escola d'enginyeria | UAB CEI CAMPUS D'EXCEL·LÈNCIA INTERNACIONAL

PRUEBA PARCIAL – OCTUBRE 2016
102712 Señales y Sistemas Discretos

Profesores: Gonzalo Seco Granados, José A. Del Peral

Instrucciones: 120 minutos. Ponga el nombre y el NIU en todas las hojas. Entregue cada cuestión en una hoja o cara diferente y ordenadas.

Cuestión 1

Considere el sistema LTI con respuesta impulsional

$$h[n] = \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n].$$

Determine la respuesta en régimen permanente (o sea, para valores de n muy grandes) a la entrada $x[n] = \cos(\pi n) u[n]$.

Cuestión 2

Considere el sistema LTI descrito por la ecuación

$$y[n] = 0.2y[n-1] + x[n].$$

Calcule su respuesta impulsional, su respuesta frecuencial y la respuesta a la entrada $x[n] = e^{j2\pi\frac{1}{8}n} + e^{-j2\pi\frac{1}{10}n}$.

Cuestión 3

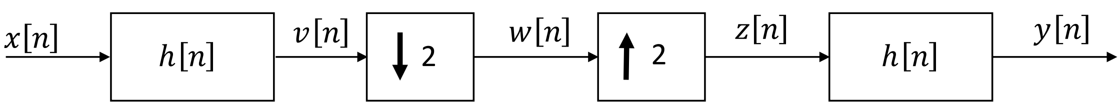
Un sistema tiene respuesta impulsional

$$h[n] = a^n\, u[n], \quad \text{con } |a| < 1\,.$$

Calcule su respuesta al escalón $x[n] = u[n]$.

Cuestión 4

Se dispone del siguiente sistema:

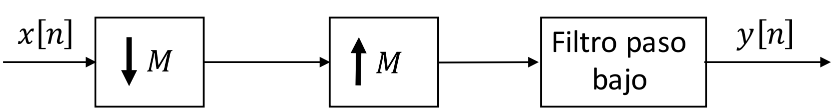


Se utiliza el filtro $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$.

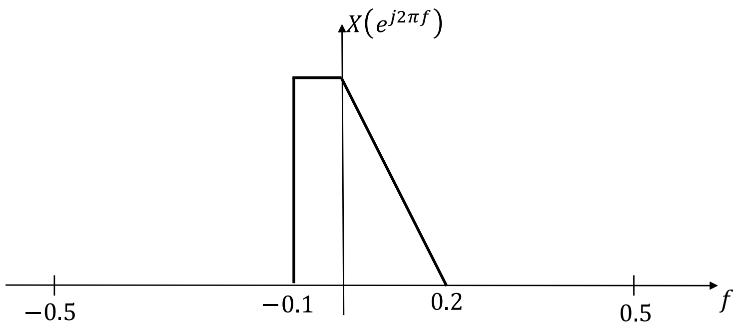
La entrada es la señal $x[n] = \{\underline{1}, 2, -4, 5, -1, 6, 7, 8\}$, donde la muestra subrayada corresponde a $n = 0$. Calcule la salida $y[n]$ del sistema.

Cuestión 5

Se dispone del siguiente sistema:



La transformada de Fourier de la señal de entrada tiene la siguiente forma:



El filtro paso bajo del final de la cadena es ideal y puede tener el ancho de banda que se desee. ¿Cuál es el valor máximo de M para el cual es posible hacer que $y[n]$ sea igual a $x[n]$?

Cuestión 6
Sea $x[n]$ una señal de energía finita. Su autocorrelación se denota como $r_{xx}[n]$ y su densidad espectral de energía como $S_{xx}(e^{j2\pi f})$.
La señal $y[n]$ es el resultado de modular $x[n]$ a frecuencia f_0, o sea

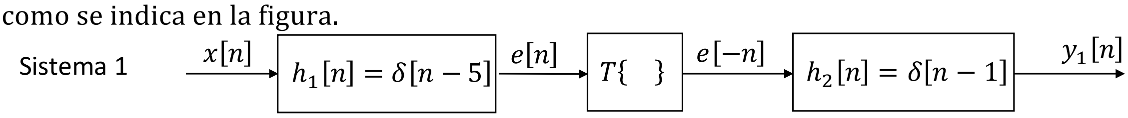
$$y[n] = x[n]e^{j2\pi f_0 n}.$$

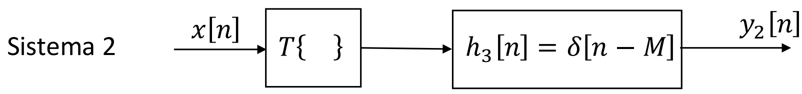
Exprese $r_{yy}[n]$ en función de $r_{xx}[n]$.
Exprese $S_{yy}(e^{j2\pi f})$ en función de $S_{xx}(e^{j2\pi f})$.

Cuestión 7
Calcule la DFT de $N = 8$ puntos de un pulso rectangular de 4 muestras, o sea, de la señal $x[n] = \{\underline{1}, 1,1,1\}$.

Cuestión 8
Calcule convolución circular de $N = 8$ puntos entre las secuencias $x[n] = \{\underline{1}, 1,1,1\}$ y $y[n] = \{\underline{1}, 2,3,4, -1, -1,0,3\}$.

Cuestión 9
Considere los siguientes sistemas, donde el bloque $T\{\ \ \}$ realiza la inversión temporal, como se indica en la figura.





¿Para qué valor de M el segundo sistema da exactamente la misma salida que el primero?
Exprese $Y_1(e^{j2\pi f})$ en función de $X(e^{j2\pi f})$.

Cuestión 10
Determine si el siguiente sistema

$$T\{x[n]\} = n\, x[n]$$

es estable. Y causal? Lineal? Invariante?

EXAMEN PARCIAL I - SSD OCTUBRE 2016

CUESTIÓN 1

$$x[n] = \cos(\pi n)\, u[n] = (-1)^n u[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{j}{2}\right)^k (-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left(-\tfrac{j}{2}\right)^k \overset{\sim}{=}$$

$$\overset{\sim}{=} (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\tfrac{j}{2}\right)^k = (-1)^n \frac{1}{1 + j/2}$$

n muy grande

Otra forma:

$$x[n] = \cos(\pi n)\, u[n] = e^{j\pi n} u[n]$$

Para n muy grande, x[n] se comporta como un tono de duración infinita y se obtiene la respuesta del sistema en régimen permanente sinusoidal

$$y[n] = H(e^{j2\pi f})\Big|_{f=1/2} e^{j\pi n}$$

$$H(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{j}{2}\right)^n e^{-j2\pi f n} = \frac{1}{1 - \frac{j}{2} e^{-j2\pi f n}}$$

$$H(e^{j2\pi f})\Big|_{f=1/2} = \frac{1}{1 + j/2}$$

$$y[n] = \frac{1}{1+j/2} e^{j\pi n} = \frac{1}{1+j/2} (-1)^n$$

CUESTIÓN 2

$$y[n] = 0'2\, y[n-1] + x[n]$$

Si $x[n] = \delta[n] \Rightarrow$ $y[0] = 1$, $y[1] = 0'2$, $y[2] = 0'2^2$, $\vdots$

LTI $\rightarrow$ el sistema está en condiciones iniciales nulas.

$$\boxed{h[n] = 0'2^n\, u[n]}$$

$$h[n] = 0'2\, h[n-1] + \delta[n]$$

$\downarrow$ Trasformada de Fourier

$$H(e^{j2\pi f}) = 0'2\, e^{-j2\pi f} H(e^{j2\pi f}) + 1$$

$$\boxed{H(e^{j2\pi f}) = \frac{1}{1 - 0'2\, e^{-j2\pi f}}}$$

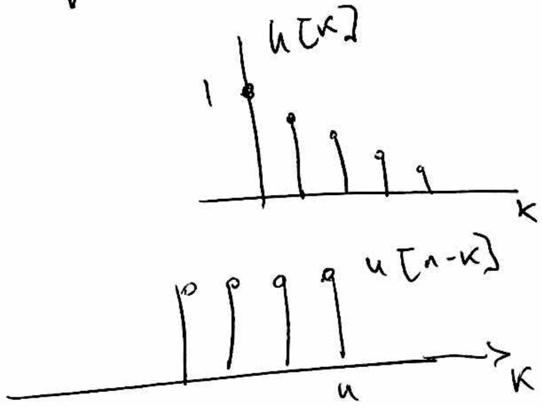
$$x[n] = e^{j2\pi \frac{1}{8} n} + e^{-j2\pi \frac{1}{10} n}$$

$$\hookrightarrow \boxed{y[n] = H(e^{j2\pi \frac{1}{8}})\, e^{j2\pi \frac{1}{8} n} + H(e^{-j2\pi \frac{1}{10}})\, e^{-j2\pi \frac{1}{10} n}}$$

CUESTION 3

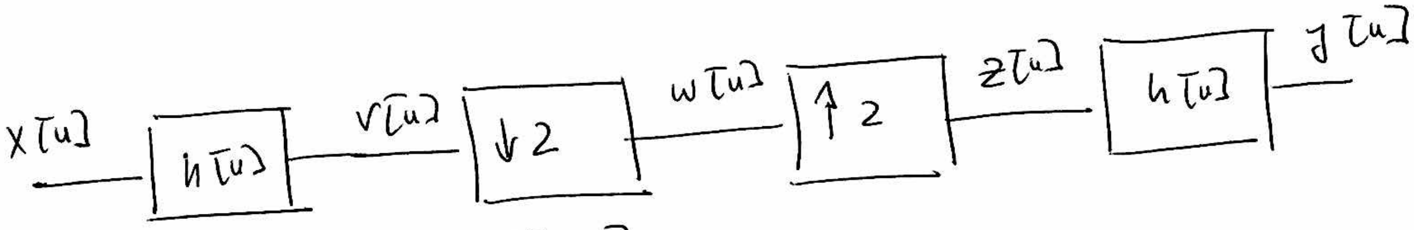
$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad n \geq 0$$

$$y[n] = 0 \quad n < 0$$



$$\boxed{y[n] = \frac{1-a^n}{1-a}\, u[n]}$$

CUESTION 4



$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$

$x[n] = \{\underline{1}, 2, -4, 5, -1, 6, 7, 8\}$

$v[n] = x[n] + x[n-1]$

$v[n] = \{\underline{1}, 3, -2, 1, 4, 5, 13, 15, 8\}$

$w[n] = v[2n]$

$w[n] = \{\underline{1}, -2, 4, 13, 8\}$

$z[n] = \{\underline{1}, 0, -2, 0, 4, 0, 13, 0, 8\}$

$y[n] = z[n] + z[n-1]$

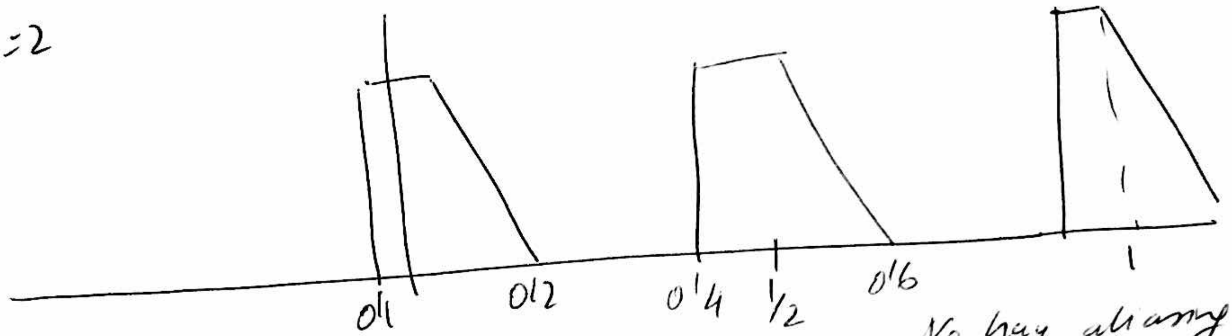
$y[n] = \{1, 1, -2, -2, 4, 4, 13, 13, 8, 8\}$

CUESTION 5

Si en el diezmado no se produce aliasing, la señal original se puede recuperar mediante la interpolación.
Vamos a ver para qué valor de M se empieza a producir aliasing.

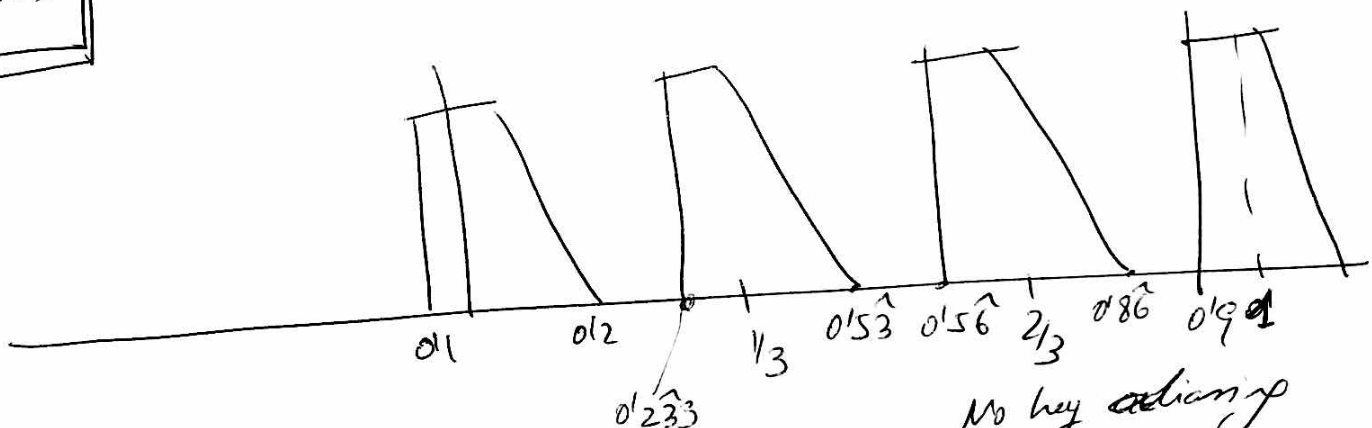
El primer paso para calcular el espectro de la señal diezmada es repetir el espectro en múltiplos de 1/M.

M=2



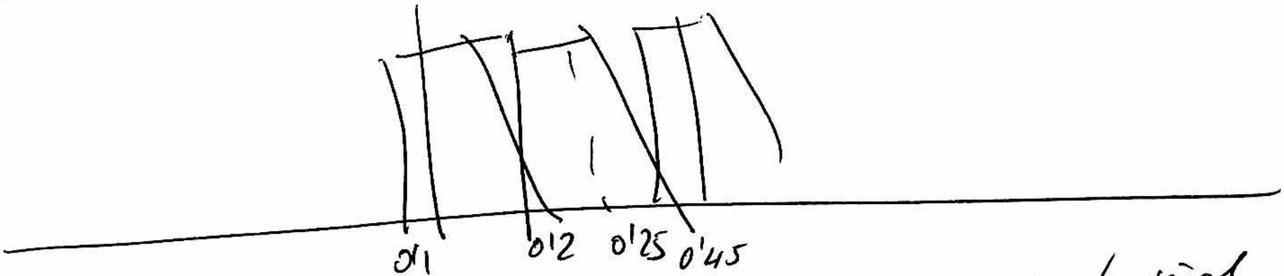
No hay aliasing.

$\boxed{M=3}$



No hay aliasing

M=4



→ Hay aliasing → la señal no se podrá recuperar sin distorsión.

CUESTION 6

$$r_{yy}[n] = y[n] * y^*[-n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[n+k]\, y^*[k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n+k]\, e^{j2\pi f_0 (n+k)} \quad x^*[k]\, e^{-j2\pi f_0 k} =$$

$$= e^{j2\pi f_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n+k]\, x[k] = e^{j2\pi f_0 n}\, r_{xx}[n]$$

$$S_{yy}(e^{j2\pi f}) = S_{xx}\left(e^{j2\pi (f - f_0)}\right)$$

CUESTION 7

$$X[k] = \sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \qquad N=8 \quad k=0 \ldots 7$$

$$x[n] = 1 \quad 0 \le n \le 3$$
$$x[n] = 0 \quad n \ge 4$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} e^{-j2\pi \frac{k}{8} n} = \sum_{n=0}^{3} e^{-j\pi/4\, kn}$$

$$X[0] = 4$$

$$X[1] = 1 + e^{-j\pi/4} + e^{-j\pi/2} + e^{-j3\pi/4} = \frac{1 - e^{-j\pi/4 \cdot 4}}{1 - e^{-j\pi/4}} = \frac{2}{1 - e^{-j\pi/4}}$$

$$X[2] = 0$$

$$X[3] = 1 + e^{-j\pi 3/4} + e^{-j3\pi/2} + e^{-j9\pi/4} = \frac{1 - e^{-j3\pi \cdot 4/4}}{1 - e^{-j\pi 3/4}} = \frac{2}{1 - e^{-j3\pi/4}}$$

$$X[4] = 0$$

$$X[5] = \frac{2}{1 - e^{-j5\pi/4}} = \frac{2}{1 - e^{+j3\pi/4}} = X^*[3]$$

$$X[6] = 0$$

$$X[7] = \frac{2}{1 - e^{-j7\pi/4}} = \frac{2}{1 - e^{+j\pi/4}} = X^*[1]$$

CUESTION 8

$$x[n] \circledast_8 y[n] = \sum_{k=0}^{7} \tilde{x}[k]\, \tilde{y}[n-k]$$

extensión periódicas con periodo de 8 muestras.

	1 1 1 1 0 0 0 0	se multiplica y se suma →	3
n=0	1 3 0 -1 -1 4 3 2	→	3
desplazamos una posición n=1	2 1 3 0 -1 -1 4 3	→	$1\times2+1\times1+1\times3+1\times0+0\times(-1)+0\times(-1)+0\times4+0\times3=6$
n=2	3 2 1 3 0 -1 -1 4	→	9
n=3	4 3 2 1 3 0 -1 -1	→	10
n=4	-1 4 3 2 1 3 0 -1	→	8
n=5	-1 -1 4 3 2 1 3 0	→	5
n=6	0 -1 -1 4 3 2 1 3	→	2
	3 0 -1 -1 4 3 2 1	→	1

$$x[n] \circledast_8 y[n] = \{3, 6, 9, 10, 8, 5, 2, 1\}$$

Se puede comprobar con Matlab haciendo:

cconv(x,y)

CUESTION 9

$$x[n] \to \boxed{h_1[n] = \delta[n-5]} \to \boxed{T\{\cdot\}} \to \boxed{h_2[n] = \delta[n-1]} \to$$

$e[n] = x[n-5]$ $\qquad$ $x[-n-5]$ $\qquad$ $y_1[n] = x[-(n-1)-5] =$

$= x[-n-4]$

$$x[n] \to \boxed{T\{\cdot\}} \xrightarrow{x[-n]} \boxed{h_3[n] = \delta[n-M]} \to y_2[n] = x[-(n-M)] =$$

$$= x[-n+M]$$

$$\boxed{M = -4}$$

$$\boxed{Y_1(e^{j2\pi f})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_1[n] e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n-4] e^{-j2\pi f n} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{+j2\pi f m} e^{j2\pi f 4} = \boxed{e^{j2\pi f \cdot 4} X(e^{-j2\pi f})}$$

$m = -n-4$

$-n = m+4$

CUESTIÓN 10

$$y[n] = T\{x[n]\} = n\,x[n]$$

- No estable. Aunque $|x[n]| < k, \forall n$, $T\{x[n]\}$ puede crecer sin límite.

- Causal. $y[n]$ solo depende de la entrada actual, no de entradas futuras.

- Lineal

$$T\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \alpha_1 T\{x_1[n]\} + \alpha_2 T\{x_2[n]\}$$

- No invariante

$$\left.\begin{aligned} T\{x[n-M]\} &= n\,x[n-M] \\ y[n-M] &= (n-M)\,x[n-M] \end{aligned}\right\} \text{son diferentes.}$$