PRUEBA PARCIAL – ENERO 2017
102712 Señales y Sistemas Discretos

Profesores: Gonzalo Seco Granados, José A. Del Peral

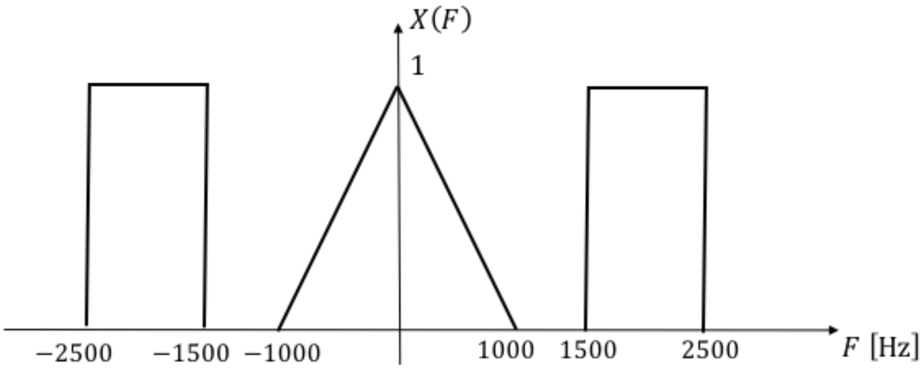
Instrucciones: 120 minutos. Ponga el nombre y el NIU en todas las hojas. Entregue cada cuestión en una hoja o cara diferente y ordenadas.

Cuestión 1 (2 puntos)
Considere el sistema LTI con respuesta impulsional

$$h[n] = \left(\frac{1}{a}\right)^n u[n].$$

Determine la respuesta a la entrada $x[n] = \left(\frac{1}{b}\right)^n u[n]$. Los valores a y b cumplen $|a| > 1$ y $|b| > 1$.

Cuestión 2 (1 punto)
Determine la mínima frecuencia de muestreo para que no se produzca aliasing (o sea, solapamiento espectral) al muestrear la señal analógica cuya transformada de Fourier viene dada por la figura siguiente. Dibuje también la transformada de Fourier $X(e^{j2\pi f})$ de la señal discreta resultante cuando se utiliza la frecuencia de muestreo que ha determinado.



Cuestión 3 (1 punto)
Calcule la densidad espectral de energía de la señal $x[n] = u[n] - u[n-4]$. Recuerde que $u[n]$ es la señal escalón.

Cuestión 4 (1 punto)
Calcule los valores de a y b para que el módulo de la respuesta frecuencial del sistema $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$ sea plano en frecuencia, o sea, que $\left|H\left(e^{j2\pi f}\right)\right| = \text{constante}, \ \forall f$.
El sistema $h_1[n]$ tiene función de transferencia

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{12}z^{-1} - \frac{1}{12}z^{-2}}$$

El sistema $h_2[n]$ tiene función de transferencia

$$H_2(z) = 1 + az^{-1} + bz^{-2}$$

La solución trivial $a = b = -1/12$ no es válida.

Cuestión 5 (1 punto)
Calcule la DFT de $N = 8$ puntos de la señal $x[n] = \{\underline{-2}, 1,1,1,1,1,1,1\}$.

Cuestión 6 (4 puntos)
La función de transferencia $H(z)$ de un sistema lineal, invariante y estable tiene un cero en $c_1 = -\frac{2}{5}$ y dos polos en $d_1 = \frac{1}{2}$ y $d_2 = -\frac{3}{4}$. La respuesta del sistema a frecuencia cero vale $H\left(e^{j2\pi f}\right)\Big|_{f=0} = 3.2$.

a) Dibuje el diagrama de polos y ceros, e indique su región de convergencia.
b) Calcule la función de transferencia $H(z)$ del sistema.
c) Dibuje un diagrama de bloques que implemente el sistema en cuestión.
d) Calcule la respuesta $y[n]$ del sistema cuando la entrada es

$$x[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

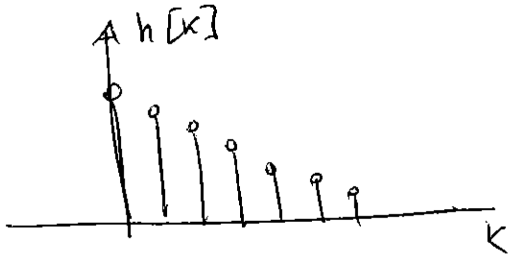
EXAMEN SSD - ENERO 2017

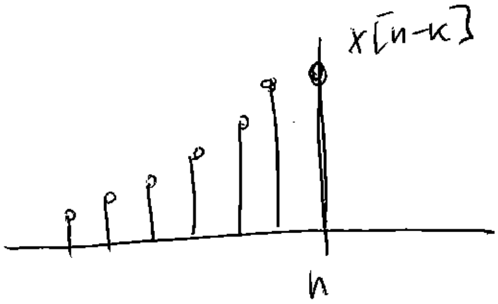
Cuestió 1

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k u[k] \left(\frac{1}{b}\right)^{n-k} u[n-k] =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{para } n \geq 0}}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a}\right)^k \left(\frac{1}{b}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{b}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k$$





$$y[n] = \left(\frac{1}{b}\right)^n \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{b}{a}} = \frac{1}{1-\frac{b}{a}} \left(\frac{1}{b}\right)^n -$$

$$- \frac{b/a}{1-b/a} \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad n \geq 0$$

$$y[n] = \frac{1}{1-b/a} \left(\frac{1}{b}\right)^n u[n] - \frac{b/a}{1-b/a} \left(\frac{1}{a}\right)^n u[n]$$

Otra manera:

(2)

$$Y(z) = X(z)\,H(z)$$

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{b}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{b}$$

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{a}$$

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{b}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{a}z^{-1}\right)} = \frac{A}{1-\frac{1}{b}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}$$

$$A = \left.\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{b}} = \frac{1}{1-b/a}$$

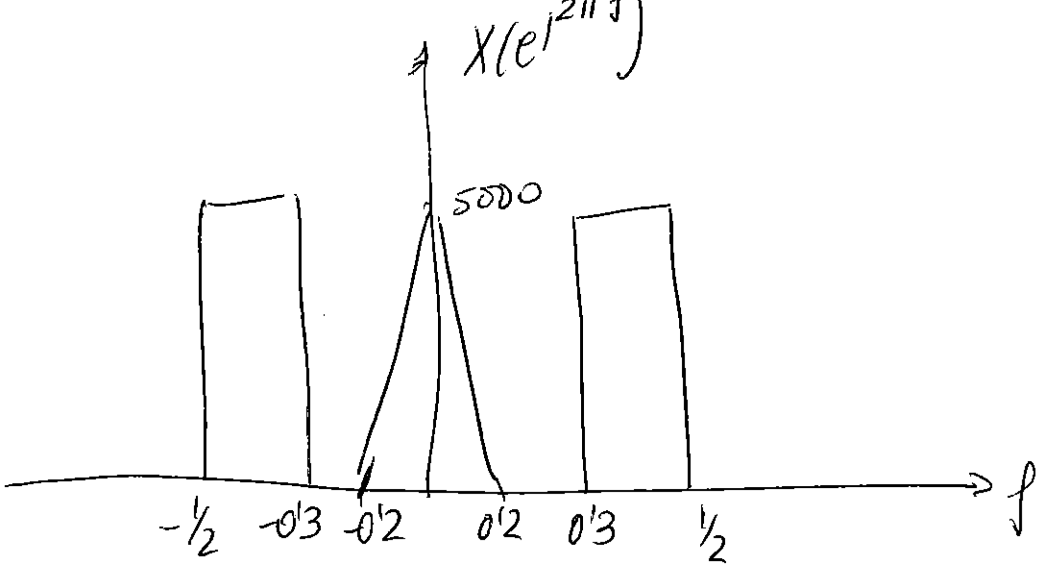
$$B = \left.\frac{1}{1-\frac{1}{b}z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{a}} = \frac{1}{1-a/b} = -\frac{b/a}{1-b/a}$$

$$y[n] = TZ^{-1}\{Y(z)\} = \frac{1}{1-b/a}\left(\frac{1}{b}\right)^n u[n] - \frac{b/a}{1-b/a}\left(\frac{1}{a}\right)^n u[n]$$

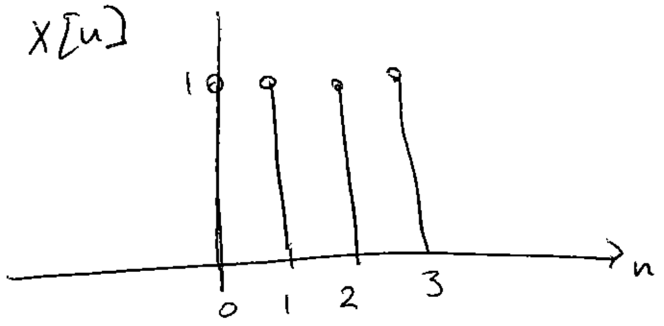
CUESTIÓN 2

$F_{s,min} = 5000\ Hz$

$$X(e^{j2\pi f}) = F_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{f}{F_s} - k\right)$$



CUESTIÓN 3



Pulso rectangular de 4 muestras.

$$X(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=0}^{3} e^{-j2\pi f n} = \frac{1-e^{-j2\pi f \cdot 4}}{1-e^{-j2\pi f}} =$$

$$= \frac{e^{-j2\pi f 2}}{e^{-j\pi f}} \frac{e^{j2\pi f \cdot 2} - e^{-j2\pi f 2}}{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}} = e^{-j3\pi f} \frac{\sin(4\pi f)}{\sin(\pi f)}$$

$$S_{xx}(e^{j2\pi f}) = \left| X(e^{j2\pi f}) \right|^2 = \left(\frac{\sin(4\pi f)}{\sin(\pi f)} \right)^2$$

porque x[n] es una señal de energía finita.

CUESTIÓN 4

Un sistema pasa-todo tiene módulo de la respuesta frecuencial constante. Hay que poner los ceros de $H_2(z)$ en las posiciones adecuadas para que $H(z) = H_1(z)\,H_2(z)$ sea un sistema pasa-todo.

Polos de $H_1(z)$:

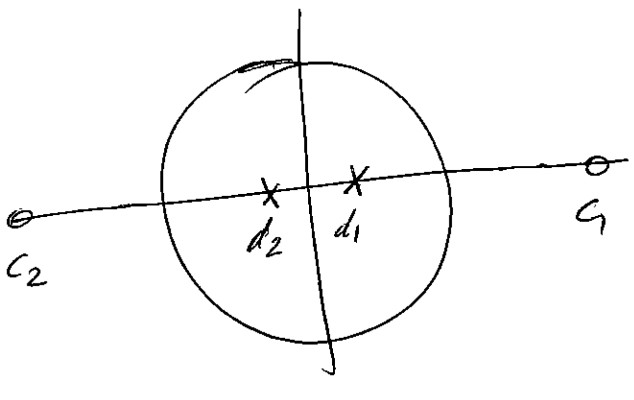
$$1 - \frac{1}{12} z^{-1} - \frac{1}{12} z^{-2} = 0$$

$$z^2 - \frac{1}{12} z - \frac{1}{12} = 0$$

$$z = \frac{\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{12^2} + \frac{4}{12}}}{2} = \frac{\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{49}{12^2}}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{12} \pm \frac{7}{12}}{2} \to \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \qquad d_1 = \frac{1}{3}$$

$$\to \frac{-6}{24} = -\frac{1}{4} \qquad d_2 = -\frac{1}{4}$$



$H_2(z)$ tiene que tener los ceros en

$$c_1 = \frac{1}{d_1^*} = 3$$

$$c_2 = \frac{1}{d_2^*} = -4$$

$$H_2(z) = \left(1 - 3z^{-1}\right)\left(1 + 4z^{-1}\right) = 1 + z^{-1} - 12z^{-2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ por lo tanto, $\underline{\underline{a = 1, \; b = -12}}$

Cuestión 5

$$x[n] = \{-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

La DFT se puede calcular como

$$X[k] = \sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k = 0 \dots 7$$

Pero los cálculos son más sencillos si se aprovechan algunas propiedades:

$$x[n] = \underbrace{\{-3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}}_{x_1[n]} + \underbrace{\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}}_{x_2[n]}$$

La DFT de $x_1[n]$ y de $x_2[n]$ son triviales.

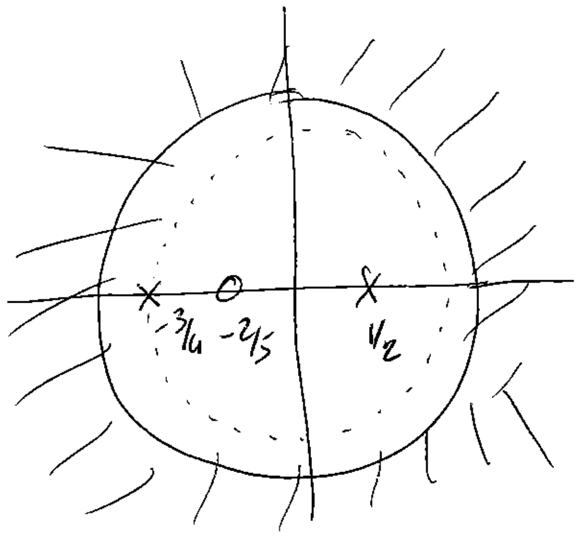
$$X_1[k] = -3, \quad k = 0 \dots 7$$

$$X_2[k] = \begin{cases} 8, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

$$X[k] = X_1[k] + X_2[k] = \{5, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3\} = \begin{cases} 5, & \text{si } k = 0 \\ -3, & \text{si } k = 1 \dots 7 \end{cases}$$

Cuestión 6

a)



$c_1 = -2/5$

$d_1 = 1/2$

$d_2 = -3/4$

ROC: $|z| > 3/4$, dado que la ROC ha de incluir el círculo unidad por ser un sistema estable.

b)

$$H(z) = b_0 \frac{\left(1 + \frac{2}{5} z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 + \frac{3}{4} z^{-1}\right)}$$

Para determinar la constante b_0, utilizamos que

$$H\left(e^{j2\pi f}\right)\Big|_{f=0} = H(z)\Big|_{z=1} = 3'2$$

$$b_0 \frac{\left(1 + \frac{2}{5}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{4}\right)} = 3'2 \quad \Rightarrow \quad \underline{b_0 = 2}$$

Cuestión 6

c)

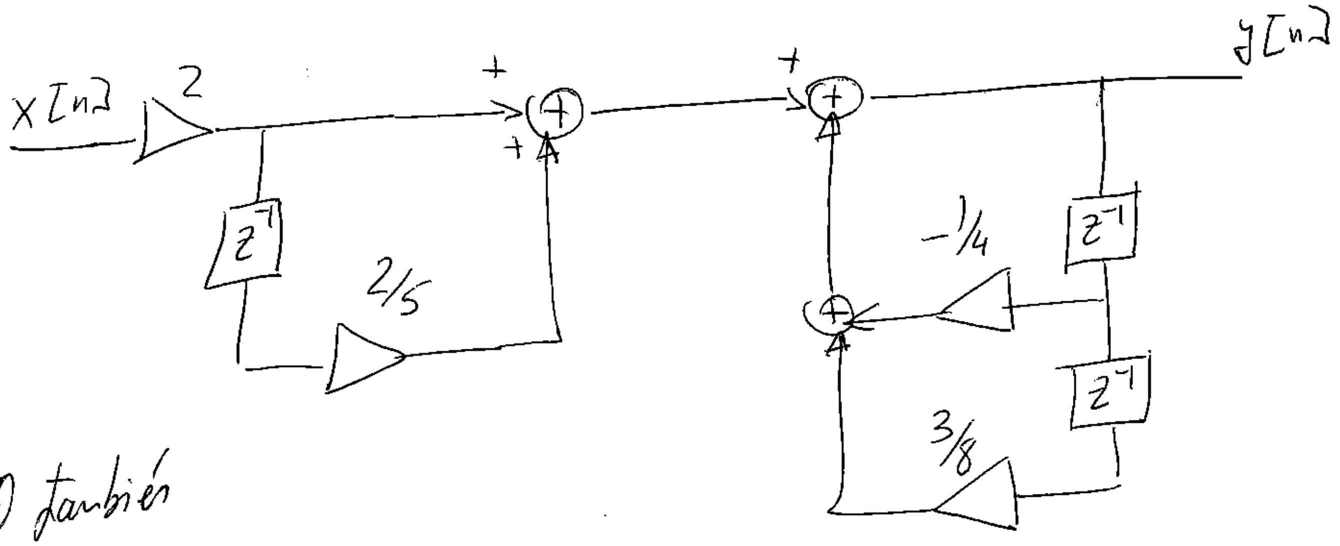
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 2\,\frac{1+\frac{2}{5}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}$$

$$Y(z)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}\right) = X(z)\,2\cdot\left(1+\frac{2}{5}z^{-1}\right)$$

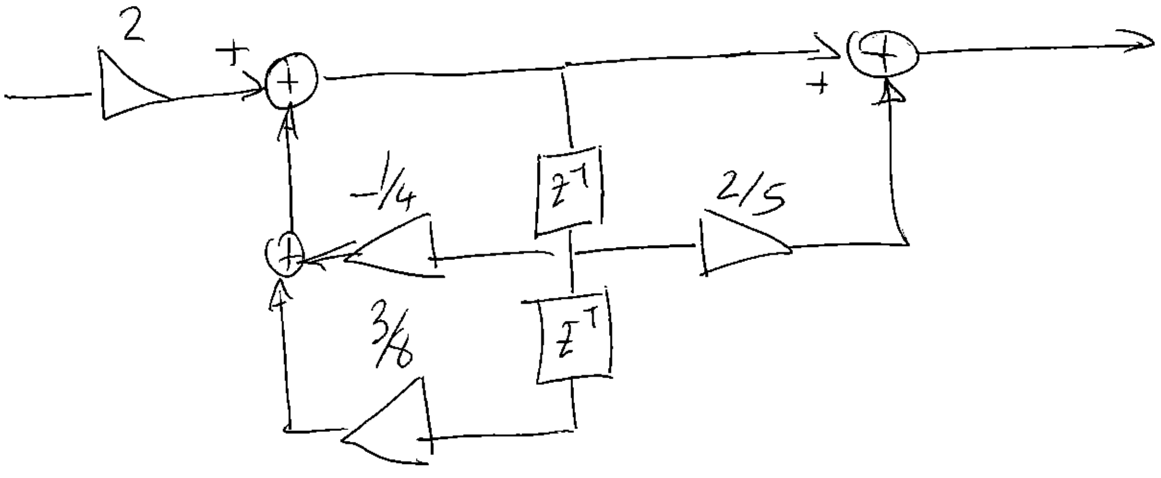
$\downarrow TZ^{-1}$, Transformada Z inversa

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] = 2\left(x[n] + \frac{2}{5}x[n-1]\right)$$

$$y[n] = -\frac{1}{4}y[n-1] + \frac{3}{8}y[n-2] + 2x[n] + 2\,\frac{2}{5}\,x[n-1]$$



O también



Cuestió 6

d)

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{2\left(1+\frac{2}{5}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)} \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{C}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$A = \left.\frac{2\left(1+\frac{2}{5}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{18/5}{\frac{10}{4}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{\overset{6}{\cancel{18}}\cdot 4\cdot\cancel{2}}{5\cdot\underset{5}{\cancel{10}}\cdot\cancel{3}} =$$

$$= \frac{24}{25} = 0'96$$

$$B = \left.\frac{2\left(1+\frac{2}{5}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right|_{z=-\frac{3}{4}} = \frac{2\cdot\frac{7}{15}}{\frac{10}{6}\cdot\frac{8}{12}} = \frac{2\cdot\frac{7}{15}}{\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot 7\cdot\cancel{3}\cdot 3}{\underset{5}{\cancel{15}}\cdot 5\cdot\cancel{2}} = \frac{21}{25} = 0'84$$

$$C = \left.\frac{2\left(1+\frac{2}{5}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}\right|_{z=-\frac{1}{4}} = \frac{2\ \frac{-3}{5}}{\frac{6}{2}\ \frac{-8}{4}} = \frac{2\cdot 3/5}{3\cdot 2} = \frac{1}{5} =$$

$$= 0'2$$

$$y[n] = \frac{24}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{21}{25}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n] + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$