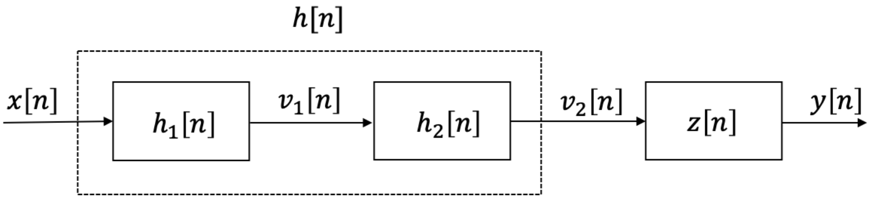
escola d'enginyeria

EXAMEN DE RECUPERACION (Extra) – Febrero 2020
102712 Señales y Sistemas Discretos

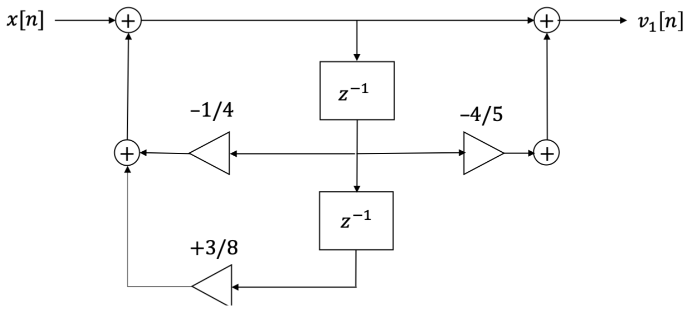
Profesores: Rafael Gallego Terris

***Instrucciones**: Se puede utilizar calculadora y las tablas de TF y DFT del Campus Virtual si se tienen imprimidas.*

Problema 1 (7p) – Considere un Sistema LTI formado por la concatenación de tres subsistemas LTI causales y estables:



a) Obtenga la función de transferencia $H_1(z)$ teniendo en cuenta el siguiente diagrama de bloques que relaciona $x[n]$ y $v_1[n]$: **(1,5p)**



b) Dibuje el diagrama de polos y ceros de $H_1(z)$ e indique su región de convergencia. ¿Es un sistema de fase mínima? Justifique la respuesta. **(1p)**

c) A partir de la siguiente ecuación de diferencias finitas, obtenga la función de transferencia $H_2(z)$ e indique de qué tipo de sistema se trata: **(1p)**

$$v_2[n] = \frac{4}{5}v_2[n-1] + v_1[n] - \frac{5}{4}v_1[n-1]$$

d) Dibuje el diagrama de polos y ceros del sistema $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$. ¿Es un sistema invertible? Justifique la respuesta. **(1p)**

e) Calcule la respuesta impulsional $h[n]$. **(1 p)**

f) Obtenga la función de transferencia $Z(z)$ para ecualizar el sistema $H(z)$ e indique su región de convergencia. *Nota*: el ecualizador busca invertir el subsistema de fase mínima. **(1p)**

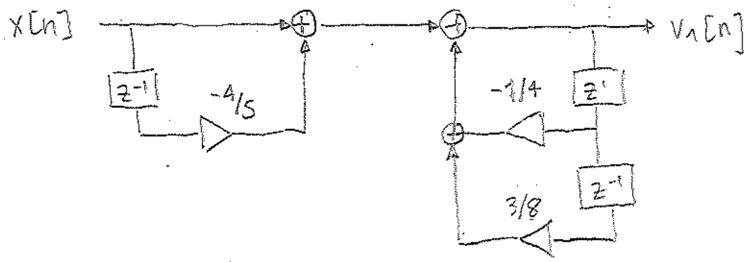
g) ¿Presenta la salida $y[n]$ distorsión en amplitud? ¿Y en fase? Justifique la respuesta. **(0,5p)**

Problema 2 (3p) – Calcule la autocorrelación de la señal $x[n]$. Recuerde que $R_{xx}[n] = x[n] * x^*[-n] = \mathcal{F}^{-1}\{S_{xx}(e^{j2\pi f})\}$, donde $S_{xx}(e^{j2\pi f}) = |X(e^{j2\pi f})|^2$ es la densidad espectral.

$$x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)}{\pi n}\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right)}{\pi n}e^{j2\pi\frac{1}{5}n}$$

Problema 1

a) El diagrama de bloques se puede redibujar como:



$$v_1[n] = -\frac{1}{4} v_1[n-1] + \frac{3}{8} v_1[n-2] + x[n] - \frac{4}{5} x[n-1]$$

$$v_1[n] + \frac{1}{4} v_1[n-1] - \frac{3}{8} v_1[n-2] = x[n] - \frac{4}{5} x[n-1]$$

$$V_1(z) + \frac{1}{4} V_1(z) z^{-1} - \frac{3}{8} V_1(z) z^{-2} = X(z) - \frac{4}{5} X(z) z^{-1}$$

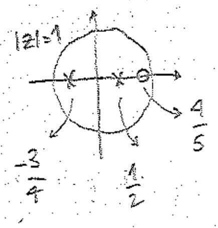
$$V_1(z) \left[1 + \frac{1}{4} z^{-1} - \frac{3}{8} z^{-2} \right] = X(z) \left[1 - \frac{4}{5} z^{-1} \right]$$

$$H_1(z) = \frac{V_1(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{4}{5} z^{-1}}{1 + \frac{1}{4} z^{-1} - \frac{3}{8} z^{-2}}$$

b) Descomponemos en fracciones simples el denominador para obtener los polos:

$$z^2 + \frac{1}{4} z - \frac{3}{8} = 0 \longrightarrow z = \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - 4\left(-\frac{3}{8}\right)}}{2} = \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{12}{8}}}{2} = \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}}}{2} = \frac{-\frac{1}{4} \pm \frac{5}{4}}{2} = \begin{cases} z = \dfrac{-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}}{2} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] z = \dfrac{-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}}{2} = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$H_1(z) = \frac{1 - \frac{4}{5} z^{-1}}{\left(1 + \frac{3}{4} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)} \longrightarrow$$



ROC $|z| > \frac{3}{4}$

Es un sistema de fase mínima puesto que todos sus polos y ceros se encuentran dentro de la circumferencia de radio unidad; su inversa es, por tanto, realizable.

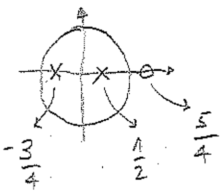
c) $V_2(z) = \frac{4}{5} V_2(z) \cdot z^{-1} + V_1(z) - \frac{5}{4} V_1(z) z^{-1}$

$$V_2(z)\left[1-\frac{4}{5}z^{-1}\right] = V_1(z)\cdot\left[1-\frac{5}{4}z^{-1}\right]$$

$$H_2(z) = \frac{V_2(z)}{V_1(z)} = \frac{1-\frac{5}{4}z^{-1}}{1-\frac{4}{5}z^{-1}} = \frac{-\frac{5}{4}\left(z^{-1}-\frac{4}{5}\right)}{1-\frac{4}{5}z^{-1}} \longrightarrow$$

se trata de un sistema pasa todo, pues el cero de $H_2(z)$ es el inverso conjugado de su polo. $(a \longleftrightarrow 1/a^*)$

d) $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = \dfrac{1-\frac{5}{4}z^{-1}}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \longrightarrow$



Comprobamos que no es un sistema invertible de forma causal y estable pues tiene un cero fuera de la circunferencia de radio unidad, que daría lugar a un polo del sistema inverso fuera de ella y, por tanto, su región de convergencia no podría ser el exterior de una circunferencia (condición de causalidad) y, al mismo tiempo, incluir la de radio unidad (condición de estabilidad).

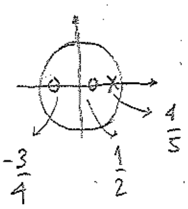
e) $H(z) = \dfrac{A}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)} + \dfrac{B}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \dfrac{8/5}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)} - \dfrac{3/5}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$

donde $A = H(z)\cdot\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\Big|_{z=-\frac{3}{4}} = \dfrac{1-\frac{5}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Bigg|_{z=-\frac{3}{4}} = \dfrac{1+\frac{5}{4}\frac{4}{3}}{1+\frac{1}{2}\frac{4}{3}} = \dfrac{1+\frac{5}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \dfrac{8/3}{5/3} = \dfrac{8}{5}$

$B = H(z)\cdot\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \dfrac{1-\frac{5}{4}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \dfrac{1-\frac{5}{4}\cdot 2}{1-\frac{3}{4}\cdot 2} = \dfrac{1-\frac{5}{2}}{1+\frac{3}{2}} = \dfrac{-3/2}{5/2} = -\dfrac{3}{5}$

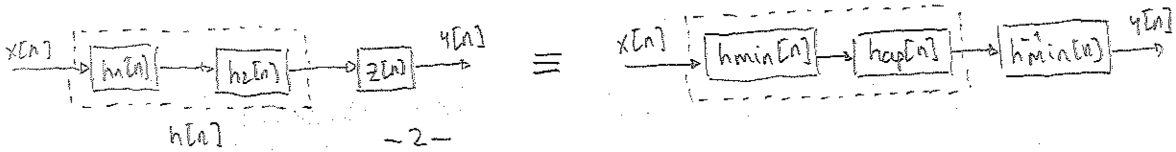
Por tanto: $h[n] = \frac{8}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)^n \cdot u[n] - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]$

f) $Z(z) = \dfrac{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1-\frac{4}{5}z^{-1}} \longrightarrow$



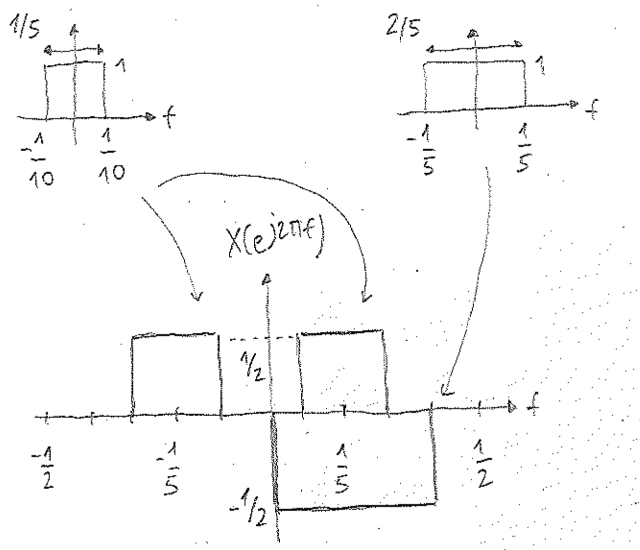
$\longrightarrow$ ROC $|z| > \frac{4}{5}$

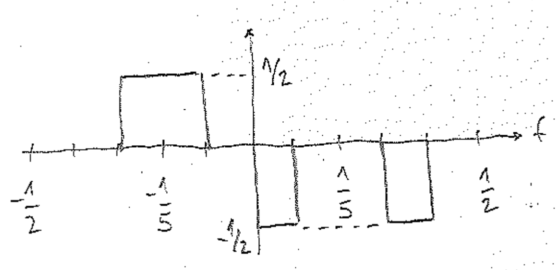
g) Gracias al subsistema ecualizador, $y[n] = k \cdot x[n]$, por lo que la distorsión del sistema $h[n]$ queda compensada en amplitud, pero no se puede asegurar en fase.

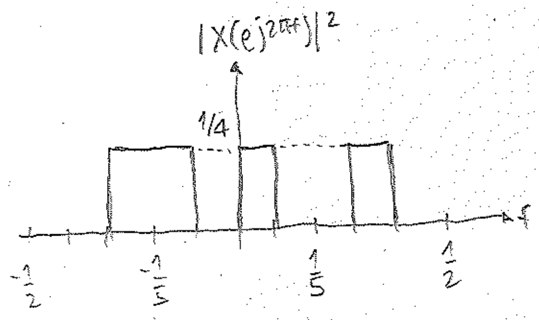


Problema 2

$$x[n] = \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)}{\pi n}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)}_{\frac{e^{j2\pi\frac{1}{5}n}+e^{j2\pi\frac{1}{5}n}}{2}} - \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right)}{\pi n}} \cdot e^{j\frac{2\pi}{5}n}$$







$$R_{xx}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{|X(e^{j2\pi f})|^2\} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)}{\pi n}\cdot e^{-j2\pi\frac{1}{5}n} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{10}n\right)}{\pi n} e^{j2\pi\frac{1}{20}n} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{10}n\right)}{\pi n}\cdot e^{j2\pi\frac{7}{20}n} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)}{\pi n} e^{-j2\pi\frac{1}{5}n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{20}n\right)}{\pi n}\cdot\cos\left(2\pi\frac{3}{20}n\right)\cdot e^{j2\pi\frac{1}{5}n}$$