Problema 2 (3 puntos)

El sistema LTI $h_1[n]$, causal y estable, viene definido por la siguiente ecuación

de diferencias finitas:

$$y_1[n] = x_1[n] + ax_1[n-1] + bx_1[n-2] + cy_1[n-1] + dy_1[n-2]$$

(a) Encuentre los valores de a, b, c y d para que la función de transferencia $H_1(z)$ presente ceros en $z = -0.5$ y $z = 3$ y polos en $z = 0.4$ y $z = 0.8$. (**1 punto**)

Sea otro sistema LTI $h_2[n]$, también causal y estable, cuya transformada Z viene dada por:

$$H_2(z) = k\frac{(1+2z^{-1})(1-ez^{-1})}{(1-fz^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

(b) Encuentre los valores de k, e y f para que $H_2(z)$ sea un filtro pasa-todo cuyo módulo de su respuesta frecuencial es igual a 4. (**1 punto**)

(c) A partir de los sistemas $h_1[n]$ y $h_2[n]$ definidos en los apartados (a) y (b), calcule la respuesta al escalón del sistema total que resulta de su conexión en cascada, tal como se muestra en el siguiente diagrama. (**1 punto**)

$$\boldsymbol{x[n]} \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{h_1[n]}} \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{h_2[n]}} \longrightarrow \boldsymbol{y[n]}$$

a) Por la EDF, realizando la TZ obtendremos $H_1[z]$:

$$H_1(z) = \frac{1 + a\,z^{-1} + b\,z^{-2}}{1 - c\,z^{-1} - \ d\,z^{-2}} \qquad (1)$$

y por la situación de polos/ceros y estabilidad dadas:

$$H_1(z) = \frac{(1 + 0{,}5\,z^{-1})\,(1 - 3z^{-1})}{(1 - 0{,}4\,z^{-1})\,(1 - 0{,}8z^{-1})} \quad ,, \quad \text{ROC} > 0{,}8$$

$$\longrightarrow \quad H_1(z) = \frac{1 - 2{,}5\,z^{-1} - 1{,}5\,z^{-2}}{1 - 1{,}2\,z^{-1} + 0{,}32\,z^{-2})} \qquad (2)$$

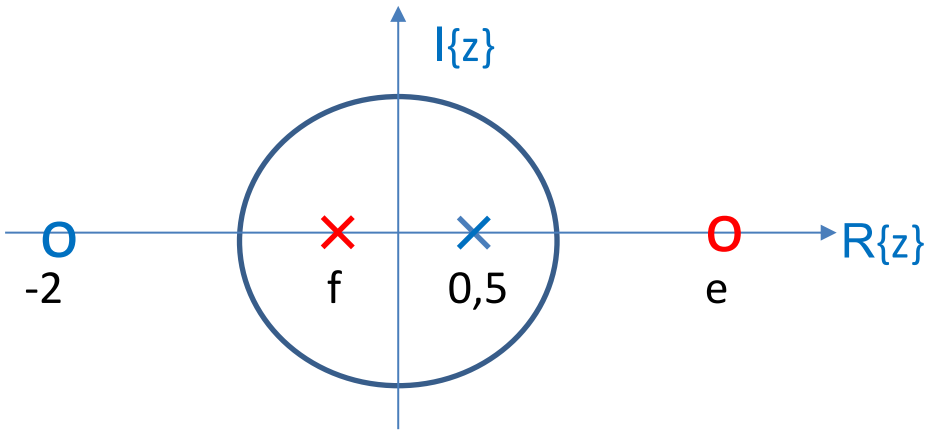
Identificando (1) y (2):

a = – 2,5 **b = – 1,5** **c = 1,2** **d = – 0,32**

b)

$$H_2(z) = k\,\frac{(1 + 2z^{-1})\,(1 - ez^{-1})}{(1 - fz^{-1})\,(1 - 0{,}5z^{-1})}$$

para cumplir la condición de filtro pasa todo se ha de verificar que cada polo vaya acompañado de un cero de valor inverso conjugado.



e = 2

f = – 0,5

ROC > 0,5

Para hallar k, cumpliendo con la condición del valor del módulo de la respuesta frecuencial y puesto que es constante para toda ω, particularizaremos por simplicidad en ω = 0, lo que implica z = 1.

$$|H_2(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \left| k\,\frac{(1+2)\,(1-2)}{(1+0{,}5)\,(1-0{,}5)} \right| = 4 \quad \rightarrow \quad \mathbf{k = \pm 1}$$

Nota.- Tanto la solución positiva como negativa se dan por válidas

c)

$$Y(z) = X(z)H_1(z)\,H_2(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})}\;\frac{\cancel{(1+0{,}5\,z^{-1})}\,(1-3z^{-1})}{(1-0{,}4\,z^{-1})\,(1-0{,}8z^{-1})}\;\frac{(1+2z^{-1})\,(1-2z^{-1})}{\cancel{(1+0{,}5z^{-1})}\,(1-0{,}5z^{-1})}$$

Se utiliza el valor de k = 1, pero si se usa el negativo (también válido) los valores que siguen en las constantes y solución final son iguales pero cambiados de signo. Puesto que el grado del numerador es inferior al del denominador, puedo descomponer directamente en fracciones:

$$Y(z) = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1-0{,}4\,z^{-1}} + \frac{C}{1-0{,}8z^{-1}} + \frac{D}{1-0{,}5z^{-1}}$$

Realizando el cálculo de las constantes (es algo tedioso pero, lógicamente, fundamental para la resolución del apartado) se obtiene:

$$A = 100 \quad , \quad B = -416 \quad , \quad C = -308 \quad , \quad D = 625$$

Realizando la TZ^{-1}, teniendo en cuenta que es una señal a derechas

$$\mathbf{y_1[n] = \Big[100 - 416.(0{,}4)^n - 308.(0{,}8)^n + 625.(0{,}5)^n\Big].\, u[n]}$$

Nota.- Los resultados se han simplificado , en esta resolución, pero en la del examen habían que explicitarlos claramente.