考研线性代数笔记

作者：LoafPhilosopher

2024 年 4 月 21 日

前言

2024 年 4 月 21 日

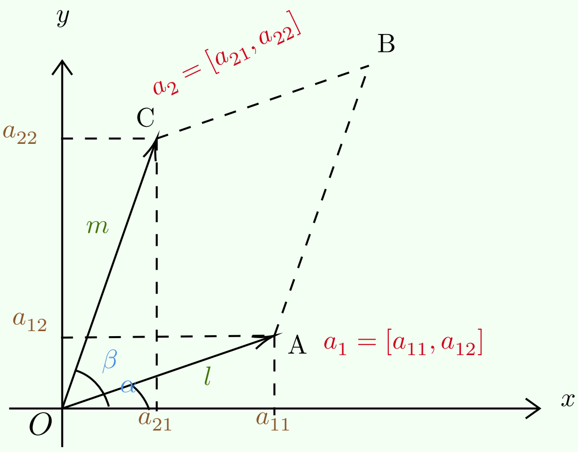
目录

第一章　行列式

1.1　行列式的定义

定义 1.1.1: 行列式的本质定义 (几何定义)

不妨设 a_1 的长度 (模) 为 l, a_2 的长度 (模) 为 m, a_1 与 x 轴正向的夹角为 α, a_2 与 x 轴正向的夹角为 β, 如下图所示.



那么其围成的平行四边形的面积是:

$$
\begin{aligned}
S_{\square OABC} &= l \cdot m \cdot \sin(\beta - \alpha) \\
&= l \cdot m(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) \\
&= l\cos\alpha \cdot m\sin\beta - l\sin\alpha \cdot m\cos\beta \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}
$$

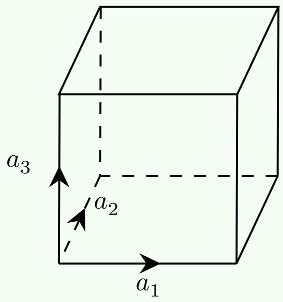
于是:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = S_{\square OABC}
$$

综上可以得出二阶行列式的几何意义: 二阶行列式是由两个二维向量组成的, 其 (运算规则的) 结果为以

这两个向量为邻边的平行四边形的面积.

由此可以仿照上述定义可以得到三阶行列式的几何定义为: 三阶行列式是由三个三维向量 $a_1 = [a_{11}, a_{12}, a_{13}], a_2 = [a_{21}, a_{22}, a_{23}], a_3 = [a_{31}, a_{32}, a_{33}]$ 组成的, 其 (运算规则的) 结果为以这三个向量为邻边的平行六面体的体积. 如下图所示:



综上, 可以得到 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ 的本质定义为: **n 阶行列式是由 n 个 n 维向量 $a_1 = \left[a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}\right], a_2 = \left[a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}\right], ..., a_n = \left[a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{m}\right]$ 组成的, 其 (运算规则的) 结果为以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的体积.**

如果把行列式看作是由若干个向量拼成的, 并且要把这些向量作运算. 以三阶行列式为例, 若 $D_3 \neq 0$, 则意味着体积不为 0，则称组成该行列式的三个向量线性无关. 若 $D_3 = 0$[a]，则称线性相关.

[a]说明可能存在 0 向量或者两个向量平行

定义 1.1.2: 行列式的逆序数定义

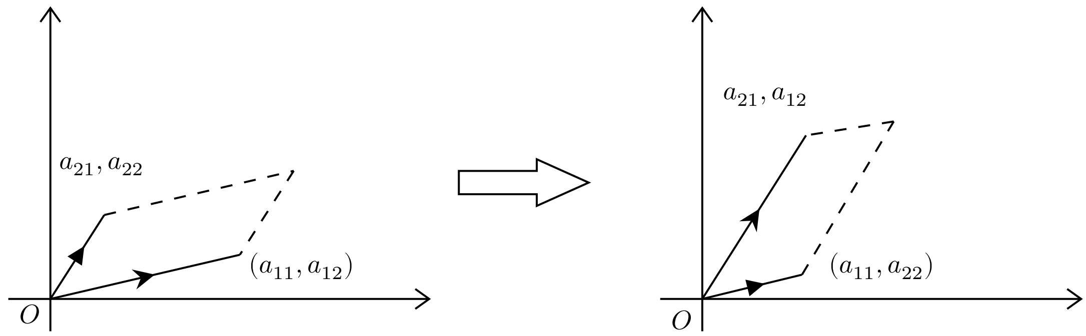
定义 1.1.3: 行列式的展开定义

注 1.1.1: 几种特殊的行列式

1.2 行列式的性质

1. 行列互换, 其值不变, 即 $|A| = |A^T|$, 即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

   几何解释: 很显然平行四边形两条邻边互换, 它的面积依然不变. 如下图所示:



2. 若行列式中某行 (列) 元素全为零, 则行列式为零

3. 若行列式中某行 (列) 元素有公因子 $k(k \neq 0)$，则 k 可提到行列式外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. 行列式中某行 (列) 元素均是两个元素之和, 则可拆成两个行列式之和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. 行列式中两行 (列) 互换, 行列式的值反号

6. 行列式中的两行 (列) 元素相等或对应成比例, 则行列式为零

7. 行列式中某行 (列) 的, 倍加到另一行 (列), 行列式的值不变.

1.3 行列式的计算

1.4 余子式与代数余子式的计算

1.5 克拉默法则