PRUEBA PARCIAL – DICIEMBRE 2016
102712 Señales y Sistemas Discretos

Profesores: Gonzalo Seco Granados, José A. Del Peral

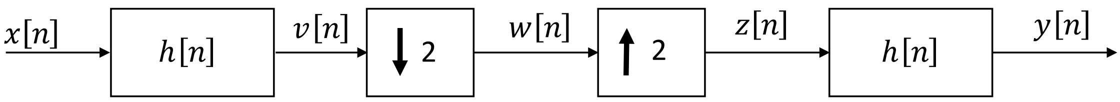
Instrucciones: 120 minutos. Ponga el nombre y el NIU en todas las hojas. Entregue cada cuestión en una hoja o cara diferente y ordenadas.

Cuestión 1 (1 punto)
Considere el sistema LTI con respuesta impulsional

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Determine la respuesta a la entrada $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)$.

Cuestión 2 (1 punto)
Se dispone del siguiente sistema:



Se utiliza el filtro $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$. Observe el signo negativo en la expresión de $h[n]$. La entrada es la señal $x[n] = \{\underline{1}, 2, -4, 5, -1, 6, 7, 8, -3\}$, donde la muestra subrayada corresponde a $n = 0$. Calcule la salida $y[n]$ del sistema.

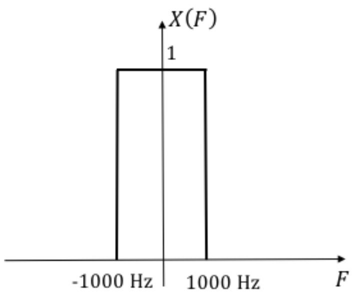
Cuestión 3 (1 punto)
Calcule convolución circular de $N = 8$ puntos entre las secuencias $x[n] = \{\underline{1}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ y $y[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4, -1, -1, 0, 3\}$. La muestra subrayada corresponde a $n = 0$.

Cuestión 4 (1 punto)
Determine si el siguiente sistema

$$T\{x[n]\} = \sqrt{n}\, x[n] + 1$$

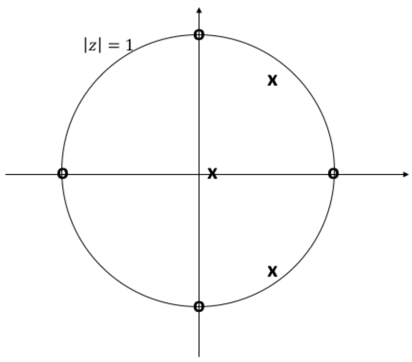
es estable. ¿Y causal? ¿Lineal? ¿Invariante?

Cuestión 5 (1 punto)
Considere la señal analógica $x(t)$ cuya transformada de Fourier $X(F)$ viene representada por:



Proporcione la expresión de la señal $x[n]$ que se obtiene al muestrear $x(t)$ con una frecuencia de muestreo $F_s = 4000$ muestras/s.

Cuestión 6 (1 punto)
Considere el siguiente diagrama de polos y ceros correspondiente a la función de transferencia de un determinado filtro.



Dibuje cualitativamente el módulo de su respuesta frecuencial y discuta si se trata de un filtro paso bajo, paso banda o paso alto.

Cuestión 7 (1 punto)
Dibuje un diagrama de bloques que implemente un sistema con la siguiente función de transferencia:

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - 0.2\, z^{-1})(1 + 0.5\, z^{-1})}, \quad |z| > 0.5$$

Cuestión 8 (3 puntos)
La función de transferencia de un determinado sistema lineal, invariante y estable es

$$H(z) = \frac{1 - \frac{9}{10} z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{4} z^{-1}\right)}.$$

.

a) ¿Cuál es su región de convergencia? ¿Se trata de un sistema de fase mínima?
b) Dibuje el diagrama de polos y ceros del sistema inverso. El sistema inverso, ¿es estable?
c) Calcule la respuesta impulsional $h[n]$ del sistema descrito por $H(z)$.
d) Calcule la respuesta del sistema $H(z)$ a la entrada

$$x[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

EXAMEN SSD - DICIEMBRE 2016

CUESTIÓN 1

Podemos descomponer la entrada en exponenciales complejas y sabemos que el sistema multiplica cada exponencial compleja por su respuesta frecuencial:

Respuesta frecuencial del sistema:

$$H(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j2\pi f n} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi f}}$$

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) = \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{\pi}{8}n} - e^{-j\frac{\pi}{8}n}\right] =$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \frac{1}{2j} H(e^{j\pi/8})\, e^{j\pi/8\, n} - \frac{1}{2j} H(e^{-j\pi/8})\, e^{-j\pi/8\, n}$$

$$H(e^{j\pi/8}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/8}}$$

$$H(e^{-j\pi/8}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\pi/8}}$$

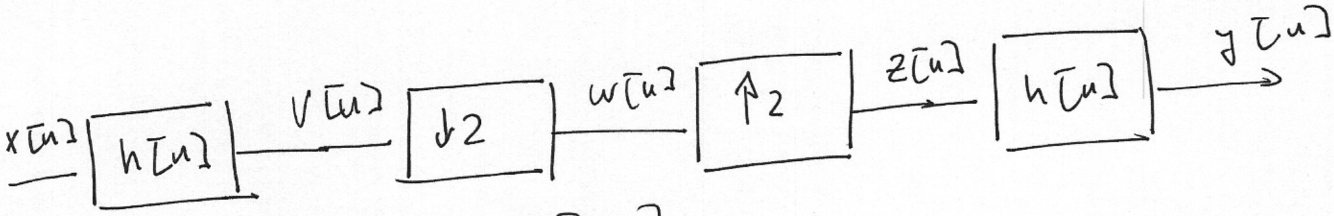
Se puede desarrollar la expresió de $y[n]$ y dar una expresió más compacta, pero no es necesario en el examen.

$$H(e^{j\pi/8}) = 1'6499 - 0'5867j = 1'7511\, e^{-j0'3417} = H^*(e^{-j\pi/8})$$ ②

$$\boxed{y[n]} = \frac{1}{2j}\, 1'7511 \cdot \left[e^{j[\pi/8\, n - 0'3417]} - e^{-j[\pi/8\, n - 0'3417]} \right] =$$

$$\boxed{= 1'7511 \sin\left(\pi/8\, n - 0'3417\right)}$$

Cuestión 2



$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

$x[n] = \{\underline{1}, 2, -4, 5, -1, 6, 7, 8, -3\}$

$v[n] = \{\underline{1}, 1, -6, 9, -6, 7, 1, 1, -11, 3\}$

$w[n] = v[2n]$

$w[n] = \{\underline{1}, -6, -6, 1, -11\}$

$z[n] = \{\underline{1}, 0, -6, 0, -6, 0, 1, 0, -11, 0\}$

$y[n] = z[n] - z[n-1]$

$y[n] = \{\underline{1}, -1, -6, 6, -6, 6, 1, -1, -11, 11\}$

CUESTIÓN 3

$$x[n] \, Ⓝ \, y[n] = \sum_{k=0}^{7} \tilde{x}[k] \, \tilde{y}[n-k]$$

$N=8$

Extensiones periódicas de las señales, con periodo 8 muestras.

$x[k]$: 1 1 1 1 1 1 1 1

$\hat{y}[n-k]$: 1 3 0 -1 -1 4 3 2

se multiplica y se suma → $1\times1+1\times3+1\times0 \cdots = 11$

n=0	1	3	0	-1	-1	~~4~~ 4	3		→ 11
n=1	2	1	3	0	-1	-1	4		→ 11
n=2	3	2	1	3	0	-1	-1		→ 11
n=3	4	3	2	1	3	0	-1		→ 11
n=4	-1	4	3	2	1	3	0		→ 11
n=5	-1	-1	4	3	2	1	3		→ 11
n=6	0	-1	-1	4	3	2	1		→ 11
n=7	3	0	-1	-1	4	3	2	1	

$x[n] \, Ⓝ \, y[n] = \{ \underline{11}, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11 \}$

$N=8$

Se puede comprobar con Matlab haciendo

cconv(x, y)

CUESTIÓN 4

$$y[n] = T\{x[n]\} = \sqrt{n}\, x[n] + 1$$

- No estable. Aunque $|x[n]| < k, \forall n$, $T\{x[n]\}$ puede crecer sin límite.

- Causal. $y[n]$ solo depende de la entrada actual; no depende de entradas futuras.
  ↓
  Sí

- Lineal → NO

$$T\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \alpha_1 \sqrt{n}\, x_1[n] + \alpha_2 \sqrt{n}\, x_2[n] + 1$$

$$\alpha_1 T\{x_1[n]\} + \alpha_2 T\{x_2[n]\} = \alpha_1 \sqrt{n}\, x_1[n] + \alpha_2 \sqrt{n}\, x_2[n] + \alpha_1 + \alpha_2$$

Se observa que

$$T\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} \neq \alpha_1 T\{x_1[n]\} + \alpha_2 T\{x_2[n]\}$$

- No invariante (o sea, es variante)

$$T\{x[n-M]\} = \sqrt{n}\, x[n-M] + 1$$

$$y[n-M] = \sqrt{n-M}\, x[n-M] + 1$$

No son iguales.

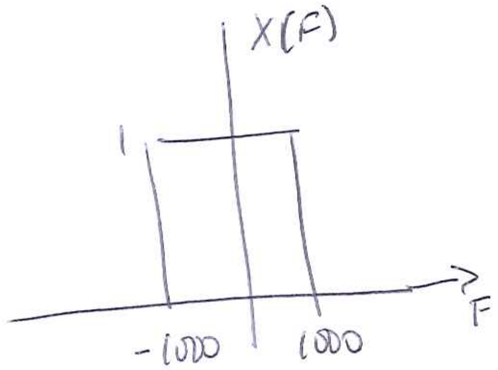
CUESTIÓN 5

$$X(F) = \Pi\left[\frac{F}{2000}\right] \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t) = 2000 \cdot \mathrm{sinc}(2000t)$$

$$x[n] = x(t)\Big|_{t=\frac{n}{F_s}=\frac{n}{4000}} = 2000 \cdot \mathrm{sinc}\left(2000\frac{n}{4000}\right)$$

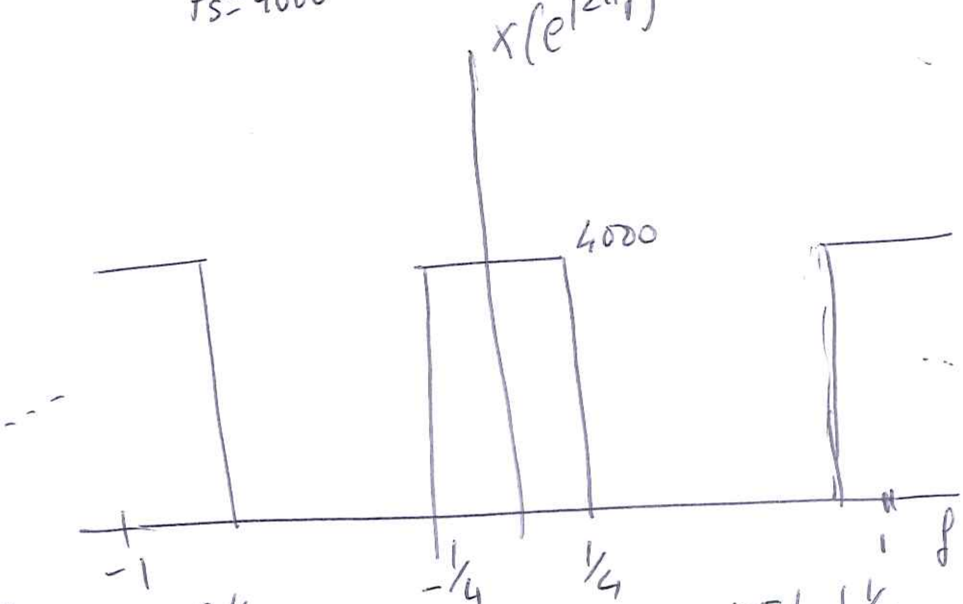
$$x[n] = 2000 \cdot \mathrm{sinc}(n/2) = 2000\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\frac{\pi}{2}n}$$

Otra manera:



$$\xrightarrow{\text{muestreo}} X(e^{j2\pi f}) = F_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{F}{F_s}-k\right)$$

$F_s = 4000$

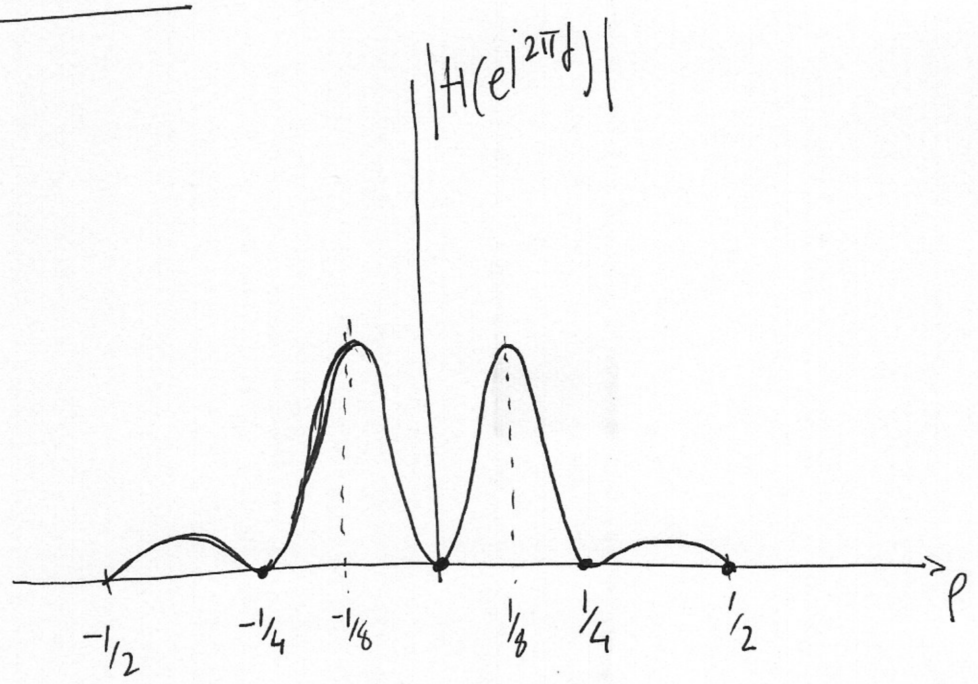


$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{j2\pi f})\,e^{j2\pi fn}\,df = \int_{-1/4}^{1/4} 4000\,e^{j2\pi fn}\,df = \frac{4000}{j2\pi n}\,e^{j2\pi fn}\Big|_{-1/4}^{1/4} =$$

$$= \frac{4000}{j2\pi n}\left[e^{j2\pi\frac{1}{4}n} - e^{-j2\pi\frac{1}{4}n}\right] = \frac{4000}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = 2000\,\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\frac{\pi}{2}n}$$

$$= 2000\,\mathrm{sinc}(n/2)$$

CUESTION 6



Filtro paso banda, centrado ~~al~~ alrededor de $f = \pm 1/8$ aprox.

CUESTIÓN 7

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-0'2z^{-1})(1+0'5z^{-1})} = \frac{1-z^{-2}}{1+0'3z^{-1}-0'1z^{-2}}$$

$$Y(z)\left(1+0'3z^{-1}-0'1z^{-2}\right) = X(z)\left(1-z^{-2}\right)$$

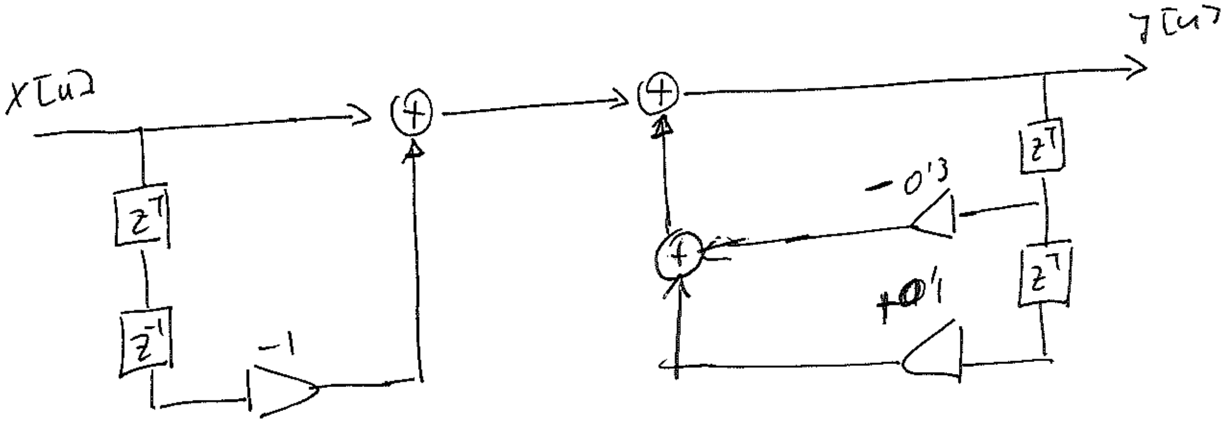
$$Y(z)+0'3z^{-1}Y(z)-0'1z^{-2}Y(z) = X(z)-z^{-2}X(z)$$

$$\downarrow TZ^{-1}$$

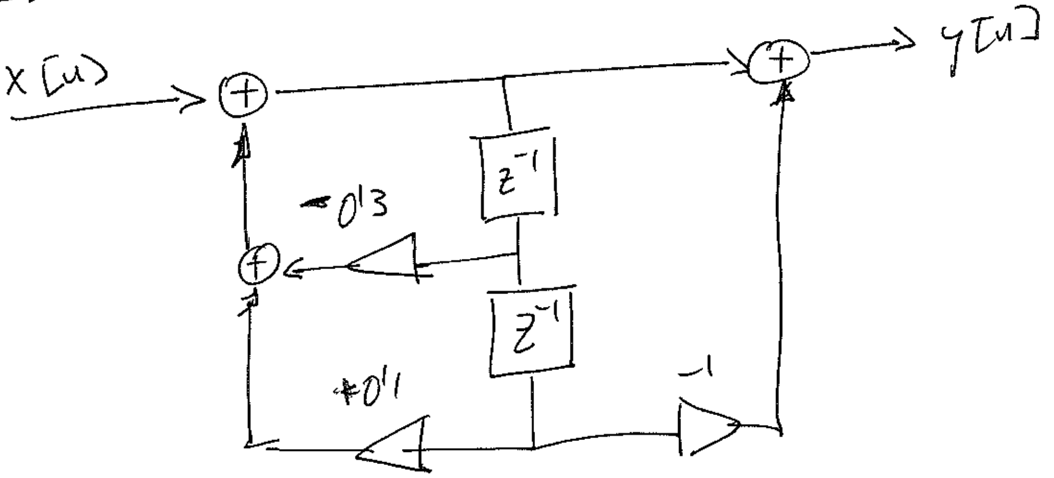
$$y[n]+0'3y[n-1]-0'1y[n-2] = x[n]-x[n-2]$$

$$y[n] = -0'3y[n-1]+0'1y[n-2]+x[n]-x[n-2]$$

Como ROC es $|z|>0'5$, se trata de un sistema causal y estable.



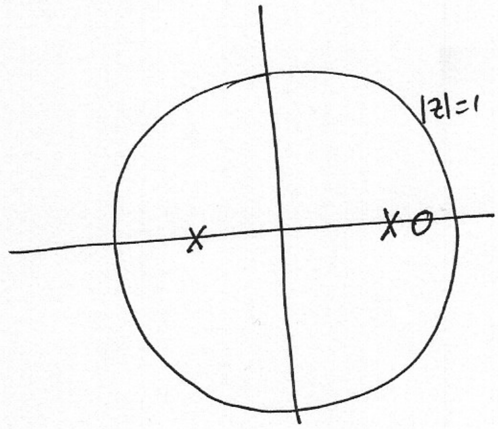
También es válido



CUESTIÓN 8

$$H(z) = \frac{1 - \frac{9}{10} z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{4} z^{-1}\right)}$$

a)



cero: $c_1 = 9/10$

polos: $d_1 = -1/2$

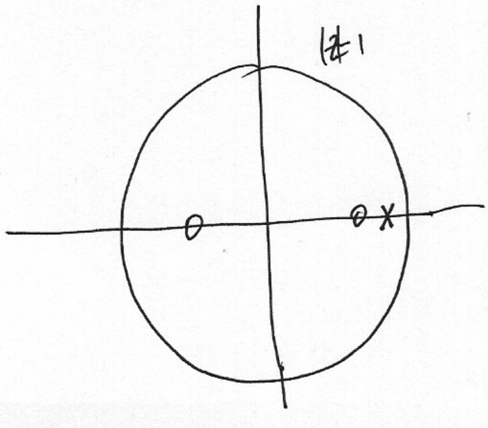
$d_2 = 3/4$

Como el sistema es estable, la ROC ha de incluir la circunferencia unidad $\Rightarrow$ $\boxed{ROC: |z| > 3/4}$

Tiene todos los polos y ceros dentro de la circunferencia unidad, por lo tanto, es un sistema de fase mínima.

b)

$$H_{inv}(z) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{4} z^{-1}\right)}{1 - \frac{9}{10} z^{-1}}$$



Si se escoge que la ROC sea $|z| > 9/10$, entonces el sistema es estable.

c)

$$H(z) = \frac{A}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}$$

$$A = \left.\frac{1-\frac{9}{10}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1+\frac{9}{5}}{1+\frac{3}{2}} = 1'12$$

$$B = \left.\frac{1-\frac{9}{10}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=\frac{3}{4}} = \frac{1-\frac{6}{5}}{1+\frac{2}{3}} = -0'12$$

$$y[n] = 1'12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] - 0'12\left(\frac{3}{4}\right)^{n} u[n]$$

d) $$Y(z) = H(z)\,X(z) = \frac{\left(1-\frac{9}{10}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{A}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{C}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$A = \left.\frac{\left(1-\frac{9}{10}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = 2'24$$

$$B = \left.\frac{\left(1-\frac{9}{10}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right|_{z=\frac{3}{4}} = -0'09$$

$$C = \left.\frac{\left(1-\frac{9}{10}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}\right|_{z=-\frac{1}{4}} = -1'15$$

$$y[n] = 2'24\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - 0'09\left(\tfrac{3}{4}\right)^n u[n] - 1'15\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]$$