P.6.7 Un sistema LTI está caracterizado por

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2} z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)} \quad ; \quad |z| > \frac{1}{2}$$

a) Determinar la respuesta al impulso $h[n]$

Puesto que en el denominador tenemos 2 polos, no podemos descomponer directamente en 2 fracciones $\frac{1}{\text{Denom}} - \frac{1/2\, z^{-2}}{\text{Denomin.}}$ para hallar las inversas, sino que tendríamos que descomponer de nuevo cada una de ellas, y en la 2ª aplicar la propiedad del desplazamiento temporal. Por tanto, como son de igual orden numerador y denominador, dividiremos:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2} z^{-2}}{1 - \frac{1}{4} z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2}} = \frac{1 - \frac{1}{2} z^{-2}}{1 - \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rrr|l} -\frac{1}{2} z^{-2} & & +1 & \frac{1}{8} z^{-2} - \frac{3}{4} z^{-1} + 1 \\ \cline{4-4} +\frac{1}{2} z^{-2} & - 3z^{-1} & +4 & -4 \\ \cline{1-3} & -3z^{-1} & +5 & \end{array}$$

$$\Rightarrow H(z) = -4 + \frac{5 - 3z^{-1}}{1 - \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2}} = -4 + \underbrace{\frac{5 - 3z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)}}_{H_1(z)} =$$

$$= -4 + \frac{A}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}$$

$$A = H_1(z)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\Big|_{z^{-1} = 2} = \frac{5 - 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}\Bigg|_{z^{-1} = 2} = -2$$

$$B = H_1(z)\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)\Big|_{z^{-1} = 4} = \frac{5 - 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}\Bigg|_{z^{-1} = 4} = 7$$

Por tanto:

$$h[n] = -4\delta[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 7\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$