Ley de Gauss en problemas con simetría esférica o cilíndrica

Ley de Gauss en forma diferencial: $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$.
Ley de Gauss en forma integral: $\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = Q/\epsilon_0$; Q es la carga total en el volumen cerrado por S.

Denominamos con Φ el flujo "cerrado" $\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$, con lo cual la ley de Gauss se describe así:

$$\Phi = Q/\epsilon_0 \tag{1}$$

La ley de Gauss simplifica la solución de problemas donde la distribución de la carga eléctrica tiene simetría esférica o cilíndrica. Así son los problemas desde 2.6 a 2.11. En ambos casos de simetría la densidad de la carga ρ depende solo de la coordinada radial r, donde r tiene diferentes expresiones según la simetría:

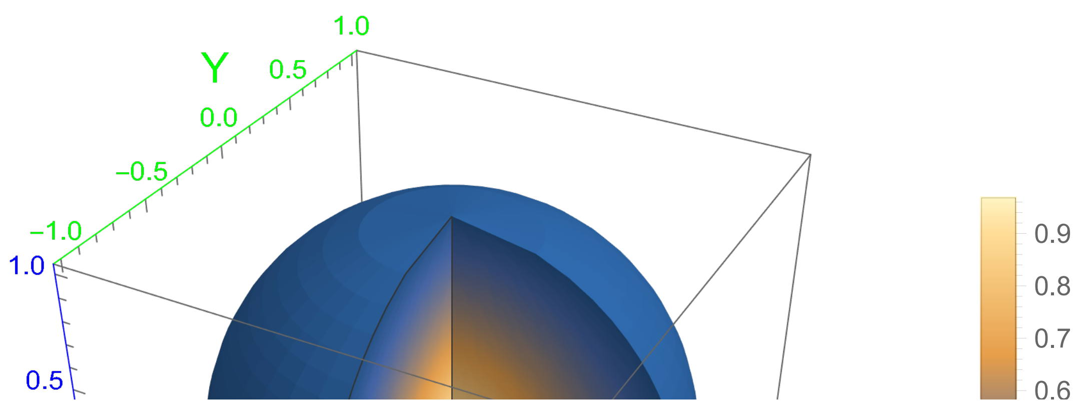
$$\begin{aligned} &\text{a) Simetría esférica :} \quad \rho(x,\ y,\ z) = \rho(r),\ \text{ donde } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,; \\ &\text{b) Simetría cilíndrica :} \quad \rho(x,\ y,\ z) = \rho(r),\ \text{ donde } r = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

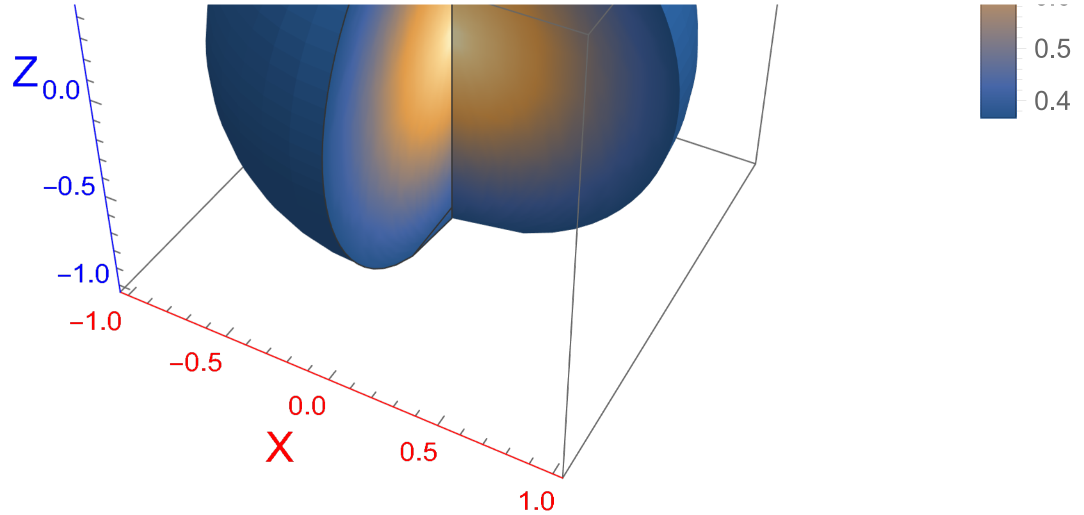
En la siguiente figura dinámica se pueden visualizar las tres distribuciones r^2, e^{-r} y $\sin^2(2\pi r)$ presentadas en las dos simetrías.

Selección de función de densidad $\rho(r)$ = e^{-r}

Simetría esférica: $\rho(x,y,z) = \rho(r)$
donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Out[ ]=



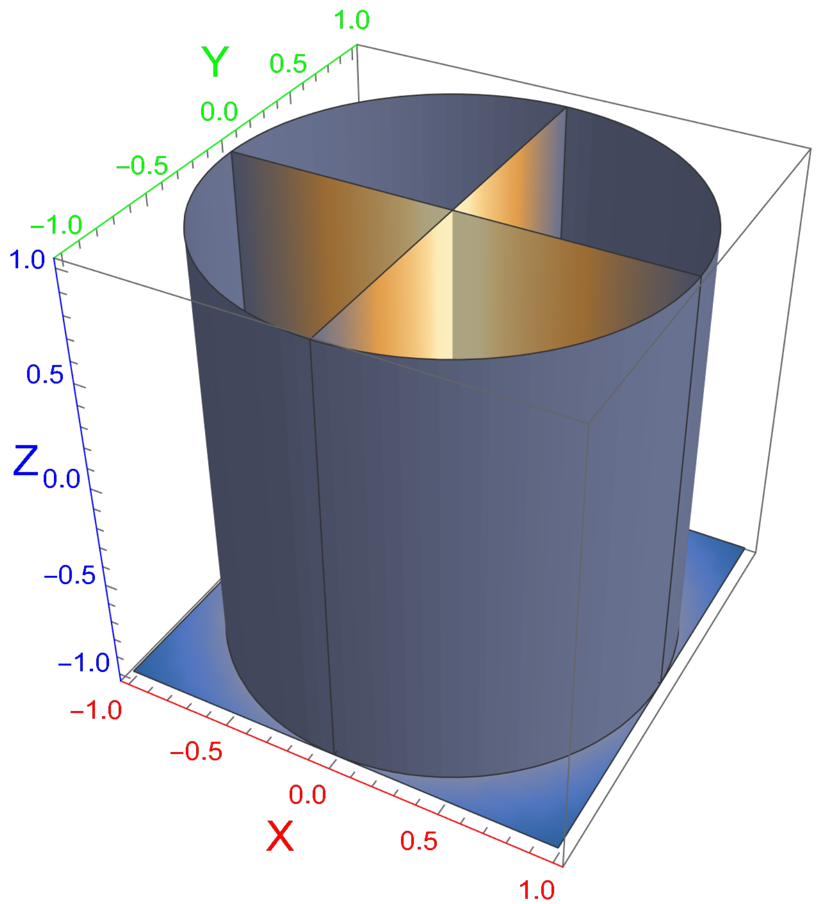


Selección de función de densidad $\rho(r)$ = e^{-r}

Posicionar el plano perpendicular al eje Z −1.

Simetría cilíndrica: $\rho(x,y,z) = \rho(r)$

donde $r=\sqrt{x^2+y^2}$



Las superfícies de Gauss son cerradas y dependen de la simetría:

a) En caso de simetría esférica son esféras vacías con radio r centradas en el

origen del sistema de coordenadas;
b) En el caso de simetría cilíndrica son presentadas con un tubo coaxial al eje Z y radio r cerradas con dos planos perpendiculares al eje Z.

La ley de Gauss permite calcular el componente radial $E = E_r$ del campo eléctrico $\vec{E}$ en función de la carga Q dentro la sureficie de Gauss S. Sabiendo el componente radial nos permite expresar, y este es la aplicación principal de la ley de Gauss, el campo vectorial eléctrico $\vec{E}$ y el campo escalar potencial ϕ con las siguientes fórmulas que son válidas para ambos simetrías:

$$\vec{E} = E\ \vec{e_r}$$
$$\phi = -\int E\, dr. \tag{3}$$

(opcional) Prueba de las acuaciones (3)

Expresamos la densidad de la carga eléctrica $\rho(x, y, z)$ con la única coordinada r según las ecuaciones (2), $\rho(x, y, z) \Rightarrow \rho(r)$. El potencial eléctrico ϕ se deduce mediante la densidad $\rho(r)$ y por lo tanto dependerá únicamente de la coordenada r: $\phi(x, y, z) \Rightarrow \phi(r)$. Calculamos $\vec{E}$ en coordenadas esféricas y cilíndricas:

$$\vec{E}_{\text{esféricas}} = (E_r, E_\theta, E_\varphi) = -\nabla\phi = -\partial_r\phi(r)\,\vec{e_r} - \frac{1}{r}\,\partial_\theta\phi(r)\,\vec{e_\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_\varphi\phi(r)\,\vec{e_\varphi} =$$
$$-\partial_r\phi(r)\,\vec{e_r} = -\partial_r\phi(r)\,\vec{e_r} = E\,\vec{e_r};$$
$$\vec{E}_{\text{cilindricas}} = (E_r, E_\varphi, E_z) = -\nabla\phi = -\partial_r\phi(r)\,\vec{e_r} - \frac{1}{r}\,\partial_\varphi\phi(r)\,\vec{e_\varphi} - \partial_z\phi(r)\,\vec{e_z} =$$
$$-\partial_r\phi(r)\,\vec{e_r} = -\partial_r\phi(r)\,\vec{e_r} = E\,\vec{e_r}.$$

Para ambos simetrías hemos recibido la misma expresión del campo vectorial eléctrico $\vec{E} = E\,\vec{e_r}$, donde

$$E = E_r = -\frac{\partial}{\partial r}\,\phi(r),$$

y por lo tanto

$$\phi = -\int E\, dr.$$

Algoritmo en 4 pasos para los problemas con la ley de Gauss

Los problemas de 2.6 a 2.11 tienen simetría esférica o cilíndrica. Para estos problemas conviene usar el teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico $\vec{E}$ sabiendo la distribución de carga $\rho(r)$.

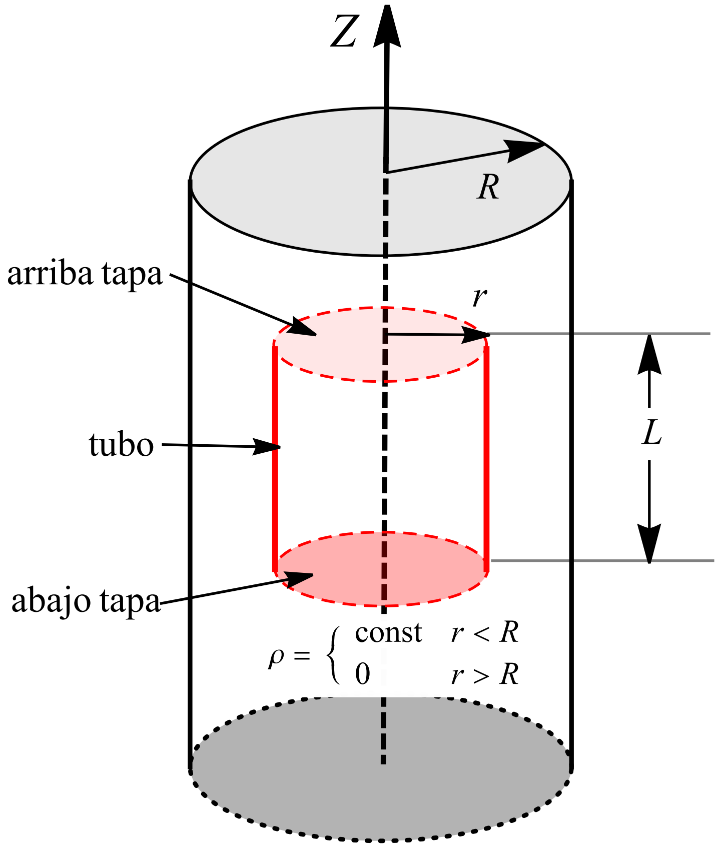
Paso 1. Dibujar la superficie *S* de Gauss

Como ejemplos en la figura abajo están presentadas en rojo las superficies de Gauss correspondientes de los problemas 2.6 y 2.7 con simetrías cilíndrica y esférica, correspondiente.

Problema 2.6

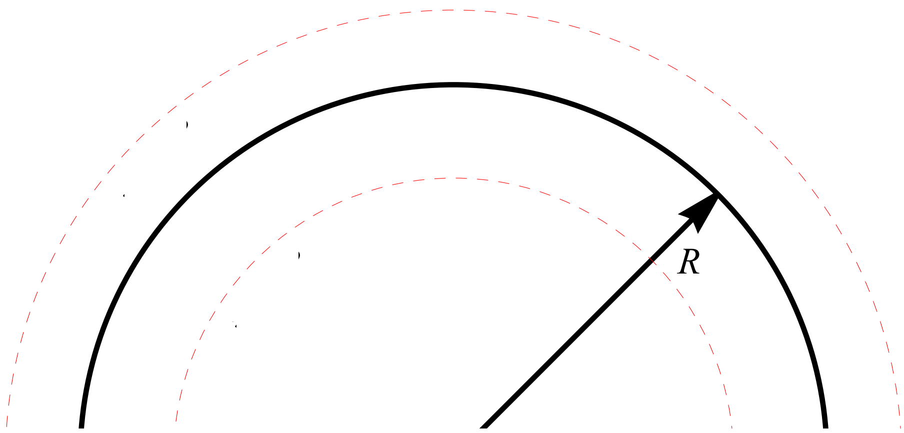
Simetría cilíndrica

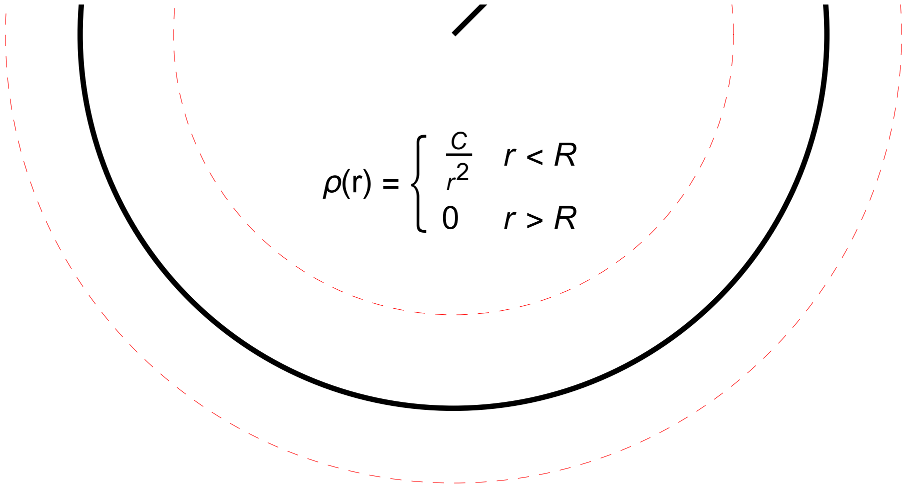
Out[∘]=



Problema 2.7

Simetría esférica





Paso 2. Calcular el flujo Φ

Caso de simetría esférica; S es una esfera con radio r.

Out[∘]=
$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \oint\!\!\!\oint_S (E, 0, 0)\cdot(dS, 0, 0) = \oint\!\!\!\oint_S E\, dS = E \oint\!\!\!\oint_S dS = E\, 4\, \pi\, r^2$$

Caso de simetría cilíndrica; S es un tubo con radio r y longitud L, que esta cerrado con dos discos (tapas) con radio r.

Out[∘]=
$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \int\!\!\int_{S_{\substack{\text{tapa}\\\text{arriba}}}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} + \int\!\!\int_{S_{\substack{\text{tapa}\\\text{abajo}}}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} + \int\!\!\int_{S_{\text{tubo}}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}$$

$$= \int\!\!\int_{S_{\text{tubo}}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \int\!\!\int_{\text{tubo}} E\, dS = E \int\!\!\int_{S_{\text{tubo}}} dS = E\, L\, 2\, \pi\, r$$

(Opcional) Sustituir Φ en la ley de Gauss (1) y expressar el componente E

$$\begin{aligned} &\text{Simétria esférica :} && E = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\, r^2} \\ &\text{Simetría cilíndrica :} && E = \frac{Q}{2\,\pi\,\epsilon_0\, r\, L} \end{aligned} \qquad (4)$$

Paso 3. Calcular la carga Q

Para encontrar la componente radial E tenemos que calcular la carga Q en el volumen V cerrado por S, usando la densidad volúmica $\rho(r)$.

Caso de simetría esférica

Out[ ]= $$Q \overset{💡}{=} \iiint_V \rho(r)\, dV \overset{💡}{=} \iiint_V \rho(r)\; r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\overset{💡}{=} \int_{r=0}^{r} \rho(r)\; r^2\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \overset{💡}{=} 4\,\pi \int_0^r \rho(r)\, r^2\, dr$$

Caso de simetría cilíndrica

Out[ ]= $$Q = \iiint_V \rho(r)\, dV \overset{💡}{=} \iiint_V \rho(r)\; r\, dr\, d\varphi\, dz$$

$$\overset{💡}{=} \int_0^r \rho(r)\, r\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L/2}^{L/2} dz \overset{💡}{=} 2\,\pi\, L \int_0^r \rho(r)\, r\, dr$$

(Opcional) Sustituir Q en la expressión de E

Simétria esférica : $$E = \frac{1}{\epsilon_0\, r^2} \int_0^r \rho(r)\, r^2\, dr$$

Simetría cilíndrica : $$E = \frac{1}{\epsilon_0\, r} \int_0^r \rho(r)\, r\, dr$$

(5)

Paso 4. Presentar el campo eléctrico vectorial $\vec{E}$ y calcular su potencial escalar ϕ

Sabiendo la simetría y el componente radial E, fórmula (5), presentamos el campo vectorial eléctrico segun la ecuación (3): $\vec{E} = E\, \vec{e_r}$.

Y otra vez usando la ecuación (3) calculamos el potencial $\phi(r)$ como integral indefinido, teniendo en cuenta el cumplimiento de la condición de contorno $\phi(\infty) = 0$.

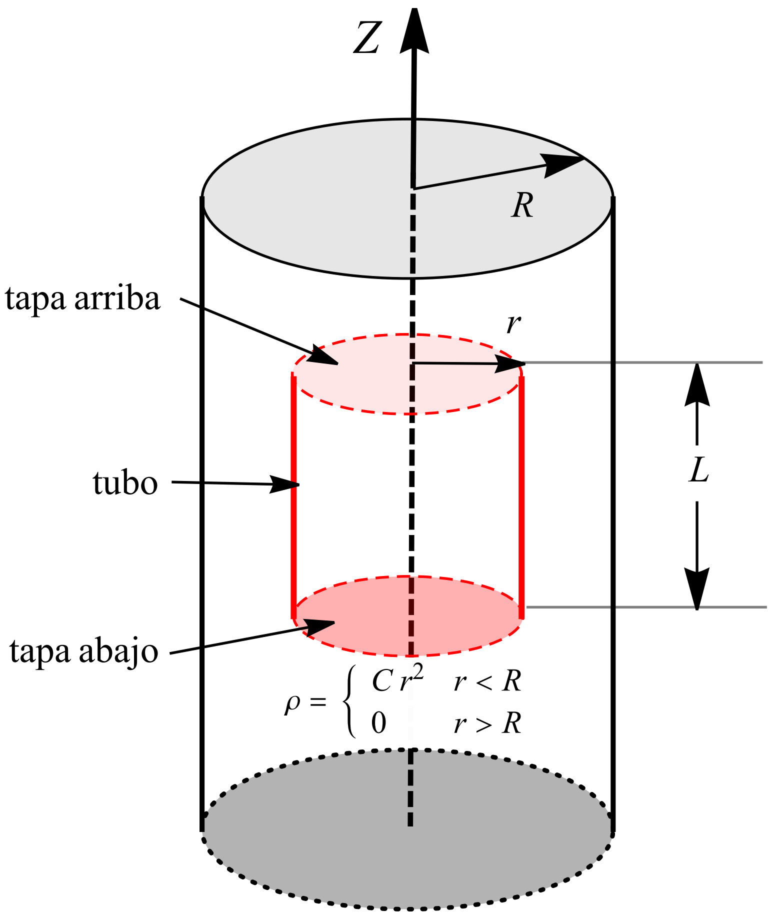
Demonstraciones del algoritmo con varios problemas

Problema 2.9

Un cilindre no conductor infinitament larg de radi R presenta una densidad de càrrega volúmica $\rho(r)$. Calculeu la càrrega per unitat de longitud del cilindre i el camp elèctric a qualsevol punt de l'espai ($r < R$ i $r > R$) en el casos següents:
a) $\rho(r) = a\, r$;
b) $\rho(r) = C\, r^2$.

Solución

Paso 1. Dibujar la superfície de Gauss:



Paso 2. Calcular el flujo Φ. Repetimos las ecuaciones (6).

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} =$$

$$\iint_{S_{\text{tapa\_arriba}}} + \iint_{S_{\text{tapa\_abajo}}} + \iint_{S_{\text{tubo}}} = \iint_{S_{\text{tubo}}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_{S_{\text{tubo}}} E\,dS = E \iint_{S_{\text{tubo}}} dS = E\,2\,\pi\,r\,L$$

Paso 3. Calcular la carga Q. Repetimos las ecuaciones (8),

$$Q = \iiint_V \rho(r)\,dV =$$

$$\iiint_V \rho(r)\; r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^r \rho(r)\,r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L/2}^{L/2} dz = 2\,\pi\,L \int_0^r \rho(r)\,r\,dr$$

y en el último ecuación cambiamos $\rho(r)$ con $C\,r^2$:

$$Q = 2\,\pi\,L \int_0^r C\,r^2\,r\,dr = 2\,\pi\,L\,C \int_0^r r^3\,dr = \frac{\pi\,L\,C}{2} \begin{cases} r^4 & r < R \\ R^4 & r > R \end{cases}$$

Paso 4. Calcular el campo $\vec{E}$

$$E\,2\,\pi\,r\,L = \frac{\pi\,L\,C}{2\,\epsilon_0} \begin{cases} r^4 & r < R \\ R^4 & r > R \end{cases}$$

$$E = \frac{C}{4\,\epsilon_0} \begin{cases} r^3 & r < R \\ \frac{R^4}{r} & r > R \end{cases}$$

$$\vec{E} = E\,\vec{e_r}$$

Problema 2.11a

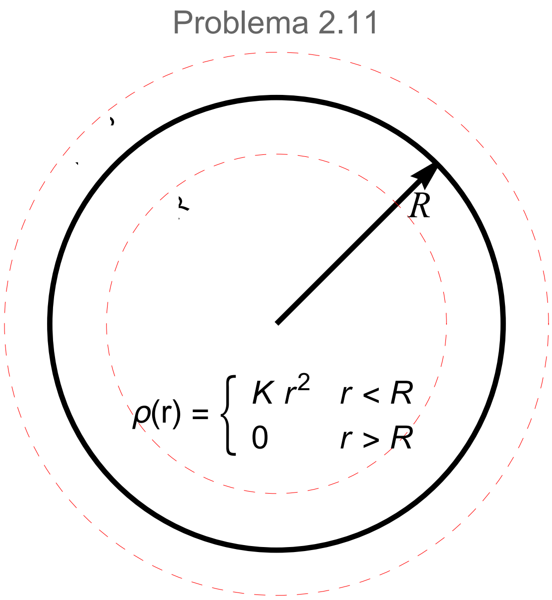
Solución

Encontrar el potencial para una distribución esférica con densidad

$$\rho(r) = \begin{cases} K\,r^2 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Paso 1 (Dibujar la superficie S de Gauss)

Out[ ]=



Paso 2 (Calcular el flujo Φ(r) que atraviesa S con radio r)

$$\Phi(r) = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oint\!\!\oint_S (E,0,0)\cdot(dS,0,0) = \oint\!\!\oint_S E\,dS = E\oint\!\!\oint_S dS = E\,4\,\pi\,r^2$$

Paso 3 (Calcular la carga Q dentro de S con radio r)

$$Q(r) = \underset{V}{\int\!\!\int\!\!\int} \rho(r)\,dV =$$

$$\underset{V}{\int\!\!\int\!\!\int} \rho(r)\ r^2\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^r \rho(r)\,r^2\,dr\int_0^\pi \sin(\theta)\,d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = 4\,\pi\int_0^r \rho(r)\,r^2\,dr$$

Calcular la integral en el último término usando $\rho(r) = \begin{cases} K\,r^2 & r<R \\ 0 & r>R \end{cases}$. Para $r < R$ tenemos

$$I_{r<R} = \int_0^r \rho(r)\ r^2\,dr = K\int_0^r\ r^4\,dr = K\left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=r} = \frac{K}{5}\,r^5,$$

y para $r > R$ tenemos

$$I_{r>R} = \frac{K}{5}\,R^5.$$

Por lo tanto para la carga Q dentro de la esfera de Gauss con radio r tenemos

$$Q(r) = \frac{4\,\pi\,K}{5}\begin{cases} r^5 & r<R \\ R^5 & r>R \end{cases}.$$

Paso 4 (Calcular el campo eléctrico $\vec{E}$ y su potencial ϕ)

Utilizando la ley de Gauss $\Phi = Q/\epsilon_0$ y las expresiones para Φ y Q de arriba tenemos

$$E\,4\,\pi\,r^2 = \frac{4\,\pi\,K}{5\,\epsilon_0}\begin{cases} r^5 & r < R \\ R^5 & r > R \end{cases}$$

y despejando E

$$E = \frac{K}{5\,\epsilon_0}\begin{cases} r^3 & r < R \\ \frac{R^5}{r^2} & r > R \end{cases}$$

El potencial ϕ mediante la formula (4):

$$\phi = -\int E(r)\,dr = -\frac{K}{5\,\epsilon_0}\begin{cases} \int r^3\,dr & r < R \\ R^5\int\frac{dr}{r^2} & r > R \end{cases} = -\frac{K}{5\,\epsilon_0}\begin{cases} \frac{r^4}{4} + C_1 & r < R \\ R^5\left(-\frac{1}{r} + C_2\right) & r > R \end{cases}$$

Cuando $r \to \infty$ el potencial debe cumplir $\phi(r) \to 0$, así que $C_2 = 0$. Para encontrar C_2 utilizamos que el potencial es una función continua, así que cuando $r \to R$ tenemos

$$\frac{r^4}{4} + C_1 \overset{r\to R}{=} R^5\left(-\frac{1}{r} + C_2\right) \Longrightarrow \frac{R^4}{4} + C_1 = -R^4 \Longrightarrow C_1 = -\frac{5\,R^4}{4}$$

En final

$$\phi\; = -\frac{K}{5\,\epsilon_0}\begin{cases} \frac{r^4}{4} - \frac{5\,R^4}{4} & r < R \\ -\frac{R^5}{r} & r > R \end{cases} = \frac{K\,R^4}{20\,\epsilon_0}\begin{cases} 5 - \left(\frac{r}{R}\right)^4 & r < R \\ 4\,\frac{R}{r} & r > R \end{cases}$$