Una successione generalizzata di Fibonacci di ordine n è una qualunque successione x_i di numeri reali tale che ogni termine è somma dei precedenti n termini consecutivi (tranne i primi n termini della successione che sono completamente arbitrari), in formule per ogni intero i

$$x_{i+n} = x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_{i+n-1}$$

Per opportune successioni generalizzate di Fibonacci il limite

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = x$$

esiste ed è finito e vale l'uguaglianza

$$n = -\frac{\ln(2-x)}{\ln x}$$

in particolare $x \in]0, 2[$.

Prima di lavorare sul caso generico consideriamo inizialmente le successioni complesse di Fibonacci nella forma

$$x_i = \lambda^{i-1}$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$ e quindi $x = \lambda$.

Dalla definizione di successione generalizzata di Fibonacci segue immediatamente che

$$\lambda^n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{n-1}$$

moltiplicando ambo i membri per $\lambda - 1$ otteniamo

$$\lambda^{n+1} - \lambda^n = \lambda^n - 1$$

ovvero

$$\lambda^{n+1} - 2\lambda^n + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^n(2-\lambda) = 1$$

se $\lambda \in \mathbb{R}^+$ allora

$$n = \log_\lambda \frac{1}{2-\lambda} \Leftrightarrow n = -\frac{\ln(2-\lambda)}{\ln \lambda}$$

Dimostriamo ora il caso generale: prendiamo il polinomio

$$P(x) = x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1$$

dal teorema fondamentale dell'algebra P possiede n radici complesse $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non necessariamente distinte. Dimostriamo che per ogni successione generalizzata di Fibonacci x_i esistono delle costanti complesse tali che

$$x_i = a_1\lambda_1^{i-1} + a_2\lambda_2^{i-1} + \cdots + a_n\lambda_n^{i-1}$$

e se $\lambda_j = \overline{\lambda_i}$ allora $a_j = \overline{a_i}$.

Consideriamo il sistema lineare complesso $VX = B$ ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Il sistema lineare presenta un'unica soluzione se e solo se il determinante di A è diverso da 0, ma A è una matrice di Vandermonde e quindi le radici di P deffono essere tutte distinte per avere l'unicità. Poiché $(x-1)P(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ le radici doppie di P devono necessariamente annullare il polinomio

$$(n+1)x^n - 2nx^{n-1} = x^{n-1}[(n+1)x - 2n]$$

Il valore $x = 0$ non è una radice di P ma nemmeno $x = \frac{2n}{n+1}$ lo è poiché se lo fosse allora varrebbe

$$2^{n+1}n^{n+1} - 2n^n(n+1) + (n+1)^{n+1} = 0$$

e quindi n deve dividere $(n+1)^{n+1}$ che essendo n e $n+1$ coprimi è verificato solo ed esclusivamente per $n = 1$ ovvero se P è di primo grado. Quindi tutte le radici di P sono semplici e distinte e quindi le costanti a_i esistono sempre.

Supponiamo ora che $\lambda_j = \overline{\lambda_i}$ (ricordiamo che poiché il polinomio iniziale ha coefficienti reali allora il coniugato di una radice complessa è ancora una radice di esso) allora la matrice $\overline{A}$ equivale alla matrice A con i vettori colonna complessi scambiati di posto con i relativi vettori coniugati. Però il vettore B è composto interamente da valori reali (le successioni di Fibonacci generalizzate sono sempre reali) e quindi vale l'uguaglianza $\overline{AX} = B$ e perciò il vettore $\overline{X}$ conterrà i vettori a_i e a_j scambiati di posto. Per l'unicità della soluzione segue la relazione $a_j = \overline{a_i}$, in particolare $a_i = 0 \Leftrightarrow a_j = 0$ e quindi se compare nella rappresentazione di x_n un termine complesso allora sarà presente anche il suo coniugato.

Mettiamoci ora nella condizione che esiste un indice i, che per comodità faremo coincidere con 1, tale che $a_1 \neq 0$, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_1 > |\lambda_i|$ per ogni $i > 1$. Sotto queste condizioni l'affermazione iniziale è verificata in quanto

$$x = \lim_{i\to+\infty} \frac{x_{i+2}}{x_{i+1}} = \lim_{i\to+\infty} \frac{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n + \cdots}{a_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n + \cdots} = \lambda_1$$

ed essendo $\lambda_1 > 0$

$$n = -\frac{\ln(2-\lambda_1)}{\ln \lambda_1} = -\frac{\ln(2-x)}{\ln x}$$

Se $a_1 = 0$ il limite potrebbe anche non esistere: se λ è una radice complessa non reale allora la successione

$$x_n = \lambda^{n-1} + \overline{\lambda}^{n-1}$$

è una successione generalizzata di Fibonacci e $\lim_{i\to+\infty} \frac{x_{i+1}}{x_i}$ non esiste in quanto

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{\lambda + \overline{\lambda}\left(\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}\right)^n}{1 + \left(\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}\right)^n} = \frac{\lambda + \overline{\lambda}a^n}{1 + a^n}$$

con a numero complesso di norma unitaria diverso da 1.