Energía $$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

consideraciones

- Señales de energía finita

$E_x < \infty$, (E_x, finita) $\Rightarrow$ $P_x = 0$

- Señales de potencia media finita

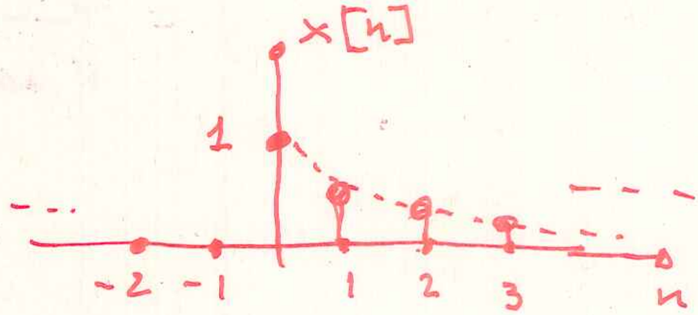
P_x (media) = finita $\Rightarrow$ $E_x = \infty$

$$P_{x\,(\text{media})} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

- Potencia media infinita.

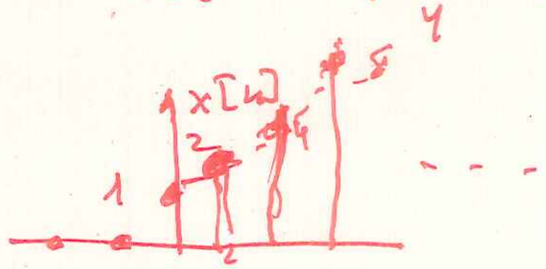
Ejemplos

a) $x[n] = 2^{-n}\,u[n]$.



$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |2^{-n}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 4/3$$

b) $x[n] = 2^{n}\,u[n]$



$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \infty$$

$P_x\,(N\to\infty) = \infty$ $\rightarrow$ La suma de los ∞ términos es mayor que el grado ∞ de sumar $\Rightarrow P_x = \infty$

c) $x[n] = e^{j2\pi f_0 n} \cdot u[n]$

$\Downarrow$ $|e^{j2\pi f_0 n}| = |\cos 2\pi f_0 n + j \sin 2\pi f_0 n| = 1 \quad // \quad n \geq 0$

$$|x[n]| = \begin{cases} 1 & // \ n \geq 0 \\ 0 & // \ \text{si } n < 0 \end{cases}$$

→ veo como que el módulo es $|1|$ directamente al tratarlo como un nº complejo.

$\Downarrow$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \infty$$

$$P_x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]^2 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} |x[n]|^2 =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} N+1 = \frac{1}{2}$$

28201 Procesado Digital de la Señal
Examen Parcial

Paco López Dekker

25 de Noviembre, 2004

4.11

1. (4 puntos) Para una señal real $x[n]$ sabemos unos valores de su autocorrelación:

$$\begin{cases} R_{xx}[0] = 2 \\ R_{xx}[1] = -1 \\ R_{xx}[2] = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Esta señal es la entrada a un sistema con respuesta impulsional $h[n] = \delta[n] - 0{,}5\delta[n-1]$, a cuya salida denominamos $y[n]$

(a) Qué energía, E_x, tiene la señal $x[n]$?

(b) Halle la expresión de la correlación cruzada $R_{yx}[l]$, y calcúlelos para $l = -1, 0, 1$.

(c) Calcule la energia de la señal de salida, E_y.

(d) Si la densidad espectral de energía de $x[n]$ es $S_{xx}(e^{j\omega})$, halla la expresión de $S_{yx}(e^{j\omega})$.

2. (3 puntos) La señal continua con la transformada de Fourier representada en la Figura 1, tiene ancho de banda $\Omega_c = 40000\pi$ rad/s..

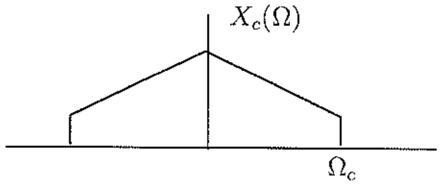


Figura 1:

(a) Determine la mínima frecuencia de muestreo necesaria para que no ocurra aliasing y represente la transformada de Fourier de la señal discreta resultante.

En el resto del problema asumiremos que la señal ha sido muestreada a $F_s = 40000$ muestras por segundo. Para transmitir esta señal digital se

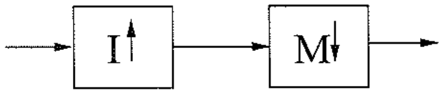


Figura 2:

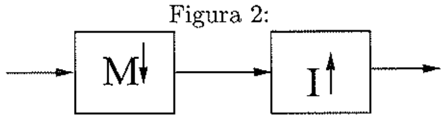


Figura 3:

usa un sistema diseñado para transmitir 50000 muestras por segundo. Para pasar de las 40000 muestras por segundo disponibles a las 50000 necesarias se dispone de un interpolador y un diezmador.

(b) Demuestre que si el interpolador tiene un factor de interpolación I=5 y el diezmador tiene M=4, se puede obtener la señal deseada.

(c) Explique si usaría el esquema de la Figura 2 o el de la Figura 3 para realizar esta operación (una elección sin justificación no cuenta).

3. (3 puntos) Volviendo al pre-examen, en el último apartado se estableció que el filtro del interpolador ideal no es realizable. En la práctica se usan filtros mucho más sencillos.

   En particular, para un factor de interpolación $I = 2$, un filtro posible sería

   $$h[n] = 0{,}5\delta[n+1] + \delta[n] + 0{,}5\delta[n-1]. \qquad (2)$$

   (a) Halle la serie interpolada (primero la expandida y luego aplique el filtro) resultante si la señal de entrada es

   $$..,1,2,3,3,2,1,0... \qquad (3)$$

   (b) Encuentre $H(e^{j\omega})$ y represéntela.

   (c) Qué componentes frecuenciales estarán mejor interpolados y qué componentes lo estarán peor? Puedo decir que cuanto más sobremuestreada (es decir, cuanto más por encima esté la frecuencia de muestreo de la frecuencia de Nyquist) esté la señal, más válido será este filtro interpolador?

P4.11) $x[n]$, real : $\begin{cases} R_{xx}[0] = 2 \\ R_{xx}[1] = -1 \\ R_{xx}[2] = 0 \end{cases}$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$h[n] = \delta[n] - 0{,}5\,\delta[n-1]$$

a) E_x ?

$$E_x = R_{xx}[0] = \underline{\underline{2}}$$

b) $R_{yx}[l]$ para $l = -1, 0, 1$?

Conocemos:

$$R_{yx}[m] = y[m] * x^*[-m] \underset{\substack{\uparrow \\ y[m] = x[m]*h[m]}}{=} x[m] * h[m] * x^*[-m] =$$

propiedad conmutativa convoluc.

$$= R_{xx}[m] * h[m]$$

Por tanto:

$$R_{yx}[l] = R_{xx}[l] * h[l] = R_{xx}[l] * \{\delta[l] - 0{,}5\,\delta[l-1]\} =$$

$$= R_{xx}[l] - 0{,}5\,R_{xx}[l-1] \qquad (2)$$

Dando valores a l:

$$R_{yx}[-1] = R_{xx}[-1] - 0{,}5\,R_{xx}[-2] \underset{\uparrow}{=} -1 - 0 = \underline{\underline{-1}}$$

como $x[n]$ es real $\Rightarrow R_{xx}[m] = R_{xx}[-m]$

$$R_{yx}[0] = R_{xx}[0] - 0{,}5\,R_{xx}[-1] = 2 - 0{,}5(-1) = \underline{\underline{2{,}5}}$$

$$R_{yx}[1] = R_{xx}[1] - 0{,}5\,R_{xx}[0] = -1 - 0{,}5 \cdot 2 = \underline{\underline{-2}}$$

c) E_y ? $E_{yy} = R_{yy}[0]$

Sabemos que: $R_{yy}[m] = R_{xx}[m] * R_{hh}[m]$ (1)

Por tanto, habremos de encontrar (utilizando ya nomenclatura en l)

$$R_{hh}[l] = h[l] * h^*[-l] =$$

$$= \{\delta[l] - 0{,}5\,\delta[l-1]\} * \{\delta[-l] - 0{,}5\,\delta[-l-1]\}^* =$$

$\delta[l] = \delta[-l]$

$$= \delta[l]*\delta[-l] - 0{,}5\,\delta[l]*\delta[-l-1]$$
$$- 0'5\,\delta[l-1]*\delta[-l] + 0{,}25\,\delta[l-1]*\delta[-l-1] =$$

$$= \delta[l] - 0{,}5\,\delta[-l-1] - 0{,}5\,\delta[l-1] + 0'25\,\delta[l] =$$

$\delta[-l-1] = \delta[-(l+1)] = \delta[l+1]$

$$= 1'25\,\delta[l] - 0'5\,\delta[l+1] - 0'5\,\delta[l-1]$$

Sustituyendo en (1) (y usando notación en l)

$$R_{yy}[l] = 1'25\,R_{xx}[l] - 0'5\,R_{xx}[l+1] - 0'5\,R_{xx}[l-1]$$

Por lo que: $R_{yy}[0] = 1'25\,R_{xx}[0] - 0'5\,R_{xx}[1] - 0'5\,R_{xx}[-1] \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_y = 2'5 + 0'5 + 0'5 = \underline{\underline{3'5}}$$

d) Sabiendo que

$S_{xx}(e^{jw})$ es conocida, calcular $S_{yx}(e^{jw})$

$$S_{yx}(e^{jw}) = \mathcal{F}\{R_{yx}[l]\} \underset{\text{usando (2)}}{=} \mathcal{F}\{R_{xx}[l] * h[l]\} =$$

$$= \mathcal{F}\{R_{xx}[l]\}\cdot\mathcal{F}\{h[l]\} = S_{xx}(e^{jw})\cdot H(e^{jw}) =$$

$$= \underline{S_{xx}(e^{jw})\cdot\left[1 - 0'5\,e^{-jw}\right]}$$

$$\delta[l] - 0'5\,\delta[l-1] \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 - 0'5\,e^{-jw}$$