

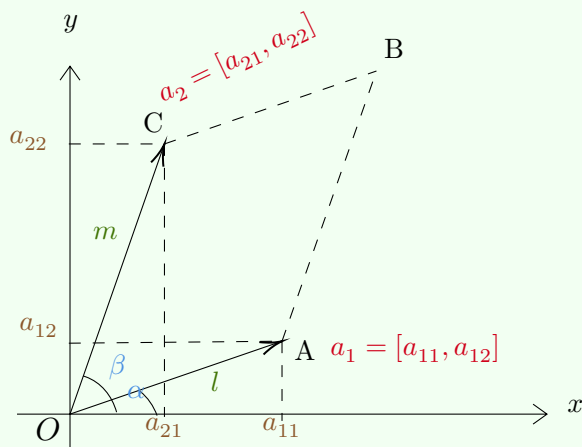
第一章 行列式

行列式的值是对面积改变的一个度量.

1.1 行列式的定义

定义 1.1.1: 行列式的本质定义 (几何定义)

不妨设 a_1 的长度 (模) 为 l , a_2 的长度 (模) 为 m , a_1 与 x 轴正向的夹角为 α , a_2 与 x 轴正向的夹角为 β , 如下图所示.



那么其围成的平行四边形的面积是:

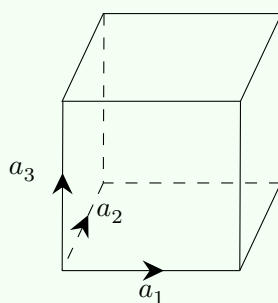
$$\begin{aligned} S_{\square OABC} &= l \cdot m \cdot \sin(\beta - \alpha) \\ &= l \cdot m (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) \\ &= l \cos \alpha \cdot m \sin \beta - l \sin \alpha \cdot m \cos \beta \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

于是:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = S_{\square OABC}$$

综上可以得出二阶行列式的几何意义: 二阶行列式是由两个二维向量组成的, 其 (运算规则的) 结果为以这两个向量为邻边的平行四边形的面积.

由此可以仿照上述定义可以得到三阶行列式的几何定义为: 三阶行列式是由三个三维向量 $a_1 = [a_{11}, a_{12}, a_{13}]$, $a_2 = [a_{21}, a_{22}, a_{23}]$, $a_3 = [a_{31}, a_{32}, a_{33}]$ 组成的, 其 (运算规则的) 结果为以这三个向量为邻边的平行六面体的体积. 如下图所示:



综上, 可以得到 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ 的本质定义为: n 阶行列式是由 n 个 n 维向量

$a_1 = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}]$, $a_2 = [a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}]$, \dots , $a_n = [a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}]$ 组成的, 其 (运算规则的) 结果为以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的体积 (测度).

如果把行列式看作是由若干个向量拼成的, 并且要把这些向量作运算. 以三阶行列式为例, 若 $D_3 \neq 0$, 则意味着体积不为 0, 则称组成该行列式的三个向量线性无关. 若 $D_3 = 0^a$, 则称线性相关.

^a说明可能存在 0 向量或者两个向量平行

定义 1.1.2: 行列式的逆序数法定义

$n(n \geq 2)$ 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{r(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 个列下标排列^a求和, 故为 $n!$ 项之和. 注意到行下标已经顺排, 而列下标是任一个 n 级排列, 故每项由取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积组成, 每项的正、负号取决于 $(-1)^{r(j_1 j_2 \cdots j_n)}$. 当列下标为奇排列^b时, 应附加负号; 当列下标为偶排列时, 应附加正号.

^a排列: 由 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列, 如 23145 是一个 5 级排列, 41352 也是一个 5 级排列. n 级排列共有 $n!$ 个.

^b逆序: 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \dots i_s \dots i_r \dots i_n$ 中, 若 $i_s > i_t$, 且 i_s 排在 i_t 前面, 则称这两个数构成一个逆序.

逆序数: 一个排列中, 逆序的总数称为该排列的逆序数, 记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$, 如 $\tau(231546) = 3$, $\tau(621534) = 8$. 由小到大顺排的排列称为自然排序, 如 12345, 显然, 自然排序的逆序数为 0.

奇排列和偶排列: 排列的逆序数为奇数时, 该排列称为奇排列; 排列的逆序数为偶数时, 该排列称为偶排列.

定义 1.1.3: 行列式的展开定理定义

1. 余子式: 在 n 阶行列式中, 去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列元素, 由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} , 即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 代数余子式: 余子式 M_{ij} 乘 $(-1)^{i+j}$ 后称为 a_{ij} 的代数余子式, 记作 A_{ij} , 即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

显然也有 $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$

3. 行列式按某一行展开: 行列式的值等于行列式的某行 (列) 元素分别乘其相应的代数余子式后再求和, 即^a

$$|A| = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \ (i = 1, 2, \cdots, n), \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \ (j = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

^a目的: 降阶, 即 n 阶降成 n 个 $n-1$ 阶. 展开原则: 某一行 (列) 为 0 的元素越多越好

注 1.1.1: 几种特殊的行列式

1. 主对角线行列式 (上下三角形行列式):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

2. 副对角线行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

3. 拉普拉斯行列式: 设 A 为 m 阶矩阵, B 为 n 阶矩阵, 则:

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B|,$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B|.$$

4. 范德蒙德行列式^a:

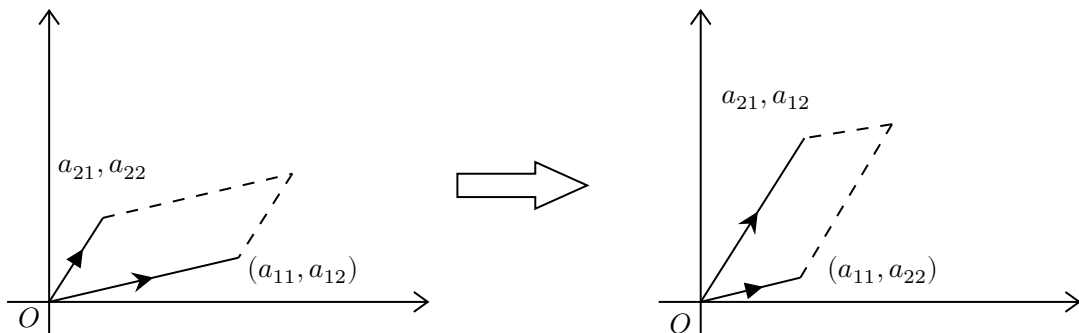
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

^a以三阶范德蒙德行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$ 为例, 该行列式的值为 $(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)$

1.2 行列式的性质

1. 行列互换, 其值不变, 即 $|A| = |A^T|$, 即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. 该条性质说明了 **行列式行列等价**.

几何解释: 很显然平行四边形两条邻边互换, 它的面积依然不变. 如下图所示:



2. 若行列式中某行 (列) 元素全为零, 则行列式为零

几何解释: 以二阶行列式为例: 一个向量无法组成面积, 因此如果二阶行列式某行某列全为 0 的话, 无法组成面积.

3. 若行列式中某行 (列) 元素有公因子 $k(k \neq 0)$, 则 k 可提到行列式外面, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

如果行列式某行元素都乘上了 k 倍, 以二阶行列式为例, 说明这个边乘上了 k 倍, 在图像面积上就是整个二阶行列式的面积乘上了 k 倍.

4. 行列式中某行 (列) 元素均是两个元素之和, 则可拆成两个行列式之和, 即¹

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

该性质又叫行列式的单行 (列) 可拆性, 说明行列式可以拆为两个行列式的和.

5. 行列式中两行 (列) 互换, 行列式的值变号.

以二阶行列式为例, 两行两列互换, 则夹角改变, 即从 $\sin(\beta - \alpha) \rightarrow \sin(\alpha - \beta)$

6. 行列式中的两行 (列) 元素相等或对应成比例, 则行列式为零.

以二阶行列式为例, 行列式两行元素相等或者两行元素成比例, 说明两个向量重合或者平行, 那么无法组成面积.

7. 行列式中某行 (列) 的, 倍加到另一行 (列), 行列式的值不变.

¹从右往左是单行可加性

是前提) 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \qquad \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

若 $D \neq 0$, 则齐次方程组只有零解; 若 $D = 0$, 则齐次方程组有非零解.

1.4 行列式的计算

1.5 余子式与代数余子式的计算