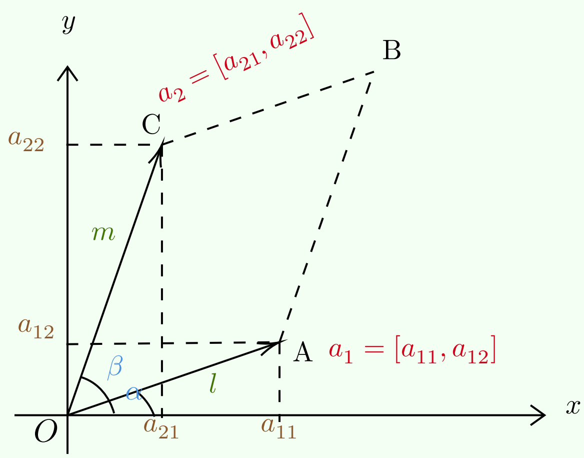
第一章　行列式

1.1　行列式的定义

定义 1.1.1: 行列式的本质定义 (几何定义)

不妨设 a_1 的长度 (模) 为 l, a_2 的长度 (模) 为 m, a_1 与 x 轴正向的夹角为 α, a_2 与 x 轴正向的夹角为 β, 如下图所示.



那么其围成的平行四边形的面积是:

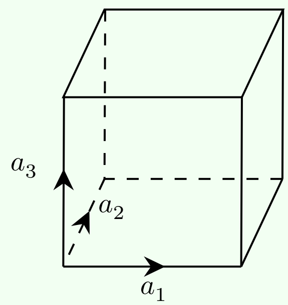
$$
\begin{aligned}
S_{\square OABC} &= l \cdot m \cdot \sin(\beta - \alpha) \\
&= l \cdot m(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) \\
&= l\cos\alpha \cdot m\sin\beta - l\sin\alpha \cdot m\cos\beta \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}
$$

于是:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = S_{\square OABC}$$

综上可以得出二阶行列式的几何意义: 二阶行列式是由两个二维向量组成的, 其 (运算规则的) 结果为以这两个向量为邻边的平行四边形的面积.

由此可以仿照上述定义可以得到三阶行列式的几何定义为: 三阶行列式是由三个三维向量 $a_1 = [a_{11}, a_{12}, a_{13}], a_2 = [a_{21}, a_{22}, a_{23}], a_3 = [a_{31}, a_{32}, a_{33}]$ 组成的, 其 (运算规则的) 结果为以这三个向量为邻边的平行六面体的体积. 如下图所示:



综上, 可以得到 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ 的本质定义为: **n 阶行列式是由 n 个 n 维向量** $a_1 = \left[a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}\right], a_2 = \left[a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}\right], ..., a_n = \left[a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{m}\right]$ **组成的, 其 (运算规则的) 结果为以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的体积.**

如果把行列式看作是由若干个向量拼成的, 并且要把这些向量作运算. 以三阶行列式为例, 若 $D_3 \neq 0$, 则意味着体积不为 0, 则称组成该行列式的三个向量线性无关. 若 $D_3 = 0$[a], 则称线性相关.

[a]说明可能存在 0 向量或者两个向量平行

定义 1.1.2: 行列式的逆序数法定义

$n(n \geqslant 2)$ 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{r(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 个列下标排列[a]求和, 故为 $n!$ 项之和. 注意到行下标已经顺排, 而列下标是任一个 n 级排列, **故每项由取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积组成**, 每项的正、负号取决于 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$. 当列下标为奇排列[b]时, 应附加负号; 当列下标为偶排列时, 应附加正号.

[a]排列: 由 n 个数 $1, 2, \ldots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列, 如 23145 是一个 5 级排列,41352 也是一个 5 级排列. n 级排列共有 $n!$ 个.

[b]逆序: 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \ldots i_s \ldots i_r \ldots i_n$ 中, 若 $i_s > i_t$, 且 i_s 排在 i_t 前面, 则称这两个数构成一个逆序.
逆序数: 一个排列中, 逆序的总数称为该排列的逆序数, 记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$, 如 $\tau(231546) = 3$, $\tau(621534) = 8$. 由小到大顺排的排列称为自然排序, 如 12345, 显然, 自然排序的逆序数为 0.
奇排列和偶排列: 排列的逆序数为奇数时, 该排列称为奇排列; 排列的逆序数为偶数时, 该排列称为偶排列.

定义 1.1.3: 行列式的展开定理定义

1. 余子式: 在 n 阶行列式中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列元素，由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}, 即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n!} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 代数余子式: 余子式 M_{ij} 乘 (-1)$^{i+j}$ 后称为 a_{ij} 的代数余子式, 记作 A_{ij}, 即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

显然也有 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$

3. 行列式按某一行展开: 行列式的值等于行列式的某行 (列) 元素分别乘其相应的代数余子式后再求和, 即[a]

$$|A|=\begin{cases}a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n)\,,\\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(j=1,2,\cdots,n)\,.\end{cases}$$

[a]目的: 降阶, 即 n 阶降成 n 个 $n-1$ 阶. 展开原则: 某一行 (列) 为 0 的元素越多越好

注 1.1.1: 几种特殊的行列式

1. 主对角线行列式 (上下三角形行列式):

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

2. 副对角线行列式:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

3. 拉普拉斯行列式: 设 A 为 m 阶矩阵,B 为 n 阶矩阵, 则:

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \left|A\right|\left|B\right|,$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\left|A\right|\left|B\right|.$$

4. 范德蒙德行列式[a]:

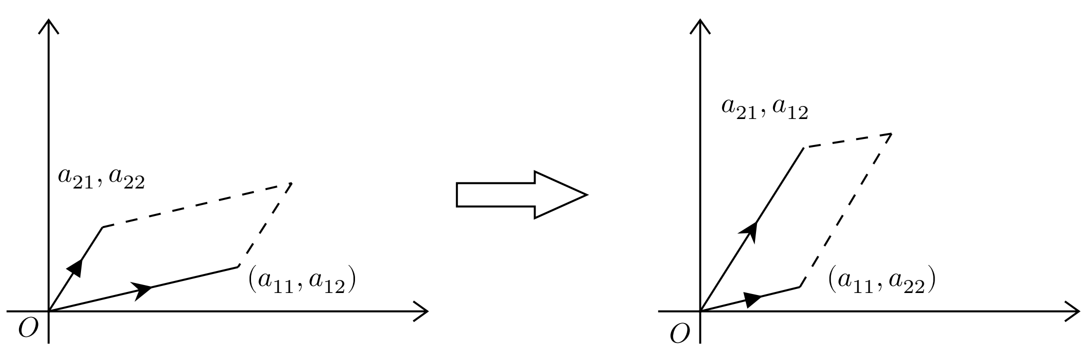
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

[a] 以三阶范德蒙行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$ 为例, 该行列式的值为 $(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$

1.2　行列式的性质

1. 行列互换, 其值不变, 即 $|A| = |A^T|$, 即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. 该条性质说明了 行列式行列等价

几何解释: 很显然平行四边形两条邻边互换, 它的面积依然不变. 如下图所示:



2. 若行列式中某行 (列) 元素全为零, 则行列式为零

   几何解释: 以二阶行列式为例: 一个向量无法组成面积, 因此如果二阶行列式某行某列全为 0 的话, 无法组成面积.

3. 若行列式中某行 (列) 元素有公因子 $k(k \neq 0)$, 则 k 可提到行列式外面, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

   如果行列式某行元素都乘上了 k 倍, 以二阶行列式为例, 说明这个边乘上了 k 倍, 在图像面积上就是整个二阶行列式的面积乘上了 k 倍.

4. 行列式中某行 (列) 元素均是两个元素之和, 则可拆成两个行列式之和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

   该性质又叫行列式的单行 (列) 可拆性, 说明行列式可以拆为两个行列式的和.

5. 行列式中两行 (列) 互换, 行列式的值反号.

   以二阶行列式为例, 两行两列互换, 则夹角改变, 即从 $\sin(\beta - \alpha) \to \sin(\alpha - \beta)$

6. 行列式中的两行 (列) 元素相等或对应成比例, 则行列式为零.

   以二阶行列式为例, 行列式两行元素相等或者两行元素成比例, 说明两个向量重合或者平行, 那么无法组成面积.

7. 行列式中某行 (列) 的, 倍加到另一行 (列), 行列式的值不变.

行列式性质 7 证明. 以二阶行列式为例:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

□

1.3　克拉默法则

定义 1.3.1: 克拉默法则

对 n 个方程 n 个未知数 (这是前提) 的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2\,, \\ & \cdots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n\,, \end{cases}$$

若系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

, 则方程组有唯一解，且解为

$$x_i = \frac{D_i}{D}\,,\ i = 1,\ 2, \cdots, n\,.$$

式中，D_i 是由常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 替换 D 中第 i 列元素得到的行列式. 对 n 个方程 n 个未知数 (这

是前提) 的齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \cdots + a_{1n}x_n = 0\,, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad \cdots + a_{2n}x_n = 0\,, \\
\qquad\qquad\qquad \cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \quad \cdots + a_{nn}x_n = 0\,,
\end{cases}
$$

若 $D \neq 0$, 则齐次方程组只有零解；若 $D = 0$, 则齐次方程组有非零解.

1.4　行列式的计算

1.5　余子式与代数余子式的计算