

Señales y Sistemas Discretos

Rafael Terris Gonzalo Seco

Universitat Autònoma de Barcelona

30 de diciembre de 2021



Esta obra está bajo una licencia de *Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional*.



Tabla de contenidos

Muestreo y reconstrucción

- Muestreo periódico
- Representación frecuencial del muestreo
- Modificación de la frecuencia de muestreo
- Reconstrucción de señales en banda limitada



Muestreo y reconstrucción

Muestreo periódico – Bibliografía recomendada

Referencias

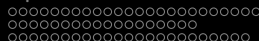
- ***Tratamiento digital de señales*, John G.Proakis, Dimitris G.Manolakis, 4a. edición** [[Ingebook](#)]
1.4 Conversiones analógica-digital y digital-analógica (p.17-32)
- ***Tratamiento de señales en tiempo discreto*, Alan V.Oppenheim, Ronald W.Schafer, 4a. edición** [[Ingebook](#)]
4. Muestreo de señales en tiempo discreto (p.152-235)



Muestreo y reconstrucción

Muestreo periódico – Introducción

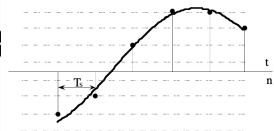
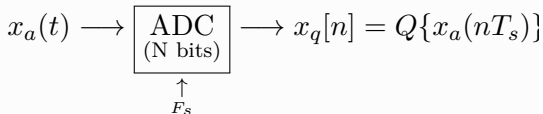
- Si bien las señales digitales se pueden generar de muchas formas, el tratamiento digital de señales (TDS) se aplica comúnmente dentro de un **entorno analógico**, donde tanto la entrada como la salida de un sistema digital dado son señales analógicas.
- Primero se convierte la señal analógica en una señal digital mediante un proceso de **conversión A/D** (analógico-digital).
- Una vez realizado el procesamiento digital en el sistema, es necesario realizar la operación inversa de **conversión D/A** (digital-analógico) para obtener de nuevo una señal analógica.
- Dentro del entorno digital, es habitual también **modificar la frecuencia de muestreo** para adaptar la señal a las necesidades de cada bloque que compone el sistema.



Muestreo y reconstrucción

Muestreo periódico – Conversión A/D

- En esta sección analizaremos la etapa de conversión A/D, que implica un proceso de **muestreo** y un proceso de **cuantificación**.
- El convertidor A/D o ADC (*Analog to Digital Converter*) es un dispositivo electrónico que genera una secuencia $x_q[n]$ con dominio y rango discretos a partir de una señal analógica $x_a(t)$ con dominio continuo:



donde F_s [Hz] es la **frecuencia de muestreo**, $T_s = 1/F_s$ [s] es el **periodo de muestreo** y $Q\{.\}$ es la función (no lineal) de cuantificación que representa la muestra adquirida con N bits.



Muestreo y reconstrucción

Muestreo periódico – Conversión A/D

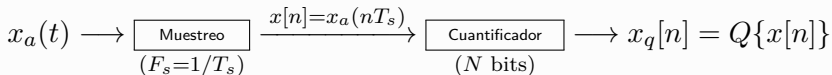
- El ADC se rige, pues, por dos parámetros principales: la frecuencia de muestreo F_s y el número de bits N ; cuanto más grandes sean, mayor será la complejidad y el coste del dispositivo de conversión.
- La **frecuencia de muestreo** determina el ancho de banda máximo de la señal de entrada $x_a(t)$ que podemos convertir sin perder información, garantizando que podemos volver a recuperarla en un posterior proceso de conversión D/A (según el criterio de Nyquist).
- El número de bits determina la **resolución del cuantificador** y el **error de cuantificación** $e_q[n] = x_a(nT_s) - Q\{x_a(nT_s)\}$ que se comete a su salida; para un convertidor uniforme típico de N bits: $|e_q[n]| \leq \frac{\Delta V/2}{2^N}$, donde ΔV es el margen dinámico del convertidor.



Muestreo y reconstrucción

Muestreo periódico – Conversión A/D

- Si bien las operaciones dentro del ADC se pueden realizar en distinto orden, en la práctica se realiza primero el muestreo y luego la cuantificación; así pues, desde el punto de vista conceptual podemos representar el convertidor como:



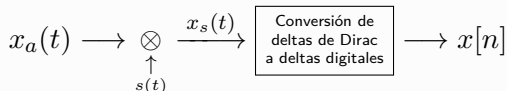
- La secuencia $x[n]$ tiene, pues, dominio discreto; el rango será continuo o discreto en función del rango de la señal $x_a(t)$.
- En realidad, el ADC también realiza un último proceso de codificación, que convierte los valores discretos que se obtienen a salida del cuantificador de una secuencia binaria de bits (01001...).



Muestreo y reconstrucción

Muestreo periódico – Muestreo periódico en el dominio temporal

- Si analizamos matemáticamente el proceso de muestreo en el dominio temporal desde el plano teórico (nos será útil para entender lo que ocurre en el dominio frecuencial), podemos dividirlo en dos etapas:



- La señal $s(t)$ es un tren de impulsos con periodo T_s , motivo por el cual hablamos en este caso de **muestreo periódico**¹.

¹Cabe señalar que existen otro tipo de muestreos, como el muestreo aperiódico o el muestreo adaptativo, usados en determinadas aplicaciones.



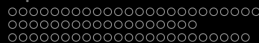
Muestreo y reconstrucción

Muestreo periódico – Muestreo periódico en el dominio temporal

- La primera etapa consiste, pues, en modular la señal analógica de entrada $x_a(t)$ con el tren de impulsos $s(t)$ en el dominio continuo:

$$\begin{aligned}
 x_s(t) &= x_a(t)s(t) = x_a(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_a(t)\delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_a(kT_s)\delta(t - kT_s) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta(t - kT_s)
 \end{aligned}$$

donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac, y $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$.



Muestreo y reconstrucción

Muestreo periódico – Muestreo periódico en el dominio temporal

- En la segunda etapa se realiza la conversión del tren de deltas de Dirac en el dominio continuo al tren de deltas digitales para obtener la secuencia $x[n]$ en el dominio discreto.





$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta(t - kT_s)$$

$$\xrightarrow[\delta(t) \rightarrow \delta[n]]{\uparrow} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k] = x[n]$$



Tabla de contenidos

Muestreo y reconstrucción

-  Muestreo periódico
-  Representación frecuencial del muestreo
-  Modificación de la frecuencia de muestreo
-  Reconstrucción de señales en banda limitada

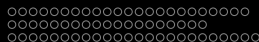


Muestreo y reconstrucción

Representación frecuencial del muestreo – Representación frecuencial

- Para analizar el proceso de muestreo periódico en el dominio frecuencial, nos fijamos primero en la primera etapa, donde solo intervienen señales analógicas (con dominio continuo, por tanto).
- Así pues, la transformada de Fourier en tiempo continuo de $x_s(t)$ viene dada por:

$$\begin{aligned}
 X_s(F) &= \mathcal{F}\{x_s(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\delta(t - nT_s)\right\} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\mathcal{F}\{\delta(t - nT_s)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)e^{-j2\pi F nT_s}
 \end{aligned}$$



Muestreo y reconstrucción

Representación frecuencial del muestreo – Representación frecuencial

Recordatorio

Recordemos que si $s(t)$ es un tren de deltas de Dirac separadas T_s en tiempo, su transformada de Fourier en tiempo continuo $S(F)$ es un tren de deltas de Dirac separadas $F_s = 1/T_s$ en el dominio frecuencial:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{\text{FT}} S(F) = F_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(F - nF_s)$$

De forma similar, si $t[n]$ es un tren de deltas discretas separadas en N muestras, su transformada de Fourier en tiempo discreto $T(e^{j\omega})$ es un tren de deltas de Dirac separadas $\frac{2\pi}{N}$ en el dominio frecuencial:

$$t[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} T(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$



Muestreo y reconstrucción

Representación frecuencial del muestreo – Representación frecuencial

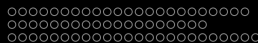
- Por otro lado, la anterior transformada también puede ser expresada en función de la señal original, teniendo en cuenta que:

$$x_s(t) = x_a(t)s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_s(F) = X_a(F) * S(F)$$

- De este modo encontramos la siguiente expresión alternativa:

$$X_s(F) = X_a(F) * \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(F - kF_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s)$$

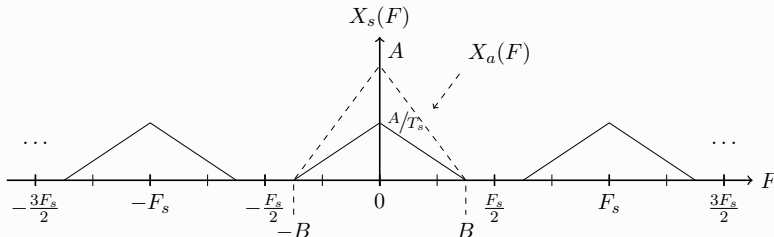
- Es decir, la transformada de Fourier de la señal modulada por el tren de impulsos consiste en **réplicas periódicas** de la transformada de Fourier de la señal de entrada original desplazadas múltiples enteros de la frecuencia de muestreo F_s .



Muestreo y reconstrucción

Representación frecuencial del muestreo – Representación frecuencial

- Esta última expresión nos es especialmente útil para interpretar el proceso de muestreo en el dominio frecuencial.
- Si representamos gráficamente de forma conceptual esta transformada suponiendo una señal de entrada de **banda limitada** con $B < F_s/2$, obtendríamos:

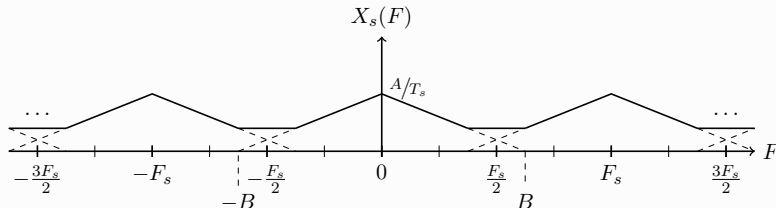




Muestreo y reconstrucción

Representación frecuencial del muestreo – Representación frecuencial

- En el caso de que la frecuencia de muestreo no sea al menos dos veces la frecuencia máxima de $X_a(F)$, es decir, $F_s < 2B$, entonces se produce una superposición entre las réplicas de la señal original que da lugar al conocido fenómeno de *aliasing*:



- En este caso, pues, se produce una **distorsión por solapamiento**; para evitarla, deberemos realizar un filtrado previo de la señal; si la señal no es de banda limitada, el *aliasing* no se puede evitar.



Muestreo y reconstrucción

Representación frecuencial del muestreo – Teorema del muestreo o de Nyquist-Shannon

- El conocido como **teorema del muestreo** o **teorema de Nyquist-Shannon** especifica que, si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x(t)$ de banda limitada es B (es decir, $X_a(F) = 0 \ \forall |F| \geq B$) y esta se muestrea a una frecuencia $F_s \geq 2B$, entonces $x(t)$ podrá recuperarse a partir de sus muestras mediante la función de interpolación $h(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt} = \text{sinc}(2Bt)$, que equivale a un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte B .
- A la frecuencia de muestreo $F_s = 2B$ se la denomina **frecuencia de Nyquist**, y cuando F_s es mayor o igual a este valor decimos que cumplimos con el criterio de Nyquist.



Muestreo y reconstrucción

Representación frecuencial del muestreo – Teorema del muestreo o de Nyquist-Shannon

- No obstante, la definición de ancho de banda suele depender del tipo de señal con el que estamos tratando; para una **señal real**, al presentar el módulo de su transformada una simetría par, se define como ancho de banda su frecuencia máxima (B).
- Para una **señal compleja**, sin embargo, al no presentar dicha simetría, se define como ancho de banda la diferencia entre sus frecuencias máxima y mínima (es decir, $B_2 - B_1$); para este caso, el teorema de muestreo indica que la frecuencia debe ser mayor o igual a este ancho de banda (no el doble).
- Para evitar confusiones, se recomienda hacer referencia al **soporte total** ΔB que ocupa una señal en frecuencia ($2B$ o $B_2 - B_1$); entonces **el criterio de Nyquist se cumple si** $F_s \geq \Delta B$.



Muestreo y reconstrucción

Representación frecuencial del muestreo – Relación entre dominios analógico y digital

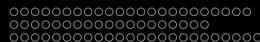
- Como hemos visto anteriormente, la transformada de Fourier en tiempo continuo de la señal $x_s(t)$ se podía expresar como:

$$X_s(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) e^{-j2\pi F n T_s} \quad \text{o} \quad X_s(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) e^{-j\Omega n T_s}$$

donde $\Omega = 2\pi F$ es la pulsación en el dominio analógico.

- Ahora representamos también la secuencia $x[n]$ en el dominio frecuencial, teniendo en cuenta que en este caso hemos de aplicar la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT):

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) e^{-j\omega n}$$



Muestreo y reconstrucción

Representación frecuencial del muestreo – Relación entre dominios analógico y digital

- Si comparamos ambas transformadas, podemos establecer las siguientes relaciones entre los dominios analógico y digital:

$$\omega = \Omega T_s = \frac{\Omega}{F_s} \quad [\text{radianes/muestra}]$$

$$f = F T_s = \frac{F}{F_s} \quad [\text{ciclos/muestra}]$$

- Observamos, por tanto, que:

$$X(e^{j\omega}) = X_s(F) \Big|_{F=\omega/2\pi T_s} = X_s\left(\frac{\omega}{2\pi T_s}\right) = X_s\left(\frac{F_s}{2\pi}\omega\right)$$

- Por tanto, ambos espectros coinciden exceptuando en la expansión o contracción que se produce en el eje frecuencial al pasar de una transformada a otra, relacionada con la frecuencia de muestreo.



Muestreo y reconstrucción

Representación frecuencial del muestreo – Relación entre dominios analógico y digital

- Si realizamos la comparación gráficamente, obtenemos:

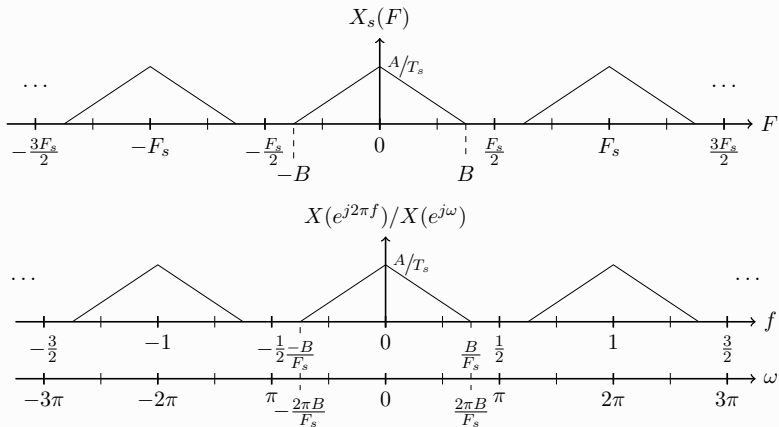




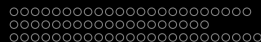




Tabla de contenidos

Muestreo y reconstrucción

-  Muestreo periódico
-  Representación frecuencial del muestreo
-  Modificación de la frecuencia de muestreo
-  Reconstrucción de señales en banda limitada



Muestreo y reconstrucción

Modificación de la frecuencia de muestreo – Reducción (diezmado)

- Hemos visto anteriormente que el proceso de **diezmado** está relacionado con la **reducción de la frecuencia de muestreo**.
- Definimos una nueva secuencia *diezmada* $x_d[n]$ tal que:

$$x_a(t) \longrightarrow \boxed{\text{Muestreo}} \longrightarrow x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow D} \longrightarrow x[nD] = x_d[n]$$

\uparrow
 F_s

- Observamos que es un proceso **equivalente** a haber muestreado la señal original $x_a(t)$ a una frecuencia más reducida $F'_s = \frac{F_s}{D}$, o sea:

$$x_a(t) \longrightarrow \boxed{\text{Muestreo}} \longrightarrow x'[n] = x_d[n]$$

\uparrow
 $F'_s = F_s / D$

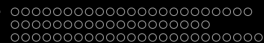
- Equivale, pues, a usar un periodo de muestreo mayor $T'_s = T_s D$.



Muestreo y reconstrucción

Modificación de la frecuencia de muestreo – Reducción (diezmado)

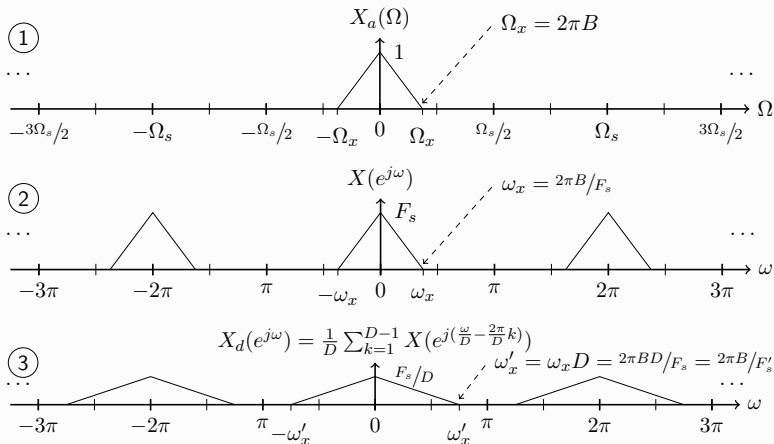
- Esta equivalencia es especialmente útil en la práctica pues, a partir de una secuencia $x[n]$ ya muestreada a una frecuencia F_s dada, podemos obtener una nueva secuencia $x_d[n]$ que equivaldría a haberla muestreada a una frecuencia F'_s más reducida sin que ello implique realizar ningún nuevo proceso de muestreo.
- En efecto, volver a muestrear la señal tiene implicaciones más costosas (es necesario realizar un nuevo proceso de conversión A/D, o incluso puede ser que la señal analógica ya no esté disponible) que realizar una simple proceso de diezmado, que es una operación que transcurre en el dominio discreto (digital).



Muestreo y reconstrucción

Modificación de la frecuencia de muestreo – Reducción (diezmado)

- Representamos en frecuencia los procesos anteriores para ($D = 2$):

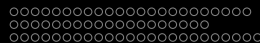
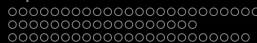




Muestreo y reconstrucción

Modificación de la frecuencia de muestreo – Reducción (diezmado)

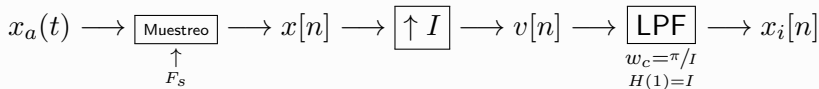
- Como podemos observar, la señal $X_d(e^{j\omega})$ que se obtiene en (3) puede obtenerse, de forma equivalente, por cualquiera de los dos procesos descritos anteriormente:
- Muestreando primero la señal original $x_a(t)$ (1) por una frecuencia de muestro $F_s = \frac{\Omega_s}{2\pi}$, para obtener $x[n]$ (2) y aplicando a continuación un proceso de diezmado por un factor D , para obtener $x_d[n]$ (3).
- O bien muestreando la señal original $x_a(t)$ (1) por una frecuencia de muestro $F'_s = \frac{F_s}{D} = \frac{\Omega_s}{2\pi D}$ para obtener directamente $x_d[n]$ (3).



Muestreo y reconstrucción

Modificación de la frecuencia de muestreo – Incremento (interpolación)

- Por otro lado, el proceso de **interpolación** está relacionado con el **incremento de la frecuencia de muestreo**.
- Así, si definimos una nueva secuencia *interpolada* $x_i[n]$ tal que:



- Observamos que es un proceso **equivalente** a haber muestreado la señal original $x_a(t)$ a una frecuencia más elevada $F'_s = F_s I$, o sea:



- Equivale, pues, a usar un periodo de muestreo menor $T'_s = T_s / I$.



Muestreo y reconstrucción

Modificación de la frecuencia de muestreo – Incremento (interpolación)

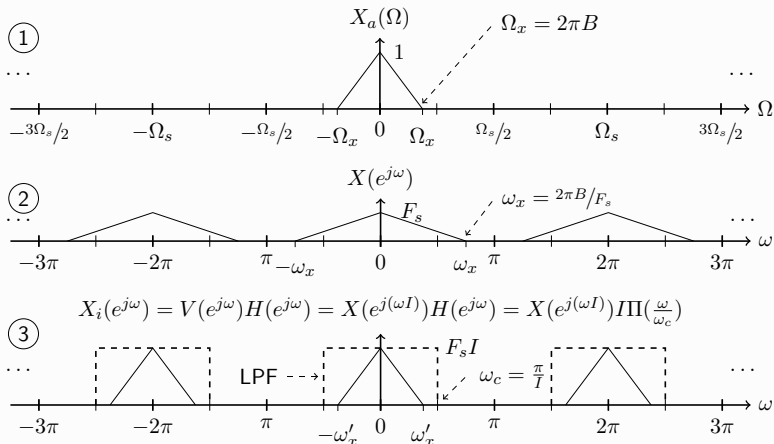
- De forma análoga a lo que hemos visto con la reducción de la frecuencia de muestreo, esta equivalencia es especialmente útil para, a partir de una secuencia $x[n]$ ya muestreada a una frecuencia F_s dada, obtener una nueva secuencia $x_i[n]$ que equivaldría a haberla muestreada a una frecuencia F'_s más elevada sin que ello implique realizar ningún nuevo proceso de muestreo.
- Al igual que ocurre con el proceso de diezmado, el proceso de interpolación es una operación que transcurre en el dominio discreto (digital), menos costosa que un remuestreo.



Muestreo y reconstrucción

Modificación de la frecuencia de muestreo – Incremento (interpolación)

- Representamos en frecuencia los procesos anteriores para ($I = 2$):





Muestreo y reconstrucción

Modificación de la frecuencia de muestreo – Incremento (interpolación)

- Como podemos observar, la señal $X_i(e^{j\omega})$ que se obtiene en (3) puede obtenerse, de forma equivalente, por cualquiera de los dos procesos descritos anteriormente:
- Muestreando primero la señal original $x_a(t)$ (1) por una frecuencia de muestro $F_s = \frac{\Omega_s}{2\pi}$, para obtener $x[n]$ (2) y aplicando a continuación un proceso de interpolación por un factor I , para obtener $x_i[n]$ (3).
- O bien muestreando la señal original $x_a(t)$ (1) por una frecuencia de muestro $F'_s = F_s I = \frac{\Omega_s I}{2\pi}$ para obtener directamente $x_i[n]$ (3).



Muestreo y reconstrucción

Modificación de la frecuencia de muestreo – Cambio de frecuencia racional

- Hasta ahora hemos visto como reducir o incrementar la frecuencia de muestreo por un factor entero (respectivamente, D o I).
- Sin embargo, en ciertas ocasiones puede ser necesario realizar un cambio de frecuencia por un **factor racional** R .
- Estos cambios son habituales en TDS para adaptarse a las frecuencias de muestreo de los distintos dispositivos electrónicos que intervienen, como ocurre cuando transmitimos una señal entre dos equipos que usan relojes diferentes.
- Por ejemplo, para un cambiar la frecuencia de muestreo en un factor $R = I/D$, podemos usar el siguiente esquema:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow I} \longrightarrow \boxed{\text{LPF}} \longrightarrow \boxed{\downarrow D} \longrightarrow x'[n]$$

$\omega_c = \frac{\pi}{T}$



Muestreo y reconstrucción

Modificación de la frecuencia de muestreo – Cambio de frecuencia racional

- Si bien este último esquema es más costoso (se generan frecuencias de muestreo más elevadas), en el caso de realizar primero el diezmado podemos incurrir en *aliasing*.
- Una opción intermedia consistiría en **descomponer** R en diferentes factores, donde, por ejemplo, $R = \frac{I_1 I_2}{D}$:





$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow I_1} \longrightarrow \boxed{\text{LPF}}_{\omega_c = \frac{\pi}{I_1}} \longrightarrow \boxed{\downarrow D} \longrightarrow \boxed{\uparrow I_2} \longrightarrow \boxed{\text{LPF}}_{\omega_c = \frac{\pi}{I_2}} \longrightarrow x'[n]$$

- En este último caso, el factor I_1 es aquel que permite realizar el posterior diezmado por un factor D sin incurrir en un *aliasing* de la señal.



Tabla de contenidos

Muestreo y reconstrucción

-  Muestreo periódico
-  Representación frecuencial del muestreo
-  Modificación de la frecuencia de muestreo
-  Reconstrucción de señales en banda limitada



Muestreo y reconstrucción

Reconstrucción de señales en banda limitada – Introducción

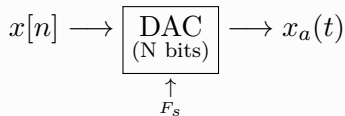
- En esta sección analizaremos la etapa de conversión D/A para la **reconstrucción** de señales de **banda limitada**.
- Se trata, pues, de realizar el camino inverso al realizado durante el proceso de conversión analógico-digital, en el que hemos obtenido una secuencia $x[n]$ a partir de una señal analógica $x_a(t)$ muestreada a una frecuencia de muestreo F_s .
- ¿Cómo recuperamos entonces esta señal $x_a(t)$ a partir de $x[n]$?
- Primero analizaremos el proceso de reconstrucción desde el punto de vista teórico y luego veremos cómo implementarlo en la práctica.



Muestreo y reconstrucción

Reconstrucción de señales en banda limitada – Introducción

- El convertidor D/A o DAC (*Digital to Analog Converter*) es un dispositivo electrónico que genera una señal analógica $x_a(t)$ con dominio continuo a partir de una secuencia $x[n]$ con dominio discreto:



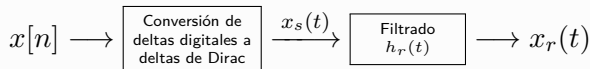
- Si bien usamos la misma notación que en el ADC, en este caso F_s sería la *frecuencia de reconstrucción*, que sería equivalente a la frecuencia de muestreo a la que se debería muestrear $x_a(t)$ para obtener $x[n]$.



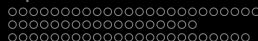
Muestreo y reconstrucción

Reconstrucción de señales en banda limitada – Reconstrucción

- Si analizamos matemáticamente el proceso de reconstrucción en el dominio temporal desde el plano teórico, tal como hicimos con el proceso de muestreo periódico, podemos distinguir dos etapas:



- La señal $x_s(t)$ es el resultado de la conversión de un tren de deltas digitales a un tren de impulsos analógicos y $h_r(t)$ es el denominado **filtro reconstructor**, cuya elección, como veremos más adelante, es clave para garantizar que el proceso de reconstrucción se realiza de la forma deseada.



Muestreo y reconstrucción

Reconstrucción de señales en banda limitada – Reconstrucción

- En la primera etapa generamos la señal analógica $x_s(t)$ a partir de las muestras de la secuencia $x[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \xrightarrow[\delta[n] \rightarrow \delta(t)]{} x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta(t-kT_s)$$

que, como podemos comprobar, coincide con la misma señal analizada en el proceso de muestreo periódico.

- En la segunda etapa realizamos un filtrado con $h_r(t)$ para reconstruir la señal original:

$$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_r(t-kT_s)$$



Muestreo y reconstrucción

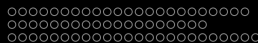
Reconstrucción de señales en banda limitada – Reconstrucción

- Nuestro objetivo es recuperar la señal original a partir de las muestras $x[n]$, es decir, que se cumpla que:

$$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t) = x_a(t)$$

- Para ello, vamos a analizar este proceso en el dominio frecuencial, teniendo en cuenta que podemos obtener la transformada de Fourier en tiempo continuo $X_s(F)$ de la señal $x_s(t)$ a partir de la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ de la secuencia $x[n]$ mediante el cambio de variable $\omega = \Omega T_s = 2\pi F T_s = \frac{2\pi F}{F_s}$:

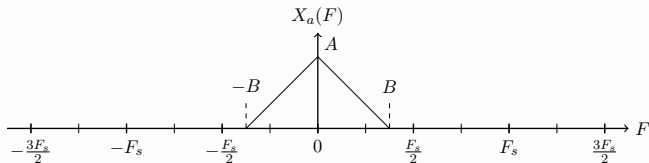
$$X_s(F) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi F/F_s}$$



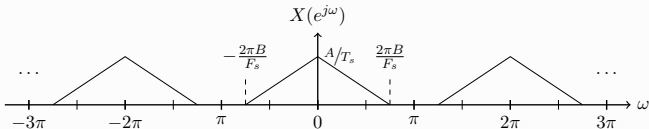
Muestreo y reconstrucción

Reconstrucción de señales en banda limitada – Introducción

- Supondremos que la transformada de Fourier en tiempo continuo $X_a(F)$ de la señal analógica original $x_a(t)$ viene dada por:



- Una vez muestreada a una frecuencia F_s , la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ de la secuencia $x[n]$ sería:

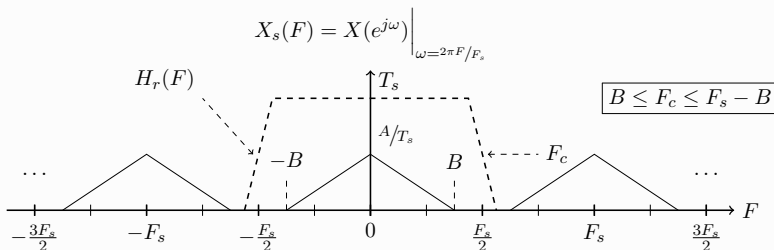




Muestreo y reconstrucción

Reconstrucción de señales en banda limitada – Reconstrucción

- Por tanto, la representación frecuencial de $X_s(F)$ vendrá dada por:



- De lo que se deduce que el **filtro reconstitutor ideal** puede ser cualquier **filtro paso bajo** con una frecuencia de corte F_c comprendida entre B y $F_s - B$, con ganancia constante T_s entre $-B$ y B y cero cuando $|F| > F_s - B$ (cualquier valor entre medio).



Muestreo y reconstrucción

Reconstrucción de señales en banda limitada – Reconstrucción

- La ganancia T_s del filtro rector es necesario para compensar el factor $1/T_s$ de la señal original $X_a(F)$ muestreada a $F_s = 1/T_s$ que hemos supuesto inicialmente; su expresión viene dada por:

$$H_r(F) = T_s \Pi \left(\frac{F}{2F_c} \right) = \begin{cases} T_s, & -F_c \leq F \leq F_c \\ 0 & \text{para otro } F \end{cases}$$

- Recordando que

$$X_s(F) = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi FT_s} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s):$$

$$X_r(F) = X_s(F)H_r(F) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s)T_s \Pi \left(\frac{F}{2F_c} \right) = X_a(F)$$

- El filtro rector ideal actúa de enventanado frecuencial que *elimina* la periodicidad espectral creada por el proceso de muestreo.



Muestreo y reconstrucción

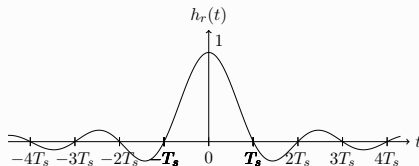
Reconstrucción de señales en banda limitada – Reconstrucción

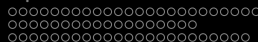
- Si analizamos el proceso en el dominio temporal, vemos que el filtro rector h_r viene dado por la siguiente expresión:

$$h_r(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_r(F)\} = T_s 2F_c \frac{\sin(2\pi F_c t)}{2\pi F_c t} = T_s 2F_c \text{sinc}(2F_c t)$$

- Si escogemos que la frecuencia de corte del filtro sea exactamente la mitad de la frecuencia de muestreo, $F_c = \frac{F_s}{2}$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} h_r(t) &= T_s F_s \text{sinc}(F_s t) \\ &= \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \end{aligned}$$



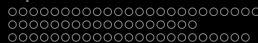


Muestreo y reconstrucción

Reconstrucción de señales en banda limitada – Reconstrucción

- Así, la señal reconstruida en el dominio temporal viene dada por:

$$\begin{aligned}
 x_r(t) &= x_s(t) * h_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h_r(t - kT_s) \\
 &= T_s 2F_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \operatorname{sinc}(2F_c(t - kT_s)) \\
 &\stackrel{\substack{\uparrow \\ F_c = \frac{F_s}{2}}}{=} T_s F_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \operatorname{sinc}(F_s(t - kT_s)) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \operatorname{sinc}\left(\frac{t - kT_s}{T_s}\right)
 \end{aligned}$$

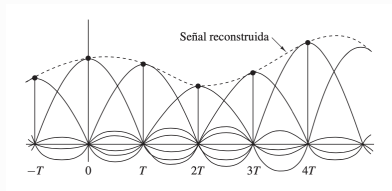


Muestreo y reconstrucción

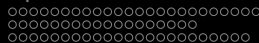
Reconstrucción de señales en banda limitada – Reconstrucción

- Obtenemos así un señal que, en cada instante $t = nT_s$, su valor viene determinado únicamente por el valor de $x[n]$ en ese instante:

$$x_r(t) \Big|_{t=nT_s} = x_r(nT_s) = x[n]$$



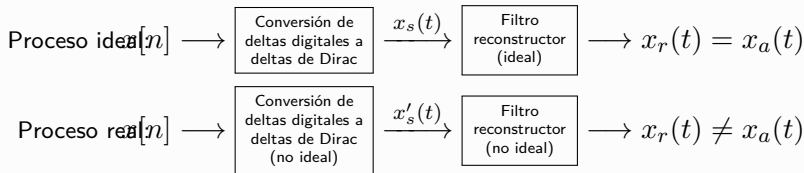
- Sin embargo, como podemos observar, el filtro reconstructor elegido tiene infinitas muestras y es **no causal** ($h_r(t) \neq 0 \forall t < 0$).
- Una posible solución sería truncar el filtro y retrasarlo.

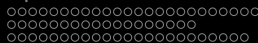
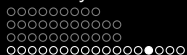


Muestreo y reconstrucción

Reconstrucción de señales en banda limitada – Reconstrucción

- El proceso analizado anteriormente pertenece al plano teórico, tanto el en uso del conversor de secuencia a tren de impulsos analógico (para obtener la señal $x_s(t)$), como en el uso de un filtro reconstructor ideal, no realizable en la práctica.
- Debemos pues, pasar de un proceso de reconstrucción ideal a uno que sea implementable en la práctica:

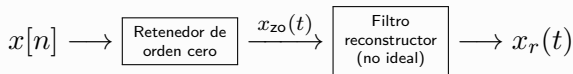
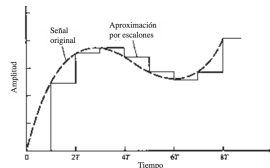




Muestreo y reconstrucción

Reconstrucción de señales en banda limitada – Reconstrucción

- Un ejemplo práctico de proceso de reconstrucción real es el que conocemos como **retenedor de orden cero** (*zero-order hold*).
- Usando **pulsos** de longitud T_s (desplazados $\frac{T_s}{2}$), este retenedor simplemente conserva o *retiene* el valor (constante) de una muestra hasta que se recibe la siguiente muestra.
- Aunque existen otro tipo de interpolaciones (lineal...), esta es la forma más sencilla.
- El proceso de reconstrucción con este retenedor se representa como:





Muestreo y reconstrucción

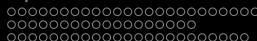
Reconstrucción de señales en banda limitada – Reconstrucción

- Así pues, la salida del retenedor de orden cero se expresa como:

$$x_{zo}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \Pi \left(\frac{t - \frac{T_s}{2} - kT_s}{T_s} \right) = \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta(t - kT_s) \right]}_{x_s(t)} * \underbrace{\Pi \left(\frac{t - \frac{T_s}{2}}{T_s} \right)}_{h_{zo}(t)}$$

- Es decir, que equivale a la salida $x_s(t)$ del conversor ideal pero filtrada en este caso por $h_{zo}(t)$, que resulta de haber usado los pulsos (no ideales) en vez de un tren de impulsos analógico ideal.
- Su transformada de Fourier en tiempo continuo viene dada por:

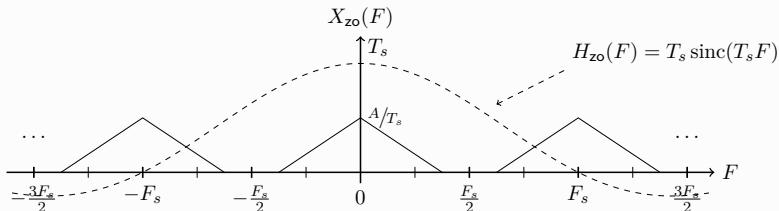
$$X_{zo}(F) = X_s(F) H_{zo}(F) = X_s(F) T_s \text{sinc}(T_s F) e^{-j2\pi F \frac{T_s}{2}}$$



Muestreo y reconstrucción

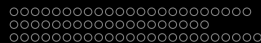
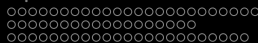
Reconstrucción de señales en banda limitada – Reconstrucción

- Si representamos este proceso no ideal en el dominio frecuencial:



observamos que, a diferencia de lo que ocurre en el proceso ideal, ahora cometemos una cierta **distorsión de amplitud**, que dependerá de F_s y de la forma del espectro de la señal original.

- El **sobremuestreo** permite minimizar el impacto de esta distorsión puesto que se consigue *distanciar* las réplicas entre sí.



Muestreo y reconstrucción

Reconstrucción de señales en banda limitada – Reconstrucción

- Por otro lado, como comentamos anteriormente, en la práctica, debemos asegurarnos de que el filtro rector $h_r(t)$ sea **realizable** y, por tanto, real, causal y estable; así pues, a diferencia del filtro ideal que se define en el teorema del muestreo, un filtro real presentará tolerancias.
- Este filtro se conformará a una plantilla de **especificaciones**, que definirán su banda de paso (rizado), su banda de transición (selectividad) y su banda atenuada (atenuación); cuanto más restrictivas sean estas, mayor será su coste y complejidad.
- Asimismo, este filtro puede diseñarse para **compensar** parte de la distorsión introducida por el filtro H_{z0} del retenedor de orden cero.

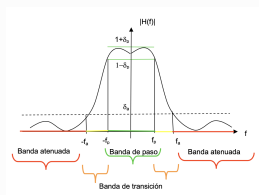



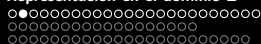
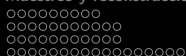




Tabla de contenidos

Representación en el dominio Z

-  Transformada Z: definición y propiedades
-  La transformada Z inversa
-  Función de transferencia

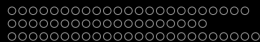


Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z : definición y propiedades – Bibliografía recomendada

Referencias

- **Señales y Sistemas**, Hwei P.Hsu, 2a. edición [[Ingebook](#)]
4. La transformada Z y los sistemas LIT de tiempo discreto (p.117-124)
- **Tratamiento digital de señales**, John G.Proakis, Dimitris G.Manolakis, 4a. edición [[Ingebook](#)]
3. La transformada z y sus aplicaciones al análisis de sistemas LTI (p.131-172)
- **Tratamiento de señales en tiempo discreto**, Alan V.Oppenheim, Ronald W.Schafer, 4a. edición [[Ingebook](#)]
3. La transformada Z (p.99-131)



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Introducción

- En esta sección vamos a introducir una nueva transformación para señales de dominio discreto que se conoce como **transformada Z**.
- Veremos que se trata de una generalización de la transformada de Fourier en tiempo discreto y que, a diferencia de esta, necesita definir una **región de convergencia** (ROC) para la cuál la transformada Z existe.
- Analizaremos sus principales **propiedades** así como la **transformada Z inversa**, que nos permitirá resolver de forma sistemática los sistemas representados por EDF.
- La transformada Z se asocia con la transformada de Laplace del dominio continuo, y es especialmente útil para analizar las propiedades de los sistemas LTI.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Definición de la transformada Z

- La **transformada Z** (TZ) de una secuencia $x[n]$ es la función de variable compleja $X(z)$ definida como:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- Se trata de una generalización de la transformada de Fourier:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

es decir, la transformada de Fourier es la transformada Z evaluada en el punto $z = re^{j\omega}$ de la circunferencia de radio unidad ($r = 1$).

oooooooo
 oooooooooo
 oooooooooo
 oooooooooo

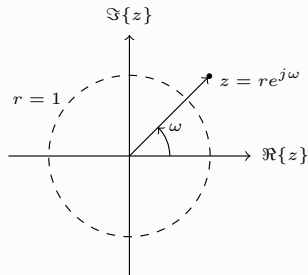
oooo●oooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooo

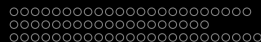
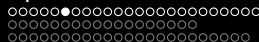
oooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooo

Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Definición de la transformada Z

- La variable compleja $z = re^{j\omega}$ se suele representar en el denominado **plano Z**, en el que se incluye la circunferencia de radio unidad ($r = 1$) debido a su especial relevancia en la TZ.





Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Región de convergencia

- A diferencia de la DTFT, donde la **convergencia** depende únicamente de la secuencia $x[n]$, en la transformada Z la convergencia depende también de la variable compleja z .
- Así pues, si para la DTFT la serie convergía uniformemente si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$, para la transformada Z la serie convergerá si:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} < \infty$$

- Habrá, pues, casos para los que no existe la DTFT pero sí la TZ.
- Al conjunto de valores de z para los cuales la serie de potencias converge uniformemente se le denomina **región de convergencia** de la transformada Z o ROC (*Region of Convergence*).

```

oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo

```

```

oooooooo●oooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo

```

```

oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo

```

Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Región de convergencia

- Por tanto, para que una secuencia quede completamente definida mediante la expresión de su transformada Z, es necesario especificar también su región de convergencia.

Ejemplo de transformada Z (retraso)

Para la secuencia $x[n] = \delta[n - m]$, obtenemos:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - m]z^{-n} = \delta[0]z^{-m} = z^{-m} \quad \forall z$$

La serie converge para cualquier valor de z , lo que determina su ROC.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Región de convergencia

Ejemplo de transformada Z (secuencia lateral a derechas)

Para la secuencia $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, obtenemos:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \quad \text{si } \left|\frac{1}{2} z^{-1}\right| < 1 \end{aligned}$$

La serie converge si y solo si $|z| > \frac{1}{2}$, lo que determina su ROC.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Región de convergencia

Ejemplo de transformada Z (secuencia lateral a izquierdas)

Para la secuencia $x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n \\
 &\stackrel{\substack{\uparrow \\ n'=n}}{=} -\sum_{n'=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^{-n'} = -\sum_{n'=1}^{\infty} (2z)^{n'} \stackrel{\substack{\uparrow \\ k=n'-1}}{=} -\sum_{k=0}^{\infty} (2z)^{k+1} \\
 &= -2z \sum_{k=0}^{\infty} (2z)^k = -2z \frac{1}{1-2z} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad \text{si } |2z| < 1
 \end{aligned}$$

La serie converge si y solo si $|z| < \frac{1}{2}$, lo que determina su ROC.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Región de convergencia

- A partir de dos últimos ejemplos, podemos observar que diferentes secuencias $x[n]$ pueden dar lugar a la misma expresión para de la transformada $X(z)$, aunque diferenciadas, eso sí, por sus distintas regiones de convergencia:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \begin{cases} \text{ROC } |z| > \frac{1}{2} \longrightarrow x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \\ \text{ROC } |z| < \frac{1}{2} \longrightarrow x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n - 1] \end{cases}$$

- Si generalizamos las anteriores expresiones, obtenemos que:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \begin{cases} \text{ROC } |z| > |a| \longrightarrow x[n] = a^n u[n] \\ \text{ROC } |z| < |a| \longrightarrow x[n] = -a^n u[-n - 1] \end{cases}$$

```

ooooooooo
ooooooooo
ooooooooo
ooooooooo
ooooooooo
ooooooooo

```

```

oooooooooooo●ooooooooooooooooo
ooooooooooooooooooooooooooooo
ooooooooooooooooooooooooooooo
ooooooooooooooooooooooooooooo

```

```

ooooooooooooooooooooooooooooo
ooooooooooooooooooooooooooooo
ooooooooooooooooooooooooooooo
ooooooooooooooooooooooooooooo

```

Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Transformada Z unilateral

- Para obtener la TZ de una secuencia podemos emplear MATLAB.
- Sin embargo, MATLAB™ implementa solo lo que se conoce como la transformada Z unilateral, $X^+(z)$, que es la transformada de la parte causal de la señal, es decir, $x^+[n] = x[n]u[n]$ ¹:

$$X^+(z) = \mathcal{Z}^+\{x[n]\} = \mathcal{Z}\{x^+[n]\} = \mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- Así pues, para obtener la TZ de la secuencia $x^+[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, basta con calcular la transformada unilateral de $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

¹En la TZ unilateral, a diferencia de la bilateral, no es necesario especificar la ROC pues es siempre es el exterior de un disco, ya que por definición la señal considerada es unilateral a derechas.

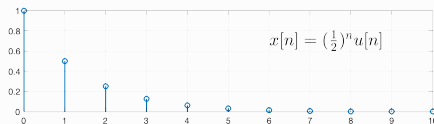


Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Transformada con MATLAB

- Podemos obtener la TZ de la secuencia anterior mediante MATLAB™, haciendo uso de la *symbolic toolbox*:

```
syms n z; % declaramos las variables simbólicas
x(n) = (1/2)^n; % definimos nuestra secuencia
n_plot = 0:1:10; % representación gráfica de la secuencia
stem(n_plot, x(n_plot), 'LineWidth',1.5); grid on;
```



```
X(z) = ztrans(x(n),n,z); % realizamos la TZ unilateral
```

- Como resultado obtenemos que $X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$, que coincide con el resultado calculado anteriormente.



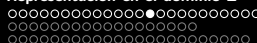
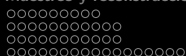
Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Transformada con MATLAB

- Para calcular la transformada de la secuencia $x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$ con MATLAB, debemos crear una versión invertida en tiempo para usar la TZ unilateral:

```
syms n z; % declaramos las variables simbólicas
sympref('HeavisideAtOrigin',1); % definimos que u[0] = 1
u(n) = heaviside(n); % función escalón unitario
x(n) = -(1/2)^n * u(-n-1); % definimos nuestra secuencia
xr(n) = subs(x(n),n,-n); % versión invertida en tiempo
Xr(z) = simplifyFraction( ztrans(xr(n),n,z) ); % realizamos la
TZ unilateral de la secuencia invertida y simplificamos
X(z) = subs(Xr(z),z,z^(-1)); % obtenemos la TZ deseada
disp(X(z)); % mostramos resultado: -2/(1/z - 2)
```

- Como resultado obtenemos que $X(z) = \frac{-2}{z-2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z}$, que coincide con el resultado esperado.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

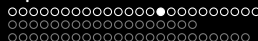
Transformada Z: definición y propiedades – Representación polinomial

- Por otro lado, las transformadas Z se suelen expresar en función de **polinomios** de la variable z^{-1} , cuyas **raíces** dan lugar a lo que conocemos como sus ceros y polos:

$$X(z) = \frac{N_x(z)}{D_x(z)} \quad \text{ROC } |z| \in R_x$$

donde $N_x(z)$ y $D_x(z)$ son, respectivamente, el **numerador** y **denominador** de la transformada.

- Los **ceros** son los valores para los cuales $N_x(z)$ se anula.
- Los **polos** son los valores para los cuales $D_x(z)$ se anula.

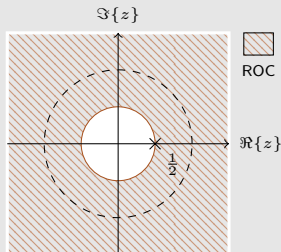


Representación de señales y sistemas en el dominio Z

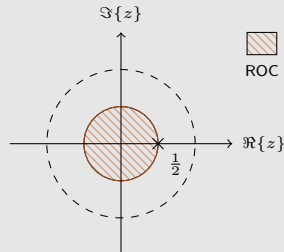
Transformada Z: definición y propiedades – Ejemplo

Ejemplo

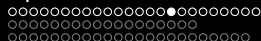
En los ejemplos anteriores, ambas transformadas presentaban un único polo en $z = \frac{1}{2}$, pero con distintas ROC ($|z| > \frac{1}{2}$ y $|z| < \frac{1}{2}$); si lo representamos en el plano Z:



ROC $|z| > \frac{1}{2}$



ROC $|z| < \frac{1}{2}$



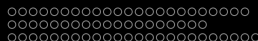
Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Propiedades de la ROC

- Si bien habitualmente solo se representan los polos y ceros de *interés* en el plano Z, en realidad la transformada Z tiene el mismo número de ceros que de polos (unos se compensan con los otros).
- Por ejemplo, para los ejemplos anteriores, donde hemos indicado un único polo de *interés* en $z = \frac{1}{2}$ (que corresponde a la raíz del polinomio $D_x(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$, se puede observar que este viene compensado por un cero en $z = 0$ a partir de la expresión de la TZ:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

- Así pues, en ciertas referencias bibliográficas, se suelen representar también tanto los ceros como los polos en $z = 0$ o $z = \infty$ en el plano Z; en nuestro caso, solo representaremos los de *interés*.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Ejemplo con MATLAB

- Mediante MATLAB™ podemos también representar los correspondientes diagramas de polos y ceros a partir de las raíces de los polinomios:

```
syms n z; % declaramos las variables simbólicas
x(n) = (1/2)^n; % definimos nuestra secuencia
X(z) = ztrans(x(n),n,z); % realizamos la TZ unilateral
[N,D] = numden(X); % obtenemos numerador y denominador
c = roots(sym2poly(N)); % raíces del numerador (ceros)
p = roots(sym2poly(D)); % raíces del denominador (polos)
[hc,hp,h1] = zplane(c,p); % diagrama de polos y ceros
set(hc,'LineWidth',2,'Color','k'); set(hp,'LineWidth',2,'Color','r');
set(h1,'LineWidth',1.5); % ajustes gráficos
```

- Observamos que en este caso hemos representado no solo las raíces de interés (el polo en $z = \frac{1}{2}$) si no también el cero en $z = 0$.

```

oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo

```

```

oooooooooooooooooooo●oooooooo
oooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooo

```

```

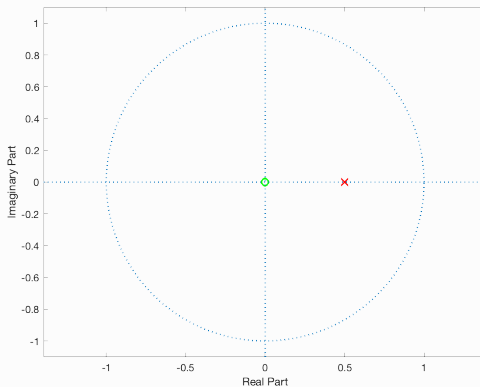
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo

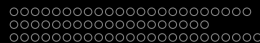
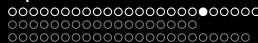
```

Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Ejemplo con MATLAB

- A continuación mostramos el resultado obtenido con el código anterior:

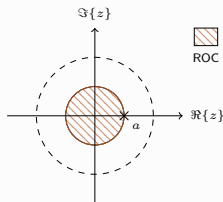




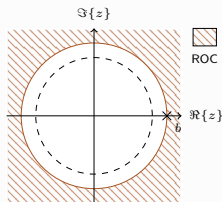
Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Propiedades de la ROC

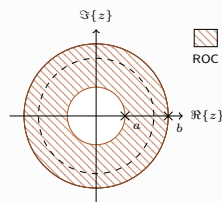
- De la definición de la ROC, podemos derivar ciertas **propiedades**.
- La ROC puede adoptar tres formas distintas; o bien un **disco**, o bien el **exterior de un disco** o bien un **anillo** en el plano Z:



$$\text{ROC } |z| < |a|$$

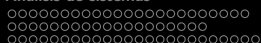
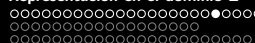
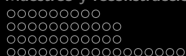


$$\text{ROC } |z| > |b|$$



$$\text{ROC } |a| < |z| < |b|$$

- Por otro lado, la ROC **no puede contener polos** pues, por definición, esta contiene únicamente los valores de z para los cuales la serie de potencias converge.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Propiedades de la transformada Z

- En cuanto a la transformada Z, estas son algunas de sus principales **propiedades** que, como era de esperar, son similares a las de las DTFT, aunque añadiendo ahora las especificidades de la ROC:

- Linealidad:** $a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \xrightarrow{Z} a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$

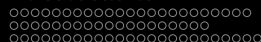
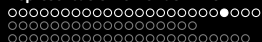
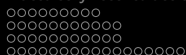
La ROC contiene, como mínimo, la intersección: $\text{ROC} \{X_1(z)\} \cap \text{ROC} \{X_2(z)\}$

- Desplazamiento temporal:** $x[n - m] \xrightarrow{Z} X(z)z^{-m}$

La ROC es la original excepto $z = 0$ si $m > 0$ o $z = \infty$ si $m < 0$

- Convolución:** $x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$

La ROC contiene, como mínimo, la intersección: $\text{ROC} \{X_1(z)\} \cap \text{ROC} \{X_2(z)\}$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Propiedades de la transformada Z

Ejemplo

Para la secuencia:

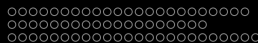
$$x[n] = \underbrace{a^n u[n]}_{x_1[n]} - \underbrace{b^n u[-n-1]}_{x_2[n]}$$

la transformada Z, que es lineal, viene dada por:

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

y su ROC viene definida por la intersección de las ROCs de cada una de las secuencias $x_i[n]$:

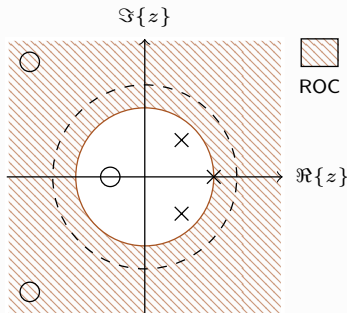
$$\begin{aligned} \text{ROC} \{X(z)\} &= \text{ROC} \{X_1(z)\} \cap \text{ROC} \{X_2(z)\} \\ &= |z| > |a| \cap |z| < |b| = |a| < |z| < |b| \end{aligned}$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Propiedades de la transformada Z

- De la definición de la transformada Z, se deriva también la siguiente propiedad: si $x[n]$ es **real**, entonces los ceros y polos de $X(z)$ se presentan por **pares conjugados**.



Ejemplo de señal real



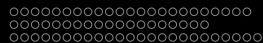
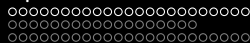
Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Resumen

- Resumen de las transformadas Z más comunes:

Secuencia	Transformada	ROC
$\delta[n]$	1	$\forall z$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	$\forall z - \{0\} \cup \{\infty\}$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - r \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
$r^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{r \sin(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
$\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z > 0$

Fuente: Tabla 3.1 Oppenheim-Schaffer



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Transformada Z: definición y propiedades – Resumen



- Resumen de las propiedades de la transformada Z:

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio z	ROC
Linealidad	$x_1[n] + a_2 x_2[n]$	$X(z)$ $a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$	R_x Como mínimo $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
Desplazamiento temporal	$x[n - m]$	$X(z)z^{-m}$	R_x excepto
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Como mínimo $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
Escalado en el dominio z	$a^n x[n]$	$X(z/a)$	$ a R_x$
Inversión temporal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$1/R_x$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Parte real	$\Re\{x[n]\}$	$\frac{1}{2} [X(z) + X^*(z^*)]$	Incluye R_x
Parte imaginaria	$\Im\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j} [X(z) - X^*(z^*)]$	Incluye R_x
Diferenciación en z	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R_x
Teorema del valor inicial	Si $x[n]$ es causal	$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	
Multiplicación	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2(z/v)v^{-1}dv$	Como mínimo $R_{x_1} R_{x_2}$
Relación de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n]$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2^*(z/v^*)v^{-1}dv$	



Tabla de contenidos

Representación en el dominio Z

-  Transformada Z: definición y propiedades
-  La transformada Z inversa
-  Función de transferencia



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

- Por otro lado, al igual que en la transformada de Fourier, podemos establecer una **transformada Z inversa** que nos permite calcular la secuencia $x[n]$ a partir de su transformada; su expresión general viene dada por la siguiente integral de contorno:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

donde C es cualquier contorno cerrado en la ROC de $X(z)$ recorrido en sentido anti-horario.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

- Esta última expresión está relacionada con la inversa de la transformada de Fourier; en efecto, si tomamos la circunferencia de radio unidad como contorno de integración mediante el cambio de variable $z = re^{j\omega}$ ($-\pi < \omega \leq \pi$), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega}) (re^{j\omega})^{n-1} \frac{d}{d\omega} (re^{j\omega}) \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega}) r^{n-1} e^{j\omega(n-1)} j r e^{j\omega} d\omega \\
 &= r^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega
 \end{aligned}$$

donde para $r = 1$ obtenemos la expresión de la transformada de Fourier inversa.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

- Sin embargo, para las secuencias típicas que se relacionan con el análisis de los sistemas LTI, no es necesario recurrir a la definición formal de la transformada Z inversa mediante la integral de contorno: es más conveniente usar otras técnicas como las basadas en el **método de inspección**, a partir la descomposición en **fracciones simples**.
- En la práctica, se suele partir de la transformada Z expresada como un cociente de **polinomios**, un tipo de expresión muy habitual en el análisis de sistemas LTI, tal como se deriva de su expresión en ecuaciones de diferencias finitas, donde el numerador está asociado a las muestras de la entrada mientras que el denominador a las muestras de la salida.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

- Sean M y N , respectivamente, el grado del numerador y denominador de la transformada Z; entonces, en el caso de que todos los polos son de **primer orden** y $M < N$, la descomposición en fracciones simples viene dada por:

$$X(z) = \frac{N_x(z)}{D_x(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(1 - p_k z^{-1})}$$

donde $\{c_k\}$ y $\{p_k\}$ son, respectivamente, los ceros y los polos no nulos de $X(z)$.

- A partir de estas fracciones simples podremos obtener la transformada Z inversa por simple inspección de las transformadas que se corresponden con cada una de estas fracciones (\rightarrow tablas).



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

- A continuación, detallamos los pasos a seguir para obtener estas fracciones simples.
- Si $M \geq N$, el **primer paso** será **dividir** el numerador por el denominador, con lo que obtendremos:

$$X(z) = \frac{N_x(z)}{D_x(z)} = \frac{Q_x(z)D_x(z) + R_x(z)}{D_x(z)} = Q_x(z) + \frac{R_x(z)}{D_x(z)}$$

- Si $N > 1$, el **segundo paso** consistirá en **factorizar** el denominador $D_x(z)$; por ejemplo, para un polinomio de segundo grado, tendremos que:

$$D_x(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})$$

$$\text{donde } p_k = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}.$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

- El **tercer paso** será encontrar los **coeficientes** A_k para obtener las fracciones simples, que se obtienen aplicando la siguiente expresión:

$$A_k = (1 - p_k z^{-1})X(z) \Big|_{z=p_k}$$

- El **cuarto y último paso** consistirá en **invertir** cada una de las fracciones $X_k(z)$ por inspección; por ejemplo:

$$X_k(z) = \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}, \text{ ROC } |z| > |p_k| \xrightarrow{z^{-1}} x[n] = A_k p_k^n u[n]$$

$$X_k(z) = \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}, \text{ ROC } |z| < |p_k| \xrightarrow{z^{-1}} x[n] = -A_k p_k^n u[-n - 1]$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

- En el caso de que la transformada Z tenga **polos de orden múltiple**, la expresión para el cálculo de los coeficientes asociados a estos polos es más compleja; en concreto, si $X(z)$ tiene un polo de orden R en $z = p_i$ y todos los demás polos son de primer orden, entonces la descomposición en fracciones simples vendría dada por:

$$X(z) = \sum_{k=1, p_k \neq p_i}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^R \frac{B_m}{(1 - p_i z^{-1})^m}$$

- Los coeficientes A_k se obtienen como antes, mientras que los coeficientes B_m asociados a las fracciones de multiplicidad R se calculan a partir de la expresión:

$$B_m = \frac{1}{(R - m)! (-p_i)^{R-m}} \left\{ \frac{d^{R-m}}{d(z^{-1})^{R-m}} \left[(1 - p_i z^{-1})^R X(z) \right] \right\}_{z^{-1} = p_i}$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La TZ inversa

Ejemplo de transformada Z inversa

- Veamos un **ejemplo** completo, en el que nos piden obtener la secuencia $x[n]$ cuya transformada Z viene dada por la siguiente expresión:

$$X(z) = \frac{N_x(z)}{D_x(z)} = \frac{1 + 3z^{-1} + \frac{11}{6}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}, \quad \text{ROC } |z| > \frac{1}{2}$$

- Puesto que $M = 3 \geq N = 2$, debemos primero dividir el numerador $N_x(z)$ entre el denominador $D_x(z)$.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

Ejemplo de TZ inversa (Cont.)

- A continuación, mostramos el detalle de la división de polinomios:

$$\begin{array}{r}
 N_x(z) = \frac{1}{3}z^{-3} + \frac{11}{6}z^{-2} + 3z^{-1} + 1 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{6}z^{-2} + \frac{5}{6}z^{-1} + 1 = D_x(z) \\ 2z^{-1} + 1 = Q_x(z) \end{array} \right. \\
 - \left[\frac{1}{3}z^{-3} + \frac{10}{6}z^{-2} + 2z^{-1} \right] \\
 \hline
 \frac{1}{6}z^{-2} + z^{-1} + 1 \\
 - \left[\frac{1}{6}z^{-2} + \frac{5}{6}z^{-1} + 1 \right] \\
 \hline
 \frac{1}{6}z^{-1} + 0 = R_x(z)
 \end{array}$$

donde el grado del residuo $R_x(z)$ es menor que N .



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

Ejemplo de TZ inversa (Cont.)

- Así pues, obtenemos que:

$$Y(z) = Q_x(z) + \frac{R_x(z)}{D_x(z)} = \underbrace{1 + 2z^{-1}}_{X_1(z)} + \overbrace{\frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}}^{X_2(z)}$$

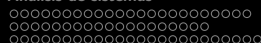
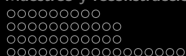
- La transformada Z inversa de $X_1(z)$ se puede obtener directamente sin realizar ninguna operación más, por simple inspección:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X_1(z)\} = x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$$

puesto que:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{z^{-m}\} = \delta[n-m]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{1\} = \mathcal{Z}^{-1}\{z^0\} = \delta[n]$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

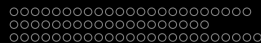
Ejemplo de TZ inversa (Cont.)

- Para obtener la transformada Z inversa de $X_2(z)$, debemos primero factorizar su denominador, es decir, $D_2(z)$:

$$D_2(z) = 1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} = \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)$$

- Es decir:

$$X_2(z) = \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{A_1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

Ejemplo de TZ inversa (Cont.)

- Los coeficientes A_k vienen dados por:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= X_2(z) \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} \right) \Big|_{z=-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} \right) \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1} \right)} \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} \right) \Big|_{z=-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = -1 \\
 A_2 &= X_2(z) \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1} \right) \Big|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{2}} = 1
 \end{aligned}$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

Ejemplo de TZ inversa (Cont.)

- Por tanto:

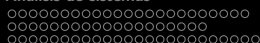
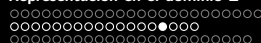
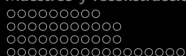
$$X_2(z) = \frac{-1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad \text{ROC } |z| > \frac{1}{2}$$

- Ahora, si invertimos por inspección las fracciones simples resultantes, teniendo en cuenta la ROC especificada, obtenemos:

$$x_2[n] = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

- Por lo que la solución completa viene dada por:

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

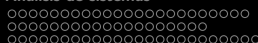
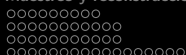
- La aplicación de la transformada Z a las **ecuaciones en diferencias finitas** (EDF) permite resolverlas de forma sistemática.

Ejemplode aplicación de la TZ a las EDF

Si consideramos la serie de Fibonacci definida por:

$$y[n] = y[n - 1] + y[n - 2] + \delta[n]$$

con condiciones iniciales nulas, es decir, $y[-2] = y[-1] = 0$, podemos comprobar que la transformada Z permite obtener la expresión general del término n-ésimo de la serie, cuyos primeros valores son $y[n] = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots\}$.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

Ejemplode aplicación de la TZ a las EDF (Cont.)

- Realizamos primero la transformada Z de la secuencia $y[n]$:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\} = Y(z)z^{-1} + Y(z)z^{-2} + 1$$

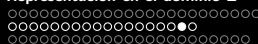
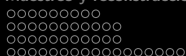
- A partir de la cuál, obtenemos la siguiente expresión:

$$Y(z) \left[1 - z^{-1} - z^{-2} \right] = 1 \longrightarrow Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$$

- Puesto que el grado del numerador es menor que el del denominador, podemos factorizar directamente este último:

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{1}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})}$$

- En este caso, las raíces (polos) son $p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

Ejemplode aplicación de la TZ a las EDF (Cont.)

- Para descomponer la anterior expresión en fracciones simples, calculamos los correspondientes coeficientes A_k :

$$A_1 = \frac{1}{(1 - p_2 z^{-1})} \Big|_{z=p_1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{p_1}{\sqrt{5}}$$

$$A_2 = \frac{1}{(1 - p_1 z^{-1})} \Big|_{z=p_2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right)} = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} = \frac{-p_2}{\sqrt{5}}$$

- Por lo que:

$$Y(z) = \frac{A_1}{(1 - p_1 z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - p_2 z^{-1})} = \frac{p_1/\sqrt{5}}{(1 - p_1 z^{-1})} - \frac{p_2/\sqrt{5}}{(1 - p_2 z^{-1})}$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

La transformada Z inversa – La transformada Z inversa

Ejemplode aplicación de la TZ a las EDF (Cont.)




- Finalmente, invertimos por inspección, teniendo en cuenta que la ROC viene dada por $|z| > \max(p_1, p_2) = p_1$ por ser $y[n]$ unilateral a derechas (debe, por tanto, corresponder al exterior de un disco, cuyo radio viene determinado por $|p_1|$, puesto que la ROC no puede contener ningún polo).

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \frac{p_1}{\sqrt{5}} p_1^n u[n] - \frac{p_2}{\sqrt{5}} p_2^n u[n] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[p_1^{n+1} - p_2^{n+1} \right] u[n] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(1 + \sqrt{5}/2\right)^{n+1} - \left(1 - \sqrt{5}/2\right)^{n+1} \right] u[n] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{2^{n+1}} \left[\left(1 + \sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1 - \sqrt{5}\right)^{n+1} \right] u[n]
 \end{aligned}$$



Tabla de contenidos

Representación en el dominio Z

-  Transformada Z: definición y propiedades
-  La transformada Z inversa
-  Función de transferencia

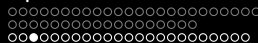
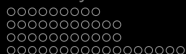


Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Bibliografía recomendada

Referencias

- **Señales y Sistemas**, Hwei P.Hsu, 2a. edición [[Ingebook](#)]
4.6 Función del sistema de los sistemas LIT de tiempo discreto (p.124-126)
- **Tratamiento digital de señales**, John G.Proakis, Dimitris G.Manolakis, 4a. edición [[Ingebook](#)]
3.5 Análisis en el dominio z de sistemas LTI (p.173-182)
5.5.1 Invertibilidad de los sistemas LTI (p.313-316)
- **Tratamiento de señales en tiempo discreto**, Alan V.Oppenheim, Ronald W.Schafer, 4a. edición [[Ingebook](#)]
3.5 Transformadas Z y sistemas lineales e invariantes (p.131-135)
5. Análisis en el dominio transformado de sistema lineales e invariantes con el tiempo (p.271-301)



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Función de transferencia (definición)

- Los sistemas lineal e invariantes (LTI) quedan completamente caracterizados mediante su respuesta impulsional $h[n]$:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

- La transformada Z de la respuesta impulsional, $H(z)$, permite una manipulación más ágil, a la vez que también describe por completo este tipo de sistemas:

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z) = X(z)H(z)$$

- Esta transformada se denomina **función de transferencia** del sistema:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Función de transferencia (definición)

- De forma análoga a lo que ocurriría con la respuesta frecuencial $H(e^{j\omega})$ y la exponencial $e^{j\omega}$, la función de transferencia $H(z)$ también puede interpretarse como el autovalor asociado a las autofunciones de exponenciales, en este caso, z^n :

$$z^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = z^n H(z)$$

- En efecto:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} \\ &= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = z^n H(z) \end{aligned}$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Sistemas definidos por EDF

- Como ya vimos, los sistemas LTI de mayor interés en la práctica son aquellos descritos por **ecuaciones en diferencias finitas** (EDF):

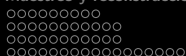
$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

- Gracias a las propiedades de linealidad y desplazamiento temporal de la TZ, podemos obtener la siguiente expresión en el dominio Z:

$$\sum_{k=0}^N a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k}$$

- Así, la función de transferencia $H(z)$ para este tipo de sistemas es:

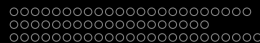
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Sistemas definidos por EDF

- Así pues, los sistemas LTI definidos por EDF son equivalentes a los sistemas con función de transferencia racional, cuyo denominador es el polinomio de la ecuación característica de la EDF.
- Las raíces del polinomio denominador de la función de transferencia son los polos de $H(z)$ (modos propios del sistema), que determinan la solución a la ecuación homogénea $\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = 0$.
- Las raíces del polinomio numerador de la función de transferencia son los ceros de $H(z)$.
- La TZ nos permite calcular la solución a la EDF con c.i. nulas.
- Cabe recordar que, al igual una EDF no caracteriza por completo un sistema y necesita de la especificación de una información adicional, la función de transferencia por sí sola tampoco caracteriza un sistema por completo, pues necesita de su ROC.

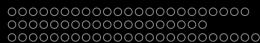


Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Estabilidad y causalidad

- De forma similar a la respuesta impulsional, resulta conveniente establecer las **condiciones** que debe cumplir $H(z)$ para que el sistema LTI sea **causal y estable** y, por tanto, **realizable**.
- Estas condiciones (que son también aplicables a sistemas no definidos por EDF) son:
- **Estabilidad** – Un sistema LTI es estable $\iff \text{ROC}\{H(z)\}$ incluye la circunferencia de radio unidad.
- **Causalidad** – Un sistema LTI es causal $\implies \text{ROC}\{H(z)\}$ es el exterior de un disco (\rightarrow unilateral a derechas)

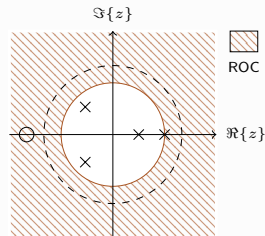
Sistema LTI causal y estable $\implies \text{ROC}\{H(z)\}$ es el exterior de un disco que incluye la circunferencia de radio unidad



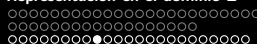
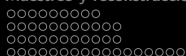
Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Estabilidad y causalidad

- Como vemos, se trata de una condición necesaria pero no suficiente, es decir, que una ROC que sea el exterior de un disco que incluya la circunferencia de radio unidad no implica que el sistema sea inmediatamente realizable (podría no ser causal).
- Sin embargo, aplicando el retardo adecuado, sí sería causal y, por tanto, **realizable/implementable**.
- Se deduce también que todos los polos deben estar contenidos dentro de la circunferencia de radio unidad.



Ejemplo de sistema realizable con el retardo adecuado



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Clasificación de sistemas

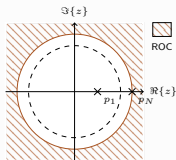
- A partir de la posición de los polos $\{p_k\}$ ($|p_1| < |p_2| < \dots < |p_N|$) podemos determinar las características del sistema LTI asociado a $H(z)$; así, un sistema se puede clasificar como:
- **Unilateral a derecha:** $h[n]$ se extiende a $n \rightarrow \infty$ (ROC $|z| > |p_N|$).
Ejemplo: $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, ROC $|z| > |a| \xrightarrow{z^{-1}} h[n] = a^n u[n]$
- **Unilateral a izquierda:** $h[n]$ se extiende a $n \rightarrow -\infty$ (ROC $|z| < |p_1|$).
Ejemplo: $H(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}}$, ROC $|z| < |b| \xrightarrow{z^{-1}} h[n] = b^{-n} u[-n-1]$
- **Bilateral:** $h[n]$ se extiende por ambos lados (ROC $|p_i| < |z| < |p_j|$).
Ejemplo: $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}$, ROC $|a| < |z| < |b| \xrightarrow{z^{-1}} h[n] = a^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$



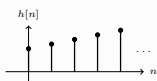
Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Clasificación de sistemas

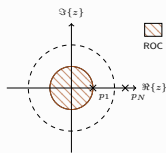
- Representación gráfica en el plano Z y en el dominio temporal:



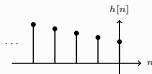
$$\text{ROC } |z| > |p_N|$$



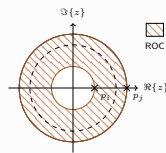
*Sistema unilateral
a derechas*



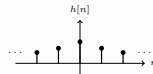
$$\text{ROC } |z| < |p_1|$$



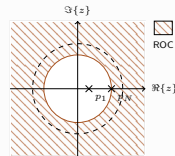
*Sistema unilateral
a izquierdas*



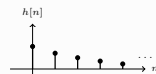
$$\text{ROC } |p_i| < |z| < |p_j|$$



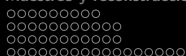
*Sistema bilateral estable
(a izquierdas y derechas)*



$$\text{ROC } |z| > |p_N| < 1$$



*Sistema unilateral
a derechas estable*



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Clasificación de sistemas

- Así pues, deducimos que para que un sistema **unilateral a derecha** sea **estable**, se debe cumplir que el módulo de su polo más grande sea menor que 1, es decir, $|p_N| < 1$.
- En cambio, para que un sistema **unilateral a izquierda** sea **estable**, el módulo de su polo más pequeño debe ser mayor que 1, es decir $|p_1| > 1$.
- Asimismo, un **sistema bilateral** será **estable** si se cumple que $|p_1| < \dots < |p_i| < 1 < |p_j| < \dots < |p_N|$.

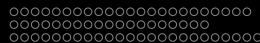


Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Clasificación de sistemas

- Por otro lado, un sistema **unilateral a derecha** es susceptible de **ser causal** con el retardo adecuado¹ y, por tanto, **realizable** si su ROC incluye también la circunferencia de radio 1.
- En cambio, un sistema **unilateral a izquierda** estrictamente nunca podrá ser causal (en la práctica, se podría truncar y aplicar un retardo, para que equivaliera a un sistema unilateral a derecha).
- De forma similar, tampoco podrá ser causal un **sistema bilateral**, pues este puede interpretarse como la combinación de un sistema unilateral a izquierda con un sistema unilateral a derecha.

¹Por ejemplo, el sistema $h[n] = \sum_{n=-2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es unilateral a derecha pero no causal; $h[n-2]$ sí sería causal.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Sistemas FIR y IIR

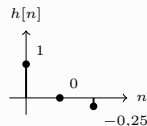
- Un sistema $h[n]$ tendrá respuesta impulsional infinita (**IIR**) si su transformada $H(z)$ tiene algún polo p_k (fuera del origen o infinito) que no se cancele con un cero; por ejemplo:

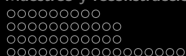
$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}}, \quad \text{ROC } |z| > 0,5 \quad \xrightarrow{Z^{-1}} \quad h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

- Un sistema $h[n]$ tendrá respuesta impulsional finita (**FIR**) en caso contrario, o sea, si solo tiene ceros (*zero-only system*); por ejemplo:

$$H(z) = (1 - 0,5z^{-1})(1 + 0,5z^{-1}) = (1 - 0,25z^{-2})$$

$$\xrightarrow{Z^{-1}} \quad h[n] = \delta[n] - 0,25\delta[n - 2]$$





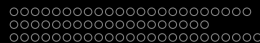
Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Respuesta frecuencial

- Para obtener la **respuesta frecuencial** $H(e^{j\omega})$ de un sistema a partir de su función de transferencia $H(z)$, particularizamos para el $z = e^{j\omega}$; en caso de una función de transferencia racional, tenemos:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k e^{-j\omega})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\omega})}$$

- Sin embargo, en la práctica, solemos trabajar habitualmente con el módulo y la fase de la respuesta frecuencial $H(e^{j\omega})$.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Respuesta frecuencial (módulo)

- El **módulo** de la respuesta frecuencial $|H(e^{j\omega})|$ se expresa, pues, como:

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - c_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^N |1 - p_k e^{-j\omega}|}$$

- Habitualmente, el módulo se suele expresar en forma logarítmica, ya sea mediante la ganancia o la atenuación:

- Ganancia**² de la respuesta frecuencial: $G(\omega) = \overbrace{20 \log |H(e^{j\omega})|^2}^{10 \log |H(e^{j\omega})|^2}$ [dB]
- Atenuación** de la respuesta frecuencial: $\alpha(\omega) = 20 \log \frac{1}{|H(e^{j\omega})|}$ [dB]
- La atenuación también se puede expresar en relación a un valor de referencia: $\alpha(\omega) = 20 \log \frac{H_{\text{ref}}}{|H(e^{j\omega})|}$ [dB]

²Ganancia en potencia.

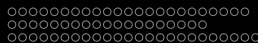
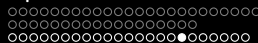


Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Respuesta frecuencial (módulo)

- Tal como se puede observar de la expresión anterior, cada polo y cada cero de $H(e^{j\omega})$ contribuye de forma aditiva a la ganancia:

$$G(\omega) = 20 \log \left| \frac{b_0}{a_0} \right| + \sum_{k=1}^M 20 \log \left| 1 - c_k e^{-j\omega} \right| - \sum_{k=1}^N 20 \log \left| 1 - p_k e^{-j\omega} \right| \text{ [dB]}$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Respuesta frecuencial (fase)

- La **fase** de la respuesta frecuencial $\arg\{H(e^{j\omega})\}$ se expresa como:

$$\arg\{H(e^{j\omega})\} = \arg\left\{\frac{b_0}{a_0}\right\} + \sum_{k=1}^M \arg\{1 - c_k e^{-j\omega}\} - \sum_{k=1}^N \arg\{1 - p_k e^{-j\omega}\}$$

- En el caso de la fase, suele interesar más la **linealidad** de la respuesta en fase más que la respuesta en sí misma; por ello, se evalúa su derivada, que conocemos como **retardo de grupo**³:

$$\begin{aligned} \tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\} &= -\sum_{k=1}^N \frac{d}{d\omega} \arg\{1 - c_k e^{-j\omega}\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} \arg\{1 - p_k e^{-j\omega}\} \end{aligned}$$

³Más adelante veremos porqué se incluye por conveniencia la negación en la propia definición del retardo de grupo.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

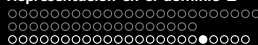
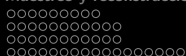
Función de transferencia – Respuesta frecuencial (fase)

Ejemplo

Pra un sistema retardador tal que $y[n] = x[n - m]$, su respuesta impulsional será $h[n] = \delta[n - m]$ y su transformada $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega m}$, por lo que el retardo de grupo vendrá dado por:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega}(-\omega m) = m$$

- Como podemos observar, un simple retardo en el dominio temporal (así como cualquier respuesta de **fase lineal**) produce un **retardo de grupo constante**.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Respuesta frecuencial (interpretación)

- La **interpretación geométrica** de la respuesta frecuencial permite analizar su relación con los polos y ceros en el plano Z.
- Así, a partir de la expresión de la transformada en forma racional:

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (z - c_k) z^{-1}}{a_0 \prod_{k=1}^N (z - p_k) z^{-1}} = \frac{b_0 z^{-M} \prod_{k=1}^M (z - c_k)}{a_0 z^{-N} \prod_{k=1}^N (z - p_k)}$$

podemos obtener la siguiente forma para la respuesta frecuencial:

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = e^{j\omega(N-M)} \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (e^{j\omega} - c_k)}{a_0 \prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - p_k)}$$

- Como podemos observar, la contribución de los polos y ceros de $H(z)$ se establece mediante la forma $(e^{j\omega} - r_k)$.



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Respuesta frecuencial (interpretación)

- En el plano Z, esta contribución puede interpretarse como el vector diferencia entre $e^{j\omega}$ (circunferencia de radio unidad) y la raíz del polinomio en cuestión r_k (cero o polo).
- Así pues, la contribución al **módulo** de la respuesta frecuencial se corresponde a la distancia entre el cero o polo r_k y el punto $z = e^{j\omega}$ del plano Z según se desplaza por la circunferencia de radio unidad ($|z| = r = 1$).
- De forma equivalente, la **fase** de la respuesta frecuencial se obtiene acumulando (con el signo adecuado) los ángulos de los vectores diferencia relativos a los distintos ceros y polos.

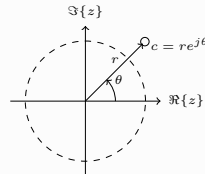


Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Respuesta frecuencial (interpretación)

- Veamos, por ejemplo, cuál sería la **contribución** de un **cero** $c = re^{j\theta}$ de $H(z)$ en la respuesta frecuencial $H(e^{j\omega})$:

$$H(z) = 1 - cz^{-1} = \frac{z - c}{z} = \frac{z - re^{j\theta}}{z}$$



- Para el módulo, tenemos que:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= \left| \frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}} \right| = |e^{j\omega} - re^{j\theta}| = \sqrt{(e^{j\omega} - re^{j\theta})(e^{j\omega} - re^{j\theta})^*} \\ &= \sqrt{1 + r^2 - re^{j\theta}e^{-j\omega} - e^{j\omega}re^{-j\theta}} = \sqrt{1 + r^2 - r[e^{j(\theta-\omega)} + e^{j(\omega-\theta)}]} \\ &= \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} = \begin{cases} |1 - r| & \text{para } \omega = \theta \text{ (mínimo)} \\ |1 + r| & \text{para } \omega = \theta - \pi \text{ (máximo)} \end{cases} \end{aligned}$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

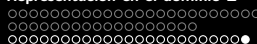
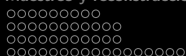
Función de transferencia – Respuesta frecuencial (interpretación)

- Para la fase, tenemos que:

$$\begin{aligned}\arg\{H(e^{j\omega})\} &= \arg\left\{\frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}}\right\} = \arg\left\{1 - \frac{re^{j\theta}}{e^{j\omega}}\right\} = \arg\{1 - re^{-j(\omega-\theta)}\} \\ &= \arctan\left[\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)}\right] = 0 \text{ para } \omega = \theta \text{ y } \omega = \theta - \pi\end{aligned}$$

- En cuanto a la **contribución** de un **polo** $p = re^{j\theta}$ ($H(z) = \frac{z}{z-p}$):

$$\begin{aligned}|H(e^{j\omega})| &= \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)}} = \begin{cases} \frac{1}{|1-r|} & \text{para } \omega = \theta - \pi \text{ (mínimo)} \\ \frac{1}{|1+r|} & \text{para } \omega = \theta \text{ (máximo)} \end{cases} \\ \arg\{H(e^{j\omega})\} &= -\arctan\left[\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)}\right] = 0 \text{ para } \omega = \theta \text{ y } \omega = \theta - \pi\end{aligned}$$



Representación de señales y sistemas en el dominio Z

Función de transferencia – Respuesta frecuencial (interpretación)

Ejemplo de representación frecuencial

Para un sistema con dos polos de radio $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y fase $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ y dos ceros en $z = -1$, el máximo de $|H(e^{j\omega})|$ estaría situado en $\omega \approx \theta$ y el mínimo en $\omega = \pi$ (al ser un sistema real, solo es necesario representarlo entre $[0, \pi]$ debido a la propiedad hermítica de la transformada).

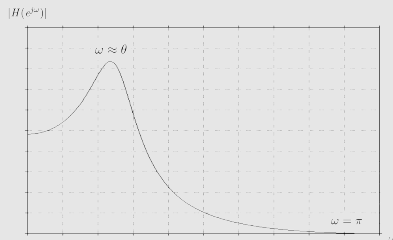
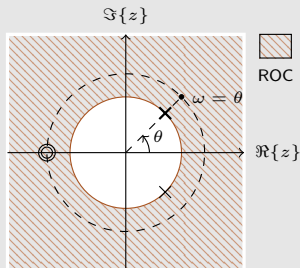







Tabla de contenidos

Análisis de sistemas

-  Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo
-  Sistemas de fase lineal
-  Introducción al diseño de filtros FIR y IIR



Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Bibliografía recomendada

Referencias

- ***Tratamiento digital de señales*, John G.Proakis, Dimitris G.Manolakis, 4a. edición [Ingebook]**
5.52 Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta (p.316-320)
- ***Tratamiento de señales en tiempo discreto*, Alan V.Oppenheim, Ronald W.Schafer, 4a. edición [Ingebook]**
5.5 Sistemas paso todo (p.302-305)
5.6 Sistemas de fase mínima (p.306-316)
5.7 Sistemas lineales con fase lineal generalizada (p.317-336)
- ***Tratamiento digital de la señal. Una introducción experimental*, J.B. Mariño et al, 2a. edición [UPC Commons]**
4.4 Sistemas pasa-todo y de fase mínima (p.192-195)
4.5 Sistemas de fase lineal (p.196-201)



Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Introducción

- A partir del diagrama de bloques genérico de un sistema LTI $h[n]$:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

obtenemos la siguiente expresión en el dominio transformado que nos permite analizar por separado el efecto del módulo y la fase del sistema en la respuesta frecuencial de la entrada:

$$Y(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| |H(e^{j\omega})| e^{j[\arg\{X(e^{j\omega})\} + \arg\{H(e^{j\omega})\}]}$$

- Como podemos observar, la **respuesta en amplitud** del sistema $H(e^{j\omega})$ provoca una ganancia debido al factor $|H(e^{j\omega})|$, mientras que su **respuesta en fase** provoca un retraso en la entrada $X(e^{j\omega})$ debido al factor $\arg\{H(e^{j\omega})\}$.

```

oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo

```

```

oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo

```

```

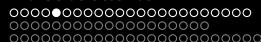
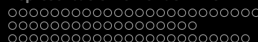
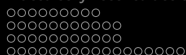
ooo●oooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooo

```

Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Introducción

- En la práctica, estas respuestas en amplitud y fase dan lugar a una modificación de la señal de entrada que es interpretada de forma distinta en función de si estamos analizando o diseñando $h[n]$.
- Así, cuando el sistema corresponde a un **canal** de comunicaciones dado, hablamos de distorsión indeseada de la señal de entrada.
- Sin embargo, en otras ocasiones representa un **filtro** que queremos sintetizar para modificar una señal según nuestras necesidades.
- Por ejemplo, los sistemas o filtros **ecualizadores** pretenden, mediante simple **inversión**, compensar la distorsión producida por un canal dado. Se conocen también como **sistemas inversos**.
- Como veremos, para que estos ecualizadores sean implementables, deben cumplir ciertas condiciones, que son las que cumplen aquellos que conocemos como **sistemas de fase mínima**.



Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Introducción

- ¿Qué ocurre cuando un ecualizador no es implementable, es decir, cuando un sistema no tiene un sistema inverso realizable?
- Afortunadamente, en general cualquier sistema puede descomponerse como uno de fase mínima y un **sistema pasa-todo**.
- Este último se caracteriza por tener módulo constante, por lo que no distorsiona la señal en amplitud, de modo que basta con invertir el sistema de fase mínima para obtener un ecualizador realizable.
- Por otro lado, si $H(e^{j\omega})$ aplica un retardo diferente para cada componente frecuencial, la salida presentará **distorsión en fase**.
- Para que no haya distorsión, la fase debe ser de la forma lineal $\alpha + \beta\omega$, es decir, el retardo de grupo debe ser **constante**, una condición que cumplen los denominados **sistemas de fase lineal**.



Análisis de sistemas

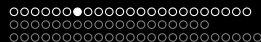
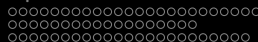
Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas inversos (ecualizadores)

- Los **ecualizadores** o **sistemas inversos**, tal y como se denominan en el contexto de los sistemas LTI, tienen como objetivo realizar la operación de **deconvolución**, es decir, recuperar la señal de entrada $x[n]$ a partir de su salida $y[n]$ distorsionada por un sistema $h[n]$ (por ejemplo, un canal que introduce ecos en la señal):

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \xrightarrow{y[n]} \boxed{h_{\text{inv}}[n]} \longrightarrow z[n] = x[n]$$

$$z[n] = y[n] * h_{\text{inv}}[n] = x[n] * \underbrace{h[n] * h_{\text{inv}}[n]}_{\delta[n]} = x[n]$$

- Sin embargo, realizar este tipo de operación en el dominio del tiempo discreto n es, en general, una tarea complicada.



Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas inversos (ecualizadores)

- En cambio, al analizar esta operación de inversión en el dominio Z, la expresión se simplifica:

$$Z(z) = Y(z)H_{\text{inv}}(z) = X(z)H(z)H_{\text{inv}}(z) = X(z)$$

- De modo que obtenemos:

$$H(z)H_{\text{inv}}(z) = 1 \implies H_{\text{inv}}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}$$

es decir, los polos de $H(z)$ son los ceros de $H_{\text{inv}}(z)$ y viceversa.



Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas inversos (ecualizadores)

Ejemplo

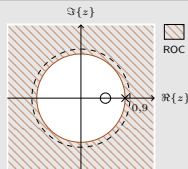
- El sistema ecualizador de:

$$H(z) = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 - 0,9z^{-1}}, \quad \text{ROC } |z| > 0,9$$

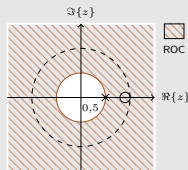
vendrá dado por la expresión:

$$H_{\text{inv}}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1 - 0,9z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}$$

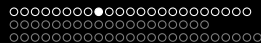
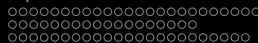
- Si $\text{ROC } |z| < 0,5 \implies h_{\text{inv}}[n]$ unilateral a izquierdas e inestable (irrealizable).
- Si $\text{ROC } |z| > 0,5 \implies h_{\text{inv}}[n]$ unilateral a derechas y estable (realizable). diagrama \rightarrow



Sistema a ecualizar
(realizable)



Sistema ecualizador
(realizable)



Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas inversos (ecualizadores)

Ejemplo

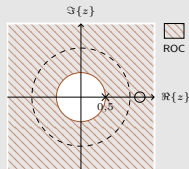
- Ejemplo** – El sistema ecualizador de:

$$H(z) = \frac{1 - 1,2z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}, \quad \text{ROC } |z| > 0,5$$

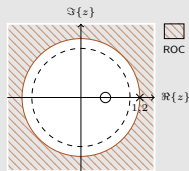
vendrá dado por la expresión:

$$H_{\text{inv}}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 - 1,2z^{-1}}$$

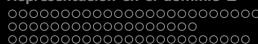
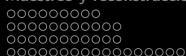
- Si $\text{ROC } |z| < 1,2 \implies h_{\text{inv}}[n]$ estable pero unilateral a izquierdas (irrealizable).
- Si $\text{ROC } |z| > 1,2 \implies h_{\text{inv}}[n]$ unilateral a derechas pero inestable (irrealizable). $\xrightarrow{\text{diagrama}}$



Sistema a ecualizar
(realizable)



Sistema ecualizador
(irrealizable)



Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas inversos (ecualizadores)

- De los anteriores ejemplos se deduce que, para que la inversa de un sistema sea estable (es decir, que la circunferencia de radio unidad esté incluida en la ROC), todos los ceros $\{c_k\}$ del sistema a invertir tienen que estar situados dentro de la circunferencia de radio unidad (es decir, $|c_M| < 1$), lo que asegura que todos los polos del sistema inverso $\{p'_k\} = \{c_k\}$ también lo estarán.
- Para que el sistema inverso sea realizable, deberemos además escoger que la ROC sea el exterior de un disco.

$$H(z) \text{ con } |c_M| < 1 \Rightarrow H_{\text{inv}}(z) \text{ realizable si ROC } |z| > |p'_M| = |c_M|$$

(donde M y N son, respectivamente, el orden del numerador y denominador de $H(z)$)

Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas de fase mínima

- Hemos visto que para que un sistema $H(z)$ sea realizable, todos sus polos deben estar contenidos dentro de la circunferencia de radio unidad; por otro lado, para que su sistema inverso sea realizable, debe también tener todos sus ceros dentro de la circunferencia unidad.
- Los sistemas realizables que tiene **todos sus ceros y polos** dentro de la circunferencia de radio unidad reciben el nombre de **sistemas de fase mínima**.
- Así pues, para que un sistema realizable tenga inversa realizable, este debe ser de fase mínima.

```

oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo

```

```

oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo

```

```

oooooooooooo●oooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo

```

Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas de fase mínima

- La denominación de fase mínima viene dada por lo que se conoce como función de **retardo de fase**, que es debida a la contribución de los ceros del sistema a la respuesta en fase.
- Así, los sistemas que contienen todos los ceros dentro de la circunferencia de radio unidad, presentan una variación de la fase neta nula entre $\omega = 0$ y $\omega = \pi$, motivo por el cual hablamos de retardo de fase mínima o simplemente **fase mínima**.
- En contraposición, cuando un sistema contiene ceros fuera de la circunferencia unidad, esta variación de la fase neta es igual a π , por lo que reciben el nombre de sistemas de **fase máxima**.
- Finalmente, si un sistema contiene ceros dentro y fuera de la circunferencia de radio unidad, hablamos de sistemas de **fase no mínima** o **fase mixta**.



Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas de fase mínima

- Por otro lado, teniendo en cuenta que el retardo de grupo es la derivada de la fase, se deduce que una sistema de fase mínima presenta un **retardo de grupo mínimo**.
- Este retardo de grupo mínimo se traduce también en un **retardo mínimo de la energía**: la energía aparecida a la salida del sistema de fase mínima hasta un determinado instante siempre es mayor o igual que la de cualquier otro sistema con el mismo módulo de la respuesta frecuencial $|H(e^{j\omega})|$ ¹.

¹ *Tratamiento digital de la señal. Una introducción experimental*, J.B. Mariño et al.



Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas de fase mínima

- ¿Qué ocurre si un sistema no es de fase mínima y, por tanto, no tiene ecualizador o sistema inverso realizable?
- En general, se puede demostrar que cualquier sistema $H(z)$ realizable puede descomponerse en un sistema de fase mínima $H_{\min}(z)$, un sistema pasa-todo $H_{\text{ap}}(z)$ y un sistema FIR $H_{\text{uc}}(z)$ que recoge los posibles ceros sobre la circunferencia de radio unidad:

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z)H_{\text{uc}}(z)$$

- En el caso de que no haya ceros en la circunferencia de radio unidad, la anterior expresión se simplifica a:

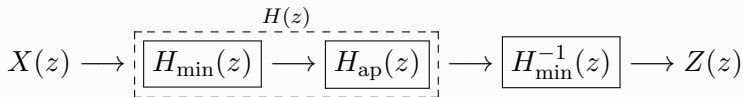
$$H(z) = H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z)$$



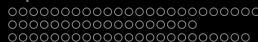
Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas de fase mínima

- De este modo, se puede invertir la parte del sistema $H(z)$ que es de fase mínima para compensar su distorsión en amplitud:



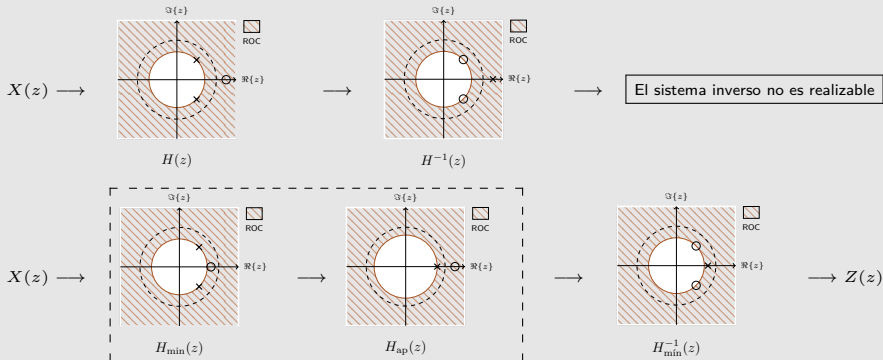
- Cabe señalar que, si bien $Z(z)$ no presenta distorsión en amplitud debido a la contribución de $H(z)$, con este esquema, sin embargo, la distorsión en fase de $H(z)$ no queda compensada.

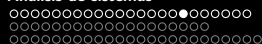
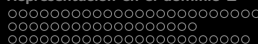
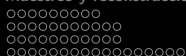


Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas pasa-todo

Ejemplo de inversión de un sistema que no es de fase mínima





Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas pasa-todo

- Hemos visto en qué consiste un sistema de fase mínima y cómo identificarlo; veamos ahora en qué consiste un sistema pasa-todo, de modo a poder descomponer un sistema cualquiera como la combinación de estos dos primeros.
- Un **sistema pasa-todo** (*all-pass system*), como su propio nombre indica, es aquel que deja pasar por igual (en cuanto al módulo se refiere) todas las componentes frecuenciales:

$$|H_{\text{ap}}(e^{j\omega})| = C \quad \forall \omega$$

donde C es una constante positiva.

- Es decir, un sistema pasa todo no presenta distorsión en amplitud.



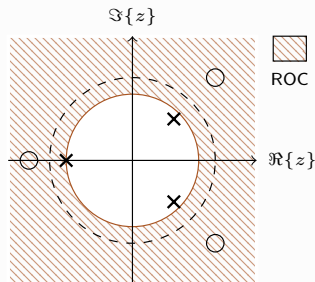
Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas pasa-todo

- Para obtener este tipo de respuesta, es necesario que cada polo de la función de transferencia $H(z)$ vaya acompañado de un cero cuyo valor sea el **inverso conjugado** ($c_k = \frac{1}{p_k^*}$).

La expresión general para los sistemas pasa-todo viene dada por:

$$H_{ap}(z) = C \prod_{k=1}^M \frac{z^{-1} - p_k^*}{1 - p_k z^{-1}}$$



Ejemplo de sistema pasa-todo



Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas pasa-todo

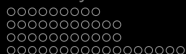
- A partir de la expresión de su respuesta frecuencial:

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = C \prod_{k=1}^M \frac{e^{-j\omega} - p_k^*}{1 - p_k e^{-j\omega}} = C \prod_{k=1}^M \frac{e^{-j\omega} (1 - p_k^* e^{j\omega})}{1 - p_k e^{-j\omega}} = C e^{-j\omega M} \prod_{k=1}^M \frac{1 - p_k^* e^{j\omega}}{1 - p_k e^{-j\omega}}$$

podemos comprobar que, efectivamente, su módulo es constante:

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = C |e^{-j\omega M}| \prod_{k=1}^M \frac{|1 - p_k^* e^{j\omega}|}{|1 - p_k e^{-j\omega}|} = C \prod_{k=1}^M \frac{|(1 - p_k e^{-j\omega})^*|}{|1 - p_k e^{-j\omega}|} = C$$

- Es decir, un sistema pasa-todo deja pasar todas las componentes frecuenciales por igual sin distorsionar la amplitud de la entrada.



Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas pasa-todo

- Por definición, los sistemas pasa-todo **no son invertibles** mediante un sistema realizable, puesto que todo polo dentro de la circunferencia de radio unidad vendrá siempre acompañado de su inverso conjugado, el cuál estará situado fuera de ella y, por tanto, su inversa tendrá polos fuera de la circunferencia de radio unidad.



```

oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo

```

```

oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo

```

```

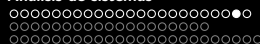
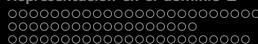
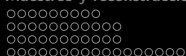
oooooooooooooooooooooooooooo●oo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo

```

Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas pasa-todo

- En cuanto a la respuesta en fase de los sistemas pasa-todo, se puede demostrar que, para sistemas causales y estables, la fase es decreciente para toda ω y, por tanto, el retardo de grupo es positivo para todo ω .
- La utilidad principal de los sistemas pasa-todo no es, por tanto, aplicarlo como sistema en sí, sino para ayudar a implementar otros sistemas.
- Por ejemplo para ecualizar sistemas que contienen ceros fuera de la circunferencia de radio unidad, para los cuales no existen sistemas inversos realizables.



Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas pasa-todo

Ejemplo de descomposición de sistema

- Supongamos que queremos ecualizar el siguiente sistema realizable:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{5}{4}z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

- Al tener un cero fuera de la circunferencia de radio unidad ($|c| = |\frac{5}{4}| > 1$), el sistema no es invertible directamente; al no contener ceros en $|z| = 1$, se puede descomponer como un sistema pasa-todo y uno de fase mínima, es decir:

$$H(z) = \frac{-\frac{5}{4}(z^{-1} - \frac{4}{5})}{1 - \frac{4}{5}z^{-1}} \cdot \frac{1 - \frac{4}{5}z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \overbrace{-\frac{5}{4} \cdot \frac{z^{-1} - \frac{5}{4}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1}}}^{H_{ap}(z)} \cdot \overbrace{\frac{1 - \frac{4}{5}z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}}^{H_{min}(z)}$$



Análisis de sistemas

Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo – Sistemas pasa-todo

Ejemplo de descomposición de sistema (Cont.)

- Así pues, el sistema $H(z)$ del ejemplo, sin ecualizador realizable, puede descomponerse en dos subsistemas, uno de tipo pasa-todo no invertible pero que no distorsiona en amplitud y otro de fase mínima que sí distorsiona pero que sí es invertible, tal como se deduce de la posición de sus ceros y polos:

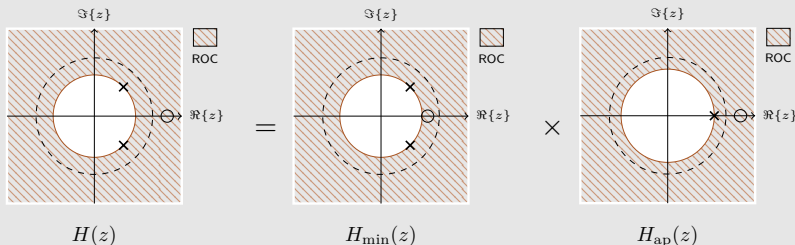



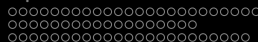




Tabla de contenidos

Análisis de sistemas

-  Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo
-  Sistemas de fase lineal
-  Introducción al diseño de filtros FIR y IIR



Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Introducción

- Como hemos visto anteriormente, mediante un sistema ecualizador podemos compensar la distorsión en amplitud, pero no en fase.
- Así, para no distorsionar un sistema ni en amplitud ni en fase, es necesario garantizar que el sistema que apliquemos presente una respuesta frecuencial con **módulo constante y fase lineal**.
- A estos sistemas que no presentan distorsión en fase los conocemos como **sistemas de fase lineal**.
- También analizaremos los **sistemas de fase lineal generalizada**, que cumplen condiciones menos estrictas que los anteriores pero cuyo retardo de grupo también es constante y tampoco presentan distorsión en fase.



Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Fase lineal

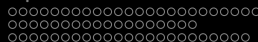
- Consideremos el siguiente sistema:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}$$

- Se trata de un sistema de retardo ideal", donde la respuesta en amplitud es constante y donde α (no forzosamente un entero) es el retardo que introduce el sistema, por lo que el retardo de grupo es constante: $\tau(\omega) = \alpha \rightarrow$ sistema de fase lineal
- En el caso de que $\alpha = m$, siendo m un número entero, entonces la respuesta impulsional corresponde a:

$$h[n] = \delta[n - m]$$

es decir, un simple retardo de la señal de m muestras.



Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Fase lineal

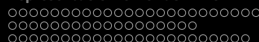
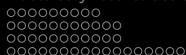
- Consideremos ahora un caso más general, en el que el sistema puede presentar una distorsión en amplitud:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha}$$

- De nuevo, se trata de un sistema de fase lineal, pues el retardo de grupo es constante.
- En el caso de que $h[n]$ se **real**, si se cumple que $2\alpha = M$ es un entero, la respuesta impulsional asociada tendrá **simetría** par con respecto a α , es decir:

$$h[2\alpha - n] = h[M - n] = h[n]$$

- En caso contrario, la respuesta impulsional no tendrá simetría.



Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Fase lineal

Demostración de la condición de simetría para un sistema de fase lineal

Demostramos que la DTFT de $h[2\alpha - n]$ es igual a la DTFT de $h[n]$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{h[2\alpha - n]\} &= \mathcal{F}\{h[-(n - 2\alpha)]\} = \mathcal{F}\{h[-n] * \delta[-(n - 2\alpha)]\} \\
 &= \mathcal{F}\{h[-n]\} \mathcal{F}\{\delta[-(n - 2\alpha)]\} \stackrel{(1)}{=} H(e^{-j\omega}) e^{-j\omega 2\alpha} \\
 &= |H(e^{-j\omega})| e^{j\omega \alpha} e^{-j\omega 2\alpha} \stackrel{(2)}{=} |H(e^{-j\omega})| e^{-j\omega \alpha} \\
 &\stackrel{(3)}{=} |H(e^{j\omega})| e^{-j\omega \alpha} = \mathcal{F}\{h[n]\}
 \end{aligned}$$

Donde hemos usado en (1) y (2) que $2\alpha = M$ es un entero (y por lo tanto, la transformada en un retardo) y en (3) que el sistema $h[n]$ es real, es decir, que $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$, por lo que se cumple que:

$$|H(e^{j\omega})| e^{-j\omega \alpha} = |H(e^{-j\omega})| e^{-j\omega \alpha} \implies |H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$$



Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Fase lineal

- En los sistemas de fase lineal que acabamos de ver, la respuesta en fase queda completamente asociada al factor lineal de fase $e^{-j\omega\alpha}$, pues el módulo $|H(e^{j\omega})|$ es una función real no negativa de ω que, por tanto, no contribuye en la fase.
- Existen, sin embargo, algunos sistemas con factores de fase lineal pero que estrictamente no son sistemas de fase lineal debido a posibles saltos de π radianes que, con la anterior definición, no se pueden tener en cuenta; por ejemplo, el siguiente sistema de promediador móvil causal:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(M+1)} \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$$

- Por ello, resulta útil generalizar la anterior definición.



Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Fase lineal generalizada

- Denominamos **sistema con fase lineal generalizada** a aquel sistema que responde a la siguiente forma:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\alpha\omega - \beta)}$$

donde $A(e^{j\omega})$ es una función real que, a diferencia de los sistemas de fase lineal anteriores (donde en su lugar teníamos $|H(e^{j\omega})|$), puede tomar valores negativos y, así, representar los posibles saltos de π radianes.

- Esta definición, pues, permite englobar a aquellos sistema que no son estrictamente de fase lineal; por ejemplo, para el anterior promediador móvil causal, se cumpliría con $\alpha = M/2$, $\beta = 0$ y

$$A(e^{j\omega}) = \frac{1}{(M+1)} \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}$$



Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Fase lineal generalizada

- Si ignoramos las discontinuidades que resultan de la adición de una fase constante en toda la banda ($|\omega| < \pi$) o parte de ella, podemos comprobar que, efectivamente, un sistema de fase lineal generalizada se caracteriza por un retardo de grupo constante, tal como ocurría con los sistemas de fase lineal:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega}(-\alpha\omega + \beta) = \alpha$$

- Para los sistemas de fase lineal, vimos la relación de simetría par existente cuando 2α era un entero; para conocer qué relaciones de simetría existen en los sistemas de fase lineal generalizada, debemos primero establecer la relación entre $h[n]$, α y β .



Análisis de sistemas

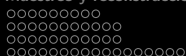
Sistemas de fase lineal – Fase lineal generalizada

- A continuación, se establecen las condiciones necesarias y suficientes para que un **sistema causal** con **respuesta impulsional real** y **función de transferencia racional** tenga fase lineal generalizada.
- Por un lado, podemos expresar la respuesta frecuencial como:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\alpha\omega-\beta)} = A(e^{j\omega})\cos(\beta-\alpha\omega) + jA(e^{j\omega})\sin(\beta-\alpha\omega)$$

- Por otro lado, a partir de la definición de $H(e^{j\omega})$, teniendo en cuenta que $h[n]$ es **real**, podemos escribir:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos(\omega n) - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin(\omega n)$$



Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Fase lineal generalizada

- Por comparación entre ambas expresiones complejas, tenemos que (para los valores donde $A(e^{j\omega}) \neq 0$):

$$\frac{A(e^{j\omega}) \sin(\beta - \alpha\omega)}{A(e^{j\omega}) \cos(\beta - \alpha\omega)} = \frac{-\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin(\omega n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cos(\omega n)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cos(\omega n) \sin(\beta - \alpha\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin(\omega n) \cos(\beta - \alpha\omega)$$

$$\boxed{\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] [\cos(\omega n) \sin(\beta - \alpha\omega) + \sin(\omega n) \cos(\beta - \alpha\omega)] = 0$$

- Es decir: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] [\sin(\omega(n - \alpha) + \beta)] = 0$



Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Fase lineal generalizada

- Para un sistema **causal** ($h[n] = 0 \forall n < 0$), la ecuación que debe cumplir un sistema de fase lineal generalizada se simplifica a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h[n] [\sin(\omega(n - \alpha) + \beta)] = 0$$

- Esta ecuación representa una condición necesaria pero no nos dice cómo encontrar un sistema de fase lineal; para ello debemos imponer que 2α sea un entero M .
- De ello se deduce también que $h[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > M$.



Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Fase lineal generalizada

- Para $\beta = 0$ o π , obtenemos simetría par, como en el caso de los sistemas de fase lineal (no generalizada); por tanto, $A(e^{j\omega})$ es una función real y par:

$$h[2\alpha - n] = h[M - n] = h[n]$$

- Para $\beta = \pi/2$ o $3\pi/2$, obtenemos simetría impar (en este caso, la función $A(e^{j\omega})$ corresponde una función real y impar):

$$h[2\alpha - n] = h[M - n] = -h[n]$$

- Es decir, se cumple la siguiente condición de simetría en el dominio temporal:

$$h[2\alpha - n] = h[M - n] = \pm h[n]$$



Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Tipos de sistemas

- Se deduce, pues, que los sistemas o filtros causales únicamente pueden tener fase lineal generalizada si su respuesta impulsional es de duración finita (FIR).
- Por tanto, los **filtros FIR causales** tienen fase lineal si $h[n]$ es de longitud $M + 1$ y presentan simetría (par o impar) respecto $\frac{M}{2}$.
- Así pues, en función de las condiciones adicionales aplicadas, distinguimos los siguientes **tipos de sistemas FIR de fase lineal**¹:
- Tipo I: $h[n] = h[M - n]$, $0 \leq n \leq M$ (M entero par)
- Tipo II: $h[n] = h[M - n]$, $0 \leq n \leq M$ (M entero impar)
- Tipo III: $h[n] = -h[M - n]$, $0 \leq n \leq M$ (M entero par)
- Tipo IV: $h[n] = -h[M - n]$, $0 \leq n \leq M$ (M entero impar)

¹Más info en: <https://es.mathworks.com/help/signal/ug/fir-filter-design.html>

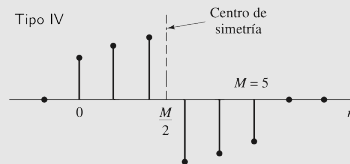
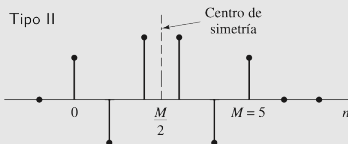
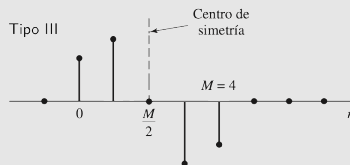
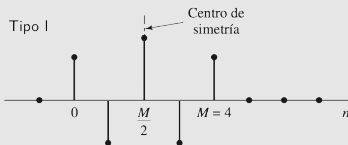


Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Tipos de sistemas

Ejemplos

A continuación, mostramos unos ejemplos de este tipo de sistemas:

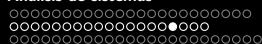
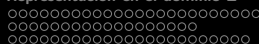
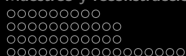




Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Tipos de sistemas

- A partir de los requisitos que un sistema de fase lineal generalizada impone sobre su respuesta impulsional (finita, real y simétrica), podemos reconocerlo a partir de su diagrama de polos y ceros.
- En efecto, este sistema cumplirá las siguientes condiciones:
 - 1) Tendrá **solo ceros** (al ser FIR).
 - 2) Los ceros deberán ir emparejados de sus **inversos** (debido a la simetría), es decir, $c_k \iff c_k^{-1} = \frac{1}{c_k}$.
 - 3) Los ceros deberán ir emparejados de sus **conjugados** en caso de ser complejos (para ser real), es decir, $c_k \iff c_k^*$.
- Por tanto, los ceros deben ir acompañados por sus inversos conjugados, es decir, $c_k \iff \frac{1}{c_k^*}$.



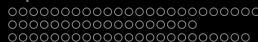
Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Tipos de sistemas

- Se deduce que si existe un cero complejo fuera de la circunferencia de radio unidad, este debe agruparse de cuatro en cuatro (**simetría cuadrantal**); en el caso de tener módulo unidad, solo necesitan emparejarse con su conjugado que es, a la vez, su inversa.
- También se deduce que si existe un cero real, solo se empareja con su inverso; si además $|c_k| = 1$, puede aparecer aislado ($c_k = \pm 1$).
- En efecto, todo ello se deduce de la condición de simetría analizada anteriormente cuando se analiza en el dominio Z:

$$h[n] = \pm h[M - n] \implies H(z) = \pm H(z^{-1})z^{-M}$$

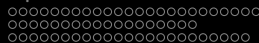
que implica que si $z = c_k$ es un cero no nulo de $H(z)$, entonces $z = c_k^{-1}$ también ha de ser un cero pues $H(c_k^{-1}) = \pm c_k^M H(c_k) = 0$.



Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Tipos de sistemas

- Asimismo, también podemos deducir qué condiciones deben cumplir cada uno de los filtros analizados acerca de la posición de sus ceros, según la simetría que aplica para cada uno de ellos:
- Tipo **I**: no fuerza ningún cero determinado
- Tipo **II**: debe tener un cero en $z = -1$
- Tipo **III**: debe tener un cero en $z = 1$ y $z = -1$
- Tipo **IV**: debe tener un cero en $z = 1$
- Ejemplo: un filtro tipo II, al ser M impar y la simetría de $h[n]$ par, debe cumplir que $H(z) = z^{-M}H(z^{-1})$, lo que implica que $H(-1) = (-1)^{-M}H(-1) = -H(-1) \implies H(-1) = 0$

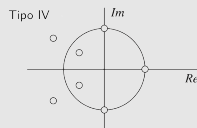
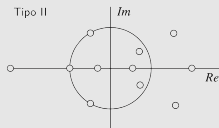
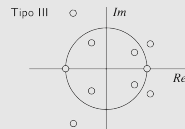
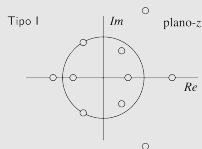


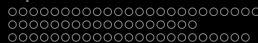
Análisis de sistemas

Sistemas de fase lineal – Tipos de sistemas

Ejemplos

A continuación, mostramos ejemplos de diagramas de polos y ceros para los cuatro tipos de sistemas o filtros FIR causales analizados:





Análisis de sistemas




Sistemas de fase lineal – Tipos de sistemas

- Finalmente, se ha demostrado que los sistemas causales con respuesta impulsional de duración infinita (IIR) pueden también tener transformadas de Fourier con fase lineal generalizada.
- Sin embargo, las funciones de transferencia correspondientes a estos sistemas no son racionales, por lo que no se pueden implementar mediante ecuaciones en diferencias.
- Por ejemplo, el sistema $h[n] = \text{sinc}(n - \alpha)$, cuya respuesta frecuencial es $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}$, tiene respuesta impulsional infinita y respuesta en fase lineal, pero no es implementable mediante EDF.



Tabla de contenidos

Análisis de sistemas

-  Sistemas inversos, de fase mínima y pasa-todo
-  Sistemas de fase lineal
-  Introducción al diseño de filtros FIR y IIR

oooooooooooo
 ooooooooooooo
 ooooooooooooo
 ooooooooooooo
 ooooooooooooo

oooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo

oooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo
 o●oooooooooooooooooooooooooooo

Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Bibliografía recomendada

Referencias

- **Tratamiento digital de señales**, J.G.Proakis, D.G.Manolakis, 4a. ed. [[Ing.](#)]
 10.1 Diseño de filtros digitales. Consideraciones generales (p.584-588)
- **Tratamiento de señales en tiempo discreto**, Alan V.Oppenheim, Ronald W.Schafer, 4a. edición [[Ingebook](#)]
 7.0 Técnicas de diseño de filtros. Introducción (p.484-485)
 7.1 Especificaciones del filtro (p.485-487)
 7.9 Comentarios sobre los filtros FIR e IIR en tiempo discreto (p.566-567)
- **Tratamiento digital de la señal. Una introducción experimental**, J.B. Mariño et al, 2a. edición [[UPC Commons](#)]
 5.0 Diseño de filtros. Introducción (p.213-213)
 5.1 Filtrado en el dominio de la frecuencia (p.213-217)
 5.5 Análisis comparativo entre filtros FIR e IIR (p.251-252)



Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Introducción

- Se denomina **filtro** (selectivo en frecuencia) a aquel sistema LTI que realiza algún tipo de modificación sobre las componentes frecuenciales de la señal de entrada.
- **Idealmente**, un filtro deja pasar un intervalo frecuencial dado, denominada **banda de paso**, donde el módulo de su respuesta frecuencial es constante (habitualmente, la unidad).
- En el resto del intervalo de frecuencias, denominado **banda eliminada** o **banda atenuada**, el módulo de la respuesta frecuencial es nulo, por lo que quedan eliminadas.

oooooooooooo
 ooooooooooooo
 ooooooooooooo
 ooooooooooooo
 ooooooooooooo

oooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo

oooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo
 oooo●ooooooooooooooooooooooo

Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Tipos de filtros

- Dependiendo de las necesidades particulares de cada caso, nuestro objetivo será dejar pasar un determinado margen de frecuencias (normalmente la **banda de interés** que contiene la señal útil), mientras minimizamos el efecto del resto (señales no útiles o ruido).
- Así, en función del comportamiento del módulo de la respuesta frecuencial de un filtro, distinguimos cuatro **tipos de filtros**:

Filtro paso bajo: conserva las bajas frecuencias

Filtro paso alto: conserva las altas frecuencias

Filtro paso banda: conserva una banda determinada

Filtro banda eliminada: elimina una banda determinada

oooooooooooo
 ooooooooooooo
 ooooooooooooo
 ooooooooooooo
 ooooooooooooo

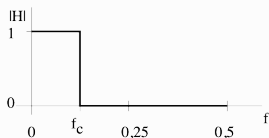
oooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo

oooooooooooooooooooooooooooo
 ooooooooooooooooooooooooooooo
 ooooo●oooooooooooooooooooo

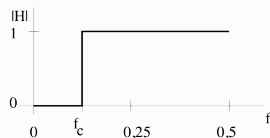
Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Tipos de filtros

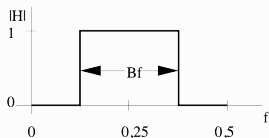
- Representación gráfica del **módulo de la respuesta frecuencial** para los diferentes tipos de filtros selectivos en frecuencia:



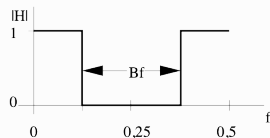
Respuesta ideal de un filtro paso bajo



Respuesta ideal de un filtro paso alto



Respuesta ideal de un filtro paso banda



Respuesta ideal de un filtro elimina banda

```

oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo

```

```

oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo

```

```

oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooo●oooooooooooooooooooo

```

Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Especificaciones

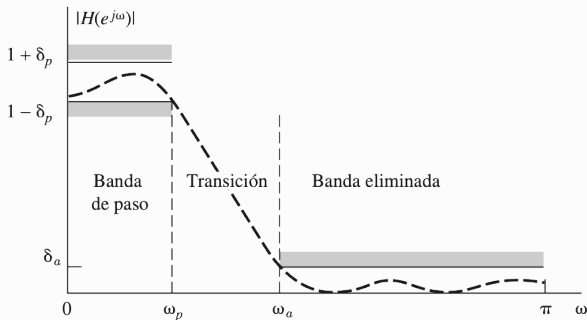
- En un filtro ideal no existen transiciones entre la banda de paso y la atenuada; no obstante, un filtro realizable debe ser causal y estable.
- Este filtro realizable es, pues, una **aproximación** del filtro ideal, en el que se permite una tolerancia alrededor del valor teórico constante del módulo de la respuesta frecuencial en la banda de paso, así como sobre el valor teórico nulo en la banda atenuada.
- Además, se acepta una **banda de transición** entre la banda de paso y la atenuada, pues no es posible (como ocurre con el filtro ideal) pasar de una a otra instantáneamente.
- En la práctica, los filtros reales se diseñan siguiendo una **plantilla de especificaciones** que conlleva unas determinadas **tolerancias**.



Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Especificaciones

- A continuación mostramos un ejemplo de plantilla de especificaciones para un filtro paso bajo:



```

oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo
oooooooo

```

```

oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo

```

```

oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo
oooooooo●oooooooooooooooooooo

```

Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Especificaciones

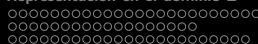
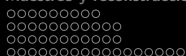
- Como podemos apreciar, a diferencia de lo que ocurre con un filtro ideal donde el paso abrupto de la banda de paso a la atenuada viene determinada por la frecuencia de corte ω_c , en un filtro realizable existe una **banda de transición** que abarca las frecuencias entre ω_p y ω_a (en esta región, la ganancia del filtro no tiene restricciones).
- En la **banda de paso** (frecuencias por debajo de ω_p), los límites de tolerancia $\pm\delta_p$ varían, por convenio, alrededor de la ganancia unidad.
- Finalmente, en la **banda atenuada** (frecuencias por encima de ω_a), la ganancia debe estar por debajo de δ_a .



Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Especificaciones

- Se dice que un filtro es tanto más **discriminante** cuanto menores sean las tolerancias permitidas en cada una de las bandas (de paso y atenuada).
- Asimismo, un filtro es tanto más **selectivo** cuando más estrecha es su banda de transición.
- Lamentablemente, para un orden dado, los requisitos de **discriminación y selectividad** son **contrapuestos**: una mejora del uno implica un empeoramiento del otro, así que será necesario buscar un compromiso para cada caso concreto.



Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Especificaciones

- En la práctica, se trabaja en **escala logarítmica** pues facilita el análisis de filtros en cascada (el producto de respuestas frecuencias se transforma en suma de atenuaciones) y, además permite ampliar el **margen dinámico** de representación y apreciar debidamente las pequeños valores usados habitualmente en la banda atenuada.
- En ocasiones, la plantilla de especificaciones puede darse directamente en relación al módulo de la respuesta frecuencial, en la práctica se suele usar la función de **atenuación** con respecto a un valor de referencia:

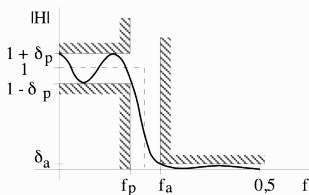
$$\alpha(\omega) = 10 \log_{10} \frac{H_{\text{ref}}^2}{|H(e^{j\omega})|^2} = 20 \log_{10} \frac{H_{\text{ref}}}{|H(e^{j\omega})|}$$



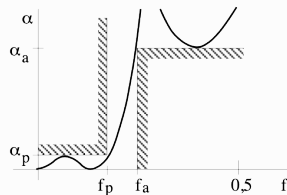
Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Especificaciones

- A continuación, comparamos las plantillas de especificaciones para el módulo y la atenuación de un filtro paso bajo con $H_{\text{ref}} = 1 + \delta_p$:

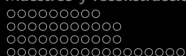


Especificación para el módulo



Especificación para la atenuación

- En las frecuencias donde el módulo es máximo, la atenuación se anula (*ceros de atenuación*), y donde el módulo es cero, la atenuación se hace infinita (*ceros de transmisión*).



Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Especificaciones

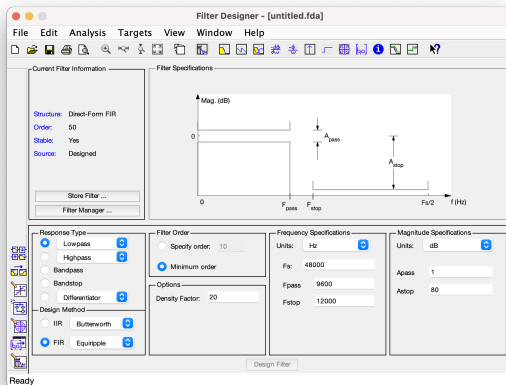
- En la práctica, el diseño de filtros se realiza mediante **herramientas de diseño** informáticas, como la *toolbox* filterDesigner de MATLAB (que sustituye a la antigua fdatool).
- Estas herramientas permiten calcular los coeficientes del filtro a implementar a partir de las frecuencias y tolerancias especificadas en la plantilla y el tipo de filtro a utilizar (FIR/IIR).
- También permiten visualizar la respuesta frecuencial (módulo y fase), el diagrama de polos y ceros o la respuesta impulsional, lo que permite comparar las características de los filtros diseñados.

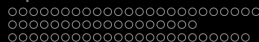


Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Especificaciones

- Interfaz gráfica de la herramienta filterDesigner de MATLAB:

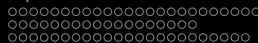




Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Filtros FIR vs. IIR

- Una vez fijadas las frecuencias y tolerancias que determinan la selectividad y la discriminación del filtro según una plantilla de especificaciones dada, las características del filtro diseñado dependerán de la duración de la respuesta impulsional (**FIR/IIR**) y del **tipo de filtro** usado.
- Por este motivo, es necesario analizar las **ventajas** y **desventajas** de cada una de las opciones de modo a obtener un filtro que cumpla con las exigencias concretas de cada caso: orden mínimo, máxima planitud de la banda de paso, fase lineal, etc.



Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Filtros FIR vs. IIR

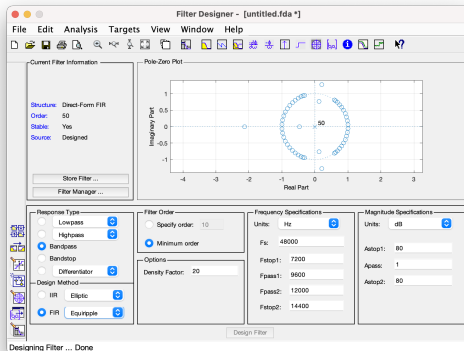
- En el caso de se necesite diseñar un filtro con respuesta en **fase lineal**, en general se suele optar un filtro de tipo **FIR**, que permite obtener este tipo de comportamiento si cumplimos con las condiciones analizados en el apartado anterior.
- Sin embargo, en aquellas aplicaciones donde no imprescindible disponer de una respuesta en fase lineal en toda la banda, es posible optar por un diseño de filtro **IIR**.
- La principal ventaja de estos últimos es que, para unas especificaciones dadas, los filtros IIR precisan de un **orden** significativamente menor que los filtros FIR.



Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Filtros FIR vs. IIR

- Por ejemplo, para cumplir con las especificaciones del siguiente filtro paso banda de tipo FIR (rizado cte.) se necesita un orden 50:

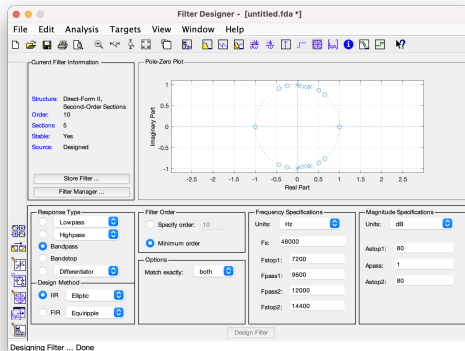


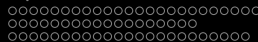


Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Filtros FIR vs. IIR

- En cambio, para las mismas especificaciones, un filtro paso banda de tipo IIR (elíptico) basta un orden 10:

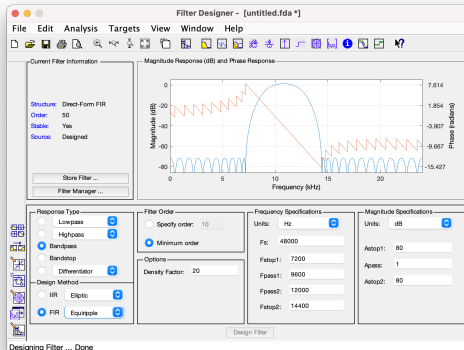


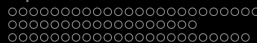


Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Filtros FIR vs. IIR

- En la implementación FIR, sin embargo, podemos observar la respuesta de fase lineal:

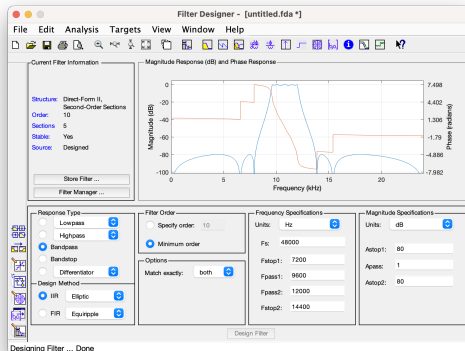




Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Filtros FIR vs. IIR

- En la implementación IIR, la respuesta en fase, como era de esperar, no es lineal:

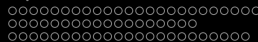




Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Filtros FIR vs. IIR

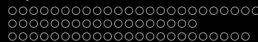
- En cuanto a la **implementación práctica** de los filtros digitales, cuanto mayor es el orden, mayor son los requisitos de memoria así como de **carga computacional**, lo que dificulta el uso de filtros FIR muy **discriminantes** y, por tanto, de orden elevado.
- Si bien los filtros IIR solventan estos inconvenientes, estos presentan a su vez una importante desventaja: son mucho más sensibles a los **errores de cuantificación** de sus coeficientes.
- En efecto, para filtros discriminantes, los polos de la función de transferencia se sitúan muy cerca de la circunferencia de radio unidad, y un pequeño error puede hacer que pasen a su exterior, lo que se traduce en un filtro **inestable**.



Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Tipos de filtros

- Para los **filtros FIR**, uno de los **métodos** usados para calcular sus coeficientes es mediante el **enventanado de la respuesta impulsional ideal**, es decir: $h[n] = h_{\text{ideal}}[n]v[n]$.
- El comportamiento de la respuesta del filtro diseñado dependerá del **tipo de ventana** escogido, pues cada una de ellas (rectangular, Barlett, Hamming, Blackman, etc.) presenta unas características particulares, como la anchura de su lóbulo principal o la relación de lóbulo principal a secundario (que se conoce como NLPS).
- En función de estas podremos priorizar, por ejemplo, la selectividad del filtro o la atenuación en la banda de paso.

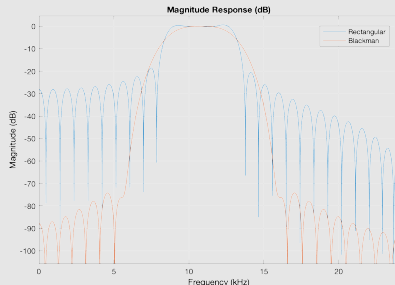


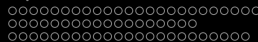
Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Tipos de filtros

Ejemplo de tipos de filtros FIR

Vemos que un filtro FIR diseñado con una ventana rectangular es más selectivo que uno diseñado con ventana de Blackman, aunque la discriminación en la banda atenuada de ese último es significativamente mayor:

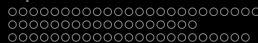




Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Tipos de filtros

- Para los **filtros IIR** existen diversos **métodos** de implementación, cada uno de ellos con sus propias características.
- Los filtros de **Butterworth** son máximamente planos en la banda de paso y la banda atenuada, pero a expensas de una banda de transición menos abrupta (peor selectividad).
- Los filtros de **Chebyshev** son máximamente planos solo en la banda atenuada (tipo I) o solo en la banda de paso (tipo II) mientras presentan una ondulación (rizado) en la otra; a cambio, tienen una banda de transición más abrupta (mejor selectividad).
- Los filtros **elípticos** minimizan el ancho de la banda de transición (mayor selectividad), pero presentan un rizado tanto en la banda de paso como en la atenuada.



Análisis de sistemas

Introducción al diseño de filtros FIR y IIR – Tipos de filtros

Ejemplo de tipos de filtros IIR

A continuación mostramos el módulo de la respuesta frecuencial para algunos ejemplos de filtros IIR paso-banda de orden 10:

