· Problema (6.14 ext). Considérense las secuencias:

$$\begin{cases} x[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] \\ h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \end{cases}$$

· y denominaremos

$$Y[K] = X[K] \cdot H[K]$$

siendo $X[k]$, $H[k]$ las DFT's de $x[n]$ e $y[n]$ respectivam. habiéndose realizado con $N=5$.

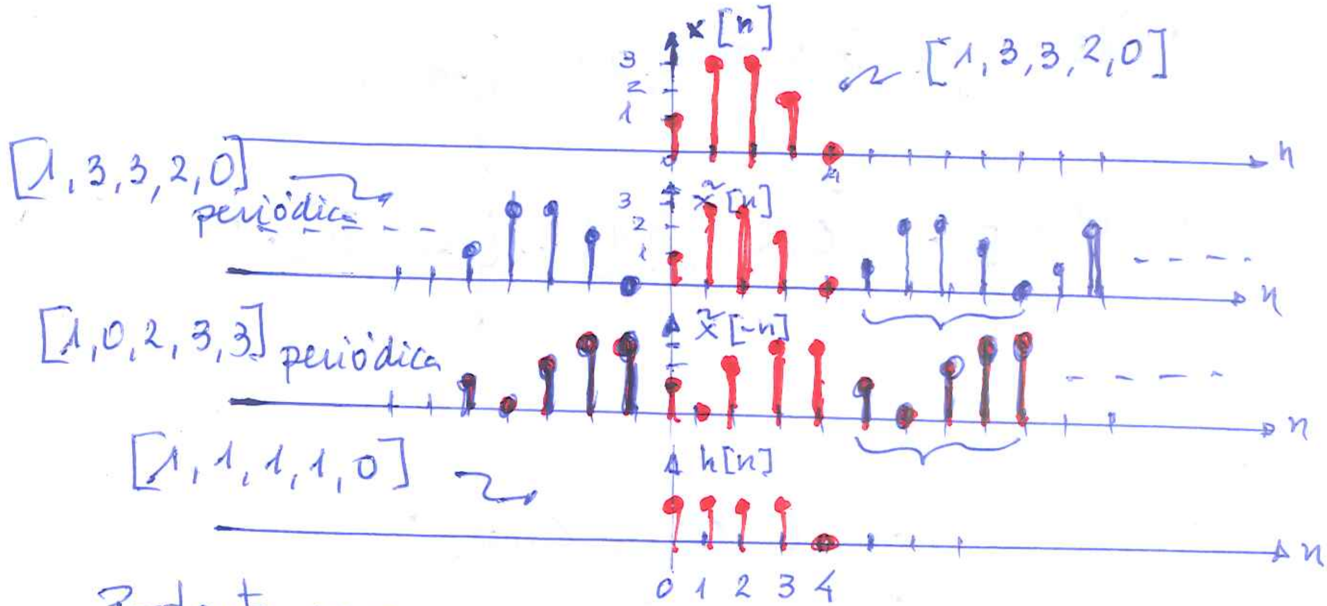
- Encontrar $y[n]$

Solución

$$\underbrace{x[n] \circledast h[n]}_{\substack{\| \\ y[n]}} \longleftrightarrow \underbrace{X[K] \cdot H[K]}_{\substack{\| \\ Y[K]}}$$

$y[n] \longleftrightarrow Y[K]$

Propiedad de la convolución circular



Por tanto, como

$$y[n] = x[n] \circledast h[n] = \sum_{k=0}^{4} h[k]\, x[((n-k))_5],$$

$\boxed{n=0} \Rightarrow$ Sin decalaje: $\tilde{x}[-n] = [1,0,2,3,3] \longrightarrow y[0] = 1.1 + 0.1 + 2.1 + 3.1 = 6$

$\boxed{n=1} \Rightarrow [3,1,0,2,3] \longrightarrow y[1] = 3.1 + 1.1 + 0.1 + 2.1 = 6$

$\boxed{n=2} \Rightarrow [3,3,1,0,2] \longrightarrow y[2] = 3.1 + 3.1 + 1.1 + 0.1 = 7$

$\boxed{n=3} \rightarrow [2,3,3,1,0] \longrightarrow y[3] = 2.1 + 3.1 + 3.1 + 1.1 = 9$

$\boxed{n=4} \rightarrow [0,2,3,3,1] \longrightarrow y[4] = 0.1 + 2.1 + 3.1 + 3.1 = 8$

NOTA: Ya no he tenido en cuenta $h[4]=0$

$$\Rightarrow y[n] = [6,6,7,9,8]$$

Nótese que esta convolución circular, realizada gráficamente, podríamos haberla realizado analíticamente:

$$x[n] = [1, 3, 3, 2, 0]$$

$$\left.\begin{array}{l} x[((-n))_5] = [1, 0, 2, 3, 3] \\ h[n] = [1, 1, 1, 1, 0] \end{array}\right\} \rightarrow y[0] = 1\cdot1 + 0\cdot1 + 2\cdot1 + 3\cdot1 + 0\cdot \quad = 6$$

$$\left.\begin{array}{l} x[((1-n))_5] = [3, 1, 0, 2, 3] \\ h[n] = \text{igual} \end{array}\right\} \rightarrow y[1] = 3+1+0+2 = 6$$

$$x[((2-n))_5] = [3, 3, 1, 0, 2] \Big\} \rightarrow y[2] = 3+3+1+0 = 7$$

$$x[((3-n))_5] = [2, 3, 3, 1, 0] \Big\} \rightarrow y[3] = 2+3+3+1 = 9$$

$$x[((4-n))_5] = [0, 2, 3, 3, 1] \Big\} \rightarrow y[4] = 0+2+3+3 = 8$$

Por tant, igual como antes:

$$y[n] = [6, 6, 7, 9, 8] \Rightarrow$$

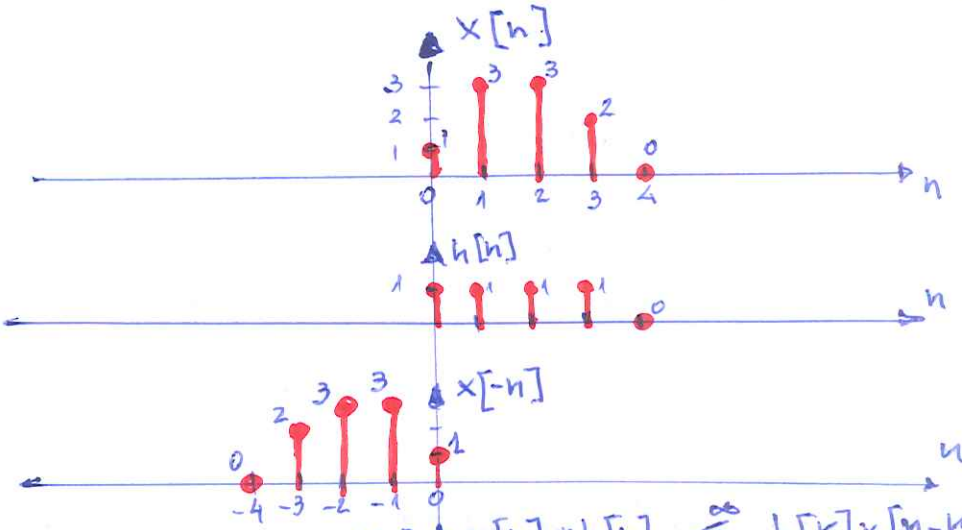
$$y[n] = 6\delta[n] + 6\delta[n-1] + 7\delta[n-2] + 9\delta[n-3] + 8\delta[n-4]$$

Otra resolución P. 6.14

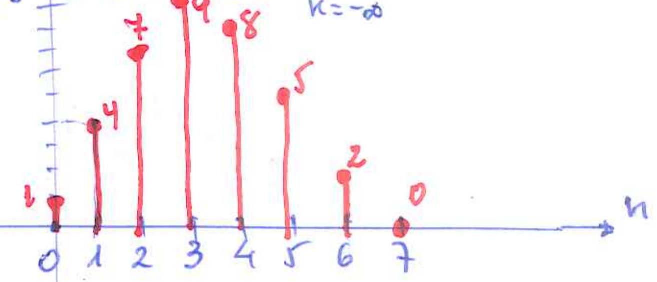
1.- obtendremos la convolución lineal

$$z[n] = x[n] * h[n]$$

2.- Tendremos en cuenta los efectos de aliasing.



$z[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$



$z[0] = 1.1 = 1$

$z[1] = 3.1 + 1.1 = 4$

$z[2] = 3.1 + 3.1 + 1.1 = 7$

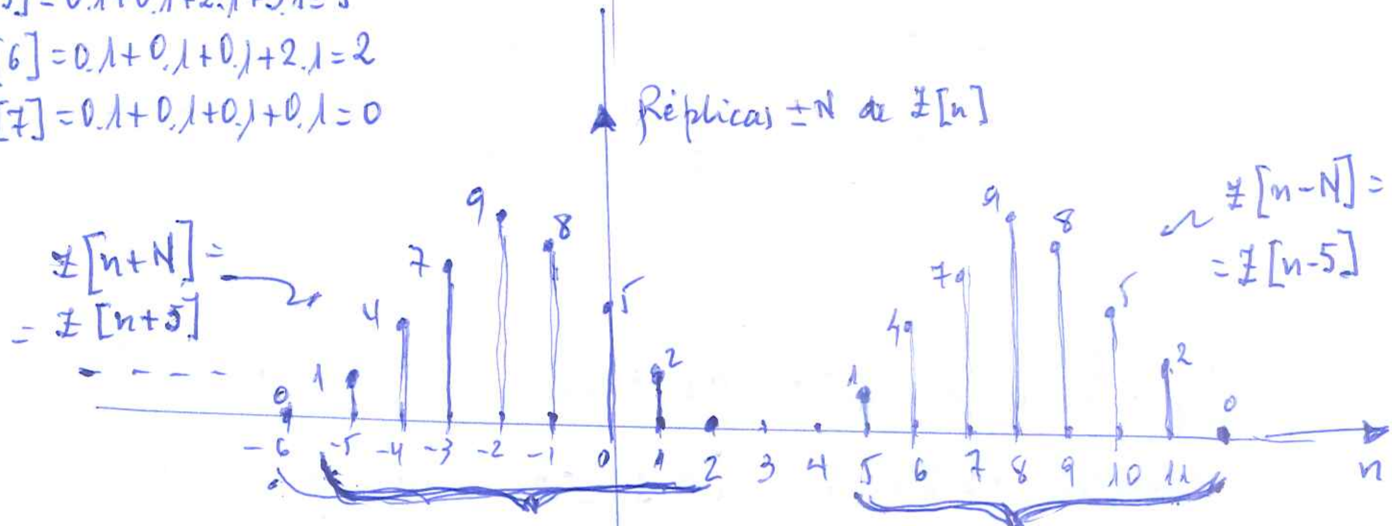
$z[3] = 2.1 + 3.1 + 3.1 + 1.1 = 9$

$z[4] = 0.1 + 2.1 + 3.1 + 3.1 = 8$

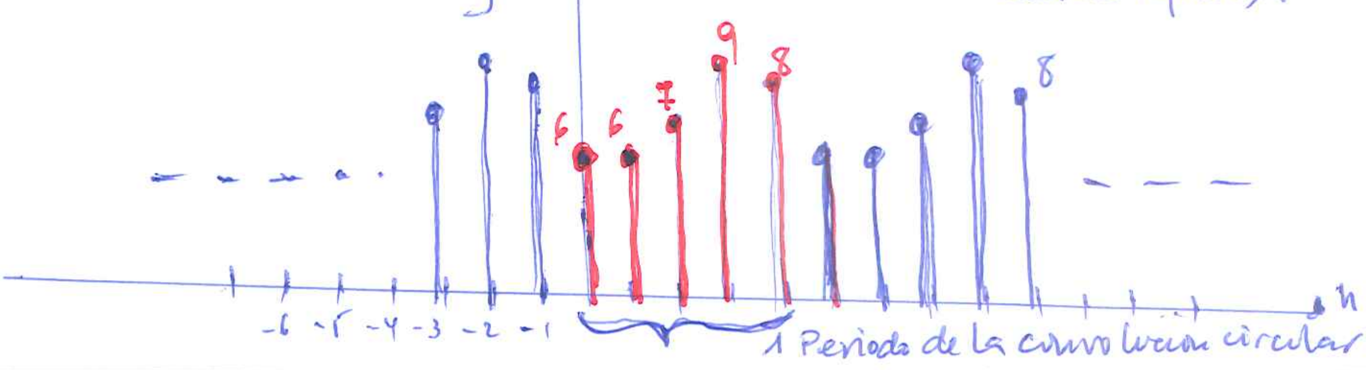
$z[5] = 0.1 + 0.1 + 2.1 + 3.1 = 5$

$z[6] = 0.1 + 0.1 + 0.1 + 2.1 = 2$

$z[7] = 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0$



$y[n] = x[n] \circledast h[n]$ ← Suma de $x[n] * h[n]$ más sus réplicas:



Otra resolución P.6.14

1.- Obtener $X[k]$ y $H[k]$

2.- Realizar $X[k] \cdot H[k] = Y[k]$

3.- Realizar IDFT de $Y[k]$ para obtener $y[n]$.

Podemos comprobar que este proceso es más laborioso.

Por ejemplo, si queremos calcular:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{4} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{5}kn} =$$

$$= 1 + 3e^{-j\frac{2\pi}{5}k} + 3e^{-j\frac{4\pi}{5}k} + 2e^{-j\frac{6\pi}{5}k}$$

Por lo que

$$X[0] = 1+3+3+2+0 = 9$$

$$X[1] = 1 + 3e^{-j2\pi/5} + 3e^{-j4\pi/5} + 2e^{-j6\pi/5} = \ldots$$

...

Y efectivamente observamos que es más tedioso obtener $y[n]$ que los procesos realizados en las 2 soluciones anteriores.