7.3.3 a) Encuentra la respuesta frecuencial del sistema

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

– 1ª Resolución. Sabemos que

$$X(e^{jw}) \longrightarrow \boxed{H(e^{jw})} \longrightarrow Y(e^{jw}) \Rightarrow Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot H(e^{jw})$$

$$H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} \qquad (1)$$

Realizando las transformadas de la EFD dada, teniendo en cuenta que si

$$x[n] \longrightarrow X(e^{jw})$$

$$x[n-n_0] \longrightarrow e^{-jwn_0} X(e^{jw})$$

entonces:

$$Y(e^{jw}) - \frac{1}{2}e^{-jw}Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) + 2e^{-jw}X(e^{jw}) + e^{-j2w}X(e^{jw})$$

Aplicando (1), después de sacar factor común de $Y(e^{jw})$ y $X(e^{jw})$ respectivamente en cada término de la igualdad

$$\boxed{H(e^{jw}) = \frac{1+2e^{-jw}+e^{-j2w}}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}}$$

– 2ª Resolución

1º. Encontraremos la respuesta impulsional $h[n]$, introduciendo $x[n] = \delta[n]$

2º. Hallaremos la función de transferencia $H(e^{jw})$ aplicando la transformada.

$$x[n] = \delta[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = h[n]$$

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Transformando:

$$H(e^{jw}) - \frac{1}{2}e^{-jw}H(e^{jw}) = 1 + 2e^{-jw} + e^{-j2w} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad H(e^{jw}) = \frac{1+2e^{-jw}+e^{-j2w}}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

b) Encuentre la EDF de la respuesta frecuencial

$$H(e^{jw}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-jw} + e^{-j3w}}{1 + \frac{1}{2}e^{-jw} + \frac{3}{4}e^{-j2w}}$$

$$H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-jw} + e^{-3jw}}{1 + \frac{1}{2}e^{-jw} + \frac{3}{4}e^{-j2w}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(e^{jw})\left[1 + \frac{1}{2}e^{-jw} + \frac{3}{4}e^{-j2w}\right] = X(e^{jw})\left[1 - \frac{1}{2}e^{-jw} + e^{-j3w}\right]$$

$$\Big\downarrow \text{DTFT}^{-1}$$

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{3}{4}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] + x[n-3]$$