Complementi di analisi funzionale

De Donato Paolo

22 gennaio 2019

1 La chiusura della palla aperta

In uno spazio metrico generico valgono le disuguaglianze

$$B_r(x) \subseteq \overline{B_r(x)} \subseteq D_r(x)$$

queste inclusioni possono essere sia disuguaglianze strette sia uguaglianze tra insiemi. Preso un qualunque insieme S contenente almeno due elementi distinti possiamo sempre dotarlo della seguente metrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

La topologia indotta da tale metrica rende tutti i singleton aperti e quindi ogni sottoinsieme di S è sia aperto che chiuso. Fissato $x \in S$ segue che

$$\{x\} = B_1(x) = \overline{B_1(x)} \subsetneq D_1(x) = S$$

Su uno spazio vettoriale normato $X \neq \{0\}$ invece si ha sempre $B_r(x) \subsetneq \overline{B_r(x)} = D_r(x)$, infatti possiamo sempre trovare vettori di norma arbitraria e per ogni $y \in D_r(x)$ la successione

$$x_n = \frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)y$$

è contenuta in $B_r(x)$ e converge a y, quindi per una proposizione precedente $\overline{B_r(x)} = D_r(x)$.

2 Esempi notevoli di spazi vettoriali topologici

2.1 Lo spazio L^1_{loc}

Diamo un esempio di spazio vettoriale topologico localmente convesso usato ampiamente nei corsi di analisi avanzata.

Innanzitutto fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto non vuoto e definiamo

$$L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^m \text{ misurabile } : \int_K \|f(x)\| dx < +\infty \ \forall K \subseteq \Omega \text{ compatto in } \mathbb{R}^n \right\}$$

che come è ben noto risulta essere uno spazio vettoriale reale. Siano ora $f_n, f \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ diciamo che la successione converge a f se e solo se

$$\lim_{n \to +\infty} \int_K \|f_n(x) - f(x)\| dx = 0$$

per ogni $K \subseteq \Omega$ compatto. Quindi denotando con $\mathcal{K} = \{K \subseteq \Omega : K \text{ compatto in } \mathbb{R}^n\}$ la famiglia di seminorme

$$\{p_K(f)\}_{K\in\mathcal{K}} = \left\{ \int_K \|f(x)\| dx \right\}_{K\in\mathcal{K}}$$

rende $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso come ben sappiamo in cui la convergenza di successioni coincide con la precedente definizione di convergenza.

Tale famiglia di seminorme non risulta totale, se però identifichiamo le funzioni che coincidono quasi ovunque allora tale famiglia risulta anche totale. Sia infatti f tale che l'insieme $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ abbia misura non nulla (altrimenti coinciderebbe con la funzione nulla) allora da una conseguenza del teorema di rappresentazione di Riesz esisterà un compatto K contenuto in tale insieme con misura strettamente maggiore di 0 e quindi $\displaystyle\int_K \|f(x)\| dx > 0$.

Quindi il limite di una successione convergente in L^1_{loc} se esiste è unico.

2.2 Lo spazio delle funzioni test

Prendiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e denotiamo con $C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ lo spazio di tutte le funzioni $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ derivabili infinite volti su $\mathbb{R}^n$ tali che l'insieme

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) \neq 0\}}$$

detto *supporto* di ϕ se non vuoto è compatto e contenuto in Ω. È chiaramente uno spazio vettoriale detto *spazio delle funzioni test*.

Sia ora $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n_0$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ allora poniamo per comodità di notazione

$$D^\alpha \phi(x) = \phi(x) \text{ se } |\alpha| = 0$$
$$D^\alpha \phi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \text{ altrimenti}$$

Possiamo definire su $C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ la seguente famiglia di seminorme

$$\{p_\alpha(\phi)\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n_0} = \left\{ \max_{x\in\mathbb{R}^n} \|D^\alpha \phi(x)\| \right\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n_0}$$

che rende lo spazio delle funzioni test uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Con questa topologia diciamo che una successione ϕ_k converge a ϕ in $C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se e solo se per ogni multiindice α la successione $D^\alpha \phi_k$ converge uniformemente a $D^\alpha \phi$ riottenendo così la definizione usuale di convergenza delle funzioni test.

3 Metriche non archimedee

Consideriamo uno spazio metrico (S, d) allora la metrica d è detta *non archimedea* se e solo se per ogni $x, y, z \in S$ vale la disuguaglianza

$$d(x, y) \leq \max \{d(x, z), d(z, y)\}$$

questa disuguaglianza è una versione più forte della disuguaglianza triangolare tipica degli spazi metrici usuali, ciononostante le metriche non archimedee hanno proprietà davvero insolite anche per uno spazio metrico generico.

Osservazione. La metrica definita nella sezione 1 è chiaramente una metrica non archimedea: presi $x, y \in S$ tali che $x \neq y$ allora per ogni $z \in S$ vale $x \neq z$ oppure $y \neq z$ e perciò

$$d(x, y) = 1 = \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

Proposizione 3.1. *Se d è una metrica non srchimedea allora per ogni $x, y, z \in S$ vale almeno una delle seguenti formule*

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) = d(z, y) \\ d(x, z) &\leq d(x, y) = d(y, z) \\ d(z, y) &\leq d(z, x) = d(x, y) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Se poniamo

$$\begin{aligned} a &= d(x, y) \\ b &= d(x, z) \\ c &= d(z, y) \end{aligned}$$

allora a meno di un riordinamento possiamo supporre $a \leq b \leq c$. Dalle proprietà della metrica si ha $c \leq \max\{a, b\} = b$ e quindi $c = b$. ■

In maniera euristica potremmo affermare che in una metrica non archimedea *tutti i triangoli sono isosceli o equilateri.* Le proprietà insolite di queste metriche non si esauriscono qui, difatti vale anche il seguente risultato

Proposizione 3.2. *Fissato $r > 0$ la relazione su S*

$$x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) < r$$

è una relazione di equivalenza in S. Quindi la famiglia

$$\{B_r(x)\}_{x \in S}$$

determina una partizione di S.

Dimostrazione. Le proprietà di riflessività e simmetria sono sempre verificate, dimostriamo ora la transitività: se $x \sim y$ e $y \sim z$ allora

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} < r$$

e la transitività è così verificata. ■

Corollario 3.3. *Ogni punto di una palla aperta è anche il suo centro ovvero*

$$y \in B_r(x) \Leftrightarrow B_r(y) = B_r(x)$$

Corollario 3.4. *Gli insiemi $B_r(x)$ sono sia aperti che chiusi, quindi se S ha almeno due elementi distinti allora è sconnesso.*

Corollario 3.5. *Siano $x, y \in S$ ed $0 < r \leq R$ tali che $B_r(x) \cap B_R(y) \neq \emptyset$ allora $B_r(x) \subseteq B_R(y)$.*

Dimostrazione. Sia $z \in B_r(x) \cap B_R(y)$ quindi $B_r(x) = B_r(z) \subseteq B_R(z) = B_R(y)$. ■

Corollario 3.6. *Per ogni $x \in S$ ed $r > 0$ l'insieme $D_r(x)$ è aperto.*

La metrica p-adica

Definiamo su $\mathbb{Q}$ una metrica non archimedea molto importante in vari aspetti della teoria dei numeri.

Innanzitutto fissiamo un numero primo p e definiamo la funzione

$$v_p : x \in \mathbb{Z} \to \inf \{n \in \mathbb{Z} : p^n x \text{ è un numero intero}\} \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$$

Chiaramente $v_p(x) \leq 0$, $v_p(x) = -\infty \Leftrightarrow x = 0$, $v_p(-x) = v_p(x)$ e sfruttando risultati basiliari dell'aritmetica $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. Quest'ultima proprietà in particolare ci garantisce che l'applicazione

$$u_p : \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \to v_p(a) - v_p(b) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$$

è ben definita. Dimostriamo ora che per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$ si ha

$$v_p(a+b) \leq \max \{v_p(a), v_p(b)\}$$

Possiamo supporre sia a che b diversi da 0 e $m = v_p(a)$, $n = v_p(b)$. Ora $m \leq n$ implica che $p^n(a+b) = p^{n-m}p^m a + p^n b$ è un numero intero e quindi $v_p(a+b) \leq n$. Se ora $x = \frac{a}{b}$, $y \in \frac{c}{d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ si ha

$$\begin{aligned} u_p(x+y) = v_p(ad+bc) - v_p(b) - v_p(d) &\leq \max \{v_p(ad), v_p(bc)\} - v_p(b) - v_p(d) \\ &= \max \{v_p(a) - v_p(b), v_p(c) - v_p(d)\} = \max \{u_p(x), u_p(y)\} \end{aligned}$$

e la disuguaglianza continua a valere anche per i razionali.

Definiamo allora la "norma" p-adica $|\cdot|_p$ in modo tale che per ogni $x \in \mathbb{Q}$

$$|x|_p = p^{u_p(x)} \in [0, +\infty[$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{gathered} |x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ |xy|_p = |x|_p \, |y|_p \\ |-x| = |x|_p \\ |x+y|_p \leq \max \left\{ |x|_p, |y|_p \right\} \end{gathered}$$

Abbiamo usato le virgolette quando abbiamo nominato la norma p-adica poiché essa non è affatto una norma su $\mathbb{Q}$ in quanto quest'ultimo non è uno spazio vettoriale reale e perciò non potrebbe essere definito il prodotto per uno scalare. Se presi $x, y \in \mathbb{Q}$ poniamo

$$d(x, y) = |x - y|_p$$

allora lo spazio $(\mathbb{Q}, d)$ è uno spazio metrico e d è una metrica non archimedea.

Come per i numeri reali possiamo completare $\mathbb{Q}$ rispetto alla metrica p-adica ottenendo un nuovo campo non isomorfo ad $\mathbb{R}$ e con proprietà del tutto peculiari. Per maggiori informazioni sulle norme p-adiche si consulti Koblitz N. *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta Functions*, Springer-Verlag, New York 1977.

4 Cenni alle equazioni differenziali ellittiche

In questa sezione applicheremo tutti i risultati ottenuti precedentemente per studiare una particolare classe di operatori differenziali chiamati *ellittici* sugli spazi L^p e in particolar modo su L^2.

Si richiede che il lettore sia già a conoscenza delle principali proprietà degli spazi L^p e $W^{k,p}$, in particolare si ricorda che per ogni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, +\infty]$ gli spazi $L^p(\Omega)$ e $W^{k,p}(\Omega)$ sono spazi di Banach mentre $L^2(\Omega)$ e $W^{k,2}(\Omega)$ sono spazi di Hilbert, mentre se $p \in]1, +\infty[$ allora $L^p(\Omega)$ è riflessivo con spazio duale

$$(L^p)^* = L^{\frac{p}{p-1}}$$

Fissiamo Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $A : \Omega \to M_n$ dove $M_n = \mathbb{R}^{n^2}$ è lo spazio delle matrici quadrate di ordine n, $b : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funzioni generiche. Fissiamo anche $u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 su Ω, vogliamo trovare tutte le funzioni $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 su Ω tali che

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A \cdot \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Definizione 4.1. L'applicazione $A : \Omega \to M_n$ è detta *uniformemente ellittica* se e solo se esiste una costante $m > 0$ tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \Omega$ vale la disuguaglianza

$$(A(x) \cdot \lambda) \cdot \lambda = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\lambda_j\lambda_i \geq m \left\|\lambda\right\|^2$$

dove $a_{i,j}$ è l'elemento di A in corrispondenza della i-esima riga e della j-esima colonna.

Un equazione differenziale nella forma precedente è detta *uniformemente ellittica* se lo è la matrice dei coefficienti A.

Osserviamo che sotto particolari condizioni sui coefficienti possiamo integrare ambo i coefficienti e utilizzare la formula di integrazione per parti e per ogni $v \in C_c^1(\Omega)$ l'espressione precedente diviene

$$\int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla v dx + \int_\Omega (b \cdot \nabla u) v dx + \int_\Omega cuv dx = \int_\Omega f v dx$$

che continua a valere anche se u possiede solamente le derivate prime continue.

Supponiamo adesso che $A, b, c \in L^\infty(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$, allora nella formula precedente possiamo indebolire le condizioni su u e v supponendo che appartengono rispettivamente a $W^{1,2}$ e $W_0^{1,2}$. Dobbiamo ora dare un significato all'espressione $u = u_0$ sul bordo di Ω in quanto esso possiede misura nulla e le funzioni di Sobolev sono definite quasi ovunque e quindi l'espressione così com'è perderebbe di significato.

Tornando al caso delle funzioni C^1 $u - u_0$ si annulla sul bordo di Ω quindi è approssimabile tramite funzioni $C_c^1(\Omega)$, perciò nel caso di funzioni di Sobolev questo equivale a dire che $u - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Definizione 4.2. Nelle stesse ipotesi definite precedentemente una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è *soluzione debole* dell'equazione differenziale ellittica se e solo se $u - u_0 \in W_0^{1,2}$ e per ogni $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ vale

$$\int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla v dx + \int_\Omega (b \cdot \nabla u) v dx + \int_\Omega cuv dx = \int_\Omega f v dx$$

È facile dimostrare che per ogni $u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ vale l'uguaglianza

$$\int_\Omega [A\nabla(u-u_0)]\cdot\nabla v dx + \int_\Omega [b\cdot\nabla(u-u_0)v dx + \int_\Omega c(u-u_0)v dx$$
$$= \int_\Omega f v dx - \int_\Omega (A\nabla u_0)\cdot\nabla v dx - \int_\Omega (b\cdot\nabla u_0)v dx - \int_\Omega c u_0 v dx$$

posto allora per ogni $v, w \in W_0^{1,2}$

$$B[v,w] = \int_\Omega [A\nabla v]\cdot\nabla w dx + \int_\Omega (b\cdot\nabla v)w dx + \int_\Omega c v w dx$$
$$\tilde{f}(v) = \int_\Omega f v dx - \int_\Omega (A\nabla u_0)\cdot\nabla v dx - \int_\Omega (b\cdot\nabla u_0)v dx - \int_\Omega c u_0 v dx$$

possiamo riscrivere l'equazione differenziale nella forma più compatta

$$B[u-u_0, v] = \tilde{f}(v) \text{ per ogni } v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Le applicazioni $u \to B[v,u]$ e $u \to \tilde{f}(u)$ sono lineari e continue per la limitatezza essenziale dei coefficienti, quindi $\tilde{f}$ appartiene al duale di $W_0^{1,2}$ e possiamo anche costruire un operatore lineare L che ad ogni $u \in W_0^{1,2}$ associa il funzionale lineare $(Lu)(v) = B[u,v]$.

D'ora in poi useremo $u \in W_0^{1,2}$ al posto di $u - u_0$, in quanto alla soluzione così ottenuta aggiungendo u_0 otteniamo la soluzione dell'equazione originaria.

Teorema 4.3 (Stime energetiche)**.** *Se B è una forma uniformemente ellittica (ovvero A è uniformemente ellittica) allora esistono delle costanti $\alpha, \beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tali che*

$$\gamma = \frac{\|b\|_\infty^2}{2m} + \left|c^-\right|_\infty$$

$$|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{W_0^{1,2}} \|v\|_{W_0^{1,2}}$$

$$\beta \|u\|_{W_0^{1,2}}^2 \leq B[u,u] + \gamma \|u\|_2^2$$

Teorema 4.4 (Primo teorema di esistenza)**.** *Nelle stesse ipotesi dei ragionamenti precedenti per ogni $\mu \geq \gamma$ l'equazione*

$$Lu + \mu\tilde{u} = \tilde{f}$$

possiede per ogni $f \in L^2$ come unica soluzione $Tf \in W_0^{1,2}$ con T ottenuto a partire da $B_\mu[u,v]$.

Proposizione 4.5. *Se per quasi ogni $x \in \Omega$ vale la disuguaglianza*

$$c(x) \geq \frac{\|b\|_\infty^2}{2m}$$

allora l'equazione $Lu = \tilde{f}$ ammette un unica soluzione.

Dimostrazione. Poniamo $d(x) = c(x) - \frac{\|b\|_\infty^2}{2m}$ e

$$C[f,g] = \int_\Omega (A\nabla f)\cdot\nabla g dx + \int_\Omega (b\cdot\nabla f) g dx + \int_\Omega d f g dx$$

allora $C_\gamma[u,v] = B[u,v]$ e la tesi è così dimostrata. ■

Come conseguenza di questo teorema la forma bilineare

$$B_\gamma[u,v] = B[u,v] + \gamma \int_\Omega uvdx$$

è continua e coerciva. Da Lax-Milgram esisterà un'applicazione $C : L^2 \to W_0^{1,2}$ tale che

$$\tilde{f}(u) = B_\gamma[Cf, u]$$

Per ogni $f \in L^2$ e $v \in W_0^{1,2}$ sia

$$\hat{f}(v) = \int_\Omega fvdx = \tilde{f} - \tilde{0}$$

e quindi $\hat{f}(u) = B_\gamma[Cf, u] - B_\gamma[C0, u] = B_\gamma[Tf, u]$ dove $Tf = Cf - C0$.

È immediato constatare la linearità di T, dimostriamone allora la continuità:

$$\beta \|Tf\|^2_{W^{1,2}} \leq B_\gamma[Tf, Tf] = \left| \int_\Omega fTfdx \right| \leq \|f\|_2 \|Tf\|_{W^{1,2}}$$

Ora dal teorema di compattezza se estendiamo il codominio di T a tutto L^2 la nuova applicazione non solo è continua ma è addirittura un operatore compatto. Ricordiamo che dalla coercività di B_γ segue che $B_\gamma[u,u] = 0 \Leftrightarrow u = 0$ e quindi

$$\begin{aligned} Lu = \tilde{f} \Leftrightarrow B_\gamma[u,v] = \tilde{f}(v) + \gamma\hat{u}(v) = B_\gamma[Cf + \gamma Tu, v] \\ \Leftrightarrow u = Cf + \gamma Tu \Leftrightarrow (I - \gamma T)(u) = Cf \end{aligned}$$

e $I - \gamma T$ è un operatore di Riesz. Dal teorema dell'alternativa $I - \gamma T$ è suriettivo se e solo se iniettivo (e quindi la soluzione esiste ed è unica) e quindi l'equazione

$$Lu = 0$$

ha solo e soltanto la soluzione identicamente nulla. Abbiamo così dimostrato il seguente teorema

Teorema 4.6 (Secondo teorema di esistenza)**.** *Sia $f \in L^2$, allora $Lu = \tilde{f}$ ha un'unica soluzione se e solo se $Lu = 0$ ha come soluzione solamente la funzione nulla.*

Le soluzioni dell'equazione $Lu = 0$ formano sempre uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal teorema dell'alternativa di Fredholm. ■

Teorema 4.7 (Terzo teorema di esistenza)**.** *Definiamo Σ come insieme di tutti i $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che l'equazione $Lu = \lambda\hat{u}$ ha una soluzione non nulla. Fissato $f \in L^2$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e l'equazione*

$$Lu = \lambda\hat{u} + \tilde{f}$$

Sono allora verificate le seguenti asserzioni:

1. *L'equazione ha un'unica soluzione se e solo se $\lambda \notin \Sigma$;*

2. *Σ è finito o coincide con una successione crescente tendente a $+\infty$.*

Dimostrazione. Da primo teorema di esistenza segue che $\Sigma \subseteq]-\gamma, +\infty[$ e dal secondo teorema di esistenza segue immediatamente la prima asserzione, mentre dalla proposizione 5.5.6 segue che $Lu = \lambda\hat{u} + \tilde{f}$ ha un'unica soluzione se e solo se $\left(\frac{1}{\lambda+\gamma} I - T\right)$ è biiettivo ovvero iniettivo e quindi se $\frac{1}{\lambda+\gamma}$ non si trova nello spettro puntuale di T. Quindi se non è finito $\frac{1}{\lambda_n+\gamma}$ deve necessariamente tendere a 0 e la dimostrazione è così conclusa. ■