第一章　反常积分

1.1　反常积分的概念

定义 1.1.1: 反常积分的定义

- **无穷区间**上反常积分的概念与敛散性

  设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数:

  1. $$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

     若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则称发散

  2. $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

     若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则称发散

  3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

     若右端**两个积分都收敛**[a], 则称反常积分收敛, 否则称发散

- **无界函数**的反常积分的概念与敛散性

  定义 1.1.2: 瑕点的定义

  使 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内无界的点即为瑕点, 例如:$\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty, x=0$ 为函数的瑕点.

  设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数,x_0 为 $f(x)$ 的瑕点.

1. 若 $x=a$ 是唯一瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则称发散. [b]

2. 若 $x=b$ 是唯一瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$$

若上述极限存在, 则称反常积分收敛, 否则称发散.

3. 若 $x=c\in(a,b)$ 是唯一瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\,,$$

若右端两个积分都收敛, 则称反常积分收敛, 否则称发散.

[a] 两个积分必须都收敛, 不能使用不存在 + 不存在 = 存在

[b] 前面定积分章节, 要求 $\int_a^b f(x)dx$ 存在的必要条件是 $f(x)$ 有界, 但是此处似乎无界, 也可使积分存在, 似乎矛盾, 需要注意的是, 两者的积分不一样, 前面要求有界的是黎曼积分, 而此次可以无界的是反常积分, 二者不同.

注 1.1.1: 敛散性的判定

- 无穷区间
  1. 比较判别法[a]: 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 并且 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)(a\leqslant x<+\infty)$, 则
     - 当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时,$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
     - 当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时,$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散
  2. 比较判别法的极限形式[b]: 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $f(x)\geqslant 0, g(x)>0, \lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$(有限或 ∞), 则
     - 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq\infty$ 时 ,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性
     - 当 $\lambda=0$ 时, 若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛
     - 当 $\lambda=\infty$ 时, 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散
- 无界函数

1. 比较判别法: 设 $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续, 瑕点同为 $x=a$, 并且 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)(a<x \leqslant b)$, 则
   - 当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时,$\int_a^b f(x)dx$ 收敛
   - 当 $\int_a^b f(x)dx$ 发散时,$\int_a^b g(x)dx$ 发散
2. 比较判别法的极限形式: 设 $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续, 瑕点同为 $x=a$, 并且 $f(x) \geqslant 0, g(x)>0(a<x \leqslant b), \lim_{x \rightarrow a^{+}} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$(有限或 ∞), 则
   - 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq \infty$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性
   - 当 $\lambda=0$ 时, 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛
   - 当 $\lambda=\infty$ 时, 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也发散

[a]可通过不等式放缩来证明
[b]通过等价无穷小求极限来判断

结论 1.1.1: 两个重要结论

1. $\int_0^1 \dfrac{1}{x^p}dx \begin{cases} 收敛, 0<p<1 \\ 发散, p \geq 1 \end{cases}$

   由于 $x \rightarrow 0$ 时, 存在 $\sin x \sim \cdots \sim x$, 因此有 $\int_0^1 \dfrac{1}{\sin x^p}dx \begin{cases} 收敛, 0<p<1 \\ 发散, p \geq 1 \end{cases}$, 凡是与 x 趋于 0 的 “速度”一样的函数 $f(x)$ 均可如上讨论

2. $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x \begin{cases} 收敛, p>1 \\ 发散, p \leq 1 \end{cases}$. 如当 $x \rightarrow +\infty$ 且 $a>0$ 时，$ax+b$ 亦趋于 $+\infty$, 与 x 趋于 $+\infty$ 的“速度”一样, 当 $ax+b \geq k>0$ 时，$\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{(ax+b)^p}dx$ 依然满足 $\begin{cases} 收敛，p>1, \\ 发散，p \leq 1. \end{cases}$

1.2 反常积分的计算

结论 1.2.1

// TODO