4.3. Considera la secuencia $x[n]$ de longitud finita N (es decir, $x[n] = 0$ para n fuera de $0 \leq n \leq N-1$). $X(e^{j\omega})$ representa la transformada de Fourier de $x[n]$, y definimos $\tilde{X}[k]$

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/64}.$$

Se sabe además que en $0 \leq k \leq 63$, $\tilde{X}[k] = 0$ excepto $\tilde{X}[32] = 1$.

a) Si la longitud de la secuencia es $N = 64$, determina una secuencia $x[n]$ que cumpla lo anterior. ¿Es única esta secuencia?

b) ¿Y si la longitud de la secuencia es $N = 192 = 3 \cdot 64$?

(4.3) Se considera la secuencia $x[n]$ de longitud finita N, es decir, $x[n]=0$ para n fuera de $0 \le n \le N-1$. Definimos $\tilde{X}[k]$ a los coeficientes de la serie de Fourier discreta de la extensión periódica $\tilde{x}[n]$. Recordemos que tenemos las siguientes relaciones:

$$x[n] \xrightarrow[\text{(TF)}]{\text{TRANSFORMADA DE FOURIER}} X(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{N muestras}} X[k]=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

$$X[k] \xrightarrow{\text{IDFT}_N} \tilde{x}[n]$$

Sabemos que:

$$\tilde{X}[k]=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{64}k} = \begin{cases} 0 & k=0,1,\dots,63 \text{ excepto } 32 \\ 1 & k=32 \end{cases}$$

a) Si $N=64$, que secuencia $x[n]$ cumple lo anterior?

Para $N=64$, $\tilde{x}[n]$ es igual a $x[n]$ y por tanto se puede calcular con la IDFT de 64 muestras:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{64}\cdot 1 \cdot e^{j2\pi\frac{32}{64}n} =$$

$$= \frac{1}{64} e^{j\pi n} = \frac{1}{64}(-1)^n$$

En el caso de $N=64$, $x[n]$ es una <u>secuencia única</u> que cumple la definición enunciada de $\tilde{X}[k]=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{64}k}$.

4.3) b) Si $N = 192 = 3 \cdot 64$, que secuencia $x[n]$ cumple el enunciado?

El enunciado solo define $\tilde{X}[k]$ con una resolución angular $\Delta w = \frac{2\pi}{64}$.

Si en el apartado b) consideramos una resolución angular $\Delta w = \frac{2\pi}{192}$, dado que $N = 192$, la secuencia $x[n]$ corresponde a 192 componentes frecuenciales, de los cuales solo conocemos del enunciado aquellas para $w = \frac{2\pi}{3 \cdot 64} \cdot \ell \cdot 3$, es decir, para $k = 3\ell$ (múltiplos de 3).

ℓ entero

Por lo tanto, hay múltiples secuencias $x[n]$ que cumplen con la definición de $\tilde{X}[k]$. Pongamos unos ejemplos:

- Para $N = 64$

$$x[n] = \underbrace{\overbrace{\boxed{1\ -1\ 1\ -1 \cdots 1\ -1\ 1\ -1}}^{\underline{x}}}_{N=64} \cdot \frac{1}{64}$$

- Para $N = 192 = 3 \cdot 64$

$$x[n] = \overbrace{\boxed{1\ -1\ 1\ -1 \cdots 1\ -1\ 1\ -1}}^{\underline{x}}\overbrace{\boxed{0000 \cdots 0000}}^{0}\overbrace{\boxed{0000 \cdots 0000}}^{0} \cdot \frac{1}{64}$$

$$x[n] = \frac{1}{3} \cdot \overbrace{\boxed{1\ -1\ 1\ -1 \cdots 1\ -1\ 1\ -1}}^{\underline{x}}\overbrace{\boxed{-1\ 1\ -1 \cdots 1\ -1\ 1\ -1}}^{\underline{x}}\overbrace{\boxed{1\ -1\ 1\ -1 \cdots 1\ -1\ 1\ -1}}^{\underline{x}} \cdot \frac{1}{64}$$

$$x[n] = \frac{1}{3} \cdot [\ \underline{x}\ ;\ -\underline{x}\ ;\ \underline{x}\ ]$$

$$x[n] = \frac{1}{3} \cdot [\ \underline{x}\ ;\ \underline{x}\ ;\ -\underline{x}\ ]$$

$\vdots$

Todas estas secuencias cumplen con la definición de $\tilde{X}[k]$ para $w = \frac{2\pi}{64} k$.

<u>Comprobación:</u>

$\underline{y} = \frac{1}{3} [\underline{x}\ ;\ \underline{x}\ ;\ \underline{x}\ ]$, $N' = 3 \cdot N = 3 \cdot 64$

$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-N] + x[n-2N])$

$Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot \frac{1}{3}(1 + e^{-jwN} + e^{-jw2N})$

$$Y[k] = Y(e^{jw})\Big|_{w = \frac{2\pi}{N'}k = \frac{2\pi}{3N}k} = X(e^{j\frac{2\pi}{3N}k}) \cdot \underbrace{\frac{1}{3}(1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + e^{-j\frac{2\pi}{3}2k})}$$

$\longrightarrow k = 3\ell \Rightarrow 1$

$\longrightarrow k \neq 3\ell \Rightarrow 0$