Problema 4.7

Un cilindre de longitud infinita i de radi R_1 transporta una densitat volúmica de corrent en la direcció de l'eix del cilindre de valor $J = C\,r$, on r és la distància a l'eix del cilindre i C és una constant. Al seu voltant hi ha una capa cilíndrica de radi exterior R_2 d'un material magnètic amb permeabilitat magnètica relativa μ_r.

a) Calculeu $\vec{H}$, $\vec{B}$ i $\vec{M}$ en qualsevol punt de l'espai.

b) Calculeu els corrents d'imantació que es generen en el material magnètic.

- a) Para calcular $\vec{H}$, $\vec{B}$ y $\vec{M}$ necesitamos la fórmula básica $\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu\,\vec{H} = \mu_r\,\mu_0\,\vec{H}$ y la ley de Ampère $\oint_L \vec{H}\cdot\vec{dl} = I$. Elegimos coordenadas cilíndricas con el eje z coincidiente con el eje del cilindro y con dirección de la densidad de la corriente: $\vec{J} = C\,r\,\vec{e_z}$. Elegimos la curva cerrada L como un círculo con radio r así que $\vec{H}(r) = H(r)\,\vec{e_\varphi}$ y $\vec{dl} = d\,l\,\vec{e_\varphi}$.

  Primero calculamos la circulación $C(r) = \oint_L \vec{H}\cdot\vec{dl}$ y la corriente $I(r) = \int_S \vec{J}\cdot\vec{dS}$ que pasa através de la superficie S limitada por L.

  $$C(r) = \oint_L \vec{H}(r)\cdot\vec{dl} = \oint_L H(r)\,d\,l = H(r)\oint_L d\,l = H(r)\,2\,\pi\,r$$

  $$I(r) = \int_S \vec{J}\cdot\vec{dS} = \int_S J\,dS = \int_{r=0}^{r|R_1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} C\,r\,r\,d\,r\,d\varphi = C\,2\,\pi\int_0^{r|R_1} r^2\,d\,r = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi\,C\,r^3 & r < R_1 \\ \frac{2}{3}\pi\,C\,R_1{}^3 & r > R_1 \end{cases}$$

  Según la ley de Ampère $C(r) = I(r)$ la solución para el campo $H(r)$ en un punto arbitrario del espacio es

  $$H(r) = \frac{I(r)}{2\,\pi\,r} = \begin{cases} \frac{C\,r^2}{3} & r < R_1 \\ \frac{C\,R_1{}^3}{3\,r} & r > R_1 \end{cases} \Longrightarrow \vec{H}(r) = H(r)\,\vec{e_\varphi} \quad \blacksquare$$

  Calculamos el campo $\vec{B}$ teniendo en cuenta que $\mu_r \neq 1$ solo para $R_1 < r < R_2$.

  $$\vec{B}(r) = \begin{cases} \mu_0\,\vec{H} = \frac{\mu_0\,C\,r^2}{3}\,\vec{e_\varphi} & r < R_1 \\ \mu_r\,\mu_0\,\vec{H} = \frac{\mu_r\,\mu_0\,C\,R_1{}^3}{3\,r} & R_1 < r < R_2 \\ \mu_0\,\vec{H} = \frac{\mu_0\,C\,R_1{}^3}{3\,r} & r > R_2 \end{cases} \quad \blacksquare$$

  Al final calculamos $\vec{M}$.

  $$\vec{M}(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \mid r > R_2 \\ (\mu_r - 1)\,\vec{H} = \frac{(\mu_r - 1)\,C\,R_1{}^3}{3\,r}\,\vec{e_\varphi} & R_1 < r < R_2 \end{cases} \quad \blacksquare$$

- b) Para calcular $\vec{J_M}$ y $\vec{K_M}$ necesitamos las fórmulas básicas $\vec{J_M} = \nabla\times\vec{M}$ y $\vec{K_M} = \vec{M}\times\vec{n}$. Notamos que $\vec{M} \neq 0$ solo en la región $R_1 < r < R_2$ por lo tanto hay dos superficies cilíndricas: externa con vector normal de superficie $\vec{n}_{\text{ext}} = \vec{e_r}$ y interna con $\vec{n}_{\text{int}} = -\vec{e_r}$. Presentamos $\vec{M}(r)$ en la forma $\vec{M}(r) = \frac{M_0}{r}\,\vec{e_\varphi}$ donde $M_0 = \frac{C\,R_1{}^3}{3}\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)$ es constante.

$$\overrightarrow{J_M} = \nabla \times \overrightarrow{M} \overset{💡}{=} \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_r} & r\,\overrightarrow{e_\varphi} & \overrightarrow{e_z} \\ \partial_r & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & r\,\frac{M_0}{r} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \blacksquare$$

$$\overrightarrow{K_{M\binom{\text{ext}}{\text{int}}}} = \overrightarrow{M} \times \vec{n}_{\binom{\text{ext}}{\text{int}}} = \pm \frac{M_0}{r}\,\overrightarrow{e_\varphi} \times \overrightarrow{e_r} = \begin{cases} -\frac{M_0}{R_2}\,\overrightarrow{e_z} & r = R_2 \text{ (ext)} \\ \frac{M_0}{R_1}\,\overrightarrow{e_z} & r = R_1 \text{ (int)} \end{cases} \quad \blacksquare$$