Appunti sparsi di Analisi Funzionale

Terza edizione

De Donato Paolo

16 marzo 2019

Prefazione alla prima edizione

La seguente dispensa raccoglie vari argomenti di analisi funzionale trattati all'interno di vari corsi tenuti nell'anno accademico 2017/2018 all'Università degli Studi di Napoli "Federico II", gran parte dei quali provengono dal corso di Analisi Funzionale tenuto dal prof. Carbone Luciano. I vari argomenti trattati all'interno sono stati rielaborati e approfonditi dall'autore a partire sia dagli argomenti trascritti dagli studenti durante le lezioni sia dalle risorse cartacee e digitali consigliate dagli stessi professori. Tutto il materiale è stato elencato all'interno della bibliografia.

I seguenti appunti sono da considerarsi tutt'altro che definitivi e potrebbero contenere errori o inesattezze di vario genere. Chiunque riscontrasse errori nelle dimostrazioni o sviste al livello grammaticale o più semplicemente volesse darmi qualche consiglio a riguardo è pregato di segnalarli all'indirizzo email `pdd.math@gmail.com`.

Indice

Capitolo 1

Concetti preliminari

1.1 Spazi vettoriali

Attenzione: per un errore tipografico si è usata la notazione $A - B$ anche per identificare la differenza insiemistica $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$. Il lettore deve perciò stare attento e in caso di ambiguità stabilire in base al contesto quale notazione è stata usata.

Definizione 1.1.1. Sia V un insieme non vuoto su cui sono definite le seguenti applicazioni binarie

$$g : V \times V \to V$$
$$h : \mathbb{R} \times V \to V$$

allora la struttura $(V, \mathbb{R}, g, h)$ è uno *spazio vettoriale reale* se e solo se valgono le seguenti proprietà:

- (V, g) è un gruppo abeliano;
- $h(1, v) = v$ per ogni $v \in V$;
- $h[\alpha, g(u, v)] = g[h(\alpha, u), h(\alpha, v)]$ per ogni $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $h(\alpha + \beta, u) = g[h(\alpha, u), h(\beta, u)]$ per ogni $u \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- $h(\alpha\beta, u) = h[\alpha, h(\beta, u)]$ per ogni $u \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

D'ora in avanti le applicazioni g e h di uno spazio vettoriale V saranno indicate rispettivamente con le operazioni binarie $+$ e $\cdot$.

Proposizione 1.1.2. *Se $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora*

- $0v = 0$ *per ogni* $v \in V$, *si noti che lo zero al primo membro è il numero reale* 0, *mentre quello al secondo membro è il vettore nullo ovvero l'elemento neutro del gruppo abeliano* $(V, +)$;

- $(-1)v = -v$ *per ogni* $v \in V$*, si noti che il vettore al secondo membro è il vettore inverso di* v *nel gruppo abeliano* $(V, +)$*;*

Definizione 1.1.3. Se V è uno spazio vettoriale e $W \subseteq V$ un suo sottoinsieme non vuoto allora W è un *sottospazio* di V, e si indica con $W \leq V$, se e solo se la somma e la moltiplicazione per uno scalare di elementi di W rimane in W. In altre parole $(W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ è esso stesso uno spazio vettoriale.

Somma diretta

Se X è uno spazio vettoriale e M un qualunque suo sottoinsieme, allora la scrittura $M \leq X$ è equivalente ad affermare che M è un sottospazio vettoriale di X.

Definizione 1.1.4. Siano M, N sottoinsiemi dello spazio vettoriale X, la *somma algebrica* di M e N è il sottoinsieme

$$M + N = \{m + n \in X : m \in M \wedge n \in N\}$$

Analogamente poniamo

$$M - N = \{m - n \in X : m \in M \wedge n \in N\}$$
$$\alpha N = \{\alpha n \in X : m \in M \wedge n \in N\}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$

La dimostrazione che la somma algebrica di sottospazi vettoriali è ancora un sottospazio vettoriale è lasciata al lettore come esercizio.

Proposizione 1.1.5. *Sia* X *spazio vettoriale e* $M \leq X$*, allora esiste un unico* $N \leq X$ *tale che*

$$X = M \oplus N$$

ovvero $X = M + N$ *e* $M \cap N = \{0\}$*.*

Dimostrazione. Se $M = X$ allora $N = \{0\}$, analogo se $M = \{0\}$.
Sia allora $x \in X \setminus M$ e $\langle x \rangle = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \langle x \rangle \cap M = \{0\}$, perciò la classe

$$\mathcal{N} = \{A \leq X : A \cap M = \{0\}\}$$

è non vuota. Il lettore può dimostrare con facilità che tale classe è *induttiva*, quindi per il lemma di Zorn $\mathcal{N}$ ammette un elemento massimale N e quindi $M \cap N = \{0\}$.

Se per assurdo non fosse $X = M \oplus N$ allora esisterebbe un elemento x che non è somma di elementi di M e N da cui segue immediatamente che $M \cap (N + \langle x \rangle) = \{0\}$ assurdo per la massimalità di N, da cui la tesi. ∎

Definizione 1.1.6. Siano V e V' spazi vettoriali, un'applicazione $f : V \to V'$ è *lineare* se e solo se per ogni $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Se $f : V \to V'$ è lineare allora i seguenti insiemi

$$\ker f = \{x \in V : f(x) = 0\}$$
$$\operatorname{im} f = \left\{f(x) \in V' : x \in V\right\}$$

sono sottospazi vettoriali di V e V' rispettivamente.

Definizione 1.1.7. Sia V spazio vettoriale reale, il *duale algebrico* di V è l'insieme di tutte le applicazioni lineari

$$V^+ = \{f : V \to \mathbb{R} : f \text{ lineare}\}$$

Spazio vettoriale quoziente

Sia X spazio vettoriale e $N \leq X$, poniamo per definizione $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N$, si dimostra facilmente che è una relazione di equivalenza e che lo spazio quoziente $X/\sim$ è ancora uno spazio vettoriale che viene detto *spazio vettoriale quoziente* e indicato anche con la notazione X/N. Gli elementi dello spazio vettoriale quoziente X/N sono le classi di equivalenza

$$[x]_\sim = \{y \in X : y - x \in N\} = x + N$$

Inoltre la funzione

$$\pi_N : x \in X \to x + N \in X/N$$

è un epimorfismo chiamato *epimorfismo canonico* con $\ker \pi_N = N$.

1.2 Spazi topologici

Definizione 1.2.1. Sia X insieme non vuoto e τ contenente alcuni dei sottoinsiemi di X. Allora la struttura (X, τ) è uno *spazio topologico* se e solo se valgono le seguenti affermazioni:

- $\emptyset, X \in \tau$;
- Se $A, B \in \tau$ allora $A \cap B \in \tau$;
- Se $\mathcal{A} \subseteq \tau$ sottoinsieme non vuoto di elementi di τ allora $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$.

Gli elementi di τ sono detti *aperti* di X, mentre $C \subseteq X$ è *chiuso* se e solo se $X \setminus C \in \tau$.

Definizione 1.2.2. Consideriamo uno spazio topologico X e sia x_n una successione in X. Prendiamo $x \in X$ diciamo che x_n *tende* a x, e scriviamo $x_n \to x$ se e solo se per ogni intorno U di x esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ si ha $x_n \in U$.

Definizione 1.2.3. Siano X e Y spazi topologici e $f : X \to Y$ funzione generica. Allora f è *continua* in $x \in X$ se e solo se per ogni intorno $I \subseteq Y$ di $f(x)$ $f^{-1}(I)$ è un intorno di x.

Proposizione 1.2.4. *$f : X \to Y$ è continua su tutto X se e solo se vale almeno uno tra*

$$\begin{aligned} A \subseteq Y \text{ aperto } &\Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq X \text{ aperto} \\ C \subseteq Y \text{ chiuso } &\Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq X \text{ chiuso} \end{aligned}$$

Definizione 1.2.5. Uno spazio topologico X è di *Hausdorff* se e solo se per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$ esistono due aperti A, B di X tali che $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Proposizione 1.2.6. *In uno spazio topologico di Hausdorff i singleton sono insiemi chiusi.*

Proposizione 1.2.7. *Negli spazi topologici di Hausdorff il limite di una generica successione, se esiste, è unico.*

Quindi se x è l'unico limite della successione x_n allora si usa anche la notazione

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

Definizione 1.2.8. Fissato $x \in X$, un *sistema fondamentale di intorni* di x è una qualunque famiglia di intorni $\mathcal{I}$ di x tali che per ogni aperto A di X contenente x esisterà un $I \in \mathcal{I}$ tale che $I \subseteq A$.

Uno spazio topologico X *soddisfa l'assioma $\mathcal{N}_1$* se e solo se ogni suo punto possiede un sistema fondamentale di intorni al più numerabile.

Definizione 1.2.9. Preso un qualunque spazio topologico X una famiglia di aperti $\mathcal{B}$ è una *base* per la topologia su X se e solo se ogni aperto di X è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Uno spazio topologico X *soddisfa l'assioma $\mathcal{N}_2$* se e solo se possiede una base al più numerabile.

Proposizione 1.2.10. *Preso A insieme generico non vuoto e $\mathcal{A}$ una collezione non vuota di sottoinsiemi di A che soddisfi le seguenti proprietà:*

- $\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B = A$;
- *Per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ esiste $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ non vuoto tale che $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = B_1 \cap B_2$.*

Allora la famiglia

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \right\}$$

è una topologia su A e $\mathcal{A}$ ne è una base.

Definizione 1.2.11. Sia X spazio topologico, allora $Y \subseteq X$ è *denso* in X se e solo se la chiusura di Y coincide con X.

Y è invece *raro* se e solo se la chiusura non ha punti interni.

X è *separabile* se e solo se ha un sottoinsieme denso e numerabile.

Esempio. Dotiamo $\mathbb{R}$ della topologia usuale, allora $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme raro mentre $\mathbb{Q}$ è denso e numerabile, quindi $\mathbb{R}$ è uno spazio topologico separabile.

Con un procedimento analogo si dimostra facilmente che anche $\mathbb{R}^n$ è separabile per ogni $n \in \mathbb{N}$

Definizione 1.2.12. Sia X spazio topologico, allora una classe di aperti $\mathcal{A}$ di X è una *base* di X se e solo se ogni aperto di X è unione di elementi di $\mathcal{A}$.

Proposizione 1.2.13. *Se X è uno spazio topologico compatto allora ogni suo sottoinsieme chiuso è compatto.*

Proposizione 1.2.14. *Se X è uno spazio topologico di Hausdorff allora tutti i suoi sottoinsiemi compatti sono chiusi.*

1.2.1 Semicontinuità inferiore

Definizione 1.2.15. Sia X spazio topologico e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funzione generica. Allora f è *semicontinua inferiormente* in $x \in X$ se e solo se

$$f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(y)$$

ovvero, fissata un qualunque sistema fondamentale di intorni $\mathcal{I}$ di x vale

$$f(x) \leq \sup_{U \in \mathcal{I}} \inf_{y \in U} f(y) \Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \, \exists U \in \mathcal{I} : \forall y \in U \ f(x) - \epsilon \leq f(y)$$

Invece f è *sequenzialmente semicontinua inferiormente* in $x \in X$ se e solo se per ogni x_n successione in X convergente ad x si ha

$$f(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n)$$

In generale non è detto che le funzioni sequenzialmente semicontinue inferiormente sono anche semicontinue inferiormente, mentre il viceversa è chiaramente vero.

Teorema 1.2.16. *Sia X spazio topologico sequenzialmente compatto e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sequenzialmente semicontinua inferiormente, allora f possiede un minimo in X.*

Dimostrazione. Posto $m = \inf_{x \in X} f(x)$ se $m = +\infty$ allora ogni suo punto è di minimo, altrimenti esisterà a meno di passare ad un'estratta una successione $x_n \in X$ e un elemento $x \in X$ tale che $x_n \to x$ e $f(x_n) \to m$. Segue immediatamente che

$$m \leq f(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) = m$$

e quindi $f(x) = m \leq f(y)$ per ogni $y \in X$ e x è un punto di minimo per f. ∎

Lemma 1.2.17. *Sia X spazio topologico e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Allora*

$$f \text{ semicontinua inferiormente } \Leftrightarrow \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \text{ è chiuso}$$

Dimostrazione. Supponiamo f semicontinua inferiormente e prendiamo $x \in X$ tale che $f(x) > \alpha$, quindi esisterà un $\epsilon > 0$ tale che $f(x) - \epsilon > \alpha$ per esempio

$$\epsilon = \frac{f(x) - \alpha}{2}$$

Esisterà allora un intorno di x contenuto interamente in $\{y \in X : f(y) > \alpha\}$ che è perciò aperto.

Dimostriamo l'implicazione inversa, sia $x \in X$ e $\epsilon > 0$ allora l'insieme $\{y \in X : f(y) > f(x) - \epsilon\}$ è aperto quindi esiste un intorno $U \in \mathcal{I}$ di x contenuto in tale aperto ■

1.3 Altri risultati

In questa sezione riportiamo alcuni concetti matematici necessari per comprendere i risultati seguenti.

Fissato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e due suoi sottoinsiemi A e B non vuoti allora definiamo

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b : a \in A \wedge b \in B\} \\ A - B &= \{a - b : a \in A \wedge b \in B\} \\ \alpha A &= \{\alpha a : a \in A\} \end{aligned}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

Prendiamo adesso un insieme generico U non vuoto dotato di una relazione d'ordine parziale $\preceq$, un suo elemento u è detto *massimale* se e solo se per ogni $v \in U$ vale l'implicazione

$$u \preceq v \Rightarrow u = v$$

ovvero non esistono elementi in U strettamente più grandi di u.

Un qualunque sottoinsieme non vuoto W di U è una *catena* se e solo se due suoi elementi a e b sono sempre confrontabili cioè $a \preceq b$ oppure $b \preceq a$, un *maggiorante* di W è un elemento $u \in U$ tale che $a \preceq u$ per ogni $a \in W$.

Un insieme U è detto *induttivo* se e solo se ogni sua catena possiede almeno un maggiorante. Un noto e fondamentale risultato della teoria degli insiemi, che useremo in varie dimostrazioni, fornisce un criterio per stabilire l'esistenza di elementi massimali di insiemi ordinati

Lemma 1.3.1 (Zorn)**.** *Ogni insieme induttivo possiede elementi massimali.*

Capitolo 2

Spazi vettoriali topologici

2.1 Concetti preliminari

Definizione 2.1.1. Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale reale e τ una topologia su V. Allora $(V, \mathbb{R}, \tau, +, \cdot)$ è uno *spazio vettoriale topologico* se e solo se le seguenti applicazioni

$$\pi_1 : (x, y) \in V \times V \to x + y \in V$$
$$\pi_2 : (x, \alpha) \in V \times \mathbb{R} \to \alpha x \in V$$

sono *continue* (la topologia su $\mathbb{R}$ è quella usuale).

Proposizione 2.1.2. *Se V è uno spazio vettoriale topologico allora per ogni $x \in V$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ le applicazioni*

$$T_x : v \in V \to v + x \in V$$
$$P_t : v \in V \to tv \in V$$

sono omeomorfismi.

Dimostrazione. Basta dimostrare che sono continue in quanto

$$(T_x)^{-1} = T_{-x}$$
$$(P_t)^{-1} = P_{\frac{1}{t}}$$

Prendiamo un qualunque aperto A di V e consideriamo $v \in (T_x)^{-1}(A)$, allora esistono aperti U, W di V tali che

$$(v, x) \in U \times W \subseteq \pi_1^{-1}(A)$$

e quindi $v \in U \subseteq T_x^{-1}(A)$ e perciò T_x è continua.

Vale un ragionamento analogo con P_t. ■

Definizione 2.1.3. Sia V spazio vettoriale topologico e $v \in V$, allora indichiamo con I_v l'insieme contenente tutti gli intorni di v ovvero

$$I_v = \{I \subseteq V : I \text{ intorno di } v\} = \{I \subseteq V : \exists A \in \tau \text{ tale che } v \in A \subseteq I\}$$

Proposizione 2.1.4. *Prendiamo $A \subseteq V$ nelle stesse ipotesi della proposizione precedente, allora*

$$A \text{ è un intorno dello } 0 \Leftrightarrow v + A \text{ è un intorno di } v \in V$$

Quindi $I_v = v + I_0 = \{v + I : I$ intorno dell'origine$\}$.

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla proposizione 2.1.2, difatti $T_v(x) = v + x$ è un omeomorfismo di V in sé stesso e perciò I è un intorno dell'origine se e solo se $T_v(I) = v + I$ è un intorno di v. ■

Quindi ogni sistema fondamentale di intorni di un generico punto corrisponderà ad un sistema fondamentale di intorni dell'origine e viceversa.

2.2 Spazi localmente convessi

Definizione 2.2.1. Uno spazio vettoriale topologico si dice *localmente convesso* se e solo se esiste una base composta interamente da insiemi convessi.

Definizione 2.2.2. Un sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V è *bilanciato* se e solo se $-U = U$ ovvero

$$u \in U \Leftrightarrow -u \in U$$

Proposizione 2.2.3. *Gli spazi vettoriali topologici localmente convessi ammettono un sistema fondamentale di intorni dell'origine di intorni convessi bilanciati.*

Dimostrazione. Consideriamo un sistema fondamentale di intorni convessi dell'origine $\mathcal{G}$, definiamo la seguente classe

$$\mathcal{H} = \{G \cap (-G) : G \in \mathcal{G}\}$$

Gli elementi di $\mathcal{H}$ continuano ad essere intorni convessi dell'origine, poiché ogni elemento di $\mathcal{G}$ contiene qualche elemento di $\mathcal{H}$ segue che quest'ultima classe è anch'essa un sistema fondamentale di intorni convessi di 0. ■

Definizione 2.2.4. Sia V uno spazio vettoriale generico, un'applicazione $p : V \to \mathbb{R}$ è una *seminorma* se e solo se valgono:

- $p(tx) = |t|\, p(x)$ per ogni $x \in V$ e $t \in \mathbb{R}$;
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ per $x, y \in V$.

Osservazione. Chiaramente $p(0) = 0$, ma se $p(x) = 0$ allora non è detto affatto che $x = 0$.

Inoltre $0 = p(x - x) \leq 2p(x)$ e quindi $p(x) \geq 0$.

Definizione 2.2.5. Consideriamo $\mathcal{F} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di seminorme su V, allora $\mathcal{F}$ è *totale* o *separante* se per ogni $v \in V \setminus \{0\}$ esiste $\alpha \in A$ tale che $p_\alpha(v) \neq 0$.

Le famiglie di seminorme totali sopperiscono all'inconveniente delle seminorme che assegnano il valore 0 anche ad alcuni vettori non nulli.

Se $\mathcal{F} = \{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una famiglia di seminorme generica allora per ogni $u \in V$, $\epsilon > 0$ e $\alpha \in A$ definiamo

$$I_\alpha^\epsilon(u) = \{v \in V : p_\alpha(v-u) < \epsilon\}$$

analogamente se $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ allora poniamo

$$I_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_k}(u) = \bigcap_{i=1}^{k} I_{\alpha_i}^{\epsilon_i}(u)$$

Proposizione 2.2.6. *Consideriamo $u \in V$ e $v \in I_\alpha^\epsilon(u) \subseteq V$, allora esiste $\delta > 0$ che possiamo rendere* arbitrariamente piccolo *(se $\delta > 0$ è un valore ammissibile allora anche $\delta \geq \delta' > 0$ è un valore ammissibile) tale che*

$$I_\alpha^\delta(v) \subseteq I_\alpha^\epsilon(u)$$

Dimostrazione. Basta porre

$$\delta \leq \epsilon - p_\alpha(v-u)$$

infatti se $w \in I_\alpha^\delta(v)$

$$p_\alpha(w-u) \leq p_\alpha(w-v) + p_\alpha(v-u) < \epsilon$$

■

Corollario 2.2.7. *Sia V spazio vettoriale e $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una sua famiglia di seminorme. Consideriamo la classe*

$$\mathcal{H} = \left\{I_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_k}(u) : u \in V \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \mathbb{R}^+ \wedge \alpha_1, \dots, \alpha_k \in A\right\}$$

allora l'intersezione finita di elementi di $\mathcal{H}$ è unione di elementi della stessa.

Corollario 2.2.8. *Nelle stesse ipotesi del corollario precedente sia τ la topologia generata da $\mathcal{H}$, allora $\mathcal{H}$ è una base della topologia τ chiamata* topologia generata dalla famiglia di seminorme $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Il lettore tenga a mente che, seppur abbiamo munito V di una struttura topologica, non abbiamo ancora dimostrato che V sia uno spazio vettoriale topologico o meno.

Corollario 2.2.9. *Sia V spazio vettoriale munito della topologia generata dalla famiglia di seminorme, allora per ogni $v \in V$ la classe*

$$\mathcal{H}_v = \left\{I_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_k}(v) : \epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \mathbb{R}^+ \wedge \alpha_1, \dots, \alpha_k \in A\right\}$$

è un sistema fondamentale di intorni per v.

Teorema 2.2.10. *Sia V uno spazio vettoriale munito della topologia generata da una qualunque famiglia di seminorme. Allora V è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, inoltre se la famiglia di seminorme è totale allora è anche di Hausdorff.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che la somma è continua. Fissiamo un generico intorno $I^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}(u+v)$ di $u+v$, allora per ogni $u', v' \in V$ che soddisfano per ciascun i

$$p_{\alpha_i}(u-u') < \frac{\epsilon_i}{2}$$
$$p_{\alpha_i}(v-v') < \frac{\epsilon_i}{2}$$

segue che $u'+v' \in I^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}(u+v)$ e quindi la somma è continua nel generico punto $(u,v) \in V \times V$, perciò è continua su tutto lo spazio.

Dimostriamo ora che il prodotto esterno è continuo rispetto a tale topologia. Fissiamo un generico intorno $I^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}(\lambda u)$ di λu, allora per ogni i e $\mu \in \mathbb{R}$ con $|\mu| < |\lambda| + 1$ osserviamo che se v è un elemento generico dello spazio V segue che

$$p_{\alpha_i}\left(\lambda u - \mu v\right) \leq p_{\alpha_i}\left(\lambda u - \mu u\right) + p_{\alpha_i}\left(\mu u - \mu v\right) \leq (|\lambda|+1)p_{\alpha_i}(u-v) + |\lambda - \mu|\, p_{\alpha_i}(u)$$

Da queste considerazioni allora se $v \in V$ e $\mu \in \mathbb{R}$ soddisfano le seguenti disuguaglianze

$$p_{\alpha_i}(v-u) < \frac{\epsilon_i}{2(|\lambda|+1)}$$
$$|\mu - \lambda| < \min\left\{\frac{\min_i \epsilon_i}{2\max_i p_{\alpha_i(u)}}; 1\right\}$$

allora μv appartiene all'intorno fissato ($|\mu - \lambda| < 1 \Rightarrow |\mu| < |\lambda| + 1$). Per definizione di continuità il prodotto esterno è continuo le generico punto $(u, \lambda) \in V \times \mathbb{R}$ e perciò continuo su tutto lo spazio.

Ogni aperto $I^{\epsilon}_{\alpha}(v)$ è convesso perciò la base $\mathcal{H}$ è composta interamente da insiemi convessi e lo spazio perciò è localmente convesso.

Se $\mathcal{F}$ è totale allora se $u \neq v$ esisterà un $\alpha \in A$ tale che $p_\alpha(v-u) = R > 0$, allora i due aperti $I^{\frac{R}{3}}_{\alpha}(u)$ e $I^{\frac{R}{3}}_{\alpha}(v)$ sono disgiunti. ■

2.2.1 Funzionale di Minkowski

Il teorema precedente, già notevole di per sé, può essere addirittura invertito: ovvero la topologia di ogni spazio vettoriale topologico localmente convesso è necessariamente generata da una famiglia di seminorme. Prima di poterlo dimostrare introduciamo un po' di definizioni:

Definizione 2.2.11. Sia V spazio vettoriale generico e $K \subseteq V$, un punto $v \in V$ è *internale* per K se e solo se per ogni $u \in V$ esiste $\delta_0 > 0$ tale che per ogni $\delta_0 > \delta \geq 0$ $v + \delta u \in K$. I punti di V che non sono internali né a K né a $V \setminus K$ sono detti *frontalieri* per K.

Proposizione 2.2.12. *Se V è uno spazio vettoriale topologico generico allora ogni punto $x \in K \subseteq V$ interno a K è internale.*

Dimostrazione. L'applicazione

$$h : \lambda \in \mathbb{R} \to x + \lambda v \in V$$

è continua per ogni $x, v \in V$, quindi essendo K un intorno di $x = h(0)$ per continuità esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $0 \leq \lambda \leq \delta$ si ha $x + \lambda v = h(\lambda) \in K$ e quindi è internale. ■

Quindi i punti internali fungono da "surrogato" dei punti interni, con l'evidente vantaggio che sono definiti in spazi vettoriali senza necessariamente una qualche struttura topologica.

Definizione 2.2.13. Consideriamo ora $K \subseteq V$ sottoinsieme convesso tale che 0 sia un punto internale di K. Definiamo allora per ogni $v \in V$ l'insieme

$$I(v) = \left\{\alpha > 0 : \alpha^{-1} v \in K\right\}$$

e la funzione

$$p_K : v \in V \to \inf I(v) \in [0, +\infty]$$

dove $p_K(v) = +\infty \Leftrightarrow I(v) = \emptyset$.

Tale funzione è chiamata *funzionale di Minkowski.*

Proposizione 2.2.14. *Sia p_K il funzionale di Minkowski di K (quindi K è convesso e ammette* 0 *come punto internale). Allora*

1. *$p_K(v) < +\infty$;*
2. *Per ogni $\alpha \geq 0$ vale $p_K(\alpha v) = \alpha p_K(v)$;*
3. *Se K è bilanciato allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ vale $p_K(\alpha v) = |\alpha|\, p_K(v)$;*
4. *Se $v \in K$ allora $p_K(v) \leq 1$, se $v \in V \setminus K$ allora $p_K(v) \geq 1$;*
5. *$p_K(u + v) \leq p_K(u) + p_K(v)$;*
6. *Il punto v è internale a K se e solo se $p_K(v) < 1$;*
7. *Il punto v è frontaliero rispetto a K se e solo se $p_K(v) = 1$.*

Dimostrazione. Analizziamo i vari casi:

1. Dalla definizione di internale esiste $N_0 > 0$ tale che per ogni $N > N_0$ si ha $N^{-1} v \in K \Rightarrow]N_0, +\infty[\subseteq I(v)$.
2. Banale in quanto $t^{-1} v = (t\alpha)^{-1} (\alpha v)$.
3. Dimostriamo che $p_K(v) = p_K(-v)$, se $\alpha_n > 0$ è una successione minimizzante tendente ad $p_K(v)$ con $\alpha_n^{-1} v \in K$ allora anche $\alpha_n^{-1}(-v) \in K$ e perciò $p_K(v) \geq p_K(-v)$. Invertendo v con $-v$ otteniamo l'uguaglianza.

4. $v \in K \Leftrightarrow [1, +\infty] \subseteq I(v)$ sfruttandone la convessità, se invece $v \in V - K$ consideriamo un generico $\delta > 0$ tale che $\delta^{-1} v \in K$. Sempre per convessità deve essere $\delta^{-1} < 1$, perciò per l'arbitrarietà di δ segue immediatamente che $p_K(v) \geq 1$.

5. Prendiamo due successioni $\alpha_n, \beta_n > 0$ tendenti rispettivamente a $p_K(u)$ e $p_K(v)$ tali che $\alpha_n^{-1} u, \beta_n^{-1} v \in K$, per convessità allora
$$(\alpha_n + \beta_n)^{-1} (u + v) \in K$$
(il lettore può verificarla senza difficoltà) e quindi anche la successione $\alpha_n + \beta_n$ rientra tra quelle "ammissibili" per determinare $p_K(u + v)$. Perciò $p_K(u + v) \leq p_K(u) + p_K(v)$.

6. Dimostriamo entrambe le implicazioni. Supponiamo che v sia internale, esisterà un certo $\delta > 0$ tale che $v + \delta v \in K$ (è sempre possibile sceglierne uno positivo) da cui $(1 + \delta)^{-1} \in I(v)$ e perciò $p_K(v) < 1$.

   Viceversa, esisterà un $\epsilon \in]0, 1[$ tale che $p_K(v) < 1 - \epsilon$ e per ogni $u \in V$ e $\delta > 0$ si ha
$$p_K(v + \delta u) \leq p_K(v) + \delta p_K(u) < 1 - \epsilon + \delta p_K(u)$$
   Se $p_K(u) = 0$ allora prendiamo un δ qualunque altrimenti scegliamo
$$\delta \leq \frac{\epsilon}{p_K(u)}$$
   in entrambi i casi $p_K(v + \delta u) < 1 \Rightarrow 1 \in]p_K(v + \delta u), +\infty[\subseteq I(v + \delta u)$ che implica $v + \delta u \in K$.

7. Dobbiamo solo dimostrare che v è internale a $V - K$ se e solo se $p_K(V) > 1$. Se v è internale a $V - K$ allora esiste $\delta \in]0, 1[$ tale che $v - \delta v$ non appartiene a K e perciò $I(v)$ non conterrà un numero reale strettamente maggiore di 1. Tale insieme è però connesso e superiormente illimitato perciò anche il suo estremo inferiore deve essere strettamente maggiore di 1.

   Viceversa esiste $\epsilon > 0$ tale che $p_K(v) > 1 + \epsilon$, in tal caso per ogni $u \in V$ e $\delta > 0$ si ha
$$p_K(v) = p_K(v + \delta u - \delta u) < p_K(v + \delta u) + \delta p_K(-u) \Leftrightarrow p_K(v + \delta u) > 1 + \epsilon - \delta p_K(-u)$$
   Se $p_K(-u) = 0$ allora prediamo δ arbitrario, altrimenti sia
$$\delta < \frac{\epsilon}{p_K(-u)}$$
   e ragionando come nel punto precedente $v + \delta u \in V - K$.

$\blacksquare$

Siamo ora in grado di invertire il teorema 2.2.10

Teorema 2.2.15 (Von Neumann). *Consideriamo un generico spazio vettoriale topologico localmente convesso V con topologia τ, allora esiste una famiglia di seminorme $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ che la genera. Se V è uno spazio di Hausdorff allora tale famiglia di seminorme è anche totale*

Dimostrazione. Dalla proposizione 2.2.3 esisterà un sistema fondamentale di intorni aperti dello 0 $\mathcal{H}_0$ che risultano convessi e bilanciati, per quanto detto prima 0 è un punto internale di un generico $K \in \mathcal{H}_0$ (come ogni altro elemento di K essendo quest'ultimo aperto).

Per ogni $K \in \mathcal{H}_0$ il funzionale di Minkowski p_K è una seminorma e quindi la classe di seminorme $\{p_K\}_{K \in \mathcal{H}_0}$ genera su V una topologia τ' che rende V uno spazio vettoriale topologico localmente convesso.

Per ogni $v \in V$ si ha $v \in K \Leftrightarrow p_K(v) < 1$ e quindi $K = I_K^1(0)$ da cui segue immediatamente che

$$I_{K_1,\ldots,K_k}^{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k}(0) = \bigcap_{i=1}^{k} \epsilon_i K_i$$

e quindi $\tau = \tau'$.

Se ora (V, τ) è uno spazio di Hausdorff allora per ogni $u \neq 0$ esiste $K \in \mathcal{H}_0$ tale che $u \notin K$ ovvero $p_K(u) \geq 1$ e quindi la classe di seminorme è totale. ■

2.3 Topologie deboli di spazi vettoriali topologici

Consideriamo uno spazio vettoriale V non munito di topologia.

Osservazione. $f \in V^+ \Rightarrow |f|$ è una seminorma.

Definizione 2.3.1. La sottoclasse $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq V^+$ è *totale* se e solo se la classe di seminorme $\{|f_\alpha|\}_{\alpha \in A}$ è totale. Ovvero per ogni $v \in V \setminus \{0\}$ esiste un $\alpha \in A$ tale che

$$f_\alpha(v) \neq 0$$

Proposizione 2.3.2. *Sia V spazio vettoriale e $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq V^+$ una sottoclasse, allora la topologia generata da $\{|f_\alpha|\}_{\alpha \in A}$ rende V uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e se tale classe è totale allora lo spazio topologico è di Hausdorff. Essa è anche la topologia meno fine tra tutte quelle che rendono le f_α continue e coincide con*

$$\tau(\mathcal{F}) = \left\{ f_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A \wedge U \text{ aperto di } \mathbb{R} \right\}$$

Dimostrazione. Per ogni $\epsilon > 0$ ricaviamo $|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| = |f_\alpha(x - y)| < \epsilon \Leftrightarrow x \in I_\alpha^\epsilon(y)$ e quindi la topologia indotta da $\mathcal{F}$ rende continue tutte le f_α. Quindi sia τ' una topologia che rende tutte le f_α continue su V allora per ogni $\epsilon > 0$ e $v \in V$ esiste $A_v^\epsilon \in \tau'$ tale che

$$v \in A_v^\epsilon \subseteq I_\alpha^\epsilon(v)$$

Dalla proposizione 2.2.6 per ogni $u \in I_\alpha^\epsilon(v)$ esiste $\delta_u > 0$ tale che $I_\alpha^{\delta_u}(u) \subseteq I_\alpha^\epsilon(v)$ e quindi

$$I_\alpha^\epsilon(v) = \bigcup_{u \in I_\alpha^\epsilon(v)} A_u^{\delta_u}$$

perciò $I_\alpha^\epsilon(v) \in \tau'$.

Osserviamo che $\tau(\mathcal{F})$ rende continue tutte le f_α quindi deve necessariamente contenere la topologia generata da $\mathcal{F}$, ma

$$I_\alpha^\epsilon(x) = f_\alpha^{-1}\left[B_\epsilon\left(f_\alpha(x)\right)\right]$$

Scegliamo quindi $a \in \mathbb{R}$ ed $r > 0$, vogliamo far vedere che $f_\alpha^{-1}(B_r\left(a\right))$ appartiene alla topologia indotta da $\mathcal{F}$. Ora per ogni $f_\alpha(x) \in B_r\left(a\right)$ esiste $\delta_x > 0$ tale che $B_{\delta_x}\left(f_\alpha(x)\right) \subseteq B_r\left(a\right)$ e quindi

$$f_\alpha^{-1}(B_r\left(a\right)) = \bigcup_{x \in f_\alpha^{-1}[B_r(a)]} f_\alpha^{-1}\left[B_{\delta_x}\left(f_\alpha(x)\right)\right] = \bigcup_{x \in f_\alpha^{-1}[B_r(a)]} I_\alpha^{\delta_x}(x)$$

e perciò le due topologie coincidono. ■

Definizione 2.3.3. La topologia meno fine di V che rende continue tutte le funzioni lineari contenute nella sottoclasse $\mathcal{F} \subseteq V^+$ è detta *topologia debole* di V generata da $\mathcal{F}$.

Non è detto che gli elementi di $\mathcal{F}$ siano le uniche funzioni lineari che sono anche continue rispetto alla topologia debole. Per questo motivo definiamo il seguente spazio vettoriale

$$C(\mathcal{F}) = \left\{f \in V^+ : f \text{ continua rispetto a } \tau(\mathcal{F})\right\} \supseteq \mathcal{F}$$

Definizione 2.3.4. Sia V spazio vettoriale topologico munito della topologia debole generata da $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq V^+$. Una successione $v_n \in V$ è detta *debolmente di Cauchy* se e solo se per ogni $\alpha \in A$ la successione $f_\alpha(v_n)$ converge ovvero

$$\forall \epsilon > 0, \alpha \in A\, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall m, n > N \;\; |f_\alpha(v_m) - f_\alpha(v_n)| < \epsilon$$

difatti per la completezza di $\mathbb{R}$ la successione $f_\alpha(v_n)$ convergerà ad un certo $r_\alpha \in \mathbb{R}$.

Uno spazio vettoriale è *debolmente completo* se le successioni debolmente di Cauchy convergono debolmente, quindi esisterà $v \in V$ tale che

$$r_\alpha = f_\alpha(v)$$

Capitolo 3

Spazi metrici

3.1 Spazi metrici

Indichiamo con (S,d) uno spazio metrico, ricordiamo che valgono:

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y \tag{3.1.1}$$

$$d(x,y)=d(y,x) \tag{3.1.2}$$

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y) \tag{3.1.3}$$

Se $M,N\subseteq S$ allora poniamo

$$d(M,N)=\inf\{d(x,y):x\in M\wedge y\in N\}$$

e se $x\in S$

$$d(x,M)=d(\{x\},M)$$

Proposizione 3.1.1. *Se $M,N\subseteq S$ allora*

$$d(M,N)=\inf\{d(x,N):x\in M\}$$

Dimostrazione. Chiaramente $d(M,N)\leq d(x,N)$ per ogni $x\in M$ quindi $d(M,N)\leq \inf\{d(x,N):x\in M\}$, d'altronde per ogni $m\in M$, $n\in N$ vale $d(m,N)\leq d(m,n)$ e quindi si ha prima che $\inf\{d(x,N):x\in M\}\leq d(m,n)$ e infine $\inf\{d(x,N):x\in M\}$ $\leq d(M,N)$ concludendo la tesi. ■

Definizione 3.1.2. Per ogni $x\in S$ e $r>0$ reale poniamo

$$B_r(x)=\{y\in S:d(x,y)<r\}$$
$$D_r(x)=\{y\in S:d(x,y)\leq r\}$$

dette rispettivamente *palla aperta* e *palla chiusa* di centro x e raggio r.

Inoltre la topologia

$$\mathcal{T}=\{T\subseteq S:\forall x\in T\ \exists r>0 \text{ tale che } B_r(x)\subseteq T\} \tag{3.1.4}$$

è la *topologia indotta dalla metrica d.*

Quindi ogni spazio metrico può essere considerato anche come spazio topologico, ereditandone le proprietà.

Proposizione 3.1.3. *Gli spazi metrici sono spazi di Hausdorff*

Dimostrazione. Se $x, y \in S$ con $x \neq y$ allora $d(x, y) = r > 0$. Basta allora scegliere come aperti $B_{\frac{r}{3}}(x)$ e $B_{\frac{r}{3}}(y)$. ∎

Proposizione 3.1.4. *Per ogni $s \in S$ l'applicazione*

$$x \in S \to d(x, s) \in \mathbb{R}$$

è continua

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza triangolare $|d(x, s) - d(y, s)| \leq d(x, y)$. ∎

Definizione 3.1.5. Una successione x_n in S è di *Cauchy* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m, n > N$ si ha

$$d(x_m, x_n) \leq \epsilon$$

Proposizione 3.1.6. *Le successioni che ammettono limite sono di Cauchy.*

Dimostrazione. Esercizio. ∎

Definizione 3.1.7. Lo spazio metrico S è *completo* se ogni successione di Cauchy ammette limite in S.

Lemma 3.1.8 (caratterizzazione della chiusura)**.** *Sia A sottoinsieme di S allora*

$$\overline{A} = \{x \in S : \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \text{ tale che } x_n \to x\}$$

Dimostrazione. Per comodità poniamo $B = \{x \in S : \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tale che $x_n \to x\}$.

Sia ora $x \in \overline{A}$, allora x non può appartenere al complementare di $\overline{A}$ che è aperto, da cui segue immediatamente che $B_r(x) \cap A$ è non vuoto per ogni $r > 0$ poiché se $B_r(x) \cap A = \emptyset$ allora $\overline{A} \setminus B_r(x) \subset \overline{A}$ è un chiuso contenente A che è assurdo per definizione di chiusura. Possiamo perciò trovare $x_n \in A \cap B_{\frac{1}{n}}(x)$ e quindi $\overline{A} \subseteq B$.

Sia ora $x \in B$ e x_n successione in A convergente ad x, che implica $A \cap B_r(x) \neq \emptyset$ per ogni $r > 0$ ovvero ogni intorno di x interseca necessariamente l'insieme A. Allora x deve stare necessariamente nella chiusura di A altrimenti starebbe in un aperto completamente disgiunto da A. ∎

Proposizione 3.1.9. *Se (S, d) è uno spazio metrico completo e S' è un suo sottoinsieme chiuso allora (S', d) è ancora uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Prendiamo una generica successione di Cauchy $x_n \in S'$, per la completezza di S esisterà un $x \in S$ tale che $x_n \to x$. Poiché S' è chiuso allora $x \in S'$ e perciò S' è completo. ∎

Prima di enunciare il teorema di Baire diamo la seguente caratterizzazione di insiemi rari in uno spazio metrico:

Proposizione 3.1.10. *Un sottoinsieme X di S è raro se e solo se la sua chiusura $\overline{X}$ non contiene palle aperte.*

Teorema 3.1.11 (Baire)**.** *Ogni spazio metrico completo è di* seconda categoria*, ovvero non è unione numerabile di insiemi rari.*

Dimostrazione. Per assurdo $S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$ con gli S_n chiusi e rari, allora esisterà un $x_1 \in S \setminus S_1$ e un $r_1 > 0$ tale che $D_{r_1}(x_1) \subseteq S \setminus S_1$ e $r_1 \leq \frac{1}{2}$. Essendo S_2 raro allora l'insieme $B_{r_1}(x_1) \setminus S_2$ è necessariamente non vuoto e aperto, possiamo perciò trovare un $x_2 \in B_{r_1}(x_1) \setminus S_2$ e $r_2 > 0$ tali che $D_{r_2}(x_2) \subseteq B_{r_1}(x_1) \setminus S_2$ e $r_2 \leq \frac{r_1}{2}$.

Continuando per ricorrenza otteniamo una successione di elementi x_n e reali r_n tali che

$$\begin{gathered} D_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq B_{r_n}(x_n) \\ B_{r_n}(x_n) \cap S_n = \emptyset \\ r_{n+1} \leq \frac{r_n}{2} \leq \frac{1}{2^n} \end{gathered}$$

osserviamo che x_n è una successione di Cauchy: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{2^{N+1}} < \epsilon$ e per ogni $m, n > N$ è immediato dimostrare che $d(x_m, x_n) < 2r_N < \epsilon$.

Ricordando che S è completo la successione x_n convergerà ad un certo x, inoltre per ogni $m \in \mathbb{N}$ chiaramente $x \in D_{r_m}(x_m)$ essendo tali insiemi chiusi, ciò implicherebbe che $x \notin \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$ assurdo. ■

3.2 Compattezza e teorema di Ascoli-Arzelà

Definizione 3.2.1. Uno spazio metrico S è *limitato* se e solo se esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $x, y \in S$

$$d(x, y) < M$$

Definizione 3.2.2. Sia X spazio metrico, allora

- X è *compatto* se e solo se per ogni ricoprimento aperto $\{V_i\}_{i \in I}$ di X esiste un sottoinsieme I' di I *finito* tale che
$$X = \bigcup_{i \in I'} V_i$$
- X è *sequenzialmente compatto* se ogni successione x_n di X ammette un'*estratta convergente* ad un punto di X;
- X è *relativamente sequenzialmente compatto* se ogni successione x_n di X ammette un'*estratta di Cauchy*;

- X è *precompatto* o *totalmente limitato* se per ogni $\epsilon > 0$ esistono $x_1, x_2, \dots, x_n$ tali che
$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$$

Le prime 2 definizioni possono essere estese anche a spazi topologici generici, mentre le altre sono proprie degli spazi metrici.

Proposizione 3.2.3. *Se M è chiuso e N sequenzialmente compatto allora $d(M,N) = 0 \Leftrightarrow M \cap N \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. L'implicazione $\Leftarrow$ è banale, se $d(M,N) = 0$ allora esistono $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N$ tali che $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Dato che N è compatto per successioni avremo un'estratta y_{n_k} che convergerà ad un certo $y \in N$ da cui segue che

$$\lim_{k\to+\infty} d(x_{n_k}, y) \leq \lim_{k\to+\infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) + \lim_{k\to+\infty} d(y_{n_k}, y) = 0$$

e quindi x_{n_k} tende anch'esso a y. Dalla chiusura di M allora $y \in M$ e perciò $M \cap N \neq \emptyset$. ■

Osservazione. I singleton $\{x\}$ sono sempre sequenzialmente compatti.

Corollario 3.2.4. *Sia S spazio metrico e $M \subseteq S$ chiuso, definiamo la funzione*

$$f : x \in S \to d(x, M) \in \mathbb{R}$$

allora per ogni $x, y \in S$
$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$$

in particolare f è continua.

Dimostrazione. Basta dimostrare che per ogni $x, y \in S$

$$d(x, M) \leq d(x,y) + d(y, M)$$

per assurdo vale la disuguaglianza opposta, ovvero esisterà $z' \in M$ tale che per ogni $z \in M$
$$d(x,z) > d(x,y) + d(y,z')$$

in particolare ponendo $z = z'$ si otterrebbe una contraddizione. ■

Teorema 3.2.5. *Sia S spazio metrico, allora S è relativamente sequenzialmente compatto se e solo se S è precompatto*

Dimostrazione. Supponiamo che S non sia precompatto, allora esisterà un $\epsilon > 0$ tale che per ogni scelta di un numero finito di punti $x_1, x_2, \dots, x_n$ di S le palle aperte $B_\epsilon(x_i)$ non riescono a ricoprire tutto S.

Prendiamo $x_1 \in S$ arbitrario, per quanto detto prima esisterà sicuramente un punto $x_2 \notin B_\epsilon(x_1)$ per quanto detto prima, ma ancora esisterà $x_3 \notin B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2)$ e così via. Abbiamo trovato una successione $x_n \in S$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i) \Leftrightarrow d(x_{n+1}, x_i) \geq \epsilon \text{ per ogni intero } i \leq n$$

e quindi questa successione non può possedere estratte di Cauchy.

Supponiamo ora S precompatto e x_n una successione generica un S, se essa è definitivamente costante allora ammetterà sicuramente un'estratta di Cauchy perciò supponiamola senza perdere in generalità non definitivamente costante e quindi l'insieme $A_0 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ conterrà un numero infinito di elementi distinti. Ora essendo S precompatto esisterà un insieme finito B_0 i cui elementi sono sfere di raggio unitario che ricoprono S, perciò esisterà $A_1 \subseteq A_0$ infinito i cui elementi sono interamente contenuti in un unico elemento di B_0, esisterà inoltre $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_1} \in A_1$. Esisterà ancora un insieme finito B_1 di sfere di raggio $\frac{1}{2}$ che ricopre S, allora esisterà un sottoinsieme $A_2 \subseteq A_1$ contenuto in un elemento fissato di B_1. Poniamo allora $n_2 > n_1$ tale che $x_{n_2} \in A_2$.

Procedendo per ricorrenza esisterà un ricoprimento B_k di palle aperte di raggio $\frac{1}{2^k}$ di S e un sottoinsieme infinito $A_{k+1} \subseteq A_k$ contenuto in un elemento fissato di B_k ed esisterà $n_{k+1} > n_k$ tale che $x_{n_{k+1}} \in A_{k+1}$. Ma allora per ogni $i > j$

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq \frac{1}{2^{j-1}}$$

che è un'estratta di Cauchy della successione iniziale. ■

Prima di enunciare il prossimo teorema abbiamo bisogno del seguente lemma preliminare

Lemma 3.2.6. *Sia S spazio metrico e x_n una successione di Cauchy che ha un'estratta convergente ad un certo x. Allora tutta la successione converge a x.*

Dimostrazione. Sia $x_{n_k} \in \mathbb{N}$ un'estratta che converge a x, ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall k > N_\epsilon \ d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

D'altronde per definizione di estratta di Cauchy

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists M_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall m, n > M_\epsilon \ d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

Dalla definizione di estratta vale chiaramente $i \leq n_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, allora per ogni $i > \max\{M_\epsilon, N_\epsilon\}$ valgono entrambe le disuguaglianze, in particolare

$$d(x_i, x) \leq d(x_i, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) < \epsilon$$

completando così la dimostrazione. ■

Teorema 3.2.7 (Hausdorff)**.** *Se S è uno spazio metrico allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *S compatto;*
2. *S sequenzialmente compatto;*
3. *S precompatto e completo.*

Dimostrazione. Il lettore sfruttando il teorema e il lemma precedente può agevolmente dimostrare che i punti 2 e 3 sono equivalenti. Ci basta perciò da dimostrare che 1 implica 2 e che 3 implica la 1.

Supponiamo che S non sia sequenzialmente compatto ovvero esiste una successione x_n che non ha estratte convergenti a nessun punto di S, in altre parole per ogni $x \in S$ esisterà un $r_x > 0$ tale che l'insieme $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_{r_x}(x)\}$ è finito. Allora la famiglia $\{B_{r_x}(x)\}_{x \in S}$ è un ricoprimento aperto e se esistesse un sottoricoprimento finito di esso ci sarebbero solo un numero finito di indici n tali che x_n sia contenuto in almeno uno di essi, quindi S non può essere compatto. Allora la compattezza implica la compattezza sequenziale.

Ci basta dimostrare allora che se S è completo e totalmente limitato allora è compatto. Per assurdo sia $\mathcal{V}$ ricoprimento di aperti di S che non ammette sottoricoprimenti finiti, per la totale limitatezza esisterà una palla $B_1(x_1)$ tale che $\mathcal{V}$ non possiede sottoricoprimenti finiti di $B_1(x_1)$.

Si dimostra facilmente che anche $B_1(x_1)$ è totalmente limitato poiché contenuto in uno spazio totalmente limitato, quindi esiste una palla $B_{\frac{1}{2}}(x_2)$ con $d(x_1, x_2) < 1$ tale che $\mathcal{V}$ non ammetta sottoricoprimenti finiti. Continuando di questo passo troveremo una successione x_n tale che $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^{n-1}}$ tale che $\mathcal{V}$ non abbia sottoricoprimenti finiti di $B_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_n)$. Ma x_n è allora di Cauchy e per la completezza avrà limite $x \in S$.

Poiché esiste $V \in \mathcal{V}$ tale che $x \in V$ e sia $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq V$ esisterà sicuramente $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{r}{2}$ e $d(x_n, x) < \frac{r}{2}$ e quindi $B_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_n) \subseteq B_r(x) \subseteq V$ assurdo perché $\mathcal{V}$ non aveva sottoricoprimenti finiti su tale insieme.

Allora S deve essere per forza compatto. ■

Sia ora S uno spazio metrico *relativamente sequenzialmente compatto*, indichiamo con $C_b(S)$ l'insieme di tutte le funzioni che vanno da S in $\mathbb{R}$ *continue* e *limitate*. Su tale insieme possiamo definire la seguente metrica definita come

$$d^*(f, g) = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|$$

rendendo $[C_b(S), d^*]$ uno spazio metrico.

Definizione 3.2.8. Sia $\mathcal{F} \subseteq C_b(S)$ diciamo che

- $\mathcal{F}$ è *equilimitato* se e solo se esiste $M > 0$ tale che per ogni $f \in \mathcal{F}$ e per ogni $x \in S$ vale
$$|f(x)| < M$$

- $\mathcal{F}$ è *equicontinuo* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $f \in \mathcal{F}$ e per ogni x, y tali che $d(x, y) < \delta$ si ha
$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Teorema 3.2.9 (Ascoli-Arzelà)**.** *Se S è uno spazio metrico relativamente sequenzialmente compatto e $\mathcal{F}$ equilimitato ed equicontinuo allora ogni sua successione ammette un'estratta convergente in $C_b(S)$.*

Dimostrazione. Innanzitutto per il teorema di Hausdorff S è precompatto, quindi per ogni $k \in \mathbb{N}$ esistono $x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_k}^k$ tali che $S = \bigcup_{i=1}^{n_k} B_{\frac{1}{k}}\left(x_i^k\right)$, poniamo ancora $\Sigma_k = \left\{x_1^k, \dots, x_{n_k}^k\right\}$ e $\Sigma = \bigcup_k \Sigma_k$ che è numerabile. Per comodità poniamo $\Sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ non necessariamente distinti.

Consideriamo adesso una successione $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$, allora la successione di reali $f_n(x_1)$ è limitata e quindi esiste un'estratta f_n^1 tale che $f_n^1(x_1)$ converge in $\mathbb{R}$. Ancora, $f_n^1(x_2)$ è limitata quindi esiste un'estratta f_n^2 di f_n^1 tale che $f_n^2(x_2)$ converge, chiaramente $f_n^2(x_1)$ tende allo stesso limite di $f_n^1(x_1)$.

Continuando in questo modo otteniamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ un'estratta f_n^k di f_n^{k-1} tale che $f_n^k(x_i)$ converge per ogni $i \leq k$, definiamo perciò la seguente successione di funzioni:
$$g_k(x) = f_k^k(x)$$

Dimostriamo ora che per ogni i si ha $\lim_{k\to+\infty} g_k(x_i) = \lim_{k\to+\infty} f_k^i(x_i)$. Ma questo in realtà è banale perché per ogni $k \geq i$ si ha $g_k \in \left\{f_j^i : j \in \mathbb{N}\right\}$ ed è perciò un'estratta di tale successione, meno immediato è dimostrare che anche $g_k(x)$ converge per x generico.

Sia $\epsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ scelto in modo tale che $\frac{1}{k} < \delta$ e perciò esiste $N(k) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x_i^k \in \Sigma_k$ (dato che tale insieme è finito) e per ogni $m, n > N(k)$ vale
$$\left|g_n(x_i^k) - g_m(x_i^k)\right| < \epsilon$$
Consideriamo adesso $x \in S$ generico, allora per ogni $m, n > N(k)$ vale
$$|g_m(x) - g_n(x)| \leq \left|g_m(x) - g_m(x_i^k)\right| + \left|g_m(x_i^k) - g_n(x_i^k)\right| + \left|g_n(x_i^k) - g_n(x)\right| \leq 3\epsilon$$
osserviamo che $N(k)$ non dipende in alcun modo dalla scelta di X, ma solamente da ϵ quindi la successione converge uniformemente, e quindi con la metrica d^*, su tutto S ad una certa funzione f che risulta chiaramente limitata.

Dimostriamo infine che f è continua. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$, $x \in S$ vale $|f(x) - g_n(x)| < \epsilon$, dall'equicontinuità allora per ogni x, y con $d(x, y) < \delta$ si ha
$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g_N(x)| + |g_N(x) - g_N(y)| + |g_N(y) - f(y)| \leq 3\epsilon$$

■

Teorema 3.2.10. *Sia S spazio metrico* compatto, *allora un sottoinsieme $\mathcal{F}$ dello spazio metrico $[C_b(S), d^*]$ è compatto se e solo se è chiuso, equilimitato (ovvero limitato) ed equicontinuo.*

Dimostrazione. Il teorema di Ascoli-Arzelà dimostra l'implicazione $\Leftarrow$. Viceversa se $\mathcal{F}$ è compatto deve essere necessariamente equilimitato, in caso contrario difatti sarebbe possibile costruire una successione $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ con $d^*(f_n, f_1) \geq n$ che non può convergere (la dimostrazione è lasciata al lettore come esercizio).

Per assurdo $\mathcal{F}$ non è equicontinuo, ovvero

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tale che per ogni } k \in \mathbb{N}\, \exists x_k, y_k \in S, f_k \in \mathcal{F} :$$
$$d(x_k, y_k) \leq \frac{1}{k} \wedge |f_k(x_k) - f_k(y_k)| \geq \epsilon$$

e dalla compattezza di S, a meno di passare ad estratte, si ha $x_k \to x$ e $y_k \to y$ e $f_k \to f$ uniformemente. Perciò

$$\epsilon < |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y_k)| + |f_k(y_k) - f(y_k)|$$

il che è assurdo perché il secondo membro converge a 0 per k tendente a $+\infty$. ∎

3.3 Contrazioni

Definizione 3.3.1. Sia S metrico, un'applicazione $f : S \to S$ è una *contrazione* se e solo se esiste $L \in [0, 1[$ tale che per ogni $x, y \in S$

$$d\,[f(x), f(y)] \leq Ld(x, y)$$

Proposizione 3.3.2. *Se f è una contrazione allora f è (uniformemente) continua.*

Dimostrazione. Esercizio. ∎

Teorema 3.3.3 (Banach-Cacioppoli)**.** *Se S è uno spazio metrico completo e f contrazione allora esiste un unico $x \in S$ tale che*

$$f(x) = x$$

Dimostrazione. Sia $L \in [0, 1[$ tale che per ogni $x, y \in S$ vale $d[f(x), f(y)] \leq Ld(x, y)$, fissiamo $x_0 \in S$ allora definiamo la seguente successione per ricorrenza come

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

vogliamo dimostrare che è una successione di Cauchy. Innanzitutto

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d[f(x_n), f(x_{n-1})] &\leq Ld(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq L^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq L^n d(x_1, x_0) = CL^n \end{aligned}$$

poi

$$d(x_{n+1}, x_0) \leq \sum_{i=0}^{n} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=0}^{n} CL^i = C\frac{1 - L^{n+1}}{1 - L} \leq \frac{C}{1 - L}$$

infine

$$d(x_{n+k}, x_k) \leq L^k d(x_n, x_0) \leq \frac{CL^k}{1 - L}$$

il termine al secondo membro non dipende da n e decresce al crescere di k, quindi è di Cauchy.

Poiché S è completo allora la successione tende a un certo x, dall'uniforme continuità di f si può passare al limite ottenendo $x = f(x)$. ■

3.4 Altre proprietà degli spazi metrici

Lemma 3.4.1 (estensione per uniforme continuità)**.** *Sia S metrico e $A \subseteq S$ denso. Consideriamo $f : A \to \mathbb{R}$ uniformemente continua su A, allora esiste un unica funzione $g : S \to \mathbb{R}$ uniformemente continua tale che $f = g$ su A.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in S \setminus A$ esiste una successione $x_n \in A$ che converge ad x, dall'uniforme continuità $f(x_n)$ è di Cauchy e quindi ammette limite. Osserviamo che se $y_n \in A$ è un'altra successione che tende ad x allora $d(x_n, y_n)$ tende a 0 e sempre dall'uniforme continuità anche $|f(x_n) - f(y_n)|$ tenderebbe a 0, quindi il limite non dipende dalla particolare successione scelta.

Possiamo perciò definire

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ \lim_{y \to x} f(y) & \text{se } x \in S \setminus A \end{cases}$$

da cui segue immediatamente l'unicità di tale estensione. L'unica cosa che ci rimane da dimostrare è che g sia uniformemente continua su S. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni $x, y \in A$ con $d(x, y) < \delta_\epsilon$ vale $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. Siano ora $x, y \in S$ con $d(x, y) < \frac{\delta_\epsilon}{3}$, esisteranno allora $x', y' \in A$ tali che

$$\begin{aligned} d(x, x') &< \frac{\delta_\epsilon}{3} \\ d(y, y') &< \frac{\delta_\epsilon}{3} \\ \left|g(x) - f(x')\right| &< \frac{\epsilon}{3} \\ \left|g(y) - f(y')\right| &< \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

da cui $d(x', y') < \delta_\epsilon$ e quindi $|f(x') - f(y')| < \frac{\epsilon}{3}$ da cui $|g(x) - g(y)| < \epsilon$ ovvero la tesi. ■

Lemma 3.4.2 (Lindeloff)**.** *Se S è spazio metrico e $\mathcal{B}$ base* numerabile *di S allora per ogni famiglia di aperti Σ di S esiste un sottoinsieme $\Sigma' \subseteq \Sigma$ numerabile tale che*

$$\bigcup_{A\in\Sigma} A = \bigcup_{A\in\Sigma'} A$$

Dimostrazione. Per comodità sia $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{B \in \mathcal{B} : \exists C \in \Sigma \text{ tale che } B \subseteq C\}$, allora per ogni $x \in \bigcup_{A\in\Sigma} A$ esiste $A \in \Sigma$ tale che $x \in A$ perciò esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq A \to B \in \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ricopre $\bigcup_{A\in\Sigma} A$.

Per ogni n sia C_n un elemento di Σ tale che $B_n \subseteq C_n$. Poniamo infine

$$\Sigma' = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ottenendo così la tesi dato che deve sia ricoprire $\bigcup_{A\in\Sigma} A$ ma è anche contenuto in esso dato che $\Sigma' \subseteq \Sigma$. ■

Proposizione 3.4.3. *Sia S metrico e $A \subseteq S$. Allora*

$$A \text{ denso in } S \Leftrightarrow A \cap B_r(x) \neq \emptyset \text{ per ogni } x \in S, r > 0$$

Dimostrazione. Esercizio. ■

Lemma 3.4.4. *Gli spazi metrici separabili hanno una base numerabile*

Dimostrazione. Sia A sottoinsieme denso numerabile di S, ovvero per ogni $x \in S$, $r > 0$ si ha $S \cap B_r(x) \neq \emptyset$. Consideriamo ora la classe

$$\mathcal{B} = \left\{B_q(x) : x \in A \wedge q \in \mathbb{Q}^+\right\}$$

è chiaramente numerabile. Per dimostrare che è anche una base dobbiamo mostrare che per ogni aperto U e $x \in U$ esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq U$.

Innanzitutto esiste un $r > 0$ e un elemento $y \in A$ tali che $y \in B_r(x) \subseteq U$ da cui, ponendo $r' = r - d(x,y) > 0$, abbiamo $B_{r'}(y) \subseteq B_r(x)$. La tesi segue immediatamente ricordando che esiste sempre un razionale q tale che $0 < q < r'$. ■

Lemma 3.4.5. *Ogni sottoinsieme di uno spazio metrico separabile con la metrica indotta è ancora uno spazio metrico separabile.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso in S e A un suo sottoinsieme, poniamo

$$W = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : A \cap B_{\frac{1}{j}}(x_i) \neq \emptyset\right\}$$

e $x_{i,j} \in A \cap B_{\frac{1}{j}}(x_i)$ con $(i,j) \in W$.

Dalla densità in S segue che per ogni $x \in A$ esiste necessariamente un n_k tale che $x \in B_{\frac{1}{k}}(x_{n_k})$ e quindi $(n_k, k) \in W$ è numerabile. Infine osserviamo che

$$d(x, x_{n_k,k}) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_k,k}) \leq \frac{2}{k}$$

Perciò il sottoinsieme $\{x_{n_k,k} : k \in \mathbb{N}\}$ è denso in A. ■

Lemma 3.4.6. *Gli spazi metrici totalmente limitati sono separabili.*

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esisterà un sottoinsieme finito $\left\{x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k\right\}$ di S tale che $S = \bigcup_{i=1}^{n_k} B_{\frac{1}{k}}\left(x_i^k\right)$. Poniamo

$$A = \left\{x_i^k : k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq i \leq n_k \text{ intero}\right\}$$

dimostriamo che A è denso in S.

Sia $x \in S$ e $r > 0$ allora esisterà un $k \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{k} < r$ e un $i \in \mathbb{N}$ tale che $x \in B_{\frac{1}{k}}\left(x_i^k\right) \subseteq B_r\left(x_i^k\right)$ ovvero

$$x_i^k \in B_r(x)$$

da cui $A \cap B_r(x) \neq \emptyset$ per ogni $r > 0$. ■

Lemma 3.4.7. *Gli spazi metrici totalmente limitati sono limitati.*

Dimostrazione. Esistono $x_1, \ldots, x_k$ in S tali che $S = \bigcup_{i=1}^{k} B_1(x_i)$, poniamo

$$M = \max_{i,j} d(x_i, x_j) + 2$$

allora per ogni $x, y \in S$ esistono i, j tali che $d(x, x_i) < 1$ e $d(y, x_j) < 1$, perciò $d(x, y) < M$ ottenendo la tesi. ■

Capitolo 4

Spazi normati e di Banach

4.1 Norme

Definizione 4.1.1. Sia X spazio vettoriale, una *norma* su X è un'applicazione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tale che:

- $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- $\|tx\| = |t| \|x\|$ per ogni $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per $x, y \in X$.

Ogni spazio normato è metrico (quindi topologico di Hausdorff) ponendo

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

rispetto a tale norma X è anche uno spazio vettoriale topologico localmente convesso poiché dalla disuguaglianza triangolare le palle aperte $B_r(x)$ sono convesse.

Definizione 4.1.2. Uno spazio normato X è di *Banach* se il relativo spazio metrico è completo.

Definizione 4.1.3. Siano X, X' spazi normati e $f : X \to X'$ lineare, f è *limitato* se e solo se esiste $L > 0$ tale che per ogni $x \in X$

$$\|f(x)\| \leq L \|x\|$$

Proposizione 4.1.4. *Siano X, X' spazi normati e $f : X \to X'$ lineare, sono equivalenti*

1. *f limitato;*
2. *f continuo su tutto X;*
3. *f continuo in 0.*

Dimostrazione. Esercizio per lo studente. ■

Definizione 4.1.5. Siano X, X' spazi normati, lo spazio

$$L(X, X') = \{f : X \to X' : f \text{ lineare e limitata}\}$$

è uno spazio normato con norma

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

Poniamo inoltre $X^* = L(X, \mathbb{R})$ che chiamiamo *duale* di X.

Proposizione 4.1.6. *Se X è uno spazio normato e Y spazio di Banach allora anche $L(X, Y)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia f_n successione di Cauchy su $L(X, Y)$, ovvero per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m, n > N$ e per ogni $x \in X$

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \epsilon \|x\|$$

Quindi $f_n(x)$ è una successione di Cauchy per ogni $x \in X$ perciò ammette limite. Poniamo

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

che è ancora lineare, passando ancora al limite in m si ha

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon \|x\| \Rightarrow \|f(x)\| \leq (\|f_n\| + \epsilon) \|x\|$$

per ogni $n > N$ ed è quindi limitata. L'unica cosa che bisogna dimostrare che f_n converge a f in norma, difatti per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ e per ogni $x \in X$

$$\frac{\|f_n(x) - f(x)\|}{\|x\|} \leq \epsilon \Leftrightarrow \|f_n - f\| \leq \epsilon$$

dimostrando così la tesi. ∎

Osservazione. Se X è uno spazio normato generico allora X^* è sempre uno spazio di Banach.

4.2 Teorema di Hahn-Banach

In questa sezione daremo una versione più generale del teorema di Hahn-Banach su spazi vettoriali non normati ma provvisti di seminorma (si veda la definizione 2.2.4). Ciononostante tale teorema viene enunciato qui piuttosto che nel capitolo degli spazi vettoriali topologici in quanto le applicazioni più interessanti si ottengono nel caso in cui la seminorma è una norma vera e propria.

Teorema 4.2.1 (Hahn-Banach)**.** *Sia V spazio vettoriale e $W \leq V$ un suo sottospazio generico. Sia inoltre p una seminorma su V e $f : W \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che per ogni $x \in W$*

$$f(x) \leq p(x)$$

Allora esiste un funzionale lineare $\overline{f} : V \to \mathbb{R}$ tale che $\overline{f}(x) = f(x)$ se $x \in W$ e per ogni $x \in V$ si ha

$$\overline{f}(x) \leq p(x)$$

Dimostrazione. Consideriamo la seguente classe

$$\mathcal{F} = \{g : U \to \mathbb{R} : g \text{ lineare } \wedge W \leq U \leq V \wedge f(x) = g(x) \text{ se } x \in W \wedge g(x) \leq p(x)\}$$

e definiamo la seguente relazione d'ordine su $\mathcal{F}$:

$$g \preceq h \Leftrightarrow W_g \leq W_h \wedge g(x) = h(x) \text{ per ogni } x \in W_g$$

Il lettore può dimostrare facilmente che tale classe è induttiva, quindi dal lemma di Zorn ammette un elemento massimale $\overline{f} : U \to \mathbb{R}$. Per assurdo U è diverso da V e sia $x \in V - U$, definiamo perciò

$$g : u + tx \in U \oplus \langle x \rangle \to \overline{f}(u) + \alpha t$$

con α opportuno che ci ricaveremo dopo. L'applicazione g è chiaramente lineare definita su un sottospazio strettamente più grande di U ed estende la funzione di partenza f, dobbiamo solo dimostrare che

$$g(u + tx) = \overline{f}(u) + \alpha t \leq p(u + tx)$$

Dividendo per $|t|$ otteniamo le seguenti disuguaglianze

$$\begin{aligned} \overline{f}(u) + \alpha &\leq p(u + x) \\ \overline{f}(u) - \alpha &\leq p(u - x) \end{aligned}$$

ottenute rispettivamente per t positivo e t negativo. La costante α deve perciò soddisfare

$$\overline{f}(u) - p(u - x) \leq \alpha \leq p(u + x) - \overline{f}(u) \text{ per ogni } u \in U$$

L'esistenza di un tale α equivale perciò a verificare se per ogni $u, v \in U$ vale

$$\overline{f}(u) + \overline{f}(v) \leq p(v + x) + p(u - x)$$

che è banalmente vera come il lettore può dimostrare senza alcuna difficoltà. Quindi possiamo prendere α in modo tale che

$$\sup_{u \in U} \left[\overline{f}(u) - p(u - x)\right] \leq \alpha \leq \inf_{v \in U} \left[p(v + x) - \overline{f}(v)\right]$$

e quindi $g \in \mathcal{F}$, ottenendo un assurdo. ■

Teorema 4.2.2. *Sia X spazio normato e $Y \leq X$, allora per ogni $f \in Y^*$ (rispetto alla norma indotta) esiste un funzionale $F \in X^*$ tale che $\|F\| = \|f\|$ e per ogni $y \in Y$ si ha $f(y) = F(y)$*

Dimostrazione. Consideriamo la seminorma

$$p(x) = \|f\| \, \|x\|$$

chiaramente $f(x) \leq p(x)$ per continuità, da Hahn-Banach esiste perciò F funzionale lineare definito su tutto X che estende f e tale che $F(x) \leq \|f\| \, \|x\|$ per ogni $x \in X$. In particolare

$$-F(x) = F(-x) \leq \|f\| \, \|x\|$$

e quindi $F \in X^*$ con $\|F\| \leq \|f\|$.

Però essendo F un prolungamento di f segue immediatamente che $\|f\| \leq \|F\|$ e quindi la tesi. ■

Proposizione 4.2.3. *Se X è uno spazio normato e $Y < X$ sottospazio chiuso diverso da X e fissiamo $x \in X \setminus Y$ allora esiste $f \in X^*$ di norma unitaria che vale 0 su Y e $f(x) = d(x, Y)$.*

Dimostrazione. Chiaramente $R = d(x, Y) > 0$. Definiamo

$$g : y + tx \in Y + \langle x \rangle \to Rt$$

chiaramente lineare, dimostriamo che g è continuo di norma esattamente 1. Per ogni $t \neq 0$:

$$\frac{|g(y + tx)|}{\|y + tx\|} = \frac{\inf_{z \in Y} \|x - z\| \, |t|}{\|y + tx\|} = \frac{\inf_{z \in Y} \|tx + z\|}{\|y + tx\|} \leq 1$$

poiché $z \to tz$ è biiettiva in Y. Per definizione di distanza tra insiemi per ogni $\epsilon > 0$ esiste $y_\epsilon \in Y$ tale che $\|x - y_\epsilon\| < R + \epsilon$ e quindi

$$\frac{|g(x - y_\epsilon)|}{\|x - y_\epsilon\|} > \frac{R}{R + \epsilon} > 1 - \frac{\epsilon}{R}$$

dove l'ultima disuguaglianza può essere ottenuta osservando che $R^2 > R^2 - \epsilon^2 = (R - \epsilon)(R + \epsilon)$ e quindi

$$1 \geq \|g\| > 1 - \frac{\epsilon}{R} \text{ per ogni } \epsilon > 0$$

perciò $\|g\| = 1$.

Dal teorema di Hahn-Banach perciò esiste $f \in X^*$ di norma unitaria che vale 0 su Y e

$$f(x) = R = d(x, Y)$$

■

Corollario 4.2.4. *Sia X uno spazio normato allora per ogni $x \in X$ esiste $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ tale che*

$$\|x\| = |f(x)| = \max_{g \neq 0} \frac{|g(x)|}{\|g\|}$$

Dimostrazione. Il sottospazio $Y = \{0\}$ è sempre chiuso (la topologia è di Hausdorff) e quindi possiamo applicare la proposizione precedente poiché

$$d(x, \{0\}) = \|x\|$$

Possiamo dimostrare direttamente questo corollario anche senza utilizzare la proposizione 4.2.3, basta applicare Hahn-Banach al funzionale

$$g : tx \in \langle x \rangle \to t\,\|x\| \in \mathbb{R}$$

■

Osservazione. Se X è uno spazio normato generico non possiamo assolutamente dire se, fissato $f \in X^*$ la quantità

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

ammette massimo su $X \setminus \{0\}$. Anzi per molti spazi normati l'estremo superiore di tale quantità non viene mai raggiunto da alcun elemento di X.

Lemma 4.2.5. *Sia X spazio normato, se X^* è separabile allora anche X lo è.*

Dimostrazione. Dal lemma 3.4.5 esisterà una successione $f_n \in X^*$ che risulti densa sull'insieme $\{f \in X^* : \|f\| = 1\}$. Esisteranno allora $x_n \in X$ di norma unitaria con $f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}$, l'insieme

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^{m} q_i x_i : m \in \mathbb{N} \wedge q_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

è numerabile e $\overline{U} = \overline{\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle}$. Difatti per ogni $x \in \overline{\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle}$ e per ogni $\epsilon > 0$ esistono $m \in \mathbb{N}$ ed $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$ tali che $\|x - \sum_{i=1}^{m} r_i x_i\| < \epsilon$. Per la densità dei numeri razionali possiamo trovare $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{Q}$ tali che $|r_i - q_i| < \epsilon/m$ e quindi

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{m} q_i x_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{m} r_i x_i \right\| + \sum_{i=1}^{m} |r_i - q_i| < 2\epsilon$$

e quindi $x \in \overline{U}$.

Se per assurdo non fosse denso in X allora per la proposizione 4.2.3 esisterà un $y \in X \setminus \overline{\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle}$ e un $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ che vale 0 sugli x_n e $f(y) \neq 0$. Ma allora

$$\frac{1}{2} \leq |f(x_n)| + |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|$$

raggiungendo un assurdo poiché $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ è denso. ■

Fissiamo adesso un elemento $x \in X$ e definiamo a partire da esso una nuova applicazione definita come

$$\hat{x} : f \in X^* \to f(x) \in \mathbb{R}$$

È banale constatare che $\hat{x}$ è lineare e continua, mentre dal corollario 4.2.4 segue immediatamente che $\|\hat{x}\| = \|x\|$. L'applicazione

$$\varphi : x \in X \to \hat{x} \in X^{**}$$

è sia un'applicazione lineare che un'*isometria* ($\|\varphi(x)\| = \|x\|$) e quindi iniettiva. Lo spazio X^{**} (che è sempre uno spazio di Banach) ammette perciò un sottospazio isomorfo a X stesso.

Teorema 4.2.6. *Sia X spazio normale, allora esistono uno spazio di Banach B e un'isometria lineare f da X in B tale che $f(X)$ è denso in B.*

Dimostrazione. Innanzitutto $\varphi(X)$ è un sottospazio di X^{**} isomorfo a X, poniamo $B = \overline{\varphi(X)}$ (la chiusura viene effettuata su tutto X^{**}) che ammette $\varphi(X)$ come sottospazio denso. Se ora prendiamo una qualunque successione di Cauchy in B allora essa ammette limite in X^{**}, e tale limite deve stare necessariamente in B essendo chiuso. ■

4.3 Norme su spazi vettoriali finitamente generati

Definizione 4.3.1. Sia V spazio vettoriale generico e $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ due norme su V. La prima norma è *equivalente* alla seconda se e solo se esistono due costanti positive $C \geq c > 0$ tali che per ogni $x \in V$

$$c\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\,\|x\|_2$$

La dimostrazione che l'equivalenza tra norme è una relazione di equivalenza è lasciata al lettore come esercizio.

Proposizione 4.3.2. *Le topologie indotte da due norme equivalenti coincidono.*

Dimostrazione. Ogni palla aperta della prima topologia ne contiene un'altra dell'altra topologia con lo stesso centro e viceversa. Dalla (3.1.4) segue immediatamente che le due topologie coincidono. ■

Teorema 4.3.3. *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione* finita *allora tutte le norme su V sono equivalenti.*

Dimostrazione. Sia $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base di V, allora per ogni $x \in V$ con $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ definiamo la norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \tag{4.3.1}$$

L'enunciato del teorema è equivalente ad affermare che ogni norma su V è equivalente a $\|\cdot\|_1$. Sia perciò $\|\cdot\|$ una norma generica su V. Innanzitutto se $C = \max_i \|v_i\|$ (che non dipende da x) allora $\|x\| \leq C \|x\|_1$ dalla disuguaglianza triangolare, determiniamo adesso una costante c tale che $\|x\|_1 \leq c \|x\|$.

Se per assurdo non fosse vera allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $x_n \in X$ tale che $\|x_n\|_1 > n \|x_n\|$. Possiamo supporre senza perdere in generalità $\|x_n\|_1 = 1$ e

$$\|x_n\| < \frac{1}{n}$$

Ponendo $x_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k v_i$ allora $\left|\alpha_i^k\right| \leq 1$ e quindi esiste un'estratta x_{n_k} che converge ad un certo x in norma $\|\cdot\|_1$, in particolare $\|x\|_1 = 1$. Da quanto abbiamo dimostrato prima allora x_{n_k} converge a x anche rispetto alla norma $\|\cdot\|$, ma allora $\|x\| = 0$ il che è assurdo. ∎

Quindi per gli spazi vettoriali di dimensione finita esiste un'unica topologia indotta da una norma, quindi ogniqualvolta non viene specificata la topologia di uno spazio vettoriale di dimensione finita si intende sempre quella generata da una norma.

Corollario 4.3.4. *Gli spazi vettoriali di dimensione finita sono completi.*

Dimostrazione. Esercizio. ∎

Corollario 4.3.5. *I sottospazi di dimensione finita di un generico spazio normato X sono sempre chiusi.*

Dimostrazione. Sia $M \leq X$ un sottospazio di dimensione finita, allora la norma di X è completa in M perciò le successioni di M convergenti in X hanno limite in M stesso (per l'unicità del limite). ∎

Vogliamo adesso dare una caratterizzazione topologica degli spazi vettoriali di dimensione finita, ovvero una condizione necessaria e sufficiente sulla topologia affinché il nostro spazio vettoriale abbia dimensione finita. Più precisamente l'aver dimensione finita equivarrebbe alla *relativa sequenziale compattezza* del sottoinsieme $D_1(0)$ di X rispetto a una qualunque sua norma.

Proposizione 4.3.6. *Sia X spazio vettoriale di dimensione finita e $\|\cdot\|$ una sua norma, allora la palla chiusa unitaria $D_1(0)$ (rispetto a tale norma) è relativamente sequenzialmente compatta (in realtà è proprio compatta).*

Dimostrazione. La norma $\|\cdot\|$ è equivalente alla norma $\|\cdot\|_1$ e quindi, se da dimensione di X è n, gli spazi vettoriali topologici X e $\mathbb{R}^n$ sono omeomorfi. Il sottoinsieme $D_1(0)$ è chiaramente chiuso rispetto alla topologia indotta, mentre dall'equivalenza delle norme è anche limitato (rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$) quindi è compatto ovvero è relativamente sequenzialmente compatto. ∎

Prima di dimostrare l'implicazione opposta abbiamo bisogno del seguente lemma

Lemma 4.3.7 (dei quasi ortogonali di Riesz)**.** *Sia X spazio normato e $M < X$ sottospazio chiuso. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $x \in X$ con $\|x\| = 1$ e*

$$d(x, M) \geq 1 - \epsilon$$

Dimostrazione. Sia $x_1 \in X \setminus M$ generico e poniamo $R = d(x_1, M)$, dalla proposizione 3.2.3 segue che $R > 0$, quindi per ogni $0 < \epsilon < 1$ esiste $y_1 \in M$ tale che

$$\|x_1 - y_1\| \leq \frac{R}{1-\epsilon}$$

Poniamo ora

$$x = \frac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|} \in X \setminus M$$

ha chiaramente norma unitaria e per ogni $y \in M$

$$\|x - y\| = \frac{\|(x_1 - y_1 - \|x_1 - y_1\| \, y)\|}{\|x_1 - y_1\|} \geq 1 - \epsilon$$

ottenendo la tesi passando all'estremo inferiore. ■

Teorema 4.3.8 (Riesz)**.** *Sia X spazio normato, se $D_1(0)$ è relativamente sequenzialmente compatto allora X ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Per assurdo X ha dimensione infinita, sia $x_1 \in X$ con $\|x_1\| = 1$, costruiamo per ricorrenza grazie al lemma precedente una successione $x_n \in X$ con $\|x_n\| = 1$ e

$$d(x_n, \langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \rangle) \geq \frac{1}{2}$$

da cui segue che $d(x_n, x_m) \geq \frac{1}{2}$ per ogni m, n e quindi la successione non può avere estratte di Cauchy. Raggiungiamo così un assurdo poiché $\{x_n\} \subseteq D_1(0)$ è relativamente sequenzialmente compatto. ■

Questo teorema mostra che le norme che rendono le palle chiuse compatte sono relativamente rare in quanto definibili esclusivamente sugli spazi vettoriali di dimensione finita. Questa osservazione giustifica il fatto che, nel momento in cui definiamo la norma di un operatore tramite la formulazione equivalente

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

non possiamo in alcun modo sostituire l'estremo superiore con un massimo senza condizioni aggiuntive sullo spazio X.

4.4 Il principio di uniforme limitatezza per spazi di Banach

Teorema 4.4.1 (Banach-Steinhaus)**.** *Siano X e Y spazi di Banach e $\{\Lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq L(X, Y)$ tali che per ogni $x \in X$*

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \|\Lambda_i x\| < +\infty$$

Allora

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \|\Lambda_i\| < +\infty$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$C_n = \{x \in X : \|\Lambda_i x\| \leq n \ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

che è chiaramente un insieme chiuso in X e per ipotesi vale $\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n = X$. Dal teorema di Baire esistono allora $x \in X$, $r > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che

$$D_r(x) \subseteq C_n$$

Per ogni $y \in X$ con $\|y\| = 1$ allora vale $\|\Lambda_i(ry)\| \leq n + \|\Lambda_i x\|$ da cui $\|\Lambda_i\| \leq \frac{n+\|\Lambda_i x\|}{r}$ che è dominato da una certa costante per ogni $i \in \mathbb{N}$, ottenendo così la tesi. ■

Corollario 4.4.2. *Siano X e Y spazi di Banach e $\{\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,Y)$ tali che per ogni $x \in X$ $\Lambda_n x$ converge in Y ad una certa quantità Λx. Allora Λ è un operatore lineare continuo e vale*

$$\|\Lambda\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|\Lambda_n\|$$

Dimostrazione. Λ è chiaramente lineare e il lettore può dimostrare dal teorema di Banach - Steinhaus che è anche continuo.

Dalla continuità della norma si dimostra facilmente che

$$\|\Lambda x\| \leq \left(\liminf_{n\to+\infty} \|\Lambda_n\|\right) \|x\|$$

per ogni x e la dimostrazione è conclusa. ■

Teorema 4.4.3 (della funzione aperta)**.** *Siano X e Y spazi di Banach e $\Lambda \in L(X,Y)$* suriettiva. *Allora Λ è una funzione aperta.*

Dimostrazione. Dimostriamo inizialmente che esiste $c > 0$ tale che

$$\overline{\Lambda(B_1(0))} \supseteq B_{2c}(0) \tag{4.4.1}$$

consideriamo perciò i chiusi

$$C_n = n \cdot \overline{\Lambda(B_1(0))}$$

dalla suriettività e dalla linearità di Λ segue che $\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n = Y$, da Baire allora segue che esiste $y \in Y$ e $c > 0$ tali che $\overline{\Lambda(B_1(0)) \supseteq B_{4c}(y)}$.

Sempre dalla linearità di Λ si ha che $-y \in \overline{\Lambda(B_1(0))}$ e quindi si ha

$$B_{4c}(0) \subseteq \overline{\Lambda(B_1(0))} + \overline{\Lambda(B_1(0))}$$

Sapendo che $\Lambda(B_1(0))$ è convesso la chiusura di un insieme convesso rimane convesso (la cui dimostrazione è lasciata al lettore come esercizio), allora se $u, v \in \overline{\Lambda(B_1(0))}$ allora $2\frac{u+v}{2} \in 2 \cdot \overline{\Lambda(B_1(0))}$ dimostrando così la tesi iniziale.

Dimostriamo ora che $B_c(0) \subseteq \Lambda(B_1(0))$, chiaramente $B_c(0) \subseteq \overline{\Lambda\left(B_{\frac{1}{2}}(0)\right)}$ e quindi per ogni $\epsilon > 0$ e $y \in B_c(0)$ esiste $x \in X$ tale che $\|x\| < \frac{1}{2}$ e $\|y - \Lambda x\| < \epsilon$. In particolare per $\epsilon = \frac{c}{2}$ si ha

$$\exists x_1 \in X : \|x_1\| < \frac{1}{2} \wedge \|y - \Lambda x_1\| < \frac{c}{2}$$

da cui $y - \Lambda x_1 \in B_{\frac{c}{2}}(0) \subseteq \overline{\Lambda\left(B_{\frac{1}{4}}(0)\right)}$, per ricorrenza allora

$$\exists x_n \in X : \|x_n\| < \frac{1}{2^n} \wedge \|y - \Lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\| < \frac{c}{2^n}$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge ad x poiché la successione delle somme parziali è di Cauchy, $\|x\| < 1$ e $y - \Lambda x = 0$ da cui la tesi.

Consideriamo adesso A aperto di X e sia $y \in \Lambda(A)$, allora esiste $x \in A$ e $r > 0$ tali che $y = \Lambda x$ e $B_r(x) \subseteq A$. Dalla linearità e dal discorso precedente segue immediatamente che

$$B_{cr}(y) \subseteq \Lambda(B_r(x)) \subseteq \Lambda(A)$$

che è equivalente ad affermare che Λ è aperta. ■

Esempio. L'applicazione

$$f : x \in [0,1] \to x \in \mathbb{R}$$

è lineare continua tra due spazi di Banach ma non è né suriettiva né aperta.

Corollario 4.4.4. *Se Λ è lineare, continua e biiettiva allora anche Λ^{-1} è continua.*

Dimostrazione. Λ aperto $\Leftrightarrow \Lambda^{-1}$ continua. ■

Corollario 4.4.5. *Sia X spazio vettoriale e $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ che entrambe rendono X uno spazio di Banach. Se esiste $C > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ per ogni $x \in X$ allora le due norme sono equivalenti*

Dimostrazione. L'applicazione lineare seguente

$$i : x \in (X, \|\cdot\|_2) \to x \in (X, \|\cdot\|_1)$$

è chiaramente lineare e invertibile, per ipotesi è anche continua quindi la sua inversa è continua ovvero esiste $c > 0$ tale che $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1$. ■

Definizione 4.4.6. Poniamo $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati, allora definiamo sullo spazio vettoriale $X \times Y$ la *norma prodotto* la seguente norma

$$\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

Proposizione 4.4.7. *Siano X e Y spazi di Banach, allora anche $X \times Y$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma prodotto.*

Dimostrazione. Esercizio. ■

Definizione 4.4.8. Siano X e Y stavolta insiemi generici e $f : X \to Y$ una funzione. Il *grafico* di f è l'insieme

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\} = \{[x, f(x)] : x \in X\}$$

Teorema 4.4.9 (del grafico chiuso)**.** *Siano X e Y spazi di Banach e $\Lambda : X \to Y$ funzione lineare. Allora*

$$\Lambda \textit{ continuo} \Leftrightarrow G(f) \textit{ chiuso in } X \times Y \textit{ rispetto alla norma prodotto}$$

Dimostrazione. L'implicazione $\Rightarrow$ è lasciata al lettore come esercizio, dimostriamo l'implicazione opposta. Il sottospazio $G(f)$ è ancora uno spazio di Banach rispetto alla topologia prodotto poiché era chiuso in $X \times Y$, inoltre le due proiezioni

$$P_1 : (x, y) \in G(f) \to x \in X$$
$$P_2 : (x, y) \in G(f) \to y = f(x) \in Y$$

sono entrambe continue e P_1 è invertibile.

Dal corollario 4.4.4 la funzione $P_2 \circ P_1^{-1} : X \to Y$ è continua e coincide con f. ■

4.5 Topologie deboli in spazi normati

Definizione 4.5.1. Sia X spazio normato, allora la topologia debole generata da X^* (si veda la definizione 2.3.3) è detta più semplicemente *topologia debole* di X.

Poiché le funzioni in X^* sono continue nella topologia della norma allora la topologia debole è meno fine di quella usuale generata dalla norma che abbiamo usato finora, chiamata anche *topologia forte*.

Diciamo inoltre che un insieme è *debolmente aperto* o *chiuso* se e solo se è rispettivamente aperto o chiuso per la topologia debole, mentre è *fortemente aperto* o *chiuso* se lo è rispetto alla topologia generata dalla norma di X, ovvero la topologia forte. Quando diciamo che un insieme è aperto o chiuso senza specificare la topologia intendiamo sempre rispetto alla topologia forte come abbiamo fatto precedentemente.

Dalla proposizione 2.3.2 la topologia debole dello spazio normato X coincide con l'insieme

$$\left\{f^{-1}(U) : f \in X^* \wedge U \text{ aperto di } \mathbb{R}\right\}$$

Proposizione 4.5.2. *Lo spazio (normato) X munito della topologia debole è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e di Hausdorff. In particolare il limite delle successioni se esiste è unico.*

Dimostrazione. Segue immediatamente applicando il corollario 4.2.4 e la proposizione 2.3.2. ■

Definizione 4.5.3. Una qualunque successione $x_n \in X$ *converge debolmente* a $x \in X$ se e solo se x_n converge a x rispetto alla topologia debole e si indica con

$$x_n \rightharpoonup x$$

Proposizione 4.5.4. *Consideriamo un qualunque spazio normato X, allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow$ *per ogni* $f \in X^*$ $f(x_n) \to f(x)$*;*
2. *Se* $x_n \to x$ *allora* $x_n \rightharpoonup x$*;*
3. *Se* x_n *converge debolmente a* x *allora* $\|x_n\|$ *è* limitato *e inoltre*
$$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$$
4. *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *e* $f_n \to f$ *(in* X^**) allora*
$$f_n(x_n) \to f(x)$$

Dimostrazione. Dimostriamo i vari casi:

1. Rispetto alla topologia debole ogni $f \in X^*$ è continua su X, quindi se x_n tende debolmente a x per continuità $f(x_n)$ converge in $\mathbb{R}$ a $f(x)$. Viceversa prendiamo un qualunque intorno U di x rispetto alla topologia debole, allora esiste $f \in X^*$ e un intorno aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ di $f(x)$ tale che $f^{-1}(A) \subseteq U$. Per definizione di continuità di una successione esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ $f(x_n) \in A \Leftrightarrow x_n \in f^{-1}(A) \subseteq U$ e perciò $x_n \rightharpoonup x$.
2. Banale poiché la topologia debole è contenuta in quella forte.
3. Dal punto 1. se $x_n \rightharpoonup x$ allora per ogni $f \in X^*$ $\hat{x_n}(f) \to \hat{x}(f)$, per il corollario 4.4.2 (X^* di Banach) segue immediatamente la tesi.
4. È immediata in quanto $\|x_n\|$ è limitato e
$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \, \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)|$$

■

Proposizione 4.5.5. *Se* $\dim X < +\infty$ *allora la topologia debole coincide con quella forte.*

Dimostrazione. Poiché tutte le norme su X sono equivalenti possiamo passare alla norma $\|\cdot\|_1$ definita nella (4.3.1). Le proiezioni sulla i esima componente $p_i : X \to \mathbb{R}$ sono continue rispetto a tale norma e quindi $p_i \in X^*$, posto $Q(x, \epsilon) = \{y \in X : \|y - x\|_1 < \epsilon\}$ allora si vede chiaramente che

$$Q(x, \epsilon) = I^{\epsilon,\epsilon,\ldots,\epsilon}_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(x)$$

e quindi gli aperti della topologia forte sono aperti anche nella topologia debole. ■

4.6 Topologie deboli*

Definizione 4.6.1. Prendiamo X spazio di Banach e $\hat{X} = \{\hat{x} \in X^{**} : x \in X\}$ che abbiamo visto essere isomorfo a X. Si definisce *topologia debole** la topologia meno fine su X^* che renda tutti i funzionali in $\hat{X}$ continui.

Proposizione 4.6.2. *La topologia debole* è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Chiaramente per ogni $f \neq 0$ esiste $x \in X$ tale che $\hat{x}(f) = f(x) \neq 0$ e quindi la famiglia $\hat{X}$ è totale. ∎

Per ogni successione $f_n \in X^*$ e $f \in X^*$ indichiamo col simbolo

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$$

che la successione f_n converge a f secondo la topologia debole*.

Proposizione 4.6.3. *Lo spazio X^* munito della topologia debole* è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso di Hausdorff.*

Proposizione 4.6.4. *Consideriamo un qualunque spazio di Banach X, allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \Leftrightarrow$ *per ogni* $x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$;
2. *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *allora* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;
3. *Se* f_n *converge debolmente* a* f *allora* $\|f_n\|$ è limitato *e inoltre*
$$\|f\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|$$
4. *Se* $x_n \to x$ *e* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *allora*
$$f_n(x_n) \to f(x)$$

Dimostrazione. Esercizio per il lettore, si veda la proposizione analoga delle topologie deboli. ∎

Proposizione 4.6.5. *Se X è di Banach allora X^* è completo rispetto alla topologia debole* ovvero per ogni $f_n \in X^*$ vale l'implicazione*

$$f_n(x) \text{ converge per ogni } x \in X \Rightarrow \ \exists f \in X^* : f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$$

Dimostrazione. Immediatamente dal corollario 4.4.2. ∎

4.7 Teoremi di separazione di Mazur

4.7.1 Separazione in spazi vettoriali

Lemma 4.7.1. *Sia V spazio vettoriale e $K \subseteq V$ convesso con punti internali. Allora per ogni $v_0 \in V \setminus K$ esiste $f \in V^+ \setminus \{0\}$ tale che per ogni $v \in K$*

$$f(v) \leq f(v_0)$$

Dimostrazione. Possiamo supporre tranquillamente che $0 \in K$ sia internale, definiamo l'applicazione lineare

$$f : tv_0 \in \langle v_0 \rangle \to t \in \mathbb{R}$$

Poiché v_0 non si trova in K convesso si ha $f(v_0) \leq p_K(v_0)$ dove p_K è il funzionale di Minkowski (definizione 2.2.13) in quanto

$$\begin{gathered} t \geq 0 \Rightarrow f(tv_0) = t \leq tp_K(v_0) = p_K(tv_0) \\ t < 0 \Rightarrow f(tv_0) = t < 0 \leq p_K(tv_0) \end{gathered}$$

possiamo perciò applicare Hahn-Banach ed estendere f su tutto V sempre con $f(v) \leq p_K(v)$. Ora $f(v_0) = 1$ mentre per ogni $v \in K$ $f(v) \leq p_K(v) \leq 1$.

Se ora u fosse internale a K allora 0 è internale a $K - u$ e quindi $f(v-u) \leq f(v_0-u)$ e la tesi segue per linearità. ■

Definizione 4.7.2. Sia V spazio vettoriale, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in V^+ \setminus \{0\}$, un *iperpiano affine* è un qualunque insieme nella forma

$$H = \{v \in V : f(v) = \alpha\}$$

oppure in maniera più compatta

$$H = \{f = \alpha\}$$

Definizione 4.7.3. Prendiamo due sottoinsiemi non vuoti A, B di V, allora l'iperpiano $\{f = \alpha\}$ *separa in senso largo* A da B se e solo se

$$v \in A \Rightarrow f(v) \geq \alpha \text{ e } v \in B \Rightarrow f(v) \leq \alpha$$

Ancora, l'iperpiano $\{f = \alpha\}$ *separa in senso stretto* A da B se e solo se esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$v \in A \Rightarrow f(v) \geq \alpha + \epsilon \text{ e } v \in B \Rightarrow f(v) \leq \alpha - \epsilon$$

Teorema 4.7.4 (Separazione larga in spazi vettoriali o primo teorema di Mazur)**.** *Prendiamo due insiemi A, B non vuoti disgiunti convessi dello spazio vettoriale V, supponiamo anche che A abbia punti internali, allora A e B possono essere separati in senso largo da un iperpiano.*

Dimostrazione. L'insieme $K = A - B$ è convesso non vuoto, non contiene l'elemento 0 e contiene punti internali: se v_0 è internale in A e $v \in B$ allora per ogni $x \in V$ e δ arbitrariamente piccolo $v_0 + \delta x - v \in A - B$ banalmente e $v_0 - v$ internale in $A - B$.

Per il lemma precedente esisterà un funzionale $f : V \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $k \in K$ $f(v) \leq 0$ e quindi per ogni $v \in A$, $w \in B$ $f(v) \leq f(w)$. Esisterà allora $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\sup_{v \in A} f(v) \leq \alpha \leq \inf_{w \in B} f(w)$$

e quindi l'iperpiano $\{f = \alpha\}$ separa in senso largo i due insiemi. ∎

4.7.2 Separazione in spazi normati

In questa sottosezione, se non specificato diversamente, X è uno spazio normato.

Proposizione 4.7.5. *L'iperpiano $\{f = \alpha\}$ è chiuso se e solo se f è continua.*

Dimostrazione. L'implicazione $\Leftarrow$ è banale, supponiamo ora $\{f = \alpha\}$ chiuso, perciò il suo complementare è aperto. Allora se $f(x) < \alpha$ esisterà un $r > 0$ tale che se $\|y - x\| < r$ allora $f(y) < \alpha$ per linearità. Difatti esisterà $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq \{f \neq \alpha\}$, se esistesse $y \in B_r(x)$ tale che $f(y) > \alpha$ allora per ogni $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

e quindi potremmo trovare un elemento $z \in B_r(x)$ tale che $f(z) = \alpha$ il che è assurdo. Per ogni $z \in B_1(0)$ allora $f(x + rz) = f(x) + rf(z) < \alpha$ ovvero

$$\|f\| \leq \frac{\alpha - f(x)}{r}$$

e quindi f è continuo. ∎

Teorema 4.7.6 (Separazione stretta in spazi normati o secondo teorema di Mazur)**.** *Siano A, B sottoinsiemi convessi non vuoti e disgiunti in X. Inoltre sia A chiuso e B compatto, sotto queste ipotesi essi possono essere separati in senso stretto da un iperpiano chiuso.*

Dimostrazione. Definiamo

$$\begin{aligned} A_\epsilon &= A + B_\epsilon(0) = \{y \in X : \exists x \in A \text{ tale che } \|x - y\| < \epsilon\} \\ B_\epsilon &= B + B_\epsilon(0) = \{y \in X : \exists x \in B \text{ tale che } \|x - y\| < \epsilon\} \end{aligned}$$

che sono entrambi aperti: se $x \in A_\epsilon$ con $y \in A$ tale che $r = \|x - y\| < \epsilon$ allora $B_{\epsilon - r}(x) \subseteq A_\epsilon$. Dalla proposizione 3.2.3 esisterà un ϵ abbastanza piccolo tale che $A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset$. Ancora A_ϵ è convesso poiché somma di insiemi convessi.

Dal teorema di separazione larga esiste f lineare non nulla che separa A_ϵ da B_ϵ e quindi esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in A$, $y \in B$ e $z \in B_1(0)$ scelto in modo tale che con $f(z) > 0$ (f non è l'applicazione nulla) e

$$f(x + \epsilon z) \leq \alpha \leq f(y - \epsilon z) \Leftrightarrow f(x) \leq \alpha - \epsilon f(z) < \alpha + \epsilon f(z) \leq f(y)$$

e quindi li separa in senso stretto.

Dimostriamo la continuità di f: infatti fissato $x \in A$ si ha

$$\|f\| \leq \frac{\alpha - f(x)}{\epsilon}$$

e perciò $f \in X^*$. ■

Esempio. L'ipotesi di convessità non può essere in alcun modo tolta negli enunciati dei due teoremi di separazione qui sopra, difatti i due insiemi $A = \mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$ e $B = D_1(0)$ in $\mathbb{R}^n$ con la norma usuale sono entrambi non vuoti, il primo è chiuso e il secondo compatto e convesso. Ciononostante non esiste alcun iperpiano che li possa separare, anzi per ogni $f \in V^+ \setminus 0$ e per ogni $N > 0$ esistono $x, y \in A$ tali che $f(x) > N$ e $f(y) < -N$. In altre parole A non può essere delimitato da alcun iperpiano.

4.7.3 Il terzo teorema di Mazur

Proposizione 4.7.7. *Se K è un sottoinsieme convesso di X spazio normato allora*

$$K \text{ debolmente chiuso } \Leftrightarrow K \text{ fortemente chiuso}$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo l'implicazione $\Leftarrow$ poiché i chiusi della topologia forte sono chiusi anche per quella debole essendo meno fine. Sia K fortemente chiuso, dal teorema di separazione stretta per ogni $x \notin K$ esistono $f_x \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ tali che

$$K \subseteq \{y \in X : f_x(y) < \alpha - \epsilon\}$$
$$x \in \{y \in X : f_x(y) > \alpha + \epsilon\} = A_x$$

L'insieme A_x è un intorno di x debolmente aperto disgiunto da K, questo vale per ogni x non appartenente a K e perciò K è debolmente chiuso ■

Teorema 4.7.8 (Terzo teorema di Mazur)**.** *Sia ora X spazio di Banach con $x_n \rightharpoonup x$ in X, allora esiste una applicazione strettamente crescente $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $c_1^n, c_2^n, \ldots, c_{N(n)}^n \in [0,1]$ tali che*

$$\sum_{i=1}^{N(n)} c_i^n = 1$$
$$\lim_{n \to +\infty} \left\| \sum_{i=1}^{N(n)} c_i^n x_i - x \right\| = 0$$

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$A = \left\{ y \in X : y = \sum_{i=1}^{n} c_i^n x_i \text{ con } n \in \mathbb{N}, c_i^n \in [0,1] \text{ e } \sum_{i=1}^{n} c_i^n = 1 \right\}$$

dimostriamo che A è convesso. Presi $u = \sum_{i=1}^m c_i x_i$, $v = \sum_{j=1}^n d_j x_j$ elementi di A con $n \leq m$ e $\lambda \in [0,1]$ allora

$$\lambda u + (1-\lambda)v = \sum_{i=1}^n [\lambda c_i + (1-\lambda)d_i]\, x_i + \sum_{i=n+1}^m \lambda c_i x_i$$

che appartiene ad A in quanto

$$\sum_{i=1}^n [\lambda c_i + (1-\lambda)d_i] + \sum_{i=n+1}^m \lambda c_i = \lambda \sum_{i=1}^m c_i + (1-\lambda)\sum_{i=1}^n d_i = 1$$

Ricordando che la chiusura rispetto alla norma di X di un insieme convesso è convesso allora $\overline{A}$ è debolmente chiuso. Poiché $x_n \in A$ allora $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x \in \overline{A} \Rightarrow$ esiste una successione in A che tende fortemente a x. ■

Corollario 4.7.9. *Usando la definizione di inviluppo convesso (pagina 63) allora se X è uno spazio di Banach vale la seguente relazione*

$$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x \in \overline{\operatorname{con}\left(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\right)}$$

quindi se una successione converge debolmente possiamo trovare una nuova successione ottenuta tramite una combinazione convessa che vi converge fortemente.

4.8 Spazi riflessivi

Definizione 4.8.1. Uno spazio normato è *riflessivo* se e solo se esiste un'isometria lineare *biunivoca* tra X e X^{**}.

Proposizione 4.8.2. *Se X è riflessivo allora le topologie debole e debole* su X^* coincidono.*

Proposizione 4.8.3. *Poniamo X spazio riflessivo, allora per ogni $f \in X^*$ esiste $x \in X$ tale che $\|x\| = 1$ e*

$$\|f\| = |f(x)| = \max_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

Dimostrazione. Dal corollario 4.2.4 ed essendo X riflessivo esiste $x \in X$ tale che

$$\|x\| = \|\hat{x}\| = |\hat{x}(f)| = |f(x)|$$

■

Proposizione 4.8.4. *Gli spazi riflessivi sono spazi di Banach.*

Dimostrazione. Se x_n è una successione di Cauchy in X allora lo è anche $\hat{x}_n$ in X^{**}. Ora X^{**} è il duale di X^* e quindi è uno spazio di Banach, esisterà allora $F \in X^{**}$ tale che $x_n \to F$ in X^{**}, ma per la riflessività di X esisterà $x \in X$ tale che $F = \hat{x}$ e $x_n \to x$ in X. ■

Negli spazi riflessivi oltre alla completezza forte vale anche quella debole, difatti

Proposizione 4.8.5. *Gli spazi riflessivi sono debolmente completi.*

Per la definizione di spazio debolmente completo si veda la definizione 2.3.4

Dimostrazione. Prendiamo x_n successione debolmente di Cauchy nello spazio riflessivo X, ovvero per ogni $f \in X^*$ la successione $f(x_n)$ ammette limite. Dal corollario 4.4.2 esiste $F \in X^{**}$ tale che $F(f) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ e allora la tesi segue immediatamente dalla riflessività di X. ∎

A differenza di quanto possa suggerire il nome, la debole completezza non deriva automaticamente da quella forte, anzi esistono spazi di Banach che non sono debolmente completi, per un esempio si vedano le dispense aggiuntive disponibili attualmente all'indirizzo `https://loara.github.io`.

Criteri di compattezza debole

Il seguente teorema è fornisce un *criterio di sequenziale compattezza debole.*

Teorema 4.8.6. *Se X è uno spazio riflessivo e separabile allora per ogni successione $x_n \in X$ limitata da un certo $L > 0$ ne esiste un'estratta debolmente convergente.*

Dimostrazione. Dal lemma 4.2.5 X^* è separabile, allora esiste una successione f_n densa in X^*. Esisterà allora un'estratta x_n^1 di $x_n^0 = x_n$ tale che $f_1(x_n^1)$ converge, iterando il procedimento esisterà un'estratta x_n^k di x_n^{k-1} tale che $f_k(x_n^k)$ converge. Definiamo la successione

$$y_n = x_n^n$$

allora per ogni k $f_k(y_n)$ converge ad una quantità finita. Ora consideriamo $f \in X^*$ generica, per ogni $\epsilon > 0$ esisterà $n \in \mathbb{N}$ tale che $\|f_n - f\| \leq \epsilon$ e inoltre

$$|f(y_i - y_j)| \leq 2L\,\|f - f_n\| + |f_n(y_i - y_j)| \leq \epsilon(2L + 1)$$

e quindi dalla proposizione 4.8.5 y_n converge debolmente in X. Questo conclude la dimostrazione. ∎

Corollario 4.8.7. *Se X è uno spazio riflessivo e separabile allora gli insiemi (debolmente) chiusi e limitati sono debolmente sequenzialmente compatti.*

Il seguente teorema è fornisce un *criterio di sequenziale compattezza debole*.*

Teorema 4.8.8. *Se X è uno spazio di Banach separabile allora ogni successione $f_n \in X^*$ limitata in norma ammette un'estratta debolmente* convergente in X^*.*

Dimostrazione. Prendiamo x_n successione densa in X, ragionando come nella dimostrazione del criterio di sequenziale compattezza debole esiste un'estratta g_n di f_n tale che per ogni $x \in X$ $\hat{x}(g_n) = g_n(x)$ converge e quindi g_n è una successione debolmente* di Cauchy, la tesi segue dalla completezza della topologia debole*. ∎

Teorema 4.8.9. *Se X è riflessivo allora ogni suo sottospazio chiuso è riflessivo.*

Dimostrazione. Sia $Y \leq X$ chiuso allora Y è uno spazio di Banach, consideriamo l'applicazione lineare

$$\sigma : f \in X^* \to f_{|Y} \in Y^*$$

l'applicazione σ è continua ($\left\|f_{|Y}\right\| \leq \|f\|$) e da Hahn-Banach segue che σ è suriettiva e $\|\sigma\| = 1$. Definiamo ora l'applicazione

$$\sigma' : y \in Y^{**} \to y \circ \sigma \in X^{**}$$

essa è ancora lineare e continua con norma minore o uguale a 1, se ora poniamo $\theta : x \in X \to \hat{x} \in X^{**}$

Dimostriamo che $\theta^{-1}\sigma'(Y^{**}) \subseteq Y$. Consideriamo $x \in X$ tale che $\hat{x} \in \sigma'(Y^{**})$ ovvero esiste $G \in Y^{**}$ tale che $\hat{x}(f) = G[f_{|Y}]$ per ogni $f \in X^*$. Se per assurdo x non si trova in Y chiuso allora dalla proposizione 4.2.3 esiste $f \in X^*$ con $f_{|Y} = 0$ e $f(x) \neq 0$ assurdo, perciò $x \in Y$.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema, prendiamo $G \in Y^{**}$ e $F = \sigma'(G) = \hat{x} \in \sigma'(Y^{**}) \Rightarrow x \in Y$, dalla suriettività di σ per ogni $g \in Y^+$ esiste $f_g \in X^*$ sua estensione su X tale che

$$G(g) = F(f_g) = \hat{x}(f_g) = \hat{x}(g)$$

■

Proposizione 4.8.10 (Weierstrass generalizzato)**.** *Sia X spazio riflessivo separabile e $K \subseteq X$ chiuso convesso e limitato. Posto $F : K \to \mathbb{R}$ convessa e semicontinua inferiormente (rispetto alla topologia forte) allora F ha un punto di minimo in K. Se F è strettamente convessa allora il punto di minimo è unico.*

Dimostrazione. Sia $m = \inf_{k \in K} F(k)$ allora esiste una successione $x_n \in K$ tale che $F(x_n) \to m$. L'insieme K essendo convesso è anche debolmente chiuso e dal criterio di compattezza debole esiste un'estratta x_{n_k} che converge debolmente ad un certo $x \in K$, vogliamo dimostrare che $F(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(x_n)$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ poniamo per comodità $P_\alpha = \{x \in X : F(x) \leq \alpha\}$ insieme fortemente chiuso, inoltre per ogni $x, y \in P_\alpha$ e $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$F[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) \leq \alpha$$

quindi P_α è convesso e debolmente chiuso, allora F è debolmente semicontinua inferiormente e quindi

$$m \leq F(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(x_n) = m$$

e x è un punto di minimo. In particolare si ha $m > -\infty$.

Ricordiamo che F è strettamente convessa se e solo se per ogni $x \neq y$ e $\lambda \in]0, 1[$ vale

$$F[\lambda x + (1 - \lambda)y] < \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y)$$

Per assurdo esistono due punti di minimo $x, y \in K$ diversi, allora per ogni $\lambda \in]0,1[$

$$m \leq F[\lambda x + (1-\lambda)y] < \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) = m$$

assurdo. ■

Osservazione. Ogni applicazione lineare e continua è banalmente convessa e semicontinua inferiormente, anzi in questo caso la dimostrazione del teorema di Weierstrass generalizzato diventa immediata e discende direttamente dalla definizione di topologia debole.

Approfondimento fuori programma

Useremo ora il teorema di Weierstrass generalizzato per dimostrare una versione più forte della proposizione 3.2.3. Innanzitutto abbiamo già dimostrato che per ogni $M \subseteq X$ non vuoto e chiuso l'applicazione

$$x \in X \to d(x, M) \in \mathbb{R}$$

è continua e a maggior ragione semicontinua inferiormente. Supponiamo ora che M sia anche convesso, allora per ogni $x, y \in X$, $m, m' \in M$ e $\lambda \in [0,1]$ abbiamo $\lambda m + (1-\lambda)m' \in M$ e perciò

$$d[\lambda x + (1-\lambda)y, M] \leq \left\| \lambda(x-m) + (1-\lambda)(y-m') \right\| \leq \lambda \|x - m\| + (1-\lambda) \left\| y - m' \right\|$$

passando all'estremo inferiore per m e m' otteniamo

$$d[\lambda x + (1-\lambda)y, M] \leq \lambda d(x, M) + (1-\lambda)d(y, M)$$

ed è perciò una funzione convessa.

Prendiamo ora un qualunque N chiuso convesso e limitato in X, per il teorema di Weierstrass generalizzato esiste un $n \in N$ punto di minimo della funzione precedente, in altre parole

$$d(N, M) = d(n, M) = \lim_{i \to +\infty} \|n - m_i\|$$

per un'opportuna successione di elementi di M.

Fissiamo adesso un generico $u \in M \setminus N$ allora $M \cap D_{2\|n-u\|}(n)$ è chiuso, convesso e limitato ma soprattutto la successione m_i da un certo indice in poi è contenuta all'interno dell'insieme $M \cap D_{2\|n-u\|}(n)$. Dal criterio di compattezza debole m_i ammette un'estratta debolmente convergente ad un certo $m \in M$. Ma la distanza è debolmente semicontinua inferiormente e quindi, a meno di passare a tale estratta

$$\|m - n\| = \liminf_{i \to +\infty} \|n - m_i\| = d(N, M)$$

Abbiamo appena dimostrato il

Lemma 4.8.11. *Sia X spazio riflessivo separabile e $M, N \subseteq X$ convessi chiusi con N limitato. Allora esistono $m \in M$, $n \in N$ tali che*

$$d(M, N) = \|m - n\|$$

Capitolo 5

Operatori in spazi normati

5.1 Aggiunto di operatori

Definizione 5.1.1. Per ogni operatore continuo $T \in L(X,Y)$ definiamo l'*aggiunto* di T l'applicazione

$$T^* : g \in Y^* \to g \circ T \in X^*$$

Proposizione 5.1.2. *Se $T \in L(X,Y)$ allora $T^* \in L(Y^*, X^*)$ e inoltre*

$$\|T\| = \|T^*\|$$

Dimostrazione. Per ogni $f, g \in Y^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x \in X$

$$[T^*(\alpha f + \beta g)](x) = \alpha f(Tx) + \beta g(Tx) = \alpha [T^* f](x) + \beta [T^* g](x)$$

Il lettore può dimostrare facilmente che per ogni $f \in Y^*$

$$\|f \circ T\| \leq \|f\| \, \|T\|$$

e quindi T^* è un operatore lineare continuo con $\|T^*\| \leq \|T\|$. Viceversa per ogni $x \in X$ esiste $g_x \in Y^*$ di norma unitaria tale che $g_x(Tx) = \|Tx\|$ e quindi

$$\|Tx\| = \|(T^* g_x)(x)\| \leq \|T^* g_x\| \, \|x\| \leq \|T^*\| \, \|x\|$$

che ci permette di ottenere la disuguaglianza opposta. ■

Usando la notazione $\langle f, x \rangle = f(x)$ per $x \in X$ e $f \in X^*$ allora per ogni $g \in Y^*$

$$\langle g, Tx \rangle = \langle T^* g, x \rangle$$

Proposizione 5.1.3. *Siano $A, B \in L(X,Y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $(A+B)^* = A^* + B^*$ e $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.*

Dimostrazione. Esercizio. ■

Definizione 5.1.4. Prendiamo $H \subseteq X$, definiamo l'*annichilatore (destro)* di H l'insieme

$$H^{\perp} = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = 0 \text{ per ogni } x \in H\}$$

Considerando invece $H \subseteq X^*$ definiamo l'*annichilatore (sinistro)* di H l'insieme

$$^{\perp}H = \{x \in X : \langle x^*, x\rangle = 0 \text{ per ogni } x^* \in H\}$$

Proposizione 5.1.5. *Gli annichilatori destro e sinistro sono sempre sottospazi vettoriali chiusi*

Dimostrazione. Prendiamo $H \subseteq X^*$ ed $x_n \in {}^{\perp}H$ tale che $x_n \to x$. Allora per ogni $x^* \in H$ si ha $\langle x^*, x_n\rangle = 0 \Rightarrow \langle x^*, x\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle x^*, x_n\rangle = 0$ per la continuità di x^*.

Possiamo usare lo stesso ragionamento per l'annichilatore destro semplicemente ricordando che ogni $x \in X$ può essere visto come un elemento di X^{**} e quindi è continuo sul duale di X. ■

Proposizione 5.1.6. *Se $M \leq X$ è chiuso allora*

$$^{\perp}\left(M^{\perp}\right) = M$$

Dimostrazione. È banale constatare che $M \subseteq {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$, per assurdo sia $i \in {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right) \setminus M$ ovvero $\langle f, i\rangle = 0$ per ogni $f \in M^{\perp}$, dal corollario 4.2.3 esiste $k \in X^*$ che annulla M ma non i ovvero $k \in M^{\perp}$ ma $\langle k, i\rangle \neq 0$ assurdo. ■

Proposizione 5.1.7. *Se $M \subseteq X$ allora*

$$^{\perp}\left(M^{\perp}\right) = \overline{\langle M\rangle}$$

Dimostrazione. Definiamo $Y = \overline{\langle M\rangle}$ sottospazio chiuso, dimostriamo innanzitutto che $Y^{\perp} = M^{\perp}$. Chiaramente $Y^{\perp} \subseteq M^{\perp}$, prendiamo ora un generico $x^* \in M^{\perp}$ ovvero per ogni $x \in \langle M\rangle$ $\langle x^*, x\rangle = 0$ e per continuità per ogni $x \in \overline{\langle M\rangle}$ $\langle x^*, x\rangle = 0$ ovvero $x^* \in Y^{\perp}$. ■

Teorema 5.1.8 (Operatori a codominio chiuso)**.** *Prendiamo X, Y spazi normati e $A \in L(X, Y)$, allora*

$$\operatorname{im} A \text{ chiuso } \Leftrightarrow \operatorname{im} A = {}^{\perp}\ker A^*$$

Dimostrazione. L'implicazione $\Leftarrow$ deriva direttamente dalla proposizione 5.1.5, basta allora dimostrare che $(\operatorname{im} A)^{\perp} =$
$\ker A^*$. Per ogni $y^* \in Y^*$

$$\begin{aligned} y^* \in (\operatorname{im} A)^{\perp} \Leftrightarrow\ \forall x \in X\ \langle y^*, Ax\rangle = 0 \Leftrightarrow\ \forall x \in X\ \langle A^* y^*, x\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow A^* y^* = 0 \Leftrightarrow y^* \in \ker A^* \end{aligned}$$

E applicando la proposizione 5.1.6 otteniamo la tesi. ■

Corollario 5.1.9. *Sia $A \in L(X, Y)$ operatore con* $\operatorname{im} A$ *chiuso, allora*

$$A \text{ suriettivo } \Leftrightarrow A^* \text{ iniettivo}$$

Teorema 5.1.10. *Siano stavolta X, Y spazi di Banach e $A \in L(X, Y)$, allora*

$$A \text{ iniettivo e a codominio chiuso } \Leftrightarrow \exists c > 0 : \|x\| \leq c \|Ax\|$$

Dimostrazione. Sia A iniettivo e a codominio chiuso, allora $\operatorname{im} A$ è uno spazio di Banach e dal teorema della funzione aperta esiste $A^{-1} \in L(\operatorname{im} A, X)$ inversa di A e quindi

$$\|x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|Ax\|$$

Supponiamo ora che esiste $c > 0$ tale che $\|x\| \leq c \|Ax\|$ allora A è immediatamente iniettiva, dobbiamo solo dimostrare che il suo codominio è chiuso. Per ogni $x_n \in X$ tale che $y_n = Ax_n$ tende ad un certo $y \in Y$ vale per ipotesi

$$\|x_n - x_m\| \leq c \|y_n - y_m\|$$

e quindi x_n è una successione di Cauchy che tende ad un certo $x \in X$ (spazio di Banach). Per continuità di A si ha $y = Ax$. ■

Possiamo però generalizzare il risultato precedente anche nel caso di operatori non iniettivi: sia X spazio normato e $N \leq X$ un suo sottospazio *chiuso*, nel capitolo 1 abbiamo visto che lo spazio quoziente X/N è ancora uno spazio vettoriale, vogliamo ora dotarlo di una norma che lo renda anche uno spazio normato.

Definiamo allora su X/N la norma

$$\|x + N\| = \inf_{x-y \in N} \|y\| = \inf_{z \in N} \|x + z\| = d(x, N)$$

Innanzitutto la definizione precedente è ben posta in quanto

$$\begin{aligned} x + N = y + N \Rightarrow \|x + N\| &= \inf_{z \in N} \|x + z\| \\ &= \inf_{z \in N} \|y + x - y + z\| = \inf_{z \in N} \|y + z\| = \|y + N\| \end{aligned}$$

Dimostriamo la disuguaglianza triangolare, le altre le lasciamo al lettore: per ogni $z, z' \in N$

$$\|x + y + N\| \leq \left\|x + y + z + z'\right\| \leq \|x + z\| + \left\|y + z'\right\|$$

questo per ogni scelta di z e z', quindi passando agli estremi inferiori segue la tesi.

Si osserva che l'applicazione lineare canonica

$$\pi_N : x \in X \to x + N \in X/N$$

è banalmente continua.

Teorema 5.1.11. *Se X è uno spazio di Banach e $N \leq X$ sottospazio chiuso allora X/N è ancora di Banach.*

Dimostrazione. Sia $x_n + N$ successione di Cauchy quindi per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $N_k \in \mathbb{N}$ *crescente* tale che per ogni $m, n > N_k$

$$\|x_n - x_m + N\| < \frac{1}{2^k}$$

esisterà allora un $z_k \in N$ tale che

$$\left\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k} + z_k\right\| < \frac{1}{2^k}$$

Definiamo adesso $y_k = x_{N_{k+1}} - x_{N_1} + \sum_{i=1}^k z_i$ essa rimane ancora di Cauchy e pertanto ha un'estratta convergente a y.

Infine si ha

$$\|x_{N_k} - x_{N_1} - y + N\| \leq \left\|x_{N_k} - x_{N_1} - y + \sum_{i=1}^k z_i\right\| = \|y_k - y\|$$

e quindi $x_{N_k} + N$ converge ad $y + x_{N_1} + N$. ■

Definiamo ora l'operatore

$$\mathcal{A} : x + \ker A \in X/\ker A \to Ax \in Y$$

è chiaramente ben definito, lineare e iniettivo e

$$\|\mathcal{A}(x + \ker A)\| = \|A(x + z)\| \leq \|A\| \|x + z\|$$

per ogni $z \in \ker A$ e quindi $\mathcal{A}$ rimane continuo. Infine $\operatorname{im} A = \operatorname{im} \mathcal{A}$.

Adesso abbiamo tutte le carte in regola per generalizzare il teorema precedente:

Teorema 5.1.12. *Siano stavolta X, Y spazi di Banach e $A \in L(X, Y)$, allora*

$$A \text{ a codominio chiuso } \Leftrightarrow \exists c > 0 : d(x, \ker A) \leq c \|Ax\|$$

Teorema 5.1.13. *Siano X, Y spazi di Banach e $A \in L(X, Y)$ a codominio chiuso, allora A^* è a codominio chiuso e inoltre*

$$\operatorname{im} A^* = \ker A^\perp$$

Dimostrazione. Consideriamo $x^* \in Y^*$ e $x \in \ker A$ allora

$$\langle A^* x^*, x\rangle = \langle x^*, Ax\rangle = 0$$

e quindi $\operatorname{im} A^* \subseteq \ker A^\perp$.

Prendiamo ora $x^* \in \ker A^\perp$ ovvero per ogni $x \in \ker A$ $\langle x^*, x\rangle = 0$ e quindi l'applicazione lineare

$$\mathcal{M} : y \in \operatorname{im} A \to \langle x^*, x\rangle \in \mathbb{R} \text{ con } y = Ax$$

è ben definita sullo spazio di Banach $\operatorname{im} A$ (chiuso) dal teorema 5.1.12 esiste $c > 0$ tale che

$$d(x, \ker A) \leq c \left\|Ax\right\| = c \left\|y\right\|$$

allora per ogni $z \in \ker A$ si ha

$$|\mathcal{M}(y)| = |\langle x^*, x\rangle| = |\langle x^*, x + z\rangle| \leq \|x^*\| \, \|x + z\|$$
$$\Rightarrow |\mathcal{M}(y)| \leq \|x^*\| \, d(x, \ker A) \leq c \|x^*\| \, \|y\|$$

e quindi è anche una funzione continua, per Hahn-Banach possiamo estendere $\mathcal{M}$ su tutto Y e quindi $\mathcal{M} \in Y^*$.

Quindi per ogni $x \in X$ $\langle A^*\mathcal{M}, x\rangle = \langle \mathcal{M}, Ax\rangle = \langle x^*, x\rangle$ ovvero $x^* \in \operatorname{im} A^*$ e la dimostrazione è conclusa. ■

5.1.1 Riepilogo relazioni di ortogonalità e complementarità

In questa sezione facciamo un riepilogo di tutte le relazioni ottenute in questa sezione.

- Se X, Y normati e $A \in L(X, Y)$ allora $\operatorname{im} A^\perp = \ker A^*$;
- Se X, Y normati e $A \in L(X, Y)$ allora $\ker A = {}^\perp\operatorname{im} A^*$;
- Se X, Y normati, $A \in L(X, Y)$ con codominio chiuso allora $\operatorname{im} A = {}^\perp\ker A^*$;
- Se X, Y di Banach, $A \in L(X, Y)$ con codominio chiuso allora $\ker A^\perp = \operatorname{im} A^*$;
- Se X, Y normati e $A \in L(X, Y)$ allora A iniettivo $\Leftrightarrow$ A^* suriettivo;
- Se X, Y normati, $A \in L(X, Y)$ con codominio chiuso allora A suriettivo $\Leftrightarrow$ A^* iniettivo.

5.2 Operatori di Fredholm

Definizione 5.2.1. Sia $M \leq X$ sottospazio chiuso, un sottospazio $N \leq X$ è il *supplemento topologico* di M se e solo se N è chiuso e $X = M \oplus N$.

In genere non è detto che esista o meno il supplemento topologico di un sottospazio chiuso né che esso sia unico.

Lemma 5.2.2. *Prendiamo X uno spazio normato. Allora*

1. *Se $x_1, x_2, \dots x_n$ sono linearmente indipendenti in X allora esistono $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \in X^*$ tali che*

$$\langle x_i^*, x_j\rangle = \delta_{i,j}$$

2. *Se $x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*$ sono linearmente indipendenti in X^* allora esistono $x_1, x_2, \dots,$ $x_n \in X$ tali che*
$$\langle x_i^*, x_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Dimostrazione. Dimostriamo i vari punti.

1. Per ogni i vale
$$x_i \notin \langle x_j : j \neq i \rangle = F_i$$
poiché la dimensione di F_i è finita allora per il corollario 4.3.5 F_i è chiuso e dal lemma 4.2.3 esistono $x_i^* \in X^*$ tali che $\langle x_i^*, x_i \rangle = 1$ e $x_i^*(F_i) = \{0\}$.

2. Usiamo l'induzione su n. Per $n = 1$ allora $x_1^* \neq 0$ e quindi la tesi è immediata, supponiamolo valido per $n-1$ quindi esistono $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$ tali che per $i, j < n$ si ha $\left\langle x_i^*, x'_j \right\rangle = \delta_{i,j}$.

   Supponiamo per assurdo che
$$\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker x_i^* \subseteq \ker x_n^*$$
   allora per ogni $x \in X$ il vettore $x' = x - \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_i^*, x \rangle x'_i$ annulla tutte le x_i^* per ipotesi allora annulla anche x_n^* e perciò
$$\langle x_n^*, x \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle x_n^*, x'_i \right\rangle \langle x_i^*, x \rangle \Leftrightarrow x_n^* = \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle x_n^*, x'_i \right\rangle x_i^*$$
   assurdo perché sono linearmente indipendenti.

   Quindi esisterà un certo x_n che annullerà ogni x_i^* per $i < n$ ma $\langle x_n^*, x_n \rangle = 1$, perciò basta porre
$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 - \left\langle x_n^*, x'_1 \right\rangle x_n \\ x_2 &= x'_2 - \left\langle x_n^*, x'_2 \right\rangle x_n \\ &\dots \\ x_{n-1} &= x'_{n-1} - \left\langle x_n^*, x'_{n-1} \right\rangle x_n \\ x_n &= x_n \end{aligned}$$
   e quindi l'ipotesi vale anche per n concludendo l'induzione.

■

Corollario 5.2.3. *Ogni sottospazio di dimensione finita di X ha un supplementare topologico.*

Dimostrazione. I sottospazi $N \leq X$ di dimensione finita sono chiaramente chiusi, consideriamo $x_1, \dots, x_n$ una sua base, per il lemma precedente esistono $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ tali che $x_i^*(x_j) = \delta_{i.j}$. Allora il sottospazio

$$M = \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$$

è chiuso (intersezione di chiusi) e $M \cap N = \{0\}$. Infine per ogni $x \in X$

$$x - \sum_{i=1}^{n} \langle x_i^*, x \rangle \, x_i \in M$$

e perciò $X = M \oplus N$. ■

Corollario 5.2.4. *Sia $N \leq X$ sottospazio chiuso tale che $\dim N^{\perp} = n$ finito, allora esiste un sottospazio B di X di dimensione n tale che $X = N \oplus B$.*

Dimostrazione. Se $x_1^*, \dots, x_n^*$ è una base di $N^{\perp}$ allora

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$$

e quindi la tesi segue dal lemma e dal corollario precedente. ■

Proposizione 5.2.5. *Consideriamo uno spazio topologico X e $R \leq X^*$ tale che esiste $N \leq X$ di dimensione n e $R = N^{\perp}$, allora esiste $S \leq X^*$ di dimensione n tale che $X^* = R \oplus S$.*

Dimostrazione. Analoga alle precedenti. ■

Definizione 5.2.6. Siano X e Y spazi di Banach, un operatore $A \in L(X, Y)$ è *semifredholmiano*, e si indica con $A \in \Phi_+(X.Y)$ se e solo se $\dim \ker A < +\infty$ e $\operatorname{im} A$ è chiuso.

$A \in L(X, Y)$ è invece *fredholmiano*, e si indica con $A \in \Phi(X, Y)$, se e solo se $A \in \Phi_+(X, Y)$ e $A^* \in \Phi_+(Y^*, X^*)$ e il numero $\operatorname{ind} A = \dim \ker A - \dim \ker A^*$ è detto *indice* di A.

Ricordiamo che se X e Y sono spazi di Banach allora $\operatorname{im} A^{\perp} = \ker A^*$.

Proposizione 5.2.7. *Siano X e Y spazi di Banach e $A \in L(X, Y)$. Allora*

$$A \in \Phi(X, Y) \Leftrightarrow A \in \Phi_+(X, Y) \wedge$$
$$\text{\textit{Il supplementare topologico di} } \operatorname{im} A \text{ \textit{ha dimensione finita.}}$$

Dimostrazione. Supponiamo A fredholmiano, allora è anche semifredholmiano e il supplementare topologico di $\operatorname{im} A$ ha la stessa dimensione di $\ker A^*$ per la proposizione precedente.

Viceversa essendo spazi di Banach $\operatorname{im} A^*$ è chiuso mentre la dimensione di $\operatorname{im} A^{\perp}$ coincide con quella del supplementare topologico di $\operatorname{im} A$. ■

Proposizione 5.2.8. *Se X è uno spazio di Banach e M, N due sottospazi chiusi di X tali che $X = M \oplus N$ allora le applicazioni*

$$P_M : m + n \in X \to m \in M$$
$$P_N : m + n \in X \to n \in N$$

sono continue.

Dimostrazione. Ci basta far vedere che il grafico di P_M è chiuso, scegliamo allora $x_n, x \in X$, $y \in M$ tali che $x_n \to x$ e $P_M x_n \to y$ dobbiamo dimostrare che $y = P_M x$. Innanzitutto la successione $x_n - P_M x_n \in N$ converge a $x - y \in N$ per la chiusura di N, ancora $x_n = P_M x_n + (x_n - P_M x_n)$ e passando al limite si ha $P_M x + P_N x = y + (x - y) \Rightarrow P_M x = y$ e dal teorema del grafico chiuso P_M è continua. ■

Teorema 5.2.9. *Siano X, Y spazi di Banach e $A \in \Phi_+(X, Y)$. Allora esiste un sottospazio chiuso $X_0 \leq X$ e posto $A_0 : x \in X_0 \to Ax \in \operatorname{im} A$ si ha A_0 invertibile e $A_0^{-1} \in L(\operatorname{im} A, X_0)$.*

Se inoltre A è fredholmiano allora esiste $\hat{A} \in L(Y, X)$ tale che per ogni $y \in \operatorname{im} A$

$$\hat{A} y = A_0^{-1} y$$

Dimostrazione. Prendiamo X_0 il supplemento topologico di $\ker A$ che è chiuso, quindi si ha $A_0 \in L(X_0, \operatorname{im} A)$. Sia ora $x \in X_0$ tale che $A_0 x = 0$ allora $x \in \ker A \cap X_0 = \{0\}$ e quindi è iniettivo, se ora $y \in \operatorname{im} A$ esiste $x' \in X$ tale che $y = Ax' = A_0(P_{X_0} x')$ e quindi è anche suriettivo. Dal corollario 4.4.4 l'inversa è continua.

Se A è fredholmiano allora $\ker A^* = \operatorname{im} A^\perp$ ha dimensione finita e quindi esiste il supplementare topologico B di $\operatorname{im} A$. La tesi segue osservando che

$$\hat{A} : A_0^{-1} \circ P_{\operatorname{im} A}$$

è continua. ■

Definizione 5.2.10. Poniamo ora X spazio vettoriale e $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ due norme di X. Allora $|\cdot|$ è *più debole* di $\|\cdot\|$ se e solo se ogni successione limitata in $(X, \|\cdot\|)$ ammette un'estratta di Cauchy in $(X, |\cdot|)$

Teorema 5.2.11 (Peetre)**.** *Siano X, Y spazi di Banach e $A \in L(X, Y)$. Allora*

$$A \in \Phi_+(X, Y) \Leftrightarrow \text{ Esiste } c > 0 \text{ e una norma } \|\cdot\|_1 \text{ più debole di } \|\cdot\| \text{ tale che } \|x\| \leq c \|Ax\| + \|x\|_1$$

Dimostrazione. Sia A semifredholmiano, allora esiste il supplementare topologico F di $\ker A$ e possiamo restringere A ad F ottenendo l'operatore $A_{|F}$ lineare continuo invertibile con inversa $B \in L(\operatorname{im} A, F) \Rightarrow \exists c > 0 : \|f\| \leq c \|Af\|$ per ogni $f \in F$.

Per ogni $x \in X$ poniamo $\|x\|_1 = \|P_{\ker A} x\|$ che è ancora una norma su X, allora

$$\|x\| = \|P_F x + P_{\ker A} x\| \leq c \|A(P_F x)\| + \|x\|_1 = c \|Ax\| + \|x\|_1$$

dobbiamo dimostrare che la norma appena definita è più debole di $\|\cdot\|$. Se $\|x_n\|$ è limitata allora per continuità anche $\|x_n\|_1$ è limitata, però $\ker A$ ha dimensione finita e quindi ammette un'estratta convergente in $\ker A$.

Dimostriamo ora l'implicazione inversa. Per ogni $x \in \ker A$ allora $\|x\| \leq \|x\|_1$ con $\|\cdot\|_1$ una norma più debole, quindi ogni successione limitata in $\|\cdot\|$ ha un'estratta di Cauchy in $\|\cdot\|_1$ e quindi anche in $\|\cdot\|$ e quindi le palle chiuse in $\ker A$ sono relativamente sequenzialmente compatte, per il teorema di Riesz allora $\dim \ker A < +\infty$.

Sia ora $x_n \in X$ e $y \in Y$ tale che $Ax_n \to y$ e F il supplementare topologico di $\ker A$ e quindi x_n può essere scomposto univocamente come somma di $z_n \in \ker A$ e $w_n \in F$. Per assurdo $\|w_n\|$ è illimitato allora potremmo trovarne una sottosuccessione che la farebbe tendere a $+\infty$, allora poniamo

$$q_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}$$

e quindi ammette un'estratta q_{n_k} di Cauchy rispetto alla norma debole ma allora

$$\left\|q_{n_i} - q_{n_j}\right\| \leq \frac{\|Aw_{n_i}\|}{\|w_{n_i}\|} + \frac{\left\|Aw_{n_j}\right\|}{\left\|w_{n_j}\right\|} + \left\|q_{n_i} - q_{n_j}\right\|$$

il lettore può constatare allora che per ipotesi segue che q_{n_k} è di Cauchy anche rispetto alla norma iniziale e quindi ammette limite q di norma unitaria. Per continuità però $Aq = 0$ e $q \in \ker A \cap F$ assurdo.

Abbiamo dimostrato così che $\|w_n\|$ è limitata e perciò ammette un'estratta di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ ma è di Cauchy anche rispetto alla norma iniziale e perciò ammette limite $x \in X$. La tesi allora segue per continuità in quanto $y = Ax = \lim_{n\to+\infty} Ax_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} Aw_{k_n}$. ■

5.3 Operatori compatti

Definizione 5.3.1. Siano X, Y spazi normati e $\Lambda : X \to Y$ applicazione lineare, allora Λ è *compatto* se e solo se per ogni $K \subseteq X$ limitato $\overline{\Lambda(K)}$ è compatto.

Proposizione 5.3.2. *Un operatore $\Lambda : X \to Y$ è compatto se e solo se per ogni successione $x_n \in X$ limitata esiste un'estratta n_k tale che Λx_{n_k} converge in Y*

Dimostrazione. Consideriamo un qualunque sottoinsieme K limitato in X e sia $y_n \in \overline{\Lambda(K)}$ una successione generica, allora esiste $x_n \in K$ tale che $\|y_n - \Lambda x_n\| < \frac{1}{n}$, possiamo quindi trovare un'estratta tale che Λx_{n_k} converge ad un certo $y \in \overline{\Lambda(K)}$ e quindi $y_{n_k} \to y$ e $\overline{\Lambda(K)}$ è sequenzialmente compatto, quindi compatto. ■

Proposizione 5.3.3. *Gli operatori compatti sono continui.*

Dimostrazione. Se per assurdo non lo fosse allora esisterebbe una successione $x_n \in X$ con $\|x_n\| = 1$ tale che $\|\Lambda x_n\| \to +\infty$ e quindi non possiede estratte convergenti. ■

Definiamo l'insieme degli operatori compatti come

$$K(X,Y) = \{\Lambda \in L(X,Y) : \Lambda \text{ compatto}\}$$

Proposizione 5.3.4. *Se* $\dim Y < +\infty$ *allora* $K(X,Y) = L(X,Y)$.

Dimostrazione. Dalla continuità segue che $\Lambda(K)$ è limitato per ogni K limitato, quindi $\overline{\Lambda(K)}$, essendo un sottoinsieme chiuso della palla chiusa che è compatta (proposizione 4.3.6) è compatto. ■

Proposizione 5.3.5. *Se* X *è uno spazio normato e* Y *spazio di Banach allora* $K(X,Y)$ *è un sottospazio chiuso di* $L(X,Y)$.

Dimostrazione. È immediato dimostrare che è un sottospazio, ovvero somma e prodotto per uno scalare di operatori compatti rimane compatto. Sia Λ_n successione di operatori compatti convergente in norma a $\Lambda \in L(X,Y)$, ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\epsilon \, \forall x \in X \;\; \|\Lambda_n x - \Lambda x\| \leq \epsilon \|x\|$$

Se prendiamo adesso una successione x_m limitata da $L > 0$ allora dalla compattezza di Λ_n con un procedimento analogo a quello usato nella dimostrazione del teorema di Ascoli-Arzelà esiste una successione x_k^n estratta da x_k^{n-1} (con $x_k^0 = x_k$) tale che

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N(n,\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall m, m' > N(n,\epsilon) \;\; \|\Lambda_n x_m^n - \Lambda_n x_{m'}^n\| < \epsilon$$

Allora per ogni $m, n > \max\{N(N_\epsilon, \epsilon), N_\epsilon\}$ si ha

$$\|\Lambda x_m^m - \Lambda x_n^n\| \leq \|\Lambda x_m^m - \Lambda_{N_\epsilon} x_m^m\| + \|\Lambda_{N_\epsilon} x_m^m - \Lambda_{N_\epsilon} x_n^n\| + \|\Lambda_{N_\epsilon} x_n - \Lambda x_n\| < \epsilon(1 + 2L)$$

poiché vale

$$\left\|\Lambda_{N_\epsilon} x_m^{N_\epsilon} - \Lambda_{N_\epsilon} x_n^{N_\epsilon}\right\| < \epsilon$$

e da questa possiamo ricondurci alla precedente in quanto per ogni $n \geq N_\epsilon$ esiste $n' \geq n$ intero tale che

$$x_n^n = x_{n'}^{N_\epsilon}$$

dato che stiamo lavorando per estratte. Dato che Y è uno spazio di Banach Λ è compatto. ■

Teorema 5.3.6 (Schauder)**.** *Siano* X, Y *spazi normati, allora*

$$T \in K(X,Y) \Rightarrow T^* \in K(Y^*, X^*)$$

Dimostrazione. Consideriamo $y_n^* \in Y^*$ successione limitata da $L > 0$, vogliamo dimostrare che $T^* y_n^*$ è di Cauchy.

Poniamo $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ allora $T(B)$ è relativamente sequenzialmente compatto (la sua chiusura è compatta). Per comodità indichiamo con $f_{|A}$ la restrizione di f su A, poniamo allora

$$\mathcal{F} = \left\{ z_n^* = y_{n|T(B)}^* : n \in \mathbb{N} \right\}$$

classe di funzioni "lineari" continue.

- $\mathcal{F}$ equilimitato. Banalmente $\left\|y^*_{nT(B)}\right\| \leq \|y^*_n\| \leq L$ e quindi per ogni $x \in B$

$$\|z^*_n(Tx)\| \leq L \|T\|$$

- $\mathcal{F}$ equicontinua. Basta dimostrare che

$$\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \, \forall x, y \in T(B) \;\; \|z^*_n(x) - z^*_n(y)\| \leq C \|x - y\|$$

  ma è banale in quanto

$$\|z^*_n(x) - z^*_n(y)\| = \|y^*_n(x) - y^*_n(y)\| \leq \|y^*_n\| \|x - y\| \leq L \|x - y\|$$

Possiamo applicare perciò il teorema di Ascoli-Arzelà ($T(B)$ relativamente sequenzialmente compatto) trovando in tal modo un'estratta che renda $z^*_{n_k}$ di Cauchy ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall i, j > N \, \forall y \in T(B) \;\; \left\|z^*_{n_i}(y) - z^*_{n_j}(y)\right\| \leq \epsilon$$

ovvero per la linearità di T

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall i, j > N \, \forall x \in X \;\; \left\|y^*_{n_i}(Tx) - y^*_{n_j}(Tx)\right\| \leq \epsilon \|x\|$$

e quindi $y^*_{n_i} \circ T = T^*(y^*_{n_i})$ è di Cauchy in X^*. La tesi è immediata poiché la chiusura di sottospazi relativamente sequenzialmente compatti in spazi completi (X^* è di Banach) è compatta. ■

5.4 Teorema del punto fisso di Shauder

Innanzitutto diamo alcuni risultati senza dimostrazione che utilizzeremo più avanti.

Teorema 5.4.1 (del punto fisso di Brouwer)**.** *Sia $D_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ la palla chiusa unitaria rispetto alla norma standard e sia $f : D_1(0) \to D_1(0)$ continua, allora esiste un $x \in D_1(0)$ tale che $f(x) = x$.*

Lemma 5.4.2. *Sia X spazio normato di dimensione finita e $K \subseteq H$ convesso, chiuso e limitato che non sia un singleton. Allora esiste una costante $m \in \mathbb{N}$ ed un omeomorfismo tra K e $D_1(0) \subseteq \mathbb{R}^m$.*

Proposizione 5.4.3. *Sia X spazio normato di dimensione finita e $K \subseteq X$ convesso, chiuso e limitato. Allora ogni applicazione continua $f : K \to K$ ha un punto fisso.*

Dimostrazione. Se $\varphi : K \to D_1(0)$ è l'omeomorfismo del lemma precedente allora $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ soddisfa il teorema di Brouwer. ■

Definizione 5.4.4. Sia V spazio vettoriale e $P \subseteq V$, l'*inviluppo convesso* di P è l'insieme

$$\mathrm{con}(P) = \bigcap \{C \subseteq V : P \subseteq C \wedge C \text{ convesso}\}$$

Invece se V è uno spazio di Banach l'*inviluppo convesso chiuso* di P è l'insieme

$$\overline{\mathrm{con}}(P) = \bigcap \{C \subseteq V : P \subseteq C \wedge C \text{ chiuso convesso}\}$$

Proposizione 5.4.5. *Sia X spazio normato e $K \subseteq X$ non vuoto, allora*

$$\operatorname{con}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N} \wedge x_i \in K \wedge \lambda_i \in [0,1] \wedge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che l'insieme al secondo membro è convesso: scegliamo due suoi elementi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ e $\sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$ e fissiamo $\lambda \in [0,1]$.

Definiamo

$$\eta_k = \begin{cases} \lambda \lambda_k & \text{se } 1 \leq k \leq n \\ (1-\lambda)\mu_{k-n} & \text{se } n+1 \leq k \leq m+n \end{cases}$$

allora

$$\sum_{k=1}^{m+n} \eta_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda \lambda_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda)\mu_j = \lambda + 1 - \lambda = 1$$

Ancora ponendo

$$z_k = \begin{cases} x_k & \text{se } 1 \leq k \leq n \\ y_{k-n} & \text{se } n+1 \leq k \leq m+n \end{cases}$$

chiaramente $z_k \in K$ e

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda)\mu_j y_j = \sum_{k=1}^{m+n} \eta_k z_k$$

quindi l'insieme è convesso. Inoltre esso è contenuto in ogni convesso che contenga anche K e quindi deve coincidere con $\operatorname{con}(K)$. ■

Proposizione 5.4.6. *Sia $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq X$ spazio di Banach allora*

$$\operatorname{con}(K) = \overline{\operatorname{con}}(K)$$

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente e dalla finitezza di K abbiamo

$$\operatorname{con}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \in [0,1] \wedge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Dimostriamo che $\operatorname{con}(K)$ è sequenzialmente compatto (e in particolare chiuso): per ogni successione y_n di suoi elementi possiamo determinare $\lambda_{i,n} \in [0,1]$ tali che $y_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} x_i$ e quindi posso sceglierne un'estratta affinché i coefficienti convergano, ottenendo così un'estratta convergente. Infine la relazione $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ che è soddisfatta per ogni termine della successione per continuità è soddisfatta anche dal limite e quindi il limite dell'estratta giace ancora nello stesso insieme. ■

Proposizione 5.4.7. *Sia X spazio di Banach e $K \subseteq X$, allora*

$$\overline{\operatorname{con}}(K) = \overline{\operatorname{con}(K)}$$

Dimostrazione. Innanzitutto $\operatorname{con}(K) \subseteq \overline{\operatorname{con}}(K)$ poiché è intersezione di un maggior numero di insiemi, per la definizione di chiusura allora $\overline{\operatorname{con}(K)} \subseteq \overline{\operatorname{con}}(K)$.

Dimostriamo adesso che la chiusura di un insieme convesso C è convessa: se x, y appartengono alla chiusura e $\lambda \in [0,1]$ allora esistono $x_n, y_n \in C$ tali che $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Ma

$$\|\lambda x_n + (1-\lambda)y_n - \lambda x - (1-\lambda)y\| \leq \lambda \|x_n - x\| + (1-\lambda)\|y_n - y\|$$

e quindi $\lambda x + (1-\lambda)y$ è il limite di una successione in C e quindi appartiene ancora alla chiusura che risulta anch'essa convessa.

Quindi $\overline{\operatorname{con}}(K) \subseteq \overline{\operatorname{con}(K)}$ ottenendo la tesi. ■

Ricordiamo ora la definizione di spazio metrico precompatto (si veda pagina 23), diciamo che un sottoinsieme non vuoto K di uno spazio normato X è precompatto se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esistono $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$$

Dal teorema di Hausdorff e dalla proposizione 3.1.9 se X è di Banach e K è chiuso e precompatto allora è anche compatto. Dimostriamo il seguente risultato

Lemma 5.4.8. *Sia X spazio normato e $K \subseteq X$ precompatto, allora anche* $\operatorname{con}(K)$ *è precompatto.*

Dimostrazione. Poiché K è precompatto per ogni $\epsilon > 0$ esiste $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq K$ tale che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\epsilon/2}(x_i) \tag{5.4.1}$$

L'insieme $\operatorname{con}(F)$ è un sottoinsieme chiuso e limitato del sottospazio $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ di dimensione finita, quindi $\operatorname{con}(F)$ è sequenzialmente compatto e quindi precompatto, esisteranno allora $y_1, y_2, \ldots, y_m \in \operatorname{con}(F)$ tali che

$$\operatorname{con}(F) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{\epsilon/2}(y_i) \tag{5.4.2}$$

Dimostriamo la proposizione. Sia $z \in \operatorname{con}(K)$ allora esistono $z_1, z_2, \ldots z_k \in K$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in [0,1]$ tali che $\sum_i \lambda_i = 1$ e $\sum_i \lambda_i z_i = z$. Dalla (5.4.1) esistono $u_1, \ldots, u_k \in F$ non necessariamente distinti tali che $\|z_i - u_i\| < \epsilon/2$ per ogni indice i, allora

$$\left\| z - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sfruttando ora la (5.4.2) esiste y_j tale che

$$\|z - y_j\| \leq \left\| z - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i - y_j \right\| < \epsilon$$

e quindi

$$\mathrm{con}(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_\epsilon(y_1)$$

ovvero $\mathrm{con}(K)$ è precompatto. ■

Corollario 5.4.9. *Sia X spazio di Banach e $K \subseteq X$ precompatto, allora $\overline{\mathrm{con}}(K)$ è compatto*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal lemma precedente e dalla proposizione 3.1.9. ■

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema più importante di questa sottosezione:

Teorema 5.4.10 (del punto fisso di Shauder)**.** *Sia X spazio di Banach e K sottoinsieme non vuoto compatto convesso, allora ogni applicazione continua $f : K \to K$ ha un punto fisso.*

Dimostrazione. Per ogni $m \in M$ esistono $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tali che $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{1}{m}}(x_i)$, poniamo $K_m = \mathrm{con}(\{x_i : i \leq n\}) \subseteq K$. Definiamo la funzione

$$\varphi_m : x \in K \to \frac{\sum_{i=1}^n d(x, K \setminus B_{\frac{1}{m}}(x_i))x_i}{\sum_{i=1}^n d(x, K \setminus B_{\frac{1}{m}}(x_i))} \in K_m$$

Per come sono stati definiti gli x_i il denominatore non si annulla mai e per la 3.2.4 è continuo. Quindi

$$\|x - \varphi_m(x)\| \leq \frac{\sum_{i=1}^n d(x, K \setminus B_{\frac{1}{m}}(x_i)) \, \|x - x_i\|}{\sum_{i=1}^n d(x, K \setminus B_{\frac{1}{m}}(x_i))}$$

ricordiamo che $d(x, K) \setminus B_{\frac{1}{m}}(x_i)) > 0 \Leftrightarrow x \in B_{\frac{1}{m}}(x_i) \Leftrightarrow \|x - x_i\| \leq \frac{1}{m}$ e quindi

$$\|x - \varphi_m(x)\| \leq \frac{1}{m}$$

Ora alla restrizione di $\varphi \circ f$ su K_m convesso chiuso, limitato e contenuto in un sottospazio di dimensione finita può essere applicato il teorema di Bouwer, esisterà $y_m \in K_m \subseteq K$ tale che $y_m = \varphi[f(y_m)]$. Esisterà allora un'estratta di y_m che convergerà ad un certo $y \in K$ ma dalla

$$\|y_m - f(y_m)\| = \|\varphi[f(y_m)] - f(y_m)\| \leq \frac{1}{m}$$

segue che $f(y) = y$ completando così la tesi. ■

Teorema 5.4.11 (Leray-Schauder). *Sia sempre X spazio di Banach ed $f : X \to X$ una generica funzione continua che manda successioni limitate in successioni con un'estratta convergente in X. Supponiamo anche che l'insieme*

$$\{x \in X : \exists \lambda \in [0,1] \text{ tale che } x = \lambda f(x)\}$$

è limitato, allora f possiede un punto fisso.

Dimostrazione. Sia $M > 0$ la costante che delimita tale insieme ovvero

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \exists \lambda \in [0,1] \text{ tale che } x = \lambda f(x)\} \subseteq B_M(0)$$

Definiamo l'applicazione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } \|f(x)\| \leq M \\ \frac{M}{\|f(x)\|} f(x) & \text{se } \|f(x)\| > M \end{cases}$$

la funzione g potremmo vederla anche come applicazione da $D_M(0)$ in sé stesso e continua a mandare successioni chiuse in successioni con un'estratta convergente. Posto $K = \overline{\text{con}}(g(D_M(0))) \subseteq D_M(0)$ allora dal corollario 5.4.9 K è convesso e compatto poiché $g(D_M(0))$ è precompatto, difatti

$$y_n \in g(D_M(0)) \to y_n = g(x_n) \text{ con } \|x_n\| < M \Rightarrow y_n \text{ ha estratta di Cauchy}$$

e dal teorema 3.2.5 è precompatto. Perciò $g(K) \subseteq K$ e possiamo porre $g : K \to K$, applichiamo il teorema del punto fisso di Schauder e quindi esisterà un punto fisso x di g.

Se $\|f(x)\| \leq M$ allora è un punto fisso anche per f altrimenti si avrebbe $x = \frac{M}{\|f(x)\|} f(x) = \lambda f(x)$ e quindi $x \in \mathcal{A}$, ma allora $M > \|x\| = \|g(x)\| = M$ il che è assurdo. ∎

5.5 Operatori di Riesz

Definizione 5.5.1. Consideriamo ora uno spazio di Banach X. Un operatore $A \in L(X, X)$ è di *Riesz* se e solo se esiste $K \in K(X, X)$ tale che

$$A = I - K$$

con I l'operatore identico.

Proposizione 5.5.2. *Sia $L \in L(X, X)$ allora*

$$(I - L)^* = I - L^*$$

Dimostrazione. per ogni $x \in X$ e $f \in X^*$

$$[(I - L)^* f](x) = f(x - Lx) = f(x) - f(Lx) = [(I - L^*)f](x)$$

∎

Corollario 5.5.3. *Se A è un operatore di tipo Riesz allora anche A^* è di tipo Riesz.*

Proposizione 5.5.4. *Gli operatori di Riesz sono fredholmiani.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che ogni operatore A di Riesz è semifredholmiano in quanto anche l'aggiunto è di Riesz.

Sia $A + K = I$ con K compatto, allora la norma $\|x\|_1 = \|Kx\|$ è chiaramente più debole di $\|\cdot\|$ quindi $\|x\| \leq \|Ax\| + \|x\|_1$ e la tesi segue da Peetre. ■

Teorema 5.5.5 (Primo teorema di Fredholm)**.** *Se X è uno spazio di Banach allora l'operatore di Riesz A è iniettivo se e solo se è suriettivo.*

Dimostrazione. Per assurdo $A = I - K$ è iniettivo ma non suriettivo, essendo semifredholmiano $X_1 = A(X) \leq X$ è chiuso, dimostriamo che $A(X_1) < X_1$. Infatti se fossero uguali e $x \in X \setminus X_1$ allora $Ax \in X_1 = A(X_1)$ e quindi esiste $y \in X_1$ con $Ax = Ay$ assurdo poiché A è iniettiva.

Possiamo quindi costruire una successione decrescente di sottospazi chiusi $X_n = A(X_{n-1}) < X_{n-1}$ in quanto la restrizione di operatori di Riesz su sottospazi chiusi rimane di Riesz. Dal lemma 4.3.7 esiste una successione $x_n \in E_{n-1}$ di norma unitaria con $d(x_n, E_n) \geq \frac{1}{2}$, prendiamo ora due interi $i < j$ allora

$$X_j < X_{j-1} \leq X_i < X_{i-1}$$

e

$$\|Kx_i - Kx_j\| = \|Ax_j - Ax_i + x_i - x_j\| \geq d(x_i, X_i) \geq \frac{1}{2}$$

ovvero Kx_n non ammette estratte di Cauchy raggiungendo così un assurdo che può essere risolto solo supponendo A suriettivo.

Vivecersa se A è suriettivo dalle relazioni di ortogonalità A^* è iniettivo e per il punto precedente A^* è suriettiva e perciò $\{0\} = {}^{\perp}\mathrm{im}\, A^* = \ker A$. ■

Teorema 5.5.6 (Secondo teorema di Fredholm)**.** *Sia $A = I - K$ di Riesz sullo spazio di Banach X, allora*

$$A \text{ iniettivo } \Leftrightarrow A^* \text{ suriettivo } \Leftrightarrow A^* \text{ iniettivo } \Leftrightarrow A \text{ suriettivo}$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla dimostrazione del teorema precedente. ■

Il seguente teorema è conosciuto anche come *teorema indice zero.*

Teorema 5.5.7 (Terzo teorema di Fredholm)**.** *Per ogni operatore $A = I - K$ di Riesz vale* $\mathrm{ind}\, A = 0$.

Dimostrazione. Prendiamo $m = \dim\ker A$ e $n = \dim\ker A^*$, se $n = 0$ dal secondo teorema di Fredholm anche $m = 0$ e viceversa, quindi possiamo supporli entrambi positivi. Due casi

Supponiamo $n < m$, sia B il supplementare topologico di $\ker A$ e S il supplementare topologico di $\mathrm{im}\, A$ con $\dim S = m$ poiché $\mathrm{im}\, A = {}^{\perp}\ker A^*$.

Prendiamo $x_1, \ldots, x_n$ base di $\ker A$ e $y_1, \ldots, y_m$ base di S e ricordiamo che le proiezioni $P_{\ker A}$ e P_B sono continue. Ora definiamo l'applicazione

$$K_1 : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + x_B \in \ker A \oplus B \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \in X$$

che è lineare e continua, è anche compatto poiché $\operatorname{im} K_1$ ha dimensione finita. Posto $A_1 = A - K_1$ è di Riesz.

Dimostriamo che

- A_1 è iniettiva. Per ogni $x \in \ker A_i$

$$x - Kx - K_1 x = 0 \Rightarrow x - Kx \in S \cap \operatorname{im} A \Rightarrow x \in \ker A \cap B \Rightarrow x = 0$$

- A_1 non è suriettivo. Per assurdo esiste $x \in X$ tale che $A_1 x = y_m$ ovvero $Ax = y_m + sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \in S \cap \operatorname{im} A$ ma è assurdo poiché gli y_i sono indipendenti e $\alpha_m = 1$.

Ciò però porta ad un assurdo per il primo teorema di Fredholm, e questo assurdo è nato nell'aver posto $n < m$.

Supponiamo infine $m < n$, costruiamo l'operatore

$$K_2 : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + x_B \in \ker A \oplus B \to \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i \in X$$

e $A_2 = A - K_2$ è ancora di Riesz. Dimostriamo che

- A_2 è suriettiva. Infatti per ogni $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i + y_B \in S \oplus \operatorname{im} A = X$ esiste $x_B \in B$ tale che $y_B = A x_B$ poiché B è il supplemento topologico di $\ker A$. Quindi l'immagine di
$$-\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + x_B$$
coincide con y.

- A_2 non è iniettiva. Difatti $A_2(x_n) = A(x_n) = 0$ poiché x_n è un elemento della base del kernel di A.

Abbiamo quindi raggiunto di nuovo un assurdo, perciò deve per forza valere $m = n$. ■

Rimettendo insieme tutti i risultati precedenti otteniamo il seguente

Teorema 5.5.8 (dell'alternativa di Fredholm). *Sia X spazio di Banach, $K \in K(X, X)$ e $A = I - K$ operatore di Riesz. Allora vale una ed una sola trale seguenti affermazioni:*

1. $\ker A = \{0\}$, $\operatorname{im} A = X$, $\ker A^* = \{0\}$ *e* $\operatorname{im} A^* = X^*$*;*
2. $\dim \ker A = \dim \ker A^* \in \mathbb{N}$ *e* $\operatorname{im} A = {}^{\perp}\ker A^*$, $\operatorname{im} A^* = \ker A^{\perp}$.

Oppure in maniera analoga

1. *Le equazioni in x e x^**

$$Ax = y$$
$$A^*x^* = y^*$$

Hanno un'unica soluzione per ogni $y \in X$ e per ogni $y^* \in X^*$.

2. *Le soluzioni delle equazioni in x e x^**

$$Ax = 0$$
$$A^*x^* = 0$$

sono infinite e generano due sottospazi di dimensione finita di X e X^* con la stessa dimensione.

5.6 Teoria spettrale

Definizione 5.6.1. Sia $T \in L(X, X)$ definito si X spazio di Banach, il *risolvente* di T è l'insieme

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I \text{ è invertibile da } X \text{ in } X\}$$

Lo *spettro* di T è l'insieme $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$, mentre lo *spettro puntuale* di T è l'insieme

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I \text{ non è iniettiva su } X\}$$

Definizione 5.6.2. Gli elementi di $\sigma_p(T)$ sono detti *autovalori* di T, mentre per ogni $\lambda \in \sigma_p(T)$ un elemento $x \in X \setminus \{0\}$ è un *autovettore* di T associato a λ se e solo se

$$Tx = \lambda x$$

Gli autovettori associati ad un particolare autovalore λ formano un sottospazio vettoriale, se esso ha dimensione finita la sua dimensione è detta *molteplicità geometrica* di λ.

Definizione 5.6.3. Lo *spettro continuo* di T è l'insieme

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T) : (T - \lambda I)(X) \text{ è denso in } X\}$$

mentre lo *spettro residuo* di T è l'insieme

$$\sigma_r(T) = \sigma(T) \setminus [\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)]$$

Proposizione 5.6.4. *Lo spettro è compatto ed è contenuto in $[-\|T\|, \|T\|]$.*

Dimostrazione. Prendiamo $|\lambda| > \|T\|$ e per ogni $y \in X$ l'operatore

$$\mathcal{C} : x \in X \to \frac{1}{\lambda}(Tx - y)$$

è una contrazione e quindi ammette un unico punto fisso, quindi λ si trova nel risolvente.

Dimostriamo ora che $\rho(T)$ è aperto: per ogni $\lambda_0 \in \rho(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$y = Tx - \lambda x \Leftrightarrow y + (\lambda - \lambda_0)x = Tx - \lambda_0 x \Leftrightarrow x = (T - \lambda_0 I)^{-1}[y + (\lambda - \lambda_0)x]$$

L'inversa di operatori invertibili tra spazi di Banach è ancora continua perciò posto

$$|\lambda - \lambda_0| < \left\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\right\|$$

possiamo riapplicare il teorema di Banach-Cacioppoli e perciò lo spettro è chiuso. ∎

Lemma 5.6.5. *Autovettori associati a diversi autovalori sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione. Per $n = 1$ banalmente vero, quindi supponiamolo vero per $n - 1$ allora siano $x_1, \ldots, x_n$ autovettori associati rispettivamente a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tutti distinti, siano allora $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i = 0$$

Inoltre

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_n x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda) x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ per ogni } i < n$$

ovvero $\alpha_n x_n = 0$ ed essendo x_n non nullo anche $\alpha_n = 0$ e sono linearmente indipendenti. ∎

Proposizione 5.6.6. *Se $T \in K(X, X)$ allora*

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$$

Se poi X ha dimensione infinita allora $0 \in \sigma(T)$.

Dimostrazione. Se $0 \notin \sigma(T)$ allora T^{-1} è continuo e $I = T \circ T^{-1}$ rimane compatto e quindi le palle chiuse sono sequenzialmente compatte, ovvero $\dim X < +\infty$.

Se ora $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ allora $I - \frac{1}{\lambda}T$ è un operatore di Riesz non invertibile, perciò non è né iniettiva né suriettiva e quindi $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$. ∎

Proposizione 5.6.7. *Sia $T \in K(X, X)$ con X di Banach allora l'unico punto di accumulazione di $\sigma(T) \setminus \{0\}$ è proprio 0.*

Dimostrazione. Sia $\lambda_n \in \sigma_n(T) \setminus \{0\}$ convergente ad un certo $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia x_n autovettore di λ_n. Definiamo

$$X_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

ed essendo linearmente indipendenti $X_{n-1} < X_n$ perciò esiste $y_n \in X_n$ di norma 1 e $d(y_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$.

Dimostriamo che $(T - \lambda_n I)(X_n) \leq X_{n-1}$, infatti

$$(T - \lambda_n I)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n)x_i \in X_{n-1}$$

quindi per $m < n$ si ha $X_{m-1} < X_m \leq X_{n-1} < X_n$ e

$$\left\| \frac{Ty_m}{\lambda_m} - \frac{Ty_n}{\lambda_n} \right\| = \left\| \frac{Ty_m - \lambda_m y_m}{\lambda_m} - \frac{Ty_n - \lambda_n y_n}{\lambda_n} + y_m - y_n \right\| \geq \frac{1}{2}$$

Se ora λ_n non tendesse a 0 allora esiste $L > 0$ tale che $|\lambda_n| > L$ per n abbastanza grande e quindi, a meno di passare ad un'estratta, $\frac{1}{\lambda_n}$ è di Cauchy e

$$\left\| \frac{Ty_m}{\lambda_m} - \frac{Ty_n}{\lambda_n} \right\| = \left\| \frac{Ty_m}{\lambda_m} - \frac{Ty_n}{\lambda_m} + \frac{Ty_n}{\lambda_m} - \frac{Ty_n}{\lambda_n} \right\| \leq \frac{\|Ty_m - Ty_n\|}{L} + \left| \frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\lambda_n} \right| \|T\|$$

raggiungendo un assurdo poiché T è un operatore compatto. Quindi l'unico valore a cui una successione di autovalori può convergere è 0. ■

Corollario 5.6.8. *Lo spettro di un operatore compatto T è al più numerabile.*

Dimostrazione. Innanzitutto $\sigma_p(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$ inoltre

$$\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \cap \bigcup_{i=2}^{n} \left(\left[-\|T\|, -\frac{\|T\|}{n} \right] \cup \left[\frac{\|T\|}{n}, \|T\| \right] \right)$$

e ogni insieme nella forma $\sigma_p(T) \cap \left(\left[-\|T\|, -\frac{\|T\|}{n} \right] \cup \left[\frac{\|T\|}{n}, \|T\| \right] \right)$ deve essere necessariamente finito. Quindi lo spettro è al più numerabile. ■

Capitolo 6

Spazi di Hilbert

La maggior parte delle dimostrazioni contenute nel seguente capitolo non sono state trattate durante il corso di Analisi Funzionale, le uniche necessarie al superamento dell'esame sono raccolte nella sezione 6.5 di questo capitolo.

Ciononostante le definizioni e gli enunciati di alcuni teoremi sono necessari per la comprensione degli argomenti trattati durante il corso, le dimostrazioni verranno perciò inserite per completezza.

6.1 Spazi prehilbertiani e di Hilbert

Definizione 6.1.1. Sia H spazio vettoriale reale, un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ è un *prodotto scalare* se e solo se valgono

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$;
2. Per ogni $u, v, w \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$;
3. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

Se H è uno spazio prehilbertiano allora definiamo

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

inoltre vale

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle$$

Proposizione 6.1.2 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.** *Per ogni $x, y \in H$ si ha*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ allora vale

$$0 \leq \|x - \lambda y\|^2 = \|y\|^2 \lambda^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \|x\|^2$$

quindi il discriminante $(\langle x, y \rangle)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$ deve essere necessariamente minore o uguale a 0. ■

Proposizione 6.1.3. *Per ogni $x, y \in H$ si ha*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Dimostrazione.

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

∎

Quindi ogni spazio prehilbertiano è anche uno spazio normato.

Definizione 6.1.4. Uno spazio prehilbertiano è *di Hilbert* se e solo se il relativo spazio normato è di Banach.

Teorema 6.1.5. *Sia X uno spazio normato, allora esiste un prodotto scalare su X che lo renda uno spazio prehilbertiano se e solo se per ogni $x, y \in X$ vale l'uguaglianza del parallelogramma*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

con prodotto scalare

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

Dimostrazione. Dimostreremo solo l'implicazione da sinistra a destra. Essendo dotato di prodotto scalare allora

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

ottenendo la tesi. ∎

Sia $x \in H$ elemento fissato, allora l'applicazione

$$L_x : y \in H \to \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$$

è lineare per definizione di prodotto scalare, continua dalla disuguaglianza di Schwarz di norma esattamente $\|x\|$ in quanto $L_x(x) = \|x\|^2$. Possiamo allora affermare che se H è uno spazio prehilbertiano allora è isomorfo ad un sottospazio del suo duale, in formule

$$H \leq H^*$$

6.2 Proiezioni ortogonali

Definizione 6.2.1. Due elementi $x, y \in H$ con H spazio prehilbertiano sono *ortogonali* se e solo se $\langle x, y\rangle = 0$ e lo indichiamo con la notazione $x \perp y$.

Sia inoltre $U \subseteq H$ allora $U^p = \{x \in H : x \perp y \forall y \in U\}$ che è sempre un sottospazio prehilbertiano chiuso.

Ricordando la definizione 5.1.4 allora per ogni $x \in H$

$$x \in U^p \Leftrightarrow L_x \in U^\perp$$

quindi vedendo H come sottospazio del suo duale H^* allora $U^p \leq U^\perp$.

Proposizione 6.2.2. *Sia $U \subseteq H$ prehilbertiano allora*

$$U^p = \overline{\langle U \rangle}^p$$

Dimostrazione. Chiaramente $U^p \supseteq \overline{\langle U \rangle}^p$, viceversa se $x \in U^p$ allora $U \subseteq \ker L_x \Leftrightarrow \overline{\langle U \rangle} \leq \ker L_x \Leftrightarrow x \in \overline{\langle U \rangle}^p$ e quindi la tesi. ∎

quindi ci possiamo limitare a considerare esclusivamente i sottospazi chiusi.

Proposizione 6.2.3. *Se $x \perp y$ allora $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Teorema 6.2.4. *Sia H spazio di Hilbert e M un suo sottoinsieme chiuso non vuoto e convesso, allora esiste un unico elemento x di M di norma minima.*

Dimostrazione. Prendiamo $\delta = \inf \{\|x\| : x \in M\}$ quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $y_n \in M$ tale che $\delta \leq \|y_n\| < \delta + \frac{1}{n}$ e quindi

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 = 2\|y_m\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|y_m + y_n\|^2 &= 4\left(\frac{\|y_m\|^2 + \|y_n\|^2}{2} - \left\|\frac{y_m + y_n}{2}\right\|^2\right) \\ &\leq 4\delta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) + 2\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

per convessità, e quindi è una successione di Cauchy.

Poiché H è uno spazio di Hilbert allora la successione convergerà ad un certo $x \in M$ tale che $\|x\| = \delta$.

Se per assurdo esistessero due elementi $x, y \in M$ di norma minima allora sempre per convessità vale

$$\|x - y\|^2 = 4\left(\frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2\right) \leq 0$$

e quindi $x = y$. ∎

Corollario 6.2.5. *Sia H spazio di Hilbert e M un suo sottoinsieme chiuso non vuoto e convesso. Prendiamo inoltre $x \in H$ allora esiste un unico elemento y di M che minimizza la quantità $\|z - x\|$ al variare di z in M.*

L'elemento y è detto proiezione *di x su M e lo indicheremo con $\tilde{x}$.*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente all'insieme $M - x$ che rimane ancora chiuso e compatto (proprietà degli spazi vettoriali topologici). ∎

Proposizione 6.2.6. *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente allora $\tilde{x}$ è la proiezione di x su M se e solo se per ogni $y \in M$*

$$\langle x - \tilde{x}, y - \tilde{x} \rangle \leq 0$$

Dimostrazione. Se $M = \{\tilde{x}\}$ allora è banale, quindi possiamo supporre che esistano almeno due elementi distinti in M.

Se $\tilde{x}$ è la proiezione di x su M sia $y \in M \setminus \{\tilde{x}\}$ e definiamo l'applicazione

$$\varphi : t \in [0,1] \to \|x - [(1-t)\tilde{x} + ty]\|^2$$

che ha minimo in $t = 0$. Infine

$$\varphi(t) = \|x - \tilde{x} - t(y - \tilde{x})\|^2 = \|x - \tilde{x}\|^2 - 2t \langle x - \tilde{x}, y - \tilde{y} \rangle + t^2 \|y - \tilde{x}\|$$

che ha derivata

$$\varphi'(t) = -2t \langle x - \tilde{x}, y - \tilde{y} \rangle + 2t \|y - \tilde{x}\|$$

e perciò deve essere $\varphi'(0) \geq 0$.

Supponendo ora che vale la seconda relazione $\varphi'(0) \geq 0$ e $\varphi''(x) > 0 \Rightarrow \varphi'$ strettamente crescente e quindi $\varphi(0) < \varphi(1)$ ovvero $\|x - \tilde{x}\| < \|x - y\|$. ■

Corollario 6.2.7. *Sia $M \leq H$ sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert allora, fissato $x \in H$ $\tilde{x}$ è la proiezione di x su M se e solo se*

$$x - \tilde{x} \in M^p$$

Dimostrazione. È immediato constatare che se vale $x - \tilde{x} \in M^p$ allora $\langle x - \tilde{x}, y - \tilde{x} \rangle = 0$ e quindi è una proiezione. Viceversa supponiamo che valga $\langle x - \tilde{x}, y - \tilde{x} \rangle \leq 0$ per ogni $y \in M$ allora essendo M sottospazio

$$\langle x - \tilde{x}, z \rangle = \langle x - \tilde{x}, (z + \tilde{x}) - \tilde{x} \rangle \leq 0$$

ma

$$\langle x - \tilde{x}, -z \rangle = \langle x - \tilde{x}, (\tilde{x} - z) - \tilde{x} \rangle \leq 0$$

e perciò $\langle x - \tilde{x}, z \rangle = 0$. ■

Proposizione 6.2.8. *Sia H spazio di Hilbert e $M \leq H$ sottospazio vettoriale diverso da $\{0\}$ e da H, allora esistono e sono uniche le applicazioni lineari continue $P : X \to M$ e $Q : X \to M^p$ tali che*

$$x = Px + Qx$$

Inoltre $\|P\| = \|Q\| = 1$.

Dimostrazione. Definiamo innanzitutto l'applicazione P nel seguente modo

$$P : x \in H \to \tilde{x} \in M$$

dal corollario precedente allora $\langle x - Px, z\rangle = 0$ per ogni $z \in M$ e Px è l'unico elemento che lo verifica.

Allora presi $x, y \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ osserviamo che per ogni $z \in M$

$$\langle \alpha x + \beta y - \alpha Px - \beta Py, z\rangle = \alpha \langle x - Px, z\rangle + \beta \langle y - Py, z\rangle = 0$$

e quindi $\alpha Px + \beta Py = P(\alpha x + \beta y)$ e P soddisfa la proprietà di linearità. Posto invece $Qx = x - Px$ allora Q è ancora lineare ed è contenuto interamente in M^p sempre per il corollario 6.2.7.

Supponiamo adesso che esistano $y \in M$, $z \in M^p$ tali che $y + z = Px + Qx$ allora $y - Px = Qx - Z \in M \cap M^p = \{0\}$ ovvero $y = Px$ e $z = Qx$ garantendo l'unicità.

Per concludere osserviamo che per ogni $x \in H$ vale

$$\|x\|^2 = \|Px + Qx\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 + 2\langle Px, Qx\rangle = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$$

da cui segue la continuità delle proiezioni con norma $\|P\| \leq 1$ e $\|Q\| \leq 1$. Poiché M è diverso dal sottospazio banale e P fissa gli elementi di M allora $\|P\| = 1$. Poiché M è chiuso e diverso da H allora M^p è diverso da $\{0\}$, infatti preso $z \in H \setminus M$ allora $y = Qz = z - Pz$ deve essere necessariamente diverso dal vettore nullo ed essendo $y = Qy$ la norma di Q vale anch'essa 1. ■

Corollario 6.2.9 (Teorema di Pitagora)**.** *Preso H spazio di Hilbert e $x \in H$ un suo generico elemento, allora*

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$$

Corollario 6.2.10. *Se H spazio di Hilbert e M sottospazio chiuso, allora $(M^p)^p = M$.*

Dimostrazione. Banalmente $M \subseteq (M^p)^p$, sia $x \in (M^p)^p$ e P, Q le proiezioni riferite al sottospazio chiuso M. Perciò

$$0 = \langle x, Qx\rangle = \langle Px, Qx\rangle + \langle Qx, Qx\rangle = \|Qx\|^2$$

ovvero $x = Px \in M$. ■

Teorema 6.2.11 (Rappresentazione di Riesz)**.** *Se H è uno spazio di Hilbert allora per ogni $f \in H^*$ esiste un unico $w \in H$ tale che $\|f\| = \|w\|$ e per ogni $x \in H$*

$$f(x) = \langle w, x\rangle$$

In altre parole esiste un'isometria lineare invertibile tra H e H^*.

Dimostrazione. L'unicità è immediata da verificare, dimostreremo quindi solo l'esistenza di tale elemento. Supponiamo inoltre che f non sia identicamente nulla, esisterà allora un certo $z \in (\ker f)^p$ non nullo tale che $f(z) = 1$.

Prendiamo ora $x \in H$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ generici, banalmente $x - f(x)z \in \ker f$ da cui

$$\langle \alpha z, x\rangle = \langle \alpha z, f(x)z\rangle = \alpha f(x) \|z\|^2$$

la sostituzione $\alpha = \frac{1}{\|z\|^2}$ conclude la dimostrazione poiché non dipende in alcun modo da x. ■

Corollario 6.2.12. *Gli spazi di Hilbert sono spazi normati riflessivi.*

Dimostrazione. H è isomorfo a H^* che è ancora uno spazio di Hilbert, quindi H è isomorfo anche a H^{**}. ■

Corollario 6.2.13. *Se H è uno spazio di Hilbert allora per ogni $M \leq H$ M^p è isomorfo a $M^\perp$ e per ogni $U \leq H^*$ sottospazio chiuso esiste un altro sottospazio chiuso $M \leq H$ isomorfo a U tale che ${}^\perp U = M^p$.*

Per gli spazi di Hilbert quindi i tre sottospazi M^p, $M^\perp$ e ${}^\perp M$ coincidono a meno di isometrie invertibili.

6.3 Serie di Fourier in spazi di Hilbert

Definizione 6.3.1. Sia H spazio di Hilbert e S sottoinsieme non vuoto. S è un *sistema ortonormale* se e solo se per ogni $a, b \in S$ valgono le relazioni $\langle a, b\rangle = 0 \Leftrightarrow a \neq b$ e $\|a\| = \|b\| = 1$.

Consideriamo adesso il sistema ortonormale $S = \{u_\alpha \in H : \alpha \in A\}$ con A l'insieme degli indici, definiamo per ogni $x \in H$ l'applicazione

$$\hat{x} : \alpha \in A \to \langle x, u_\alpha\rangle \in \mathbb{R}$$

possiamo munire l'insieme A di una struttura di spazio di misura, scegliendo come σ-algebra l'insieme delle parti di A e la misura contante μ. Così per ogni applicazione $\varphi : A \to [0, +\infty]$ poniamo

$$\sum_{\alpha\in A} \varphi(\alpha) = \int_A \varphi d\mu = \sup\left\{\sum_{\alpha\in A'} \varphi(\alpha) : A' \subseteq A \wedge A' \text{ finito}\right\}$$

Teorema 6.3.2 (Disuguaglianza di Bessel)**.** *Per ogni $x \in H$ vale la disuguaglianza*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{\alpha\in A} |\hat{x}(\alpha)|^2$$

Dimostrazione. Sia $A' \subseteq A$ sottoinsieme finito, $M = \langle u_\alpha : \alpha \in A' \rangle$ e $\tilde{x} = \sum_{\alpha \in A'} \hat{x}(\alpha) u_\alpha$ che appartiene ad M. Da quanto detto nel capitolo degli spazi normati M è chiuso poiché ha dimensione finita e per ogni $\alpha \in A'$

$$\langle x - \tilde{x}, u_\alpha \rangle = \langle x, u_\alpha \rangle - \hat{x}(\alpha) = 0$$

ovvero $\tilde{x} = Px$ e iterando il teorema di Pitagora otteniamo la disuguaglianza $\|x\|^2 \geq \sum_{\alpha \in A'} |\hat{x}(\alpha)|^2$.

Passando all'estremo superiore otteniamo così la tesi. ■

Corollario 6.3.3. *Per ogni $x \in H$ allora $\hat{x} \in l^2(A) = L^2 (A, \mathcal{P}(A), \mu)$*

Definiamo allora l'applicazione

$$\mathcal{F} : x \in H \to \hat{x} \in l^2(A)$$

essa è lineare e continua e fissa gli elementi di $\langle S \rangle$, in particolare risulta *iniettiva* su questo sottospazio.

Teorema 6.3.4 (Riesz-Fischer)**.** *L'applicazione $\mathcal{F}$ definita come sopra è suriettiva.*

Dimostrazione. Prendiamo $\varphi(\alpha)$ una qualunque funzione a quadrato sommabile e per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo gli insiemi

$$A_n = \left\{ |\varphi| > \frac{1}{n} \right\}$$

dalle proprietà degli integrali possiamo verificare che

$$\|\varphi\|^2_{l^2(A)} \geq \int_{A_n} |\varphi|^2 d\mu \geq \frac{\mu(A_n)}{n^2} \Rightarrow A_n \text{ è finito}$$

definiamo la successione

$$x_n = \sum_{\alpha \in A_n} \varphi(\alpha) u_\alpha \in \langle S \rangle$$

Dimostriamo innanzitutto che $\hat{x_n}$ converge in norma $l^2(A)$ ad φ, per ogni $\alpha \in A$ possono accadere due casi:

- Se $\varphi(\alpha) \neq 0$ allora per $n \in \mathbb{N}$ grande abbastanza si ha $\hat{x_n}(\alpha) = \varphi(\alpha)$, altrimenti $\hat{x_n}(\alpha) = 0$;
- Se $\varphi(\alpha) = 0$ allora $\hat{x_n}(\alpha) = 0 = \varphi(\alpha)$.

quindi $\hat{x_n}$ converge puntualmente a $\varphi(\alpha)$ e inoltre $|\hat{x_n} - \varphi|^2 \leq |\varphi|^2 \in l^1$ e applicando il teorema della convergenza dominata segue che $\hat{x_n}$ converge in norma l^2 ad φ.

Poiché F è un'isometria su $\langle S \rangle$ allora

$$\|x_m - x_n\| = \|\hat{x_m} - \hat{x_n}\|_{l^2(A)}$$

e quindi la successione x_n è di Cauchy e convergerà ad un certo $x \in H$ per completezza. Dalla continuità di $\mathcal{F}$ sgue immediatamente che $\mathcal{F}(x) = \varphi$. ■

Osservazione. Sia $x \in H$, posto $\varphi = \hat{x}$ allora la successione x_n ottenuta nel teorema 6.3.4 di solito *non* converge a x ma alla *proiezione* di x su $M = \overline{\langle S \rangle}$.

Infatti se x_n converge a $y \in H$ allora $y \in M$ e $\langle x - y, u_\alpha \rangle = x \hat{-} y(\alpha) = \hat{x}(\alpha) - \hat{y}(\alpha) = 0$.

Proposizione 6.3.5. *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente ci ha* $\ker \mathcal{F} = S^\perp$.

Dimostrazione.

$$z \in \ker \mathcal{F} \Leftrightarrow \hat{z}(\alpha) = 0 \text{ per ogni } \alpha \in A \Leftrightarrow \langle z, u_\alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow z \in S^\perp$$

∎

6.3.1 Basi ortonormali

Definizione 6.3.6. Un sistema ortonormale S è una *base ortonormale* se e solo se risulta massimale rispetto all'inclusione.

Dal lemma di Zorn segue immediatamente che ogni spazio di Hilbert ammette almeno una base ortonormale.

Proposizione 6.3.7. *Sia S un sistema ortonormale, allora le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti:*

1. *S è una base ortonormale;*
2. *$S^\perp = \{0\}$;*
3. *$\overline{\langle S \rangle} = H$;*
4. *Per ogni $x \in H$ vale l'*identità di Parseval
$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|\hat{x}\|^2_{l^2}$$
5. *$\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha)\hat{y}(\alpha) = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$ dove il secondo prodotto scalare è riferito allo spazio di Hilbert $l^2(A)$;*
6. *$\mathcal{F}$ è invertibile su H.*

Dimostrazione. L'equivalenza tra i primi due punti è immediata da verificare in quanto gli eventuali elementi di $S^\perp$ potrebbero essere aggiunti al sistema nel caso non fosse massimale. Anche l'equivalenza tra il secondo e il terzo è dimostrabile con facilità.

Dimostriamo ora il punto 5 a partire dal 4: sia H che $l^2(A)$ sono spazi di Hilbert e quindi verificano l'uguaglianza del parallelogramma, allora usando la linearità degli integrali
$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \frac{\|\hat{x} + \hat{y}\|^2 - \|\hat{x} - \hat{y}\|^2}{4} = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} = \langle x, y \rangle$$

Dalla proposizione 6.3.5 e dal teorema 6.3.4 si ha l'equivalenza tra i punti 2 e 6, mentre supponendo vera la 4 dimostrare la 6 non richiede un grande sforzo.

Bisogna a questo punto dimostrare che il punto 3 implichi il 4 per concludere la proposizione. L'applicazione $\mathcal{F}$ è un'isometria su $\langle S\rangle$, per ipotesi fissato $x \in H$ esiste una successione $x_n \in \langle S\rangle$ convergente a y in H, per continuità la successione $\hat{x_n}$ convergerà a $\hat{y}$ in norma l^2 e quindi per continuità della norma

$$\|\hat{y}\|_{l^2} = \lim_{n\to+\infty} \|\hat{x_n}\|_{l^2} = \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|y\|$$

e la dimostrazione è conclusa. ∎

Teorema 6.3.8. *Consideriamo uno spazio di Hilbert H non banale, allora H è separabile se e solo se ammette una base ortonormale finita o numerabile.*

Dimostrazione. Supponiamo H separabile con $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso in H, dal lemma di Zorn H ammette una base ortonormale $S = \{u_\alpha : \alpha \in A\}$. Il lettore può verificare che le palle aperte $B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(u_\alpha)$ sono tutte disgiunte tra loro.

Per definizione di densità l'applicazione

$$\alpha \in A \to \min\left\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(u_\alpha)\right\} \in \mathbb{N}$$

è ben definita ed iniettiva, quindi A è al più numerabile.

Viceversa se S è una base ortonormale finita o numerabile allora l'insieme composto dalle combinazioni finite di elementi di S con scalari in $\mathbb{Q}$ è denso in H oltre che numerabile. ∎

Definizione 6.3.9. Sia H spazio di Hilbert e $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sottospazi chiusi di H, allora H è *somma hilbertiana* di $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e si indica col simbolo

$$H = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} H_i$$

se e solo se valgono le seguenti proprietà:

- Per ogni $n \neq m$ si ha $H_n \perp H_m$ ovvero $\langle x, y\rangle = 0$ per ogni $x \in H_n$ e $y \in H_m$ (in particolare $H_n \cap H_m = \{0\}$);
- $H = \overline{\langle H_n : n \in \mathbb{N}\rangle}$.

6.4 Il teorema di Lax-Milgram

Definizione 6.4.1. Un'applicazione $F : H \times H \to \mathbb{R}$ è una *forma bilineare* se e solo se per ogni $u \in H$ le applicazioni $F(\cdot, u)$ e $F(u, \cdot)$ sono lineari.

Teorema 6.4.2 (Lax-Milgram). *Sia $F : H \times H \to \mathbb{R}$ bilineare definita sullo spazio di Hilbert H. Supponiamo che esistano $\alpha, \beta > 0$ tale che per ogni $x, y \in H$*

$$|F(x,y)| \leq \alpha \|x\| \|y\|$$
$$F(x,x) \geq \beta \|u\|^2$$

Allora per ogni $f \in H^*$ esiste un unico $w \in H$ tale che per ogni $x \in H$

$$f(x) = F(w,x)$$

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto l'unicità di tale elemento: se infatti $F(v,x) = F(w,x)$ per ogni $x \in H$ allora $F(w-v,x) = 0$ e $\beta \|w-v\|^2 \leq F(w-v,w-v) = 0$ da cui $v = w$.

Sia adesso $u \in H$ generico, dal teorema 6.2.11 esiste un unico elemento $Au \in H$ tale che $F(u,x) = \langle Au, x\rangle$ per ogni x, permettendoci in tal modo di costruire l'applicazione $A : H \to H$. Si dimostra facilmente la linearità di A e inoltre

$$\|Au\|^2 = F(u, Au) \leq \alpha \|u\| \|Au\|$$

e quindi è anche continua. Sia adesso $u \in H$ tale che $Au = 0$, allora $F(u,x) = 0$ per ogni x in particolare $F(u,u) = 0$ e perciò $u = 0$.

Ora dimostriamo che il codominio di A è chiuso: sia u_n una successione in H tale che $w_n = Au_n$ converge ad un certo $w \in H$ da cui segue che w_n è una successione di Cauchy. Sfruttando l'ipotesi otteniamo che

$$\|u_n - u_m\|^2 \leq \frac{1}{\beta} F(u_n - u_m, u_n - u_m) \leq \frac{1}{\beta} \|w_n - w_m\| \|u_n - u_m\|$$

e quindi u_n converge ad un certo $u \in H$. Per continuità allora $Au = w$ e quindi anche w è un elemento del codominio.

Per assurdo A non è suriettiva e il codominio è chiuso, quindi esisterà un elemento $h \neq 0$ ortogonale a tutti gli elementi del codominio, in particolare

$$0 = \langle Ah, h\rangle = F(h,h) \geq \beta \|h\|^2$$

allora $h = 0$ il che è assurdo, quindi A è un'applicazione lineare continua e invertibile.

Possiamo adesso concludere la dimostrazione: sia f funzionale lineare e continuo dal teorema 6.2.11 esiste un unico elemento $w \in H$ tale che per ogni $x \in H$

$$f(x) = \langle w, x\rangle = F(A^{-1}w, x)$$

■

Corollario 6.4.3. *Sia A operatore lineare e continuo da H in sé stesso, se esiste un $\beta > 0$ tale che*

$$\langle Ax, x\rangle \geq \beta \|x\|^2$$

per ogni $x \in H$ allora A è invertibile con inversa continua.

Dimostrazione. Consideriamo la forma bilineare

$$F(u, v) = \langle Au, v\rangle$$

per ogni $u \in H$ poniamo $f(v) = \langle u, v\rangle$ da Lax-Milgram esisterà un unico elemento $\bar{u}$ tale che $\langle A\bar{u}, v\rangle = \langle u, v\rangle$ ovvero $u = A\bar{u}$ allora A è invertibile.

Dal corollario 4.4.4 anche l'inversa di A è continua. ■

6.5 Operatori autoaggiunti

Dal teorema di rappresentazione di Riesz esiste un'isometria lineare invertibile tra lo spazio di Hilbert H e il suo duale H^*, quindi per ogni operatore $T \in L(H, H)$ il suo aggiunto T^* può essere visto come un operatore su H ponendo, per ogni $u, v \in H$

$$\langle T^* v, u\rangle = \langle v, Tu\rangle$$

Definizione 6.5.1. Un operatore $T \in L(H, H)$ è *simmetrico* o *autoaggiunto* se e solo se $T^* = T$ ovvero per ogni $u, v \in H$

$$\langle Tv, u\rangle = \langle v, Tu\rangle$$

Proposizione 6.5.2. *Prendiamo T autoaggiunto e definiamo*

$$m = \inf_{\|u\|=1} \langle Tu, u\rangle$$
$$M = \sup_{\|u\|=1} \langle Tu, u\rangle$$

Allora $\sigma(T) \subset [m, M]$ e $m, M \in \sigma(T)$ in particolare $\sigma(T) \neq \emptyset$. Infine se lo spettro vale $\{0\}$ allora T è nullo.

Dimostrazione. Innanzitutto dalla proposizione 5.6.4 sia m che M sono finiti. Sia $\lambda > M$, chiaramente $\langle Tu, u\rangle \leq M \|u\|^2$ e quindi

$$\langle \lambda u - Tu, v\rangle \leq (\lambda + \|T\|) \|u\| \|v\|$$
$$\langle \lambda u - Tu, u\rangle \geq (\lambda - M) \|u\|^2$$

Possiamo allora applicare Lax-Milgram a $f(u, v) = \langle \lambda u - Tu, v\rangle$ che ci permette di invertire $\lambda I - T$ e perciò λ appartiene al risolvente.

Dimostriamo ora che M si trova nello spettro. È banale constatare che la forma

$$[u, v] = \langle Mu - Tu, v\rangle$$

è simmetrica (T autoaggiunto) non negativa, quindi possiamo applicare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e inoltre

$$\|Mu - Tu\| = \sup_{\|v\|=1} \langle Mu - Tu, v\rangle \leq C\sqrt{\langle Mu - Tu, u\rangle}$$

con $C = \sqrt{(M + \|T\|)}$.

Esisterà allora $x_n \in H$ di norma unitaria tale che $\langle Tx_n, x_n\rangle \to M$ e quindi $Mx_n - Tx_n$ tenderebbe a 0, allora se $M \in \rho(T)$ allora $MI - T$ avrebbe inversa continua e quindi per continuità anche x_n tenderebbe a 0, assurdo.

Valgono analoghe proprietà anche per m sostituendo $-T$ a T. Infine se lo spettro contiene solo lo zero allora sia m che M valgono 0 e quindi per ogni $u, v \in H$ essendo T autoaggiunto

$$0 = \langle Tu + Tv, u + v\rangle = 2\langle Tu, v\rangle$$

e quindi T è l'operatore nullo. ■

Corollario 6.5.3. *Ogni operatore lineare non nullo e autoaggiunto possiede un autovalore reale non nullo.*

6.5.1 Decomposizione spettrale per operatori compatti

Sia ora T operatore autoaggiunto compatto, sia μ_n la successione dei suoi autovalori ponendo $\mu_0 = 0$ e poniamo

$$H_n = \ker(T - \mu_n I)$$

se $n \neq 0$ allora H_n ha dimensione finita. Allora

Teorema 6.5.4 (Decomposizione spettrale)**.** *Sia H spazio di Hilbert di dimensione infinita e $T \in L(H, H)$ compatto e autoaggiunto allora*

$$H = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} H_n$$

Dimostrazione. Siano $u \in H_m$, $v \in H_n$ con $\mu_m \neq \mu_n$, allora

$$(\mu_m - \mu_n)\langle u, v\rangle = \langle Tu, v\rangle - \langle u, Tv\rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$$

e quindi sono in particolare disgiunti.

Sia $W = \left\langle \bigcup_{n=0}^{+\infty} H_n \right\rangle$ è un sottospazio di H, vogliamo dimostrare che è denso. Per ogni $w \in W$ il lettore può dimostrare che anche $Tw \in W$ (W è composizione finita di elementi degli H_n), allora $T(W^\perp) \leq W^\perp$ poiché per ogni $x \in W^\perp$ e $w \in W$

$$\langle Tx, w\rangle = \langle x, Tw\rangle = 0$$

La restrizione R dell'operatore T su $W^\perp$ (chiuso) è allora autoaggiunto e compatto e $\sigma(R) = \{0\}$ poiché H ha dimensione infinita, difatti se ci fosse un altro elemento non nullo esso sarebbe un autovalore diverso da ogni μ_n ottenendo una contraddizione. Quindi T è nullo su $W^\perp$ e allora $W^\perp \leq \ker T = H_0 \Rightarrow W^\perp = \{0\} \Rightarrow \overline{W} = H$. ■

Corollario 6.5.5. *Lo spettro residuo di un operatore compatto e autoaggiunto è nullo.*

Dimostrazione. Supponiamo che 0 si trovi nello spettro ma non nello spettro puntuale, quindi T è iniettivo e dal teorema di decomposizione spettrale

$$H = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} H_n$$

e quindi H è separabile ed ha un sistema denso numerabile composto interamente di autovettori. Poiché i relativi autovalori sono non nulli gli autovettori appartengono tutti a a $\operatorname{im} T = (T - 0I)(X)$ e quindi $0 \in \sigma_c(T)$. $\blacksquare$

Bibliografia

[1] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer.

[2] Marco Manetti. *Topologia Generale*. Springer, 2014.

Indice analitico