6.3. Un sistema LTI causal tiene

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

a) Región de Convergencia ?

$$H(z) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$A = H(z)\cdot\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z^{-1}=2} \leftarrow \quad 1-\frac{1}{2}z^{-1}=0 \Rightarrow z^{-1}=2$$

$$A = \frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{1+2}{1+\frac{1}{4}2} = 2$$

$$B = H(z)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\Big|_{z^{-1}=-4} = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-4}{1-\frac{1}{2}(-4)} = -1$$

Por tanto

$$H(z) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Al ser causal $\Rightarrow$ Esta da ROC$_1$: $|z| > \frac{1}{2}$ Esta da ROC$_2$: $|z| > \frac{1}{4}$

Lo que significa (teniendo en cuenta la intersección de ambas)

$$ROC: \ |z| > \frac{1}{2}$$

b) El sistema es estable?

Sí, porque la ROC incluye al circulo unidad ($|z|=1$)

c) Encontrar $x[n]$ y $X(z)$, siendo la entrada al sistema que produce una salida

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}(2)^n u[-n-1]$$

Cont. P. 6.3

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] \quad ; \quad X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)}$$

$$Y(z) = \frac{-1/3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4/3}{1-2z^{-1}} = \frac{-1/3+\frac{2}{3}z^{-1}+4/3+\frac{1}{3}z^{-1}}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{1+z^{-1}}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

⇓ "señal a derechas" ROC: $|z| > \frac{1}{4}$

⇓ "señal a izquierdas" ROC: $|z| < 2$

⇒ (intersección) ROC: $\frac{1}{4} < |z| < 2$

$$X(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-2z^{-1})} : \frac{1+z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-2z^{-1}} \Rightarrow$$

Con ROC: $|z| < 2$ (ya la limitación de ROC a $|z| > \frac{1}{4}$ ha desaparecido al cancelarse el polo)

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} - \frac{1/2}{1-2z^{-1}}z^{-1}$$

Puesto que la ROC es el interior de un círculo (radio 2) nuestra señal será a izquierdas:

$$x[n] = -(2)^n u[-n-1] - \left\{ -\frac{1}{2}(2)^n u[-n-1] \right\}\Big|_{n=n-1} \Rightarrow$$

por z^{-1} (propiedad desplazamiento temporal)

$$\Rightarrow x[n] = -(2)^n u[-n-1] + \frac{1}{2}(2)^{n-1} u[-n]$$