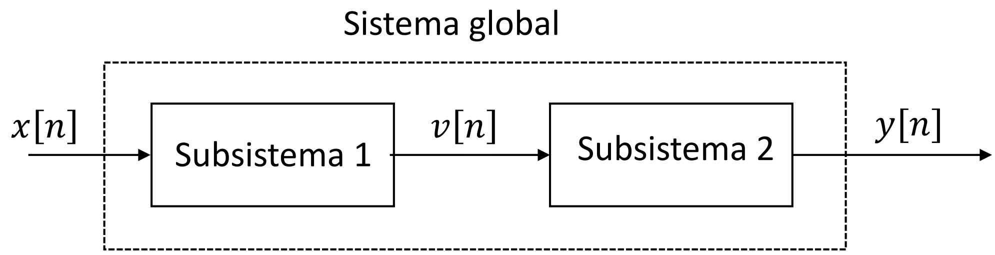
# EXAMEN DE RECUPERACION – ENERO 2019
## 102712 Señales y Sistemas Discretos

Profesores: Gonzalo Seco Granados

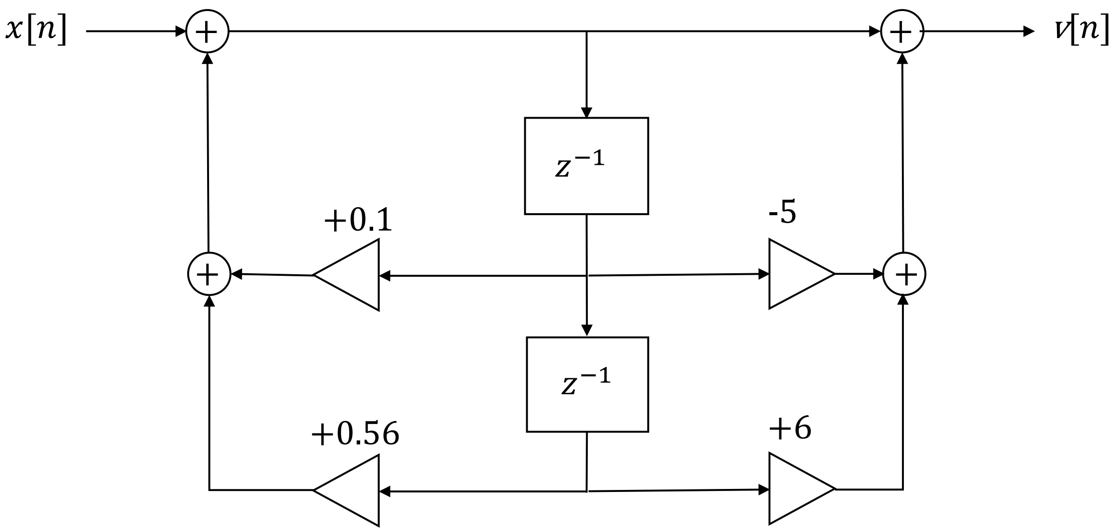
*Instrucciones: 120 minutos. Se puede utilizar calculadora (pero no ordenador, móvil, ipad, etc.) y las tablas de TF, DFT y TZ del Campus Virtual si se tienen imprimidas.*

**Problema 1** (6 puntos)

Considere un Sistema LTI formado por la concatenación de dos subsistemas LTI causales y estables:




El Subsistema 1 viene dado por el siguiente diagrama de bloques:




Calcule la respuesta impulsional del Subsistema 2 de manera que el Sistema global sea un sistema pasa-todo cuyo módulo de la respuesta en frecuencia es igual a 2 para toda $f$.

**Problema 2** (4 puntos)
Calcule la convolución entre la señal $x[n]$ y la señal $y[n]$, o sea, calcule:

$$z[n] = x[n] * y[n]$$

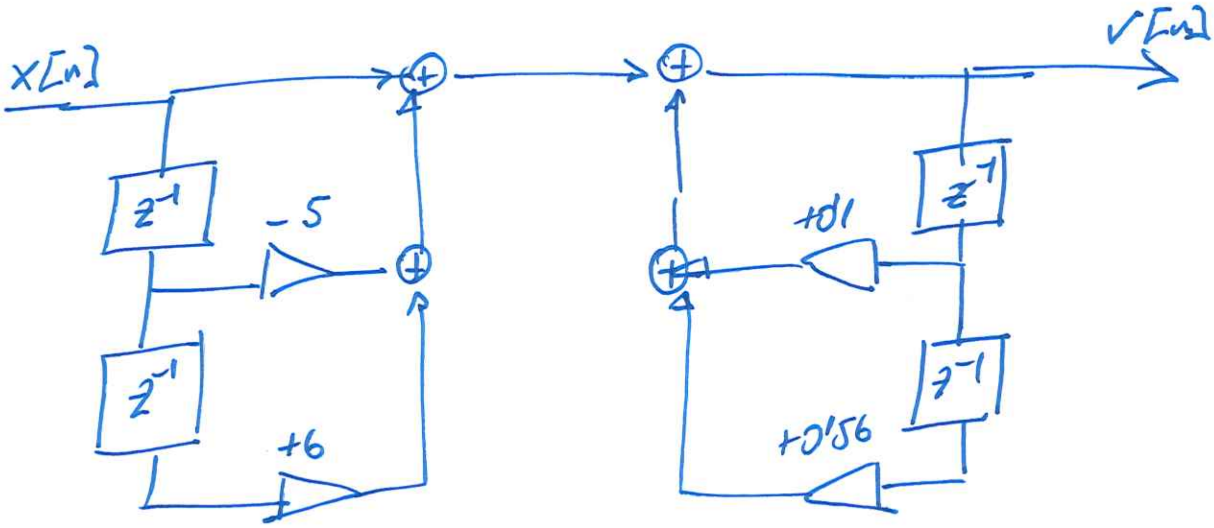
Las señales $x[n]$ e $y[n]$ son:

$$x[n] = \frac{\sin(0.6\pi n)}{\pi n}$$

$$y[n] = \frac{3\sin(0.5\pi n)}{4\pi n} e^{j0.3\pi n}$$

## Problema 1

Càlcul dels pols i zeros del subsistema 1:




$$v[n] = 0'1\, v[n-1] + 0'56\, v[n-2] + x[n] - 5x[n-1] + 6x[n-2]$$

$$v[n] - 0'1\, v[n-1] - 0'56\, v[n-2] = x[n] - 5x[n-1] + 6x[n-2]$$

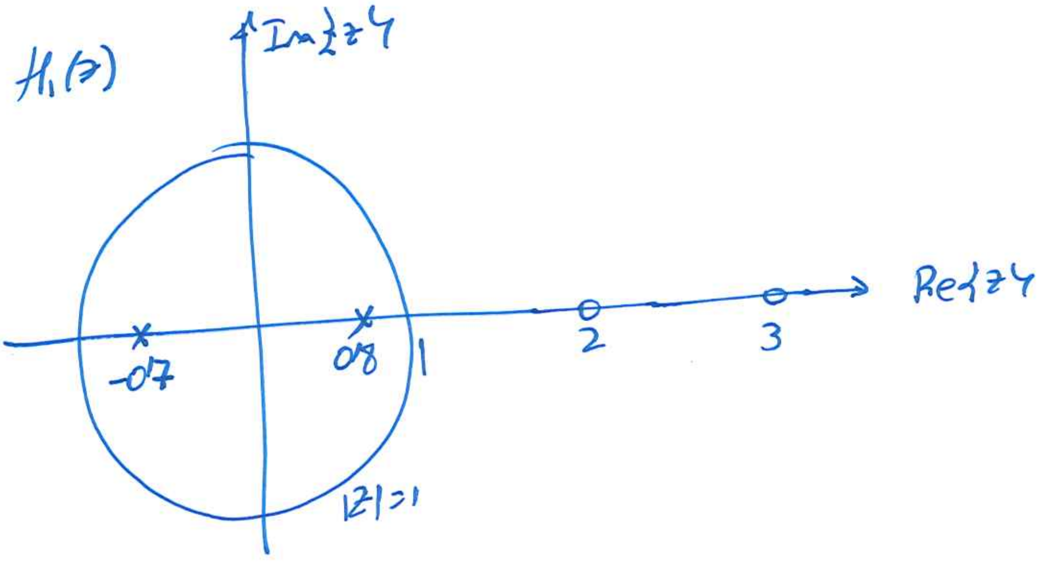
$$H_1(z) = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{1 - 0'1 z^{-1} - 0'56 z^{-2}}$$

ZEROS: $z^2 - 5z + 6 = 0 \rightarrow z = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

POLS: $z^2 - 0'1 z - 0'56 = 0 \rightarrow z = \dfrac{+0'1 \pm \sqrt{0'01 + 2'24}}{2} =$

$$= \frac{+0'1 \pm 1'5}{2} = \begin{cases} +0'8 \\ -0'7 \end{cases}$$

$$H_1(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})}{(1-0'8z^{-1})(1+0'7z^{-1})}$$




Per a que el sistema global sigui passa-tot els pols i zeros del sistema global han d'estar en posicions que siguin inverses i conjugades. És a dir, si hi ha un pol o zero a la posició $a$, ha d'haver un zero o pol, respectivament, a la posició $1/a^*$.

Mirant el diagrama de pols i zeros de $H_1(z)$, es veu que una possible solució és que el subsistema 2 tingui:

zeros: $-0'7$, $+0'8$

pols: $1/2$, $1/3$

Llavors seria

$$H_2(z) = K \frac{(1+0'7z^{-1})(1-0'8z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$H_1(z)\cdot H_2(z) = K \frac{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

Una altra forma d'obtenir el mateix resultat és la següent. El sistema 1 es pot descomposar en un sistema de fase mínima i un sistema passa-tot:

$$H_1(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})}{(1-0'8z^{-1})(1+0'7z^{-1})} = \underbrace{\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-0'8z^{-1})(1+0'7z^{-1})}}_{\text{fase mínima.}} \underbrace{\frac{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}}_{\text{passa-tot}}$$

El sistema 2 pot ser justament l'invers d'aquesta part.

$$H_2(z) = K \frac{(1-0'8z^{-1})(1+0'7z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

constant per ajustar la magnitud de la resposta

Per calcular K fem servir que la magnitud de la resposta freqüencial del sistema global ha de ser 2 per totes les freqüències. Podem avaluar la resposta a la freqüència $f=0$ perquè és el cas més senzill.

$f=0 \rightarrow$ correspon a $z = e^{j2\pi f}\Big|_{f=0} = 1$

$$H_1(z)\cdot H_2(z)\Big|_{z=1} = K\,\frac{(1-2)(1-3)}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})} = K\,\frac{2}{\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}} = 6K$$

$$6K = 2 \longrightarrow K = \frac{1}{3}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{3}\,\frac{(1+0'7z^{-1})(1-0'8z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$ ROC $|z|>\frac{1}{2}$ perquè és causal i estable.

Calculem ara la resposta impulsional:

$$\frac{(1+0'7z^{-1})(1-0'8z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{1-0'1z^{-1}-0'56z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$\begin{array}{l|l} 1-0'1z^{-1}-0'56z^{-2} & 1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2} \\ \cline{2-2} -3'36+2'8z^{-1}-0'56z^{-1} & -6.056 \\ \hline +4'36-2'9z^{-1} & \end{array}$$

$$\frac{1-0'1z^{-1}-0'56z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} = -3'36 + \frac{4'36-2'9z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} =$$

$$= -3'36 + \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$A = \frac{4'36-2'9z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{4'36-5'8}{1-\frac{2}{3}} = \frac{-1'44}{\frac{1}{3}} = -4'32$$

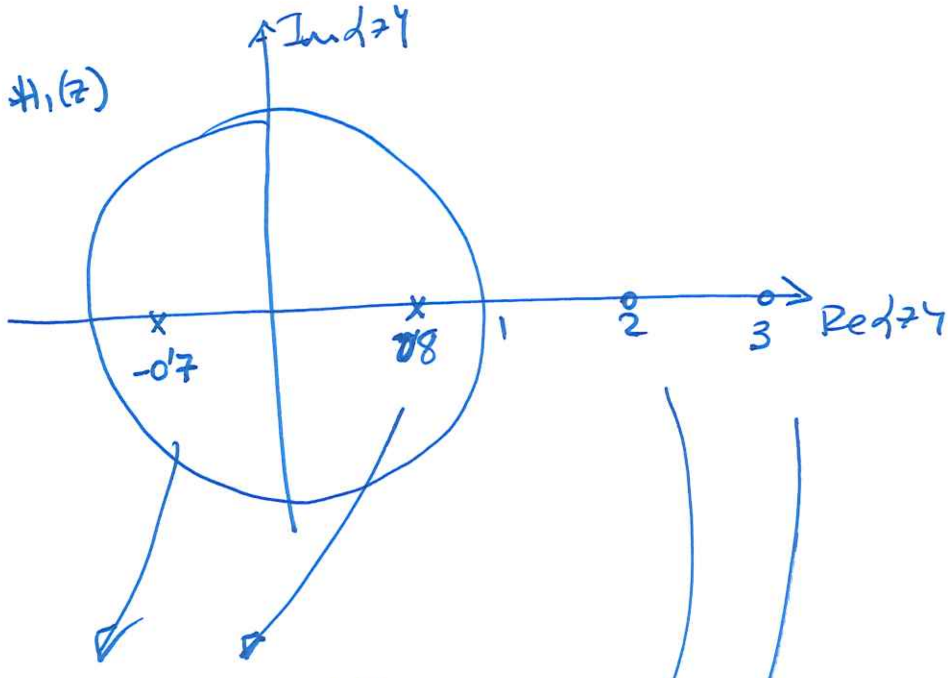
$$B = \left.\frac{4'36 - 2'9z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=1/3} = \frac{4'36 - 8'7}{1 - 3/2} = \frac{-4'34}{-1/2} = 8'68$$ (5)

$$H_2(z) = \frac{1}{3}\left[-3'36 - 4'32\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + 8'68\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right] =$$

$$= -1'12 - 1'44\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + 2'89\hat{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$ ROC: $|z| > 1/2$

$$h_2[n] = -1'12\,\delta[n] - 1'44\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2'89\hat{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Una altra possible solució seria la següent: 




$H_2(z)$

ZEROS en $\frac{1}{-0'7}$ i $\frac{1}{0'8}$

POLS en $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

$$H_2(z) = K \frac{\left(1+\frac{1}{0'7} z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{0'8} z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3} z^{-1}\right)} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

El sistema global queda en aquest cas:

$$H_1(z) H_2(z) = K \frac{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})\left(1+\frac{1}{0'7} z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{0'8} z^{-1}\right)}{(1-0'8z^{-1})(1+0'7z^{-1})\left(1-\frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3} z^{-1}\right)}$$

K es pot calcular de la mateixa manera que abans:

$$K \frac{(1-2)(1-3)\left(1+\frac{1}{0'7}\right)\left(1-\frac{1}{0'8}\right)}{(1-0'8)(1+0'7)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)} = 2$$

$$-10'7143 \cdot K = 2 \longrightarrow K = -0'1867.$$

Calculem ara la resposta impulsional d'aquest nou $H_2(z)$. (7)

$$\frac{\left(1+\frac{1}{0'7}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{0'8}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{\left(1+\frac{10}{7}z^{-1}\right)\left(1-\frac{5}{4}z^{-1}\right)}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} =$$

$$= \frac{1+\frac{5}{28}z^{-1}-\frac{25}{14}z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} =$$

$$\begin{array}{l|l} 1+\frac{5}{28}z^{-1}-\frac{25}{14}z^{-2} & 1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2} \\ \cline{2-2} -\frac{75}{7}+\frac{125}{14}z^{-1}-\frac{25}{14}z^{-2} & -\frac{75}{7} \\ \hline 11'71-8'75z^{-1} & \end{array}$$

$$= -\frac{75}{7} + \frac{11'71-8'75z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = -\frac{75}{7} + \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$A = \left.\frac{11'71-8'75z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{11'71-8'75.2}{1-\frac{2}{3}} = -17'37$$

$$B = \left.\frac{11'71-8'75z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{11'75-8'75.3}{1-\frac{3}{2}} = 29'08$$

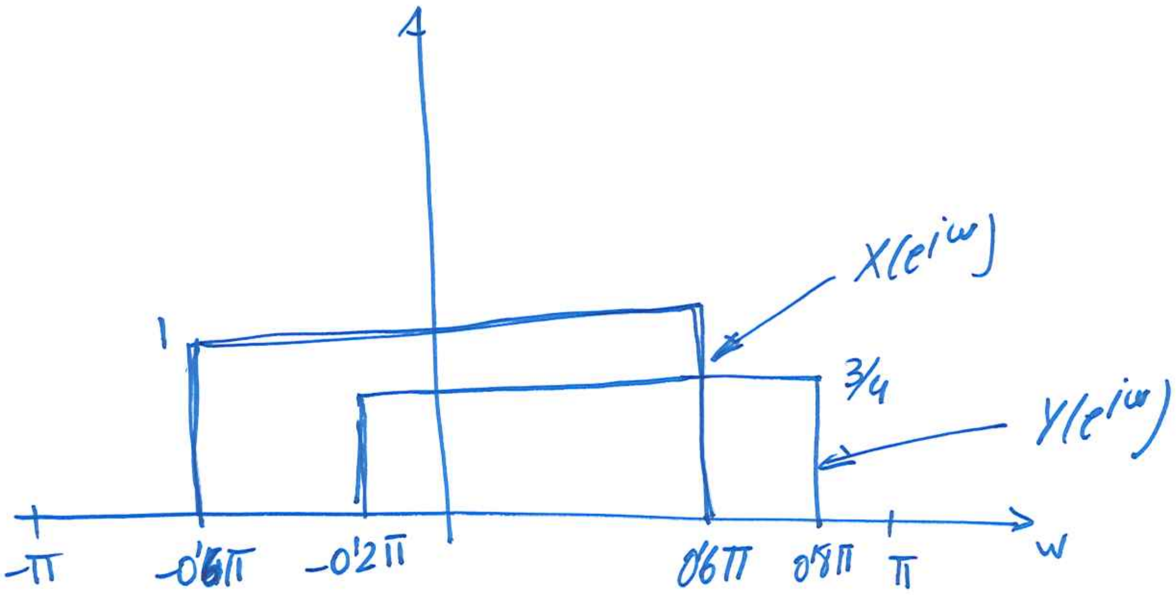
$$H_2(z) = -0'1867 \left[ -\frac{75}{7} - \frac{17'37}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{29'08}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \right] =$$

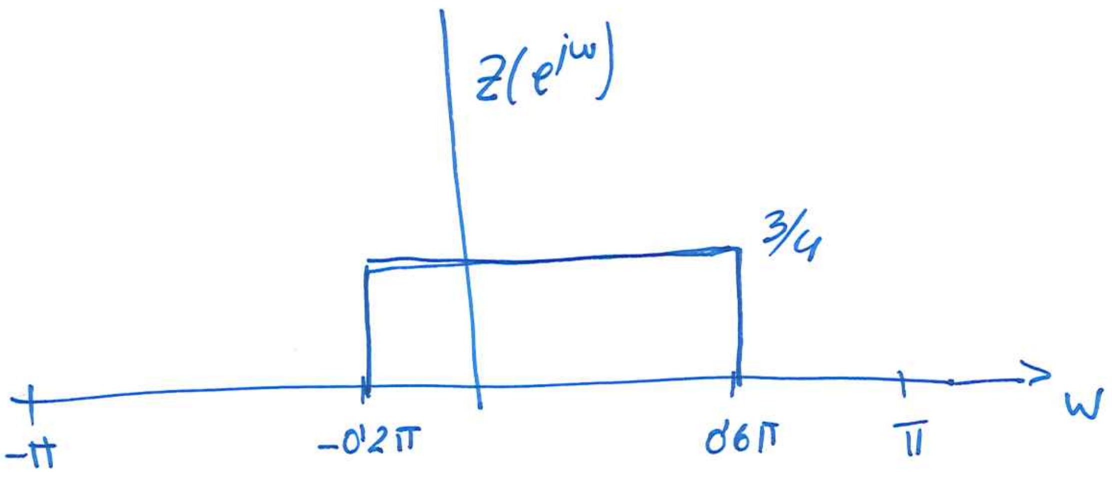
$$= 2 + 3'24 \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - 5'42 \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

$$h_2[n] = 2\,\delta[n] + 3'24 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 5'42 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

# Problema 2

$$Z(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\,Y(e^{j\omega})$$




És un rectangle d'amplada total $0'8\pi$, però que no va de $-0'4\pi$ a $+0'4\pi$, sinó que està desplaçat $0'2\pi$ en pulsació.

$$z[n] = \frac{3}{4}\,\frac{\sin(0'4\pi n)}{\pi n}\,e^{j0'2\pi n}$$