escola d'enginyeria

PRUEBA PARCIAL – NOVIEMBRE 2019
102712 Señales y Sistemas Discretos

Profesores: Rafael Gallego Terris

Instrucciones: *120 minutos. Se puede utilizar calculadora y las tablas de TF y DFT del Campus Virtual si se tienen imprimidas. Las respuestas correctas suman 1 y las respuestas incorrectas restan 1/3. La muestra correspondiente al índice* $n = 0$*, o al índice* $k = 0$ *se indica subrayada.*

Permutación 1

Respuestas (marca con una "x" la letra correspondiente para cada pregunta de la tabla)

Pregunta 1	a) ☒	b) ☐	c) ☐	d) ☐
Pregunta 2	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☒
Pregunta 3	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☒
Pregunta 4	a) ☐	b) ☐	c) ☒	d) ☐
Pregunta 5	a) ☒	b) ☐	c) ☐	d) ☐
Pregunta 6	a) ☐	b) ☐	c) ☒	d) ☐
Pregunta 7	a) ☐	b) ☒	c) ☐	d) ☐
Pregunta 8	a) ☐	b) ☒	c) ☐	d) ☐
Pregunta 9	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☒
Pregunta 10	a) ☒	b) ☐	c) ☐	d) ☐
Pregunta 11	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☒
Pregunta 12	a) ☐	b) ☒	c) ☐	d) ☐
Pregunta 13	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☒
Pregunta 14	a) ☐	b) ☒	c) ☐	d) ☐
Pregunta 15	a) ☐	b) ☐	c) ☒	d) ☐
Pregunta 16	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☒
Pregunta 17	a) ☐	b) ☒	c) ☐	d) ☐
Pregunta 18	a) ☐	b) ☒	c) ☐	d) ☐
Pregunta 19	a) ☐	b) ☒	c) ☐	d) ☐
Pregunta 20	a) ☒	b) ☐	c) ☐	d) ☐

Pregunta 1

Siendo $x[n]$ la entrada e $y[n]$ la salida del sistema, ¿cuál de las relaciones siguientes define un sistema lineal, invariante, causal y estable?

a) $y[n] = x[n] \, cos \, \omega_0 + x[n-2] \, sin \, \omega_0$

b) $y[n] = ax[n] + b$

c) $y[n] = \sum_{k=n-N}^{n+N} x[k]$

d) $y[n] = n \cdot x[n]$

***Solución**: a) es la única que cumple con los requisitos, pues b) es no lineal (debido a la constante b), c) no es causal (porque depende de valores futuras de la entrada) y d) es variante (debido a que la respuesta del sistema depende del origen de tiempo por el factor multiplicativo 'n')*

Pregunta 2

Considere el sistema LTI con respuesta impulsional

$$h[n] = \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n-1]$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **correcta**?

a) Es un sistema inestable

b) Es un sistema no causal

c) Es un sistema variante

d) Todas las anteriores son falsas

***Solución**: d) es la repuesta correcta, pues se trata de un sistema estable, casual, lineal e invariante.*

Pregunta 3

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **incorrecta**?

a) Una secuencia se denomina de duración finita cuando el número de elementos no nulos es finito.

b) Se puede demostrar que la parte par de una secuencia es una secuencia par y que la parte impar de una secuencia es una secuencia impar

c) A una transformación mediante escalado 'temporal' de una secuencia $x[n] \rightarrow x[kn]$ tal que $k > 1$ se le conoce con el nombre de diezmado

d) Un proceso de interpolación se realiza mediante un submuestreo de la secuencia.

***Solución**: d) es falsa por el proceso de interpolación se realiza mediante un sobremuestreo de la secuencia.*

Pregunta 4

Dada la siguiente respuesta impulsional de un sistema:

$$h[n] = [\underline{0.2}, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2]$$

Obtenga el valor de la salida $y[10]$ cuando la entrada es:

$$x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 100 \\ 0, & \text{para otro n} \end{cases}$$

Respuesta:

a) 10

b) 40

c) 8

d) Ninguna de las anteriores

***Solución**: se trata de un sistema que promedia las últimas 5 muestras de la entrada, por lo que* $y[10] = 0.2\,(y[6] + y[7] + y[8] + y[9] + y[10]) = 0.2\,(6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 0.2\,(40) = 8$.

Pregunta 5

Considere que la siguiente señal analógica, con $f_0 = 1200$ Hz,

$$x(t) = \exp(j2\pi f_0 t)$$

se muestrea a una frecuencia f_s. ¿Para cuál de los siguientes valores de f_s la señal digital resultante es un tono a frecuencia $f = 0.5$?

a) $f_s = 2.400$ Hz
b) $f_s = 2\pi \cdot 2.400$ Hz
c) $f_s = 600$ Hz
d) $f_s = 2\pi \cdot 600$ Hz

***Solución**: a) es la respuesta correcta porque* $x[n] = x(t = nT) = \exp(j2\pi f_0 nT) = \exp\left(j2\pi n \frac{f_0}{f_s}\right)$ *es igual a* $x[n] = \exp(j2\pi n(0.5))$ *cuando* $f_s = 2.400$ *Hz.*

Pregunta 6

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **correcta**?

a) La energía de una señal discreta se define como $E_x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|$
b) La potencia media de una señal discreta se define como $P_x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$
c) Una señal tal que $x[n] = x[n + P]\ \forall n$ con P entero positivo es de energía infinita, pero de potencia finita
d) Tanto la señal escalón unidad como la señal rampa unidad son de energía infinita, pero de potencia media finitas

***Solución**: a) es falsa porque* $E_x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$*; b) es falsa porque* $P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$*; d) es falsa porque la señal rampa unidad es de energía y potencia media infinitas*

Pregunta 7

Tenemos una secuencia $x[n]$ definida como

$$x[n] = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} n\right)}{\pi n} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

Determine la energía de la secuencia $x[n]$:

a) $E_x = 2/9$
b) $E_x = 1/27$
c) $E_x = 2/3$
d) $E_x = 4\pi/9$

***Solución**: b) es la respuesta correcta porque, teniendo que la transformada de* $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{a} n\right)}{\pi n}$ *es igual a* $\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi/a}\right)$ *y que el* $\sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$ *se puede descomponer en* $\frac{e^{\frac{j\pi}{2}} - e^{-\frac{j\pi}{2}}}{2j}$ *(lo que produce dos replicas del pulso desplazadas en frecuencia), si aplicamos la igualdad de Parseval obtenemos que* $E_x = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) = \frac{1}{27}$.

Pregunta 8
¿Cuánto vale el periodo de la siguiente señal?

$$x[n] = \cos\left(\pi \frac{3}{20} n + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\pi \frac{3}{10} n + \frac{\pi}{5}\right)$$

a) 20 muestras
b) 40 muestras
c) 60 muestras
d) 80 muestras

***Solución**: b) es la respuesta correcta porque siendo el segundo coseno de frecuencia doble que el primero, es el periodo del primer coseno es que establece la periodicidad de la suma; este último se obtiene comparando cuando* $\cos\left(\pi \frac{3}{20} n + \frac{\pi}{5}\right)$ *es igual a* $\cos\left(\pi \frac{3}{20}(n+P) + \frac{\pi}{5}\right)$ *y ello ocurre cuando* $\pi \frac{3}{20} P = 2\pi k$. *El valor mínimo de k que producto un P entero es* $k = 3$, *y para ese valor el periodo es* $P = \frac{2\pi 3}{\pi} \cdot \frac{20}{3} = 40$ *muestras.*

Pregunta 9
Dada la siguiente salida de un sistema en relación con su entrada:

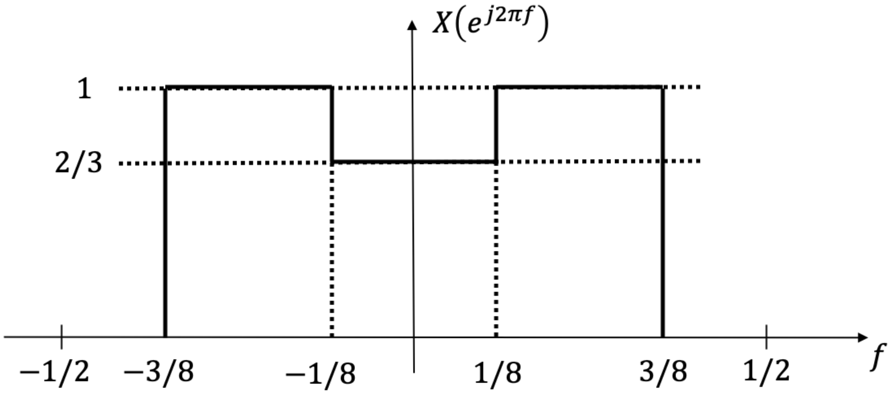
$$y[n] = x[n] + 3u[n+2]$$

Podemos afirmar que:

a) El sistema es invariante
b) El sistema es lineal
c) El sistema necesita memoria
d) Ninguna de las anteriores

***Solución**: d) es la respuesta correcta, pues el sistema es variante y no lineal (debido a la señal escalón) y no necesita memoria (pues la salida solo depende del instante actual de la entrada)*

Pregunta 10
Calcule la señal cuya transformada de Fourier es:



a) $x[n] = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4} n\right)}{\pi n} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} n\right)}{3\pi n}$

b) $x[n] = \frac{\sin\left(\frac{3}{8} n\right)}{\pi n} - \frac{\sin\left(\frac{1}{8} n\right)}{3\pi n}$

c) $x[n] = \frac{\sin\left(\frac{3}{8} n\right)}{\pi n} - \frac{2\sin\left(\frac{1}{8} n\right)}{3\pi n}$

d) $x[n] = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)}{\pi n} + \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{3\pi n}$

Solución: *a) es cierta porque se la transformada se puede interpretar como la diferencia de un filtro paso bajo con pulsación de corte* $\omega_c = 2\pi\frac{3}{8}$ *y amplitud* 1 *y un filtro paso bajo de pulsación de corte* $\omega_c = 2\pi\frac{1}{8}$ *y amplitud* $-1/3$*, por lo que* $x[n] = \frac{sin\left(2\pi\frac{3}{8}n\right)}{\pi n} - \frac{1}{3}\frac{sin\left(2\pi\frac{1}{8}n\right)}{\pi n} = \frac{sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)}{\pi n} - \frac{sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{3\pi n}$*. También podría calcularse como la suma de tres filtros paso bajo, dos con pulsación de corte* $\omega_c = 2\pi\frac{1}{8}$ *y amplitud* 1 *desplazados a las pulsaciones* $\omega = -\frac{\pi}{2}$ *y* $\omega = +\frac{\pi}{2}$*, y un filtro paso bajo de corte* $\omega_c = 2\pi\frac{1}{8}$ *y amplitud* $2/3$*, que daría el mismo resultado:* $x[n] = \frac{sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\left[e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right] + \frac{2}{3}\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{3\pi n} = \frac{sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\left[2\,cos\frac{\pi}{2}n\right] + \frac{2}{3}\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{3\pi n} = \frac{sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)}{\pi n} - \frac{sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n} + \frac{2}{3}\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n} = \frac{sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)}{\pi n} - \frac{sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{3\pi n}$*, donde hemos usado que* $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[sin(a+b) + sin(a-b)]$*.*

Pregunta 11

Un sistema se define mediante la siguiente ecuación de diferencias con coeficientes constantes:

$$y[n] = x[n] + x[n-2] + y[n-1]$$

¿Cuál es su respuesta frecuencial?

a) $H(e^{j\omega}) = \frac{1+e^{-j2\omega}}{1+e^{-j\omega}}$

b) $H(e^{j\omega}) = je^{-\frac{j\omega}{2}}\tan\frac{\omega}{2}$

c) $H(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-j2\omega}}{1+e^{-j\omega}}$

d) $H(e^{j\omega}) = -je^{-\frac{j\omega}{2}} \cdot \frac{\cos\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}$

Solución: *d) es la respuesta correcta teniendo en cuenta que* $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j2\omega} + Y(e^{j\omega})e^{-j\omega}$ *, por lo que la respuesta frecuencia es* $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1+e^{-j2\omega}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega}(e^{j\omega}+e^{-j\omega})}{e^{-\frac{j\omega}{2}}\left(e^{\frac{j\omega}{2}}-e^{-\frac{j\omega}{2}}\right)} = \frac{e^{-j\omega}}{e^{-\frac{j\omega}{2}}}\cdot\frac{2\,cos\,\omega}{2j\,sin\frac{\omega}{2}} = -je^{-\frac{j\omega}{2}}\cdot\frac{cos\,\omega}{sin\frac{\omega}{2}}$*.*

Pregunta 12

Dada la siguiente secuencia:

$$x[n] = \begin{cases} 2, & -2 \le n \le 0 \\ 1, & 0 < n \le 2 \\ 0, & \text{para otro n} \end{cases}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **correcta**?

a) La parte par de la secuencia es Par$\{x[n]\} = [\dots, 0, 3, 3, \underline{4}, 3, 3, 0, \dots]$

b) La parte impar de la secuencia es Impar$\{x[n]\} = [\dots, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \underline{0}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \dots]$

c) La parte par de la secuencia es Par$\{x[n]\} = [\dots, 0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \underline{0}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0, \dots]$

d) Ninguna de las anteriores

***Solución**: b) es la única cierta, pues* $\text{Impar}\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) =$ $\frac{1}{2}([\ldots, 0, 2, 2, \underline{2}, 1, 1, 0, \ldots] - [\ldots, 0, 1, 1, \underline{2}, 2, 2, 0, \ldots]) = \frac{1}{2}([\ldots, 0, 1, 1, \underline{0}, -1, -1, 0, \ldots]) =$ $\left[\left[\ldots, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \underline{0}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \ldots\right]\right]$.

Pregunta 13

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **correcta**?

a) La señal signo puede expresarse como $\text{sign}[n] = u[-n] - u[n]$
b) La señal pulso puede expresarse como $p_L[n] = u[n] - u[n+L]$
c) Una señal exponencial compleja con módulo unitario puede expresarse como $x[n] = e^{j(\omega n+\theta)} = \cos(\omega n + \theta) - j\sin(\omega n + \theta)$
d) Una sinusoide compleja $x[n] = e^{j(\omega_0 n+\theta)}$ es periódica con período P solo si $\omega_0 P$ es múltiple de 2π.

***Solución**: a) es falsa porque* $\text{sign}[n] = u[n] - u[-n]$*; b) es falsa porque* $p_L[n] = u[n] - u[n-L]$*; c) es falsa porque* $x[n] = e^{j(\omega n+\theta)} = \cos(\omega n + \theta) + j\sin(\omega n + \theta)$.

Pregunta 14

Considere los siguientes dos sistemas:

$$y_1[n] = \sum_{k=-n-n_0}^{n_0} x[k]$$

$$y_2[n] = \sum_{k=-n-n_0}^{-n+n_0} x[k]$$

donde n_0 es un número entero. ¿Qué respuesta es **correcta**?

a) Solo el primero es estable
b) Solo el segundo es estable
c) Ambos son estables
d) Ninguno es estable

***Solución**: b) es la respuesta correcta pues mientras que en el primer caso podemos llegar un número infinito de muestras y dar como resultado una salida no acotada (al estilo de un acumulador), en el segundo caso solo sumamos* $2n_0 + 1$ *muestras, por lo que si la entrada* $x[n]$ *está acotada, la salida* $y_2[n]$ *también lo estará (al estilo de un promediador)*

Pregunta 15

Calcule la salida $y[n]$ del siguiente sistema LTI definido por $\mathrm{h}[n]$ teniendo en cuenta que a su entrada tenemos $\mathrm{x}[n]$:

$$x[n] = \{\underline{2}, -1, -2, 5\}$$

$$h[n] = \{\underline{5}, 4, 3, 2, 1\}$$

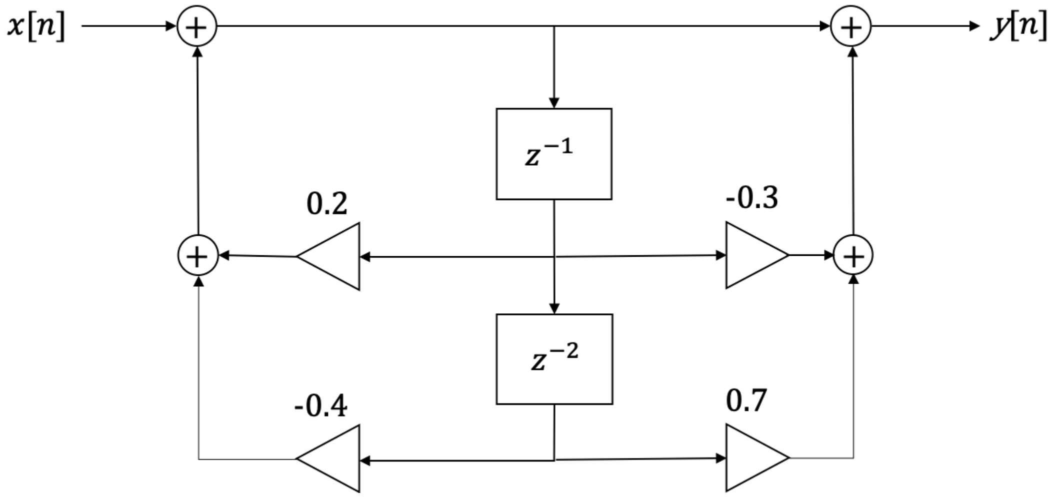
El resultado es:

a) $y[n] = \{\underline{10}, -4, -6, 10, 0, 0, 0, 0\}$
b) $y[n] = \{\underline{2}, 3, 2, 6, 10, 6, 10, 25\}$
c) $y[n] = \{\underline{10}, 3, -8, 18, 14, 10, 8, 5\}$
d) $y[n] = \{\underline{10}, -4, -6, 10, 10, -4, -6, 10\}$

***Solución**: la respuesta correcta es c), pues podemos ver que es la única secuencia que cumple con la ecuación de convolución $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_k x[k]h[n-k]$, donde $y[0] = \sum_k x[k]h[-k] = 10$ y $y[1] = \sum_k x[k]h[1-k] = 3$ y así sucesivamente.*

Pregunta 16

Sea el sistema descrito por este diagrama de bloques:



La relación entre entrada y salida viene dada por:

a) $y[n] = -0.3y[n-1] + 0.7y[n-2] + 0.2x[n-1] - 0.4x[n-2]$
b) $y[n] = -0.3y[n-1] + 0.7y[n-2] + x[n] + 0.2x[n-1] - 0.4x[n-2]$
c) $y[n] = -0.3y[n-1] + 0.7y[n-3] + 0.2x[n-1] + 0.4x[n-3]$
d) $y[n] = 0.2y[n-1] - 0.4y[n-3] + x[n] - 0.3x[n-1] + 0.7x[n-3]$

***Solución**: d) es la respuesta correcta pues si separamos el sistema en dos, los multiplicadores 0.2 y -0.4 aplican a la señal y[n] y los multiplicadores -0.3 y 0.7 aplican a la señal x[n]; además, hay que tener en cuenta que el retardo de la segunda rama acumula tres muestras (una del primer retardador y dos del segundo).*

Pregunta 17

Una señal temporal con frecuencia máxima 4 kHz se muestra con una pulsación de 20.000 π radianes por segundo, con la que se obtiene una secuencia $x[n]$. ¿Cuál será la resolución en frecuencia de su DFT realizada con $N = 10$ para una señal obtenida como $x[n]p_N[n]$?

a) 20.000 rad/s
b) 1 kHz
c) 5 π rad/s
d) 400 Hz

***Solución**: teniendo en cuenta que la frecuencia de muestreo es de $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{20.000\pi}{2\pi} = 10$ kHz, la resolución de la DFT es $f_s/N = 1$ kHz.*

Pregunta 18

Dada una secuencia definida $x[n] = 2\delta[n-1] + 2\delta[n-7] + \frac{1}{2}j\delta[n-1] - \frac{1}{2}j\delta[n-7]$, ¿cuál de las siguientes expresiones define la DFT de $x[n]$ con N=8 puntos?

a) $X[k] = 4\cos\frac{\pi k}{8} + \cos\frac{7\pi k}{8}$

b) $X[k] = 4\cos\frac{\pi k}{4} + \sin\frac{\pi k}{4}$

c) $X[k] = 2\cos\frac{\pi k}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi k}{4}$

d) $X[k] = 2\cos\frac{\pi k}{8} + \frac{1}{2}\sin\frac{7\pi k}{8}$

Solución: *b) es la respuesta correcta pues, teniendo en cuenta que $x[n]$ solo está tiene valores no nulos en $n = 1$ y $n = 7$, la DFT es* $X[k] = x[1]e^{-j\frac{2\pi}{8}k1} + x[7]e^{-j\frac{2\pi}{8}k7} = \left(2+\frac{j}{2}\right)e^{-j\frac{\pi}{4}k} + \left(2-\frac{j}{2}\right)e^{+j\frac{\pi}{4}k} = 2\left(e^{+j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{4}k}\right) - \frac{j}{2}\left(e^{+j\frac{\pi}{4}k} - e^{-j\frac{\pi}{4}k}\right) = 2\left(2cos\frac{\pi}{4}k\right) - \frac{j}{2}\left(2j\,sin\frac{\pi k}{4}\right) = 4\,cos\frac{\pi}{4}k + sin\frac{\pi k}{4}$.

Pregunta 19

Sean las secuencias

$$x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0\}$$

$$x_2[n] = \{\underline{0}, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1\}$$

donde la muestra subrayada corresponde a $n = 0$. Se define

$$y[n] = IDFT\{X_1[k] \cdot X_2[k]\}$$

donde $X_1[k]$ y $X_2[k]$ son las DFT de N=9 puntos correspondientes a $x_1[n]$ y $x_2[n]$, respectivamente. ¿Cuál de las siguientes secuencias es realmente la secuencia $y[n]$?:

a) $y[n] = \{\underline{2}, 4, 4, 5, 2, 1, 2, 3, 3\}$

b) $y[n] = \{\underline{2}, 4, 2, 3, 2, 4, 2, 3, 3\}$

c) $y[n] = \{\underline{3}, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 3\}$

d) Ninguna de las anteriores

Solución: *b) es la respuesta correcta*

Pregunta 20

Calcule la convolución circular con $N = 7$ entre estas dos señales:

$$x[n] = \{\underline{1}, -1, 3, 5\}$$

$$y[n] = \{\underline{4}, 2, 0, -2, -4\}$$

La muestra correspondiente a $n = 0$ se indica subrayada.

El resultado es:

a) $x[n] \otimes y[n] = \{\underline{-16}, -2, 10, 24, 8, -2, -22\}$

b) $x[n] \otimes y[n] = \{-\underline{4}, 2, -10, -24, -8, -2, -20\}$

c) $x[n] \otimes y[n] = \{\underline{4}, -2, 10, 24, 8, -2, -22\}$

d) $x[n] \otimes y[n] = \{\underline{4}, -2, 10, 24, 4, -2, 10\}$

Solución: *la respuesta correcta es a)*

P.20

$x[n] = \{\underline{1}, -1, 3, 5\}$

$y[n] = \{4, 2, 0, -2, -4\}$

Calcular la convolución circular con N = 7.

	1	-1	3	5	0	0	0	
n = 0	4	0	0	-4	-2	0	2	→ 4 - 20 = -16
n = 1	2	4	0	0	-4	-2	0	→ 2 - 4 = -2
n = 2	0	2	4	0	0	-4	-2	→ -2 + 12 = 10
n = 3	-2	0	2	4	0	0	-4	→ -2 + 6 + 20 = 24
n = 4	-4	-2	0	2	4	0	0	→ -4 + 2 + 10 = 8
n = 5	0	-4	-2	0	2	4	0	→ 4 - 6 = -2
n = 6	0	0	-4	-2	0	2	4	→ -12 - 10 = -22

$\Downarrow$

$$x[n] \circledast y[n] = \{\underline{-16}, 2, 10, 24, 8, -2, -22\}$$

$\uparrow$
N = 7