PARCIAL. Noviembre. 2017

P1) Sist. LTI ,, $h[n] = \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n]$

- Estabilidad? Sí, ya que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ al tratarse de una progresión geométrica de razón $\left|\frac{1}{2}\right|$.
- Causal → Sí ,, valores de $h[n]$ son nulos para $n<0$
- FIR? No pues los valores en su dominio son ∞.
- Variante? No. Se puede demostrar fácilmente pero es que lo dice el enunciado!

P2) $x(t) = \sin(2\pi F_0 t)$,, $F_0 = 1200$ Hz

F_s para que el muestreo de la señal temporal genere una secuencia periódica?

La secuencia generada será

$$x[n] = \sin 2\pi \frac{F_0}{F_s} n$$

Y para ser periódica deberá verificar: $f = \frac{F_0}{F_s}$ / $F_0, F_s \in \mathbb{Z}$

en definitiva, que se pueda generar un nº de ciclos de la señal en un nº exacto de muestras.

$$f = \frac{F_0}{F_s} = \frac{1200}{1600} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{3 ciclos en 4 muestras.}$$

frecuencia discreta (ciclos/muestra)

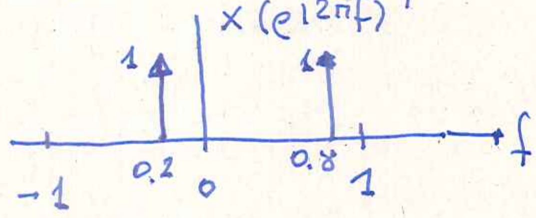
Ninguno de los otros valores cumple esta condición ya que resultan nº irracionales

NOTA.- Otra cosa sería si con esta frecuencia de muestreo, la señal podría recuperarse posteriormente, pues no se verifica la condición del T. Nyquist.

P3) $x(t) = e^{j2\pi F_0 t}$, $F_0 = 1500$ Hz

Se muestrea a F_S.

¿Para qué valor de F_S la señal discreta resultante es un tono en $f = -0.2$?

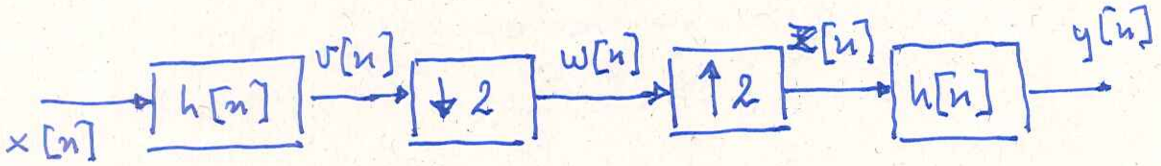


Cumpliendo la condición de periodicidad en ω, de 0 a 2π, o su equivalente en f (de 0 a 1), obtenemos que el valor en el semieje positivo es de $f = 0.8$. Por tanto:

$$f = \frac{F_0}{F_S} \Rightarrow F_S = \frac{F_0}{f} = \frac{1500}{0.8} = 1875 \text{ Hz}$$

P4) No entra en próximo examen.

P5)



$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ $\Rightarrow$ Al valor que entra de $x[n]$ se le resta el anterior: $x[n-1]$. Y por tanto, generalizando, a la secuencia $x[n]$ se le resta la secuencia $x[n-1]$.

Así:

$$x[n] = [\underline{1}, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10]$$
$$x[n-1] = [0, 1, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10]$$
$$v[n] = [1, 1, 1, 2, -6, -5, 14, 2, -10]$$
$$w[n] = [1, 1, -6, 14, -10]$$
$$z[n] = [1, 0, 1, 0, -6, 0, 14, 0, -10]$$
$$z[n-1] = [0, 1, 0, 1, 0, -6, 0, 14, 0, -10]$$
$$y[n] = [1, -1, 1, -1, -6, 6, 14, -14, -10, 10]$$

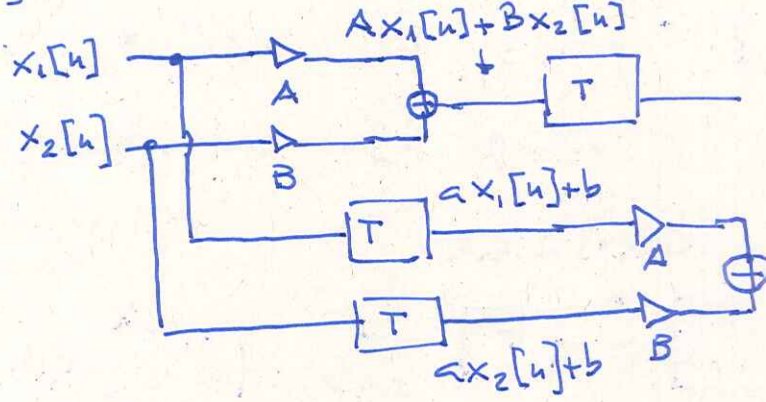
P6)

¿ Cuál de las relaciones verifica sistema lineal, invariante, causal y estable?

Descartaremos, en principio, por la propiedad más evidente que no cumple.

a) $y[n] = \sum_{k=n-N}^{N} x[k]$ → No es causal, p.e. para valores de $N>0$ y $n<0$ necesitamos conocer valores futuros.

b) $y[n] = ax[n]+b$ → No es lineal

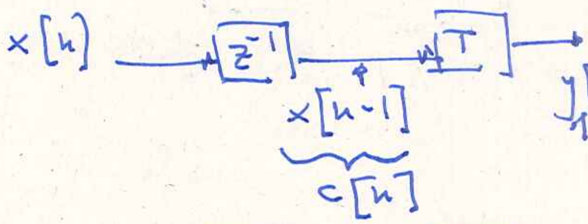


$y_1[n] = a\{Ax_1[n]+Bx_2[n]\}+b$

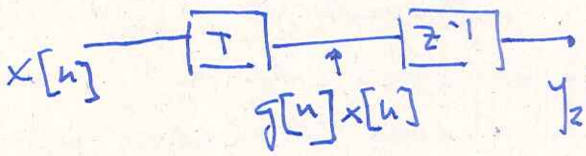
$y_2[n] = A\{ax_1[n]+b\}+B\{ax_2[n]+b\}$

$y_1[n] \neq y_2[n]$ ⇒ No lineal

c) $y[n] = g[n]\,x[n]$ → No es invariante



$y_1[n] = g[n]c[n] = g[n]\,x[n-1]$



$y_2[n] = g[n-1]\,x[n-1]$

$y_1[n] \neq y_2[n]$ ⇒ No invariante

d) $y[n] = x[n]\cos w_0 + x[n-1]$

- Estable (claramente está acotada su salida si la entrada lo está)
- Causal (no existen valores futuros)
- Lineal (fácil demostrarlo con los esquemas anteriores)
- Invariante (" " ")

P7) ¿Qué sistema no es causal?

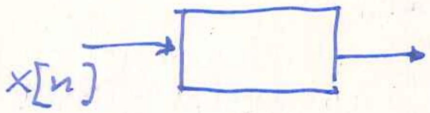
a) $y[n] = x^2[n]u[n]$ → Causal. Solo depende de valores actuales.

b) $y[n] = x[n] + x[n-3] + x[n-10]$ → Causal. Solo depende de valores actuales y pasados.

• c) $y[n] = x[n] - x[n^2 - n]$ → <u>No es causal</u>. Existen valores de n negativos (p.e. $n=-3$) para los que se necesita conocer futuros.

d) $\prod_{k=1}^{N} x[n-k]$ → Causal. Solo depende de valores pasados.

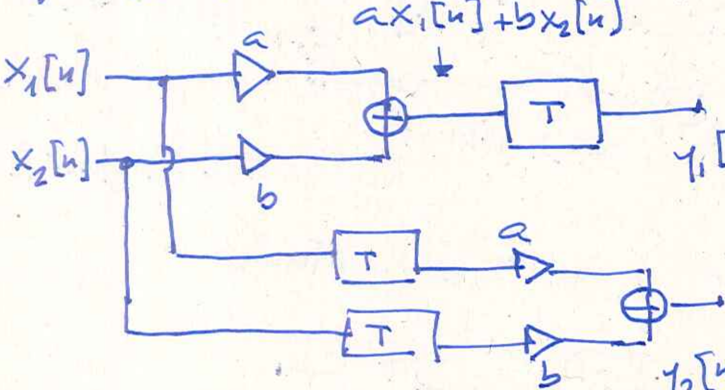
P8)



$y[n] = \left(e^{-jw_0 n} \cdot x[n]\right) * h[n]$

Siendo $h[n]$ un sistema LTI, causal y estable.

a) Lineal?



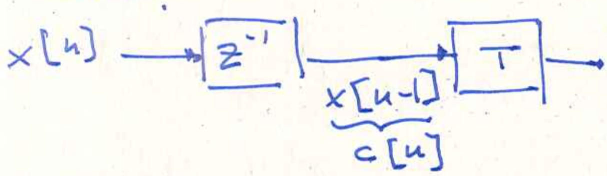
$y_1[n] = \left\{e^{-jw_0 n} \cdot \left(ax_1[n] + bx_2[n]\right)\right\} * h[n]$

$y_2[n] = \left(a e^{-jw_0 n} x_1[n]\right) * h[n] +$

$+ \left(b e^{-jw_0 n} x_2[n]\right) * h[n] =$

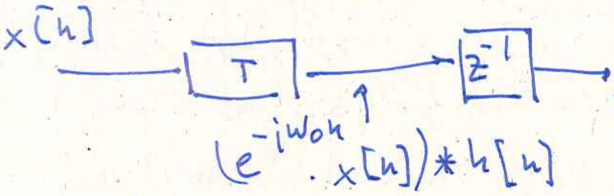
aplicando la p. distributiva de la convolución con respecto a la suma. $= y_1[n]$ ⇒ Lineal

b) Invariante?



$y_1[n] = \left(e^{-jw_0 n} \cdot c[n]\right) * h[n] =$

$= \left(e^{-jw_0 n} \cdot x[n-1]\right) * h[n]$



$y_2[n] = \left(e^{-jw_0 (n-1)} \cdot x[n-1]\right) * h[n]$

c) Sí es causal

$y_1[n] \neq y_2[n]$ ⟶ <u>No es invariante</u>

d) Sí es estable

P9)

$$x[n] \to \boxed{S_1} \xrightarrow{w[n]} \boxed{S_2} \to y[n]$$

Nota: Entenderemos que se trata de saber si la conexión en cascada de 2 sistemas LTI causales y estables es a la vez un sistema LTI, causal y estable. La respuesta es que sí, hay multitud de ejemplos que lo confirman.

Las respuestas b y c no son correctas debido a que pueden existir cancelaciones entre ambos sistemas.

P10)

$$x[n] \to \boxed{h[n]} \to y[n] = x[n] * h[n]$$

$$x[n] = [\underline{2}, -1]$$

$$h[n] = [\underline{-1}, 2, 1]$$

$x[k]$			$\underline{2}$	-1				
$h[-k]$	1	2	-1					$y[0] = -2$
$h[1-k]$		1	2	-1				$y[1] = 5$
$h[2-k]$			1	2	-1			$y[2] = 0$
$h[3-k]$				1	2	-1		$y[3] = -1$
$h[4-k]$					1	2	-1	$y[4] = 0$

Por tanto:

$$y[n] = [\ldots 0, \underline{-2}, 5, 0, -1, 0 \ldots]$$

P11)

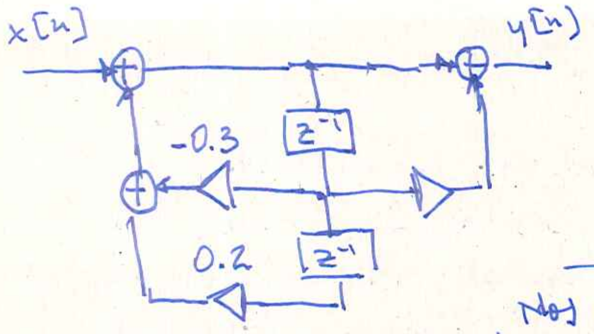
$$y[n] + y[n-1] = x[n] + x[n-1] - 2x[n-2]$$

$$Y(e^{iw})[1 + e^{-iw}] = X(e^{iw})[1 + e^{-iw} - 2e^{-i2w}]$$

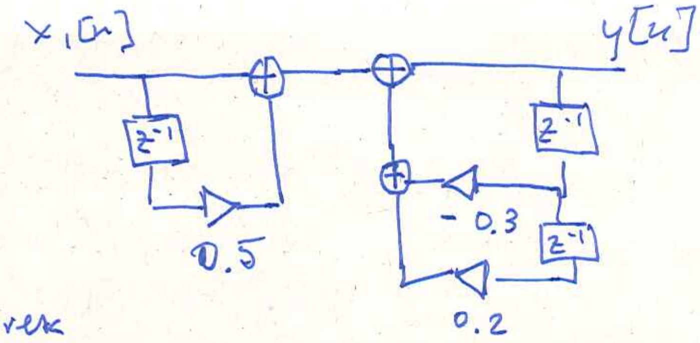
$$H(e^{iw}) = \frac{Y(e^{iw})}{X(e^{iw})} = \frac{1 + e^{-iw} - 2e^{-i2w}}{1 + e^{-iw}} = 1 - \frac{2e^{-i2w}}{1 + e^{-iw}} = 1 - \frac{2e^{-i2w}}{e^{-iw/2}(e^{iw/2} + e^{-iw/2})} =$$

$$= 1 - \frac{2e^{i\frac{3}{2}w}}{2\cos w/2} = 1 - \frac{e^{-i\frac{3}{2}w}}{\cos(w/2)}$$

P12)



$\approx$



$\longrightarrow$ Nos interesa verlo con una clara realimentación (duplicando el bloque z^{-1} superior e intercambiando bloques).

$$y[n] = x[n] + 0.5x[n-1] - 0.3y[n-1] + 0.2y[n-2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y[n] + 0.3y[n-1] - 0.2y[n-2] = x[n] + 0.5x[n-1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(e^{iw}) = \frac{1+0.5e^{-iw}}{1+0.3e^{-iw} - 0.2e^{-i2w}}$$

P13)

$$x_1[n] = \{\underline{1}, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1\} \xrightarrow[N=9]{DFT} X_1[K]$$

$$x_2[n] = \{\underline{0}, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0\} \longrightarrow X_2[K]$$

$$y[n] = x_1[n] \, (N) \, x_2[n] \xleftarrow{IDFT} X_1[K] \cdot X_2[K]$$

$x_1[n]$ 1 1 1 1 0 0 1 1 1

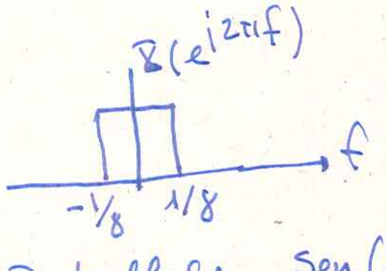
$\tilde{x}_2[-n]p_9[n]$ 0 0 0 1 1 1 1 1 0 $\longrightarrow y[0] = 3$

$\tilde{x}_2[1-n]p_9[n]$ 0 0 0 0 1 1 1 1 1 $\longrightarrow y[1] = 3$

$\tilde{x}_2[2-n]p_9[n]$ 1 0 0 0 0 1 1 1 1 $\longrightarrow y[2] = 4$

(ya no hace falta seguir)!

P14)



, Calcular x[n]

De tablas: $\dfrac{\operatorname{sen}(2\pi f_c n)}{\pi n} \xrightarrow{DTFT} \Pi\left(\dfrac{f}{2f_c}\right)$

Por tanto, con $X(e^{i2\pi f}) = \Pi\left(\dfrac{f}{1/4}\right) \Rightarrow f_c = 1/8 \Rightarrow x[n] = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}$

P15)
P16) } no entran en este examen
P17)

P18) Sistema LTI, $h[n] = a^n u[n]$, $|a|<1$

$$\xrightarrow{\quad} \boxed{h[n]} \xrightarrow{\quad}$$

$x[n] = u[n]$ $\qquad y[n]\Big|_{n\to\infty}$?

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] \cdot h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k]\, a^k u[k] =$$

$$= \sum_{0}^{n} a^k \underset{\substack{n\to\infty \\ |a|<1}}{=} \frac{1}{1-a}$$

P19) no entra en este examen

P20) $x[n] = [\underline{1}, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10] \xrightarrow{DTFT} X(e^{jw}) \longrightarrow X(e^{jw})\Big|_{w=\frac{2\pi}{5}k}$

$k = 0, 1, 2, 3, 4$

$y[n]$? $\xleftarrow{IDFT}$

Sabemos que

$$y[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN] \xrightarrow{IDFT} X[k]$$

(Sobre esta propiedad: conviene pensar en la dualidad sobre el Teorema de muestreo de una señal temporal)

Por tanto:

$N=5$, $r=0 \to x[n]$ 1 2 3 5 -1 -6 8 10

$r=1 \to x[n-N]$ 1 2 3 5 ...

$r\geq 2 \to$ fuera contexto

$r=-1 \to x[n+N]$ -6 8 10 ...

$r\leq -2 \to$ fuera contexto

$$y[n] = [-5, 10, 13, 5, -1]$$

P21) no entra en este

P21) No entra en este examen

P22) $x[n] = [\underline{1}, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10] \xrightarrow[(N=9)]{DFT} X[k]$

$k = 0, 1, \ldots, 8$

$y[n] \,?\, \xleftarrow{IDFT} X^*[k]$

Siendo $x[n] \longleftrightarrow X[k]$

Sabemos por propiedades:

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*[-k]$$

Por lo que siendo $x[n]$ una secuencia real:

$$x[n] = x^*[n] \longleftrightarrow X[k] = X^*[-k]$$

$$\Downarrow$$

$$X^*[k] = X[-k] \qquad (1)$$

También que

$$x[-n] \longleftrightarrow X[-k] \qquad (2)$$

Por tanto, uniendo (1) y (2)

$$x[-n] \longleftrightarrow X^*[K]$$

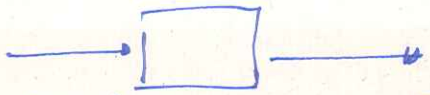
NOTA.- En estas propiedades hay que entender, y por facilidad de notación, que las transformadas inversas generan secuencias periódicas (también que los muestreos en f se limitan al nº de N muestras, pues serían igualmente periódicas al ser $X(e^{jw})$).

Así:

$$y[n] = [\underline{1}, 0, 10, 8, -6, -1, 5, 3, 2]$$

$$\tilde{x}[n] = \ldots 10, 0, \underline{1}, \underbrace{2, 3, 5, -1, -6, 8, 10, 0}, 1, 2 \ldots$$

P23)



$x[n] = e^{j\pi n/8}$ $\qquad$ $y[n] = e^{j\pi n/4}$

Si fuera un sistema LTI podría caracterizarse por su respuesta impulsional $h[n]$, verificándose:

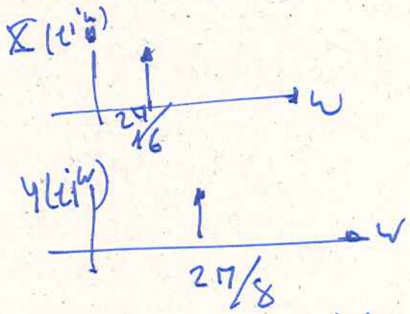
$$x[n] * h[n] = y[n] \longrightarrow X(e^{jw}) \cdot H(e^{jw}) = Y(e^{jw}) \qquad (1)$$

Sabiendo que

$$e^{jw_0 n} \xrightarrow{DTFT} 2\pi\delta(w - w_0) \text{, Periódica en } 2\pi$$

$$X(e^{jw}) = 2\pi\delta\left(w - \frac{2\pi}{16}\right)$$

$$Y(e^{jw}) = 2\pi\delta\left(w - \frac{2\pi}{8}\right)$$



Es imposible encontrar una $H(e^{jw})$ que multiplicando a $X(e^{jw})$ nos dé como resultado $Y(e^{jw})$.

$\Downarrow$

No es sistema LTI

P24)
$$x[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n+1] + 3\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$

$$X(e^{jw})\Big|_{w=0} \ ?$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn} \Rightarrow X(e^{jw})\Big|_{w=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 2 - 1 + 3 - 1 + 2 = \underline{\underline{5}}$$

P25) $x[n] \xrightarrow[N=8]{DFT} X[k] = 2\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{14\pi k}{8}\right) + 2\,\mathrm{sen}(\pi k)$

Teniendo en cuenta que si una señal tal que

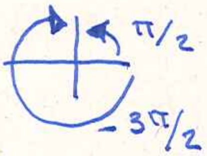
$$x[n]=\delta[n-n_0] \xrightarrow{DFT} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$$

y expresando en términos de exponenciales la $X[k]$ dada

$$X[k] = e^{j\frac{\pi k}{2}} + e^{-j\pi k/2} + \frac{e^{j14\pi k/8} - e^{-j14\pi k/8}}{j} + \frac{e^{j\pi k}-e^{-j\pi k}}{j}$$

realizando las transformadas inversas para cada uno de estos sumandos, y teniendo en cuenta que los argumentos (fases) positivos los habremos de expresar en sus correspondientes negativos:

- $e^{j\pi k/2} = e^{-j3\pi k/2} = e^{-j\frac{2\pi}{8}k\cdot 6} \xrightarrow{IDFT} \delta[n-6]$



- $e^{-j\pi k/2} = e^{-j\frac{2\pi}{8}k\cdot 2} \longrightarrow \delta[n-2]$
- $e^{j14\pi k/8} = e^{-j\frac{2\pi}{8}k} \longrightarrow \delta[n-1]$
- $e^{-j14\pi k/8} = e^{-j\frac{2\pi}{8}k\cdot 7} \longrightarrow \delta[n-7]$
- $e^{j\pi k} = e^{-j\pi k} = e^{-j\frac{2\pi}{8}k\cdot 4} \longrightarrow \delta[n-4]$
- $e^{-j\pi k} \longrightarrow \delta[n-4]$

Por tanto, al multiplicarlo por los coeficientes constantes que tiene cada uno de ellos, obtenemos.

$$x[n] = \delta[n-6]+\delta[n-2]-j\delta[n-1]+j\delta[n-7]\cancel{-j\delta[n-4]+j\delta[n-4]}$$

$$\Rightarrow \quad x[n] = \delta[n-2]+\delta[n-6]+j\delta[n-7]-j\delta[n-1]$$