Complementi di analisi funzionale

De Donato Paolo

25 febbraio 2019

1 La chiusura della palla aperta

In uno spazio metrico generico valgono le disuguaglianze

$$B_r(x) \subseteq \overline{B_r(x)} \subseteq D_r(x)$$

queste inclusioni possono essere sia disuguaglianze strette sia uguaglianze tra insiemi. Preso un qualunque insieme S contenente almeno due elementi distinti possiamo sempre dotarlo della seguente metrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \tag{1.1}$$

La topologia indotta da tale metrica rende tutti i singleton aperti e quindi ogni sottoinsieme di S è sia aperto che chiuso. Fissato $x \in S$ segue che

$$\{x\} = B_1(x) = \overline{B_1(x)} \subsetneq D_1(x) = S$$

Su uno spazio vettoriale normato $X \neq \{0\}$ invece si ha sempre $B_r(x) \subsetneq \overline{B_r(x)} = D_r(x)$, infatti possiamo sempre trovare vettori di norma arbitraria e per ogni $y \in D_r(x)$ la successione

$$x_n = \frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)y$$

è contenuta in $B_r(x)$ e converge a y, quindi per una proposizione precedente $\overline{B_r(x)} = D_r(x)$.

2 Esempi notevoli di spazi vettoriali topologici

2.1 Lo spazio L^1_{loc}

Diamo un esempio di spazio vettoriale topologico localmente convesso usato ampiamente nei corsi di analisi avanzata.

Innanzitutto fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto non vuoto e definiamo lo spazio delle funzioni *localmente sommabili* nella seguente maniera

$$L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^m \text{ misurabile } : \int_K \|f(x)\| dx < +\infty \ \forall K \subseteq \Omega \text{ compatto in } \mathbb{R}^n \right\}$$

che come è ben noto risulta essere uno spazio vettoriale reale. Siano ora $f_n, f \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ diciamo che la successione *converge localmente* a f se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_K \|f_n(x) - f(x)\| dx = 0$$

per ogni $K \subseteq \Omega$ compatto. Chi ha un po' di familiarità con l'analisi si renderà conto che non esiste alcuna norma su L^1_{loc} che erediti la definizione di convergenza locale, quindi non possiede una struttura di spazio normato.

Possiamo però dotare L^1_{loc} di una struttura di spazio vettoriale topologico localmente convesso in modo tale che ogni successione convergente rispetto a tale topologia debba convergere allo stesso limite anche localmente e viceversa. Definita la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{K} = \{K \subseteq \Omega : K \text{ compatto in } \mathbb{R}^n\}$ costruiamo le seguenti seminorme su L^1_{loc}

$$\{p_K(f)\}_{K\in\mathcal{K}} = \left\{ \int_K \|f(x)\| dx \right\}_{K\in\mathcal{K}}$$

da questa famiglia di seminorme rendiamo $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso in cui la convergenza di successioni coincide con la convergenza locale come è ben facile verificare.

Tale famiglia di seminorme non risulta totale, se però identifichiamo le funzioni che coincidono quasi ovunque allora tale famiglia risulta anche totale. Sia infatti f tale che l'insieme $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ abbia misura non nulla (altrimenti coinciderebbe con la funzione nulla) allora da una conseguenza del teorema di rappresentazione di Riesz esisterà un compatto K contenuto in tale insieme con misura strettamente maggiore di 0 e quindi $\displaystyle\int_K \|f(x)\| dx > 0$.

Quindi il limite di una successione convergente in L^1_{loc} se esiste è unico.

2.2 Convergenza puntuale e uniforme

Prendiamo ancora $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e denotiamo con $C_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ l'insieme di tutte le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continue e tali che il *supporto* di f, definito come

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

sia compatto e contenuto in Ω. Possiamo definire su C_c la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \|f(x)\|$$

Allora $C_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ è uno spazio normato e inoltre presi $f_k, f \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ vale

$$\lim_{k\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in \mathbb{R}^n \; \|f_k(x) - f(x)\| < \epsilon$$

il secondo termine è proprio la definizione di *convergenza uniforme* di una successione di funzioni. Per quanto riguarda la convergenza puntuale dobbiamo spostarci sugli spazi topologici localmente convessi. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ possiamo considerare la seminorma

$$F_x : f \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^m) \to \|f(x)\| \in \mathbb{R}$$

e la famiglia $\{F_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ induce su C_c una struttura di spazio vettoriale topologico localmente convessa. Dimostriamo che la convergenza su tale spazio coincide con la convergenza puntuale.

Supponiamo innanzitutto che la successione f_k converge a f rispetto alla topologia indotta dalle F_x, allora

$$\forall\epsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall k \geq N \; f_k \in I^\epsilon_x(f) \Leftrightarrow \|f_k(x) - f(x)\| < \epsilon$$

e quindi si ha convergenza puntuale su tutto $\mathbb{R}^n$. Viceversa supponiamo $f_k(x) \to f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, allora per ogni $x_1, x_2, \ldots, x_l \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_l > 0$ esistono $N_1, N_2, \ldots, N_l \in \mathbb{N}$ tali che $f_j \in I^{\epsilon_i}_{x_i}(f)$ per ogni $j > N_i$.

Preso $N = \max\{N_1, \dots, N_l\}$ allora per ogni $i > N$ si ha

$$f_i \in I^{\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_l}_{x_1,x_2,\dots,x_l}(f) \tag{2.1}$$

poiché gli insiemi che compaiono nella (2.1) formano un sistema fondamentale di intorni di f si ha che f_i converge ad f rispetto alla topologia indotta dalle F_x.

Il prezzo di non poter definire una norma per la convergenza puntuale viene ripagato dalla possibilità di definirla su molti più spazi di funzioni rispetto alla norma uniforme, la quale può operare solo su spazi di funzioni limitate, in particolare per le funzioni misurabili.

Osserviamo che sullo spazio delle funzioni misurabili $\mathcal{M}(X, \mathbb{R}^m)$ definite su uno spazio di misura X munito della struttura di spazio vettoriale topologica ottenuta prima, grazie al lemma di Fatou l'applicazione

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R}^m) \to \int_X \|f\| d\mu \in [0, +\infty]$$

è sequenzialmente semicontinua inferiormente.

2.3 Lo spazio delle funzioni test

Prendiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e denotiamo con $C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ lo spazio di tutte le funzioni $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ derivabili infinite volti su $\mathbb{R}^n$ tali che l'insieme

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) \neq 0\}}$$

detto *supporto* di ϕ se non vuoto è compatto e contenuto in Ω. È chiaramente uno spazio vettoriale detto *spazio delle funzioni test*.

Sia ora $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n_0$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ allora poniamo per comodità di notazione

$$D^\alpha\phi(x) = \phi(x) \text{ se } |\alpha| = 0$$

$$D^\alpha\phi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}(x) \text{ altrimenti}$$

Possiamo definire su $C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ la seguente famiglia di seminorme

$$\{p_\alpha(\phi)\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n_0} = \left\{\max_{x\in\mathbb{R}^n} \|D^\alpha\phi(x)\|\right\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n_0}$$

che rende lo spazio delle funzioni test uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Con questa topologia diciamo che una successione ϕ_k converge a ϕ in $C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se e solo se per ogni multiindice α la successione $D^\alpha\phi_k$ converge uniformemente a $D^\alpha\phi$ riottenendo così la definizione usuale di convergenza delle funzioni test.

3 Metriche non archimedee

Consideriamo uno spazio metrico (S, d) allora la metrica d è detta *non archimedea* se e solo se per ogni $x, y, z \in S$ vale la disuguaglianza

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \tag{3.1}$$

questa disuguaglianza è una versione più forte della disuguaglianza triangolare tipica degli spazi metrici usuali, ciononostante le metriche non archimedee hanno proprietà davvero insolite anche per uno spazio metrico generico.

Osservazione. La metrica definita nella sezione 1 è chiaramente una metrica non archimedea: presi $x, y \in S$ tali che $x \neq y$ allora per ogni $z \in S$ vale $x \neq z$ oppure $y \neq z$ e perciò

$$d(x, y) = 1 = \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

Proposizione 3.1. *Se d è una metrica non srchimedea allora per ogni $x, y, z \in S$ vale almeno una delle seguenti formule*

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) = d(z, y) \\ d(x, z) &\leq d(x, y) = d(y, z) \\ d(z, y) &\leq d(z, x) = d(x, y) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Se poniamo

$$\begin{aligned} a &= d(x, y) \\ b &= d(x, z) \\ c &= d(z, y) \end{aligned}$$

allora a meno di un riordinamento possiamo supporre $a \leq b \leq c$. Dalle proprietà della metrica si ha $c \leq \max\{a, b\} = b$ e quindi $c = b$. ■

In maniera euristica potremmo affermare che in una metrica non archimedea *tutti i triangoli sono isosceli o equilateri*. Le proprietà insolite di queste metriche non si esauriscono qui, difatti vale anche il seguente risultato

Proposizione 3.2. *Fissato $r > 0$ la relazione su S*

$$x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) < r$$

è una relazione di equivalenza in S. Quindi la famiglia

$$\{B_r(x)\}_{x \in S}$$

determina una partizione di S.

Dimostrazione. Le proprietà di riflessività e simmetria sono sempre verificate, dimostriamo ora la transitività: se $x \sim y$ e $y \sim z$ allora

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} < r$$

e la transitività è così verificata. ■

Corollario 3.3. *Ogni punto di una palla aperta è anche il suo centro ovvero*

$$y \in B_r(x) \Leftrightarrow B_r(y) = B_r(x)$$

Corollario 3.4. *Gli insiemi $B_r(x)$ sono sia aperti che chiusi, quindi se S ha almeno due elementi distinti allora è sconnesso.*

Corollario 3.5. *Siano $x, y \in S$ ed $0 < r \leq R$ tali che $B_r(x) \cap B_R(y) \neq \emptyset$ allora $B_r(x) \subseteq B_R(y)$.*

Dimostrazione. Sia $z \in B_r(x) \cap B_R(y)$ quindi $B_r(x) = B_r(z) \subseteq B_R(z) = B_R(y)$. ■

Corollario 3.6. *Per ogni $x \in S$ ed $r > 0$ l'insieme $D_r(x)$ è aperto.*

La proposizione 3.2 e il corollario 3.5 ci danno molte informazioni su come definire nuove metriche non archimedee su un insieme non vuoto S. Le famiglie di aperti $\mathcal{F}_r = \{B_r(x)\}_{x \in S}$ con $r \in L = \mathbb{R}^+$ soddisfano le seguenti proprietà:

1. $\mathcal{F}_r$ è una partizione di S per ogni $r \in L$;
2. Siano $r, R \in L$ tali che $r < R$ e presi $A \in \mathcal{F}_r$, $B \in \mathcal{F}_R$ allora vale l'implicazione

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$$

3. Per ogni $x, y \in S$ *distinti* l'insieme

$$I(x,y) = \{r \in I : \exists A \in \mathcal{F}_r \text{ tale che } \{x,y\} \subseteq A\} \tag{3.2}$$

   è non banale, ovvero è diverso sia da $\emptyset$ che da L.

Possiamo però anche ragionare a ritroso, ovvero da queste proprietà ricostruirci una metrica non archimedea compatibile con le partizioni $\mathcal{F}_r$.

Teorema 3.7. *Preso un insieme di indici $L \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto e $\{\mathcal{F}_r\}_{r \in L}$ collezione di famiglie di sottoinsiemi di S che soddisfano le condizioni 1, 2 e 3 allora esiste una metrica non archimedea d su S a valori in $\{0\} \cup \overline{L}$ tale che per ogni $r \in L$, $A \in \mathcal{F}_r$ e per ogni $x \in A$*

$$B_r(x) \subseteq A \subseteq D_r(x)$$

Ancora, fissato $x \in S$ possiamo dimostrare che

- *Se per ogni $y \in S \setminus \{x\}$ l'insieme $I(x,y)$ ha minimo allora per ogni $x \in A \in \mathcal{F}_r$*

$$D_r(x) = A$$

- *Se per ogni $y \in S \setminus \{x\}$ l'insieme $I(x,y)$ non ha minimo allora per ogni $x \in A \in \mathcal{F}_r$*

$$B_r(x) = A$$

Dimostrazione. Per ogni $r \in L$ possiamo definire un'unica applicazione $\varphi_r : S \to \mathcal{F}_r$ tale che $x \in \varphi_r(x)$. Dalla proprietà 1 segue immediatamente che per ogni $x, y \in S$ vale la relazione

$$x \in \varphi_r(y) \Leftrightarrow y \in \varphi_r(x) \Leftrightarrow \varphi_r(x) = \varphi_r(y) \tag{3.3}$$

mentre dalla 2 segue che

$$r \leq R \Rightarrow \varphi_r(x) \subseteq \varphi_R(x)$$

e quindi possiamo riscrivere la (3.2) come

$$I(x,y) = \{r \in L : y \in \varphi_r(x)\} = \{r \in L : x \in \varphi_r(y)\}$$

Dalle proprietà 2 e 3 segue che è non vuoto ed è un segmento finale di L ovvero

$$r \in I(x,y) \text{ e } R \in L \cap [r, +\infty[\Rightarrow R \in I(x,y)$$

Definiamo allora la metrica d come

$$d(x,y) = \inf I(x,y)$$

È immediato constatare che d è simmetrica e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, dimostriamo che soddisfa la (3.1).

Presi $x, y, z \in S$ possiamo verificare velocemente che

$$\begin{aligned}\emptyset \neq I(x,y) \cap I(y,z) \subseteq I(x,z) \Rightarrow \inf I(x,z) &\leq \inf\left[I(x,y) \cap I(y,z)\right] \\ &= \max\left\{\inf I(x,y), \inf I(y,z)\right\}\end{aligned}$$

per le proprietà dei segmenti finali di $\mathbb{R}^+$.

Dimostriamo le inclusioni. Preso $x \in A \in \mathcal{F}_r$ allora $A = \varphi_r(x)$ e quindi

$$y \in B_r(x) \Rightarrow d(x,y) < r \Rightarrow r \in I(x,y) \Rightarrow y \in \varphi_r(x) = A$$

e quindi $B_r(x) \subseteq A$, mentre

$$y \in A \Rightarrow r \in I(x,y) \Rightarrow d(x,y) \leq r \Rightarrow y \in D_r(x)$$

Fissiamo $x \in S$, se per ogni $y \in S$ l'insieme $I(x, y)$ è sprovvisto di minimo allora per ogni $r \in I(x, y)$ possiamo sempre trovare $r' \in I(x, y)$ tale che $r' < r$. Scelto $A = \varphi_r(x)$ vale

$$y \in A = \varphi_r(x) \Rightarrow r \in I(x,y) \Rightarrow r > r' \in I(x,y) \Rightarrow d(x,y) < r \Rightarrow y \in B_r(x)$$

Invece se per ogni $y \in S$ l'insieme $I(x, y)$ ha valore minimo $m_y \in I(x, y)$ allora

$$y \in D_r(x) \Rightarrow m_y = d(x,y) \leq r \Rightarrow r \in I(x,y) \Rightarrow y \in \varphi_r(x) = A$$

■

Esempio. Può accadere che le inclusioni del precedente teorema siano strette e quindi le due condizioni sui minimi di $I(x, y)$ non sono mutualmente esclusive. Consideriamo $S = \{1, 2, 3\}$ con la seguente famiglia di partizioni

$$\mathcal{F}_r = \begin{cases} \{S\} & \text{se } r > 1 \\ \{\{1,2\},\{3\}\} & \text{se } r = 1 \\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\} & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

Allora dal teorema precedente si ha $d(1, 2) = d(2, 3) = d(3, 1) = 1$ e quindi

$$\{1\} = B_1(1) \subset \{1,2\} \subset D_1(1) = S$$

difatti $I(1, 2) = [1, +\infty[$ e quindi ha minimo, $I(1, 3) =]1, +\infty[$ e quindi non possiede minimo.

Se invece prendiamo $L = \{1/2, 1, 2\}$ e

$$\mathcal{F}_r = \begin{cases} \{S\} & \text{se } r = 2 \\ \{\{1,2\},\{3\}\} & \text{se } r = 1 \\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\} & \text{se } r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

allora $d(1, 2) = 1$, $d(1, 3) = 2$ e $d(2, 3) = 2$ e ogni insieme $I(x, y)$ ha minimo, difatti $D_1(1) = \{1, 2\} = D_1(2)$ e $D_1(3) = \{3\}$. Questo esempio mostra come modificando l'insieme degli indici L della famiglia si ottengano metriche completamente diverse.

Ragionando in termini di relazioni di equivalenza possiamo ridefinire le proprietà 1, 2 e 3 su una famiglia di relazioni di equivalenza $\{\equiv_s\}_{s \in L}$ su S nel seguente modo.

- *Trasferibilità* Se $x \equiv_s y$ per un certo $s \in L$ allora per ogni $t > s$ si ha $x \equiv_t y$;
- *Separabilità* Per ogni $x, y \in S$ distinti esiste un $s \in L$ tale che $x \not\equiv_s y$;
- *Confrontabilità* Per ogni $x, y \in S$ esiste un $s \in L$ tale che $x \equiv_s y$.

Una famiglia di relazioni di equivalenza che soddisfa i tre assiomi è detta *non archimedea*. Le proprietà di minimalità possono essere espresse in termini di relazioni di equivalenza nella seguente maniera

Definizione 3.8. Una famiglia non archimedea $\{\equiv_s\}_{s\in L}$ è detta *inferiormente chiusa* in $x \in S$ se e solo se per ogni $y \in S$ diverso da x esiste un $t \in L$ tale che $x \equiv_t y$ e se esiste $s \in L$ tale che $s \leq t$ ed $x \equiv_s y$ allora $s = t$.

È invece *inferiormente aperta* in x se e solo se per ogni $y \in S$ diverso da x e per ogni $t \in L$ tale che $x \equiv_t y$ esiste $t' < t$ tale che $x \equiv_{t'} y$.

Come abbiamo osservato sopra le due condizioni non sono mutualmente esclusive.

La metrica p-adica

Definiamo su $\mathbb{Q}$ una metrica non archimedea molto importante in vari aspetti della teoria dei numeri.

Innanzitutto fissiamo un numero primo p e definiamo la funzione

$$v_p : x \in \mathbb{Z} \to \inf \{n \in \mathbb{Z} : p^n x \text{ è un numero intero}\} \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$$

Chiaramente $v_p(x) \leq 0$, $v_p(x) = -\infty \Leftrightarrow x = 0$, $v_p(-x) = v_p(x)$ e sfruttando risultati basiliari dell'aritmetica $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. Quest'ultima proprietà in particolare ci garantisce che l'applicazione

$$u_p : \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \to v_p(a) - v_p(b) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$$

è ben definita. Dimostriamo ora che per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$ si ha

$$v_p(a+b) \leq \max\{v_p(a), v_p(b)\}$$

Possiamo supporre sia a che b diversi da 0 e $m = v_p(a)$, $n = v_p(b)$. Ora $m \leq n$ implica che $p^n(a+b) = p^{n-m}p^m a + p^n b$ è un numero intero e quindi $v_p(a+b) \leq n$. Se ora $x = \frac{a}{b}$, $y \in \frac{c}{d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ si ha

$$\begin{aligned} u_p(x+y) = v_p(ad+bc) - v_p(b) - v_p(d) &\leq \max\{v_p(ad), v_p(bc)\} - v_p(b) - v_p(d) \\ &= \max\{v_p(a) - v_p(b), v_p(c) - v_p(d)\} = \max\{u_p(x), u_p(y)\} \end{aligned}$$

e la disuguaglianza continua a valere anche per i razionali.

Definiamo allora la "norma" p-adica $|\cdot|_p$ in modo tale che per ogni $x \in \mathbb{Q}$

$$|x|_p = p^{u_p(x)} \in [0, +\infty[$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

$$|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$|xy|_p = |x|_p \, |y|_p$$
$$|-x| = |x|_p$$
$$|x+y|_p \leq \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}$$

Abbiamo usato le virgolette quando abbiamo nominato la norma p-adica poiché essa non è affatto una norma su $\mathbb{Q}$ in quanto quest'ultimo non è uno spazio vettoriale reale e perciò non potrebbe essere definito il prodotto per uno scalare. Se presi $x, y \in \mathbb{Q}$ poniamo

$$d(x, y) = |x - y|_p$$

allora lo spazio $(\mathbb{Q}, d)$ è uno spazio metrico e d è una metrica non archimedea.

Come per i numeri reali possiamo completare $\mathbb{Q}$ rispetto alla metrica p-adica ottenendo un nuovo campo non isomorfo ad $\mathbb{R}$ e con proprietà del tutto peculiari.

Ricaviamoci ora la metrica p-adica tramite le relazioni di equivalenza. Fissato $p \in \mathbb{N}$ numero primo definiamo l'insieme

$$\mathbb{H}_p = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^+$$

e la famiglia di relazioni di equivalenza $\{\equiv_{p^n}\}_{p^n \in \mathbb{H}_p}$ tali che per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$

$$x \equiv_{p^n} y \Leftrightarrow \text{ esiste } k \in \mathbb{N} \text{ coprimo con } p \text{ tale che } kp^n(x - y) \in \mathbb{Z}$$

Non è difficile dimostrare le proprietà di trasferibilità, separabilità e confrontabilità di questa famiglia di relazioni di equivalenza sfruttando l'unicità della decomposizione in fattori primi di un numero intero. Inoltre ogni sezione finale di $\mathbb{H}_p$ non banale possiede minimo quindi $\equiv_i$ è una famiglia non archimedea inferiormente chiusa su ogni punto di $\mathbb{Q}$.

Preso $p^n \in \mathbb{H}_p$ per la proprietà di chiusura inferiore sappiamo che

$$D_{p^n}(0) = \left\{ \frac{a}{p^k b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ non divisibili per } p \text{ e } k \leq n \right\}$$

Poiché tale metrica può assumere valori solamente in $\{0\} \cup \mathbb{H}_p$ allora possiamo ricavarci immediatamente

$$d\left(\frac{a}{b}, 0\right) = p^n \Leftrightarrow p^n \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ con } a', b' \in \mathbb{Z} \text{ non divisibili per } p$$

Per maggiori informazioni sulle norme p-adiche si consulti Koblitz N. *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta Functions*, Springer-Verlag, New York 1977.

4 Cenni alle equazioni differenziali ellittiche

In questa sezione applicheremo tutti i risultati ottenuti precedentemente per studiare una particolare classe di operatori differenziali chiamati *ellittici* sugli spazi L^p e in particolar modo su L^2.

Si richiede che il lettore sia già a conoscenza delle principali proprietà degli spazi L^p e $W^{k,p}$, in particolare si ricorda che per ogni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, +\infty]$ gli spazi $L^p(\Omega)$ e $W^{k,p}(\Omega)$ sono spazi di Banach mentre $L^2(\Omega)$ e $W^{k,2}(\Omega)$ sono spazi di Hilbert, mentre se $p \in]1, +\infty[$ allora $L^p(\Omega)$ è riflessivo con spazio duale

$$(L^p)^* = L^{\frac{p}{p-1}}$$

Fissiamo Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $A : \Omega \to M_n$ dove $M_n = \mathbb{R}^{n^2}$ è lo spazio delle matrici quadrate di ordine n, $b : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funzioni generiche. Fissiamo anche $u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 su Ω, vogliamo trovare tutte le funzioni $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 su Ω tali che

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A \cdot \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Definizione 4.1. L'applicazione $A : \Omega \to M_n$ è detta *uniformemente ellittica* se e solo se esiste una costante $m > 0$ tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \Omega$ vale la disuguaglianza

$$(A(x) \cdot \lambda) \cdot \lambda = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\lambda_j\lambda_i \geq m \|\lambda\|^2$$

dove $a_{i,j}$ è l'elemento di A in corrispondenza della i-esima riga e della j-esima colonna.

Un equazione differenziale nella forma precedente è detta *uniformemente ellittica* se lo è la matrice dei coefficienti A.

Osserviamo che sotto particolari condizioni sui coefficienti possiamo integrare ambo i coefficienti e utilizzare la formula di integrazione per parti e per ogni $v \in C_c^1(\Omega)$ l'espressione precedente diviene

$$\int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla v dx + \int_\Omega (b \cdot \nabla u)v dx + \int_\Omega cuv dx = \int_\Omega fv dx$$

che continua a valere anche se u possiede solamente le derivate prime continue.

Supponiamo adesso che $A, b, c \in L^\infty(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$, allora nella formula precedente possiamo indebolire le condizioni su u e v supponendo che appartengono rispettivamente a $W^{1,2}$ e $W_0^{1,2}$. Dobbiamo ora dare un significato all'espressione $u = u_0$ sul bordo di Ω in quanto esso possiede misura nulla e le funzioni di Sobolev sono definite quasi ovunque e quindi l'espressione così com'è perderebbe di significato.

Tornando al caso delle funzioni C^1 $u - u_0$ si annulla sul bordo di Ω quindi è approssimabile tramite funzioni $C_c^1(\Omega)$, perciò nel caso di funzioni di Sobolev questo equivale a dire che $u - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Definizione 4.2. Nelle stesse ipotesi definite precedentemente una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è *soluzione debole* dell'equazione differenziale ellittica se e solo se $u - u_0 \in W_0^{1,2}$ e per ogni $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ vale

$$\int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla v dx + \int_\Omega (b \cdot \nabla u)v dx + \int_\Omega cuv dx = \int_\Omega fv dx$$

È facile dimostrare che per ogni $u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ vale l'uguaglianza

$$\begin{aligned}\int_\Omega [A\nabla(u - u_0)] \cdot \nabla v dx + \int_\Omega [b \cdot \nabla(u - u_0)v dx + \int_\Omega c(u - u_0)v dx \\ = \int_\Omega fv dx - \int_\Omega (A\nabla u_0) \cdot \nabla v dx - \int_\Omega (b \cdot \nabla u_0)v dx - \int_\Omega cu_0 v dx\end{aligned}$$

posto allora per ogni $v, w \in W_0^{1,2}$

$$B[v, w] = \int_\Omega [A\nabla v] \cdot \nabla w dx + \int_\Omega (b \cdot \nabla v)w dx + \int_\Omega cvw dx$$
$$\tilde{f}(v) = \int_\Omega fv dx - \int_\Omega (A\nabla u_0) \cdot \nabla v dx - \int_\Omega (b \cdot \nabla u_0)v dx - \int_\Omega cu_0 v dx$$

possiamo riscrivere l'equazione differenziale nella forma più compatta

$$B[u - u_0, v] = \tilde{f}(v) \text{ per ogni } v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Le applicazioni $u \to B[v, u]$ e $u \to \tilde{f}(u)$ sono lineari e continue per la limitatezza essenziale dei coefficienti, quindi $\tilde{f}$ appartiene al duale di $W_0^{1,2}$ e possiamo anche costruire un operatore lineare L che ad ogni $u \in W_0^{1,2}$ associa il funzionale lineare $(Lu)(v) = B[u, v]$.

D'ora in poi useremo $u \in W_0^{1,2}$ al posto di $u - u_0$, in quanto alla soluzione così ottenuta aggiungendo u_0 otteniamo la soluzione dell'equazione originaria.

Teorema 4.3 (Stime energetiche)**.** *Se B è una forma uniformemente ellittica (ovvero A è uniformemente ellittica) allora esistono delle costanti $\alpha, \beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tali che*

$$\gamma = \frac{\|b\|_\infty^2}{2m} + |c^-|_\infty$$

$$|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{W_0^{1,2}} \|v\|_{W_0^{1,2}}$$

$$\beta \|u\|_{W_0^{1,2}}^2 \leq B[u,u] + \gamma \|u\|_2^2$$

Teorema 4.4 (Primo teorema di esistenza)**.** *Nelle stesse ipotesi dei ragionamenti precedenti per ogni $\mu \geq \gamma$ l'equazione*

$$Lu + \mu\tilde{u} = \tilde{f}$$

possiede per ogni $f \in L^2$ come unica soluzione $Tf \in W_0^{1,2}$ con T ottenuto a partire da $B_\mu[u,v]$.

Proposizione 4.5. *Se per quasi ogni $x \in \Omega$ vale la disuguaglianza*

$$c(x) \geq \frac{\|b\|_\infty^2}{2m}$$

allora l'equazione $Lu = \tilde{f}$ ammette un unica soluzione.

Dimostrazione. Poniamo $d(x) = c(x) - \frac{\|b\|_\infty^2}{2m}$ e

$$C[f,g] = \int_\Omega (A\nabla f)\cdot\nabla g dx + \int_\Omega (b\cdot\nabla f) g dx + \int_\Omega d f g dx$$

allora $C_\gamma[u,v] = B[u,v]$ e la tesi è così dimostrata. ∎

Come conseguenza di questo teorema la forma bilineare

$$B_\gamma[u,v] = B[u,v] + \gamma \int_\Omega uv dx$$

è continua e coerciva. Da Lax-Milgram esisterà un'applicazione $C : L^2 \to W_0^{1,2}$ tale che

$$\tilde{f}(u) = B_\gamma[Cf, u]$$

Per ogni $f \in L^2$ e $v \in W_0^{1,2}$ sia

$$\hat{f}(v) = \int_\Omega f v dx = \tilde{f} - \tilde{0}$$

e quindi $\hat{f}(u) = B_\gamma[Cf,u] - B_\gamma[C0,u] = B_\gamma[Tf,u]$ dove $Tf = Cf - C0$.

È immediato constatare la linearità di T, dimostriamone allora la continuità:

$$\beta \|Tf\|_{W^{1,2}}^2 \leq B_\gamma[Tf,Tf] = \left|\int_\Omega f T f dx\right| \leq \|f\|_2 \|Tf\|_{W^{1,2}}$$

Ora dal teorema di compattezza se estendiamo il codominio di T a tutto L^2 la nuova applicazione non solo è continua ma è addirittura un operatore compatto. Ricordiamo che dalla coercività di B_γ segue che $B_\gamma[u,u] = 0 \Leftrightarrow u = 0$ e quindi

$$Lu = \tilde{f} \Leftrightarrow B_\gamma[u,v] = \tilde{f}(v) + \gamma\hat{u}(v) = B_\gamma[Cf + \gamma Tu, v]$$
$$\Leftrightarrow u = Cf + \gamma Tu \Leftrightarrow (I - \gamma T)(u) = Cf$$

e $I - \gamma T$ è un operatore di Riesz. Dal teorema dell'alternativa $I - \gamma T$ è suriettivo se e solo se iniettivo (e quindi la soluzione esiste ed è unica) e quindi l'equazione

$$Lu = 0$$

ha solo e soltanto la soluzione identicamente nulla. Abbiamo così dimostrato il seguente teorema

Teorema 4.6 (Secondo teorema di esistenza)**.** *Sia $f \in L^2$, allora $Lu = \tilde{f}$ ha un'unica soluzione se e solo se $Lu = 0$ ha come soluzione solamente la funzione nulla.*

Le soluzioni dell'equazione $Lu = 0$ formano sempre uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal teorema dell'alternativa di Fredholm. ■

Teorema 4.7 (Terzo teorema di esistenza)**.** *Definiamo Σ come insieme di tutti i $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che l'equazione $Lu = \lambda \hat{u}$ ha una soluzione non nulla. Fissato $f \in L^2$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e l'equazione*

$$Lu = \lambda \hat{u} + \tilde{f}$$

Sono allora verificate le seguenti asserzioni:

1. *L'equazione ha un'unica soluzione se e solo se $\lambda \notin \Sigma$;*

2. *Σ è finito o coincide con una successione crescente tendente a $+\infty$.*

Dimostrazione. Da primo teorema di esistenza segue che $\Sigma \subseteq]-\gamma, +\infty[$ e dal secondo teorema di esistenza segue immediatamente la prima asserzione, mentre dalla proposizione 5.5.6 segue che $Lu = \lambda \hat{u} + \tilde{f}$ ha un'unica soluzione se e solo se $\left(\frac{1}{\lambda+\gamma} I - T\right)$ è biiettivo ovvero iniettivo e quindi se $\frac{1}{\lambda+\gamma}$ non si trova nello spettro puntuale di T. Quindi se non è finito $\frac{1}{\lambda_n+\gamma}$ deve necessariamente tendere a 0 e la dimostrazione è così conclusa. ■