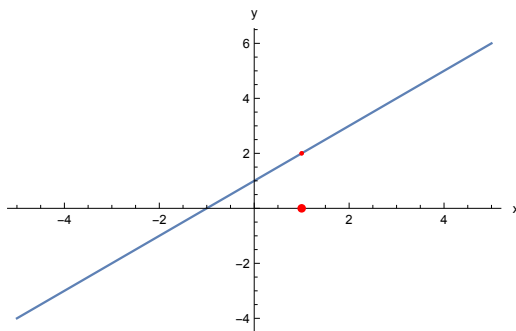


图 1.1: 可去间断点函数图像

- 跳跃间断点<sup>1</sup>: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  都存在, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , 则这类间断点称为跳跃间断点

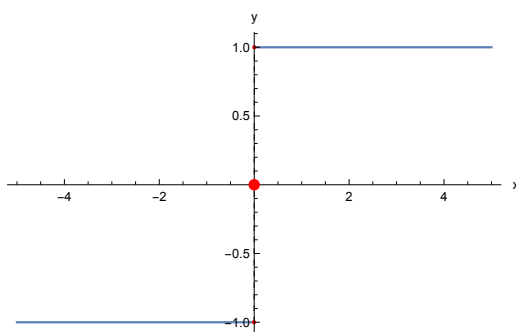
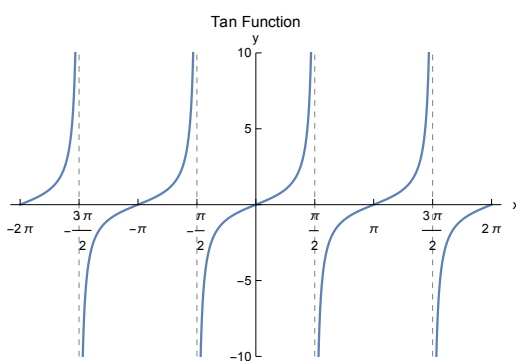


图 1.2: 跳跃间断点函数图像

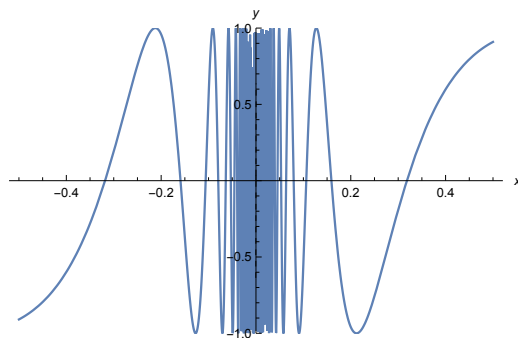
- 无穷间断点: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 则这类间断点称为无穷间断点, 如  $y = \tan x$

图 1.3: 无穷间断点函数  $\tan$  图像

- 振荡间断点: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  振荡不存在, 则这类间断点称为振荡间断点

---

<sup>1</sup>一点极限存在  $f(x)$  在  $x_0$  连续

图 1.4: 振荡间断点函数  $\sin \frac{1}{x}$  图像

### 1.2.2 间断点的分类

通过求函数在该点的左右极限来判断

- 第一类间断点:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均存在
  - 可去<sup>2</sup>:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$
  - 跳跃:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
- 第二类间断点: 除第一类以外的间断点  $\implies \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  均至少一个不存在

---

<sup>2</sup>可去间断点上极限存在但是导数不存在