第一章　导数

1.1　导数的概念

1.1.1　导数的定义

定义 1.1.1: 导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx(点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内) 时, 相应地, 因变量取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$; 如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在, 那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**, 记为 $f'(x_0)$, 即

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记作 $y'|_{x=x_0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

注 1.1.1: 导数定义的注意事项

1. 在考题中, 增量 Δx 一般会被命题人广义化为"$\square$", 即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\xlongequal{\text{广义化}}\lim_{\square\to 0}\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$$

需要知道的是 $\square$ 需要同时趋近于 0^+ 和 0^- 该点导数才存在, 如果仅趋近于其中的一个, 则是 $\square$ 处的单侧导数

若在上式中, 令 $x_0+\Delta x=x$, 则可将导数定义式写成

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2. 以下的三种说法是等价的:
   - $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导
   - $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数存在
   - $f'(x_0)=A\,(A\text{为有限数})$
3. 导数若存在, 则导数要么连续, 要么只可能有震荡间断点

   导数若存在有震荡间断点的证明: 以函数 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ 为例:

   根据导数定义对函数在 $x=0$ 处求导:$F'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 因此函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处导数存在. 那么对函数求导:
   $F'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$, 那么易知 $\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ 是震荡的. 虽然函数导数存在, 但是这是震荡间断点. □

   同时, 导数震荡的话, 则导数极限不存在, 由此可以推出衍生推论: 导数极限定理4.1.1
4. 原函数可导无法推出导函数连续
5. **函数在一点可导的必要条件: 若 $f(x)$ 在一点可导, 则 $f(x)$ 在该点连续**
6. 需要区分一点处的右导数和导数的右极限
   - $f'_+(x_0)\Rightarrow$ 表示一点处的右导数 $\Rightarrow\lim_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
   - $f'(x_0^+)=f'(x_0+0)\Rightarrow$ 导数的右极限 $\Rightarrow\lim_{x\to x_0^+}f'(x)$
   - $f(x_0^+)=f(x_0+0)\Rightarrow$ 函数的右极限 $\Rightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)$

   如果函数 $f(x)$ 连续可导或者 $f'(x)$ 连续, 那么 $f'_+(x_0)=f'(x_0^+)$, 即右导数等于右极限. 如果不连

续, 以函数 $f(x)=\begin{cases} x, x\leqslant 0 \\ x+1, x>0 \end{cases}$ 为例: 显然该函数在 $x=0$ 处不连续. 那么:

- 左导数:$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x-0}{x}=1$
- 右导数:$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x+1-0}{x}=\dfrac{1}{0}=\infty$
- 导数的右极限:$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)'=1$

题目 1. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左, 右导数都存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处

(A) 可导　(B) 连续　(C) 不可导　(D) 不一定连续

解答. 左右导数存在说明左右可导, 左可导说明左连续, 右可导说明右连续. 左连续说明左侧极限等于该点函数值, 右连续说明右侧极限等于该点函数值, 那么左右极限相等且等于该点函数值, 那么函数在该点连续. 因此 B 选项正确.

题目 2. 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

(A)$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在　(B)$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

(C)$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　(D)$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

解答. A: $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}$, 若 $h\to 0$ 可以知道的是 $1-\cos h$ 趋近于 0^+,$\dfrac{1-\cos h}{h^2}\to 1$, 那么 $\dfrac{1}{2}f'_{+}(0)$ 存在

B: $\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)=\lim_{h\to 0}\dfrac{1-e^h}{h}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}$, 易知 $1-e^h$ 同时趋近于 0^+ 和 0^-, 那么函数 $f'(0)$ 存在

C:$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\dfrac{h-\sin h}{h^2}$, 已知 $h-\sin h\sim\dfrac{1}{6}h^3$, 那么 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\dfrac{h}{1}$ 极限存在, 同时 $h\to 0$, 但是不可以推出 $\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}$ 极限存在, 只能得到该极限是为定式, 那么更无法推出该导数存在

D: 若 $\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在, 那么其实什么都推不出来, 因为不知道 $\dfrac{f(2h)}{h}$ 和 $\dfrac{f(h)}{h}$ 是否存在, 如果写成下列形式 $\lim_{h\to 0}\dfrac{[f(2h)-f(0)]-[f(h)-f(0)]}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{f(2h)-f(0)}{h}-\dfrac{f(h)-f(0)}{h}\right)$, 则违反了极限的

运算法则.

综上答案选择 B 选项

题目 2 的注记. 若想推出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则必须满足下面的四个条件:

1. 一动减一定: 必须是一个动点减一个定点. 比如上题中的 D 选项, 本质上是两个动点相减.

2. 可正可负: 指的是分母, 即定义中的 $\square$, 需要同时趋近于 0^+ 和 0^-, 如果只能趋近于一个, 则为单侧导数.

3. 上下同阶: 即分子的阶数小于等于分母阶数. 但是如果要求是充要条件则必须是同阶. 比如下面的例子: 若 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)-f(0)}{x^4}$ 存在, 那么 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)-f(0)}{x-\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x^4}$, 其中 $x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$, 那么 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)-f(0)}{(x-\sin x)-0}\cdot\dfrac{1}{6x}$, 其中 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{6x}\to\infty$, 那么 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)-f(0)}{(x-\sin x)-0}$ 必定存在且 $\dfrac{f(x-\sin x)-f(0)}{(x-\sin x)-0}=0\Rightarrow f'(0)=0$

4. 填满邻域: 在定义中的 $\square$ 需要把其附近邻域都给填满. 比如下面的例子:$\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=0$, 无法推出 $f'_+(0)=0$ 存在, 因为 $\dfrac{1}{n}$ 取不到无理数, 无法包含 $\square$ 邻域

定理 1.1.1: 导数极限定理

如果 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内连续, 在 x_0 的去心邻域内可导, 且导函数在 x_0 处的极限存在 (等于 a), 则 $f(x)$ 在 x_0 处的导数也存在并且等于导函数的极限 (等于 a)

上述定理可解释为导函数如果在某点极限存在, 那么在该点导函数一定连续. 因为导数存在要么有震荡间断点, 要么连续. 如果说该点导函数极限存在, 那么一定连续.

题目 3. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有二阶导数，则

(A) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时,$f'(x_0)>0$. (C) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时,$f''(x_0)>0$.

(B) 当 $f'(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加 (D) 当 $f''(x_0)>0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数

解答.

题目 3 的注记.

题目 4. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{f(x)}=1$, 则下列结论中正确的个数为

(1)$f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=0$.　(2)$f''(0)$ 存在，且 $f''(0)=2$.

(3)$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值　(4)$f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续.

解答.

题目 4 的注记.

题目 5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有定义，且 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, 则

(A) 当 $\lim_{x}\to 0\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时 , $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 (B) 当 $\lim_{x}\to 0\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时 , $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时 , $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$　(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时 , $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

解答.

题目 5 的注记.

题目 6. 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$, 则当 $\Delta x\to 0$ 时 , $f(x)$ 在 x_0 处的微分 dy 是 Δx 的无穷小.

A. 等价　B. 同阶　C. 低阶　D. 高阶

解答.

题目 6 的注记.

题目 7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leq\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots, \end{cases}$ 则:

(A)$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.　(C)$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.　(D)$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解答.

题目 7 的注记.

题目 8. 下列命题正确的个数为:

1. 设 $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续
2. 设 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续
3. 设 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续
4. 设 $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ 中至少有一个不存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必不可导

解答.

题目 8 的注记.

1.1.2 单侧导数

定义 1.1.2: 单侧导数的定义

函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导的充分必要条件是左导数和右导数存在且相等, 其表达式为

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{\text{记}}{=\!=} f'_-(x_0)$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{\text{记}}{=\!=} f'_+(x_0)$$

注 1.1.2: 一点可导与邻域的关系

- 一点可导 $\neq$ 点邻域可导: 以函数 $f(x)=x^2D(x)=\begin{cases} x^2, x\in \text{有理数} \\ 0, x\in \text{无理数}\end{cases}$ 为例
- 一点可导邻域内连续: 若函数在一点可导, 则函数在该点连续, 而无法断言函数在这点附近的连续性, 仍可以 $f(x)=x^2D(x)$ 为例

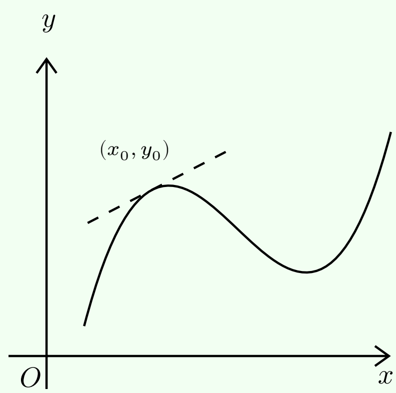
1.1.3 导数的几何意义

定义 1.1.3: 导数的几何意义

$y=f(x)$ 在 x_0 处导数是 $f(x)$ 在 x_0 处切线的斜率 $k_{切}=f'(x_0)$ 并且 $k_{切}*k_{法}=-1$

在 (x_0,y_0) 处, 切线方程:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$



如上图所示, 点 (x_0,y_0) 处的切线为虚线

法线方程:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

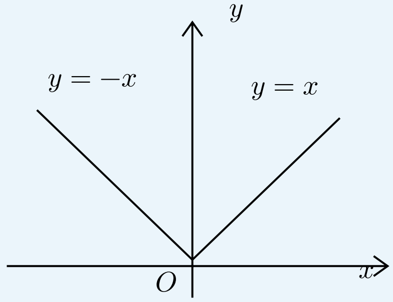
注 1.1.3: 角点与无穷导数

- 研究 $y=f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的切线问题

  解答. 从 $x=0$ 出发, 取增量 Δx, 有 $\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|\Delta x|$

  当 $\Delta x>0$ 时,$\Delta y=\Delta x$, 则 $f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1\xlongequal{记}k_+$

  当 $\Delta x<0$ 时,$\Delta y=-\Delta x$, 则 $f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-1\xlongequal{记}k_-$



- 研究 $y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处的切线问题

解答. 显然, 在 $x=0$ 处 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}$ 当 $\Delta x>0$ 时,$f'_{+}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=+\infty$ $\Delta x<0$ 时,$f'_{-}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=+\infty$ 这样的结果称为无穷导数. 又 $\pm\infty$ 被叫作广义的数, 所以无穷导数在有些数学场合也可被视为导数存在的特殊情形. 但是在考研中无穷被认为是不存在

1.1.4　高阶导数

定义 1.1.4: 高阶导数的定义

函数 $y=f(x)$ 具有 n 阶导数, 也常说成函数 $f(x)$ 为 n 阶可导, 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数, 那么 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数. 记作:

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}\text{或}f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

当 $n=2$ 时:

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}\text{或}f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

1.2　微分

1.2.1　微分的概念

定义 1.2.1: 微分的定义

设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义,x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这个区间内, 如果函数的增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是可微的, 而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作 dy, 即:

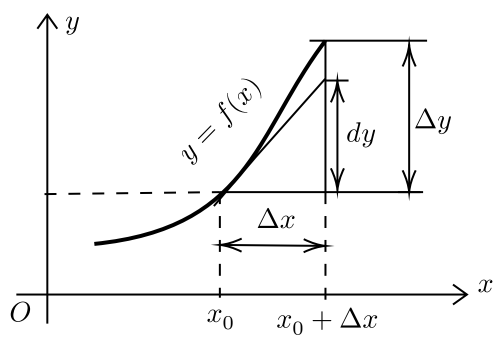
$$dy = A\Delta x$$

函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 的微分, 称为函数的微分, 记作 dy 或 $df(x_0)$, 即

$$dy = f'(x)\Delta x$$

1.2.2　微分的几何意义

若 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则在点 (x_0, y_0) 附近可以用切线段近似代替曲线段, 这是可微的几何意义.



1.3 导数的计算

1.3.1 基本求导公式

$(C)' = 0;$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$
$(a^x)' = a^x \ln a;$	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x;$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a};$	$(\ln\lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x};$
$(\sin x)' = \cos x;$	$(\cos x)' = -\sin x;$
$(\tan x)' = \sec^2 x;$	$(\cot x)' = -\csc^2 x;$
$(\sec x)' = \sec x \tan x;$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x;$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$	$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$
$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}};$	$[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

1.3.2 有理运算法则

设 $u=u(x), v=v(x)$ 在 x 处可导, 则

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

1.3.3 复合函数的导数与微分形式不变性

复合函数导数

定义 1.3.1: 复合函数导数的定义

设 $y=f(g(x))$ 是由 $y=f(z)$,$z=g(x)$ 复合而成, 且 $f(z)$,$g(x)$ 均可导, 则 $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$

微分形式不变形

定义 1.3.2: 微分形式不变形

设 $u=g(x)$ 在点 x(没有下标是泛指的点, 下同) 处可导,$y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 处可导, 则

$$\mathrm{d}\{f[g(x)]\}=f'[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x=f'[g(x)]\mathrm{d}[g(x)]$$

指无论 u 是中间变量还是自变量,$dy=f'(u)du$ 都成立.

1.3.4 分段函数的导数

设 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\geqslant x_0, \\ f_2(x), & x<x_0, \end{cases}$ 其中 $f_1(x),f_2(x)$ 分别在 $x>x_0,x<x_0$ 时可导, 则

- 在分段点 x_o 处用导数定义求导：$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\dfrac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}, f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\dfrac{f_2(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 根据 $f'_+(x_0)$ 是否等于 $f'_-(x_0)$ 来判定 $f'(x_0)$;
- 在非分段点用导数公式求导, 即 $x>x_0$ 时,$f'(x)=f'_1(x); x<x_0$ 时,$f'(x)=f'_2(x)$

1.3.5 反函数的导数

定义 1.3.3: 反函数导数的定义

设 $y=f(x)$ 为单调、可导函数, 且 $f'(x)\neq 0$, 则存在反函数 $x=\varphi(y)$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$, 即 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

注 1.3.1: 反函数的二阶导数

在 $y=f(x)$ 单调, 且二阶可导的情况下, 若 $f'(x)\neq 0$, 则存在反函数 $x=\varphi(y)$, 记 $f'(x)=y'_x,\varphi'(y)=x'_y$, 则有

$$y'_x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{x'_y}$$

$$y''_{xx}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{1}{x'_y}=-\frac{1}{(x'_y)^2}\cdot(x'_y)'_y\cdot\frac{1}{x'_y}=-\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^2}\cdot\frac{1}{x'_y}=-\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}$$

反过来则有:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$$

1.3.6 参数方程求导

定义 1.3.4: 参数方程所确定的函数的导数

设 $y = f(x)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} (\alpha < t < \beta)$ 确定的函数

如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$ 则其一阶导可写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \times \frac{1}{\varphi'(t)} \\ = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^2(t)} \times \frac{1}{\varphi'(t)} \\ = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}\end{aligned}$$

1.3.7 对数函数求导法

对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子, 一般先取对数再求导. 设 $y = f(x)(f(x) > 0)$, 则

- 等式两边取对数, 得 $\ln y = \ln f(x)$
- 两边对自变量 x 求导 (同样注意 $y = f(x)$, 即将 y 看作中间变量), 得

$$\frac{1}{y}y' = \Big[\ln f(x)\Big]' \Rightarrow y' = \frac{yf'(x)}{f(x)}$$

1.3.8 幂指函数求导法

对于 $u(x)^{v(x)}$ 函数, 可采用 $e^{v(x)\ln u(x)}$ 进行转换求导然后求导, 得

$$\left[u(x)^{\nu(x)}\right]' = \left[\mathrm{e}^{\nu(x)\ln u(x)}\right]' = u(x)^{\nu(x)}\left[\nu'(x)\ln u(x) + \nu(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

1.3.9 隐函数求导

隐函数的定义

定义 1.3.5: 隐函数与显函数的定义

- 隐函数:y 与 x 的关系隐含在一个等式中,$F(x,y)=0$, 如 $x^2+y^2=4$
- 显函数: 因变量与自变量在等式两端,y 和 x 各占一边, 如 $y=3x$

隐函数求导

定义 1.3.6: 隐函数求导法则

设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的可导函数则

- 方程 $F(x,y)=0$ 两边对自变量 x 求导, 注意 $y=y(x)$, 即将 y 看作中间变量, 得到一个关于 y' 的方程
- 解该方程便可求出 y'

1.3.10 高阶导数求导

1.4 导数的几何应用

1.4.1 极值

1.4.2 单调性判别

1.4.3 凹凸性

1.4.4 拐点

1.4.5 渐近线

1.4.6 最值

1.4.7 函数图像绘制

1.4.8 曲率与曲率半径