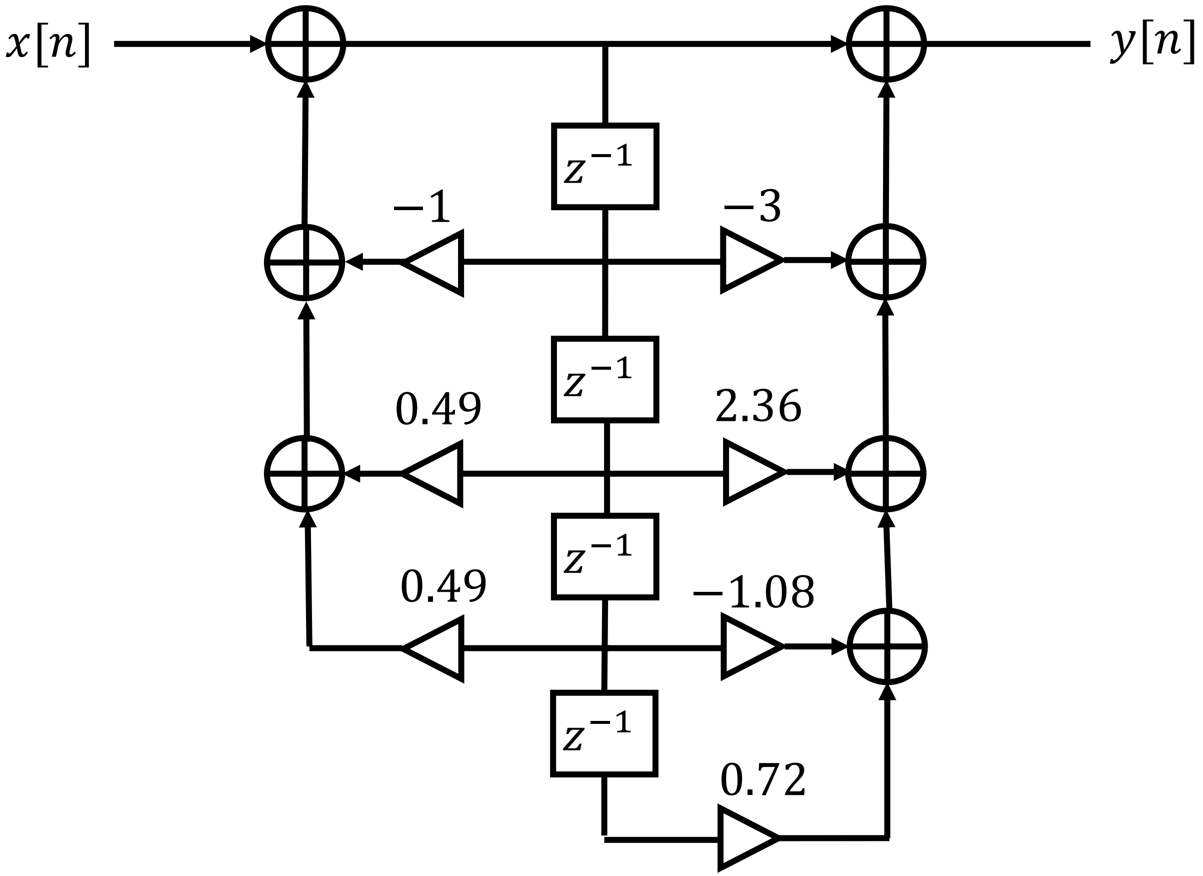
Se define un sistema LTI causal $h_1[n]$ mediante el siguiente diagrama de bloques:



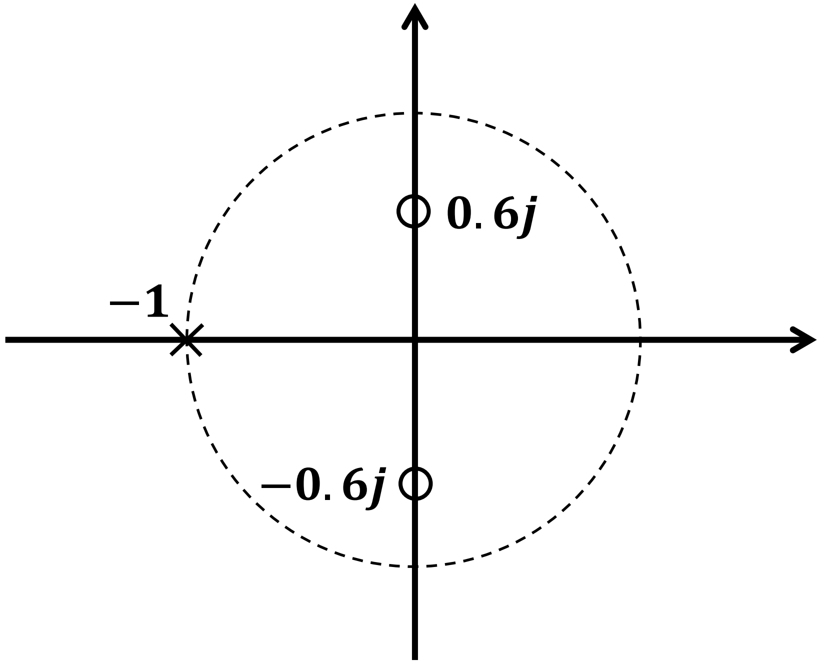
(a) Calcule su función de transferencia $H_1(z)$. (**1 punto**)

$$y[n] + y[n-1] - 0.49y[n-2] - 0.49y[n-3] = x[n] - 3x[n-1] + 2.36x[n-2] - 1.08x[n-3] + 0.72x[n-4]$$

$$Y(z) + z^{-1}Y(z) - 0.49z^{-2}Y(z) - 0.49z^{-3}Y(z) = X(z) - 3z^{-1}X(z) + 2.36z^{-2}X(z) - 1.08z^{-3}X(z) + 0.72z^{-4}X(z)$$

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 3z^{-1} + 2.36z^{-2} - 1.08z^{-3} + 0.72z^{-4}}{1 + z^{-1} - 0.49z^{-2} - 0.49z^{-3}}$$

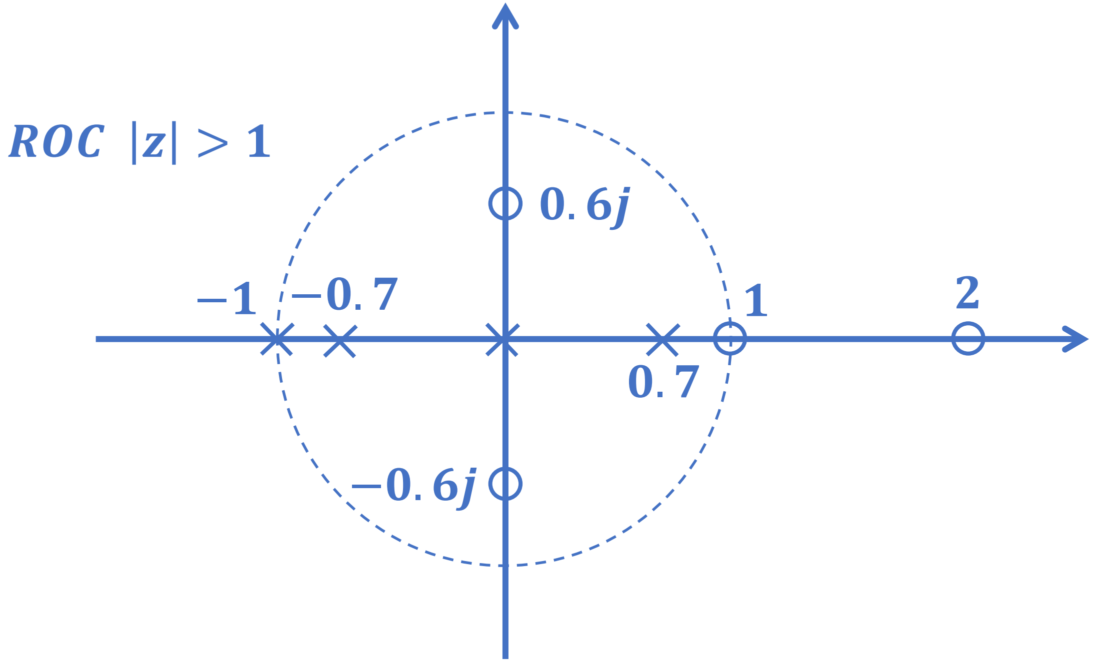
(b) Sabiendo que los polos y ceros que se muestran en la siguiente figura forman parte del diagrama de $H_1(z)$, calcule los que faltan para completar la figura. Indique también su ROC. **(1 punto)**



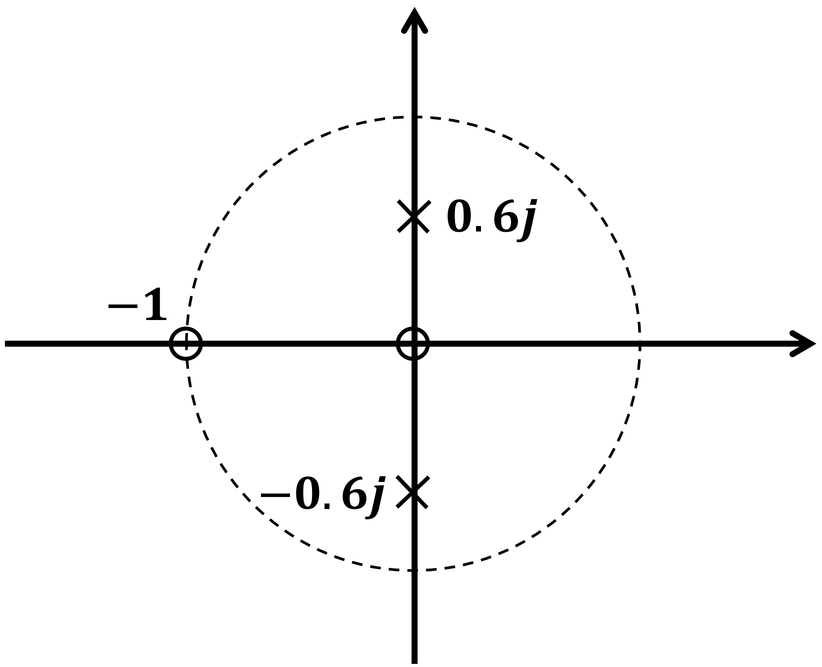
$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 3z^{-1} + 2.36z^{-2} - 1.08z^{-3} + 0.72z^{-4}}{1 + z^{-1} - 0.49z^{-2} - 0.49z^{-3}}$$

$$H_1(z) = \frac{(1 + 0.36z^{-2})(1 - 3z^{-1} + 2z^{-2})}{(1 + z^{-1})(1 - 0.49z^{-2})}$$

$$H_1(z) = \frac{(1 + 0.36z^{-2})(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})}{(1 + z^{-1})(1 - 0.49z^{-2})}$$



(c) Se define un nuevo sistema LTI causal $h_2[n]$ cuya función de transferencia tiene el diagrama de polos y ceros que se muestra a continuación. Obtenga la expresión analítica de $\arg\{H_2(e^{j\omega})\}$ y dibuje de manera aproximada su evolución en el rango $[-\pi, \pi]$. NOTA: Si el dibujo le llevara demasiado tiempo, se recomienda que lo deje para el final. **(1 punto)**



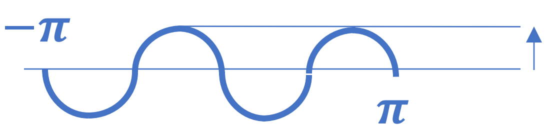
$$H_2(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.36z^{-2}} \qquad |z| > 0.6$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 + 0.36e^{-j2\omega}} = \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(2\cos\frac{\omega}{2}\right)}{1 + 0.36\cos 2\omega - 0.36j\sin 2\omega}$$

$$\arg\{H_2(e^{j\omega})\} = \arg\left\{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(2\cos\frac{\omega}{2}\right)\right\} - \arg\{1 + 0.36\cos 2\omega - 0.36j\sin 2\omega\} = -\frac{\omega}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{-0.36\sin 2\omega}{1 + 0.36\cos 2\omega}\right)$$

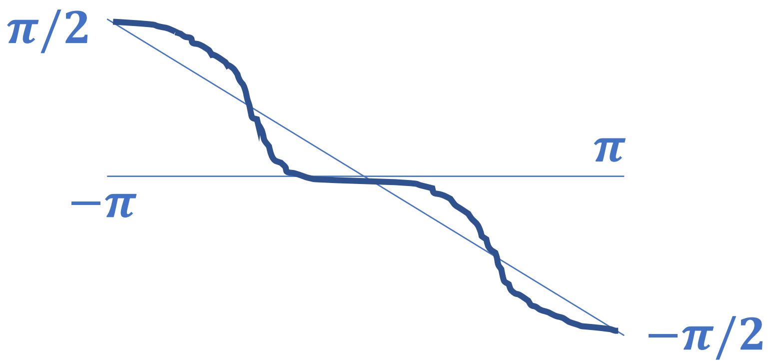
Para el dibujo, lo más práctico es evaluar la fase del denominador a partir de su expresión como suma de fasores, por lo tanto:

Fase denominador



$$\tan^{-1}\left(\frac{0.36}{1}\right) = 0.3456$$

Fase numerador - fase denominador



(d) A partir de los sistemas $h_1[n]$ y $h_2[n]$ definidos en los apartados (a) y (c) respectivamente, se diseña un nuevo sistema mediante la conexión en cascada de ambos. Calcule la respuesta que se obtendría para un escalón unitario como entrada.

$$\boldsymbol{x[n]} \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{h_1[n]}} \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{h_2[n]}} \longrightarrow \boldsymbol{y[n]}$$

$$Y(z) = X(z)H_1(z)H_2(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{(1+0.36z^{-2})(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}{(1+z^{-1})(1-0.49z^{-2})} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1+0.36z^{-2}}$$

$$Y(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-0.49z^{-2}} \qquad |z| > 0.7$$

$$Y(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1+0.7z^{-1})(1-0.7z^{-1})} = \frac{1.9286}{1+0.7z^{-1}} - \frac{0.9286}{1-0.7z^{-1}}$$

$$y[n] = 1.9286(-0.7)^n u[n] - 0.9286(0.7)^n u[n]$$