escola d'enginyeria

UAB CEI CAMPUS D'EXCEL·LÈNCIA INTERNACIONAL

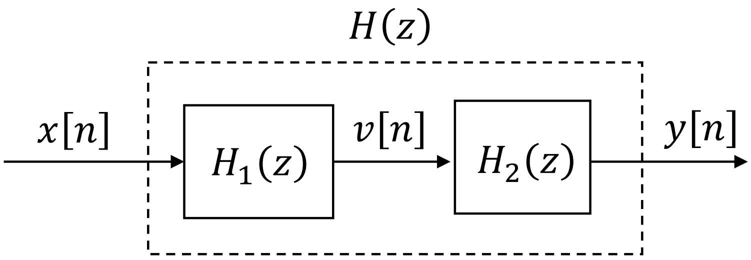
EXAMEN DE RECUPERACION – ENERO 2018
102712 Señales y Sistemas Discretos

Profesores: Gonzalo Seco Granados, José A. Del Peral

Instrucciones: 150 minutos. Se puede utilizar calculadora (pero no ordenador, móvil, ipad, etc.) y las tablas de TF, DFT y TZ del Campus Virtual si se tienen imprimidas.

Problema 1 (6 puntos)

Considere un sistema LTI con función de transferencia $H(z)$ formado por la concatenación de dos sistemas causales y estables, $H_1(z)$ y $H_2(z)$:



siendo

$$H_1(z) = \frac{1 - \frac{10}{7}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}, \quad \text{siendo ROC}_{\text{H1}}\text{: } |z| > \frac{3}{4}.$$

a) Calcule $H_2(z)$ para que el sistema $H(z)$ sea un sistema pasa-todo y el módulo de su respuesta en frecuencia sea 2, o sea, $\left|H\left(e^{j2\pi f}\right)\right| = 2$ para toda f. Recuerde que $H_2(z)$ ha de ser causal y estable.
b) Dibuje un diagrama de bloques que implemente el sistema $H(z)$.
c) Calcule $v[n]$ cuando $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$.
d) Calcule la respuesta impulsional del sistema $h[n]$.

Problema 2 (4 puntos)

Calcule la autocorrelación de la señal $x[n]$. Recuerde que la autocorrelación se puede expresar de las siguientes maneras $R_{xx}[n] = x[n] * x^*[-n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{S_{xx}\left(e^{j2\pi f}\right)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\left|X\left(e^{j2\pi f}\right)\right|^2\right\}$.

$$x[n] = 2\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)}{\pi n}e^{j2\pi\frac{1}{3}n} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)}{\pi n}\sin\left(2\pi\frac{1}{7}n\right)$$

Problema 1

a) Para ser un sistema pasa-todo, si hay un cero en c tiene que haber un polo en $1/c^*$, y si hay un polo en d, tiene que haber un cero en $1/d^*$

$$H_1(z) = \frac{1 - \frac{10}{7} z^{-1}}{1 + \frac{3}{4} z^{-1}}$$

cero: $c_1 = 10/7$

polo: $p_1 = -3/4$

$H_2(z)$ tiene que tener un polo en $1/c_1^* = 7/10$ y un cero en $1/p_1^* = -4/3$

$$H_2(z) = b \frac{1 + \frac{4}{3} z^{-1}}{1 - \frac{7}{10} z^{-1}}$$

ROC: $|z| > 7/10$

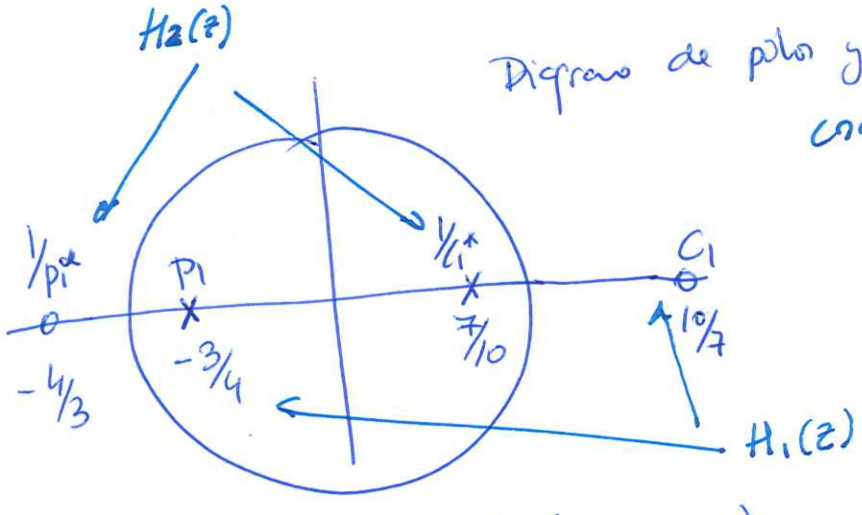


Diagrama de polos y ceros de $H(z)$: cumple la condición de pasa todo.

$$H(z) = b \frac{\left(1 - \frac{10}{7} z^{-1}\right)\left(1 + \frac{4}{3} z^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{3}{4} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{7}{10} z^{-1}\right)}$$

ROC: $|z| > 7/10 \cap |z| > 3/4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ROC: $|z| > 3/4$

②

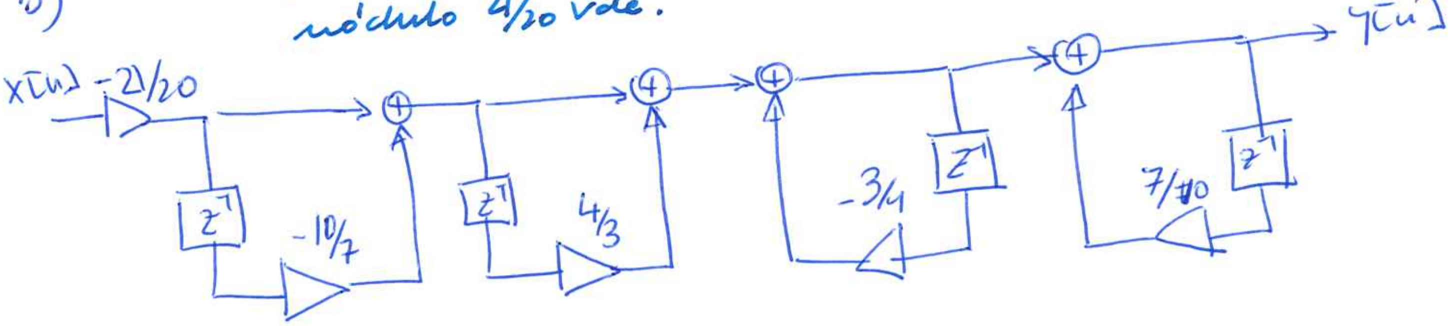
Para calcular el valor de b, evaluamos la función en $f=0$, $z=1$ por ejemplo.

$$H(z)\Big|_{z=1} = b\,\frac{(1-10/7)(1+4/3)}{(1+3/4)(1-7/10)} = b\,\frac{\frac{-3}{7}\,\frac{7}{3}}{\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{10}} =$$

$$= b\,\frac{-40}{21} = 2 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{21}{20}}$$

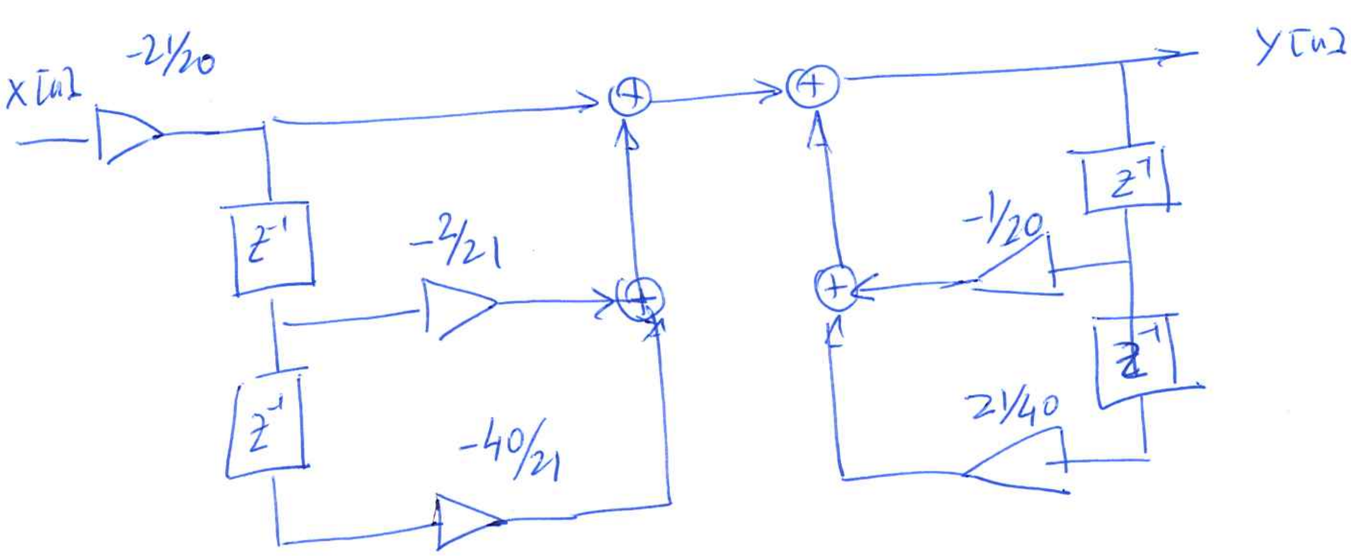
$b=\frac{21}{20}$ también es válido porque el enunciado dice $|H(e^{j2\pi f})|=2$, o sea, que el módulo es 2. Cualquier número complejo de módulo 21/20 vale.

b)



Otra posibilidad

$$H(z) = -21/20\,\frac{1-\frac{2}{21}z^{-1}+\frac{40}{21}z^{-2}}{1+\frac{1}{20}z^{-1}-\frac{21}{40}z^{-2}}$$



c)

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

$$Y(z) = H_1(z) \cdot X(z) = \frac{\left(1-\frac{10}{7}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{A}{1+\frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$A = \left.\frac{1-\frac{10}{7}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right|_{z=-3/4} = 2\text{'}0110$$

$$B = \left.\frac{1-\frac{10}{7}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}\right|_{z=1/3} = -1\text{'}0110$$

$$y[n] = 2\text{'}0110\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n] - 1\text{'}0110\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

d) 4

$$H(z) = -\frac{21}{20}\,\frac{1-\frac{2}{21}z^{-1}-\frac{40}{21}z^{-2}}{1+\frac{1}{20}z^{-1}-\frac{21}{40}z^{-2}}$$

$$1-\frac{2}{21}z^{-1}-\frac{40}{21}z^{-2} \quad \Big| \; 1+\frac{1}{20}z^{-1}-\frac{21}{40}z^{-2}$$

$$\frac{40^2}{21^2}$$

$$\frac{\frac{40^2}{21^2}+\frac{40\cdot 2}{\cancel{40}\cdot 21^2}z^{-1}-\frac{40}{21}z^{-2}}{1-\frac{40^2}{21^2}+\left(-\frac{2}{21}-\frac{2\cdot 40}{\cancel{40}\cdot 21^2}\right)z^{-1}}$$

$$H(z) = -\frac{21}{20}\left[\frac{40^2}{21^2}+\frac{-\frac{1159}{21^2}-\frac{122}{\cancel{40}\cdot 21^2}z^{-1}}{1+\frac{1}{20}z^{-1}-\frac{21}{40}z^{-2}}\right]$$

$$H(z) = -\frac{80}{21}+\frac{\frac{1159}{20\cdot 21}+\frac{61}{10\cdot 21}z^{-1}}{1+\frac{1}{20}z^{-1}-\frac{21}{40}z^{-2}} = -\frac{80}{21}+\frac{\frac{1159}{20\cdot 21}+\frac{61}{10\cdot 21}z^{-1}}{(1+\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{7}{10}z^{-1})}$$

$$H(z) = -\frac{80}{21}+\frac{A}{(1+\frac{3}{4}z^{-1})}+\frac{B}{(1-\frac{7}{10}z^{-1})}$$

$$A = \left.\frac{\frac{1159}{20\cdot 21}+\frac{61}{10\cdot 21}z^{-1}}{1-\frac{7}{10}z^{-1}}\right|_{z=-3/4} = \frac{\frac{1159}{20\cdot 21}-\frac{61}{10\cdot 21}\cdot\frac{4}{3}}{1+\frac{7\cdot 4}{10\cdot 3}} = 1'2270$$

$$B = \left.\frac{\frac{1159}{20\cdot 21}+\frac{61}{10\cdot 21}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}\right|_{z=7/10} = 1'5325$$

(5)

$$H(z) = -\frac{80}{21} + \frac{1'2270}{1+\frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{1'5325}{1-\frac{7}{10}z^{-1}} \qquad |z| > 3/4$$

$$h[n] = -\frac{80}{21}\delta[n] + 1'2270\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n] + 1'5325\left(\frac{7}{10}\right)^n u[n]$$

Otra posible solución del Problema 1

a) Otra forma de obtener un sistema $H(z)$ que cumpla la condición de pasa-todo, que es:

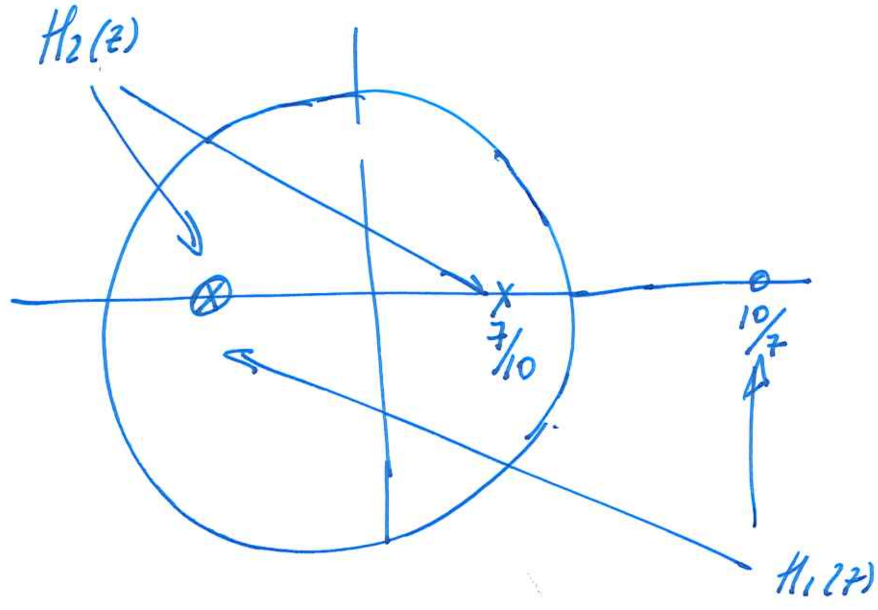
- si hay un polo en d, tiene que haber un cero en $1/d^*$
- si hay un cero en c, tiene que haber un polo en $1/c^*$

es que $H_2(z)$ quite el polo que $H_1(z)$ tiene en $-3/4$.

Recordad que para que $H_2(z)$ sea estable y causal tiene que tener los polos dentro del círculo unidad.

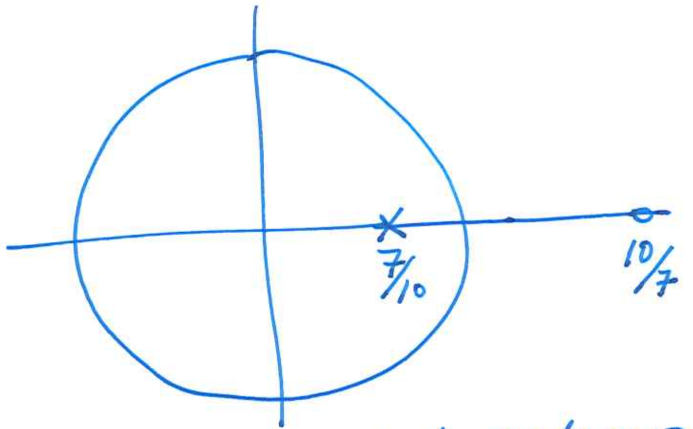
$$H_1(z) = \frac{1 - \frac{10}{7} z^{-1}}{1 + \frac{3}{4} z^{-1}} \qquad \text{cero: } c_1 = 10/7 \qquad \text{polo: } p = -3/4$$

$$H_2(z) = b \, \frac{1 + \frac{3}{4} z^{-1}}{1 - \frac{7}{10} z^{-1}} \qquad ROC\{H_2(z)\}: |z| > 7/10$$



$$H(z) = b\,\frac{1-\frac{10}{7}z^{-1}}{1-\frac{7}{10}z^{-1}}$$

Diagrama de polos y ceros de $H(z)$:



Cumple la condición de paso-todo.

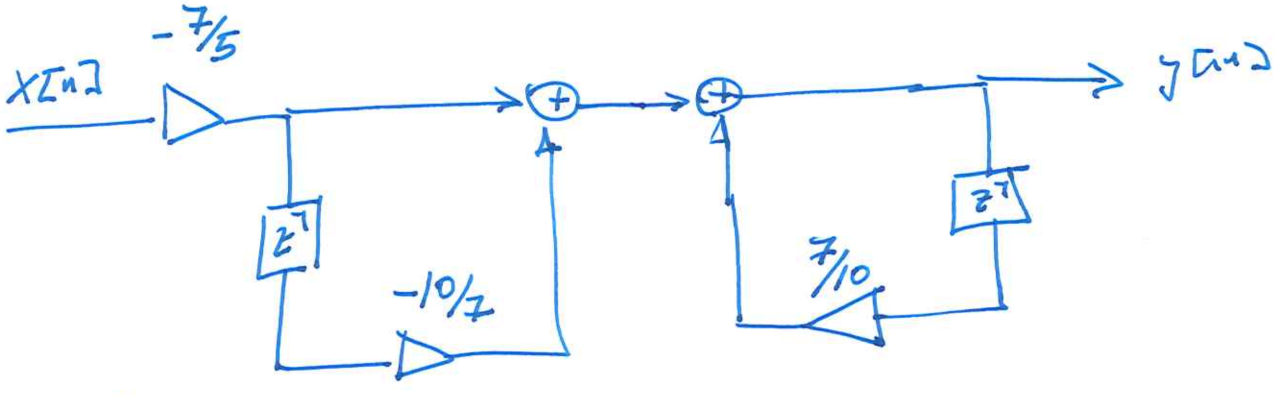
Para calcular el valor de b, evaluamos la función en $f=0$, que es $z=1$, por ejemplo:

$$H(z)\Big|_{z=1} = b\,\frac{1-\frac{10}{7}}{1-\frac{7}{10}} = b\,\frac{-\frac{3}{7}}{\frac{3}{10}} = b\,\frac{-10}{7} = 2 \Rightarrow$$

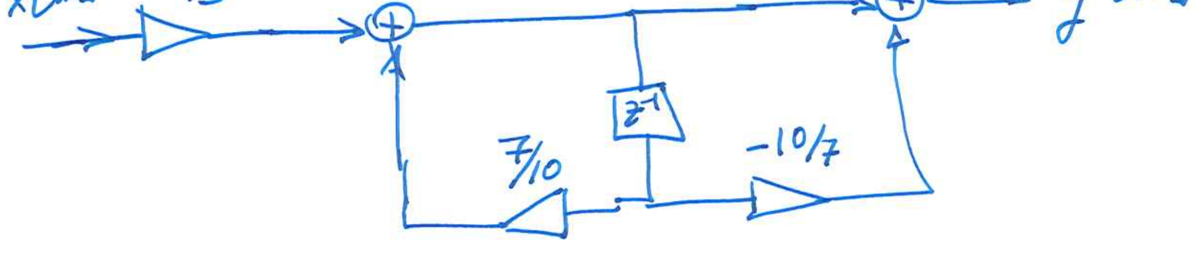
$$\Rightarrow \boxed{b = -\frac{7}{5}}$$

$b = \frac{7}{5}$ también vale.
o cualquier número complejo de módulo $\frac{7}{5}$ vale.

b)



o también



d)

$$H(z) = -\frac{7}{5}\,\frac{1-\frac{10}{7}z^{-1}}{1-\frac{7}{10}z^{-1}} = -\frac{7}{5}\left[\frac{100}{49} - \frac{51}{49}\,\frac{1}{1-\frac{7}{10}z^{-1}}\right]$$

$$\begin{array}{l|l} 1 - \frac{10}{7}z^{-1} & 1-\frac{7}{10}z^{-1} \\ \cline{2-2} \frac{100}{49} - \frac{10}{7}z^{-1} & \frac{100}{49} \\ \hline -\frac{51}{49} & \end{array}$$

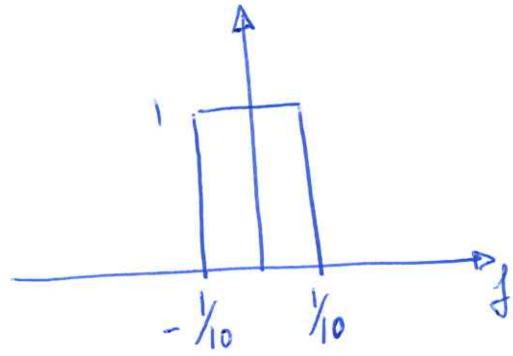
$$H(z) = -\frac{20}{7} + \frac{51}{35}\,\frac{1}{1-\frac{7}{10}z^{-1}}$$

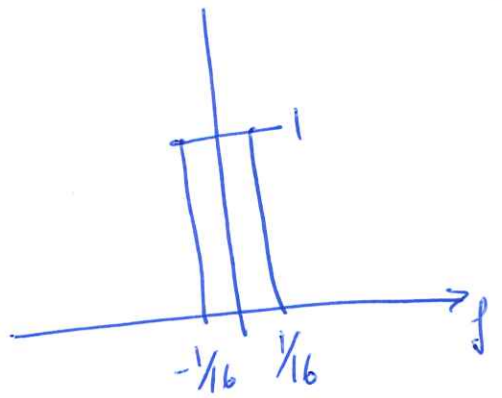
$$\downarrow$$

$$h[n] = -\frac{20}{7}\delta[n] + \frac{51}{31}\left(\frac{7}{10}\right)^{n} u[n].$$

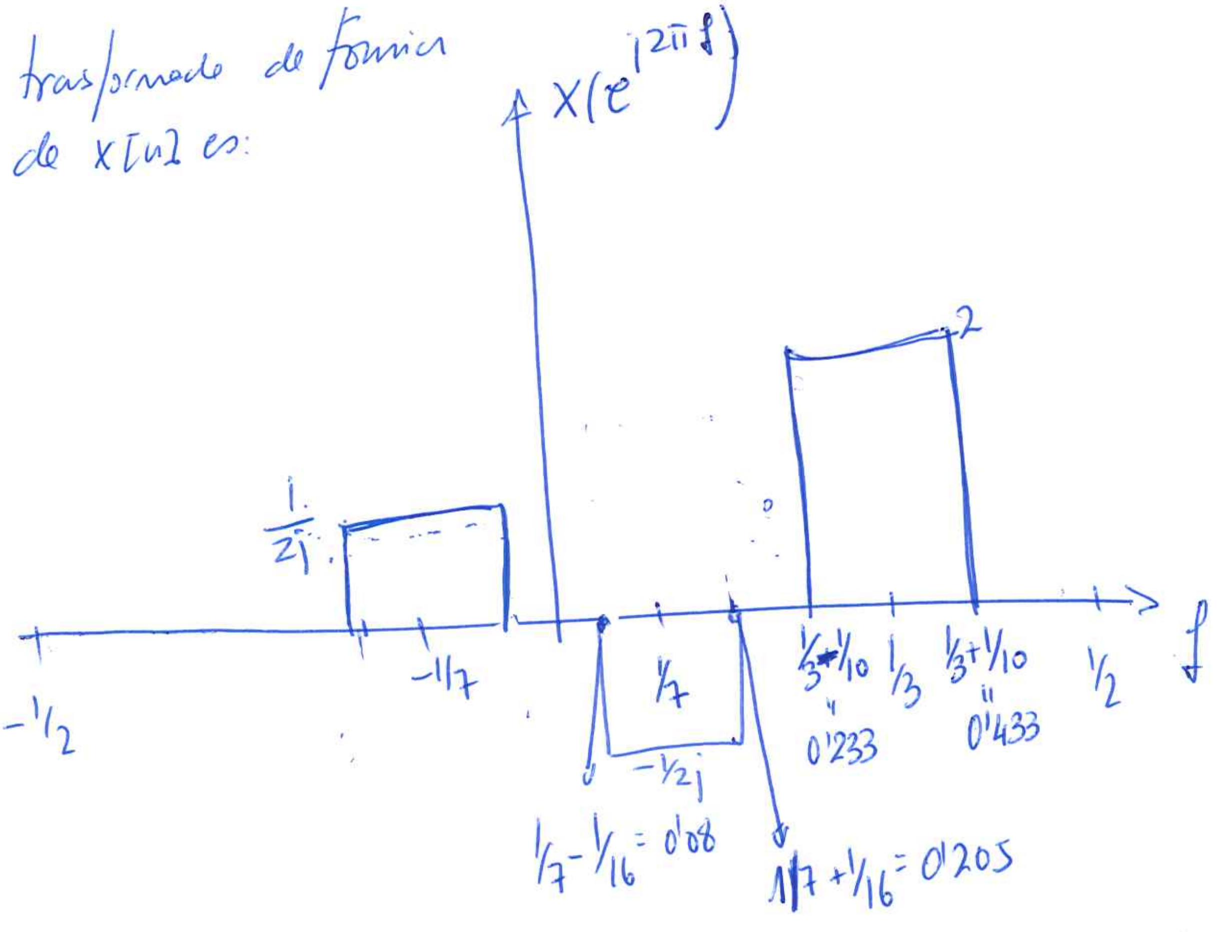
Problema 2

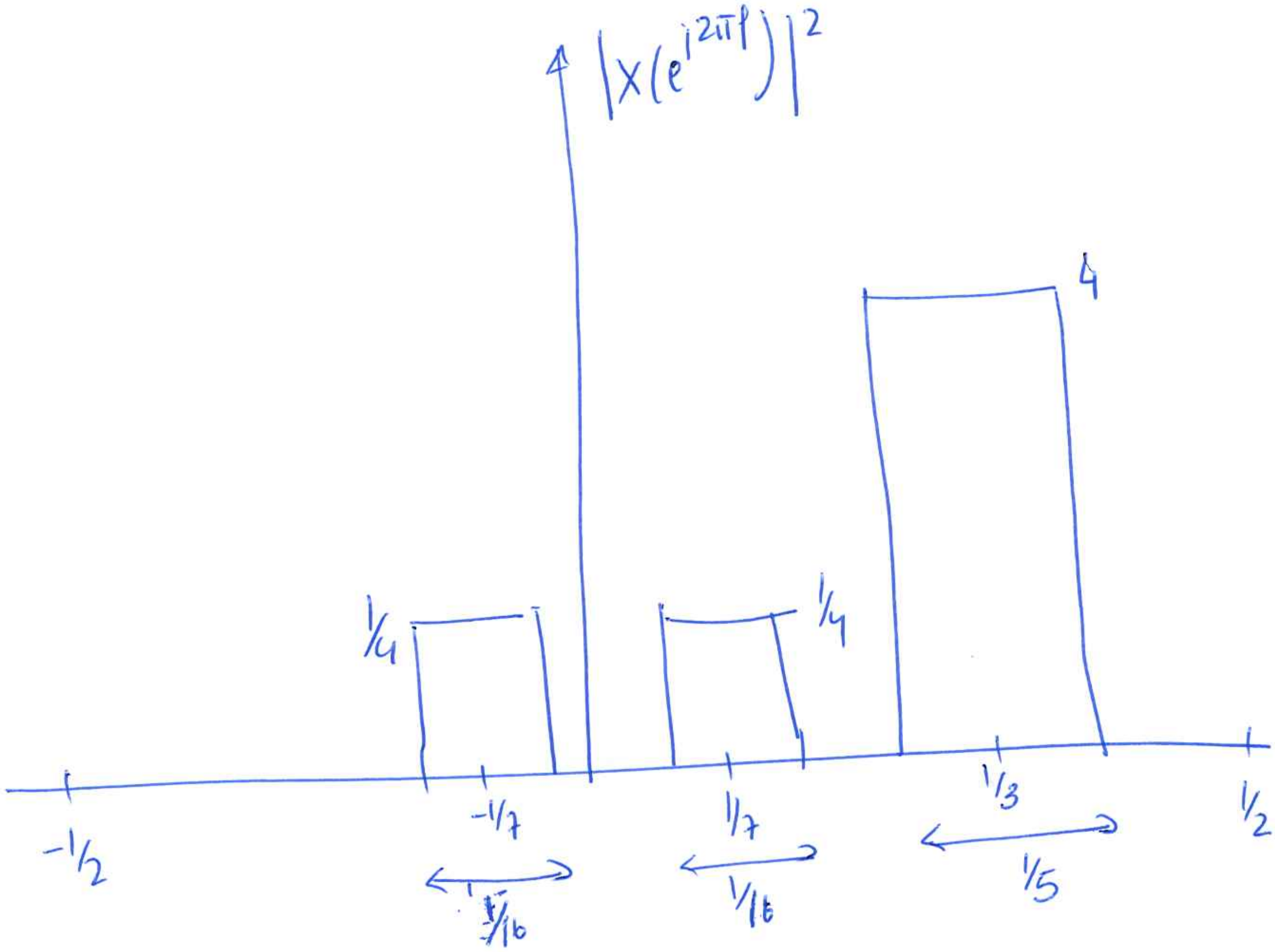
$$x[n] = 2\,\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)}{\pi n}}_{\downarrow\ T.F}\,e^{j2\pi \frac{1}{3}n} - \underbrace{\frac{\sin(\pi/8\,n)}{\pi n}}_{\downarrow\ TF}\,\underbrace{\sin\left(2\pi \tfrac{1}{7}n\right)}_{\frac{e^{j2\pi 1/7 n} - e^{-j2\pi 1/7 n}}{2j}}$$





La trasformada de fourier de $x[n]$ es:





La trasformada inversa de $|X(e^{j2\pi f})|^2$ vale:

$$\boxed{R_{xx}[n] = 4\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)}{\pi n}\,e^{j2\pi \frac{1}{3} n} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)}{\pi n}\cos\left(2\pi \tfrac{1}{7} n\right)}$$