4.1. Dada la secuencia

$$x[n] = [1, 0, -1, 0]$$

obtenida del muestreo a $f_s = 8\,kHz$.

a) Obtener la DFT

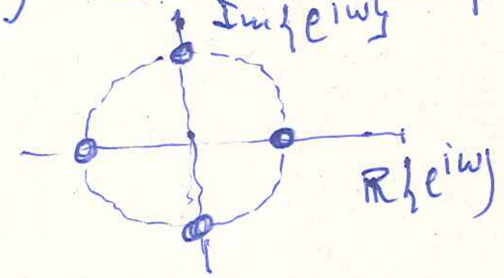
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = x[0] + x[2] e^{-j\frac{2\pi}{4}k2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X[k] = 1 - 1 e^{-j\pi k}$$

Por tanto, particularizando para los valores de $k = 0, 1 \ldots (N-1)$ y siendo $N = 4$:

$$\left.\begin{aligned} X[0] &= 1 - 1 = 0 \\ X[1] &= 1 - e^{-j\pi} = 1 - (-1) = 2 \\ X[2] &= 1 - e^{-j2\pi} = 1 - 1 = 0 \\ X[3] &= 1 - e^{-j3\pi} = 1 - (-1) = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X[k] = [0, 2, 0, 2]$$

b) Resolución en frecuencia



$$\Delta f = f_s \frac{\Delta w}{2\pi} = f_s \frac{2\pi/N}{2\pi} = \frac{f_s}{N} = \frac{8 \cdot 10^3}{4} = 2\,kHz$$

NOTAD que se puede expresar como: $\Delta f = \frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T}$; ~~$T = (N-1)T_s$~~

(siendo T la duración en tiempo de $x[n]$) ~~(Será igual cuando $N \to \infty$ o al menos N sea muy elevado)~~

c) Calcular DFT^{-1} de

$$Z[k] = Y[k] \cdot X[k] \quad , \quad \text{siendo } Y[k] = e^{-j\frac{2\pi}{4}k}$$

NOTA: Propiedad desplazamiento

$$x[n] \longrightarrow X(e^{jw})$$
$$x[n-m] \longrightarrow X(e^{jw}) e^{-jwm}$$

Por tanto

$$Z[k] = e^{-j\frac{2\pi}{4}k} \cdot X[k] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z[k] = \left[0, 2e^{-j\frac{\pi}{2}}, 0, 2e^{-j\frac{3\pi}{2}}\right] = [0, -2j, 0, 2j]$$

Sabiendo que la DFT^{-1}

$$z[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Z[k] e^{j\frac{2\pi}{N}k} \Rightarrow$$

$$z[n] = \frac{1}{4}\left[-2je^{j\frac{\pi}{2}n} + 2je^{j\frac{3\pi}{2}n}\right]$$

Particularizando para los valores de $n = 0, 1, 2, 3$.
$(N-1)$

$$\left.\begin{aligned}
z[0] &= \frac{1}{4}(-2j + 2j) = 0 \\
z[1] &= \frac{1}{4}\left[-2j^2 + 2j(-j)\right] = 1 \\
z[2] &= \frac{1}{4}\left[2j + 2j(-1)\right] = 0 \\
z[3] &= \frac{1}{4}\left[-2j(-j) + 2j(j)\right] = -1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow z[n] = [0, 1, 0, -1]$$

Observad que

$$\left.\begin{aligned}
x[n] &= [1, 0, -1, 0] \\
z[n] &= [0, 1, 0, -1]
\end{aligned}\right\} \Rightarrow z[n] = x[n-1]$$

Esto era de esperar por la propiedad de desplazamiento

(ya que $e^{-j\frac{2\pi}{4}k} \underset{k=4}{=} e^{-j2\pi} = e^{-jw\cdot 1}$)

cont. 4.1

d) Se añaden 4 ceros a $x[n]$ para obtener:

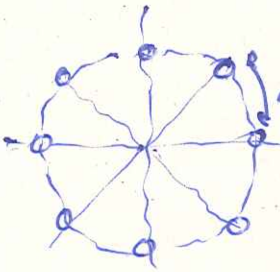
$$x_{zp}[n] = [1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0]$$

Calcular la DFT de esta secuencia:

$$X_{zp}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad ;; \quad N=8,\quad k=0,1,\dots,7.$$

Resolviendo de forma análoga al apartado a) se obtiene

$$X_{zp}[k] = [0,\ 1+j,\ 2,\ 1-j,\ 0,\ 1+j,\ 2,\ 1-j]$$



$\Delta\omega = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

muestreos intermedios (de una secuencia incrementada en N y, manteniéndose la f_s, realizándose con una resolución de:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{8\,kHz}{8} = 1\,kHz$$

e) Se genera ahora una secuencia a partir de la siguiente concatenación de $x[n]$.

$$x_c[n] = [1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0]$$

Obtener la DFT

$$X_c[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} =$$

$$= 1 - 1e^{-j\frac{2\pi}{8}2k} + 1e^{-j\frac{2\pi}{8}4k} - 1e^{-j\frac{2\pi}{8}6k} =$$

$$= 1 - e^{-j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\pi k} - e^{-j\frac{3\pi}{2}k}$$

Por tanto, particularizando para $k = 0, 1, \ldots 7$

k	$X_c[k]$
0	$1 - 1 + 1 - 1 = 0$
1	$1 - e^{-j\pi/2} + e^{-j\pi} - e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 1 + j - 1 - j = 0$
2	$1 - e^{-j\pi} + e^{-j2\pi} - e^{-j3\pi} = 1 - (-1) + 1 - (-1) = 4$
3	$1 - e^{-j\frac{\pi}{2}3} + e^{-j\pi 3} - e^{-j9\pi/2} = 1 - j + (-1) - (-j) = 0$
$\vdots$	(sucesivamente)

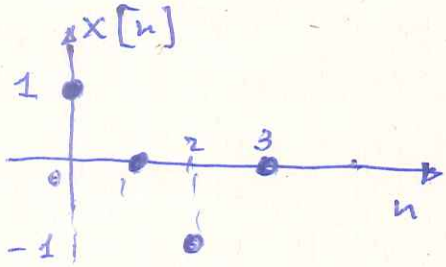
Se obtiene:

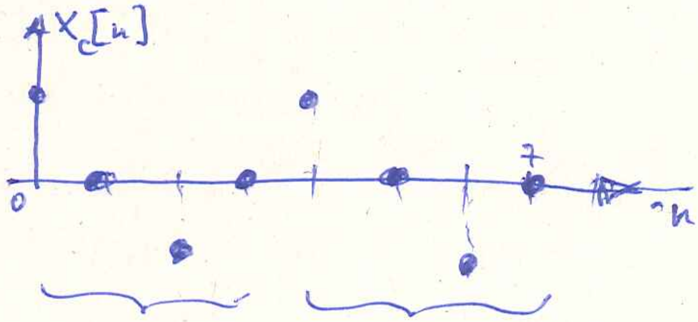
Secuencia debida a $x[n]$ y multiplicada por 2.

$$X_c[k] = [0, 0, 4, 0, 0, 0, 4, 0]$$

Se intercalan 0's.

- También puede interpretarse como





$$x_c[n] = x[n] + x[n-N]$$

$$x[n] + x[n-4]$$

Esto representará una suma de los espectros pero el segundo multiplicado por la exponencial

$$X_c[k] = X[k] + e^{-j4\frac{2\pi}{8}k} X[k]$$