TRANSFORMADA . Z

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}}$$

← T. Z. Bilateral (converge dentro de una ROC; si no, no hay)

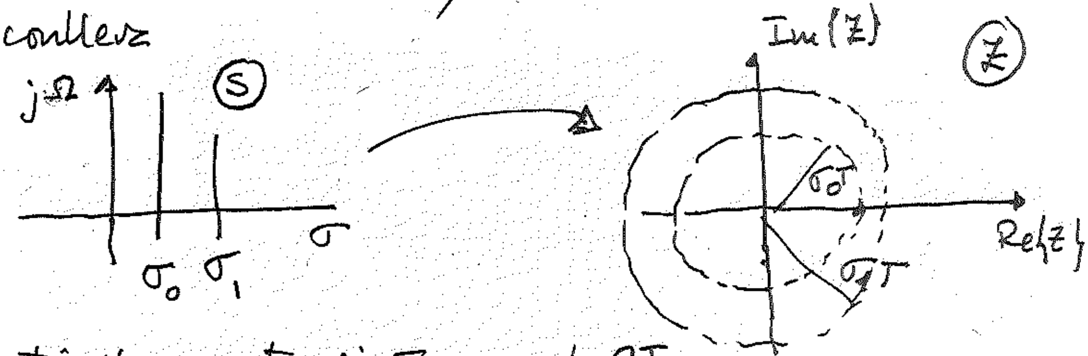
Se trata de un mapeo (cambio de plano) de la Transformada de Laplace (aplicada a una señal analógica que ha sido muestreada

$$\mathcal{L}\{x_s(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\, e^{-snT}$$

Por tanto:

$$z = e^{sT} \quad ; \quad s = \sigma + j\Omega$$

lo que conlleva



Más particularmente, si $\sigma = 0$ y $w = \Omega T$

Transformada de Fourier $\longrightarrow$ Transformada Z.

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn} = X(z)\Big|_{z=e^{jw}}$$

Para encontrar la ROC debemos hallar el rango de valores de Z para los cuales su transformada es absolutamente sumable (finita); es decir:

$$|X(z)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}\right| < \infty \quad ; \quad z = e^{\sigma T} e^{jw} \Rightarrow |z| = e^{\sigma T} = r$$

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] \cdot r^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x[n]| r^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} |x[n] \cdot r^{-n}| =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x[-n]\, r^{n}|}_{\text{Converge si } r<1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]\, r^{-n}|}_{\text{Converge si } r>1}$$

La conclusión será:

- Secuencias $x[n]$ que tengan valores en el semieje positivo ($n \to \infty$), convergerán en una ROC que será el exterior de un círculo
- Secuencias $x[n]$ en semieje negativo ($n \to -\infty$), convergerán en interiores de círculos.
- Secuencias finitas $\begin{cases} ROC = z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \leftarrow \text{Si } n \geq 0 \\ ROC = z \in \mathbb{C} \setminus \{\infty\} \leftarrow \text{Si } n < 0 \\ ROC = z \in \mathbb{C} \setminus \{0, \infty\} \leftarrow \text{Si hay } n \text{ positivo y negativo} \end{cases}$

Se comprobará fácilmente que distintas secuencias $x[n]$ tienen la misma transformada Z. Un claro ejemplo de esto (se verá en ejemplos) es:

$$x[n] = \alpha^n u[n] \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad ; \; ROC: |z| > \alpha$$

$$x[n] = -\alpha^n u[-n-1] \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad ; \; ROC: |z| < \alpha$$

Luego, la misma expresión de transformada Z puede provenir de secuencias distintas. Por consiguiente, será fundamental para que quede determinada conocer la ROC.

PROBLEMA. Calcular las transformadas Z de las siguientes secuencias:

a) $x_1[n] = \{\underset{\smile}{1}, 3, 0, 6, 9\}$

$$\underline{\underline{X_1(z) = 1 + 3z^{-1} + 6z^{-3} + 9z^{-4}}} \quad ; \quad ROC = z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

(ya que en $z=0 \Rightarrow X_1(z)=\infty$)

b) $x_2[n] = \{1, 3, 0, \underset{\smile}{6}, 9\}$

$$\underline{\underline{X_2(z) = z^{3} + 3z^{2} + 6 + 9z^{-1}}} \quad ; \quad ROC: z \in \mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$$

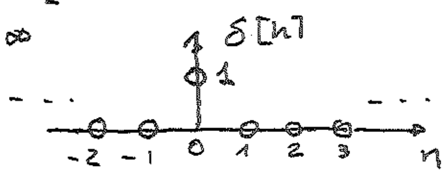
NOTA.- Puede observarse que el desplazamiento de una secuencia temporal: $x[n] \to x[n+k]$ representa para la transformada Z un producto de z^k en cada muestra.

NOTA.- Las secuencias finitas tienen como ROC el plano Z, con la excepción de $z=0$ para señales en n positivo y $z=\infty$ para las n negativas.

c) $x_3[n] = \delta[n]$

$$X_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\, z^{-n} = \boxed{1}$$

ROC: $z \in \mathbb{C}$



d) $x_4[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$$X_4(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^n =$$

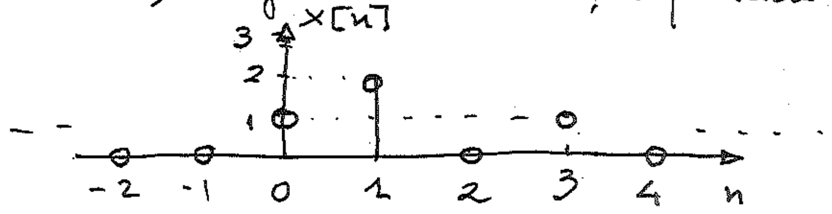
$$= \boxed{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}} \quad ; \quad ROC: |z| > \frac{1}{2} \quad \left(\begin{array}{c}\text{como siempre} \\ z \in \mathbb{C}\end{array}\right)$$

Para que converja: $\left|\frac{z^{-1}}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$

Entonces, el sumatorio es: $\dfrac{1^{er}\text{ término} - \text{último}\cdot r^{n+1}}{1 - \text{razón}} = \dfrac{1}{1-r}$

si 1^{er} término $n=0$

PROBLEMA Dada la siguiente secuencia, expresada en forma gráfica



donde todas las n no representadas son ya nulas:

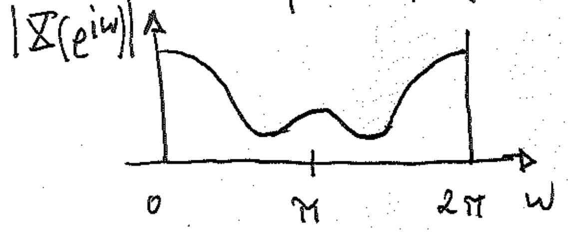
a) Encontrar $X(z)$

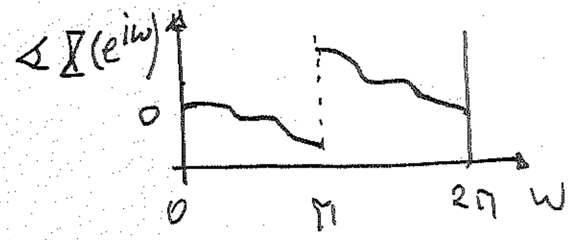
$$X(z) = \underline{1 + 2z^{-1} + z^{-3}} \quad , \quad ROC: \; z \in \mathbb{C} \setminus \{z=0\}$$

b) Hallar $X(e^{jw})$

$$X(e^{jw}) = X(z)\Big|_{z=e^{jw}} = \underline{1 + 2e^{-jw} + e^{-j3w}}$$

NOTA.- (aunque puede realizarse mediante cálculo en diferentes puntos de w, el dibujo presentado ha sido obtenido con ayuda programática).





PROBLEMA Hallar $X(z)$ de la secuencia:

$$x[n] = \alpha^n u[n] \quad , \quad \text{siendo } \alpha \in \mathbb{C}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \boxed{\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}}$$

Esta será la suma (convergiendo) siempre que el módulo de la razón < 1

$$\Rightarrow \quad |\alpha z^{-1}| < 1$$

Por tanto, $\underline{ROC: \; |z| > |\alpha|}$

NOTA: Si $\alpha = 1$

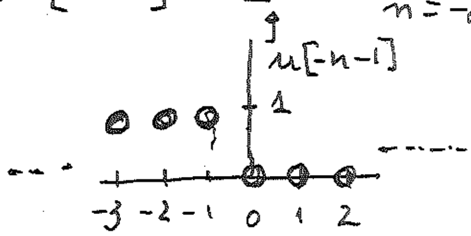
$$\Downarrow$$

$$x[n] = u[n] \xrightarrow{TZ} \frac{1}{1-z^{-1}}$$

PROBLEMA Halla la transformada Z de la secuencia

$$x[n] = -\alpha^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\alpha^n u[-n-1] \cdot z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n} =$$



$$= -\sum_{m=\infty}^{1} \alpha^{-m} z^{m} = -\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^{m} =$$

Cambio de variable
$m = -n$

= 2 versiones

1ª: Considerar que $\sum_{m=1}^{\infty}(\;) = \sum_{m=0}^{\infty}(\;) - (\text{término } m=0)$

$$= -\left(\frac{1}{1-\alpha^{-1} z} - 1\right) = -\frac{\alpha^{-1} z}{1-\alpha^{-1} z} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

2ª. Aplicar la definición de Σ progres. geométrica

$$= -\frac{\alpha^{-1} z}{1-\alpha^{-1} z} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

NOTA.- (en ambas soluciones se ha considerado que para darse ese resultado finito, y por lo tanto que la serie converja, ha de cumplirse:

$$|\alpha^{-1} z| < 1$$

Por tanto:

$$x[n] = -\alpha^n u[-n-1] \xrightarrow{TZ} X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad ; \text{ROC: } |z| < \alpha$$

NOTA.- Observa que la transformada es la misma que la de la secuencia $x[n] = \alpha^n u[n]$, pero que tienen distintas ROC. Mientras que esta última $\alpha^n u[n]$ tiene una ROC exterior al círculo de radio α, la de este problema presenta una ROC del interior de ese círculo $\Rightarrow$ ES NECESARIO CONOCER ROC PARA TRANSF. INVERSA

PROBLEMA Calcular transformada Z de

$$x[n] = \alpha^n \mu[n] + \beta^n \mu[-n-1]$$

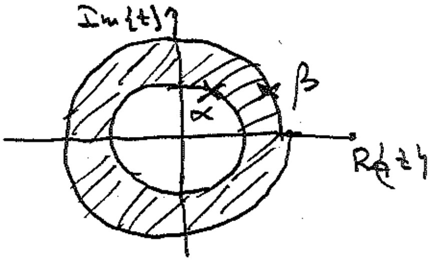
Podemos reescribir la secuencia como

$$x[n] = \underbrace{\alpha^n \mu[n]}_{x_1[n]} - \underbrace{\{-\beta^n \mu[-n-1]\}}_{x_2[n]}$$

Por tanto

$$X(z) = X_1(z) - X_2(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} - \frac{1}{1-\beta z^{-1}}$$

$$\text{ROC}: \quad |\alpha| < |z| < |\beta|$$



Si no se diera esta situación, es decir que $|\alpha|<|\beta|$, entonces no habría ROC y por lo tanto esta secuencia no tendría transformada.