高等数学笔记

作者：于家崇

2024 年 3 月 2 日

前言

If a job is worth doing,it’s worth doing well

2024 年 3 月 2 日

如果一件事值得去做，那就值得去做好

目录

第一章　函数

1.1　映射

1.1.1　映射的概念

定义 1.1.1: 映射定义

设 X, Y 是两个非空集合, 如果**存在**一个法则 f, 使得对 X 中**每个元素** x, 按法则 f, 在 Y 中有**唯一确定的元素** y 与之对应, 那么称 f 为从 X 到 Y 的映射, 记作

$$f : X \to Y$$

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下) 的像, 并记住 $f(x)$, 即

$$y = f(x)$$

而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下) 对一个原像;

需要注意的是, 从映射的概念可以看出, 映射法则 f 可以有多个, 但是只要有一个满足即可.

1.1.2　逆映射和复合映射

定义 1.1.2: 逆映射的定义

设 f 是 X 到 Y 的单射, 则由定义, 对每个 $y \in R_f$, 有唯一的 $x \in X$, 适合 $f(x) = y$, 于是, 我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g, 即

$$g : R_f \to X$$

对每个 $y \in R_f$, 规定 $g(y) = x$, 这个 x 满足 $f(x) = y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射, 记作 f^{-1}, 其定义域为 $D_{f^{-1}} = R_f$, 值域 $R_{f^{-1}} = X$. 根据上述定义可知，只有单射才存在逆映射.

定义 1.1.3: 复合映射的定义

设有两个映射

$$g : X \to Y_1 \qquad f : Y_2 \to Z$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则, 它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$. 显然, 这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射, 这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f \circ g$，即

$$f \circ g : X \to Z, (f \circ g)(x) = f[g(x)], x \in X.$$

由复合映射的定义可知, 映射 g 和 f 构成复合映射的条件是:g 的值域 R_g，必须包含在 f 的定义域内，即 $R_g \subset D_f$. 否则, 不能构成复合映射. 由此可以知道, 映射 g 和 f 复合是有顺序的.

1.1.3 映射的分类

- 设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射, 若 $R_f = Y$, 即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像, 则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射;
- 若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$, 它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为 X 到 Y 的单射;
- 若映射 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 为一一映射 (或双射)

1.2 函数的基本概念与特性

1.2.1 函数的概念

定义 1.2.1: 函数定义

设**数集** $D \subset \mathbb{R}$, 则称映射 $f : D \to \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域, 记作 D_f, 即 $D_f = D$.

函数的定义中, 对**每个** $x \in D$, 按对应法则 f, 总有**唯一确定**的值 y 与之对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系, 通常称为**函数关系**. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$ 即:

$$R_f = f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

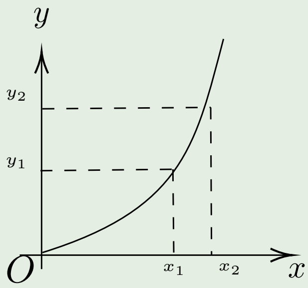
定义 1.2.2: 自然定义域

约定函数的定义域是使算式有意义的一切实数组成的集合。

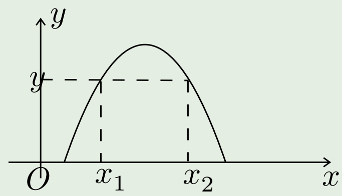
例如: 函数 $y=\frac{1}{x-1}$, 即使没有指出函数的定义域是多少, 但是通过分析可得, 函数的自然定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$。同理对于函数 $y=\sqrt[2]{1-x^2}$, 其自然定义域是 $(-1,1)$。

注 1.2.1: 单值函数与多值函数

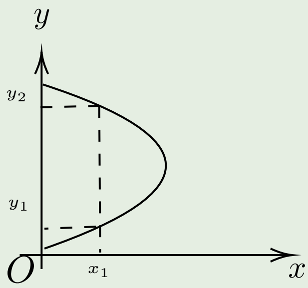
事实上上述定义的函数为**单值函数**, 若给定一个 x_1, 对应一个 y_1。给另外一个 x_2, 对应另外一个 y_2, 即"**一对一**". 其图像如下图所示



若给定 x_1 和 x_2, 且他们对应同一个 y, 则称"多对一".



所以**函数可以一对一, 也可以多对一, 统称为单值函数**.



但是, 如果一个 x 对应一个 y_1, 同时对应另一个 y_2, 也就是一对多, 这叫做多值函数.(高等数学中研究对象主要是单值函数)

1.2.2 函数的表示

表格

x	1	2	3	4	5	6
$y=2x$	2	4	6	8	10	12

图像

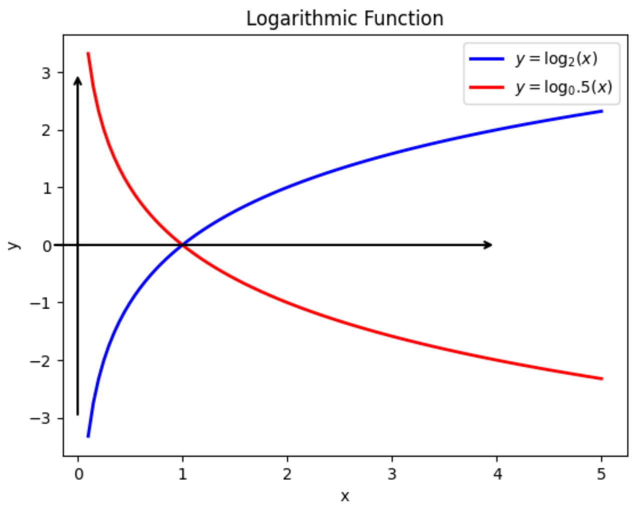


图 1.1: 对数函数图像

解析式

$$\boxed{y=2x}$$

1.2.3 反函数

定义 1.2.3: 反函数定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 R. 如果对于每一个 $y\in R$, 必存在唯一的 $x\in D$ 使得 $y=f(x)$ 成立, 则由此定义了一个新的函数 $x=\varphi(y)$, 这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**, 一般记作 $x=f^{-1}(y)$, 它的定义域为 R, 值域为 D. 相对于反函数来说, 原来的函数也被称为**直接函数**.

一般地,$y=f(x),x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x),x\in f(D)$

注 1.2.2: 解释

以函数 $y=2x+1$ 为例:

$y=2x+1$	自变量:x:[1,2] 因变量:y:[3,5]	
$x=\frac{y-1}{2}$	自变量:y:[3,5] 因变量:x:[1,2]	变量 改变
$y=\frac{x-1}{2}$	自变量:x:[3,5] 因变量:y:[1,2]	方程 改变

定义 1.2.4: 反函数的性质

- $f^{-1}f(x)=x$
- 严格单调函数必有反函数, 但是有反函数的函数不一定是单调函数. 如函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x<0, \end{cases}$, 其函数图像为

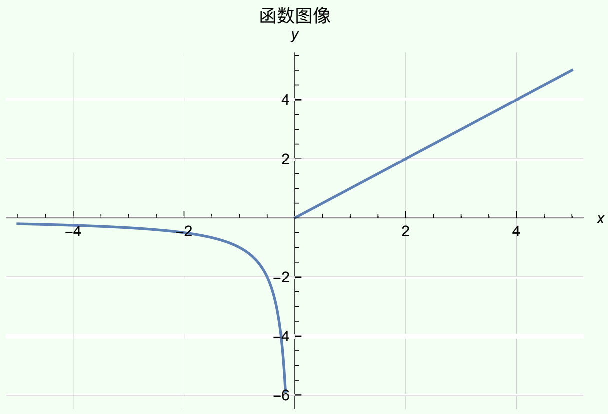


图 1.2: 分段函数 $f(x)$ 图像

- 若函数 $f(x)$ 有反函数, 则 $f(x)$ 与任意水平线有且仅有一个交点.
- **若把 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图形画在同一坐标系中, 则它们完全重合. 只有把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$ 后, 它们的图形才关于 $y=x$ 对称.**
  这是因为在 $x=f^{-1}(y)$ 中 y 是自变量而 x 是因变量, 而在 $y=f(x)$ 中恰恰相反 (这个时候的图像应该一个是 x-y 坐标系函数图像, 一个是 y-x 坐标系函数图像), 因此如果此时不交换变量, 那么其域没有变化, 画在一起会重合, 只有交换了变量之后才不会重合.

题目 1. 求函数 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})^1$的反函数的表达式以及定义域

题目 1 的注记. 在上面的例子中, 函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为反双曲正弦函数, 其反函数为双曲正弦函数. 除此之外, 函数 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 是双曲余弦函数. 上述两个函数的图像为图 1.2, 图 1.3.

解答. 已知 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 则 $-y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$
对两边可以进行如下操作

$$e^{-y}=\sqrt{x^2+1}-x$$
$$e^{y}=\sqrt{x^2+1}+x$$

那么可以得到 $x=\frac{1}{2}(e^y-e^{-y})$ 交换之后可以得到函数 $f(x)$ 的反函数, 即 $y=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

1.2.4 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,, 函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义, 且 $g(D)\subset D_1$,, 则由

$$y=f[\mathrm{g}(x)](x{\in}D)$$

确定的函数, 称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**, 它的定义域为 D,u 称为中间变量. 内层函数的值域是外层函数的子集.

1.2.5 函数的四种特性及重要结论

有界性

有界性分为三种情况, 一种是有上界, 一种是有下界, 一种是有界。有界包含了有上界和有下界。

定义 1.2.5: 有上界的定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $X\in D$。如果存在数 K_1, 使得

$$f(x)\le K_1$$

对任一 $x\in X$ 都成立, 那么称函数 $f(x)$ 上有上界, 而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上都一个上界。

定义 1.2.6: 有下界的定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $X \in D$。如果存在数 K_2, 使得

$$f(x) \geq K_2$$

对任一 $x \in X$ 都成立, 那么称函数 $f(x)$ 上有下界, 而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上都一个下界。

定义 1.2.7: 有界性的定义

设 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $I \subset D$. 如果存在某个正数 M, 使对任一 $x \in I$, 有$|f(x)| \leqslant M$, 则称 $f(z)$ 在 I 上有界; 如果这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

- **有界是指, 同时有上界和下界**
- 从几何上看, 如果在给定的区间, 函数 $y = f(x)$ 的图形能够被直线 $y = -M$ 和 $y = M$" 完全包起来", 则为有界; 从定义上说, 找到某个正数 M, 使得 $|f(z)| \leqslant M$, 则为有界.
- **在讨论有界还是无界的时候首先要指明区间**, 如果没指名区间, 则无法讨论有界性. 如函数 $y = \frac{1}{x}$ 则 $(2, +\infty)$ 上有界, 但是在 $(0, 2)$ 上无界.
- 事实上, 只要在区间 I 上或其端点处存在点 x_0, 使得 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 的值为无穷大, 则没有任何两条直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 可以把 I 上的 $f(x)$"包起来", 这就叫无界.

单调性

定义 1.2.8

设 $f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I \subset D$. 如果对于区间上任意两点 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$, 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**.

虽然单调性的证明一般用求导, 但是定义法也需要掌握.

$$\begin{aligned}
&\text{对任意} x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2, \text{有} \\
&\qquad f(x)\text{是单调增函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)\Big[f(x_1) - f(x_2)\Big] > 0; \\
&\qquad f(x)\text{是单调减函数.} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)\Big[f(x_1) - f(x_2)\Big] < 0; \\
&\qquad f(x)\text{是单调不减函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geqslant 0; \\
&\qquad f(x)\text{是单调不增函数} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \leqslant 0.
\end{aligned}$$

奇偶性

定义 1.2.9

设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则 $-xinD$). 如果对于任一 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任一 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**奇函数**.偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

推论 1.2.3

设 $f(x)$ 是定义在 $[-l, l]$ 上的任意函数, 则

$$F_1(x) = f(x) - f(-x)\text{必为奇函数}; F_2(x) = f(x) + f(-x)\text{必为偶函数}$$

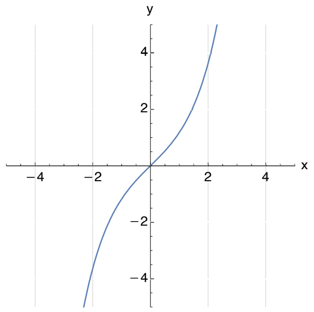


图 1.3: 双曲正弦函数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

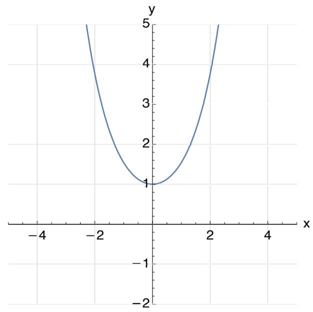


图 1.4: 双曲余弦函数 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

可以看到上面两个函数可以很好的解释推论 1.2.1, 并给出一个直观的图像, 以下为证明过程.

证明. 已知 $f(x)$ 是任意函数,-1 带入可得,$F_1(-x) = f(-x) - f(x) = -F_1(x)$, 同理可证 F_2 成立. □

- 奇函数 $y = f(x)$ 的图形关于坐标原点对称, 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有定义时, 必有 $f(0) = 0$.
- 偶函数 $y = f(x)$ 的图形关于 y 轴对称, 且当 $f(0)$ 存在时, 必有 $f'(0) = 0$.

周期性

定义 1.2.10

设 $f(x)$ 的定义域为 D, 如果存在一个正数 T, 使得对于任一 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期. 从几何图形上看, 在周期函数的定义域内, 相邻两个长度为 T 的区间上, 函数的图形完全一样.

需要注意的是函数的周期性只与 x 的参数有关, 比如若函数 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(ax + b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期. **可以观察到其周期只与 x 的系数有关**

重要结论

$f'(x)$ 和 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的性质是重点, 提前总结如下:

- 若 $f(x)$ 是可导的偶函数, 则 $f'(x)$ 是奇函数.
- 若 $f(x)$ 是可导的奇函数, 则 $f'(x)$ 是偶函数 (求导后, 函数奇偶性互换).
- 若 $f(x)$ 是可导的周期为 T 的周期函数, 则 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.
- **连续的奇函数的一切原函数都是偶函数**
- **连续的偶函数的原函数中仅有一个原函数是奇函数**
- 若连续函数 $f(x)$ 以 T 为周期且 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x)$ 的一切原函数也以 T 为周期.
- 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $f'(x)$ 有界, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

1.2.6 三种特殊函数

符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

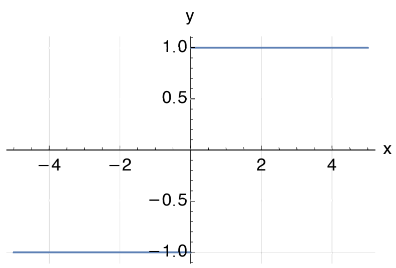


图 1.5: 符号函数 $sgn\ x$ 图像

取整函数

$$y = [x]$$

函数值向左移, **现实生活中其实就是年龄**, 即 $x - 1 < [x] \le x$

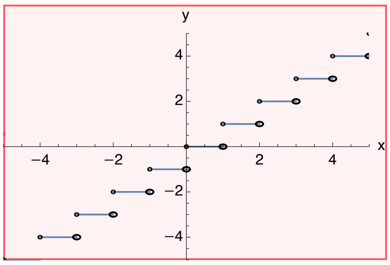


图 1.6: 取整函数 $[x]$ 图像

狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathbf{Q},\\ 0, & x\in \mathbf{Q}^c.\end{cases}$$

1.3 函数图像

1.3.1 常数函数

$y=A$,A 为常数, 其图形为平行于 x 轴的水平直线

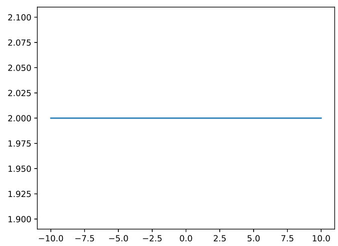


图 1.7: 常数函数图像

1.3.2 幂函数

$$y=x^{\mu}(\mu\text{是实数})$$

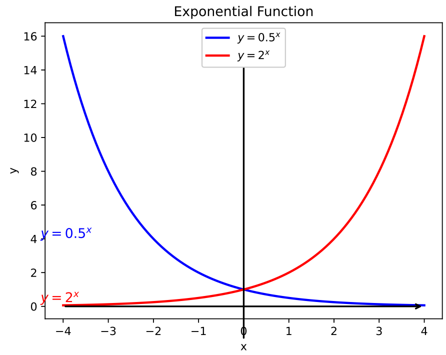


图 1.8: 常数函数图像

推论 1.3.1: 幂函数常用推论

- 当 $x>0$ 时, 由 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x}$,$y=\sqrt[3]{x}$,$y=\ln x$ 具有相同的单调性, 因此可以利用这一特性来研究最值
- 见到 $\sqrt{u}$,$\sqrt[3]{u}$ 时, 可用 u 来研究最值
- 见到 $|u|$ 时, 由 $|u|=\sqrt{u^2}$, 可用 u^2 来研究最值
- 见到 u_1,u_2,u_3,$\ln(u_1+u_2+u_3)=\ln u_1+\ln u_2+\ln u_3$ 来研究最值
- 见到 $\frac{1}{u}$ 时, 可用 u 来研究最值 (结论相反), 即 $\frac{1}{u}$ 与 u 的最大值点、最小值点相反

1.3.3 指数函数

$$y=a^x(a>0,a\neq 1)$$

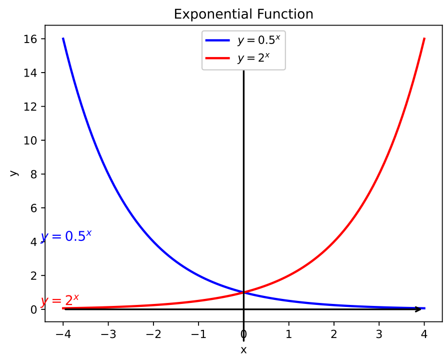


图 1.9: 指数函数图像

注 1.3.2: 指数函数相关性质

- 定义域:$(-\infty,+\infty)$. 值域:$(0,+\infty)$.
- 单调性: 常用的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$
- 极限:$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0,\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$(由于极限的唯一性, 因此在趋于不同的无穷时, 极限值的不同).
- 特殊函数值:$a^0=1$,$\mathrm{e}^0=1$

1.3.4 对数函数

$$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$$

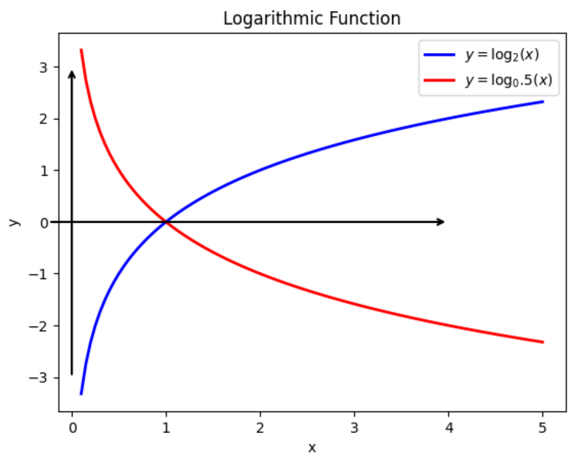


图 1.10: 对数函数图像

注 1.3.3: 对数函数相关性质

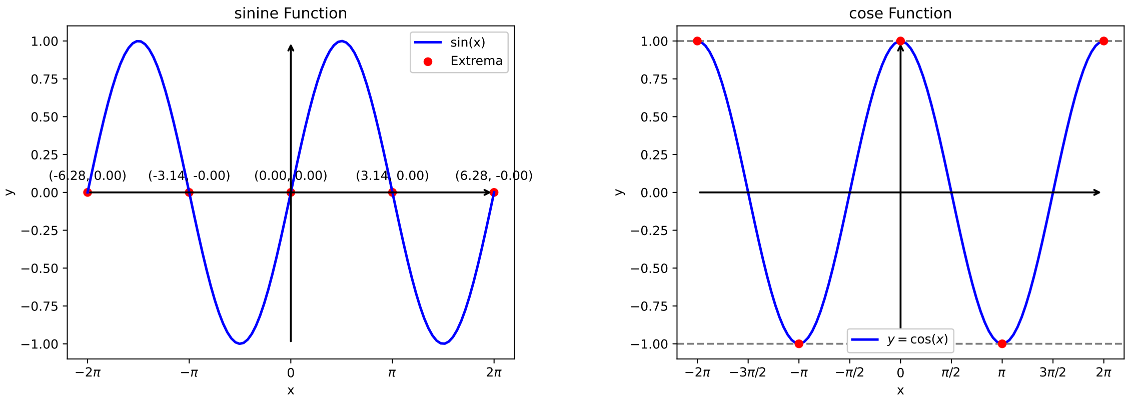
- 定义域:$(0,+\infty)$. 值域:$(-\infty,+\infty)$.
- 单调性: 当 $a>1$ 时,$y=log_a x$ 单调增加; 当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调减少;
- 常用对数函数: $y=\ln x$
- 特殊函数值:$\log_a 1=0$,$\log_a=1$,$\ln 1=0$,$\ln e=1$
- 极限 $\mathrm{limln}_{x\to0^+}x=-\infty$,$\mathrm{limln}_{x\to+\infty}x=+\infty$.
- 常用公式:$x=\mathrm{e}^{\ln x}\,(x>0)\,,u^v=\mathrm{e}^{\ln u^v}=\mathrm{e}^{v\ln u}\,(u>0)$

1.3.5 三角函数

正弦和余弦函数

$$\boxed{y = \sin x}$$

$$\boxed{y = \cos x}$$



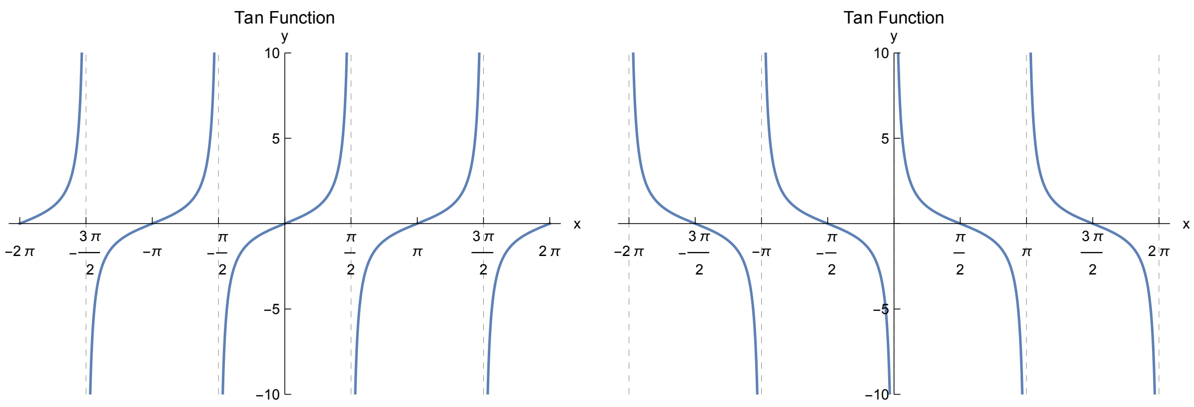
(a) 正弦函数图像　　(b) 余弦函数图像

图 1.11: 正余弦函数图像

正切和余切函数

$$\boxed{y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$\boxed{y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}}$$

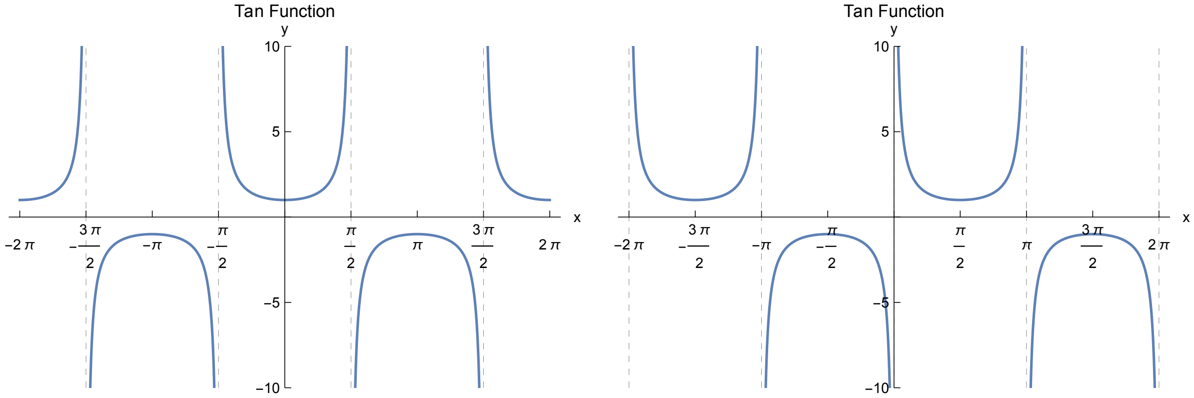


(a) 正切函数图像　　(b) 余切函数图像

图 1.12: 正余切函数图像

正割和余割函数

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}} \qquad \boxed{\csc x = \frac{1}{\sin x}}$$



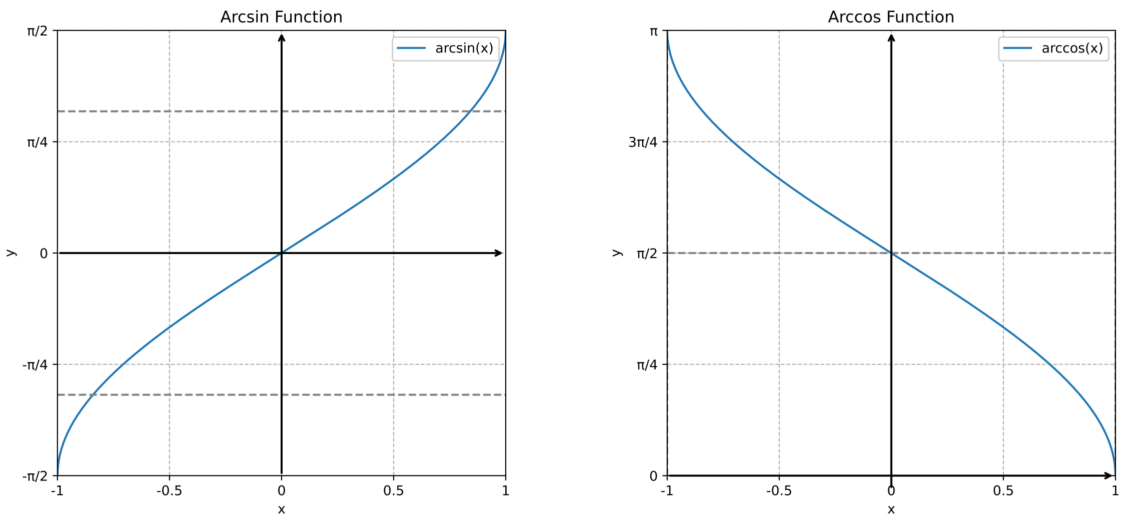
(a) 正割函数图像 (b) 余割函数图像

图 1.13: 正余割函数图像

反三角函数

反正弦和反余弦函数

$$\boxed{y = \arcsin x} \qquad \boxed{y = \arccos x}$$



(a) 反正弦函数图像 (b) 反余弦函数图像

图 1.14: 反正余弦函数图像

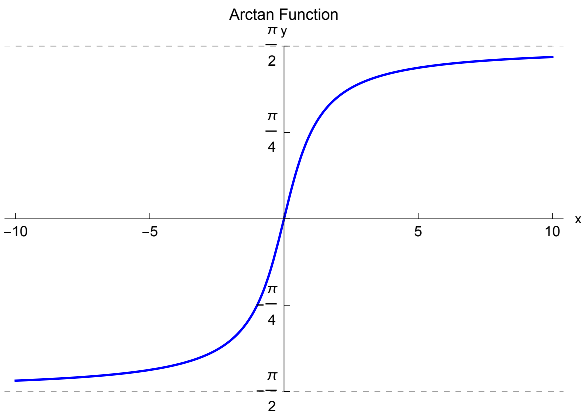
由于这两个函数分别是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的反函数, 因此可以知道的是,$\sin x$ 的值域是 $\arcsin x$ 的定义域. 因此可以得到下面的结论

注 1.3.4: 反正余弦函数相关性质

- 定义域 $[-1,1]$,$y=\arcsin x$ 值域 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,$y=\arccos x$ 值域 $[0,\pi]$
- 性质:$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$(求导后可以发现导数为 0)

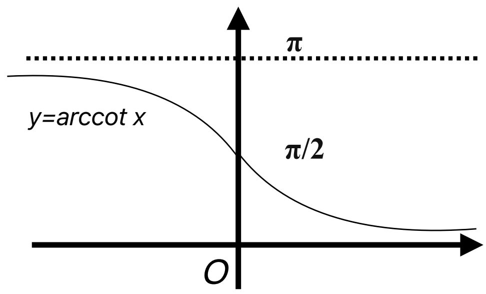
反正切和反余切函数

$\boxed{y=\arctan x}$



(a) 反正切函数图像

$\boxed{y=\operatorname{arccot} x}$



(b) 反余切函数图像

图 1.15: 反正余切函数图像

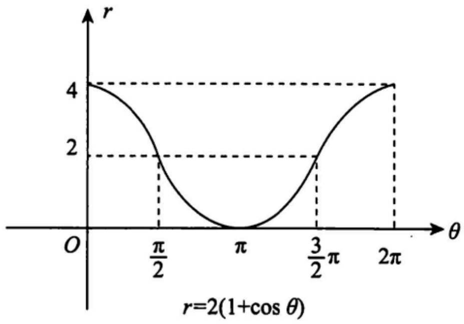
注 1.3.5: 反正余切函数相关性质

- 定义域 $[-\infty,+\infty]$,$y=\arctan x$ 值域 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,$y=\operatorname{arccot} x$ 值域 $(0,\pi)$
- 性质:$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$(求导后可以发现导数为 0)

1.3.6 图像绘制

极坐标下的图像

- 用描点法绘制函数图像: 就是把每一个点求出来, 然后连接起来即可, 但是需要点足够多
- 用直角坐标系观点画极坐标系的图像, 以函数 $r=2(1+\cos\theta)$ 为例.



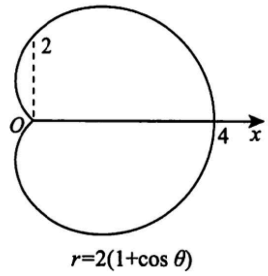


图 1.16: 函数 $r = 2(1 + \cos\theta)$ 图像

可以看到 $\theta - r$ 的坐标系的关键点为 $(0,4), (\frac{\pi}{2},2), (\pi,0), (\frac{3}{2}\pi,2), (2\pi,4)$ 这五个点, 那么在极坐标系下可以绘制出这些点, 比如在 $x = 4$ 时,$\theta = 0$,$x = 2$ 时,$\theta = \frac{\pi}{2}$,$x = 0$ 时,$\theta = \pi$.

参数方程

通过第三个变量即参数来表示别的两个变量.
摆线参数方程:

$$\begin{cases} x = r\,(t - \sin t) \\ y = r\,(1 - \cos t)\,. \end{cases}$$

星型线参数方程:

$$\begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\sin^3 t \end{cases}$$

1.4 常用函数知识

1.4.1 数列

等差数列

首项为 a_1, 公差为 $d(d \neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \cdots, a_1 + (n-1)d, \cdots$.

注 1.4.1: 等差数列相关性质

- 通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$
- 前 n 项的和 $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

等比数列

首项为 a_1, 公比为 $r(r \neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1r, a_2r^2, ..., a_1r^{n-1}, ...$

注 1.4.2: 等比数列相关性质

- 通项公式 $a_n = a_1 r^{n-1}$
- 前 n 项的和 $S_n = \begin{cases} na_1, & r = 1, \\ \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1. \end{cases}$
- $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}(r \neq 1)$.

常见数列前 n 项和

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \\ &\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \\ &\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}}$$

1.4.2 三角函数

三角函数基本关系

$$\boxed{\begin{array}{lll} \csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha} & \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} & \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} \\ \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} & \end{array}}$$

倍角公式

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin 2a = 2\sin a\cos a, \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \\ \sin 3\alpha = -4\sin^3 a + 3\sin\alpha, \quad \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \\ \tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}, \quad \cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}. \end{array}}$$

半角公式

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha), \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha), \\ &\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \\ &\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \\ &\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}. \end{aligned}}$$

和差公式

$$
\begin{aligned}
&\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta cos\alpha\sin\beta\\
&\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\\
&\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\
&\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.
\end{aligned}
$$

积化和差公式

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta=&\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\cos\alpha\sin\beta= &&\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],\\
\cos\alpha\cos\beta=&\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],\sin\alpha\sin\beta= &&\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].
\end{aligned}
$$

和差化积公式

$$
\begin{aligned}
&\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\
&\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}
$$

万能公式

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha&=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\\
\cos\alpha&=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

1.4.3 指数运算法则

$$
a^a\times a^\beta=a^{a+\beta},\quad \tfrac{a^a}{a^\beta}=a^{a-\beta},\quad (a^a)^\beta=a^{a\beta},\quad (ab)^a=a^ab^a,\quad \left(\tfrac{a}{b}\right)^a=\tfrac{a^a}{b^a}
$$

1.4.4 对数运算法则

$$
\begin{aligned}
&log_a(MN)=\log_a M+\log_a N\\
&\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N\\
&\log_a M^n=n\log_a M.\\
&\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M.
\end{aligned}
$$

1.4.5 一元二次方程基础

- 一元二次方程组:$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$
- 根的公式:$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- 根与系数的关系:$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}$.
- 判别式:$\Delta=b^2-4ac$
- 抛物线顶点坐标:$(-\frac{b}{2a},c-\frac{b^2}{4a})$

1.4.6 因式分解公式

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \qquad (a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$ (n 是正整数)

n 是正奇数时, $a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k=$$

$$a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+nab^{n-1}+b^n$$

1.4.7 阶乘与双阶乘

- $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$, 规定$0!=1$.
- $(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)=2^n\cdot n!$
- $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$

1.4.8 常用不等式

1. 设 a,b 为实数, 则 $|a+b|\leq|a|+|b|;||a|-|b||\leqslant|a-b|$

注 1.4.3

可以将第一个式子推广为:
离散情况: 设 $a_1,a_2,...,a_n$ 为实数, 则 $|a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$
连续情况: 设 $f(x)$ 在 $[a,b](a<b)$ 上可积, 则 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$

2. $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a,b>0)$

注 1.4.4

还有一个不等式是 $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

3. $\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}(a,b,c>0)$

4. 设$a>b>0$, 则 $\begin{cases} 当n>0 \text{ 时}, a^n>b^n, \\ 当n<0 \text{ 时}, a^n<b^n. \end{cases}$

5. 若$0<a<x<b, 0<c<y<d$, 则$\frac{c}{b}<\frac{y}{x}<\frac{d}{a}$.

注 1.4.5

当$n\pi<x<(n+1)\pi, 2n<S(x)<2(n+1)$时, $\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}$.

6. $\sin x<x<\tan x\,(0<x<\frac{\pi}{2})$

7. $\sin x<x(x>0)$

注 1.4.6

当 $x_n>0$ 时,$x_{n+1}=\sin x_n<x_n$, 故 x_n 单调减少

8. $\arctan x \leqslant x \leqslant \arcsin x(0 \leqslant x \leqslant 1)$

9. $e^x \geqslant x+1(\forall x)$

注 1.4.7

当$x_{n+1}=\mathrm{e}^{x_n}-1$ 时, 由$\mathrm{e}^{x_n}-1 \geqslant x_n$, 得$x_{n+1} \geqslant x_n$, 即$\{x_n\}$单调不减

10. $x-1 \geqslant \ln x(x>0)$

注 1.4.8

当$x_n>0$时, 若$x_{n+1}=\ln x_n+1$, 由$\ln x_n+1 \leqslant x_n$, 得$x_{n+1} \leqslant x_n$, 即$\{x_n\}$单调不增

11. $\frac{1}{1+x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}(x>0)$

注 1.4.9

令 $f(x)=\ln x$, 并在区间 $[x,x+1]$ 上对其使用拉格朗日中值定理, 有

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}$$

其中 $0<x<\xi<x+1$, 因此对任意的 $x>0$, 有 $\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x}$

12. 在处理如下数列时，可以在前面加一个减项，如 $(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^{2^2}})...(1+\frac{1}{2^{2^n}})$，可化为 $(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^{2^2}})...(1+\frac{1}{2^{2^n}})*\frac{4}{3}$

1.4.9 绝对值等式

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$
$$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$$

第二章　极限

极限是无穷趋近但是不相等的过程

2.1　数列的极限

2.1.1　数列极限的定义

定义 2.1.1

设 $|x_n|$ 为一数列, 若存在常数 a, 对于任意的 $\varepsilon > 0$(不论它多么小),总存在正整数 N, 使得当$n > N$时 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称数 a 是数列 $|x_n|$ 的极限, 或者称数列 $|x_n|$ 收敛于 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或} x_n \to a(n \to \infty).$$

该定义的 $\varepsilon - N$ 语言描述是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists \text{正整数} N, \text{当} n > N \text{时}, \text{有} |x_n, -a| < \varepsilon.$$

其中 $\forall\varepsilon > 0$ 是白给的信息, 随便写.$\exists$正整数N 是关键. 因为第二句话说的是一定存在正整数 N, 你怎么才能够证明存在正整数 N 呢? 那就必须把这个正整数 N 给找出来，你找出来才能够证明这个 N 是存在的. 关键第三句话叫做桥梁，桥梁什么意思? 就是 n 大于 N 的时候 n 大于 N 的时候，也就意味着 N 趋近于无穷的过程中. 在大 N 项之后的所有的项. 最后一句话叫做突破口., 不是要去找这个 N 吗? 你找到 N 才能够证明这个 N 是存在的, 我们一般情况下就用第四句话来寻找大 N.

在上面的定义中,$\varepsilon > 0$ 的 ε 任意性是非常重要的, 只有这样才能表示出无限接近的意义. 总存在正整数 N, 使得 $n > N$ 这个条件用于表达 $n \to \infty$ 的过程.

注 2.1.1

- 数列的极限值与数列的前有限列无关, 只与后面无穷项有关
- $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} x_{2k} = a$
- **$\varepsilon - N$ 几何意义: 对于点 a 的任何 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 一定存在 N, 当 $n < N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内, 而只有有限个 (最多有 N 个) 在区间之外.**

题目 2. 已知 $x_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, 证明数列 x_n 的极限是 0

题目 2 的注记. 根据数列极限的定义可知,$\forall\varepsilon > 0$,$\exists$正整数N,当n>N 时,有$|x_n - 0 = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}| < \varepsilon$., 即 $x_n = \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 即令 $N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 是一个确定的实数, 大于它的正整数有无穷个, 仍取其中一个作为 N 即可.

解答. $\forall\varepsilon > 0$, 取 $N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1$, 则总有 $x_n = \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 则数列 x_n 的极限是 0

2.1.2 收敛数列的性质

唯一性

定理 2.1.2

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一

有界性

定理 2.1.3

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

注 2.1.4

需要注意的是, 如果数列有界, 但是不一定存在极限, 如数列 $(-1)^n$

保号性

定理 2.1.5

如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 且$a$>0(或$a$<0), 那么存在正整数$N$, 当$n$>$N$ 时, 都有x_n>0(或x_n<0)

推论 2.1.6

如果数列 $|x_n|$ 从某项起有$x_n \geqslant 0$(或$x_n \leqslant 0$), 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 那么$a \geqslant 0$(或$a \leqslant 0$).

收敛数列与其子数列之间的关系

如果数列 x_n 收敛于 a, 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 a

注 2.1.7

需要注意的是, 证明数列极限存在一般通过证明数列有界并且单调, 证明有界则一般通过放缩法. 但是证明数列发散则一般通过一下两种方法:1. 至少一个子数列发散.2. 两个子数列收敛, 但是收敛值不同.

2.2 函数的极限

2.2.1 邻域

一个局部区域

2.2.2 函数极限的定义

自变量趋于有限值时的函数极限

定义 2.2.1

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ε(不论它多么小), 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限, 记作:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或f(x)\to A(当x\to x_0)$$

其 $\varepsilon - N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, 当0<|x-x_0|<\delta时,有|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 在证明中，这两句是白给，直接写。后面的才是关键。

注 2.2.1

在函数极限中 $x\to\infty$ 指的是 $|x|\to\infty$, 而数列中的 $n\to\infty$ 是 $n\to+\infty$

题目 3. 证明 $\lim_{x\to1}(2x-1)=1$

解答. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 令 $\partial=\frac{\varepsilon}{3}$, 则当 $0<|x-1|<\partial$ 时, 有 $|f(x)-A|=2|x-1|<\varepsilon$, 从而 $\lim_{x\to1}(2x-1)=1$

单侧极限

定义 2.2.2

若当 $x\to x_0^-$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 A, 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**, 记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A.$$

若当 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)$ 无限接近于某常数 A, 则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**, 记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A$$

极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A,\text{ 且 }\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A(\text{左右极限都存在且相等})$$
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0(\text{无穷小量}\alpha(x)=0)$$

注 2.2.2

需要分左右极限求极限的问题有以下三种:

- 分段函数分界点的极限, 分界点两侧极限值不同
- e^{∞} 型极限 (如 $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}$)
- $\arctan\infty$ 型极限 (如 $\lim_{\mathrm{x}\to0}\arctan\frac{1}{x},\lim_{x\to\infty}\arctan x$)

题目 4. 已知 $\lim_{x\to0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+\mid x\mid)^{\frac{1}{x}}\right]$存在, 求$a$的值

解答. 由于存在 arctan 与 $|x|$ 函数, 则对于 0 点的极限值需要分左右进行计算.

$\lim\limits_{x\to0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+\mid x\mid)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to0^-}a\arctan\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}=-\frac{\pi}{2}a+\frac{1}{\mathrm{e}}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+\mid x\mid)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}a\arctan\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}$ 若极限存在, 则 $a=\frac{1-e^2}{\pi e}$

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 2.2.3

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ε.(不论它多么小), 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限, 记作:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\text{或}f(x)\to A(\text{当}x\to x_0)$$

其 $\varepsilon-N$ 语言为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时},\text{有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 在证明中，这两句是白给，直接写。后面的才是关键。

需要注意的是趋向的值不同时,$\varepsilon-N$ 写法不同, 不能照抄. 其 $\varepsilon-N$ 的表达为如下表格

	f(x)→A	f(x) →∞	f(x) →+∞	f(x) →-∞
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$, 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$, 使当$0<\|x-x_0\|<\delta$时, 即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$, 使当$0<\mid x-x_0\mid<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$, 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$, 使当$0<x-x_0<\delta$时, 即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$, 使当$0<x-x_0<\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$, 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$, 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$, 使当$0>x-x_0>-\delta$ 时, 即有 $f(x)<-M$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$, 使当 $\mid x\mid>X$ 时, 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当 $\mid x\mid>X$ 时, 即有 $\|f(x)\|>M$	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当 $\mid x\mid>X$ 时, 即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$, 使当 |x|>X 时, 即有 $f(x)<-M$.

接上表

	f(x)→A	f(x) →∞	f(x) →+∞	f(x) →-∞
$x \to +\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 x>X 时, 即有 $\|f(x) - A\| < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当$x > X$ 时, 即有 $\|f(x)\| > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当$x > X$时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 x>X 时, 即有 $f(x) < -M$
$x \to -\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$x < -X$ 时, 即有 $\|f(x) - A\| < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当$x < -X$ 时, 即有 $\|f(x)\| > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当$x < -X$ 时, 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当$x < -X$时, 即有 $f(x) < -M.$

2.2.3 函数极限的性质

唯一性

定理 2.2.3

如果 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 那么极限唯一

局部有界性

定理 2.2.4

如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$

局部保号性

定理 2.2.5

如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > 0$($f(x) < 0$).

推论 2.2.6

如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$), 而且 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 那么 $A \leqslant 0$ 或 $(A \leq 0)$

题目 5. 证明定理 3 局部保号性, 其中 $A > 0$

解答. 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0$, 所以, 取 $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$, $\exists\delta > 0$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

由上述证明可得如下推论

推论 2.2.7

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0 (A \neq 0)$, 那么就存在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$, 当 $x \in U^{\circ}(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

函数极限与数列极限的关系 (海涅定理)

定理 2.2.8

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ 存在的充要条件是: 对属于函数 $f(x)$ 定义域的任意数列, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,$a_n$ 不等于 a, 有 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$.

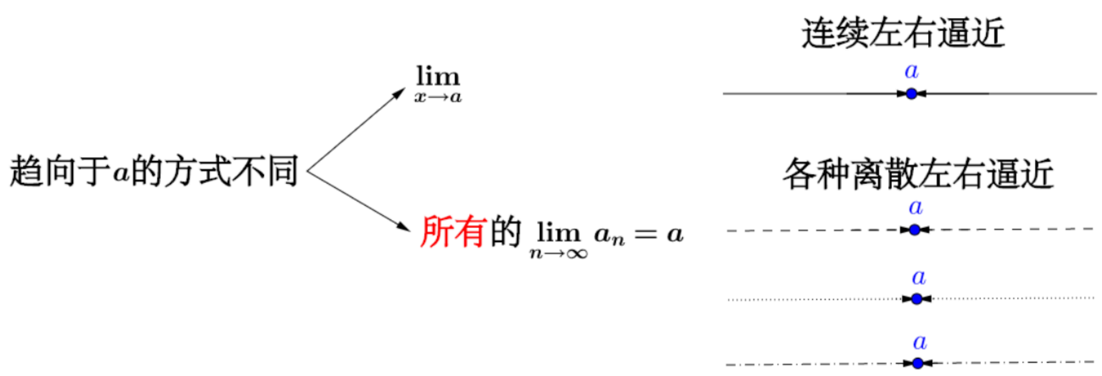
把这个定理简化一下, 主要意思就是

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

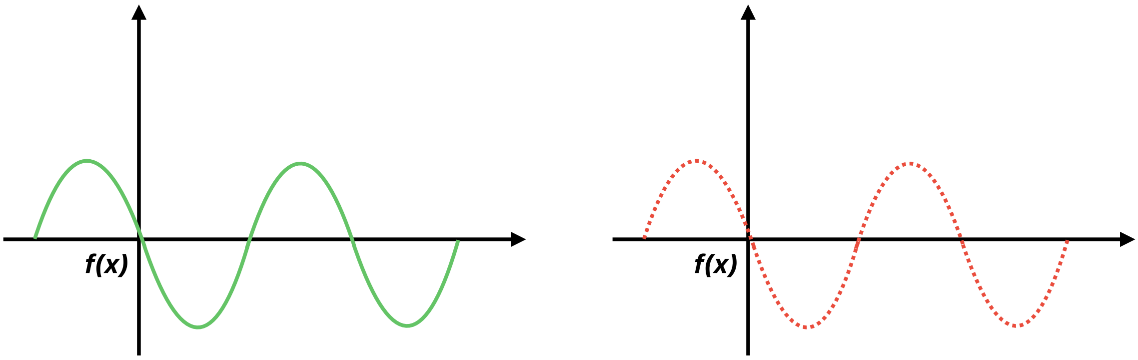
$$\Updownarrow$$

$$\text{所有的} \lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{有} \lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$$

其不同之处在于是离散的趋近还是连续的趋近



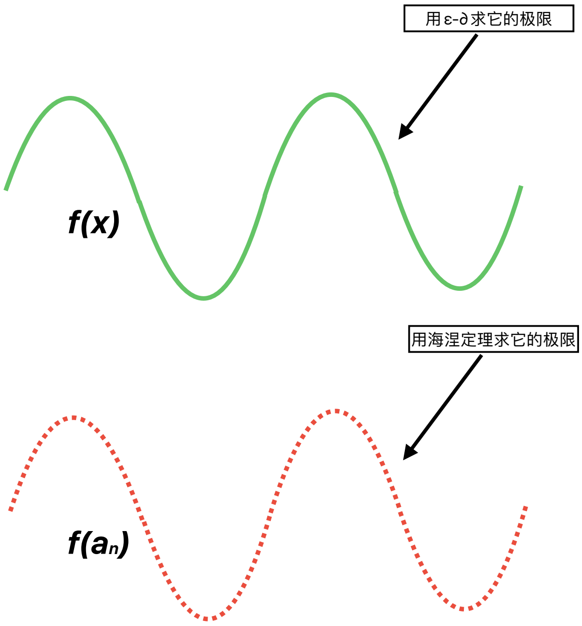
除此之外,$f(x)$ 和 $f(a_n)$ 的函数图像如下所示



(a) 函数 $f(x)$ 图像　　(b) 函数 $f(a_n)$ 图像

图 2.1: $f(x)$ 与 $f(a_n)$ 函数图像

$f(a_n)$ 其实是 $f(x)$ 的抽样 需要注意的是, 是所有的数列（抽样）才能完全代表整体. 不



能说我选了某个数列有极限就代表函数有极限.

总结:海涅定理表述了离散与连续、数列极限与函数极限的关系.

2.3 无穷小与无穷大

2.3.1 无穷小

定义 2.3.1

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷小.

其中 $f(x)$ 是可以本身为 0 或者无限趋近于零, 其中 0 可以作为无穷小唯一常数.
下面的定理 2.3.1 讲述了无穷小与函数极限的关系

定理 2.3.1

在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 中, 函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 是无穷小

2.3.2 无穷大

定义 2.3.2

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于来一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大), 总存在正数 δ(或数 X), 只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)| > M$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷大. 其 $\varepsilon - N$ 语言为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, 当 0 < |x - x_0| < \delta 时, 有 |f(x)| > M.$$

需要注意的是无穷大也可能是负数不一定是整数.

题目 6. 证明 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

解答. $\forall M > 0$ 令 $\delta = \frac{1}{4M} > 0$, 当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 即 $0 < |x-1| < \frac{1}{4M}$ 时,$|x-1| < \frac{1}{M}$, 所以 $\frac{1}{|x-1|} > M$ 这就证明了 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

定理 2.3.2: 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 那么存在常数 $\frac{1}{f(x)}$

2.3.3 无穷小的比较

定义 2.3.3

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么就说 β 与 α 是同阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$, 那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么就说 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$

前三个定义解释:$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ 是指分子趋于 0 的速度比分母快,$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ 是指分子趋于 0 的速度比分母慢,$\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ 是指趋于 0 的速度一样.

同时需要注意的是, 并不是任意两个无穷小都可进行比阶的. 例如, 当 $x \to 0$ 时,$x \sin \frac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小, 但是却不可以比阶, 也就是说既无高低阶之分, 也无同阶可言, 因为 $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

2.3.4 无穷大的比较

- 当 $x \to +\infty$ 时,$\ln^a x \ll x^\beta \ll a^x$,其中$\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.
- 当 $n \to \infty$ 时,$\ln^a n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$,其中$\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.

2.3.5 无穷小的运算法则

1 有限个无穷小的和是无穷小

2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小

3 有限个无穷小的乘积是无穷小

题目 7. 求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(-n)^n}$

解答.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(-n)^n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$$

从上面可以看出,-1^n 是有界变量. 而根据无穷大的比较, 分母趋于无穷的速度远大于分子, 因此 $\frac{n!}{n^n}$ 可求的函数极限为 0.

4 无穷小的运算

a. $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min\{m, n\}(1)$

b. $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}), x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})(2)$

c. $o(x^m)=o(kx^m)=k\cdot o(x^m), k\neq 0$且为常数(3)

定理 2.3.3

β 与α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha)$$

2.3.6 无穷大的运算法则

- 两个无穷大量的积仍未无穷大量
- 无穷大量与有界变量的和仍是无穷大量

2.4 极限存在法则

2.4.1 夹逼准则

定理 2.4.1: 数列极限存在准则

如果数列 $\{|x_n|\},\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

- 从某项开始, 即 $\exists n_0\in N_+$(即$n\to\infty$), 当 $n>n_0$ 时, 有

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$$

- $\lim_{n\to\infty}y_n=a, \lim_{n\to\infty}z_n=a$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$

现在将上述数列极限存在准则推广至函数极限

定理 2.4.2: 函数极限存在准则

如果

- 当 $x\in U^{\circ}(x_0,r)$(或 $|x|>M$) 时

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

- $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)}g(x)=A, \lim_{x\to x_0(x\to\infty)}h(x)=A$

那么 $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)}f(x)$ 存在, 且等于 A.

定理 2.4.1 和定理 2.4.2 称为**夹逼准则**

2.4.2 单调有界准则

定理 2.4.3: 数列的单调有界准则

单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在

定理 2.4.4: 函数的单调有界准则

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 一定存在

2.4.3 柯西极限存在准则

该准则表示, 数列 x_n 收敛的**充分必要条件**是：该数列中的元素随着序数的增加而愈发靠近, 即足够靠后的任意两项都无限接近.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^+, \text{当} m > N, n > N \text{时.总有} |x_n - x_m| < \varepsilon$$

2.4.4 极限存在准则的两个应用 (两个重要极限)

$$\lim_{\square\to\infty} (1 + \frac{1}{\square})^{\square} = e$$

$$\lim_{\square\to 0} \frac{\sin\square}{\square} = 1$$

2.5 极限运算法则

2.5.1 数列极限的运算法则

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则

- $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$
- 若 $b \neq 0, y_n \neq 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

上述运算规则可推广至有限个数列的情况

2.5.2 函数极限的运算法则

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 那么

- $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k\lim f(x) \pm l\lim g(x) = kA \pm lB$, 其中 k, l 为常数

- $\lim[f(x)\bullet g(x)]=\lim f(x)\bullet\lim g(x)\equiv A\bullet B$, 特别的, 若 $\lim f(x)$ 存在,n 为正整数, 则 $\lim[f(x)]^n=\left[\lim f(x)\right]^n$
- $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$

除此之外还有以下定理:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

定理 2.5.1

如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$, 而 $\lim\varphi(x)=A$, $lim\psi(x)=B$, 那么 $A\geqslant B$

定理 2.5.2: 复合函数极限运算法则

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义，若 $\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0$,$\lim_{u\to u_0}f(u)=A$, 且存在 $\delta_0>0$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

注 2.5.3: 常用结论

- 存在 ± 不存在 = 不存在 (只有这一个是不存在, 其余都是不一定或者存在)
- 不存在 ± 不存在 = 不一定
- 存在 ×(÷) 不存在 = 不一定
- 不存在 ×(÷) 不存在 = 不一定

引理 2.5.4: 常用的结论

- $\lim f(x)=A\neq 0\Rightarrow\lim f(x)g(x)=A\lim g(x)$
- $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在,$\lim g(x)=0\Rightarrow\lim f(x)=0$

2.5.3 函数极限的计算

无穷大与无穷小的关系

根据定理 1.3.2 可以用于函数极限的计算

单调有界准则

前面已经赘述

定理 2.5.5: 数列的单调有界准则

单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在

定理 2.5.6: 函数的单调有界准则

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 一定存在

等价无穷小替代

关于等价无穷小, 有以下两个定理

定理 2.5.7

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta = \alpha + o(\alpha)$$

定理 2.5.8

设 $\alpha \sim \tilde{\alpha}$,$\beta \sim \tilde{\beta}$, 且 $\lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.$$

定理 2.5.2 表明, 求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 但是需要遵循以下代换原则

- 乘除关系可以换: 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$
- 加减关系一定条件下可以换
  - 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$, 则$\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$
  - 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$, 则$\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$

加减关系代换准则证明如下:

证明.

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha_1 - \beta_1} = \lim \frac{\beta(\frac{\alpha}{\beta} - 1)}{\beta_1(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - 1)} = 1$$

□

当 $x \to 0$ 时, 有

$$\boxed{\begin{aligned} & x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \\ & \quad \sim \ln(1+x) \\ & \quad \sim e^x - 1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & (1+x)^a \sim 1 + ax \\ & a^x - 1 \sim x \ln a \end{aligned}}$$

注 2.5.9: 上述结论的推广

当 $x \to 0$ 时, 若 $(1+x)^a - 1 \sim ax$, 则 $\alpha(x) \to 0, \alpha(x)\beta(x) \to 0$, 则

$$[1+\alpha(x)]^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}x^2 \sim 1 - \cos x \sim \sec x - 1 \sim x - \ln(1+x)}$$

$$\boxed{\frac{1}{6}x^3 \sim x - \sin \sim \arcsin x - x}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}x^3 \sim x - \arctan x \sim \tan x - x}$$

幂指函数求极限

定义 2.5.1

一般地，对于形如 $u(x)^{v(x)}$ $(u(x) > 0, u(x) \not\equiv 1)$ 的函数 (通常称为幂指函数), 如果

$$\lim u(x) = a{>}0, \lim v(x) = b$$

那么

$$\lim u(x)^{v(x)} = a^b$$

利用基本极限求极限

$$\boxed{\begin{aligned} & \lim_{\square \to \infty} (1 + |\square|)^{\frac{1}{\square}} = e^{|\square|\frac{1}{\square}} \qquad \lim_{\square \to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1 \\ & \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0) \\ & \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \end{aligned}}$$

洛必达法则

定义 2.5.2

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0(\infty)$
- $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或∞)

则 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

需要注意的是使用过洛必达法则之后的极限必须存在, 即 $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 必须存在.

证明. 以 $\lim_{x\to 0} = \frac{x^2-\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 为例, 可以看到此时结果是震荡的, 因此函数极限不存在, 但是显然是错误的. 正确的方法是这样的 $\lim_{x\to x_0} = \frac{x^2-\sin\frac{1}{x}}{x} = x\sin\frac{1}{x}$ □

洛必达法则多用于 7 种未定式的计算主要有以下类型 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty, \infty^0, 1^\infty$

- $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty$ 可以直接计算或者简单转换可以直接计算.
- $\infty-\infty$ 可以通过取倒数或者取对数进行计算

题目 8. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right]$

解答.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

题目 9. $\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$

解答. 原式 $\overset{令 u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^u-1-u}{u^2} = \lim_{u\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^u-1}{2u} = \frac{1}{2}$

题目 10. 设 $f(x)$ 二阶可导,$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=2$. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}$

解答.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}\qquad\text{(洛必达法则)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{x}$$

$$\because f'(0)=1$$

$$\therefore\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$

$$=\frac{1}{2}f''(0)=1$$

题目 10 的注记. 在使用洛必达法则时候, 如果想对 n 阶进行求导使用洛必达法则, 那么需要注意的是 $n+1$ 阶导函数存在.

- ∞^0 与 0^0 通常使用$\lim u^v=e^{\lim v\ln u}$来计算

题目 11. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 n 是给定的自然数.

解答.

$$\text{原式}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)}{x}}\qquad\text{(洛必达法则)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{n}}{\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{1+2+\cdots+n}{1+1+\cdots+1}$$

$$\text{原式}=e^{\frac{n+1}{2}}$$

- 1^∞ 通常使用$\lim u^v=e^{\lim(u-1)v}$来计算, 需要知道的是 1^∞ 可以化为第二个重要极限.

题目 12. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+x}{(x-a)(x-b)}\right]^x$

解答.

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-a}\right)^x\times\left(\frac{x+1}{x-b}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^x\times\left(1+\frac{1-b}{x+b}\right)^x$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x-a}}\times e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(1-b)x}{x+b}}$$

$$=e^{a+1-b}$$

题目 13. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}}{3\sqrt{n}}\right]^n$, 其中$a>0,b>0,c>0$.

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}}{3\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}}+\sqrt{1+\frac{c}{n}}}{3}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sqrt{1+ax}+\sqrt{1+bx}+\sqrt{1+cx}+3-3}{3}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+ax}+\sqrt{1+bx}+\sqrt{1+cx}-3}{3x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{2\sqrt{1+ax}}+\frac{b}{2\sqrt{1+bx}}+\frac{c}{2\sqrt{1+cx}}}{3} \\
&= \frac{a+b+c}{6}
\end{aligned}
$$

综上所述, 答案为 $e^{\frac{a+b+c}{6}}$

题目 14. 求极限 $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= lim_{x\to 0^+}\ \frac{x^x(1-(\frac{\sin x}{x})^x)}{x^3} \\
&= lim_{x\to 0^+}\ \frac{1-e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}}{x^3}(\text{当 x 趋于 0 的时候}x^x,\text{趋于 1}) \\
&= lim_{x\to 0^+}\ -\frac{\ln\frac{\sin}{x}}{x^2}(\text{此处不可以用等价无穷小}) \\
&= lim_{x\to 0^+}\ \frac{\ln(1+\frac{\sin x-x}{x})}{x^2} \\
&= lim_{x\to 0^+}\ \frac{\sin x}{x^3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

综上所述, 答案为 $\frac{1}{6}$

题目 15. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$, 其中$a_i>0,i=1,2,\cdots,n$

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1'+a_2'+\cdots+a_n'-n}\cdot\frac{a_1'+a_1'+\cdots+a_n'-n}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x} = \ln(a_1a_2\cdots a_n) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1'+a_2'+\cdots+a_n'-n}} = \mathrm{e}
\end{aligned}
$$

综上所述, 答案为 $a_1a_2a_3a_4...a_n$

泰勒公式

当 $x\to 0$ 时, 有以下结论

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$
$\arcsin x = x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$
$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$	$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$
$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$	$(1+x)^a = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$

注 2.5.10: 泰勒公式使用注意事项

- 泰勒公式是在一点处展开, 函数必须在那一点处 n 阶倒数存在
- 分子分母上下同阶

夹逼准则求极限

- 主要通过放缩来求极限
- 常用的结论有: 若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+...+a_m^n}$, 其中 $a_i>0(i=1,2,3,...,m)$, 令 $\max a_i = a$, 则 $\sqrt[n]{a^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{ma^n}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a, \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m\cdot a^n}=a$, 则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a$

定积分求极限

第三章　连续

3.1　函数的连续性

连续函数是一条连续而不间断的曲线, 以下为函数连续的两个定义

定义 3.1.1

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$$

那就称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 3.1.2

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域有定义, 如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续其 $\varepsilon-\delta$ 语言表达如下:
$f(x)$ 在点x_0连续 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当$|x-x_0|<\delta$ 时, 有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

3.1.1　反函数与复合函数的连续性

定义 3.1.3

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加 (或单调减少) 且连续那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{\ \mathrm{y}\mid\mathrm{y}=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加 (或单调减少) 且连续

定义 3.1.4

设函数 $y=f\Big[g(x)\Big]$ 由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成 $\mathring{U}\ (x_0)\subset D_{f,g}$. 若 $\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续, 则

$$\lim_{x\to x_0}f\Big[g(x)\Big]=\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$$

3.1.2 初等函数的连续性

定义 3.1.5

- 基本初等函数在其定义域内都连续
- 初等函数在其定义区间内都连续

3.1.3 闭区间上连续函数的性质

有界性与最大值最小值定理

定义 3.1.6: 最值定理

在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值

零点定理与介值定理

定义 3.1.7: 零点定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[\ a,b\ \right]$ 上连续, 且 $f(\ a\ )$ 与 $f(\ b\ )$ 异号 (即 $f(\ a\ )\cdot f(\ b\ )<0$), 则在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使 $f(\xi)=0$.

定义 3.1.8: 介值定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且在这区间的端点取不同的函数值,

$$f(a)=A\text{及}f(b)=B$$

则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C, 在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(\xi)=C(a<\xi<b)$$

该定理的几何意义是: 连续曲线弧 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 至少存在相交于一点.

3.2 函数的间断点

3.2.1 间断点的相关概念

- 可去间断点: 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A\neq f(x_0)(f(x_0)$ 甚至可以无定义), 则这类间断点称为可去间断点

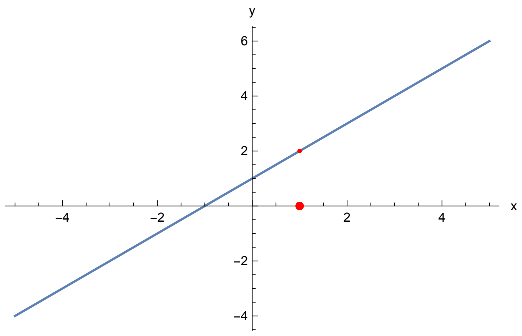


图 3.1: 可去间断点函数图像

- 跳跃间断点: 若 $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在, 但 $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$, 则这类间断点称为跳跃间断点

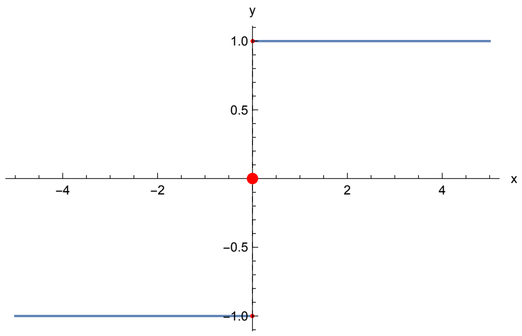


图 3.2: 跳跃间断点函数图像

- 无穷间断点: 若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, 则这类间断点称为无穷间断点, 如 $y = \tan x$

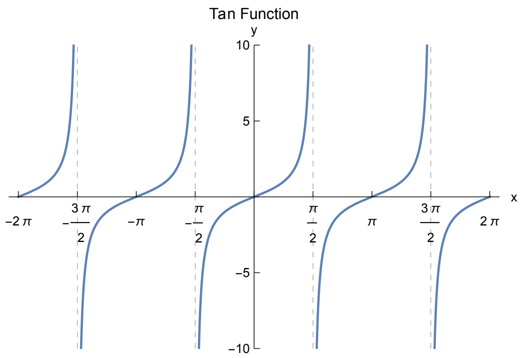


图 3.3: 无穷间断点函数 tan 图像

- 振荡间断点: 若 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 振荡不存在, 则这类间断点称为振荡间断点

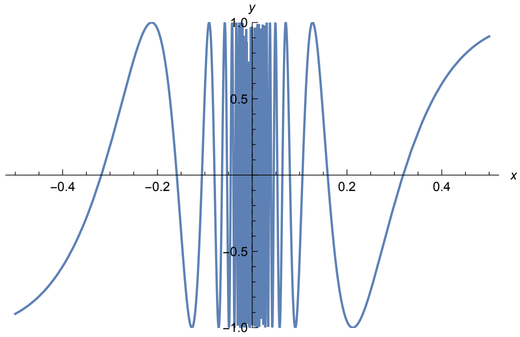


图 3.4: 振荡间断点函数 $\sin\frac{1}{x}$ 图像

3.2.2 间断点的分类

通过求函数在该点的左右极限来判断

- 第一类间断点：$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在
  - 可去：$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$
  - 跳跃：$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
- 第二类间断点：除第一类以外的间断点 $\implies$ $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 均至少一个不存在