Señales y Sistemas Discretos

Rafael Terris   Gonzalo Seco

Universitat Autònoma de Barcelona

30 de diciembre de 2021

Tabla de contenidos

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Bibliografía recomendada

Referencias

- ***Señales y Sistemas*, Hwei P.Hsu, 2a. edición** [Ingebook]

  1. Señales y sistemas (p.1-10)

- ***Tratamiento digital de señales*, John G.Proakis, Dimitris G.Manolakis, 4a. edición** [Ingebook]

  1.1 Señales, sistemas y tratamiento de señales (p.2-5)

  1.2 Clasificación de las señales (p.5-9)

  2.1 Señales discretas en el tiempo (p.37-44)

- ***Tratamiento de señales en tiempo discreto*, Alan V.Oppenheim, Ronald W.Schafer, 4a. edición** [Ingebook]

  2.1 Señales en tiempo discreto (p.10-16)

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Introducción

- Los señales y sistemas discretos son la base del TDS (**Tratamiento Digital de Señales**) o, en inglés, DSP (*Digital Signal Processing*).
- Al trabajar con señales analógicas, los sistemas y procesados que se realizan son específicos a la fuentes que las generan.
- En cambio, si discretizamos estas señales podemos trabajar con secuencias de números y utilizar una **notación independiente** de estas fuentes → permite usar **procesadores** universales y algoritmos que pueden ser reutilizados en sistemas diferentes.
- El TDS puede aplicarse tanto al **análisis** como a la **síntesis** de señales y sistemas, dependiendo de nuestro campo de aplicación.

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Introducción

- Típicamente, una señal podría definirse como la **medida** de un **fenómeno** físico que **evoluciona** con el tiempo como, por ejemplo, la temperatura, el ritmo cardíaco o un voltaje eléctrico.
- Sin embargo, también puede depender de otros parámetros como la **posición** como, por ejemplo, un barómetro que mide la presión en función de la altura
- Si discretizamos estas señales obtenemos **secuencias** de números que nos proporcionan información útil sobre estos fenómenos.

Por defecto, si no se indica lo contrario, nos referiremos a señales que dependen del tiempo.

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Introducción

- En esta sección empezaremos **definiendo las señales** en general así como sus propiedades básicas (dominio, rango, etc.), que nos permitirán clasificarlas en diferentes tipos.
- Seguidamente, analizaremos las **transformaciones** más comunes que podemos aplicar a estas señales para obtener otras nuevas.
- También estudiaremos cuáles son las **señales básicas** que más utilizaremos en la práctica, y en especial la **señal exponencial**.
- Finalmente, definiremos los conceptos de **energía y potencia**.

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Propiedades

- Una señal puede definirse como una **función** de una o más variables.

Ejemplo

La altura de un mapa cartográfico que depende de la posición en el plano (x, y) sería un señal de dos variables.

- Podemos clasificar las señales en función de su **dominio** y su **rango**.

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Propiedades

- El dominio es el conjunto de valores que pueden tomar esta(s) variable(s); en el caso que estas variables pueden tomar cualquier valor (*dominio real o continuo*), entonces hablamos de **señales analógicas**; si únicamente pueden tomar valores enteros (*dominio discreto*), entonces hablamos de **señales discretas** o **secuencias**.

Ejemplos

Una señal de voz (presión en función del tiempo) es una señal analógica, pues su dominio es real (cualquier valor temporal); el índice de la bolsa (valor en función del día) es una señal discreta, pues su dominio es discreto (solo días).

- Así pues, son **secuencias** todas las señales que resultan de tomar muestras en instantes determinados (proceso de **muestreo**).

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Propiedades

- El rango es el conjunto de valores que puede tomar una señal en su dominio; hablamos de señales de **rango continuo** si el conjunto de valores que puede tomar la función es un *intervalo real* (o varios intervalos reales); hablamos de señales de **rango discreto** si estos valores pertenecen a un conjunto de valores preestablecido.

Ejemplos

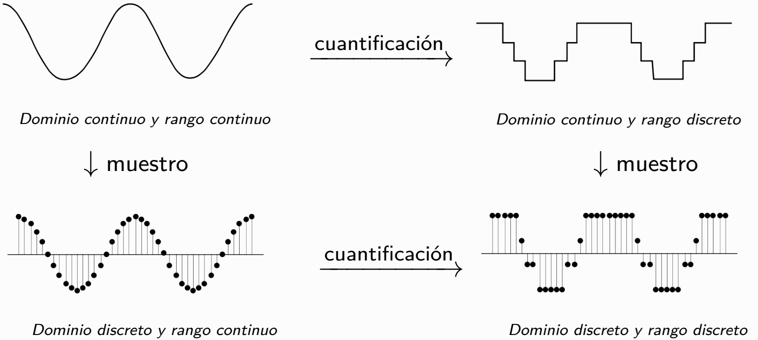
La temperatura es una señal de rango continuo (puede tomar cualquier valor); sin embargo, la población es una señal de rango discreto (no puede tomar cualquier valor).

- Así pues, son señales de rango discreto todas aquellas que resultan de un proceso de **cuantificación**, mediantes el cual asignamos un valor de un conjunto preestablecido.

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Propiedades

- Veamos las diferentes combinaciones posibles de señales en función de su dominio y rango:



Señales y Sistemas Discretos

Señales – Propiedades

- Habitualmente, denominamos **señales digitales** o **secuencias** a aquellas señales que han seguido un proceso de **muestreo** y que, por tanto, tienen un **dominio discreto**.
- Si además necesitamos realizar un tratamiento digital de la señal, en el caso de que la señal no tenga un **rango discreto** necesitamos realizar un proceso de **cuantificación** para poder operar y almacenar sus valores.
- Las señales también pueden clasificarse en **deterministas**, si responden a una expresión analítica que define exactamente todos su valores, o **aleatorias**, en cuyo caso no se conoce el valor a priori, sino cierta *probabilidad* de que ocurra.

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Representación

- A partir de ahora trabajaremos con secuencias, que nos permitirán aplicar conocidas herramientas matemáticas como el álgebra lineal.
- Una secuencia x es, pues, una señal que depende de una variable discreta 'n' (ordinal) que toma valores enteros.
- Existen diversas formas de **representación** de estas secuencias en función de su naturaleza: como función analítica, en forma de tabla o como una enumeración de valores al estilo de un vector:

$$x[n] = \{\ldots 0, 1, 1, 1, 1, \underline{0}, 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8, 1, 0 \ldots\}$$

El número subrayado, $\underline{0}$, indica el valor correspondiente a $n = 0$.

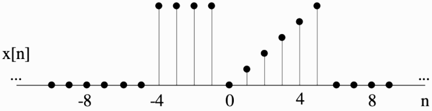
Señales y Sistemas Discretos

Señales – Representación

- La secuencia anterior también se puede expresar por tramos:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & -4 \le n \le -1 \\ 0{,}2n & 0 \le n \le 5 \\ 0 & \text{para otro } n \end{cases}$$

- O bien de forma gráfica:



Señales y Sistemas Discretos

Señales – Notación

- Es importante recalcar que existen **diferentes notaciones** para expresar los distintos tipos de señales; a continuación mostramos algunas de las usadas en la bibliografía recomendada:

Referencia	Notación
Señales y Sistemas (Hsu)	$x(t), x[n]$
Tratamiento digital de señales (Proakis-Manolakis)	$x(t), x(n)$
Tratamiento de señales en tiempo discreto (Oppenheim-Schafer)	$x(t), x[n]$

- En nuestro caso, optaremos por la primera o última, es decir, $(\cdot)$ para las señales analógicas y '$[\cdot]$' para las señales discretas, pues permite diferenciar fácilmente qué señales tiene dominio continuo y que señales tienen dominio discreto.

Señales y Sistemas Discretos
Señales – Propiedades

- Definimos la **duración** de una secuencia es el número de elementos o 'muestras' contenidas en el intervalo de la señal.

Ejemplo

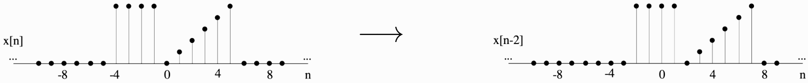
La secuencia $x[n]$ mostrada anteriormente tiene una duración de 10 muestras.

- Una secuencia es de **duración finita** cuando el número de muestras no nulas es finito (de lo contrario, hablamos de **secuencia infinita**).

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Transformaciones

- A continuación analizamos algunas de las transformaciones de la **variable independiente** n que podemos aplicar a las secuencias, es decir, aquellas que modifican el **dominio** de la señal.
- **Desplazamiento** 'temporal' de m muestras: $n \rightarrow n - m$; $x[n-m]$, que está 'retrasada' si $m > 0$ y 'adelantada' si $m < 0$.

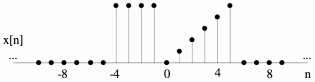


- Definimos una secuencia **periódica** como aquella que satisface que $x[n] = x[n+P] \; \forall n$, donde el menor entero positivo de P se denomina *periodo* (fundamental).

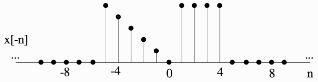
Señales y Sistemas Discretos

Señales – Transformaciones

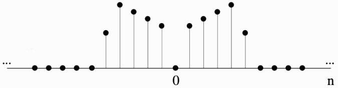
- **Reflexión** sobre $n = 0$: $n \to -n$; $x[-n]$

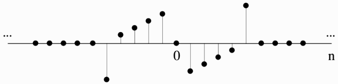


$\longrightarrow$



- Así, definimos una secuencia **par** (*simétrica*) si cumple que $x[n] = x[-n]$ e **impar** (*antisimétrica*) si $x[n] = -x[-n]$.





Señales y Sistemas Discretos

Señales – Transformaciones

- Se puede demostrar que cualquier secuencia se puede descomponer en una secuencia par más una secuencia impar, tal que:

$$\mathrm{Par}\{x[n]\} = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right) \text{ y } \mathrm{Impar}\{x[n]\} = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right),$$

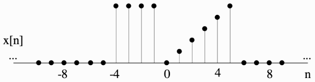
cualquier señal discreta puede expresarse como:

$$x[n] = \mathrm{Par}\{x[n]\} + \mathrm{Impar}\{x[n]\}$$

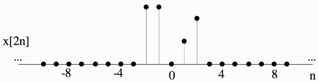
Señales y Sistemas Discretos

Señales – Transformaciones

- **Escalado** 'temporal': $n \to kn$, con $k \geq 2$ siendo k un número entero.



$\longrightarrow$



- A este proceso se le denomina **diezmado**. Más adelante veremos el procesos complementario de **interpolación**, ambos procesos muy usados en TDS para modificar la frecuencia de muestreo de las señales.

Señales y Sistemas Discretos

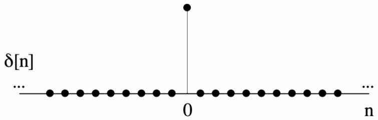
Señales – Transformaciones

- También podemos obtener nuevas señales mediante **transformaciones** entre estas, que afectan a su **rango**. En todas ellas realizamos la operación muestra a muestra ($-\infty < n < \infty$).
- **Escalado** de amplitud: $Cx[n]$
- **Suma**: $x_1[n] + x_2[n]$
- **Producto**: $x_1[n]x_2[n]$

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Señales básicas

- A continuación, detallamos algunas de las **señales básicas**.
- **Impulso** unitario (o delta): $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$



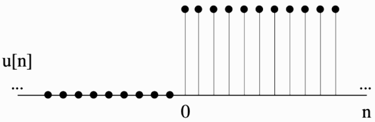
- Se puede observar que cualquier secuencia puede representarse como combinación lineal de deltas:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Señales básicas

- **Escalón** unitario: $u[n] = \begin{cases} 1 & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$



- Como comentamos anteriormente, el escalón (como cualquier secuencia) puede expresarse como combinación lineal de deltas:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

- Se puede observar que $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$.

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Señales básicas

- **Signo**: $\mathrm{sign}[n] = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -1 & n < 0 \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{-1} \delta[n-k]$
- El signo puede expresarse también como: $\mathrm{sign}[n] = u[n] - u[-n]$.
- **Pulso**: $p_L[n] = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & n < 0, n \geq L \end{array} \right\} = \sum_{k=0}^{L-1} \delta[n-k]$
- El pulso puede expresarse también como: $p_L[n] = u[n] - u[n-L]$.
- **Rampa** unitaria: $u_r[n] = \left\{ \begin{array}{ll} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{array} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} n\delta[n-k]$
- La rampa puede expresarse también como: $u_r[n] = \sum_{k=1}^{\infty} u[n-k]$.

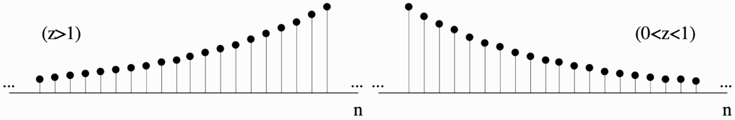
Señales y Sistemas Discretos

Señales – Señales básicas

- Una de las señales más importantes es la **exponencial**, $x[n] = Cz^n$, donde C y z son, en general, números complejos.
- En el caso particular que C y z sean reales $(C, z \in \mathbb{R})$, entonces:

$$x[n] = \begin{cases} C|z|^n, z > 0 \\ C|z|^n(-1)^n, z < 0 \end{cases}$$

donde factor $|z|$ pone de manifiesto si la exponencial es creciente $(|z| > 1)$ o decreciente $(|z| < 1)$; por ejemplo, para z positivo:



- En el caso de z negativo observaríamos una alternancia de signo.

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Señales básicas

- Si, en cambio, C y z son complejos ($C, z \in \mathbb{C}$), se pueden representar en **forma polar**, $z = |z|e^{j\omega}$ y $C = |C|e^{j\theta}$, obteniendo:

$$\begin{aligned} x[n] &= |C|e^{j\theta}(|z|e^{j\omega})^n = |C||z|^n e^{j(\omega n+\theta)} \\ &= |C||z|^n \cos(\omega n + \theta) + j|C||z|^n \sin(\omega n + \theta) \end{aligned}$$

  donde θ es la **fase** (radianes) y ω la **frecuencia angular** o **pulsación** (radianes/muestra).

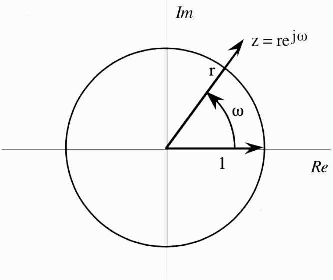
- La pulsación se relaciona con la **frecuencia discreta** (frecuencia en tiempo discreto) (ciclos/muestra) mediante la ecuación:

$$\omega = 2\pi f$$

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Señales básicas

- Típicamente, la exponencial compleja se representa en el **plano z**.
- Si nos movemos siguiendo una circunferencia de radio $r = |z|$, entonces la amplitud es constante.
- La frecuencia angular ω está relacionada con la oscilación de la secuencia; si $\omega = \pi$ (la máxima pulsación posible) el resultado es una alternancia de signo muestra a muestra.



Señales y Sistemas Discretos

Señales – Señales básicas

- Para $|z| = 1$, obtenemos la **sinusoide compleja** de variable discreta, $x[n] = Ce^{j2\pi fn}$, que se diferencia de la sinusoide compleja de variable real porque **no es forzosamente periódica**:

$$x[n+P] = x[n] \implies Ce^{j2\pi f(n+P)} = Ce^{j2\pi fn}e^{j2\pi fP} = Ce^{j2\pi fn}$$

- Ello implica que $e^{j2\pi fP} = e^{j\omega P} = 1$; para esto se cumpla, fP debe ser un número entero (es decir, ωP debe ser múltiplo de 2π):

$$f \text{ debe ser un número racional } \rightarrow f = \frac{k}{P}$$

- Este tipo de señal es muy útil en TDS pero hay que tener en cuenta el posible fenómeno de *aliasing* que aparece en tiempo discreto.

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Energía y Potencia

- Energía de una señal discreta:

$$E_x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \geq 0 \quad (E_x = 0 \Leftrightarrow x[n] = 0)$$

- Si $E_x < \infty$, se llama señal de **energía finita**.
- Potencia de una señal discreta:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

- Si $P_x > 0$ y $P_x < \infty$, se llama señal de **potencia finita**.

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Energía y Potencia

- Si una secuencia $x[n]$ es de duración **finita**, entonces su energía será finita ($E_x < \infty$) y, por tanto, su potencia sera nula ($P_x = 0$).
- Si una secuencia es de duración **infinita**, entonces su energía puede ser finita o infinita, dependiendo de su forma; si $E_x = \infty$, entonces la potencia puede ser finita ($P_x < \infty$) o infinita ($P_x = \infty$) (este último caso no interesa en la práctica pues no es implementable).

Ejemplo

Para la señal escalón, $x[n] = u[n]$, tenemos que:

$$E_x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} 1^2 = \lim_{N\to\infty} (N+1) = \infty$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}(N+1) = \frac{1}{2} < \infty$$

Señales y Sistemas Discretos

Señales – Energía y Potencia

- Las **secuencias periódicas**, que tienen energía infinita, son un caso particular de secuencias de potencia media finita ($P_x < \infty$).
- En efecto, su potencia media puede calcularse promediando en el tiempo la energía acumulada por los distintos periodos:

$$E_x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{k\to\infty} k \sum_{n=0}^{P-1} |x[n]|^2 = \lim_{k\to\infty} kE_P = \infty$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{k\to\infty} k\frac{1}{kP} \sum_{n=0}^{P-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{P}E_P < \infty$$

donde $E_P = \sum_{n=0}^{P-1} |x[n]|^2$ es la energía de la señal en un periodo.

Tabla de contenidos

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Bibliografía recomendada

Referencias

- ***Señales y Sistemas*, Hwei P.Hsu, 2a. edición** [Ingebook]

  1.5 Sistemas y clasificación de sistemas (p.10-12)

  2. Sistemas lineales invariantes en el tiempo (p.38-45)

- ***Tratamiento digital de señales*, John G.Proakis, Dimitris G.Manolakis, 4a. edición** [Ingebook]

  2.2 Sistemas discretos en el tiempo (p.48-61)

  2.3 Análisis de sistemas lineales discretos e invariantes en el tiempo (p.62-79)

- ***Tratamiento de señales en tiempo discreto*, Alan V.Oppenheim, Ronald W.Schafer, 4a. edición** [Ingebook]

  2.2 Sistemas discretos en el tiempo (p.17-23)

  2.3 Sistemas lineales e invariantes en el tiempo (p.23-29)

  2.4 Propiedades de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo (p.29-34)

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Definición

- Después de definir las señales y sus propiedades, pasaremos en esta sección a analizar los sistemas que operan con estas.
- Empezaremos **definiendo** el concepto de sistema para luego enumerar las diferentes **propiedades** que los caracterizan.
- Un sistema es una **transformación** que opera sobre una señal $x[n]$, que denominamos **entrada** o excitación del sistema, y genera una nueva señal $y[n]$, que denominamos **salida** o respuesta.

$$y[n] = T\{x[n]\} \quad \longrightarrow \quad x[n] \rightarrow \boxed{T\{x[n]\}} \rightarrow y[n]$$

Ejemplo

La transformación $y[n] = T\{x[n]\} = x[n-N]$ es un sistema que llamamos retardador.

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Propiedades

- Estos sistemas pueden cumplir diferentes **propiedades**, que sirven para caracterizar los distintos tipos de sistemas, las principales de las cuales son:
  - Linealidad
  - Invarianza
  - Causalidad
  - Dinamismo
  - Estabilidad
- En función de las propiedades que cumpla un determinado sistema, podremos aplicar un conjunto de herramientas específicos, muy útiles en la práctica para el diseño y implementación de sistemas.

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Linealidad

- Un sistema es **lineal** si $\forall a_1, a2, x_1[n], x_2[n]$ se cumple que:

$$T\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 T\{x_1[n]\} + a_2 T\{x_2[n]\}$$

Ejemplo

El sistema $y[n] = T\{x[n]\} = 2x[n]$ es lineal, pues $T\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = 2(a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]) = a_1 T\{x_1[n]\} + a_2 T\{x_2[n]\} = a_1 2x_1[n] + a_2 2x_2[n]$; sin embargo, el sistema $y[n] = T\{x[n]\} = (x[n])^2$ no lo es, pues $T\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = (a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n])^2 \neq a_1 T\{x_1[n]\} + a_2 T\{x_2[n]\} = a_1 (x_1[n])^2 + a_2 (x_2[n])^2$.

- En general, un sistema cuya respuesta es no nula sin excitación no es lineal (como, por ejemplo: $y[n] = x[n-N] + b$, $b \neq 0$).

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Invarianza

- Un sistema es **invariante** si $\forall m$ se cumple que:

$$y[n] = T\{x[n]\} \implies y[n-m] = T\{x[n-m]\}$$

- Es decir, que la salida retrasada m muestras es igual a aplicar la transformación a la entrada retrasada estas mismas m muestras.

Ejemplo

El sistema $y[n] = x[n] + b$ es invariante; el sistema $y[n] = nx[n]$ no, pues $y[n-m] = (n-m)x[n-m] \neq nx[n-m]$. Otro ejemplo de sistema variante sería $y[n] = x[n]u[n]$, pues $y[n-m] = x[n-m]u[n-m] \neq x[n-m]u[n]$: debido al escalón unitario, en el primer caso la salida es nula para $n < m$, mientras que en el segundo caso sería nula para $n < 0$.

- Así, nos interesarán particularmente los **sistemas invariantes**, pues sus respuestas no dependen del instante n en el que se calculen.

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Causalidad

- Un sistema es **causal** si se cumple que:

$$y[n] = f\{x[n], x[n-1], x[n-2], \ldots\}$$

- Es decir, la salida depende únicamente de los valores pasados y presente de la entrada.
- Si la variable independiente n está relacionada con el tiempo, para que un sistema sea realizable en tiempo real debe ser causal.
- En el caso de variable espacial, la causalidad no es importante, pues no se viola ningún principio físico ('antes' y 'después' se traducen en posición).
- En el caso de secuencias previamente almacenadas (en memoria), entonces si es posible utilizar sistemas no causales aún cuando n esté relacionada con el tiempo.

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Dinamismo

- A partir de la definición de causalidad, podemos establecer el **dinamismo** de un sistema; podemos distinguir entre:
- Sistema estático: $y[n] = f\{x[n]\}$ ($N = 0$, sin memoria)
- Sistema dinámico: $y[n] = f\{x[n], x[n-1], \ldots, x[n-N]\}$ (con memoria N)
- Dependiendo de si $N < \infty$ o $N = \infty$ hablamos de memoria finita o infinita, respectivamente.

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Estabilidad

- Un sistema es **estable** si, dadas unas constantes M_x y M_y, se cumple que:

$$|x[n]| < M_x < \infty \ \forall n \implies |y[n]| < M_y < \infty \ \forall n$$

- Es decir, que para toda entrada acotada, la salida también está acotada (BIBO: *Bounded-Input Bounded-Output*).

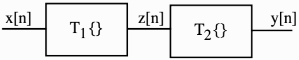
Ejemplo

El promediador, $y[n] = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} x[n-k]$, es un sistema estable; por el contrario, el acumulador, $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$, es un sistema inestable.

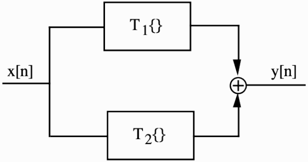
Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Interconexión de sistemas

- Asimismo, podemos conectar más de un sistema a la vez; esta **interconexión** de sistemas puede realizarse en serie o en paralelo:
- **Serie**: $y[n] = T_2\left\{T_1\{x[n]\}\right\} \neq T_1\left\{T_2\{x[n]\}\right\}$ (en general)



- **Paralelo**: $y[n] = T_1\{x[n]\} + T_2\{x[n]\}$



Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Sistema LTI

- Un tipo de sistemas que resulta muy útil de analizar en la práctica es aquel que cumple las propiedades de **linealidad e invarianza**.
- A estos sistemas se los conoce como LTI (*Linear Time-Invariant*).
- Un **sistema LTI** puede ser caracterizado completamente por su respuesta al impulso unidad, lo que permite establecer la relación entrada-salida por medio de la **ecuación de convolución**.

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} \overset{(\mathrm{L})}{\overset{\downarrow}{=}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\}$$

$$\overset{(\mathrm{TI})}{\overset{\downarrow}{=}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \triangleq x[n] * h[n] \quad \longleftarrow \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{L}): \textit{Linear} \\ (\mathrm{TI}): \textit{Time-Invariant} \end{array} \right.$$

donde $h[n] = T\{\delta[n]\}$ se define como la **respuesta impulsional**.

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Ecuación de convolución

- Así pues, la **ecuación de convolución** nos permite determinar la salida de un sistema LTI para cualquier secuencia de entrada arbitraria, que se puede interpretar como la superposición de las contribuciones de cada una de las muestras de la excitación $x[k]$.
- Los sistemas LTI son, además, de gran importancia en las aplicaciones del TDS.

Ejemplos de respuestas impulsionales

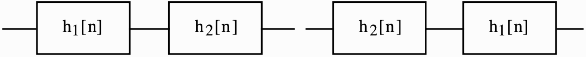
Acumulador: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \rightarrow h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \underset{k'=n-k}{\underset{\downarrow}{=}} \sum_{k'=0}^{+\infty} \delta[n-k'] = u[n]$

Promediador: $y[n] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[n-k] \rightarrow h[n] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \delta[n-k] = \frac{1}{L} p_L[n]$

Señales y Sistemas Discretos

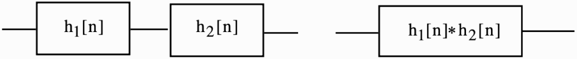
Sistemas y convolución – Propiedades (LTI)

- Ahora analicemos las principales **propiedades** de los sistemas LTI.
- **Conmutativa**: $h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]$



- **Asociativa** $\rightarrow$ interconexión en serie:

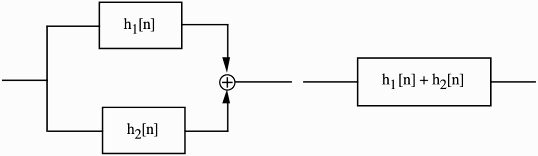
  $(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$



Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Propiedades (LTI)

- **Distributiva** (respecto la suma): interconexión en paralelo:
  $x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$



- **Elemento neutro**: $x[n] * \delta[n] = x[n]$

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Estabilidad (LTI)

- **Estabilidad** (BIBO): un sistema LTI es estable $\Leftrightarrow$ respuesta impulsional es módulo sumable $\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$
- Para una entrada $x[n]$ acotada, la salida también debe estar acotada:

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \; \forall n \implies |y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right|$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| < \sum_{k=\infty}^{+\infty} |h[k]|M_x$$

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Estabilidad (LTI)

Ejemplo de estabilidad de sistemas LTI – Acumulador

- El acumulador, cuya respuesta impulsional es $h[n] = u[n]$, es un sistema inestable, pues:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$$

Ejemplo de estabilidad de sistemas LTI – Exponencial

- En una exponencial tipo $h[n] = a^n u[n]$, dependerá del valor de a:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a^k u[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = 1 + |a| + |a|^2 + \ldots = \frac{1 - |a|^{\infty}}{1 - |a|}$$

Si $0 < |a| < 1$, es un sistema estable; si $|a| \geq 1$, es inestable.

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Causalidad (LTI)

- **Causalidad**: un sistema LTI es causal $\Leftrightarrow$ respuesta impulsional $h[n] = 0 \ \forall n < 0$; es decir, que no depende de muestras 'futuras'.
- Se define como secuencia **causal** aquella donde $x[n] = 0 \ \forall n < 0$ y **anticausal** aquella donde $x[n] = 0 \ \forall n \geq 0$.
- La causalidad está relacionada con la **implementación** del sistema cuando la variable independiente n tiene sentido temporal.
- Si no es causal, no es realizable de forma directa; es necesario **retrasar la señal** de entrada el número de muestras donde $h[n] \neq 0 \ \forall n < 0$, lo cual implicará también un retraso a la salida.

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Autofunciones

- Por otro lado, podemos observar que la respuesta de un sistema LTI a una señal exponencial da como resultado otra señal exponencial.
- Esta propiedad hace de las exponenciales complejas unas secuencias idóneas para la representación de secuencias → transformadas.
- Así pues, para un sistema LTI con respuesta impulsional $h[n]$ y entrada exponencial compleja $x[n] = z^n$, tenemos que:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

- Si la serie converge, y dado que el sumatorio no depende de $'n'$, obtenemos que $y[n] = H(z)z^n$; es decir, a la salida se obtiene la misma exponencial de la entrada (excepto una cte. multiplicativa).

Señales y Sistemas Discretos

Sistemas y convolución – Autofunciones

- Así pues, se dice que las exponenciales complejas (z^n) son **autofunciones** del sistema LTI; la constante $H(z)$ (pues no depende de 'n') es el **autovalor** asociado a un valor concreto de z.
- Si consideramos z una variable, entonces $H(z)$ es una función compleja de variable compleja llamada **función de transferencia**.
- Así, si una secuencia puede expresarse como combinación lineal de exponenciales complejas, la respuesta de esta a un sistema LTI es la misma combinación lineal de las respuestas a cada exponencial por separado: $x[n] = \sum a_i z_i^n \implies y[n] = \sum a_i H(z_i) z_i^n$.
- Para el caso $z = e^{j\omega}$ obtenemos lo llamada **respuesta frecuencial** del sistema: $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$.

Tabla de contenidos

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Bibliografía recomendada

Referencias

- ***Señales y Sistemas*, Hwei P.Hsu, 2a. edición** [Ingebook]

  2.9 Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias (p.45-46)

- ***Tratamiento digital de señales*, John G.Proakis, Dimitris G.Manolakis, 4a. edición** [Ingebook]

  2.4 Sistemas discretos en el tiempo descritos mediante ecuaciones en diferencias (p.79-96)

- ***Tratamiento de señales en tiempo discreto*, Alan V.Oppenheim, Ronald W.Schafer, 4a. edición** [Ingebook]

  2.5 Propiedades de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo (p.35-39)

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Definición

- Hemos visto que la ecuación de convolución permite caracterizar por completo un sistema LTI mediante su respuesta impulsional.
- Si la duración de esta respuesta es **finita** (N muestras), entonces el sistema es directamente implementable a partir de dicha ecuación:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=n-N+1}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]h[k]$$

- Esta última ecuación se puede interpretar como un filtro de memoria finita que realiza un promediado la muestras contenidas en esta ventana de N muestras, fácilmente implementable con N retardadores y multiplicadores/sumadores.

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Definición

- A estos sistemas con **respuesta impulsional finita** se les denomina **FIR** (*Finite Impulse Response*).
- ¿Qué ocurre si la respuesta impulsional tiene duración **infinita**?

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

- En este último caso, no son directamente implementables, al menos a partir de la ecuación de convolución, pues tienen una memoria infinita y, por tanto, necesitarían de infinitos bloques.
- A estos sistemas con **respuesta impulsional infinita** se les denomina **IIR** (*Infinite Impulse Response*).

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Definición

- Para abordar la implementación de los sistemas IIR, analizaremos un subgrupo importante de los sistemas LTI: aquellos que pueden ser descritos por **Ecuaciones de Diferencias Finitas** (EDF).
- La caracterización de un sistema LTI mediante este tipo de ecuaciones permite una descripción alternativa a la ecuación de convolución, y proporciona una herramienta muy útil en el análisis y síntesis de sistemas discretos.
- En esta sección veremos cómo se **representan**, así como la diferencia entre sistemas **recursivos** y **no recursivos**, pero antes de ello veremos cómo encontrar la **solución** a estas ecuaciones y las dificultades que se derivan.

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Definición

- Una ecuación de diferencias finitas viene dada por la siguiente expresión:

$$\sum_{k=0}^{P} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{Q} b_k x[n-k]$$

donde $M = \text{máx}(P, Q)$ se define como **orden** del sistema.

- Estas ecuaciones admiten como solución general la suma de una **solución homogénea** $y_h[n]$ y una **solución particular** $y_p[n]$:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Solución a la EDF

- Para encontrar la solución homogénea $y_h[n]$, debemos encontrar la solución a la denomina **ecuación homogénea**, es decir, la ecuación en diferencias finitas cuando la entrada se considera nula:

$$\sum_{k=0}^{P} a_k y[n-k] = 0$$

- Podemos usar una solución del tipo **exponencial** $y_h[n] = \lambda^n$, de forma homóloga a las soluciones usadas para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes ctes.; al sustituir esta solución en la ecuación homogénea obtenemos la **ecuación polinómica**:

$$\sum_{k=0}^{P} a_k \lambda^{n-k} = 0$$

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Solución a la EDF

- Teniendo en cuenta que $\lambda^{n-k} = \lambda^{n-P}\lambda^{P-k}$, podemos obtener lo que conocemos como **polinomio característico**:

$$\lambda^{n-P}\sum_{k=0}^{P} a_k \lambda^{P-k} = \lambda^{n-P}\big(\underbrace{\lambda^P + a_1\lambda^{P-1} + \ldots + a_{P-1}\lambda + a_P}_{\text{polinomio característico}}\big) = 0$$

- Este polinomio tiene en general P **raíces**: $\lambda_1, \ldots, \lambda_P$.
- Si suponemos que todas las raíces son distintas (en caso contrario, tendríamos raíces de orden múltiple y una solución más compleja), entonces la **solución** para la **ecuación homogénea** viene dada por:

$$y_h[n] = A_1\lambda_1^n + \ldots + A_P\lambda_P^n$$

donde los coeficientes A_k vienen determinados a partir de las condiciones iniciales.

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Solución a la EDF

Ejemplo de solución mediante exponencial

- Supongamos un sistema definido por la siguiente EDF con $P = 1$, $Q = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = -a$ y $b_0 = 1$:

$$\sum_{k=0}^{P} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{Q} b_k x[n-k] \implies y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

- Si usamos la secuencia exponencial λ^n como solución a la ecuación homogénea $y_h[n]$, obtenemos que:

$$A\lambda^n - aA\lambda^{n-1} = 0 \implies A\lambda^{n-1}(\lambda - a) = 0 \implies \lambda = a$$

- Por lo que la solución homogénea vendrá dada por $y_h[n] = A\lambda^n = Aa^n$.

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Solución a la EDF

- La solución particular es necesaria para satisfacer la EDF cuando la entrada no es nula; la solución $y_p[n]$ es, pues, cualquier solución que satisfaga la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$\sum_{k=0}^{P} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{Q} b_k x[n-k]$$

- Para hallar esta solución $y_p[n]$, debemos usar un método de ensayo mediante **soluciones candidatas**.
- En general, la forma de seleccionar la solución particular será la forma básica de la entrada $x[n]$.

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Solución a la EDF

Ejemplo de solución a la EDF

- Para encontrar la solución a la EDF del ejemplo anterior cuando la entrada del sistema es un escalón unitario, es decir, $x[n] = u[n]$, podemos probar con una secuencia similar, $y_p[n] = Bu[n]$, y sustituirla en la ecuación de diferencias finitas:

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \implies Bu[n] - aBu[n-1] = u[n]$$

- Para $n \geq 1$, tenemos que $B - aB = 1 \implies B = \frac{1}{1-a}$.
- Sin embargo, podemos observar que esta ecuación no es válida para el caso $n = 0$, pues implicaría que $B = 1$, lo que llevaría como solución al caso trivial de tener una transformación identidad, donde $y[n] = u[n] = x[n]$.

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Solución a la EDF

Ejemplo de solución a la EDF (Cont.)

- Debemos, pues, buscar otra solución particular para que la EDF se cumplan para todo n; si ensayamos con una solución del tipo $y_p[n] = Ca^n u[n] + Bu[n]$, tenemos que:

$$Ca^n u[n] + Bu[n] - aCa^{n-1}u[n-1] - aBu[n-1] = u[n]$$

$$(Bu[n] - aBu[n-1]) + (Ca^n u[n] - Ca^n u[n-1]) = u[n]$$

- La anterior ecuación se cumple, evidentemente, para $n < 0$ debido a los escalones $u[n]$; para $n \geq 1$, tenemos que el segundo término se anula, y por lo tanto obtenemos la misma solución que obteníamos con la anterior candidata, $B = \frac{1}{1-a}$.
- Para $n = 0$, la ecuación se reduce a $C + B = 1 \implies C = \frac{a}{a-1}$.

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Solución a la EDF

Ejemplo de solución a la EDF (Cont.)

- Para obtener la **solución completa** a la EDF, sumamos las soluciones homogénea y particular encontradas en los ejemplos anteriores:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = Aa^n + \frac{a}{a-1}a^n u[n] + \frac{1}{1-a}u[n]$$

- Para hallar el valor de A, aplicamos la ecuación para $n = -1$:

$$y[-1] = Aa^{-1} \implies A = ay[-1]$$

- Finalmente, la solución completa a la EDF será:

$$y[n] = a^{n+1}y[-1] + \frac{a}{a-1}a^n u[n] + \frac{1}{1-a}u[n]$$

que se cumple para toda n.

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Solución a la EDF

Ejemplo de solución a la EDF (Cont.)

- En el caso de que el sistema estuviera en reposo, es decir, tuviéramos condiciones iniciales nulas ($y[-1] = 0$), entonces la solución completa se reduce a:

$$y[n] = \frac{a}{a-1} a^n u[n] + \frac{1}{1-a} u[n]$$

Es importante observar que los sistemas descritos por EDF son LTI si y solo si las condiciones iniciales son nulas: $y_h[n] = 0, \quad y[n] = y_p[n]$.

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Solución a la EDF

- La ecuación de diferencias finitas tiene múltiples soluciones; en general, una EDF es una **caracterización parcial** del sistema, ya que una excitación $x[n]$ no determina una respuesta $y[n]$ única.
- Para garantizar una solución única que permite definir un sistema LTI mediante EDF, es necesario añadir ciertas **condiciones adicionales** a estas ecuaciones.
- Es preciso, pues, conocer el estado del sistema cuando se aplica la excitación, lo que se conoce como **condición inicial** del sistema.
- Si antes de aplicar la entrada el sistema estuvo en **reposo** (es decir, $y[n] = 0, \ \forall n < 0$), entonces hablamos de **condiciones iniciales nulas** y podemos obtener una caracterización completa.

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Solución a la EDF

- Así pues, la solución a la EDF tiene dos **contribuciones**:

  1) la **respuesta natural** o **respuesta libre** debida a la solución a la ecuación homogénea $y_h[n]$, que solo depende del estado del sistema antes de aplicar la entrada, relacionada con la **respuesta con entrada nula** $y_{zi}[n]$ (*zero-input*).

  2) la **respuesta en reposo** o respuesta en **condiciones iniciales nulas** debida a la solución particular $y_p[n]$, relacionada con la **respuesta al estado cero** $y_{zs}[n]$ (*zero-state*).

- Más adelante veremos una forma más sencilla de obtener la solución a una EDF mediante el uso de transformadas (denominado **método indirecto**), que evitan este método directo de ensayo de soluciones candidatas expuesto en esta sección.

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Representación

- Para un sistema descrito mediante EDF, podemos expresar la ecuación de la siguiente forma:

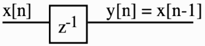
$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{Q} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{P} a_k y[n-k]\right)$$

- Esta forma proporciona los valores de $y[n]$ en función de los valores previos de la entrada y la salida, dejando implícita la condición de causalidad.
- Se denomina forma **recursiva** (o recurrente), ya que para calcular una muestra de la salida se precisan valores previamente calculados de la salida.

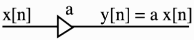
Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Representación

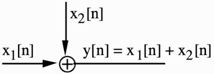
- Un sistema descrito mediante EDF con coeficientes constantes puede representarse gráficamente con un **diagrama de bloques** a partir de un conjunto de elementos básicos que definen operaciones:



Retardador



Multiplicador por constante

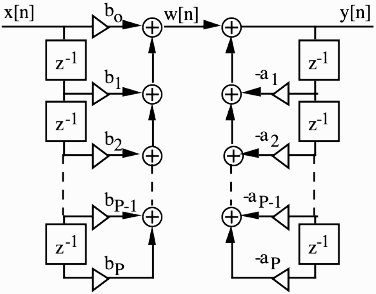


Sumador de señales

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Representación

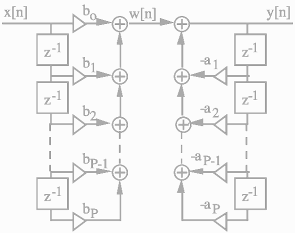
- El siguiente **diagrama de bloques** representa un sistema definido mediante EDF en el que se supone $a_0 = 1$ y orden $M = Q = P$:



Señales y Sistemas Discretos

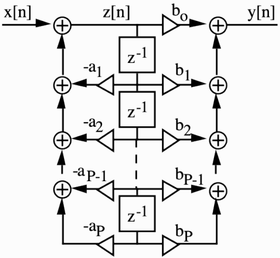
Descripción de sistemas mediante EDF – Representación

- La forma anterior puede sintetizarse para reducir el número de retardadores usados para obtener un circuito más sencillo:



Forma directa I

$\longrightarrow$



Forma directa II (canónica)

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Representación

- La respuesta impulsional $h[n]$ de un sistema puede definirse a partir de la EDF aplicando una delta $\delta[n]$ a su entrada.

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{Q} b_k \delta[n-k] - \sum_{k=1}^{P} a_k h[n-k]\right)$$

- Si $P > 0$, obtenemos un sistema **recursivo**.
- Si $P = 0$, obtenemos un sistema **no recursivo**; en este caso, la expresión se simplifica a $h[n] = \frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{Q} b_k \delta[n-k]$.
- Es importante constatar que, ara que un sistema descrito por EDF sea LTI (y poder así calcular su respuesta impulsional), debe tener **condiciones iniciales nulas**, es decir, debe producir una salida nula en ausencia de excitación.

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Representación

Ejemplo – Promediador

- Un promediador tiene respuesta impulsional finita **FIR**:

$$h[n] = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1}\delta[n-k] = \frac{1}{L}p_L[n]$$

- Podemos comprobar que se trata de un sistema LTI que se puede describir mediante EDF de **forma no recursiva** con $P = 0$, $Q = L - 1$, $a_0 = L$ y $b_k = 1$:

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{Q} b_k\delta[n-k] - \sum_{k=1}^{P} a_k h[n-k]\right) = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1}\delta[n-k]$$

- Observar que el promediador también podría expresarse de forma recursiva.

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Representación

Ejemplo – Acumulador

- Un acumulador tiene respuesta impulsional infinita **IIR**:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = u[n]$$

- No es posible implementarlo de forma no recursiva, pues necesitaríamos infinitos elementos, tal como ya habíamos observado a partir de la ecuación de convolución.
- Sin embargo, podemos expresar la salida del acumulador en función de su salida en instantes anteriores:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] = y[n-1] + x[n]$$

Señales y Sistemas Discretos

Descripción de sistemas mediante EDF – Representación

Ejemplo – Acumulador (Cont.)

- Efectivamente, la salida del acumulador es la suma de la salida en el instante anterior más la muestra presente, lo que da lugar a la siguiente respuesta impulsional:

$$h[n] = h[n-1] + \delta[n] \quad \forall n \geq 0, \quad h[n] = 0 \quad \forall n < 0$$

- Seguimos teniendo una respuesta impulsional infinita, pero ahora sí puede ser implementada de **forma recursiva**, que se puede describir mediante EDF con $P = 1$, $Q = 1$, $a_0 = a_1 = 1$ y $b_0 = 1$.

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{Q} b_k \delta[n-k] - \sum_{k=1}^{P} a_k h[n-k]\right) = h[n-1] + \delta[n]$$

Tabla de contenidos

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Bibliografía recomendada

Referencias

- ***Señales y Sistemas*, Hwei P.Hsu, 2a. edición** [Ingebook]

  6. Análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo discreto (p.209-219)

- ***Tratamiento digital de señales*, J.G.Proakis, D.G.Manolakis, 4a. ed** [Ing.]

  4.2.3 Transformada de Fourier de señales aperiódicas discretas en el tiempo (p.224-229)

  4.4 Propiedades de la transformada de Fourier para señales discretas en el tiempo (p.244-259)

- ***Tratamiento de señales en tiempo discreto*, Alan V.Oppenheim, Ronald W.Schafer, 4a. edición** [Ingebook]

  2.7 Representación de secuencias mediante transformadas de Fourier (p.48-53)

  2.8 Propiedades de simetría de la transformada de Fourier (p.54-55)

  2.9 Teoremas de la transformada de Fourier (p.56-63)

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Introducción

- Hemos visto anteriormente que la respuesta de un **sistema LTI** a una 'componente frecuencial' (exponencial compleja) conserva la misma dependencia temporal (exponencial compleja x constante):

$$x[n] = e^{j\omega n} \longrightarrow \underset{\text{LTI}}{\boxed{h[n]}} \longrightarrow y[n] = e^{j\omega n} H(e^{j\omega})$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jwk}}_{H(e^{j\omega})}$$

- La **respuesta frecuencial** del sistema es una función compleja de variable real que se relaciona con la respuesta impulsional:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Introducción

- La **caracterización frecuencial** tiene especial relevancia por diversas razones, entre las cuales destacamos:

  1) La respuesta frecuencial proporciona una **descripción alternativa** de los sistemas LTI y que **facilita el análisis** en muchos casos (por ejemplo, la concatenación de sistemas LTI resulta en el producto de las respuestas frecuenciales, una operación más sencilla que la convolución de la respuestas impulsionales en el dominio temporal).

  2) Señales con **distintas componentes frecuenciales** pueden compartir el mismo soporte de transmisión sin interferirse entre sí (lo que es clave para el desarrollo de la telecomunicaciones).

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Definición

- Para un secuencia **absolutamente sumable**, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$, definimos la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT, de *Discrete-Time Fourier Transform*), a la serie de potencias:

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}}$$

donde X es una función compleja **continua** de variable real ω.

- Se trata de una transformación de un subespacio a otro subespacio más propicio para su **análisis en componentes frecuenciales**.

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Notación

- Es importante recalcar que existen **diferentes notaciones** para expresar la transformada de Fourier; a continuación mostramos algunas de las usadas en la bibliografía recomendada:

Señales y Sistemas (Hsu)	$X(\Omega)$
Tratamiento digital de señales (Proakis-Manolakis)	$X(\omega)$
Tratamiento de señales en tiempo discreto (Oppenheim-Schafer)	$X(e^{j\omega})$

- En nuestro caso, optaremos por esta última pues denota de forma implícita su carácter periódico, como veremos a continuación.
- Además, el hecho de usar minúsculas para el dominio digital (ω, f), permite reservar el uso de mayúsculas (Ω, F) para referirse al dominio analógico, como haremos más adelante.

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Convergencia y periodicidad

- Al ser sumable, se garantiza la **convergencia** de la serie:

$$\lim_{N\to\infty} \left| X(e^{j\omega}) - \sum_{n=-N}^{N} x[n]e^{-j\omega n} \right| = 0$$

- Asimismo, puesto que la exponencial es una secuencia periódica con periodo 2π radianes, la DTFT es también una función **periódica** con periodo 2π:

$$X(e^{j\omega}) = X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)$$

Así pues, es suficiente con conocer un periodo de la función, como por ejemplo el intervalo $[0, 2\pi)$, para determinarla por completo.

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Representación módulo/fase

- La **representación gráfica** de la transformada de Fourier de una secuencia real se limita habitualmente al intervalo $[0, \pi)$.
- Ello es debido a que la periodicidad de la DTFT exige el conocimiento de un solo periodo, como $[0, 2\pi)$, y la simetría hermítica ($X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$) proporciona el conocimiento del semiperiodo no representado.
- Puesto que la DTFT es una función compleja, obtenemos que:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\theta(e^{j\omega})}, \text{ donde}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{\Re\{X(e^{j\omega})\}^2 + \Im\{X(e^{j\omega})\}^2} \text{ y } \theta(e^{j\omega}) = \arctan\frac{\Im\{X(e^{j\omega})\}}{\Re\{X(e^{j\omega})\}}$$

son el **módulo** y la **fase**/**argumento** de la DTFT, respectivamente.

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Ejemplo

Ejemplo

Para $h[n] = \alpha\delta[n - n_0]$ (canal ideal), la transformada es:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha\delta[n - n_0]e^{-j\omega n} = \alpha e^{-j\omega n_0}$$

es decir, magnitud constante (α) y fase lineal (pendiente $-n_0$).

Ejemplo

Para la secuencia $x[n] = a^n u[n]$, la transformada es:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

que converge cuando $\left|ae^{-jw}\right| < 1$, es decir, para $|a| < 1$.

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Ejemplo

Ejemplo

Para la secuencia $p_L[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & n < 0,\ n \geq L \end{cases}$, la transformada es:

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_L[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{e^{-j\omega L/2}}{e^{-j\omega/2}} \cdot \frac{e^{j\omega L/2} - e^{-j\omega L/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = e^{-j\omega\left(\frac{L-1}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{L\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

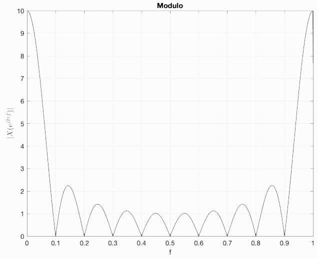
que presenta nulos para $\omega = \frac{2\pi}{L}k,\ \ k \in \mathbb{Z}$ excepto $0, \pm L, \pm 2L, \ldots$.

A esta función se la conoce como sinc **digital** por su similitud con la función sinc analógica $\left(=\frac{sin(\pi\Omega)}{\pi\Omega}\right)$ pero siendo periódica.

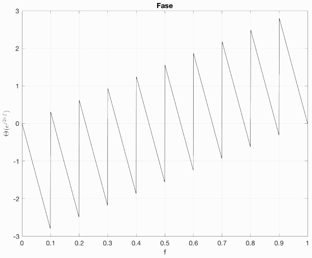
Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Ejemplo

- A continuación, representamos gráficamente el módulo y la fase de la transformada de Fourier de un pulso $p_L[n]$ de $L = 10$ muestras, en este caso en función de la frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi}$ en el intervalo $[0, 1]$:



Módulo



Fase

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Ejemplo

- Podemos obtener esta representación gráfica fácilmente mediante el siguiente código de MATLAB™:

```
L=10;
f=linspace(0,1,1000); % para simular 'continuidad'
f=f+eps; % para evitar indeterminaciones en cero
X=exp(-1i*2*pi*f*(L-1)/2).*sin(2*pi*f*L/2)./sin(2*pi*f/2);
figure;
plot(f,abs(X),'k');
title('Modulo'); grid on;
xlabel('f');
ylabel('$|X(e^{j2{\pi}f})|$','Interpreter','latex');
figure;
plot(f,angle(X),'k');
title('Fase'); grid on;
xlabel('f');
ylabel('$\Theta(e^{j2{\pi}f})$','Interpreter','latex');
```

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Transformada inversa

- También podemos recuperar la secuencia original a partir de su transformada.
- Para ello, usaremos la **transformación inversa** de Fourier, que viene dada por:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

- En este caso, pasamos de una función de variable continua a una secuencia de variable discreta.
- Se la conoce como **IDTFT** (*Inverse Discrete Time Fourier Transform*).

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Convergencia cuadrática

- La relajación de la condición de **convergencia** uniforme a **cuadrática** permite extender la existencia de la DTFT a las secuencias cuadrado sumables (es decir, con energía finita):

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X(e^{j\omega}) - \sum_{n=-N}^{N} x[n]e^{-j\omega n} \right|^2 d\omega = 0$$

Ejemplo

Un filtro paso bajo ideal se define como:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Convergencia cuadrática

Ejemplo

La transformada inversa de este filtro es una secuencia no absolutamente sumable (y, por tanto, un sistema inestable), pero tiene energía finita:

$$
\begin{aligned}
h[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{j2\pi n}\underbrace{\left(e^{j\omega_c n} - e^{j\omega_c n}\right)}_{2j\sin(\omega_c n)} \\
&= \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin(\pi\frac{\omega_c}{\pi}n)}{\pi\frac{\omega_c}{\pi}n} = \frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right)
\end{aligned}
$$

donde $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ corresponde a la función sinc normalizada.

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Generalización

- Hemos visto que podemos aplicar la transformada de Fourier a secuencias absolutamente sumables ($M_x < \infty$) y a secuencias de energía finita ($E_x < \infty$) si relajamos la condición de convergencia.
- Sin embargo, se excluyen todavía señales tan importantes como el escalón unitario o las sinusoides, que son señales de energía infinita pero **potencia media finita** ($P_x < \infty$).
- Conviene, por tanto, extender el concepto de la transformada de Fourier a estas otras secuencias; para ello se incorpora la función **delta de Dirac** $\delta(\omega)$ en la transformada, de modo que cumpla que:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\omega)\delta(\omega)d\omega = f(0)$$

para toda función $f(\omega)$ continua en el origen y para cualquier intervalo de integración que incluya el cero, es decir, $\forall \alpha > 0$.

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Generalización

- Con esta definición podemos comprobar, por ejemplo, la transformada de Fourier de la secuencia **constante unitaria** $x[n] = 1$ (que es de potencia media finita $P_x = 1$), que es un sumatorio de deltas de Dirac con periodo y área 2π:

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi i) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\stackrel{1}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega \stackrel{2}{=} e^{j\omega n} \, |_{\omega=0} = 1$$

[1] Puesto que solo el término para $i = 0$ queda dentro de los límites de la integral.
[2] Aplicando la definición de la delta de Dirac, evaluamos la función en $\omega = 0$.

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Generalización

- Para calcular la transformada de Fourier de la señal **signo** $x[n] = \mathrm{sign}[n]$, otra secuencia de potencia, podemos partir de la siguiente observación:

$$\mathrm{sign}[n] - \mathrm{sign}[n-1] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

- Aplicando la transformada a la anterior expresión, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathrm{sign}[n]\} - \mathcal{F}\{\mathrm{sign}[n-1]\} &= \mathcal{F}\{\delta[n]\} + \mathcal{F}\{\delta[n-1]\} \\ \mathcal{F}\{\mathrm{sign}[n]\} - \mathcal{F}\{\mathrm{sign}[n]\}e^{-j\omega} &= 1 + e^{-j\omega} \\ \mathcal{F}\{\mathrm{sign}[n]\} &= \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Generalización

- Asimismo, podemos obtener la transformada **secuencia** escalón a partir de esta última teniendo en cuenta la siguiente expresión:

$$u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}[n]$$

  en las que se aplican las transformadas de las señales discretas constante unitaria, delta y signo.
- La transformada de la **exponencial compleja** $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ se obtiene simplemente interpretándola como una modulación de ω_0 de la constante unitaria $x'[n] = 1$:

$$X(e^{j\omega}) = X'(e^{j(\omega-\omega 0)}) = 2\pi \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_0 - 2\pi i)$$

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Generalización

- Así pues, gracias a esta **generalización de la transformada de Fourier en tiempo discreto** para secuencias de potencia media finita, hemos obtenido los siguientes pares de transformadas:

$$\text{Constate unitaria}: 1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi i)$$

$$\text{Exponencial compleja}: e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi i)$$

$$\text{Signo}: \mathrm{sign}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$\text{Escalón unitario}: u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi i) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$$

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Propiedades

- Dada la pareja de transformada $x[n] \overset{\mathrm{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$, de la definición se deducen las siguientes **propiedades de simetría**:

  Reflexión: $x[-n] \longleftrightarrow X(e^{-j\omega})$ **Conjugación**: $x^*[n] \longleftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

- A partir de ellas, podemos deducir las siguientes consecuencias:

  (1) Si la secuencia es par entonces su transformada también lo es:

$$x[n] = x[-n] \implies X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$$

  (2) Si la secuencia es real entonces su transformada es hermítica[1]:

$$x[n] = x^*[n] \implies X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

[1] Y, por tanto, el módulo de su transformada es par y su fase es impar.

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Propiedades

- A continuación analizamos los principales **teoremas de la transformada de Fourier** para tiempo discreto, un conjunto de propiedades que nos permitirán operar en el dominio transformado.
- **Linealidad**:

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \xleftrightarrow{\mathrm{F}} a_1 X_1(e^{j\omega}) + a_2 X_2(e^{j\omega})$$

- **Desplazamiento temporal**:

$$x[n-m] \xleftrightarrow{\mathrm{F}} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega m}$$

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Propiedades

- **Modulación** (desplazamiento frecuencial):

$$x[n]e^{j\omega_0 n} \overset{\mathrm{F}}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

- Recordemos que la transformada de Fourier de señales reales es redundante debido a su carácter hermítico; esta redundancia puede ser eliminada al definir la **señal analítica** $a_x[n]$, tal que:

$$A_x(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2X(e^{j\omega}), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} = X(e^{j\omega}) + jH_H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

donde $H_H(e^{j\omega})$ es la respuesta frecuencial del sistema **transformador de Hilbert** $H\{\cdot\}$.

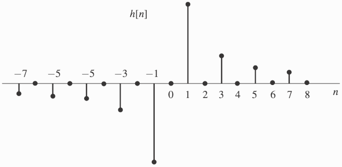
Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Propiedades

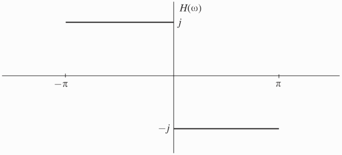
- El transformador ideal de Hilbert discreto en el tiempo responde a la siguiente expresión:

$$h_H[n] = \begin{cases} 0, & n = \text{ par} \\ \frac{2}{\pi n}, & n = \text{ impar} \end{cases} \quad , \quad H_H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

- Sus respuestas impulsional y frecuencial vienen dadas por:



Respuesta impulsional



Respuesta frecuencial

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Propiedades

- La señal analítica puede expresarse también en el dominio temporal:

$$a_x[n] = x[n] + jH\{x[n]\} = x[n] + jx[n] * h_H[n]$$

- Podemos ahora definir el **equivalente paso bajo** $b_x[n]$ de la señal paso banda $x[n]$, que se trata de una señal compleja:

$$b_x[n] = a_x[n]e^{-j\omega_0 n} = i[n] + jq[n]$$

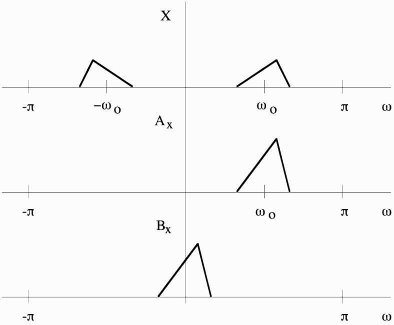
  donde $i[n]$ y $q[n]$ son, respectivamente, las **componentes en fase y cuadratura**.

- Puede demostrase que $x[n] = i[n]\cos(\omega_0 n) - q[n]\sin(\omega_0 n)$.

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Propiedades

- Veamos gráficamente la relación entre las transformadas de Fourier de la secuencia original $X(e^{j\omega})$, la señal analítica $A_x(e^{j\omega})$ y su equivalente paso bajo $B_x(e^{j\omega})$:



Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Propiedades

- **Convolución** (lineal):

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{\text{F}} X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

- **Producto de secuencias** (enventanado):

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{\text{F}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j(\lambda)}\right) X_2\left(e^{j(\omega-\lambda)}\right) d\lambda$$

También se puede expresar como $X_1(e^{j\omega}) \textcircled{\scriptsize 2\pi} X_2(e^{j\omega})$.

- **Derivación en el dominio** ω (producto por factor n):

$$nx[n] \xleftrightarrow{\text{F}} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Propiedades

- **Igualdad de Parseval** (conservación de la energía):

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

- Las **propiedades de los valores iniciales** son también útiles para calcular fácilmente los factores de escala en las transformadas (como la de la sinc o la del pulso rectangular):

  Para $\omega = 0$: $X(1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]$

  Para $n = 0$: $x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(e^{j2\pi f}) df$

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Resumen

- Resumen de las definiciones de la DTFT/IDTFT:

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}} \Longleftrightarrow \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega}$$

ω : pulsación (radianes/muestra)
f : frecuencia (ciclos/muestra)

$$\boxed{\omega = 2\pi f} \qquad \begin{array}{rcl} -\pi & \leq \omega \leq & \pi \\ -\frac{1}{2} & \leq f \leq & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\boxed{X(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn}} \Leftrightarrow \boxed{x[n] = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(e^{j2\pi f})e^{j2\pi fn}df}$$

*(*en la última expresión de la IDTFT hay que tener en cuenta que $d\omega = 2\pi df$)*

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Resumen

- Resumen de las **propiedades de simetría** de la DTFT:

Secuencia $x[n]$	Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $Re\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (parte simétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
4. $jIm\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (parte antisimétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (parte simétrica conjugada de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = Re\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (parte antisimétrica conjugada de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = jIm\{X(e^{j\omega})\}$
Las siguientes propiedades sólo se cumplen si $x[n]$ es real:	
7. Cualquier $x[n]$ real	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (la transformada de Fourier es simétrica conjugada)
8. Cualquier $x[n]$ real	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (la parte real es par)
9. Cualquier $x[n]$ real	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (la parte imaginaria es impar)
10. Cualquier $x[n]$ real	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert$ (el módulo es par)
11. Cualquier $x[n]$ real	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (la fase es impar)
12. $x_e[n]$ (parte par de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (parte impar de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

Fuente: Tabla 2.1 Oppenheim-Schafer

Respuesta frecuencial

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) – Resumen

- Resumen de **teoremas** y **parejas de transformadas** de la DTFT:

Secuencia	Transformada de Fourier
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n]+by[n]$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
2. $x[n-n_d]$ (n_d un entero)	$e^{-j\omega n_d}X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ si $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Teorema de Parseval:	
8. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|x[n]\|^2=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|X(e^{j\omega})\|^2 d\omega$	
9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]y^*[n]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$	

Fuente: Tabla 2.2 Oppenheim-Schafer

Secuencia	Transformada de Fourier
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty<n<\infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (\|a\|<1)$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (\|a\|<1)$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
7. $\dfrac{r^n \operatorname{sen}\omega_p(n+1)}{\operatorname{sen}\omega_p}u[n] \quad (\|r\|<1)$	$\dfrac{1}{1-2r\cos\omega_p e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
8. $\dfrac{\operatorname{sen}\omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & \|\omega\|<\omega_c,\\ 0, & \omega_c<\|\omega\|\le\pi\end{cases}$
9. $x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le M\\ 0, & \text{en el resto}\end{cases}$	$\dfrac{\operatorname{sen}[\omega(M+1)/2]}{\operatorname{sen}(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

Fuente: Tabla 2.3 Oppenheim-Schafer

Tabla de contenidos

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Bibliografía recomendada

Referencias

- ***Señales y Sistemas*, Hwei P.Hsu, 2a. edición** [Ingebook]

  6.8 La transformada de Fourier discreta (p.222-224)

- ***Tratamiento digital de señales*, John G.Proakis, Dimitris G.Manolakis, 4a. edición** [Ingebook]

  4.2.2 Serie de Fourier para señales periódicas discretas en el tiempo (p.218-221)

- ***Tratamiento de señales en tiempo discreto*, Alan V.Oppenheim, Ronald W.Schafer, 4a. edición** [Ingebook]

  8. La transformada discreta de Fourier (p-610.656)

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Definición

- La DTFT transforma una secuencia $x[n]$ en una función compleja $X(e^{j\omega})$ de variable real ω, lo que pierde los beneficios de trabajar con secuencias.
- La transformada discreta de Fourier (DFT, *Discrete Fourier Transform*) establece una transformación que genera una secuencia también en el dominio transformado.
- Para una secuencia ***finita***, $x[n] = 0 \ \forall n < 0$ y $n > N-1$, se define la DFT como:

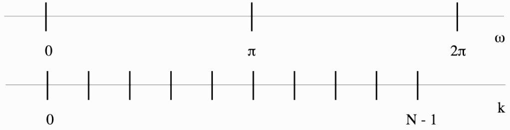
$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, \cdots, N-1}$$

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Definición

- Se trata de una **versión muestreada** de de la DTFT en el periodo $[0, 2\pi)$ a intervalos $\frac{2\pi}{N}$:

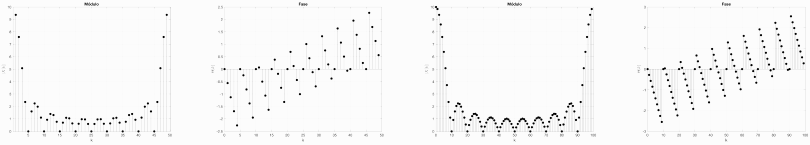
$$X[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{w=\frac{2\pi}{N}\cdot k}$$



Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Definición

- A continuación, representamos gráficamente el módulo y la fase de la transformada discreta de Fourier de un pulso $p_L[n]$ de $L = 10$ muestras; a diferencia que en la DTFT, la **resolución** dependerá del número de puntos N usado para realizar la DFT:



Módulo $N = 50$ | *Fase* $N = 50$ | *Módulo* $N = 100$ | *Fase* $N = 100$

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Definición

- Podemos obtener esta representación gráfica mediante el siguiente código de MATLAB™; en este caso usamos la función `stem`:

```
L=10;
N=100;
k=linspace(0,N-1,N);
x=ones(1,L); % pulso
X=fft(x,N); % DFT
figure;
stem(k,abs(X),'filled','k');
title('Modulo'); grid on;
xlabel('k');
ylabel('$|X[k]|$','Interpreter','latex');
figure;
stem(k,angle(X),'filled','k');
title('Fase'); grid on;
xlabel('k');
ylabel('$\Theta[k]$','Interpreter','latex');
```

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Definición

- La **DFT inversa** o **IDFT** (o DFT^{-1}) se obtiene a partir de:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, \ldots, N-1$$

- Como se puede observar, se trata de una reconstrucción de la secuencia $x[n]$ a partir de N tonos; por tanto, cuanto más grande sea el valor de N, mayor será la **resolución** de la DFT.
- Es importante recalcar que, como ocurre con la DFT, la secuencia de la IDFT está también limitada para los ordinales $0, \ldots, N-1$.

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Definición

- De hecho, si calculamos la secuencia de la transformada inversa, que llamamos a continuación $\tilde{x}[n]$ obtenemos que:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{N-1} x[i]e^{-j\frac{2\pi}{N}ki}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} x[i]\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-i)} = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]t[n-i] = x[n] * t[n]$$

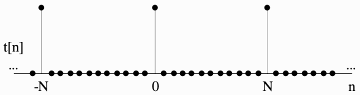
A partir de esta última expresión, observamos que la nueva secuencia es igual a la secuencia original $x[n]$ convolucionada por otra secuencia que hemos llamado $t[n]$.

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Definición

- A la secuencia $t[n]$ se la conoce como **tren de deltas/impulsos unidad** (con periodo N), pues responde a la siguiente expresión:

$$t[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum e^{j2\pi kr} = 1, & n = rN \\ \frac{1}{N}\frac{1-e^{j2\pi n}}{1-e^{j(2\pi/N)n}} = 0, & n \neq rN \end{cases} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n+rN]$$



- En consecuencia, $\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN]$, motivo por el cual se denomina a $\tilde{x}[n]$ la **extensión periódica** de la secuencia $x[n]$.
- Así, para $n = 0, \ldots, N-1$, se cumple que $\tilde{x}[n] = x[n]$.

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Definición

- Así pues, a diferencia de la DTFT, la DFT depende del **número de muestras** N que tomamos de $x[n]$ para realizar la transformada.
- Por tanto, la IDFT recupera la secuencia original $x[n]$ solo en el supuesto que tenga muestras en el intervalo $[0, N-1]$.
- En caso contrario, si el número de muestras no nulas de $x[n]$ sobrepasan el intervalo $[0, N-1]$, entonces la DFT realiza un **enventanado temporal** implícito de $x[n]$, cuya **ventana** es el pulso rectangular $p_N[n]$:

$$x_N[n] = x[n]p_N[n] = \begin{cases} x[n] & , 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & , \text{ otro } n \end{cases}$$

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Definición

- El siguiente código de MATLAB™ muestra un ejemplo de transformaciones mediante DFT e IDFT:

```
x=[3,2,1,0,2];
% Caso 1 (sin enventanado temporal implícito)
N=8;
X=fft(x,N);
xp=ifft(X); % xp=[3,2,1,0,2,0,0,0]
% Caso 2 (con enventanado temporal implícito)
N=4;
X2=fft(x,N); %
xp2=ifft(X2); % xp2 = [3,2,1,0]
```

- En efecto, en el segundo caso se produce un enventanado temporal, por lo que la `ifft` de `X2` devuelve la secuencia original recortada (a $N = 4$).

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Definición

- Por otro lado, si el número de muestras que se toma de la IDFT N' (tomadas cada L muestras, es decir, $N' = \frac{N}{L}$) es menor al número de muestras con las que se realizar la DFT (N), entonces se produce **solapamiento temporal**.

$$\tilde{x}[n] = \frac{L}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{L}-1} X[Lk] e^{j\frac{2\pi}{N}Lkn} = \frac{L}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{L}-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} x[i] e^{-j\frac{2\pi}{N}Lki} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}Lkn}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \frac{L}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{L}-1} e^{j\frac{2\pi}{N}Lk(n-i)} = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] t'[n-i] = x[n] * t'[n]$$

- Donde ahora $t'[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n + r\frac{N}{L}] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n + rN']$ es un tren de deltas con un de periodo $N' = \frac{N}{L}$ muestras.

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Definición

- El siguiente código de MATLAB™ muestra un ejemplo de transformaciones mediante DFT e IDFT:

```
x=[3,2,1,0,2];
% Caso 1 (sin solapamiento temporal)
N=8;
X=fft(x,N);
xp=ifft(X); % xp=[3,2,1,0,2,0,0,0]
% Caso 2 (con solapamiento temporal)
X2=X(1:2:end); % N'=4
xp2=ifft(X2); % xp2=[5,2,1,0]
```

- En efecto, en el segundo caso (con $N' = 4$), se produce un solapamiento temporal en la extensión periódica que devuelve la `ifft` de `X2`.

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Propiedades

- Dada la pareja de transformada $x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k]$, analizamos ahora los principales **teoremas de la DFT**, que comparamos por conveniencia con los de la DTFT en los casos pertinentes.
- **Linealidad**:

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \xleftrightarrow{\text{F}} a_1 X_1(e^{j\omega}) + a_2 X_2(e^{j\omega})$$

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k]$$

- **Dualidad**:

$$X[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} N\tilde{x}[N-k]p_N[k]$$

Demostración:

$$N\tilde{x}[N-k]p_N[k] = N\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[n]e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)n}\right)p_N[k] = \text{DFT}\{X[n]\}$$

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Propiedades

- **Desplazamiento temporal**:

$$x[n-m] \overset{\mathrm{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})e^{-j\omega m}$$

$$x[(n-m)_{\mathrm{mod}N}] \overset{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow} X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

donde la notación del módulo significa:

$$[l_{\mathrm{mod}N}] = l + iN, \text{ para algún } i \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 0 \leq [l_{\mathrm{mod}N}] < N$$

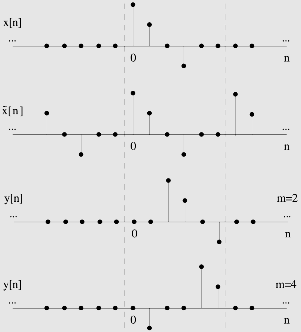
- En ocasiones, también se expresa como $x[((l))_N] \equiv x[l_{\mathrm{mod}N}]$.
- Así, al desplazamiento de la DFT se le denomina **desplazamiento circular**, que coincide con el desplazamiento lineal mientras este primero no traslade muestras no nulas fuera del intervalo $[0, N-1]$.

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Propiedades

Ejemplo de desplazamiento circular

$y[n] = x[(n-m)_{\mathrm{mod}N}]$ con $N = 6$ para $m = 2$ y $m = 4$:



Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Propiedades

- **Modulación**:

$$x[n]e^{j\omega_0 n} \stackrel{\mathrm{F}}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

$$x[n]e^{j\frac{2\pi}{N}Ln} \stackrel{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow} X[(k-L)_{\mathrm{mod}N}]$$

- **Convolución** (circular):

$$c_l[n] = x_1[n] * x_2[n] \stackrel{\mathrm{F}}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

$$c_c[n] = x_1[n] \underset{N}{\circledast} x_2[n] \stackrel{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow} X_1[k]X_2[k]$$

- En este caso hablamos pues de **convolución circular** de las secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$, que se define como $c_c[n] = \tilde{c}_l[n]p_N[n]$.
- En ocasiones, también podemos encontrarnos con la notación $\textcircled{N}$.

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Propiedades

Demostración

$$\tilde{c}_l[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c[n+rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[n+rN-m]$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2[n+rN-m] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]\tilde{x}_2[n-m]$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n-m]x_2[m], \; n = 0, \ldots, N-1$$

- Para $n = 0, \ldots, N-1$, la convolución circular coincide con la convolución lineal entre una señal y la extensión periódica de otra.
- Asimismo, la convolución circular solo coincide con la lineal entre dos señales para $N \geq N_1 + N_2 - 1 \implies c_c[n] = c_l[n]$.

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Definición

- El siguiente código de MATLAB™ muestra un ejemplo de convolución lineal (`conv`) y circular (`cconv`):

```
x1=[1 2 3]; % N1=3
x2=[1 2 3 4]; % N2=4
cl=conv(x1,x2); % convolucion lineal (longitud N1+N2-1=6)
% Caso 1 (N>=N1+N2-1)
N=6; cc=cconv(x1,x2,N); % convolucion circular (igual a cl)
% Caso 2 (N<N1+N2-1)
N=5; cc2=cconv(x1,x2,N); % convolucion circular (dif. a cl)
```

- En el segundo caso, al no cumplirse el requisito, la convolución circular `cc2=[13,4,10,16,17]` no coincide con la convolución lineal `cl=cc=[1,4,10,16,17,12]`.

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Propiedades

- **Producto de secuencias** (enventanado):

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j(\lambda)}\right) X_2\left(e^{j(\omega-\lambda)}\right) d\lambda$$

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{\mathrm{DFT}} \frac{1}{N}\left(X_1[k] \underset{N}{\circledast} X_2[k]\right)$$

- **Igualdad de Parseval** (conservación de la energía):

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \quad (\mathrm{F})$$

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \quad (\mathrm{DFT})$$

Respuesta frecuencial

Transformada discreta de Fourier (DFT) – Propiedades

- Resumen de las **propiedades** de la DFT:

Secuencia de longitud finita (Longitud N)	DFT de N puntos (Longitud N)
1. $x[n]$	$X[k]$
2. $x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3. $ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4. $X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5. $x[((n-m))_N]$	$W_N^{km} X[k]$
6. $W_N^{-\ell n} x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell] X_2[((k-\ell))_N]$
9. $x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10. $x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11. $Re\{x[n]\}$	$X_{\mathrm{ep}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] + X^*[((-k))_N]\}$
12. $jIm\{x[n]\}$	$X_{\mathrm{op}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] - X^*[((-k))_N]\}$
13. $x_{\mathrm{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$Re\{X[k]\}$
14. $x_{\mathrm{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$jIm\{X[k]\}$
Las propiedades 15–17 sólo se aplican cuando $x[n]$ es real.	
15. Propiedades de simetría	$\begin{cases} X[k] = X^*[((-k))_N] \\ Re\{X[k]\} = Re\{X[((-k))_N]\} \\ Im\{X[k]\} = -Im\{X[((-k))_N]\} \\ \lvert X[k]\rvert = \lvert X[((-k))_N]\rvert \\ \angle\{X[k]\} = -\angle\{X[((-k))_N]\} \end{cases}$
16. $x_{\mathrm{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[((-n))_N]\}$	$Re\{X[k]\}$
17. $x_{\mathrm{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[((-n))_N]\}$	$jIm\{X[k]\}$

Fuente: Tabla 8.2 Oppenheim-Schafer

Tabla de contenidos

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Bibliografía recomendada

Referencias

- ***Señales y Sistemas*, Hwei P.Hsu, 2a. edición** [Ingebook]

  6. Análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo discreto (p.209-219)

- ***Tratamiento digital de señales*, J.G.Proakis, D.G.Manolakis, 4a. ed.** [IIng.]

  4.2.3 Transformada de Fourier de señales aperiódicas discretas en el tiempo (p.224-229)

  4.4 Propiedades de la transformada de Fourier para señales discretas en el tiempo (p.244-259)

- ***Tratamiento de señales en tiempo discreto*, Alan V.Oppenheim, Ronald W.Schafer, 4a. edición** [Ingebook]

  2.7 Representación de secuencias mediante transformadas de Fourier (p.48-53)

  2.8 Propiedades de simetría de la transformada de Fourier (p.54-55)

  2.9 Teoremas de la transformada de Fourier (p.56-63)

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Introducción

- El **diezmado** y la **interpolación** son **operaciones digitales** que permiten eliminar o añadir muestras a una secuencia.
- Son manipulaciones habituales en el tratamiento digital de señales de comunicaciones, típicamente para cambiar la frecuencia de muestreo y adaptarla a las necesidades de cada momento.
- Así, en ocasiones nos interesará trabajar con la **frecuencia de muestreo** más baja en cada bloque (debido al coste del *hardware*), pero a veces será necesario elevarla (y luego volver a reducirla) según los requisitos de las señales implicadas en cada momento.
- Al estar relacionadas con las propiedades de **escalado 'temporal'**, se trata de operaciones que son **lineales y variantes** con el tiempo (no pueden ser descritos, por tanto, como sistemas LTI).

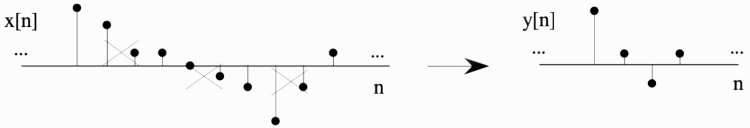
Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Diezmado

- El diezmado consiste en **eliminar muestras** de una secuencia, lo que se relaciona con la **reducción de la frecuencia de muestreo**:

$$x[n] \longrightarrow \underset{\text{diezmado}}{\boxed{\downarrow N}} \longrightarrow y[n] = x[nN]$$

- En el siguiente **ejemplo** mostramos un diezmador con $N = 3$:



Respuesta frecuencial

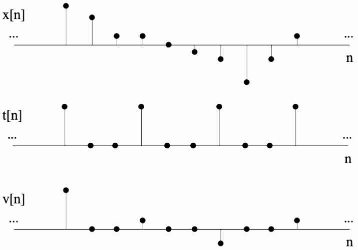
Diezmado e interpolación – Propiedades

- Para analizar el **proceso de diezmado** en el dominio frecuencial, introducimos la secuencia intermedia $v[n] = x[n]t[n]$:

$$x[n] \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ t[n]}}{\otimes} \longrightarrow v[n] \longrightarrow \underset{\text{diezmado}}{\boxed{\downarrow N}} \longrightarrow y[n] = v[nN] = x[nN]$$

- Donde $t[n]$ es el tren de deltas con periodo N, por lo que esta nueva secuencia responde a la expresión:

$$v[n] = \begin{cases} x[n], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{otro } n \end{cases}$$



Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Diezmado

- Obtenemos ahora la transformada de Fourier de la secuencia diezmada:

$$
\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nN]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[nN]e^{-j\omega n} \overset{\overset{nN=m}{\downarrow}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[m]e^{-j\frac{\omega}{N}m} \\
&= V\left(e^{j\left(\frac{\omega}{N}\right)}\right) = X(e^{j\left(\frac{\omega}{N}\right)}) \circledast_{2\pi} T(e^{j\left(\frac{\omega}{N}\right)})
\end{aligned}
$$

donde en el último paso se ha aplicado el teorema del producto (enventanado) para la transformada de Fourier en tiempo discreto.

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Diezmado

- La DTFT de la secuencia $v[n]$ es, pues, la convolución (en un periodo) de la transformada de la secuencia original $x[n]$ y la transformada del tren de deltas $t[n]$ con periodo N:

$$V(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \circledast_{2\pi} T(e^{j\omega})$$

- La transformada de un tren de deltas en el dominio 'temporal' es un sumatorio de exponenciales que puede expresarse como otro tren de deltas en el dominio transformado:

$$t[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta[n - iN] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} T(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} i)$$

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Diezmado

Demostración de la transformada de un tren de deltas

Recordemos que un tren de deltas o impulsos unitarios $t[n]$ con periodicidad N, puede expresarse también mediante su desarrollo en Serie de Fourier Discreta (SFD), una expresión usada cuando se obtiene la extensión periódica de una secuencia:

$$t[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta[n - iN] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Por otro lado, rescatamos la transformada de Fourier de una exponencial compleja, que viene dada por:

$$e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi i)$$

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Diezmado

Demostración de la transformada de un tren de deltas (Cont.)

Si aplicamos la transformada de Fourier en tiempo discreto, tenemos que:

$$T(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{t[n]\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{F}\{e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\} = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi i)$$

Finalmente, podemos simplificar a un solo sumatorio equivalente a los dos anteriores donde las deltas de Dirac están separadas en $\frac{2\pi}{N}$, por lo que la DTFT del tren de deltas resulta en:

$$T(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) \quad \blacksquare$$

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Diezmado

- Por lo tanto, tenemos que:

$$V(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \circledast_{2\pi} T(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j(\lambda)}\right) T(e^{j(\omega-\lambda)})d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j(\lambda)}\right) \frac{2\pi}{N}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega-\lambda-\frac{2\pi}{N}i\right) d\lambda$$

$$\stackrel{1}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{2\pi} X\left(e^{j(\lambda)}\right) \delta\left(\omega-\lambda-\frac{2\pi}{N}i\right) d\lambda = \ldots$$

[1]Puesto que, entre 0 y 2π, solo corresponden las deltas entre $i=0$ y $i=N-1$.

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Diezmado

(Continuación)

$$\ldots \stackrel{2}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{2\pi} X\left(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi}{N}i\right)}\right)\delta\left(\omega-\lambda-\frac{2\pi}{N}i\right)d\lambda$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} X\left(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi}{N}i\right)}\right)\underbrace{\int_{2\pi}\delta\left(\omega-\lambda-\frac{2\pi}{N}i\right)d\lambda}_{=1}$$

- Así pues, la transformada de la secuencia diezmada queda como:

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{N}-\frac{2\pi}{N}i\right)}\right)}$$

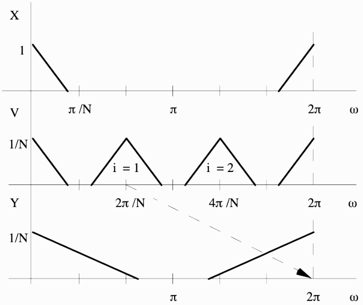
[2] Puesto que las deltas no se anulan solo para $\omega-\lambda-\frac{2\pi}{N}i=0 \implies \lambda=\omega-\frac{2\pi}{N}i$.

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Diezmado

- A continuación, representamos gráficamente el proceso de diezmado en frecuencia para el ejemplo anterior con $N = 3$:

- Podemos ver que la transformada de $v[n]$ resulta de la superposición de la transformada de $x[n]$ con réplicas de esta desplazadas en los múltiplos enteros de $2\pi/N$: $i = 1,\ i = 2,\ \ldots$



- Se produce una **expansión** del eje de frecuencias ($\omega \to \omega/N$).

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Diezmado

- Así pues, cuando la señal que se diezma tiene componentes frecuenciales por encima de π/N, las distintas réplicas desplazadas de $X(e^{j\omega})$ (alias) se solapan, lo que provoca una **distorsión** de la composición frecuencial de $y[n]$.
- Para evitar este fenómeno de ***aliasing***, se aplica previamente un **filtrado paso bajo** que permite acondicionar (limitar la banda) de la señal $x[n]$ por debajo de π/N antes de proceder al diezmado:

$$x[n] \longrightarrow \underbrace{\boxed{h[n]}}_{\text{filtrado previo}} \longrightarrow \underbrace{\boxed{\downarrow N}}_{\text{diezmado}} \longrightarrow y[n]$$

donde $h[n]$ es un filtro paso bajo con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/N$ y ganancia $H(1) = 1$ (para no modificar la energía de la señal).

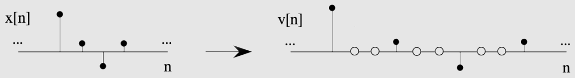
Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Interpolación

- La interpolación es la operación inversa del diezmado y consiste en **añadir muestras** a una secuencia, lo que se relaciona con el **incremento de la frecuencia de muestreo**:
- El proceso de interpolación consta de dos etapas:
  1) Una 'expansión' de la secuencia por la cual se intercalan $N-1$ muestras nulas entre dos muestras de la secuencia original $x[n]$:

$$x[n] \longrightarrow \underset{\text{intercalado}}{\boxed{\uparrow N}} \longrightarrow v[n]$$

Ejemplo para $N = 3$



Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Interpolación

2) La 'interpolación' propiamente dicha de los valores intermedios a partir de estos ceros intercalados; esto se consigue mediante un filtrado paso bajo, que permite 'transformar' dichos ceros:

$$x[n] \longrightarrow \underbrace{\boxed{\uparrow N}}_{\text{intercalado}} \longrightarrow v[n] \longrightarrow \underbrace{\boxed{h[n]}}_{\text{filtrado}} \longrightarrow y[n]$$

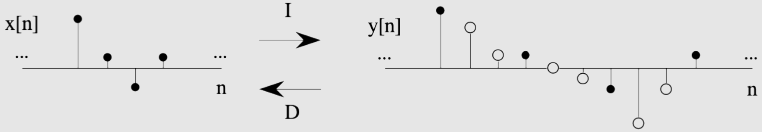
donde $h[n]$ es un filtro paso bajo, denominado **filtro interpolador**, con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/N$ y ganancia $H(1) = N$ (para no modificar la energía de la señal); su respuesta impulsional es, pues:

$$h[n] = N\frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}n\right) = N\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} = \frac{\sin(\frac{\pi}{N}n)}{\frac{\pi}{N}n}$$

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Interpolación

Ejemplo para $N = 3$



- De este modo, el interpolador se puede usar, por ejemplo, para recuperar una secuencia previamente diezmada.
- Para analizar el proceso de interpolación en el dominio frecuencial introducimos la secuencia intermedia $v[n]$ tal que:

$$v[n] = \begin{cases} x[n/N], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{otro } n \end{cases}$$

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Interpolación

- Obtenemos ahora la transformada de Fourier de la secuencia interpolada:

$$Y(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

donde $H(e^{j\omega})$ es el mencionado filtro paso bajo y donde

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[n]e^{-j\omega n} \overset{n=mN}{\overset{\downarrow}{=}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[mN]e^{-j\omega mN}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega Nm} = X(e^{j(\omega N)})$$

- Finalmente:

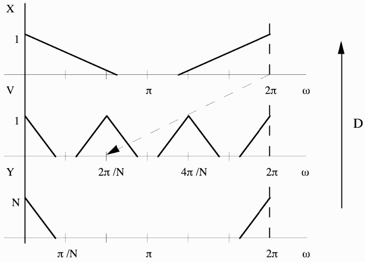
$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = X\left(e^{j(\omega N)}\right) H(e^{j\omega})}$$

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Interpolación

- A continuación, representamos gráficamente el proceso de interpolación en frecuencia para el ejemplo anterior con $N = 3$:

- El filtro interpolador $h[n]$ elimina las réplicas (en el dominio frecuencial) de la transformada de $x[n]$ centradas en los múltiplos enteros de $2\pi/N$: $i = 1,\ i = 2,\ \ldots$



- Se produce una **contracción** del eje de frecuencias ($\omega \to \omega N$).

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Interpolación

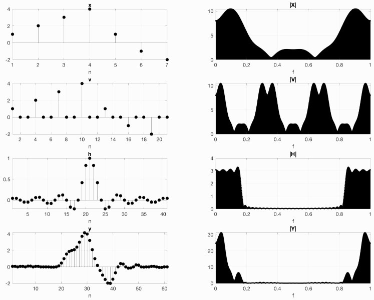
- Podemos analizar qué ocurre con el proceso de interpolación mediante el siguiente código de MATLAB™:

```
N=3; % factor de interpolación
n=-20:20; % eje dominio temporal
n=n+eps; % para evitar indeterminaciones en cero
h=sin((pi/N)*n)./((pi/N)*n); % filtro interpolador
x=[1 2 3 4 1 -1 -2]; % secuencia original
v=kron(x,[1 0 0]); % secuencia intermedia (intercalamos ceros)
y=conv(v,h); % secuencia interpolada (filtrado)
Nk=1024; % resolución DFT
k=linspace(0,1,Nk); % eje dominio frecuencial (f de 0 a 1)
X=fft(x,Nk);H=fft(h,Nk);V=fft(v,Nk);Y=fft(y,Nk); % transformadas
```

Respuesta frecuencial

Diezmado e interpolación – Interpolación

- Con las correspondientes comandos de `stem` de MATLAB™ obtendríamos la siguiente gráfica:




```
figure;
subplot(4,2,1); stem(x,'filled','k');
axis([1 length(x) min(x) max(x)]);
title('x'); grid on; xlabel('n');
subplot(4,2,3); stem(v,'filled','k');
axis([1 length(v) min(v) max(v)]);
title('v'); grid on; xlabel('n');
subplot(4,2,5); stem(h,'filled','k');
axis([1 length(h) min(h) max(h)]);
title('h'); grid on; xlabel('n');
subplot(4,2,7); stem(y,'filled','k');
axis([1 length(y) min(y) max(y)]);
title('y'); grid on; xlabel('n');
subplot(4,2,2); stem(k,abs(X),'.','k');
title('|X|'); grid on; xlabel('f');
subplot(4,2,4); stem(k,abs(V),'.','k');
title('|V|'); grid on; xlabel('f');
subplot(4,2,6); stem(k,abs(H),'.','k');
title('|H|'); grid on; xlabel('f');
subplot(4,2,8); stem(k,abs(Y),'.','k');
title('|Y|'); grid on; xlabel('f');
```

Tabla de contenidos

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Bibliografía recomendada

Referencias

- ***Señales y Sistemas*, Hwei P.Hsu, versión web** [Ingebook]

  9. Densidad de potencia espectral y señales aleatorias en sistemas lineales [PDF]

- ***Tratamiento digital de señales*, John G.Proakis, Dimitris G.Manolakis, 4a. edición** [Ingebook]

  2.6 Correlación de señales discretas en el tiempo (p.103-112)

  5.3 Espectros y funciones de correlación en la salida de los sistemas LTI (p.288-291)

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Introducción

- En esta sección vamos a introducir el concepto de correlación entre secuencias, que proporciona una información sobre el grado de similitud entre estas.
- Podemos hablar de **correlación cruzada** si comparamos dos secuencias $x[n]$ e $y[n]$ diferentes o bien de **autocorrelación** si comparamos una secuencia consigo misma.
- Si analizamos la correlación en el dominio frecuencial, obtendremos las correspondientes **densidades espectrales**, de **energía** o de **potencia** en función del tipo de secuencia analizada.
- Estas densidades o **espectros** son muy útiles para conocer como se distribuye la energía o potencia, según el caso, entre las distintas componentes frecuenciales de la señal.

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Correlación cruzada

- Sean $x[n]$ e $y[n]$ dos secuencias de **energía finita**; se define la **distancia** entre $y[n]$ y $x[n+m]$, una versión desplazada de $x[n]$, a la energía de su diferencia:

$$D[m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n+m] - y[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n+m] - y[n])(x[n+m] - y[n])^*$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n+m]|^2}_{E_x} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y[n]|^2}_{E_y} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n+m]y^*[n]}_{r_{xy}[m]} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]x^*[n+m]}_{r_{yx}[-m]}$$

dónde $r_{xy}[m]$ se define como la **correlación cruzada** entre x e y:

$$r_{xy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n+m]y^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y^*[n-m] = x[m] * y^*[-m]$$

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Correlación cruzada

- Por otro lado, la correlación cruzada entre y e x viene dada por:

$$r_{yx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n+m]x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]x^*[n-m] = y[m] * x^*[-m]$$

- Se puede comprobar, por tanto, que:

$$r_{xy}[m] = r_{yx}^*[-m]$$

- En el caso de trabajar con secuencias reales, entonces se cumple que $r_{yx}^*[-m] = r_{yx}[-m] = r_{xy}[m]$, por lo que la anterior expresión de distancia se simplifica a:

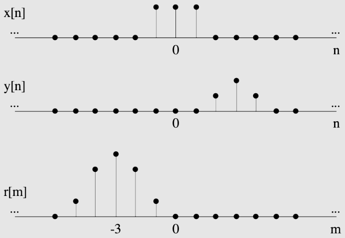
$$D[m] = E_x + E_y - 2r_{xy}[m]$$

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Correlación cruzada

Ejemplo

Correlación cruzada $r_{xy}[m]$ entre dos secuencias $x[n]$ e $y[n]$:



En este caso, el valor máximo (conocido como "pico de la correlación") ocurre para $m = -3$.

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Correlación cruzada

- Podemos analizar la operación de correlación mediante el siguiente código MATLAB™. Remarcar que el comando `xcorr` realiza un *zero-padding* de la secuencia más corta (en este caso `x`), mientras que la convolución devuelve la suma de las longitudes menos uno.

```
% proceso-correlacion-ejemplo-matlab
x=[1 1 1];
y=[1 2 3 4];
% Correlación cruzada entre 'x' e 'y':
rxy=xcorr(x,y); % resultado: [4 7 9 6 3 1 0]
% Mediante la operación de convolución:
rxy_conv=conv(x,fliplr(conj(y))); % resultado: [4 7 9 6 3 1]
% Correlación cruzada entre 'y' e 'x':
ryx=xcorr(y,x); % igual a rxy ya que las secuencias son reales
```

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Autocorrelación

- Al comparar una secuencia consigo mismo obtenemos la **autocorrelación**:

$$r_x[m] \triangleq x[m] * x^*[-m] = r_x^*[-m]$$

- La autocorrelación proporciona una información cualitativa de la similitud entre las muestras de la secuencia:

$$D[m] = \sum_{n=\infty}^{\infty} |x(n) - x[n-m]|^2 = 2E_x - r_x[m] - r_x[-m]$$
$$= 2E_x - r_x[m] - r_x^*[m] = 2(E_x - \Re\{r_x[m]\})$$

- En ocasiones, para la autocorrelación se utiliza la notación $r_{xx}[m]$.

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Propiedades

- Veamos a continuación algunas de las propiedades de la correlación.
- La **autocorrelación de la suma** de dos secuencias viene dada por:

$$
\begin{aligned}
r_{x+y}[m] &= (x[m]+y[m]) * (x[-m]+y[-m])^* \\
&= \underbrace{x[m]*x^*[-m]}_{r_x[m]} + \underbrace{y[m]*y^*[-m]}_{r_y[m]} + \underbrace{x[m]*y^*[-m]}_{r_{xy}[m]} + \underbrace{y[m]*x^*[-m]}_{r_{yx}[m]} \\
&= r_x[m]+r_y[m]+r_{xy}[m]+r_{yx}[m]
\end{aligned}
$$

- Si $r_{xy}[m]=r_{yx}[m]=0$ se dice que las secuencias $x[n]$ e $y[n]$ son **incorreladas**, y entonces $r_{x+y}[m]$ es simplemente la suma de las autocorrelaciones de $x[n]$ e $y[n]$.

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Propiedades

- Para un sistema definido por la respuesta impulsional $h[n]$ tal que:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

la correlación entre la entrada y la salida viene dada por:

$$r_{xy}[m] = x[m] * y^*[-m] = x[m] * (x^*[-m] * h^*[-m]) = r_x[m] * h^*[-m]$$
$$r_{yx}[m] = y[m] * x^*[-m] = (x[m] * h[m]) * x^*[-m] = r_x[m] * h[m]$$

- La autocorrelación a la salida es:

$$\begin{aligned} r_y[m] &= y[m] * y^*[-m] = (x[m] * h[m]) * (x[m] * h[m])^* \\ &= r_x[m] * h[m] * h^*[-m] = r_x[m] * r_h[m] \end{aligned}$$

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Propiedades

- Entre las **propiedades** más importantes de la autocorrelación cabe destacar:

- Energía: $|r_x[m]| \leq r_x[0] = E_x$
- Simetría: $r_x[m] = r_x^*[-m]$
- Señal real: $x[n]$ real $\implies r_x[m]$ real y par
- Modulación: $x[n]e^{j\omega_0 n} \implies r_x[m]e^{j\omega_0 m}$

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Propiedades

- La autocorrelación es útil para predecir el valor de una muestra futura a partir de la muestra presente.

Ejemplo

Si planteamos el estimador lineal $\hat{x}[n+1] = a_1 x[n]$, siendo $x[n]$ real, y escogemos a_1 de modo a minimizar el error cuadrático medio (MSE) de $e[n+1] = x[n+1] - \hat{x}[n+1] = x[n+1] - a_1 x[n]$, es decir:

$$E_e = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |e[n]|^2 = E_x + a_1^2 E_x - 2a_1 r_x[1]$$

obtenemos que:

$$\frac{dE_e}{da_1} = 2a_1 E_x - 2r_x[1] = 0 \implies a_1 = \frac{r_x[1]}{E_x} = \frac{r_x[1]}{r_x[0]}, \; E_e = (1 - a_1^2) E_x$$

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Densidad espectral de energía

- Si realizamos la transformada de Fourier de la autocorrelación de una secuencia $x[n]$, obtenemos:

$$\mathcal{F}\{r_x[m]\} = \mathcal{F}\{x[m] * x^*[-m]\} = X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2$$

  es decir, el cuadrado del módulo de la transformada de la secuencia.

- La transformada $S_x(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2$ recibe el nombre de **densidad espectral de energía**, pues que su integración da como resultado la energía de la secuencia:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \overset{\overset{\text{Parseval}}{\downarrow}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = E_x$$

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Densidad espectral de energía

- Podemos interpretar la densidad espectral de energía como la **distribución de energía** de la secuencia entre las distintas componentes frecuenciales, en cuanto al **módulo** se refiere.
- Así pues, para un sistema tal que $x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$, obtenemos las siguientes densidades espectrales de energía:

$$S_{xy}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_{xy}[m]\} = \mathcal{F}\{r_x[m] * h^*[-m]\} = S_x(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})$$
$$S_{xy}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_{yx}[m]\} = \mathcal{F}\{r_x[m] * h[m]\} = S_x(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$
$$S_y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_y[m]\} = \mathcal{F}\{r_x[m] * r_h[m]\} = S_x(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2$$

- La información contenida en la **fase** de la transformada está relacionada con la **forma de onda**; para conservar la forma de onda original, es preciso utilizar un sistema cuya respuesta frecuencial presente **fase lineal** en la banda de frecuencias de la señal.

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Secuencias de potencia media finita

- Las secuencias de potencia media finita poseen energía infinita, por lo que es necesario modificar también las definiciones de distancia y correlación aplicadas anteriormente a las secuencias de energía finita.
- Sea $x[n]$ una secuencia de potencia media finita, que al enventanarla por $v_N[n]$ resulta en una secuencia $x_N[n] = x[n]v_N[n]$ de energía finita, a la que podemos aplicar las definiciones anteriores de correlación y densidad espectral de energía:

$$r_{x_N}[m] = x_N[m] * x_N^*[-m] \quad \text{y} \quad S_{x_N}(e^{j\omega}) = F\{r_{x_N}[m]\}$$

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Secuencias de potencia media finita

- Para obtener la autocorrelación de la secuencia de potencia media finita $x[n]$ aplicamos el límite para $N \to \infty$:

$$r_x[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} r_{x_N}[m]$$

- La **densidad espectral de potencia** (PSD, *Power Spectral Density*), se obtiene también como el límite:

$$S_x(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} S_N(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} F\{r_{x_N}[m]\} = F\{r_x[m]\}$$

- Y, de forma equivalente:

$$P_x = r_x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega}) d\omega$$

Respuesta frecuencial

Correlación y espectro – Secuencias de potencia media finita

- Asimismo es posible extrapolar las relaciones aplicadas anteriormente a un sistema con respuesta impulsional $h[n]$, tal que $y[n] = x[n] * h[n]$:

$$\begin{aligned} r_{xy}[m] &= r_x[m] * h^*[-m] \\ r_y[m] &= r_x[m] * h[m] * h^*[-m] = r_x[m] * r_h[m] \\ S_y(e^{j\omega}) &= S_x(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2 \end{aligned}$$

- Así pues, por analogía con la densidad espectral de energía, la densidad espectral de potencia puede interpretarse como la **distribución de la potencia media** entre las distintas componentes frecuenciales de la señal.