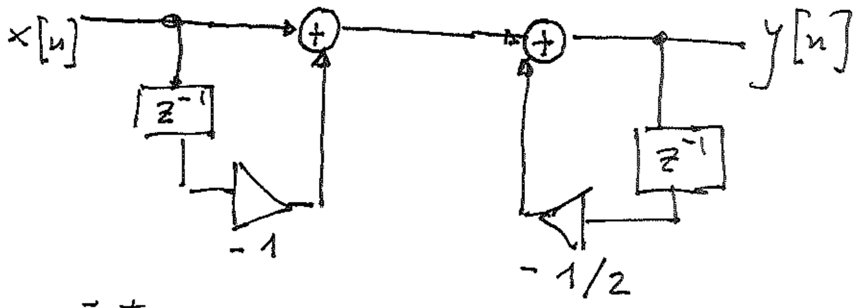
2.5. Sistema LTI

$$y[n] + \frac{1}{2}\, y[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

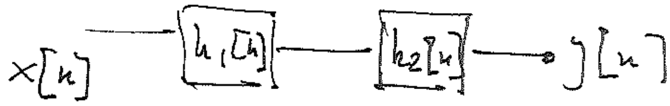
Inicialmente en estado "cero" y causal

a) Diagrama? Buscar eficiencia

$$y[n] = x[n] - x[n-1] - \frac{1}{2}\, y[n-1]$$



Este esquema se puede interpretar como 2 bloques en serie



por lo que

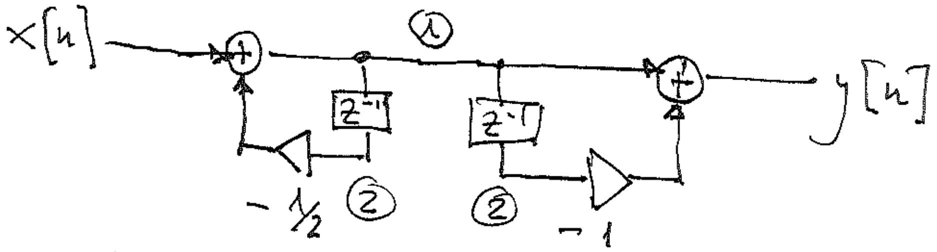
$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$

prop. asociativa

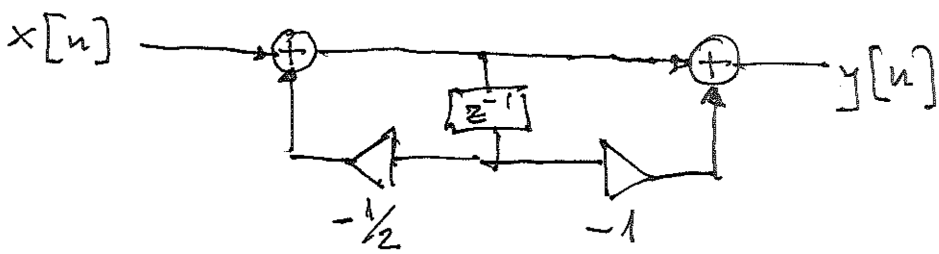
$$= x[n] * \{h_2[n] * h_1[n]\}$$

por propiedad conmutativa de la convolución

Es decir, que podemos intercambiar el orden de los bloques



En 1 y 2 las señales son las mismas, por lo que podemos expresarlo más eficientemente como:



b) Hallar la respuesta impulsional

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow h[n]$$

Por tanto, a partir de la ecuación del sistema, sustituiremos $x[n]$ por $\delta[n]$, y $y[n]$ por $h[n]$.
Así:

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] - \frac{1}{2} h[n-1]$$

Como en el dominio temporal no parece fácil aislar $y[n]$ (y en el frecuencial ahora no es el caso, aunque obviamente sería un camino), lo que haremos será dar valores a "n" encontrando $h[n]$ para cada uno de ellos, con la esperanza de encontrar una secuencia que lo describa.

Sabemos que por ser causal $h[n]\Big|_{n<0} = 0$

$$h[0] = \delta[0] - \delta[-1] - \frac{1}{2} h[-1] = 1 - 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 1$$

$$h[1] = \delta[1] - \delta[0] - \frac{1}{2} h[0] = 0 - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$h[2] = \underbrace{\delta[2] - \delta[1]} - \frac{1}{2} h[1] = 0 - 0 - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

Todos estos términos ya serán siempre nulos, por lo que

$$h[n]\Big|_{n>1} = \frac{3}{(-2)^n}$$

Pero vemos que esta expresión también se cumple en $n=1$. Donde no se verifica es en $n=0$, por lo que ahí deberemos ajustar. Así:

$$h[n] = \frac{3}{(-2)^n} u[n] - \underbrace{2\delta[n]}$$

c) Es estable el Sistema?

Para ello deberemos verificar $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

es decir que este sumatorio esté acotado

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{\left|\frac{3}{(-2)^n} u[n] - 2\delta[n]\right|\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{3}{(-2)^n} - 2\delta[n]\right| =$$

ambos términos son nulos para $n<0$

$$= \left|\frac{3}{(-2)^0} - 2\delta[0]\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{3}{(-2)^n}\right| - \underbrace{2\delta[n]}_{0} \Big| =$$

Saco el del término $n=0$

$$= |3-2| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 1 + 3 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{} =$$

Suma de una progresión geométrica de razón $1/2$

$$S = \frac{a_0 - a_{n-1} r}{1-r}$$

$$= 1 + 3\,\frac{\frac{1}{2} - 0}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 3 = \underline{\underline{4}} \Rightarrow \underline{\text{Estable}}$$

d) Encontrar $y[n]$ si $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

$$e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \, ?$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$\Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{j\omega_0 [n-k]}$$

$$= \underbrace{e^{j\omega_0 n}}_{\text{autofunción}} \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k}}_{H(e^{j\omega_0}) \,=\, \text{Respuesta frecuencial a } \omega=\omega_0} \qquad (1)$$

Si encontramos este valor:

$$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{(-2)^k} \mu[k] - 2\delta[k] \right) e^{-j\omega_0 k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{(-2)^k} \cdot e^{-j\omega_0 k} - 2 =$$

$$= 3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-j\omega_0}}{-2} \right)^k - 2 =$$

progresión geométrica $r = \dfrac{e^{-j\omega_0}}{-2}$

$$= 3\, \frac{1}{1 - \left(\frac{e^{-j\omega_0}}{-2} \right)} - 2 = \frac{6}{2 + e^{-j\omega_0}} - 2$$

Por lo que sustituyendo en (1):

$$y[n] = e^{j\omega_0 n} \left[\frac{6}{2 + e^{-j\omega_0}} - 2 \right]$$

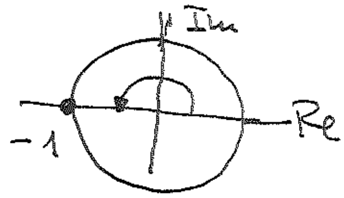
e) Encontrar la salida si $x[n] = (-1)^n$

Asemejaremos $[-1]^n$ con $e^{j\omega_0 n}$ y entonces aprovecharemos el resultado obtenido en el apartado anterior.

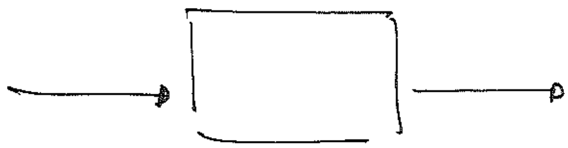
$$-1 = e^{j\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} -1 \rightarrow \text{Módulo } 1 \\ \quad\ \ \text{Argumento } 180^\circ = \pi \\ e^{j\omega_0} \rightarrow \text{Modulo } 1 \\ \quad\ \ \text{Argumento } \omega_0. \end{cases}$$

Por tanto

$$\omega_0 = \pi$$



Es decir:



$e^{j\pi n}$

$$y[n] = \underbrace{e^{j\pi n}}_{(-1)^n} \cdot H(e^{j\omega_0})\Big|_{\omega_0=\pi} =$$

$$= (-1)^n \cdot \left(\frac{6}{2 + e^{-j\pi}} - 2 \right) = (-1)^n \left(\frac{6}{2-1} - 2 \right) = 4(-1)^n$$