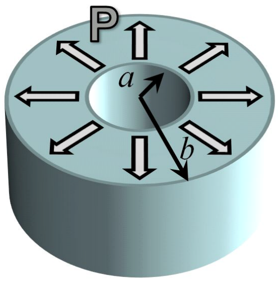
Full_4 Medis materials (Electrostàtica)

Problema 4.1.

Una corona cilíndrica com la de la figura, de longitud infínita, de radis a i b, està polarizada en direcció radial segons $\vec{P} = \frac{k}{r}\,\vec{e_r}$, amb k constant. Trobeu la densitats de càrrega lligada σ_b i ρ_b generades per la polarizació i calculeu el camp elèctric que creen aquestes càrreges.



Fórmulas necesarias para resolver el problema

$$\oiint_S \vec{D}\cdot\vec{dS} = Q\,, \qquad \vec{D} = \epsilon\,\vec{E} = \epsilon_0\,\vec{E} + \vec{P}$$

$$\rho = -\nabla\cdot\vec{P} \qquad , \qquad \sigma = \vec{P}\cdot\vec{n}$$

El campo de polarización $\vec{P}$ es equivalente a las densidades de carga volumica ρ y superficial σ.

En coordenadas cilíndricas $\vec{P} = (P_r,\, P_\varphi,\, P_z) = (k/r,\, 0,\, 0)$ para ρ obtenemos

$$\rho = -\nabla\cdot\vec{P} = -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,P_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}P_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}P_z\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{k}{r}\right) = 0 \quad \blacksquare \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que la corona tiene dos superfícies — interna y externa, con normalas $n_{\text{int}} = (-1,\, 0,\, 0)$ y $n_{\text{ext}} = (1,\, 0,\, 0)$, obtenemos para las densidades superficiales

$$\sigma_{\text{int}} = \vec{P}\cdot\overrightarrow{n_{\text{int}}} = \left(\frac{k}{r},\, 0,\, 0\right)\cdot(-1,\, 0,\, 0) = -\frac{k}{a} \;\; \text{(superfície interna, } r = a) \quad \blacksquare$$

$$\sigma_{\text{ext}} = \vec{P}\cdot\overrightarrow{n_{\text{ext}}} = \left(\frac{k}{r},\, 0,\, 0\right)\cdot(1,\, 0,\, 0) = \frac{k}{b} \;\; \text{(superfície externa, } r = b) \quad \blacksquare \tag{2}$$

De (1) y (2) sigue que para este caso de polarización $\vec{P}$ las cargas correspondientes están distribuidas solo sobre las dos superfícies cilindricas. Para un segmento de la corona con longuitud L la carga supeficial interna es $Q_{\text{int}} = \sigma_{\text{int}}\, 2\,\pi\, a\, L = -2\,\pi\, k\, L$, y analógicamente $Q_{\text{ext}} = 2\,\pi\, k\, L$.

Para calcular el campo eléctrico $\vec{E}$ usamos el teorema de Gauss $\oiint_S \vec{D}\cdot\vec{dS} = Q$ y la relación $\vec{D} = \epsilon\,\vec{E}$. Obviamente para la región $r < a$ la carga encerrada dentro de la superfície Gauss S es cero, así que $\vec{D} = 0$ y $\vec{E} = 0$. Para la región $r > b$ la carga dentro de S será $Q_{\text{int}} + Q_{\text{ext}} = 0$, así que y para esta región tendremos $\vec{E} = 0$. Finalmente, para $a < r < b$ la carga será $Q_{\text{int}} = -2\,\pi\, k\, L$, el flujo del campo $\vec{D}$ através de S es $D\, 2\,\pi\, r\, L$, y obtenemos

$$D = -\frac{k}{r} \implies \vec{D} = -\frac{k}{r}\,\vec{e_r} \implies \vec{E} = -\frac{k}{\epsilon\, r}\,\vec{e_r}. \quad \blacksquare$$

Problema 4.2.

Trobeu $\vec{E}$, $\vec{D}$ i $\vec{P}$ en qualsevol punt de l'espai per una esfera metàl.lica de radi R_1 amb càrrega total Q que se troba rodejada per una capa de dielèctric de permitivitat ϵ i de radi R_2.

Usamos la fórmula $\vec{D} = \epsilon\,\vec{E} = \epsilon_0\,\vec{E} + \vec{P}$ y la ley de Gauss $\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot\vec{dS} = Q$. Denominamos como Φ_D el flujo cerrado $\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot\vec{dS}$.

Por la simetria esférica $\vec{D} = D\,\vec{e_r}$. La superfície de Gauss S es una esfera con radio r y el flujo Φ_D es:

$\Phi_D = D\,4\,\pi\,r^2$.

La carga Q en función del radio r es

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ Q & r > R_1 \end{cases}$$

y aplicando la ley de Gauss $\Phi_D = Q$ tenemos

$$\vec{D}(r) = \frac{Q(r)}{4\,\pi\,r^2}\,\vec{e_r}.$$

La permitividad ϵ en función del radio r es

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_0 & r < R_1 \\ \epsilon & R_1 < r < R_2 \\ \epsilon_0 & r > R_2 \end{cases}.$$

y para las tres regiones encontramos:

$r < R_1$; $\epsilon(r) = \epsilon_0$

$$Q(r) = 0 \implies D = 0$$

$$\vec{D} = 0, \qquad \vec{E} = 0, \qquad \vec{P} = 0$$

$R_1 < r < R_2$; $\epsilon(r) = \epsilon$

$$Q(r) = Q \implies D = \frac{Q}{4\,\pi\,r^2}$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\,\pi\,r^2}\,\vec{e_r}, \qquad \vec{E} = \frac{D}{\epsilon}\,\vec{e_r} = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon\,r^2}\,\vec{e_r}, \qquad \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\,\vec{E} = \frac{Q}{4\,\pi\,r^2}\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\vec{e_r}$$

$r > R_2$; $\epsilon(r) = \epsilon_0$

$$Q(r) = Q \implies D = \frac{Q}{4\,\pi\,r^2}$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\,\pi\,r^2}\,\vec{e_r}, \qquad \vec{E} = \frac{D}{\epsilon_0}\,\vec{e_r} = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r^2}\,\vec{e_r}, \qquad \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\,\vec{E} = 0 \quad \blacksquare$$

Problema 4.3

Un cilindre conductor de radi R_1 té una densitat superficial de càrrega σ uniforme. Aquest cilindre està envoltat d'una capa cilindrica de dielèctric de permitivitat ϵ i radi exterior R_2. Trobeu $\vec{E}$, $\vec{D}$ i $\vec{P}$ en totsels punts de l'espai. Calculeu també σ_b sobre les superficies i ρ_b a l'interior del cilindre.

Calculamos el flujo $\Phi_D = D\,2\,\pi\,r\,L$ de la superficie cilíndrica de Gauss S con radio r y longitud L, y la carga eléctrica $Q(r)$ dentro de S en función de r

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \sigma\,2\,\pi\,R_1\,L & r > R_1 \end{cases}.$$

Usamos la ley de Gauss $\Phi_D = Q$ para expressar D en función de r

$$D(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \sigma\,\frac{R_1}{r} & r > R_1 \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_0 & r < R_1 \\ \epsilon & R_1 < r < R_2 \\ \epsilon_0 & r > R_2 \end{cases}$$

y las relaciones $\vec{D}(r) = D\,\vec{e_r}$, $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon(r)$, $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\,\vec{E}$ calculamos $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{P}$ para las tres regiones:

$r < R_1$; $Q(r) = 0$, $\epsilon(r) = \epsilon_0$, $D(r) = 0$

$$\vec{D} = 0,\ \vec{E} = 0,\ \vec{P} = 0$$

$R_1 < r < R_2$; $Q(r) = Q$, $\epsilon(r) = \epsilon$, $D(r) = \sigma\,\frac{R_1}{r}$

$$\vec{D} = \sigma\,\frac{R_1}{r}\,\vec{e_r},\ \vec{E} = \sigma\,\frac{R_1}{\epsilon\,r}\,\vec{e_r},\ \vec{P} = \sigma\,\frac{R_1}{r}\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\vec{e_r}$$

$r > R_2$; $Q(r) = Q$, $\epsilon(r) = \epsilon_0$, $D(r) = \sigma\,\frac{R_1}{r}$

$$\vec{D} = \sigma\,\frac{R_1}{r}\,\vec{e_r},\ \vec{E} = \sigma\,\frac{R_1}{\epsilon_0\,r}\,\vec{e_r},\ \vec{P} = 0 \quad \blacksquare$$

Para encontrar las densidades eléctricas ρ y σ equivalentes al campo de polarización $\vec{P}$, presentamos la polarización en la región $R_1 < r < R_2$ como

$$\vec{P}(r) = \frac{k}{r}\,\vec{e_r},$$

donde

$$k = \sigma\,R_1\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right).$$

Notamos que esta presentación de $\vec{P}$ es igual a la polarización en Problema 1. Y analógicamente calculamos la densidad volúmica ρ y las densidades superficiales σ_+ y σ_- corespondientes a las dos superficies cilíndricas:

$$\rho = -\nabla\cdot\vec{P} = -\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\frac{k}{r}\right)\right) + 0 + 0\right) = 0$$

$$\sigma_\pm = \vec{P}\cdot\vec{n} = \epsilon_0\,E\,\vec{e_r}\cdot(\pm 1)\,\vec{e_r} = \begin{cases} k/R_2 & r = R_2 \\ -k/R_1 & r = R_1 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Problema 4.4

Un condensador esta format per dos cilindres concèntric de radis a i b ($a < b$) de longitud L, amb $L \gg b$. El cilindre interior te una càrrega $+Q$ i el cilindre exterior una càrrega $-Q$. La regió entre els dos cilindres s'omple amb un material dielèctric de permitivitat constant ϵ. Calculeu:

a) El camp elèctric en qualsevol punt de l'espai.

b) La diferència de potencial que hi ha entre els dos cilindres.

c) La capacitat del condensador.
d) La densitat de càrrega lliure σ sobre el cilindre interior i sobre el cilindre exterior.
e) La densitat de càrrega lligada σ_b sobre la superfície cilíndrica interior del dielèctric i la superfície exterior del mateix.
f) L'energia electrostàtica total enmagatzemada.

a) De la simetría cilíndrica sigue $\vec{D} = D\,\vec{e_r}$. El flujo del campo $\vec{D}$ através de la superficie cilíndrica de Gauss S con longitud l y radio r es $\Phi_D = D\,2\,\pi\,r\,l$. Obviamente para $r < a$ y $r > b$ la carga eléctrica dentro de S es cero, así que, según la ley de Gauss, los campos $\vec{D}$, $\vec{E}$ también son ceros.
En la región $R_1 < r < R_2$ la carga dentro de S será $+Q\,l/L$, así que según la ley de Gauss Φ_D es igual a la carga dentro de S. Para D recibimos

$$D = \frac{+Q}{2\,\pi\,r\,L}$$

y para $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon$ recibimos

$$\vec{E} = E\,\vec{e_r} = \frac{Q}{2\,\pi\,\epsilon\,r\,L}\,\vec{e_r} \quad \blacksquare$$

b) Calculamos el campo potencial ϕ usando el componente radial del campo electrico E

$$\phi(r) = -\int E\,d\,r = -\frac{Q}{2\,\pi\,\epsilon\,L}\,\ln(r)$$

y la diferencia del potencial entre $r = a$ y $r = b$ será

$$U = \phi(a) - \phi(b) = -\frac{Q}{2\,\pi\,\epsilon\,L}\,\ln(a) + \frac{Q}{2\,\pi\,\epsilon\,L}\,\ln(b) = \frac{Q}{2\,\pi\,\epsilon\,L}\,\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \blacksquare$$

c) Por definición la capacidad C del condensador es

$$C \overset{d}{=} \frac{Q}{\Delta\,U} = \frac{2\,\pi\,\epsilon\,L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \blacksquare$$

d) La densidad superficial de carga eléctrica es

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \begin{cases} \frac{Q}{2\,\pi\,a\,L} & r = a \\ -\frac{Q}{2\,\pi\,b\,L} & r = b \end{cases} \quad \blacksquare$$

e) La polarización $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\,\vec{E}$ es

$$\vec{P} = \frac{Q}{2\,\pi\,L}\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\frac{1}{r}\,\vec{e_r} = \frac{k}{r}\,\vec{e_r}$$

y para la densidad superficial que proviene de la polarización tenemos

$$\sigma = \vec{P}\cdot\vec{n} = \begin{cases} -\frac{k}{a} & r = a;\ \vec{n} = -\vec{e_r} \\ \frac{k}{b} & r = b;\ \vec{n} = \vec{e_r} \end{cases} \quad \blacksquare$$

f) La energá almacenada en el condensador, por definición, es

$$W \overset{d}{=} \frac{1}{2}\,Q\,U = \frac{Q^2}{4\,\pi\,\epsilon\,L}\,\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \blacksquare$$