第一章　导数

1.1　导数的定义

定义 1.1.1: 导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx(点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内) 时，相应地，因变量取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$; 如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记作 $y'\,|_{x=x_0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}$.

注 1.1.1

在考题中，增量 Δx 一般会被命题人广义化为"□"，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\xlongequal{\text{广义化}}\lim_{\square\to 0}\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$$

1.1.1　导数与导函数

导数是一个极限，导函数是一个函数

1.1.2 单侧导数

定义 1.1.2

函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导的充分必要条件是左导数和右导数存在且相等, 其表达式为

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{\text{记}}{=}f'_-(x_0),$$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{\text{记}}{=}f'_+(x_0),$$

1.2 导数的计算

1.2.1 基本求导公式

(1) $(C)'=0$;	(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$;
(3) $(a^x)'=a^x\ln a$;	(4) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$;
(5) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;	(6)$(\ln\|x\|)'=\dfrac{1}{x}$;
(7) $(\sin x)'=\cos x$;	(8) $(\cos x)'=-\sin x$;
(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$;	(10) $(\cot x)'=-\csc^2 x$;
(11)$(\sec x)'=\sec x\tan x$;	(12)$(\csc x)'=-\csc x\cot x$;
(13)$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	(14)$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
(15)$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;	(16)$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

1.2.2 有理运算法则

设 $u=u(x),v=v(x)$ 在 x 处可导, 则

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq0)$$

1.2.3 分段函数的导数

分段函数在分段点处的导数, 一定要要用定义来求, 结果有可能是不可导的

即: 设 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x \geqslant x_0, \\ f_2(x), & x < x_0, \end{cases}$ 则在 x_0 处用导数定义求导:$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 最后还需要根据左右导数是否相等来判定分段点 $f'(x_0)$

1.2.4　复合函数的导数与微分形式不变性

复合导数

定义 1.2.1: 复合函数导数的定义

设 $y=f(g(x))$ 是由 $y=f(z)$,$z=g(x)$ 复合而成, 且 $f(z)$,$g(x)$ 均可导, 则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=f'(z)\cdot g'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

微分形式不变形

指无论 u 是中间变量还是自变量,$dy=f'(u)du$

1.2.5　反函数的导数

定义 1.2.2

反函数的导数等于原函数导数的倒数, 即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注 1.2.1: 解释

函数类型	自变量与因变量	函数表达式
直接函数	自变量:x 因变量:y	$y=\frac{1}{6}x$
反函数	自变量:y 因变量:x	$x=6y$
反函数	自变量:x 因变量:y	$y=6x$

需要注意的是, 定理二中采用的是解释中第二行的形式

反函数的二阶导函数为:$y''_{xx}=\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{1}{x'_y}=\frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}$

1.2.6 参数方程所确定的函数的导数

定义 1.2.3

设 $y=f(x)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} (\alpha<t<\beta)$ 确定的函数
如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$ 则其一阶导可写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\Big)\times\frac{1}{\varphi'(t)}\\&=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^2(t)}\times\frac{1}{\varphi'(t)}\\&=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}\end{aligned}$$

1.2.7 对数函数求导法

对于多项相乘, 相除, 开方, 乘方的式子, 一般对其先求对数在求导数. 即

$$\ln y=\ln f(x)$$

然后两边对 x 求导即可.

1.2.8 幂指函数求导法

对于 $u(x)^{v(x)}$ 函数, 可采用 $e^{v(x)\ln u(x)}$ 进行转换求导

1.2.9 变上限积分

1.3 导数的几何意义

定义 1.3.1

$y=f(x)$ 在 x_0 处导数是 $f(x)$ 在 x_0 处切线的斜率 $k_{切}=f'(x_0)$ 并且 $k_{切}*k_{法}=-1$
在 (x_0,y_0) 处, 切线:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

1.4 函数可导性与连续性的关系

$\boxed{\text{可导一定连续, 连续不一定可导.}}$

注 1.4.1: 关于函数可导性与联系性的解释

函数在 x_0 处可导的充分必要条件是左导数和右导数均存在且相等. 但是通过对函数 $|x|$ 的分析, 可以知道的是函数在原点 O 处左右导数均存在, 但是却不相等.

1.5 高阶导数

定义 1.5.1: 高阶导数的定义

函数 $y = f(x)$ 具有 n 阶导数, 也常说成函数 $f(x)$ 为 n 阶可导, 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数, 那么 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数. 记作:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}f(x)}{dx^{(n)}}$$

- 找规律 + 归纳 $(\frac{1}{x+1})^{(n)} = (-1)^n(x+1)^{-(n+1)} \cdot n!$
- 莱布尼兹公式: 适用于两个函数相乘求高阶导数 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$

1.6 隐函数

定义 1.6.1: 隐函数与显函数的定义

- 隐函数:y 与 x 的关系隐含在一个等式中,$F(x, y) = 0$,eg:$x^2 + y^2 = 4$
- 显函数: 因变量与自变量在等式两端,y 和 x 各占一边,eg:$y = 3x$

1.6.1 隐函数求导法则

定义 1.6.2

y 看作与 x 相关的量, 等式两端同时对 x 求导. 如 $y \to y'(x)$或$y^2 \to 2y(x) \cdot y'(x)$或$lny = \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x)$

题目 1. 求 $y = x^{\sin x}$ 导数

解答. 对等式两边取对数可得:$\ln y = \sin x \ln x$
根据隐函数求导法则, 对等式两边求导可得:$\frac{y'}{y} = \cos x \times \ln x + \frac{\sin x}{x}$
化简可得导数为 $y' = x^{\sin x} \times (\cos x \times \ln x + \frac{\sin x}{x})$

题目 2. 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 导数

解答. 对等式两边取对数可得:$\ln y=\frac{1}{2}\times\ln\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$
即:$2\ln y=\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)$
根据隐函数求导法则, 对等式两边求导可得:$2\times\frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$
化简可得导数为 $y'=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\times(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$