

# Mise en œuvre du filtre de Kalman Etendu

## 1 Le modèle

Dans cette application on cherche à estimer un signal aléatoire sinusoïdal. C'est à dire que l'on cherche à estimer l'amplitude  $a_k$  du signal et la phase  $\phi_k$  du signal de la forme :

$$y(k) = a_k \sin(2\pi\nu_0 k T_e + \phi_k)$$

Pour cela on considère l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k(x_k) + v_k \\ y_k = h(x_k) + w_k \end{cases}$$

Le vecteur d'état est :

$$x_k = \begin{pmatrix} a_k \\ \phi_k \end{pmatrix}$$

Avec :

- $a_k$  : l'amplitude.
- $\phi_k$  : la phase.

et

- $v_k$  : le bruit d'état.
- $w_k$  : le bruit de mesure.
- $h(x_k) = a_k \sin(2\pi\nu_0 k T_e + \phi_k)$ .
- $T_e$  : la période d'échantillonnage.

avec  $v_k$  le bruit d'état tel que  $v_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_{k+1})$  et  $w_k$  le bruit de mesure tel que  $w_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_{k+1})$

La mise en oeuvre du filtre de Kalman étendu nécessite le calcul de :

$$F_k = \left. \frac{\partial f_k}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k|k}}$$

$$H_{k+1} = \left. \frac{\partial h_{k+1}}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k+1|k}}$$

**Entrée:** Un tableau de mesure  $z$  de taille  $N$

**Sortie :** Un tableau  $\hat{x}$  contenant l'évolution de l'estimation du vecteur d'état

*Initialisation du vecteur d'état;*

$\hat{x}(0|0) \leftarrow m_0;$

*Initialisation de la matrice d'autocorrélation;*

$\hat{P}(0|0) \leftarrow \Lambda_0;$

$k \leftarrow 0;$

**while**  $k < N$  **do**

$\hat{x}(k+1|k) \leftarrow f(\hat{x}(k|k);$

$P(k+1|k) \leftarrow F(k)P(k|k)F(k)^T + Q(k);$

$k \leftarrow k+1;$

$S(k) \leftarrow H(k)P(k|k-1)H(k)^T + R(k);$

$K(k) \leftarrow P(k|k-1)H(k)^T S(k)^{-1};$

$\epsilon(k) \leftarrow z(k) - h(\hat{x}(k|k-1));$

$\hat{x}(k|k) \leftarrow \hat{x}(k|k-1) + K(k)\epsilon(k);$

$P(k|k) \leftarrow P(k|k-1) - K(k)H(k)P(k|k-1);$

**end**

**Algorithm 1:** filtre de Kalman étendu

## 2 Simulations

Etablir l'équation d'état, en vérifiant que :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k \\ y_k = h(x_k) + w_k \end{cases}$$

- $v_k$  : le bruit d'état.
- $w_k$  : le bruit de mesure.
- $h(x_k) = a_k \sin(2\pi\nu_0 k T_e + \phi_k)$ .
- $T_e$  : la période d'échantillonnage.

La mise en œuvre du filtre de Kalman étendu nécessite le calcul de :

$$H_k = \frac{\partial h(x_k)}{\partial x_k}$$

Dans notre cas :

$$\frac{\partial h(x_k)}{\partial a_k} = \sin(2\pi\nu_0 k T_e + \phi_k)$$

$$\frac{\partial h(x_k)}{\partial \phi_k} = a_k \cos(2\pi\nu_0 k T_e + \phi_k)$$

Et donc :

$$H_k = [\sin(2\pi\nu_0 k T_e + \phi_k) \quad a_k \cos(2\pi\nu_0 k T_e + \phi_k)]$$

**Pour la simulation on pourra prendre les valeurs suivantes :**

Les données ci-dessous sont utilisées pour simuler des valeurs de  $y(k)$  et de  $y(k)$  bruitée. ces données sont stockée dans le fichier **donnee.xlsx** (table 1).

Temps	signalReel	signalBruite
$k \times T_e$	$y(k)$	$y(k) + b(k)$
0	0	-0,503935968
0,005173841	1,90139724	4,727026464
0,010347682	3,517096748	5,284031238
0,015521523	4,604328801	3,413861059
0,020695364	4,999729466	8,070116733
0,025869205	4,643887131	1,597133008
0,031043046	3,590269503	2,944079463
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE 1 – Les données du fichier **donnee.xlsx** ( $b(k) \sim \mathcal{N}(0, 3)$ )

Les données du fichier **donnee.xlsx** seront utilisées pour estimer :

$$x_k = \begin{pmatrix} a_k \\ \phi_k \end{pmatrix}$$

- $a_k = 5$ , amplitude de la sinusoïde.
- $\phi_k = 0$ , valeur de la phase de la sinusoïde.
- $\nu_0 = 12$  Hz, valeur de la fréquence de la sinusoïde .
- $\nu_e = 129.28$  Hz, fréquence d'échantillonnage.

Matrice de covariance du bruit d'état :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 2 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix}$$

Matrice de covariance du bruit de mesure :

$$\mathbf{R} = 3$$

Matrice décrivant la dynamique du système :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 2 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = 3$$

## 2.1 Exemple de résultats

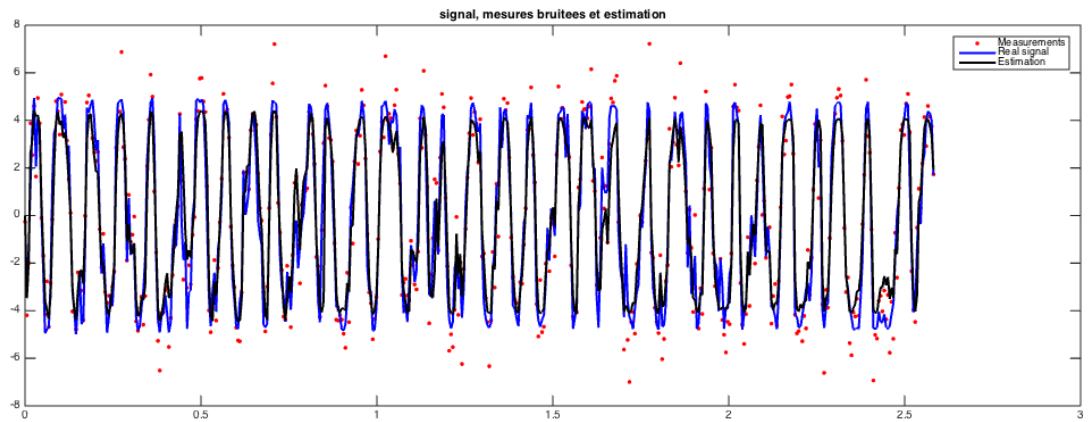


FIGURE 1: Mise en œuvre du filtre de Kalman étendu sur des données simulées.

## Références

- [1] Y. Bar-Shalom, X. Rong Li, and T. Kirubarayan. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation. Theory, Algorithms and Software*. John Wiley and Sons, New York Chichester Weinheim Brisbane Singapore Toronto, 2001.

- [2] F. Caron. *Inférence bayésienne pour la détermination et la sélection de modèles stochastiques*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille & Université des Sciences et Technologies de Lille, 2006. [http://tel.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=dc20mttsgebavbqs1spk0gdmlh5&view\\_this\\_doc=tel-00140088&version=1](http://tel.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=dc20mttsgebavbqs1spk0gdmlh5&view_this_doc=tel-00140088&version=1).
- [3] J. Hartikainen and S. Särkkä. Optimal filtering with kalman filters and smoothers – a manual for matlab toolbox ekf/ukf. <http://www.lce.hut.fi/research/mm/ekfukf/>, Department of Biomedical Engineering and Computational Science, Helsinki University of Technology, 2008.
- [4] B. Ristic, S. Arulampalam, and N. Gordon. *Beyond the Kalman Filter Particle Filter for Tracking Applications*. Artech House, Boston London, 2004.