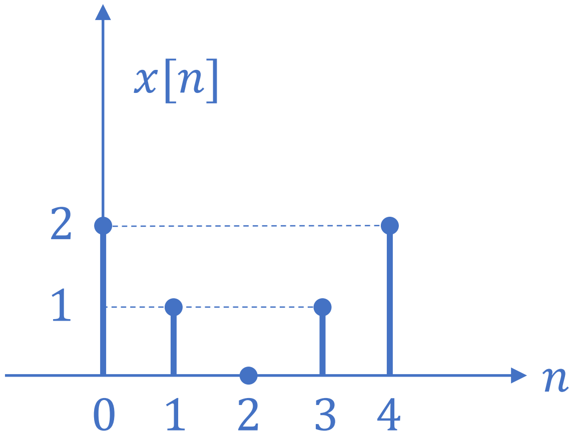
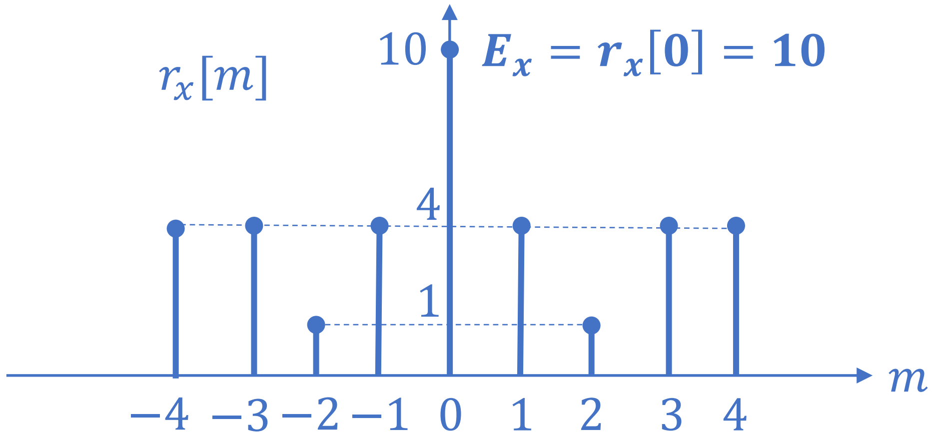
Se diseña un sistema de radar que utiliza la siguiente señal $x[n]$:

$$x[n] = \left(1 + \cos\frac{\pi}{2}n\right)(u[n] - u[n-5])$$

a) Calcule la energía de $x[n]$, E_x, y su densidad espectral de energía $S_x(e^{j\omega})$. Deje esta última expresión de forma que se puedan distinguir claramente módulo y fase. **[1.25 puntos]**





$$S_x(e^{j\omega}) = F\{r_x[m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x[m]e^{-j\omega m} = 10 + 2\cos 2\omega + 8(\cos\omega + \cos 3\omega + \cos 4\omega) = (2\cos\omega + 4\cos 2\omega)^2$$

El radar está diseñado para trabajar en configuración biestática, es decir, la recepción de la señal se realiza mediante una antena localizada en una posición distinta de la transmisora, tal y como se muestra en la figura 1.

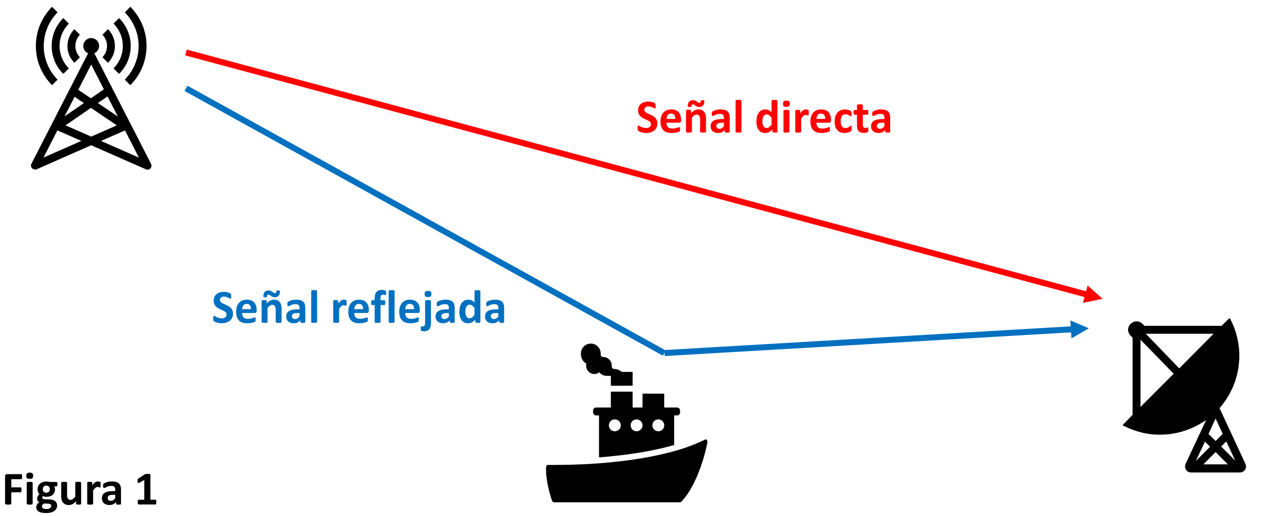


Figura 1

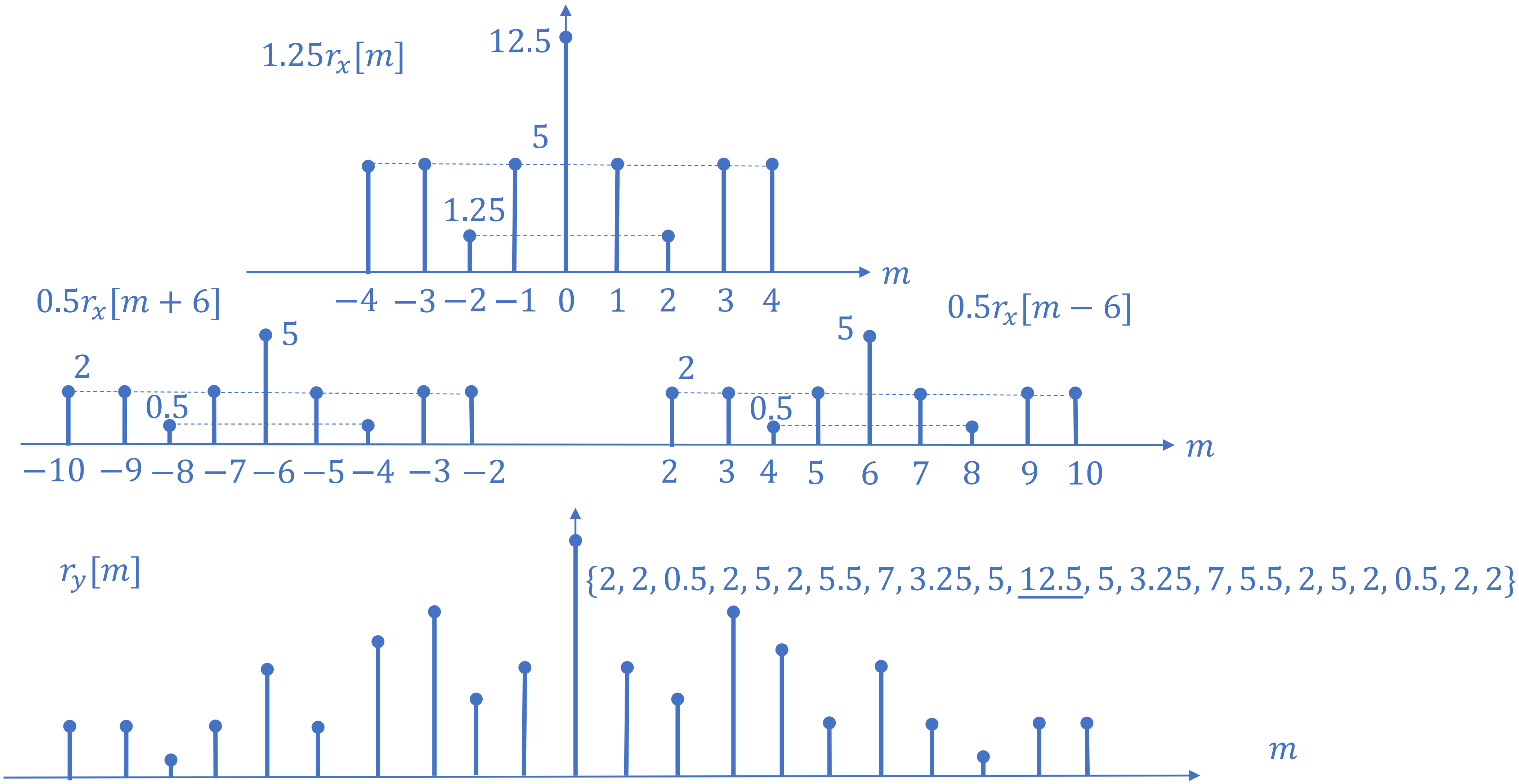
La señal recibida $y[n]$ se puede modelar como la salida, para la señal de entrada $x[n]$ del apartado anterior, de un sistema con respuesta impulsional

$$h[n] = \alpha_1 \delta[n - n_1] + \alpha_2 \delta[n - n_2],$$

donde α_1 y α_2 representan las atenuaciones de la señal directa y la señal reflejada en la figura 1, y n_1 y n_2, sus respectivos retardos debidos a los distintos caminos que tienen que recorrer.

b) Calcule los valores de la autocorrelación de la señal recibida, $r_y[m]$, asumiendo que $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.5$, $n_1 = 13$ y $n_2 = 19$. **[1.25 puntos]**

$$r_y[m] = r_x[m] * r_h[m] = \alpha_1\alpha_2 r_x[m+n_2-n_1] + \left(a_1^2+a_2^2\right) r_x[m] + \alpha_1\alpha_2 r_x[m+n_1-n_2]$$



Teniendo en cuenta que el objetivo del radar es estimar el incremento de distancia que recorre la señal reflejada con respecto a la señal directa, este valor está directamente relacionado con la diferencia de retardos $n_2 - n_1$ (medido en número de muestras), la frecuencia de muestreo del sistema (relaciona muestras con tiempo) y la velocidad de propagación de la señal (relaciona distancia con tiempo). Como la diferencia de retardos se obtiene a partir del análisis de la forma de $r_y[m]$, es importante que no haya solapamiento entre los componentes $\beta_k r_x[m - m_k]$ presentes en $r_y[m]$ cuando se expresa en función de $r_x[m]$ (siendo β_k y m_k los factores de escala y retardo del componente k-ésimo).

c) ¿Cuánto tiene que valer la diferencia $n_2 - n_1$ mínima para que en $r_y[m]$ aparezcan réplicas de $r_x[m]$ sin solape entre ellas? Con el valor obtenido y suponiendo un frecuencia de muestreo de 54 Msps, ¿cuánto vale la distancia adicional que recorre la señal reflejada con respecto la directa? NOTA: Puede asumir que la velocidad de propagación de la señal es $\mathrm{c} = 3 \cdot 10^8$ m/s. **[0.5 puntos]**

A partir de la longitud de $x[n]$ (5 muestras), sabemos que r_x va de -4 a 4. Por lo tanto, para que no haya solapamiento, las distintas componentes r_x deben estar separadas **9 muestras**, lo que nos proporciona la diferencia de retardos $n_2 - n_1$ mínima. De aquí podemos resolver la distancia (d) a partir de su relación con la frecuencia de muestreo F_s y la velocidad de la señal (c) en unidades de tiempo:

$$\frac{n_2 - n_1}{F_s} = \frac{d}{c} \rightarrow d = \frac{(n_2 - n_1)c}{F_s} = 50\, m$$