Brutte cose di analisi funzionale

Prima edizione

De Donato Paolo

20 ottobre 2019

Prefazione alla prima edizione

Inizialmente questi appunti erano semplicemente una trascrizione delle lezioni del corso di Analisi Funzionale tenute nell'anno accademico 2017/2018 dal professore Carbone Luciano presso l'Università degli Studi di Napoli "Federico II".

Col passare dei giorni questi appunti sono stati corretti, rielaborati ed ampliati. Con l'aumentare delle modifiche e delle correzioni l'obbiettivo principale di mera trascrizione di lezioni orali è stato mano mano messo in secondo piano rispetto alla volontà di redigere un manuale introduttivo dell'analisi funzionale liberamente disponibile ad ogni studente universitario che sia studiando per l'esame o semplicemente interessato all'analisi funzionale.

Questo manuale procede per gradi, partendo da oggetti più generali e aggiungendo via via nuovi assiomi. Il primo capitolo in realtà è solamente introduttivo e richiama i concetti base di topologia necessari alla trattazione degli argomenti presenti nei capitoli successivi. Nel secondo capitolo verranno presentati gli spazi vettoriali dotati di topologie per le quali le operazioni di somma e prodotto esterno risultano continue, chiamati spazi vettoriali topologici. Nel terzo capitolo invece ci concentreremo sugli spazi metrici e in particolare sui teoremi di compattezza e il teorema di Ascoli-Arzelà nella sua forma più generale. Le caratteristiche degli spazi vettoriali topologici e degli spazi metrici vengono ereditati ed assimilati all'interno degli spazi normati e di Banach, i quali rivestono un ruolo così importante all'interno dell'analisi funzionale da essere trattati in due capitoli anziché uno: nel capitolo 4 verranno analizzate le proprietà più elementari mentre nel quindo ci si concentrerà sugli operatori lineari tra spazi normati. Il sesto capitolo infine è incentrato sugli spazi di Hilbert e sulle sue proprietà più elementari senza addentrarsi eccessivamente su di esso.

I seguenti appunti sono da considerarsi tutt'altro che definitivi e potrebbero contenere errori o inesattezze di vario genere. Chiunque riscontrasse errori nelle dimostrazioni o sviste al livello grammaticale o più semplicemente volesse darmi qualche consiglio a riguardo è pregato di segnalarli all'indirizzo email `pdd.math@gmail.com`.

Indice

Capitolo 1

Concetti preliminari

1.1 Spazi vettoriali

Definizione 1.1.1. Siano $(V, +)$ un gruppo abeliano e $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ campo con elemento neutro 0 ed unità 1. Allora fissata un'applicazione binaria nella seguente forma

$$h : \mathbb{R} \times V \to V$$

diremo che la struttura $(V, \mathbb{K}, h)$ è uno *spazio vettoriale* su $\mathbb{K}$ se e solo se valgono le seguenti proprietà:

- $h(1, v) = v$ per ogni $v \in V$;
- $h[\alpha, u + v] = h(\alpha, u) + h(\alpha, v)$ per ogni $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $h(\alpha + \beta, u) = h(\alpha, u) + h(\beta, u)$ per ogni $u \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- $h(\alpha\beta, u) = h[\alpha, h(\beta, u)]$ per ogni $u \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

D'ora in avanti identificheremo un generico spazio vettoriale $(V, \mathbb{K}, g)$ con il suo supporto V e identificheremo il prodotto esterno con il simbolo $\cdot$ in ogni caso.

Proposizione 1.1.2. *Se $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora*

- $0v = 0$ *per ogni $v \in V$, si noti che lo zero al primo membro è il numero reale 0, mentre quello al secondo membro è il vettore nullo ovvero l'elemento neutro del gruppo abeliano $(V, +)$;*
- $(-1)v = -v$ *per ogni $v \in V$, si noti che il vettore al secondo membro è il vettore inverso di v nel gruppo abeliano $(V, +)$;*

Definizione 1.1.3. Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $W \subseteq V$ un suo sottoinsieme non vuoto allora W è un *sottospazio* di V, e si indica con $W \leq V$, se e solo se la somma e la moltiplicazione per uno scalare di elementi di W rimane in W. In altre parole $(W, \mathbb{K}, +, \cdot)$ è esso stesso uno spazio vettoriale.

Dati due sottoinsiemi non vuoti M ed N dello spazio vettoriale X ed $\alpha \in \mathbb{K}$ possiamo sempre costruire i seguenti insiemi

$$M + N = \{m + n \mid m \in M, n \in N\} \; M - N \qquad = \{m - n \in X \mid m \in M, n \in N\}$$
$$\alpha N = \{\alpha n \in X \mid m \in M, n \in N\}$$

che chiameremo rispettivamente somma algebrica, differenza algebrica e omotetia per α. Nel caso sia M che N sono sottospazi vettiroali allora anche i precedenti insiemi lo sono.

Definizione 1.1.4. Sia V spazio vettoriale con M, N due suoi sottospazi. Diremo che

$$V = M \oplus N$$

se e solo se $V = M + N$ ed $M \cap N = \{0\}$.

Proposizione 1.1.5. *Sia V spazio vettoriale e M, N due suoi sottospazi, allora $V = M \oplus N$ se e solo se per ogni $v \in V$ esistono e sono unici $m \in M$ ed $n \in N$ tali che $v = m + n$.*

Definizione 1.1.6. Siano V e V' due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$, diremo che l'applicazione $f : V \to V'$ è *lineare* se e solo se per ogni $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ vale

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Indicheremo inoltre con $\mathcal{L}(V, V')$ l'insieme delle funzioni lineari da V in V'.

Possiamo dotare lo spazio $\mathcal{L}(V, V')$ di una struttura di $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con somma $+$ e prodotto esterno $\cdot$ definiti nella seguente maniera.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

per ogni $f, g \in \mathcal{L}(V, V')$, $\alpha \in \mathbb{K}$ ed $x \in V$. Un qualunque campo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ può essere visto anche come $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, possiamo allora porre

$$V^+ = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$$

e V^+ sarà il *duale algebrico* di V. Per ogni $f \in \mathcal{L}(V, V')$ possiamo definire il *kernel* e l'*immagine* di f nella seguente maniera

$$\ker f = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$$
$$\operatorname{im} f = \{f(x) \in V' \mid x \in V\}$$

Essi sono chiaramente anche sottospazi di V e V' rispettivamente.

Quozienti di spazi vettoriali

Sia X spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $N \leq X$, poniamo per definizione $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N$, si dimostra facilmente che è una relazione di equivalenza e inoltre

$$[x]_\sim = \{y \in X \mid y - x \in N\} = x + N$$

per ogni $x \in X$. Definiamo allora il *quoziente* X/N come la classe di tutti gli insiemi nella forma $x + N$ per qualche $x \in X$. Esso continuerà ad essere uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ rispetto alle seguenti operazioni

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$$
$$\alpha(x + N) = \alpha x + N$$

le quali sono ben definite come è facile da verificare.

Inoltre la seguente funzione

$$\pi_N : x \in X \to x + N \in X/N$$

è detta *epimorfismo canonico* di N. Essa è chiaramente lineare, suriettiva e $\ker \pi_N = N$.

1.2 Spazi vettoriali reali e complessi

Tutti gli spazi vettoriali che considereremo da qui in poi avranno come campo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, quindi ogni volta che considereremo uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ daremo per scontato che $\mathbb{K}$ sia $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$.

Chiaramente ogni spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ può essere visto anche come uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ semplicemente restringendo il dominio del prodotto esterno. Indicheremo questo nuovo spazio vettoriale con $V_\mathbb{R}$ il quale, benché contenga gli stessi vettori di V, possiede proprietà diverse e quindi risulta opportuno differenziarli.

Difatti presi due spazi vettoriali V, W su $\mathbb{C}$ avremo che $\mathcal{L}(V, W) \subseteq L(V_\mathbb{R}, W_\mathbb{R})$ e l'inclusione in certi casi è stretta come mostra il seguente esempio.

Esempio 1. Poniamo $V = \mathbb{C}$ e dotiamolo della struttura canonica di $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Allora $V_\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione 2 e l'applicazione

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (y, x) \in \mathbb{R}^2$$

è chiaramente lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ rispetto al campo $\mathbb{R}$. D'altronde $f(x + iy) = y + ix$ non è $\mathbb{C}$-lineare in quanto

$$f(i) = 1 \neq -1 = if(1)$$

dunque $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ma $f \notin \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Inoltre il sottoinsieme $M = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ ma non di $\mathbb{C}$ in quanto $1 = (1, 0)$ appartiene a M ma $i \equiv i \cdot (1, 0) \equiv (0, 1)$ no.

Consideriamo invece uno spazio vettoriale reale V non è sempre possibile trovare uno spazio vettoriale complesso W tale che $W_{\mathbb{R}} = V$. Infatti se W è finitamente generato e ha dimensione n su $\mathbb{C}$ allora $W_{\mathbb{R}}$ ha dimensione $2n$ su $\mathbb{R}$, quindi se V ha dimensione dispari non è possibile trovare un siffatto spazio.

D'altronde W esiste se e solo se esiste un operatore $\hat{\imath} \in \mathcal{L}(V, V)$ tale che

$$(\hat{\imath})^2(x) = \hat{\imath}\left[\hat{\imath}(x)\right] = -x \ \forall x \in V \tag{1.2.1}$$

in tal caso possiamo definire su V un prodotto esterno $* : \mathbb{C} \times V \to V$ in modo tale che

$$(a + ib) * v = av + b\hat{\imath}(v)$$

che soddisfa tutti gli assiomi degli spazi vettoriali. Dimostreremo solo l'ultima in quanto le prime sono semplici da dimostrare. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ allora per la linearità di $\hat{\imath}$

$$\begin{aligned}
[(a + ib) * ((c + id) * v)] &= (a + bi) * [cv + d\hat{\imath}(v)] \\
&= acv + ad\hat{\imath}(v) + bc\hat{\imath}(v) + bd\hat{\imath}[\hat{\imath}(x)] \\
&= (ac - bd)v + (ad + bc)\hat{\imath}(v) \\
&= [(a + ib)(c + id)] * v
\end{aligned}$$

Se V è uno spazio vettoriale reale finitamente generato di dimensione $2k$ pari allora, presa una sua qualunque base $e_1, e_2, \ldots, e_{2k}$ possiamo sempre definire $\hat{\imath}$ ponendo per ogni $1 \leq j \leq k$

$$\begin{aligned}
\hat{\imath}(e_{2j}) &= e_{2j-1} \\
\hat{\imath}(e_{2j-1}) &= -e_{2j}
\end{aligned}$$

cambiando la base cambia anche $\hat{\imath}$ e quindi la struttura di spazio vettoriale complesso.

1.3 Spazi topologici

In questa sezione richiamiamo alcuni concetti di topologia generale necessari alla trattazione degli argomenti successivi.

I vari risultati saranno presentati senza dimostrazione, per maggiori informazioni si veda [3].

Definizione 1.3.1. Sia X insieme non vuoto e τ contenente alcuni dei sottoinsiemi di X. Allora la struttura (X, τ) è uno *spazio topologico* se e solo se valgono le seguenti affermazioni:

- $\emptyset, X \in \tau$;
- Se $A, B \in \tau$ allora $A \cap B \in \tau$;
- Se $\mathcal{A} \subseteq \tau$ sottoinsieme non vuoto di elementi di τ allora $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$.

Gli elementi di τ sono detti *aperti* di X, mentre $C \subseteq X$ è *chiuso* se e solo se $X \setminus C \in \tau$.

Per ogni sottoinsieme I di X la *chiusura* di I, che viene indicata con $\overline{I}$, è il più piccolo insieme chiuso contenente I, mentre l'*interno* di I, indicato con I°, è il più grande aperto contenuto in I. In formule

$$\overline{I} = \bigcap \{C \supseteq I \mid C \text{ chiuso}\}$$
$$I^\circ = \bigcup \{U \subseteq I \mid U \text{ aperto}\}$$

e quindi

$$X \setminus \overline{I} = [X \setminus I]^\circ$$

Definizione 1.3.2. Uno spazio topologico X è di *Hausdorff* se e solo se per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$ esistono due aperti A, B di X tali che $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Proposizione 1.3.3. *In uno spazio topologico di Hausdorff i singleton sono insiemi chiusi.*

Definizione 1.3.4. Consideriamo uno spazio topologico X e sia x_n una successione in X. Prendiamo $x \in X$ diciamo che x_n *tende* a x, e scriviamo $x_n \to x$ se e solo se per ogni intorno U di x esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ si ha $x_n \in U$.

Proposizione 1.3.5. *Se $C \subseteq X$ è chiuso, $x_n \in C$ e $x_n \to x$ allora $x \in C$.*

Una notevole proprietà degli spazi topologici di Hausdorff consiste nell'unicità del limite di una qualunque successione, come afferma la seguente proposizione.

Proposizione 1.3.6. *Negli spazi topologici di Hausdorff il limite di una generica successione, se esiste, è unico.*

Quindi se x è l'unico limite della successione x_n allora si usa anche la notazione

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

Questo risultato gioca un ruolo fondamentale nella dimostrazione di molti teoremi che la maggior parte degli spazi topologici utilizzati soddisfa la proprietà di Hausdorff prima ancora di altre proprietà.

Continuità

Definizione 1.3.7. Siano X e Y spazi topologici e $f : X \to Y$ funzione generica. Allora f è *continua* in $x \in X$ se e solo se per ogni intorno $I \subseteq Y$ di $f(x)$ l'insieme $f^{-1}(I) \subseteq X$ è un intorno di x.

La funzione f è invece *sequenzialmente continua* in $x \in X$ se e solo se per ogni successione $x_n \in X$ convergente ad x la nuova successione $f(x_n)$ converge a $f(x)$.

Proposizione 1.3.8. *Ogni funzione continua in un punto x è anche sequenzialmente continua in esso.*

Dimostrazione. Sia $x_n \in X$ una generica successione convergente ad x, e consideriamo ora un intorno I di $f(x)$. Per la definizione di continuità $f^{-1}(I)$ è un intorno di x e quindi esisterà un $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in f^{-1}(I)$ per ogni $n > N$.

La tesi segue immediatamente da

$$x_n \in f^{-1}(I) \Leftrightarrow f(x_n) \in I$$

■

Proposizione 1.3.9. *$f : X \to Y$ è continua su tutto X se e solo se vale almeno uno tra*

$$\begin{aligned} A \subseteq Y \ \textit{aperto} \ &\Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq X \ \textit{aperto} \\ C \subseteq Y \ \textit{chiuso} \ &\Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq X \ \textit{chiuso} \end{aligned}$$

Basi e sistemi fondamentali di intorni

Definizione 1.3.10. Fissato $x \in X$, un *sistema fondamentale di intorni* di x è una qualunque famiglia di intorni $\mathcal{I}$ di x tali che per ogni aperto A di X contenente x esisterà un $I \in \mathcal{I}$ tale che $I \subseteq A$.

Definizione 1.3.11. Preso un qualunque spazio topologico X una famiglia di aperti $\mathcal{B}$ è una *base* per la topologia su X se e solo se ogni aperto di X è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

La comodità nel lavorare con sistemi fondamentali di intorni e con le basi risiede principalmente nella possibilità che una data proprietà verificata solamente sui loro elementi risulti verificata per ogni intorno o aperto della topologia rispettivamente.

Per esempio per stabilire la convergenza di una successione in x ci si può limitare a considerare solamente gli elementi di un generico sistema fondamentale di intorni di x, mentre per dimostrare la continuità di una funzione $f : X \to Y$ su tutto X basterebbe considerare solamente le controimmagini di una qualunque base di Y.

Proposizione 1.3.12. *Preso A insieme generico non vuoto e $\mathcal{A}$ una collezione non vuota di sottoinsiemi di A che soddisfi le seguenti proprietà:*

- $\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B = A$*;*
- *Per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ esiste $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ non vuoto tale che $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = B_1 \cap B_2$.*

Allora la famiglia

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \;\middle|\; \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \right\}$$

è una topologia su A e $\mathcal{A}$ ne è una base.

Definizione 1.3.13. Sia X spazio topologico, allora un suo sottoinsieme $Y \subseteq X$ è *denso* in X se e solo se la chiusura di Y coincide con X, mentre è *raro* se e solo se la sua chiusura non ha punti interni.

Uno spazio topologico X è di *prima categoria* se e solo se è unione numerabile di sottoinsiemi rari, altrimenti è detto di *seconda categoria*.

Diciamo invece che X è *separabile* se e solo se possiede un sottoinsieme denso e numerabile.

Proposizione 1.3.14. *Un sottoinsieme Y di X è denso se e solo se interseca ogni aperto non vuoto di X.*

Dimostrazione. Dalla definizione di chiusura l'insieme $A = X \setminus \overline{Y}$ è l'unione di tutti gli aperti che hanno intersezione nulla con Y. Da ciò segue immediatamente il teorema. ■

Proposizione 1.3.15. *Se Y è un sottoinsieme raro di uno spazio topologico X allora $X \setminus Y$ è denso in X.*

Il viceversa non è sempre vero: in $\mathbb{R}$ sia $\mathbb{Q}$ che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$ e quindi non sono rari. Se però $Y \subseteq X$ è aperto e denso allora $X \setminus Y$ è chiuso e raro.

Esempio 2. Dotiamo $\mathbb{R}$ della topologia usuale, allora $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme raro mentre $\mathbb{Q}$ è denso e numerabile, quindi $\mathbb{R}$ è uno spazio topologico separabile.

Con un procedimento analogo si dimostra facilmente che anche $\mathbb{R}^n$ è separabile per ogni $n \in \mathbb{N}$

Definizione 1.3.16. Sia X spazio topologico, allora una classe di aperti $\mathcal{A}$ di X è una *base* di X se e solo se ogni aperto di X è unione di elementi di $\mathcal{A}$.

Compattezza

Definizione 1.3.17. Uno spazio topologico X è *compatto* se e solo se per ogni ricoprimento aperto $\{V_i\}_{i \in I}$ di X esiste un sottoinsieme I' di I *finito* tale che

$$X = \bigcup_{i \in I'} V_i$$

Lo spazio X è *sequenzialmente compatto* se ogni successione x_n di X ammette una estratta convergente ad un generico punto di X.

Proposizione 1.3.18. *Se X è uno spazio topologico compatto allora ogni suo sottoinsieme chiuso è compatto.*

Proposizione 1.3.19. *Se X è uno spazio topologico di Hausdorff allora tutti i suoi sottoinsiemi compatti sono chiusi.*

L'assioma di numerabilità

Per esprimere i concetti di continuità abbiamo dato due diverse definizioni, una tramite aperti mentre l'altra tramite successioni convergenti.

Se abbiamo visto che quella tramite intorni implica quella sequenziale il viceversa non è sempre vero. Il motivo di questa disparità è insiemistica, una successione è infatti una funzione con dominio in $\mathbb{N}$ e quindi la sua immagine è al più numerabile, mentre potrebbero esistere punti che hanno solamente sistemi fondamentali di intorni più che numerabili.

Per poter dimostrare una proprietà definita tramite sequenze ad una tramite intorni generici dovremmo essere in grado di costruire, a partire da un sistema fondamentale di intorni, una opportuna successione contenuta in ogni intorno da un certo punto in poi, e questo in genere non è possibile per la diversa cardinalità.

Per questo motivo è stato introdotto un nuovo assioma per gli spazi topologici che garantisca la possibilità di effettuare il passaggio inverso, ovvero dalle sequenze agli intorni.

Definizione 1.3.20. Uno spazio topologico X *soddisfa l'assioma* $\mathcal{N}_1$ se e solo se ogni suo punto possiede un sistema fondamentale di intorni al più numerabile.

In tali spazi quindi possiamo sempre trovare sistemi fondamentali di intorni al più numerabili superando in tal modo l'ostacolo della cardinalità.

Tra le proprietà soddisfatte dagli spazi $\mathcal{N}_1$ notiamo le seguenti

Proposizione 1.3.21. *Se X è uno spazio $\mathcal{N}_1$ e $Y \subseteq X$ allora*

$$x \in \overline{I} \Leftrightarrow \exists x_n \in I \text{ tale che } x_n \to x$$

Proposizione 1.3.22. *Se $f : X \to Y$ è sequenzialmente continua in x ed X è $\mathcal{N}_1$ allora f è anche continua in x.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$, dalla proposizione precedente segue che se esiste un insieme I tale che per ogni successione $x_n \in X$ convergente ad x esiste un indice $m \in \mathbb{N}$ per cui $x_m \in I$ allora $x \in I^\circ$.

Sia f sequenzialmente continua in $x \in X$ e I un generico intorno di $f(x)$, per ogni successione x_n convergente ad x abbiamo che $f(x_n) \to f(x)$ e quindi esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$f(x_m) \in I \Rightarrow x_m \in f^{-1}(I)$$

Poiché X è $\mathcal{N}_1$ da quanto detto sopra segue immediatamente che $x \in \left[f^{-1}(I)\right]^\circ$ e quindi $f^{-1}(I)$ è un intorno di x e f è continua in x. ■

Proposizione 1.3.23. *Se X è uno spazio compatto ed $\mathcal{N}_1$ allora è anche sequenzialmente compatto.*

Definizione 1.3.24. Uno spazio topologico X *soddisfa l'assioma* $\mathcal{N}_2$ se e solo se una base al più numerabile.

Ovviamente si tratta di una limitazione molto più forte della $\mathcal{N}_1$ che tra l'altro permette di dimostrare l'equivalenza tra compattezza e sequenziale compattezza.

Uno spazio $\mathcal{N}_2$ è sia $\mathcal{N}_1$ che separabile, mentre il viceversa non è verificato per spazi topologici generici. Se infatti consideriamo la retta $\mathbb{R}$ dotata della topologia generata dagli intorni nella forma

$$[a, b[\tag{1.3.1}$$

con $-\infty < a < b < +\infty$, allora si può verificare che è uno spazio $\mathcal{N}_1$ con $\mathbb{Q}$ come sottoinsieme denso ma non è $\mathcal{N}_2$.

Se però ci limitiamo a considerare solamente gli spazi metrici allora è verificata anche l'implicazione opposta come vedremo più avanti.

Semicontinuità inferiore

In analisi funzionale in varie occasioni risulta comodo indebolire l'ipotesi di continuità di una funzione. Difatti alcune funzioni di particolare interesse non sono continue, ciononostante conservano ancora delle buone proprietà che discendono da una condizione più debole di continuità.

Definizione 1.3.25. Sia X spazio topologico e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funzione generica. Allora f è *semicontinua inferiormente* in $x \in X$ se e solo se

$$f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(y)$$

ovvero, fissata un qualunque sistema fondamentale di intorni $\mathcal{I}$ di x vale

$$f(x) \leq \sup_{U \in \mathcal{I}} \inf_{y \in U} f(y) \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \, \exists U \in \mathcal{I} \text{ tale che } \forall y \in U \ f(x) - \varepsilon \leq f(y)$$

Invece f è *sequenzialmente semicontinua inferiormente* in $x \in X$ se e solo se per ogni x_n successione in X convergente ad x si ha

$$f(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n)$$

Come per le funzioni continue quelle semicontinue inferiormente sono anche sequenzialmente semicontinue inferiormente, mentre il viceversa non è vero a meno che X non soddisfi l'assioma $\mathcal{N}_1$.

Teorema 1.3.26. *Sia X spazio topologico sequenzialmente compatto e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sequenzialmente semicontinua inferiormente, allora f possiede un minimo in X.*

Dimostrazione. Posto $m = \inf_{x \in X} f(x)$ se $m = +\infty$ allora ogni suo punto è di minimo, altrimenti esisterà a meno di passare ad un'estratta una successione $x_n \in X$ e un elemento $x \in X$ tale che $x_n \to x$ e $f(x_n) \to m$. Segue immediatamente che

$$m \leq f(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) = m$$

e quindi $f(x) = m \leq f(y)$ per ogni $y \in X$ e x è un punto di minimo per f. ■

Lemma 1.3.27. *Sia X spazio topologico e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Allora*

$$f \text{ semicontinua inferiormente } \Leftrightarrow \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\} \ \text{è chiuso}$$

Dimostrazione. Supponiamo f semicontinua inferiormente e prendiamo $x \in X$ tale che $f(x) > \alpha$, quindi esisterà un $\varepsilon > 0$ tale che $f(x) - \varepsilon > \alpha$ per esempio

$$\varepsilon = \frac{f(x) - \alpha}{2}$$

Esisterà allora un intorno di x contenuto interamente in $\{y \in X \mid f(y) > \alpha\}$ che è perciò aperto.

Dimostriamo l'implicazione inversa, sia $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ allora l'insieme

$$\{y \in X \mid f(y) > f(x) - \varepsilon\}$$

è aperto quindi esiste un intorno $U \in \mathcal{I}$ di x contenuto in tale aperto ■

1.4 Topologia iniziale

Una particolare classe di topologie è costituita dalle topologie generate da una classe di funzioni, tramite le quali possiamo trasportare la struttura topologica delle relative immagini sull'insieme di partenza in modo tale che queste funzioni risultino continue.

Fissiamo un generico insieme non vuoto X, un insieme degli indici I ed una famiglia di funzioni $\mathcal{F} = \{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ dove ogni Y_i è dotato di una topologia τ_i. Vogliamo in qualche modo trasportare la struttura topologica delle Y_i su X mediante le funzioni f_i, a tal scopo introduciamo la famiglia di insiemi

$$U(\mathcal{F}) = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \,\middle|\, J \subseteq I \text{ finito } \wedge U_i \subseteq Y_i \text{ aperto} \right\}$$

Proposizione 1.4.1. *La famiglia $U(\mathcal{F})$ genera una topologia $\mathcal{W}(\mathcal{F})$ su X detta* topologia iniziale *indotta dalla famiglia $\mathcal{F}$ e $U(\mathcal{F})$ ne è una base. La topologia $\mathcal{W}(\mathcal{F})$ è inoltre la più piccola topologia possibile per cui tutte le funzioni in $\mathcal{F}$ siano continue.*

Dimostrazione. Per vedere che genera una topologia dobbiamo verificare che soddisfi le ipotesi della proposizione 1.3.12, in particolare il secondo punto. Prendiamo due suoi elementi qualunque $\bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i)$ e $\bigcap_{i \in J'} f_j^{-1}(U'_i)$, allora per ogni $j \in J \cup J' = J''$ definiamo

$$V_j = \begin{cases} U_j & \text{se } j \in J \\ Y_j & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad V'_j = \begin{cases} U'_j & \text{se } j \in J' \\ Y_j & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora

$$\bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \cap \bigcap_{i \in J'} f_j^{-1}(U'_i) = \bigcap_{j \in J''} f_j^{-1}\left(V_j \cap V'_j\right) \in U(\mathcal{F})$$

e quindi genera una topologia $\mathcal{W}(\mathcal{F})$. Sia ora τ una qualunque topologia su X tale che tutte le funzioni $f_i \in \mathcal{F}$ siano continue. Questo vuol dire che $f_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{W}(\mathcal{F})$ per ogni aperto $U_i \subseteq Y_i$ e ogni indice $i \in I$, quindi anche le loro intersezioni finite e le unioni arbitrarie appartengono a τ, quindi $\mathcal{W}(\mathcal{F}) \subseteq \tau$. ∎

La famiglia $\mathcal{F}$ è *totale* se e solo se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ distinti esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \neq f(y)$.

Proposizione 1.4.2. *Se $\mathcal{F}$ è totale e tutti gli Y_i sono spazi di Hausdorff allora la topologia $\mathcal{W}(\mathcal{F})$ è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Prendiamo due punti di X distinti x ed y, esisterà allora $f_i \in \mathcal{F}$ tale che $f_i : X \to Y_i$ ed $f_i(x) \neq f_i(y)$. Ora essendo Y_i di Hausdorff esistono due aperti disgiunti $U, V \subseteq Y_i$ tali che $f_i(x) \in U$ ed $f_i(y) \in V$ ovvero $x \in f_i^{-1}(U)$ e $y \in f_i^{-1}(V)$ ed $f_i^{-1}(U) \cap f_i^{-1}(V) = \emptyset$. ∎

Sia X dotato della topologia iniziale indotta da $\{f_i\}_{i \in I}$ e $x \in X$. Se per ogni $i \in I$ la famiglia di intorni $\mathcal{U}_i$ è un sistema fondamentale di intorni per $f_i(x)$ allora

$$\left\{ L_{f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_n}}^{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}} = \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \;\middle|\; i_k \in I \wedge U_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k} \right\} \tag{1.4.1}$$

è un sistema fondamentale di intorni per x.

Le topologie deboli di solito non sono $\mathcal{N}_1$ dato che la famiglia $\mathcal{F}$ è quasi sempre più che numerabile. Quindi non sempre la continuità sequenziale implica la continuità. Ciononostante valgono altri risultati sulla continuità tra i quali ricordiamo i seguenti.

Nei risultati che seguono assumeremo sempre che X è uno spazio topologico dotato della topologia iniziale $\mathcal{W}(\mathcal{F})$ dove

$$\mathcal{F} = \{f_i : X \to Y_i \mid i \in I\}$$

con Y_i spazi topologici generici.

Proposizione 1.4.3. *Sia $x \in X$ e $x_n \in X$ una sua qualunque successione. Allora*

$$x_n \to x \text{ in } X \Leftrightarrow f_i(x_n) \to f_i(x) \text{ in } Y_i \ \forall i \in I$$

Dimostrazione. Supponiamo che x_n converga a x rispetto alla topologia $\mathcal{W}(\mathcal{F})$. Quindi per ogni indice $i \in I$ e per ogni intorno U_i di $f_i(x)$ esisterà un $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$

$$x_n \in L_{f_i}^{U_i} \Leftrightarrow f_i(x_n) \in U_i$$

e quindi $f_i(x_n) \to f_i(x)$ per ogni i.

Viceversa ora supponiamo che $f_i(x_n)$ converge a $f_i(x)$ per ogni indice $i \in I$. Poiché gli elementi dell'insieme in (1.4.1) formano un sistema fondamentale di intorni di x se la successione x_n "converge" ad x rispetto agli intorni di quest'ultimo nella forma $L_{f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_l}}^{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_l}}$ allora $x_n \to x$ in X.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\psi"] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "f_i \circ \psi"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 1.1: Rappresentazione grafica delle funzioni nella proposizione 1.4.5

Sia $J = \{i_1, \ldots, i_l\} \subseteq I$ un generico sottoinsieme finito allora per ogni U_{i_k} intorno di $f_{i_k}(x)$ esisterà $N_k \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N_k$ si ha $f_{i_k}(x_n) \in U_{i_k}$. Basta perciò prendere $N = \max_k N_k$ e per ogni $n > N$ seguirà immediatamente che $x_n \in L^{U_{i_1},\ldots U_{i_l}}_{f_{i_1},\ldots f_{i_l}}$. Quindi per l'osservazione di prima x_n converge ad x nella topologia iniziale di X ■

Corollario 1.4.4. *Sia Z uno spazio topologico generico e $\psi : Z \to X$ applicazione. Allora ψ è sequenzialmente continua su X se e solo se $f_i \circ \psi : Z \to Y_i$ è sequenzialmente continua per ogni $i \in I$.*

Proposizione 1.4.5. *Sia Z spazio topologico e $\psi : Z \to X$ applicazione generica. Allora*

$$\psi \text{ continua } \Leftrightarrow f_i \circ \psi \text{ continua } \forall\, i \in I$$

Dimostrazione. L'implicazione da sinistra a destra è banale poiché $f_i : X \to Y_i$ è continua rispetto alla topologia iniziale $\mathcal{W}(\mathcal{F})$.

Supponiamo ora che $f_i \circ \psi$ è continua per ogni $i \in I$, questo vuol dire che per ogni aperto U_i di Y_i l'insieme

$$(f_i \circ \psi)^{-1}(U_i) = \psi^{-1}\left(L^{U_i}_{f_i}\right)$$

è un aperto di Z. Ma gli aperti di X sono intersezione finita e unione di aperti nella forma $L^{U_i}_{f_i}$ e quindi la loro controimmagine mediante ψ sarà ancora un aperto di Z, quindi ψ è continua. ■

I due risultati precedenti possono essere riassunti nel seguente modo: se Y e Z sono spazi topologici e X è dotato della topologia iniziale $\mathcal{W}(\mathcal{F})$ i cui elementi hanno codominio Y. Allora per ogni applicazione $\psi : Z \to X$

- ψ è sequenzialmente continua $\Leftrightarrow$ $f_i \circ \psi$ è sequenzialmente continua per ogni $i \in I$;
- ψ è continua $\Leftrightarrow$ $f_i \circ \psi$ è continua per ogni $i \in I$.

In generale le topologie iniziali non sono $\mathcal{N}_1$ per cui bisogna sempre distinguere continuità e sequenziale continuità.

Topologia prodotto

Innanzitutto generalizziamo il concetto di prodotto insiemistico in modo da poter effettuare il prodotto di una famiglia (finita o infinita) di insiemi. Innanzitutto una famiglia di insiemi con indice in I non è altro che una qualunque applicazione di insiemi $i \in I \to X_i$ che viene indicata anche con $\{X_i\}_{i \in I}$, il prodotto insiemistico della famiglia $\{X_i\}_{i \in I}$ è l'insieme di funzioni

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \;\middle|\; f(i) \in X_i \ \forall i \in I \right\}$$

se $X_i = X$ per ogni $i \in I$ allora poniamo

$$X^I = \prod_{i \in I} X = \{f : I \to X\}$$

Questa definizione generalizza l'idea di prodotto finito insiemistico, difatti ponendo $I = I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ riotteniamo il prodotto usuale $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. D'ora in poi daremo per buono l'*assioma per la scelta* il quale afferma che se $X_i \neq \emptyset$ per ogni $i \in I$ allora $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

Per ogni $i \in I$ la funzione $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ definita nel modo seguente

$$\pi_i(f) = f(i)$$

è detta *proiezione* i-esima, e quindi possiamo definire sul prodotto insiemistico la topologia iniziale generata dalla famiglia di funzioni $\{\pi_i\}_{i \in I}$. Questa topologia è chiamata *topologia prodotto.*

Un notevole risultato sulle topologie prodotto che utilizzeremo in seguito è il seguente

Teorema 1.4.6 (Tychonoff)**.** *Se gli spazi topologici X_i sono compatti per ogni $i \in I$ allora anche $\prod_{i \in I} X_i$ è compatto.*

1.5 Il lemma di Zorn

Prendiamo adesso un insieme generico U non vuoto dotato di una relazione d'ordine parziale $\preceq$, un suo elemento u è detto *massimale* se e solo se per ogni $v \in U$ vale l'implicazione

$$u \preceq v \Rightarrow u = v$$

ovvero non esistono elementi in U strettamente più grandi di u.

Un qualunque sottoinsieme non vuoto W di U è una *catena* se e solo se due suoi elementi a e b sono sempre confrontabili cioè $a \preceq b$ oppure $b \preceq a$, un *maggiorante* di W è un elemento $u \in U$ tale che $a \preceq u$ per ogni $a \in W$.

Un insieme U è detto *induttivo* se e solo se ogni sua catena possiede almeno un maggiorante. Un noto e fondamentale risultato della teoria degli insiemi, che useremo in varie dimostrazioni, fornisce un criterio per stabilire l'esistenza di elementi massimali di insiemi ordinati

Lemma 1.5.1 (Zorn)**.** *Ogni insieme induttivo possiede elementi massimali.*

Il lemma di Zorn risulta fondamentale per la maggior parte dell'analisi, difatti una buona parte dei risultati presenti in queste dispense lo utilizza. Un esempio di applicazione del lemma di Zorn si può osservare nel seguente risultato sugli spazi vettoriali

Proposizione 1.5.2. *Sia X spazio vettoriale e $M \leq X$, allora esiste un unico $N \leq X$ tale che $X = M \oplus N$.*

Dimostrazione. Se $M = X$ allora $N = \{0\}$, analogo se $M = \{0\}$.

Sia allora $x \in X \setminus M$ dunque $\langle x \rangle \cap M = \{0\}$ e quindi $\langle x \rangle$ appartiene alla classe

$$\mathcal{N} = \{A \leq X \mid A \cap M = \{0\}\}$$

che risulta quindi non vuota, dimostriamo che $\mathcal{N}$ è induttiva.

Consideriamo una qualunque sottoclasse $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{N}$ non vuota totalmente ordinata rispetto all'inclusione $\subseteq$, poniamo

$$U = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$$

vogliamo dimostrare che $U \in \mathcal{N}$, in tal caso infatti U risulta essere un maggiorante per $\mathcal{F}$. Presi $u, v \in U$ esisteranno $A, B \in \mathcal{F}$ per cui $u \in A$ e $v \in B$, ma $\mathcal{F}$ è totalmente ordinato dunque $A \subseteq B$ oppure $B \subseteq A$. Poiché sia A che B sono sottospazi avremo che $u + v$ apparterrà ad uno dei due e quindi $a + b \in U$. Con lo stesso ragionamento si verifica che se $u \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ allora $\alpha u \in U$ e quindi U è un sottospazio vettoriale di X. Infine osserviamo che

$$U \cap \langle x \rangle = \left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \right) \cap \langle x \rangle = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} (A \cap \langle x \rangle) = \{0\}$$

e quindi $U \in \mathcal{N}$ ed $\mathcal{N}$ è induttivo.

Per il lemma di Zorn $\mathcal{N}$ ammette un elemento massimale N che soddisfa l'uguaglianza $M \cap N = \{0\}$. Se per assurdo non fosse $X = M \oplus N$ allora esisterebbe un elemento $x \in X$ che non può essere scritto come somma di elementi di M e N da cui segue immediatamente che $M \cap (N + \langle x \rangle) = \{0\}$ assurdo per la massimalità di N. ■

Capitolo 2

Spazi metrici

2.1 Definizione e prime proprietà

Indichiamo con (S, d) uno spazio metrico, ricordiamo che valgono:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{2.1.1}$$

$$d(x, y) = d(y, x) \tag{2.1.2}$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \tag{2.1.3}$$

Se $M, N \subseteq S$ allora poniamo

$$d(M, N) = \inf \{d(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}$$

e se $x \in S$

$$d(x, M) = d(\{x\}, M)$$

Non si confonda la distanza tra insiemi qui introdotta con la distanza di Hausdorff definita nel seguente modo

$$\mathcal{D}(M, N) = \max \left\{ \sup_{x \in M} d(x, N), \sup_{y \in N} d(y, M) \right\}$$

Proposizione 2.1.1. *Se $M, N \subseteq S$ allora*

$$d(M, N) = \inf \{d(x, N) \mid x \in M\}$$

Dimostrazione. Chiaramente $d(M, N) \leq d(x, N)$ per ogni $x \in M$ quindi $d(M, N) \leq \inf \{d(x, N) \mid x \in M\}$, d'altronde per ogni $m \in M$, $n \in N$ vale $d(m, N) \leq d(m, n)$ e quindi si ha prima che $\inf \{d(x, N) \mid x \in M\} \leq d(m, n)$ e infine $\inf \{d(x, N) \mid x \in M\}$ $\leq d(M, N)$ concludendo la tesi. ■

Definizione 2.1.2. Per ogni $x \in S$ e $r > 0$ reale poniamo

$$B_r(x) = \{y \in S \mid d(x, y) < r\}$$
$$D_r(x) = \{y \in S \mid d(x, y) \leq r\}$$

dette rispettivamente *palla aperta* e *palla chiusa* di centro x e raggio r.

Inoltre la topologia

$$\mathcal{T} = \{T \subseteq S \mid \forall x \in T\ \exists r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subseteq T\} \tag{2.1.4}$$

è la *topologia indotta dalla metrica d.*

Quindi ogni spazio metrico può essere considerato anche come spazio topologico, ereditandone le proprietà.

Proposizione 2.1.3. *Gli spazi metrici sono spazi di Hausdorff.*

Dimostrazione. Se $x, y \in S$ con $x \neq y$ allora $d(x, y) = r > 0$. Basta allora scegliere come aperti $B_{\frac{r}{3}}(x)$ e $B_{\frac{r}{3}}(y)$. ■

Nel seguito risulta molto utile la seguente caratterizzazione della chiusura di un insieme

Proposizione 2.1.4. *Sia (S, d) uno spazio metrico e $A \subseteq S$ un suo sottoinsieme non vuoto. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti tra loro*

1. $x \in \overline{A}$;
2. $\exists x_n \in A$ *tale che* $x_n \to x$;
3. $d(x, A) = 0$.

Dimostrazione. L'equivalenza 1⇔2 si ottiene verificando che ogni spazio metrico soddisfa l'assioma di numerabilità $\mathcal{N}_1$, dimostriamo l'equivalenza 2⇔3

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow \exists x_n \in A \text{ tale che } \lim_{n\to+\infty} d(x, x_n) = 0 \Leftrightarrow \exists x_n \in A \text{ tale che } x_n \to x$$

■

Definizione 2.1.5. Se (S, d_S) e (T, d_T) sono spazi metrici allora un'applicazione $f : S \to T$ è *uniformemente continua* se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $\delta > 0$ tale che per ogni coppia di elementi $x, y \in S$ per cui $d_S(x, y) < \delta$ si ha $d_T[f(x), f(y)] < \varepsilon$.

Diciamo invece che f è *L-Lipscitziana*, con $L > 0$ costante, se e solo se per ogni $x, y \in S$

$$d_T[f(x), f(y)] \leq L d_S(x, y)$$

in particolare se $L < 1$ allora f è una *contrazione.*

Dalla definizione si vede chiaramente che le funzioni lipscitziane sono uniformemente continue, mentre come suggerisce il nome le funzioni uniformemente continue sono continue. Difatti una funzione uniformemente continua è continua in ogni punto dello spazio S.

Proposizione 2.1.6. *Se S è uno spazio metrico e $H \subseteq S$ non vuoto allora l'applicazione*

$$d_H : x \in S \to d(x, H) \in \mathbb{R}$$

è 1-Lipscitziana

Dimostrazione. Presi $x, y \in S$ ed un generico $h \in H$ dalla disuguaglianza triangolare abbiamo

$$d_H(x) \leq d(x, h) \leq d(x, y) + d(y, h)$$

passando all'estremo inferiore in h abbiamo

$$d_H(x) \leq d(x, y) + d_H(y) \Rightarrow d_H(x) - d_H(y) \leq d(x, y)$$

Scambiando x ed y otteniamo la tesi. ■

Definizione 2.1.7. Una successione x_n in S è di *Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m, n > N$ si ha

$$d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$$

Proposizione 2.1.8. *Le successioni che ammettono limite sono di Cauchy.*

Dimostrazione. Esercizio. ■

Proposizione 2.1.9. *Se x_n è una successione di Cauchy in (S, d) ed esiste una sottosuccessione x_{n_k} tale che $x_{n_k} \to x \in S$ allora $x_n \to x$.*

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m, n > N$ si ha $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ ed esiste $N' \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > N'$ si ha $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. Quindi per ogni $n > N$ esisterà chiaramente un $k > N'$ sufficientemente grande per cui $N_k > N$ e quindi

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{N_k}\| + \|x_{N_k} - x\| < 2\varepsilon$$

e quindi $x_n \to x$. ■

Definizione 2.1.10. Lo spazio metrico S è *completo* se ogni successione di Cauchy ammette limite in S.

Proposizione 2.1.11. *Se (S, d) è uno spazio metrico completo e S' è un suo sottoinsieme chiuso allora (S', d) è ancora uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Prendiamo una generica successione di Cauchy $x_n \in S'$, per la completezza di S esisterà un $x \in S$ tale che $x_n \to x$. Poiché S' è chiuso allora $x \in S'$ e perciò S' è completo. ■

Teorema 2.1.12 (Banach-Cacioppoli)**.** *Se S è uno spazio metrico completo e f contrazione allora esiste un unico $x \in S$ tale che*

$$f(x) = x$$

Dimostrazione. Sia $L \in [0,1[$ tale che per ogni $x, y \in S$ vale $d[f(x), f(y)] \leq Ld(x, y)$, fissiamo $x_0 \in S$ allora definiamo la seguente successione per ricorrenza come

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

vogliamo dimostrare che è una successione di Cauchy. Innanzitutto

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d[f(x_n), f(x_{n-1})] \leq Ld(x_n, x_{n-1}) \\ \leq L^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq L^n d(x_1, x_0) = CL^n \end{aligned}$$

poi

$$d(x_{n+1}, x_0) \leq \sum_{i=0}^{n} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=0}^{n} CL^i = C\frac{1 - L^{n+1}}{1 - L} \leq \frac{C}{1 - L}$$

infine

$$d(x_{n+k}, x_k) \leq L^k d(x_n, x_0) \leq \frac{CL^k}{1 - L}$$

il termine al secondo membro non dipende da n e decresce al crescere di k, quindi è di Cauchy.

Poiché S è completo allora la successione tende a un certo x, dall'uniforme continuità di f si può passare al limite ottenendo $x = f(x)$. ■

2.2 Teorema di Baire

Nel primo capitolo abbiamo definito per uno spazio topologico generico i sottoinsiemi rari. Per come abbiamo definito la topologia su uno spazio metrico gli insiemi rari sono tutti quei sottoinsiemi la cui chiusura non contiene palle aperte.

Il seguente risultato, che riguarda gli spazi metrici completi, avrà una grande importanza nei prossimi capitoli.

Teorema 2.2.1 (Baire)**.** *Ogni spazio metrico completo è di* seconda categoria*, ovvero non è unione numerabile di insiemi rari.*

Dimostrazione. Per assurdo $S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$ con gli S_n chiusi e rari, allora esisterà un $x_1 \in S \setminus S_1$ e un $r_1 > 0$ tale che $D_{r_1}(x_1) \subseteq S \setminus S_1$ e $r_1 \leq \frac{1}{2}$. Essendo S_2 raro allora l'insieme $B_{r_1}(x_1) \setminus S_2$ è necessariamente non vuoto e aperto, possiamo perciò trovare un $x_2 \in B_{r_1}(x_1) \setminus S_2$ e $r_2 > 0$ tali che $D_{r_2}(x_2) \subseteq B_{r_1}(x_1) \setminus S_2$ e $r_2 \leq \frac{r_1}{2}$.

Continuando per ricorrenza otteniamo una successione di elementi x_n e reali r_n tali che

$$\begin{gathered} D_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq B_{r_n}(x_n) \\ B_{r_n}(x_n) \cap S_n = \emptyset \\ r_{n+1} \leq \frac{r_n}{2} \leq \frac{1}{2^n} \end{gathered}$$

osserviamo che x_n è una successione di Cauchy: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{2^{N+1}} < \varepsilon$ e per ogni $m, n > N$ è immediato dimostrare che $d(x_m, x_n) < 2r_N < \varepsilon$.

Ricordando che S è completo la successione x_n convergerà ad un certo x, inoltre per ogni $m \in \mathbb{N}$ chiaramente $x \in D_{r_m}(x_m)$ essendo tali insiemi chiusi, ciò implicherebbe che $x \notin \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$ assurdo. ■

Corollario 2.2.2. *Se S è uno spazio metrico ed $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi chiusi e rari di S allora $X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i$ non contiene punti interni.*

Dimostrazione. Per assurdo esistono $x \in S$ ed $r > 0$ tali che $B_r(x) \subseteq X$ e quindi $D_{r/2}(x) \subseteq X$. Sottoinsiemi chiusi di spazi metrici completi sono ancora spazi metrici completi e $X_i \cap D_{r/2}(x)$ è raro in $D_{r/2}(x)$. Ma

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} \left[X_i \cap D_{r/2}(x)\right] = X \cap D_{r/2}(x) = D_{r/2}(x)$$

il che è assurdo, perciò X non possiede punti interni. ■

Corollario 2.2.3. *Se X è uno spazio metrico completo e $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi aperti e densi allora $\bigcap_{i=1}^{+\infty} G_i$ è denso in S.*

Dimostrazione. Se G è aperto e denso allora $S \setminus G$ è chiuso e raro. Dal corollario precedente l'insieme

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} (S \setminus G_i) = S \setminus \bigcap_{i=1}^{+\infty} G_i$$

non contiene aperti, ciò implica che $\bigcap_{i=1}^{+\infty} G_i$ interseca ogni aperto di S ed è perciò denso. ■

2.3 Compattezza e teorema di Ascoli-Arzelà

Definizione 2.3.1. Uno spazio metrico S è *limitato* se e solo se esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $x, y \in S$

$$d(x, y) < M$$

Definizione 2.3.2. Sia X spazio metrico, allora

- X è *compatto* se e solo se per ogni ricoprimento aperto $\{V_i\}_{i\in I}$ di X esiste un sottoinsieme I' di I *finito* tale che
$$X = \bigcup_{i\in I'} V_i$$
- X è *sequenzialmente compatto* se ogni successione x_n di X ammette un'*estratta convergente* ad un punto di X;

- X è *relativamente sequenzialmente compatto* se ogni successione x_n di X ammette un'*estratta di Cauchy*;
- X è *precompatto* o *totalmente limitato* se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $x_1, x_2, \dots, x_n$ tali che
$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$$

Le prime 2 definizioni possono essere estese anche a spazi topologici generici, mentre le altre sono proprie degli spazi metrici.

Proposizione 2.3.3. *Se M è chiuso e N sequenzialmente compatto allora $d(M,N) = 0 \Leftrightarrow M \cap N \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. L'implicazione $\Leftarrow$ è banale, se $d(M,N) = 0$ allora esistono $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N$ tali che $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Dato che N è compatto per successioni avremo un'estratta y_{n_k} che convergerà ad un certo $y \in N$ da cui segue che

$$\lim_{k\to+\infty} d(x_{n_k}, y) \leq \lim_{k\to+\infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) + \lim_{k\to+\infty} d(y_{n_k}, y) = 0$$

e quindi x_{n_k} tende anch'esso a y. Dalla chiusura di M allora $y \in M$ e perciò $M \cap N \neq \emptyset$. ■

Osservazione. I singleton $\{x\}$ sono sempre sequenzialmente compatti.

Lemma 2.3.4. *Gli spazi metrici totalmente limitati sono limitati.*

Dimostrazione. Esistono $x_1, \dots, x_k$ in S tali che $S = \bigcup_{i=1}^{k} B_1(x_i)$, poniamo

$$M = \max_{i,j} d(x_i, x_j) + 2$$

allora per ogni $x, y \in S$ esistono i, j tali che $d(x, x_i) < 1$ e $d(y, x_j) < 1$, perciò $d(x,y) < M$ ottenendo la tesi. ■

Teorema 2.3.5. *Sia S spazio metrico, allora S è relativamente sequenzialmente compatto se e solo se S è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo che S non sia totalmente limitato, allora esisterà un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni scelta di un numero finito di punti $x_1, x_2, \dots, x_n$ di S le palle aperte $B_\varepsilon(x_i)$ non riescono a ricoprire tutto S.

Prendiamo $x_1 \in S$ arbitrario, per quanto detto prima esisterà sicuramente un punto $x_2 \notin B_\varepsilon(x_1)$ per quanto detto prima, ma ancora esisterà $x_3 \notin B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)$ e così via. Abbiamo trovato una successione $x_n \in S$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i) \Leftrightarrow d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon \text{ per ogni intero } i \leq n$$

e quindi questa successione non può possedere estratte di Cauchy.

Supponiamo ora S totalmente limitato e x_n una successione generica un S, se essa è definitivamente costante allora ammetterà sicuramente un'estratta di Cauchy perciò supponiamola senza perdere in generalità non definitivamente costante e quindi l'insieme $A_0 = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ conterrà un numero infinito di elementi distinti. Ora essendo S precompatto esisterà un insieme finito B_0 i cui elementi sono sfere di raggio unitario che ricoprono S, perciò esisterà $A_1 \subseteq A_0$ infinito i cui elementi sono interamente contenuti in un unico elemento di B_0, esisterà inoltre $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_1} \in A_1$. Esisterà ancora un insieme finito B_1 di sfere di raggio $\frac{1}{2}$ che ricopre S, allora esisterà un sottoinsieme $A_2 \subseteq A_1$ contenuto in un elemento fissato di B_1. Poniamo allora $n_2 > n_1$ tale che $x_{n_2} \in A_2$.

Procedendo per ricorrenza esisterà un ricoprimento B_k di palle aperte di raggio $\frac{1}{2^k}$ di S e un sottoinsieme infinito $A_{k+1} \subseteq A_k$ contenuto in un elemento fissato di B_k ed esisterà $n_{k+1} > n_k$ tale che $x_{n_{k+1}} \in A_{k+1}$. Ma allora per ogni $i > j$

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq \frac{1}{2^{j-1}}$$

che è un'estratta di Cauchy della successione iniziale. ■

Prima di enunciare il prossimo teorema abbiamo bisogno del seguente lemma preliminare

Lemma 2.3.6. *Sia S spazio metrico e x_n una successione di Cauchy che ha un'estratta convergente ad un certo x. Allora tutta la successione converge a x.*

Dimostrazione. Sia $x_{n_k} \in \mathbb{N}$ un'estratta che converge a x, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall k > N_\varepsilon\ d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'altronde per definizione di estratta di Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall m, n > M_\varepsilon\ d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dalla definizione di estratta vale chiaramente $i \leq n_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, allora per ogni $i > \max\{M_\varepsilon, N_\varepsilon\}$ valgono entrambe le disuguaglianze, in particolare

$$d(x_i, x) \leq d(x_i, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) < \varepsilon$$

completando così la dimostrazione. ■

Teorema 2.3.7 (Hausdorff). *Se S è uno spazio metrico allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *S compatto;*
2. *S sequenzialmente compatto;*
3. *S precompatto e completo.*

Dimostrazione. Il lettore sfruttando il teorema e il lemma precedente può agevolmente dimostrare che i punti 2 e 3 sono equivalenti. Ci basta perciò da dimostrare che 1 implica 2 e che 3 implica la 1.

Supponiamo che S non sia sequenzialmente compatto ovvero esiste una successione x_n che non ha estratte convergenti a nessun punto di S, in altre parole per ogni $x \in S$ esisterà un $r_x > 0$ tale che l'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B_{r_x}(x)\}$ è finito. Allora la famiglia $\{B_{r_x}(x)\}_{x \in S}$ è un ricoprimento aperto e se esistesse un sottoricoprimento finito di esso ci sarebbero solo un numero finito di indici n tali che x_n sia contenuto in almeno uno di essi, quindi S non può essere compatto. Allora la compattezza implica la compattezza sequenziale.

Ci basta dimostrare allora che se S è completo e totalmente limitato allora è compatto. Per assurdo sia $\mathcal{V}$ ricoprimento di aperti di S che non ammette sottoricoprimenti finiti, per la totale limitatezza esisterà una palla $B_1(x_1)$ tale che $\mathcal{V}$ non possiede sottoricoprimenti finiti di $B_1(x_1)$.

Si dimostra facilmente che anche $B_1(x_1)$ è totalmente limitato poiché contenuto in uno spazio totalmente limitato, quindi esiste una palla $B_{\frac{1}{2}}(x_2)$ con $d(x_1, x_2) < 1$ tale che $\mathcal{V}$ non ammetta sottoricoprimenti finiti. Continuando di questo passo troveremo una successione x_n tale che $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^{n-1}}$ tale che $\mathcal{V}$ non abbia sottoricoprimenti finiti di $B_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_n)$. Ma x_n è allora di Cauchy e per la completezza avrà limite $x \in S$.

Poiché esiste $V \in \mathcal{V}$ tale che $x \in V$ e sia $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq V$ esisterà sicuramente $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{r}{2}$ e $d(x_n, x) < \frac{r}{2}$ e quindi $B_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_n) \subseteq B_r(x) \subseteq V$ assurdo perché $\mathcal{V}$ non aveva sottoricoprimenti finiti su tale insieme.

Allora S deve essere per forza compatto. ■

Sia ora S uno spazio metrico *relativamente sequenzialmente compatto*, indichiamo con $C_b(S)$ l'insieme di tutte le funzioni che vanno da S in $\mathbb{R}$ *continue* e *limitate*. Su tale insieme possiamo definire la seguente metrica definita come

$$d^*(f, g) = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|$$

rendendo $[C_b(S), d^*]$ uno spazio metrico.

Definizione 2.3.8. Sia $\mathcal{F} \subseteq C_b(S)$ diciamo che

- $\mathcal{F}$ è *equilimitato* se e solo se esiste $M > 0$ tale che per ogni $f \in \mathcal{F}$ e per ogni $x \in S$ vale
$$|f(x)| < M$$
- $\mathcal{F}$ è *equicontinuo* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $f \in \mathcal{F}$ e per ogni x, y tali che $d(x, y) < \delta$ si ha
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Teorema 2.3.9 (Ascoli-Arzelà). *Se S è uno spazio metrico relativamente sequenzialmente compatto e $\mathcal{F}$ equilimitato ed equicontinuo allora ogni sua successione ammette un'estratta convergente in $C_b(S)$.*

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazioni in varie parti:

Parte 1 S è separabile. Per il teorema di Hausdorff S è precompatto, quindi per ogni $k \in \mathbb{N}$ esistono $x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_k}^k$ tali che $S = \bigcup_{i=1}^{n_k} B_{\frac{1}{k}}\left(x_i^k\right)$, poniamo ancora $\Sigma_k = \left\{x_1^k, \dots, x_{n_k}^k\right\}$ e $\Sigma = \bigcup_k \Sigma_k$ che è numerabile. Per comodità poniamo $\Sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Parte 2 Ogni successione in $\mathcal{F}$ possiede un'estratta convergente su Σ. Consideriamo adesso una successione $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$, allora la successione di reali $f_n(x_1)$ è limitata e quindi esiste un'estratta f_n^1 tale che $f_n^1(x_1)$ converge in $\mathbb{R}$. Ancora, $f_n^1(x_2)$ è limitata quindi esiste un'estratta f_n^2 di f_n^1 tale che $f_n^2(x_2)$ converge, chiaramente $f_n^2(x_1)$ tende allo stesso limite di $f_n^1(x_1)$.

Continuando in questo modo otteniamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ un'estratta f_n^k di f_n^{k-1} tale che $f_n^k(x_i)$ converge per ogni $i \leq k$, definiamo perciò la seguente successione di funzioni:

$$g_k(x) = f_k^k(x)$$

Dimostriamo ora che per ogni i si ha $\lim_{k\to+\infty} g_k(x_i) = \lim_{k\to+\infty} f_k^i(x_i)$. Ma questo in realtà è banale perché per ogni $k \geq i$ si ha $g_k \in \left\{f_j^i \;\middle|\; j \in \mathbb{N}\right\}$ ed è perciò un'estratta di tale successione.

Parte 3 g_k converge su tutto S. Sia $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ scelto in modo tale che $\frac{1}{k} < \delta$, quindi per ogni $x \in S$ esiste un $x_i^k \in \Sigma_k$ tale che $d\left(x, x_i^k\right) < 1/k < \delta$. Per la proprietà di equicontinuità avremo che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\left|g_n(x) - g_n\left(x_i^k\right)\right| < \varepsilon$$

D'altronde esiste $N(k) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x_i^k \in \Sigma_k$ (dato che tale insieme è finito) e per ogni $m, n > N(k)$ vale

$$\left|g_n\left(x_i^k\right) - g_m\left(x_i^k\right)\right| < \varepsilon$$

Consideriamo adesso $x \in S$ generico, allora per ogni $m, n > N(k)$ vale

$$\begin{aligned}|g_m(x) - g_n(x)| \leq \left|g_m(x) - g_m\left(x_i^k\right)\right| &+ \left|g_m\left(x_i^k\right) - g_n\left(x_i^k\right)\right| \\ &+ \left|g_n\left(x_i^k\right) - g_n(x)\right| \leq 3\varepsilon\end{aligned}$$

osserviamo che $N(k)$ non dipende in alcun modo dalla scelta di x, ma solamente da ε quindi la successione converge uniformemente, e quindi con la metrica d^*, su tutto S ad una certa funzione f che risulta chiaramente limitata.

Dimostriamo infine che f è continua. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$, $x \in S$ vale $|f(x) - g_n(x)| < \varepsilon$, dall'equicontinuità allora per ogni x, y con $d(x, y) < \delta$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g_N(x)| + |g_N(x) - g_N(y)| + |g_N(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon$$

■

Corollario 2.3.10. *Gli spazi metrici totalmente limitati sono separabili.*

Teorema 2.3.11. *Sia S spazio metrico* compatto*, allora un sottoinsieme $\mathcal{F}$ dello spazio metrico $[C_b(S), d^*]$ è compatto se e solo se è chiuso, equilimitato (ovvero limitato) ed equicontinuo.*

Dimostrazione. Il teorema di Ascoli-Arzelà dimostra l'implicazione $\Leftarrow$. Viceversa se $\mathcal{F}$ è compatto deve essere necessariamente equilimitato, in caso contrario difatti sarebbe possibile costruire una successione $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ con $d^*(f_n, f_1) \geq n$ che non può convergere (la dimostrazione è lasciata al lettore come esercizio).

Per assurdo $\mathcal{F}$ non è equicontinuo, ovvero

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tale che per ogni } k \in \mathbb{N}\, \exists x_k, y_k \in S, f_k \in \mathcal{F} \text{ tale che}$$
$$d(x_k, y_k) \leq \frac{1}{k} \wedge |f_k(x_k) - f_k(y_k)| \geq \varepsilon$$

e dalla compattezza di S, a meno di passare ad estratte, si ha $x_k \to x$ e $y_k \to y$ e $f_k \to f$ uniformemente. Perciò

$$\varepsilon < |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y_k)| + |f_k(y_k) - f(y_k)|$$

il che è assurdo perché il secondo membro converge a 0 per k tendente a $+\infty$. ■

2.4 Spazi metrici separabili

Lemma 2.4.1 (Estensione per uniforme continuità)**.** *Sia S metrico e $A \subseteq S$ denso. Consideriamo $f : A \to \mathbb{R}$ uniformemente continua su A, allora esiste un unica funzione $g : S \to \mathbb{R}$ uniformemente continua tale che $f = g$ su A.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in S \setminus A$ esiste una successione $x_n \in A$ che converge ad x, dall'uniforme continuità $f(x_n)$ è di Cauchy e quindi ammette limite. Osserviamo che se $y_n \in A$ è un'altra successione che tende ad x allora $d(x_n, y_n)$ tende a 0 e sempre dall'uniforme continuità anche $|f(x_n) - f(y_n)|$ tenderebbe a 0, quindi il limite non dipende dalla particolare successione scelta.

Possiamo perciò definire

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ \lim_{y \to x} f(y) & \text{se } x \in S \setminus A \end{cases}$$

da cui segue immediatamente l'unicità di tale estensione. L'unica cosa che ci rimane da dimostrare è che g sia uniformemente continua su S. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$

tale che per ogni $x, y \in A$ con $d(x,y) < \delta_\varepsilon$ vale $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Siano ora $x, y \in S$ con $d(x,y) < \frac{\delta_\varepsilon}{3}$, esisteranno allora $x', y' \in A$ tali che

$$\begin{aligned} d(x,x') &< \frac{\delta_\varepsilon}{3} \\ d(y,y') &< \frac{\delta_\varepsilon}{3} \\ |g(x) - f(x')| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ |g(y) - f(y')| &< \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

da cui $d(x', y') < \delta_\varepsilon$ e quindi $|f(x') - f(y')| < \frac{\varepsilon}{3}$ da cui $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ ovvero la tesi. ∎

Lemma 2.4.2 (Lindeloff)**.** *Se S è spazio metrico che soddisfa l'assioma di numerabilità $\mathcal{N}_2$ allora per ogni famiglia di aperti Σ di S esiste un sottoinsieme $\Sigma' \subseteq \Sigma$ numerabile tale che*

$$\bigcup_{A \in \Sigma} A = \bigcup_{A \in \Sigma'} A$$

Dimostrazione. Per comodità sia $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists C \in \Sigma \text{ tale che } B \subseteq C\}$, allora per ogni $x \in \bigcup_{A \in \Sigma} A$ esiste $A \in \Sigma$ tale che $x \in A$ perciò esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq A \to B \in \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ricopre $\bigcup_{A \in \Sigma} A$.

Per ogni n sia C_n un elemento di Σ tale che $B_n \subseteq C_n$. Poniamo infine

$$\Sigma' = \{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ottenendo così la tesi dato che deve sia ricoprire $\bigcup_{A \in \Sigma} A$ ma è anche contenuto in esso dato che $\Sigma' \subseteq \Sigma$. ∎

Lemma 2.4.3. *Gli spazi metrici separabili soddisfano l'assioma di numerabilità $\mathcal{N}_2$.*

Dimostrazione. Sia A sottoinsieme denso numerabile di S, ovvero per ogni $x \in S$, $r > 0$ si ha $S \cap B_r(x) \neq \emptyset$. Consideriamo ora la classe

$$\mathcal{B} = \left\{ B_q(x) \,\middle|\, x \in A \wedge q \in \mathbb{Q}^+ \right\}$$

è chiaramente numerabile. Per dimostrare che è anche una base dobbiamo mostrare che per ogni aperto U e $x \in U$ esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq U$.

Innanzitutto esiste un $r > 0$ e un elemento $y \in A$ tali che $y \in B_r(x) \subseteq U$ da cui, ponendo $r' = r - d(x,y) > 0$, abbiamo $B_{r'}(y) \subseteq B_r(x)$. La tesi segue immediatamente ricordando che esiste sempre un razionale q tale che $0 < q < r'$. ∎

Lemma 2.4.4. *Ogni sottoinsieme di uno spazio metrico separabile con la metrica indotta è ancora uno spazio metrico separabile.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso in S e A un suo sottoinsieme, poniamo

$$W = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; A \cap B_{\frac{1}{j}}(x_i) \neq \emptyset\right\}$$

e $x_{i,j} \in A \cap B_{\frac{1}{j}}(x_i)$ con $(i,j) \in W$.

Dalla densità in S segue che per ogni $x \in A$ esiste necessariamente un n_k tale che $x \in B_{\frac{1}{k}}(x_{n_k})$ e quindi $(n_k, k) \in W$ è numerabile. Infine osserviamo che

$$d(x, x_{n_k,k}) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_k,k}) \leq \frac{2}{k}$$

Perciò il sottoinsieme $\{x_{n_k,k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ è denso in A. ■

Capitolo 3

Spazi vettoriali topologici

3.1 Spazi vettoriali topologici

Definizione 3.1.1. Sia $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e τ una topologia su V. Allora $(V, \mathbb{K}, \tau, +, \cdot)$ è uno *spazio vettoriale topologico* se e solo se le seguenti applicazioni

$$\pi_1 : (x, y) \in V \times V \to x + y \in V$$
$$\pi_2 : (x, \alpha) \in V \times \mathbb{K} \to \alpha x \in V$$

sono applicazioni continue.

Si ricorda che su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$ si considera sempre la topologia usuale.

Proposizione 3.1.2. *Se V è uno spazio vettoriale topologico allora per ogni $x \in V$ e $t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ le applicazioni*

$$T_x : v \in V \to v + x \in V$$
$$P_t : v \in V \to tv \in V$$

sono omeomorfismi.

Dimostrazione. Basta dimostrare che sono continue in quanto

$$(T_x)^{-1} = T_{-x}$$
$$(P_t)^{-1} = P_{\frac{1}{t}}$$

Fissiamo un generico $x \in V$ e aperto A di V, per ogni $v \in (T_x)^{-1}(A)$ dalla continuità della esistono due aperti U, W di V tali che

$$(v, x) \in U \times W \subseteq \pi_1^{-1}(A)$$

in quanto $T_x v = \pi_1(v, x)$ e quindi $v \in U \subseteq T_x^{-1}(A)$ e perciò T_x è continua.
Vale un ragionamento analogo con P_t. ■

Proposizione 3.1.3. *Sia V spazio vettoriale topologico e $W \leq V$ un suo sottospazio vettoriale. Allora la chiusura $\overline{W}$ è ancora un sottospazio vettoriale di V.*

Dimostrazione. Presi $u, v \in \overline{W}$ per ipotesi esistono due successioni $u_n, v_n \in W$ tali che $u_n \to u$ e $v_n \to v$. Per ipotesi la somma è continua quindi $u_n + v_n \to u + v$ e $u + v \in \overline{W}$. Analogo con il prodotto esterno. ■

Definizione 3.1.4. Sia V spazio vettoriale topologico e $v \in V$, allora indichiamo con I_v l'insieme contenente tutti gli intorni di v ovvero

$$I_v = \{I \subseteq V \mid I \text{ intorno di } v\} = \{I \subseteq V \mid \exists A \in \tau \text{ tale che } v \in A \subseteq I\}$$

Proposizione 3.1.5. *Prendiamo $A \subseteq V$ nelle stesse ipotesi della proposizione precedente, allora*

$$A \textit{ è un intorno dello } 0 \Leftrightarrow v + A \textit{ è un intorno di } v \in V$$

Quindi $I_v = v + I_0 = \{v + I \mid I$ intorno dell'origine$\}$.

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla proposizione 3.1.2, difatti $T_v(x) = v + x$ è un omeomorfismo di V in sé stesso e perciò I è un intorno dell'origine se e solo se $T_v(I) = v + I$ è un intorno di v. ■

Quindi ogni sistema fondamentale di intorni di un generico punto può essere traslato nell'origine e viceversa.

Un sottoinsieme K di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V ($\mathbb{K}$ può essere uguale solo ad $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$ per quanto detto nel precedente capitolo) è *convesso* se e solo se per ogni $x, y \in K$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$$

analogamente un'applicazione $f : K \to \mathbb{R}$ definita su un convesso K si dice convessa se e solo se

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Definizione 3.1.6. Uno spazio vettoriale topologico si dice *localmente convesso* se e solo se esiste una base composta interamente da insiemi convessi.

Definizione 3.1.7. Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ diremo che un suo sottoinsieme non vuoto G è *bilanciato* se e solo se per ogni $v \in G$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| = 1$ si ha $\lambda v \in G$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora $|\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ e quindi G è bilanciato se e solo se $G = -G$. Invece se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vi è una quantità più che numerabile di tali λ, uno per ogni punto della circonferenza unitaria sul piano.

Proposizione 3.1.8. *Gli spazi vettoriali topologici localmente convessi ammettono un sistema fondamentale di intorni convessi e bilanciati nell'origine.*

Dimostrazione. Consideriamo un sistema fondamentale di intorni convessi dell'origine $\mathcal{G}$ allora per ogni $G \in \mathcal{G}$ definiamo

$$G^* = \bigcap_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ |\lambda|=1}} \lambda G$$

Poiché G^* è convesso e contiene l'origine dobbiamo solo dimostrare che è un intorno dello zero. Infatti poiché $G^* \subseteq G$ per ogni $G \in \mathcal{G}$ seguirebbe che la classe $\mathcal{H} = \{G^* \mid G \in \mathcal{G}\}$ sarebbe un sistema fondamentale di intorni dell'origine.

Dato che G è un intorno dell'origine per la continuità del prodotto esterno esiste un aperto $U \subseteq V$ contenente l'origine e un $\delta > 0$ tali che per ogni $u \in U$ e $|\lambda| < \delta$ si ha $\lambda u \in G$. L'insieme $U' = (\delta/2)U$ è ancora aperto e contiene l'origine quindi per ogni $v \in U'$ e $|\lambda| = 1$ si ha $2v/\delta \in U$ e

$$\lambda v = \left(\frac{\delta}{2}\lambda\right)\frac{2v}{\delta} \in G \Rightarrow v \in \lambda^{-1}G \Rightarrow v \in \bigcap_{\substack{\mu \in \mathbb{K} \\ |\mu|=1}} \mu G = G^*$$

dunque $U' \subseteq G^*$ e quindi G^* è un intorno dell'origine. ■

3.2 Seminorme

Definizione 3.2.1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, un'applicazione $p : V \to \mathbb{R}$ è una *seminorma* di V se e solo se

- $p(tx) = |t|\, p(x)$ per ogni $x \in V$ e $t \in \mathbb{K}$;
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ per $x, y \in V$.

Osservazione. Chiaramente $p(0) = 0$, ma se $p(x) = 0$ allora non è detto affatto che $x = 0$.

Inoltre $0 = p(x - x) \leq 2p(x)$ e quindi $p(x) \geq 0$ per ogni $x \in V$.

Definizione 3.2.2. Consideriamo $\mathcal{F} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di seminorme su V, allora $\mathcal{F}$ è *totale* o *separante* se per ogni $v \in V \setminus \{0\}$ esiste $\alpha \in A$ tale che $p_\alpha(v) \neq 0$.

Vogliamo costruire una topologia su V a partire da una famiglia di seminorme $\mathcal{S} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Innanzitutto definiamo l'insieme

$$I^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(w) = \{v \in V \mid p_{\alpha_i}(v - w) < \varepsilon_i \ \forall i\} = \bigcap_{i=1}^{n} I^{\varepsilon_i}_{\alpha_i}(w) \tag{3.2.1}$$

dove $n \in \mathbb{N}$, $v \in V$, $\alpha_i \in A$ ed $\varepsilon_i > 0$. Il nostro scopo è quello di definire su V una topologia per cui gli insiemi nella forma (3.2.1) siano aperti, in particolare potremmo considerare la topologia generata dagli $I^{\varepsilon}_{\alpha}(w)$.

Possiamo costruire questa topologia grazie al seguente risultato

Proposizione 3.2.3. *Considerata una famiglia di seminorme p_α, siano $v_1, v_2, w \in V$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ e α tali che $w \in I_\alpha^{\varepsilon_1}(v_1) \cap I_\alpha^{\varepsilon_2}(v_2)$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che*

$$I_\alpha^{\varepsilon}(w) \subseteq I_\alpha^{\varepsilon_1}(v_1) \cap I_\alpha^{\varepsilon_2}(v_2)$$

che si dimostra ponendo

$$\varepsilon = \min\left\{\varepsilon_1 - p_\alpha(w - v_1), \varepsilon_2 - p_\alpha(w - v_2)\right\}$$

e applicando la disuguaglianza triangolare. Quindi l'insieme

$$\mathcal{H}(\mathcal{F}) = \left\{ I_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}(u) \;\middle|\; u \in V \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \mathbb{R}^+ \wedge \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A \right\}$$

induce una topologia su V, detta topologia generata dalle seminorme p_α, e $H(\mathcal{F})$ ne è una base.

Lemma 3.2.4. *La topologia generata dalla famiglia di seminorme $\mathcal{F} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è la topologia iniziale di V generata dalle applicazioni*

$$f_{\alpha,u}(v) = p_\alpha(v - u)$$

Dimostrazione. Siano $u \in V$ ed $\varepsilon > 0$ allora avremo che

$$I_\alpha^{\varepsilon}(u) = f_{\alpha,u}^{-1}\left(]-\varepsilon, \varepsilon[\right)$$

e quindi gli elementi di $H(\mathcal{F})$ sono aperti anche rispetto alla topologia iniziale.

Viceversa vogliamo dimostrare che $f_{\alpha,u}^{-1}(U)$ è un aperto della topologia generata dalle seminorme per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che esiste $v \in V$ tale che $l_v = p_\alpha(v-u) \in U$ dunque esisterà $\varepsilon_v > 0$ tale che

$$]l_v - \varepsilon_v, l_v + \varepsilon_v[\subseteq U$$

Dimostriamo che $I_\alpha^{\varepsilon_v}(v) \subseteq f_{\alpha,u}^{-1}(U)$. Per ogni $w \in I_\alpha^{\varepsilon_v}(v)$ abbiamo infatti

$$|p_\alpha(w - u) - l_v| \leq p_\alpha(w - v) < \varepsilon_v$$

e quindi $f_{\alpha,u}(w) \in U$. Possiamo ripetere lo stesso ragionamento per ogni elemento di $f_{\alpha,u}^{-1}(U)$ il quale sarà perciò unione di elementi di $H(\mathcal{F})$ e quindi è un aperto della topologia generata dalla famiglia di seminorme $\mathcal{F}$. ■

Quindi è possibile utilizzare i risultati del primo capitolo anche alla topologia generata dalle famiglie di seminorme

Proposizione 3.2.5. *Sia V uno spazio vettoriale dotato della topologia τ generata dalla famiglia di seminorme $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Per ogni $v_n, v \in V$ sono equivalenti*

1. *La successione v_n converge a v in (V, τ);*

2. *Per ogni $\alpha \in A$ la successione di numeri reali $p_\alpha(v_n - v)$ converge a 0.*

Dimostrazione. Se per ogni $\alpha \in A$ abbiamo $p_\alpha(v_n - v) \to 0$ allora per ogni $u \in V$ $|p_\alpha(v_n - u) - p_\alpha(v - u)| \le p_\alpha(v_n - v) \to 0$ e quindi $p_\alpha(v_n - u) \to p_\alpha(v - u)$ e basta applicare la proposizione 1.4.3 per concludere la dimostrazione. ∎

Teorema 3.2.6. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ munito della topologia generata da una qualunque famiglia di seminorme $\mathcal{F} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Allora V è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, inoltre se la famiglia di seminorme è totale allora V è uno spazio di Hausdorff.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che la somma è continua. Fissiamo un generico intorno $I^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}(u+v)$ di $u+v$, allora per ogni $u', v' \in V$ che soddisfano per ciascun indice i compreso tra 1 e k le disuguaglianze

$$p_{\alpha_i}(u - u') < \frac{\varepsilon_i}{2}$$
$$p_{\alpha_i}(v - v') < \frac{\varepsilon_i}{2}$$

avremo che $u' + v' \in I^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}(u+v)$ e quindi la somma è continua nel generico punto $(u, v) \in V \times V$, perciò è continua su tutto lo spazio.

Dimostriamo ora che il prodotto esterno è continuo rispetto a tale topologia. Fissiamo $u \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e un generico intorno $I^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}(\lambda u)$ di λu, allora per ogni $1 \le i \le k$, $v \in V$ e $\mu \in \mathbb{K}$ con $|\mu| < |\lambda| + 1$ avremo che

$$p_{\alpha_i}(\lambda u - \mu v) \le p_{\alpha_i}(\lambda u - \mu u) + p_{\alpha_i}(\mu u - \mu v) \le |\lambda - \mu|\, p_{\alpha_i}(u) + (|\lambda| + 1) p_{\alpha_i}(u - v)$$

Da queste considerazioni se $v \in V$ e $\mu \in \mathbb{R}$ soddisfano le seguenti disuguaglianze

$$p_{\alpha_i}(v - u) < \frac{\varepsilon_i}{2(|\lambda| + 1)}$$
$$|\mu - \lambda| < \min\left\{\frac{\min_i \varepsilon_i}{2 \max_i p_{\alpha_i(u)}}; 1\right\}$$

allora μv appartiene a $I^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}(\lambda u)$. Per definizione di continuità il prodotto esterno è continuo nel generico punto $(u, \lambda) \in V \times \mathbb{R}$ e perciò continuo su tutto lo spazio.

D'altronde ogni aperto $I^{\varepsilon}_{\alpha}(v)$ è convesso perciò la base $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ è composta interamente da insiemi convessi e lo spazio perciò è localmente convesso.

Se $\mathcal{F}$ è totale allora se $u \neq v$ esisterà un $\alpha \in A$ tale che $p_\alpha(v - u) = R > 0$, allora i due aperti $I^{\frac{R}{3}}_{\alpha}(u)$ e $I^{\frac{R}{3}}_{\alpha}(v)$ sono disgiunti. ∎

3.3 Funzionale di Minkowski

Il teorema precedente, già notevole di per sé, può essere addirittura invertito: ovvero la topologia di ogni spazio vettoriale topologico localmente convesso è necessariamente generata da una famiglia di seminorme. Prima di poterlo dimostrare introduciamo un po' di definizioni:

Definizione 3.3.1. Sia V spazio vettoriale generico e $K \subseteq V$, un punto $v \in V$ è *internale* per K se e solo se per ogni $u \in V$ esiste $\delta_0 > 0$ tale che per ogni $\delta_0 > \delta \geq 0$ $v + \delta u \in K$. I punti di V che non sono internali né a K né a $V \setminus K$ sono detti *frontalieri* per K.

Proposizione 3.3.2. *Se V è uno spazio vettoriale topologico su $\mathbb{K}$ allora ogni punto $x \in K \subseteq V$ interno a K è internale.*

Dimostrazione. L'applicazione

$$h : \lambda \in \mathbb{K} \to x + \lambda v \in V$$

è continua per ogni $x, v \in V$, quindi essendo K un intorno di $x = h(0)$ per continuità esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq \delta$ si ha $x + \lambda v = h(\lambda) \in K$ e in particolare per λ reale positivo. Quindi x è un punto internale. ■

Quindi i punti internali fungono da "surrogato" dei punti interni, con l'evidente vantaggio che sono definiti in spazi vettoriali senza necessariamente una qualche struttura topologica.

Definizione 3.3.3. Consideriamo ora $K \subseteq V$ sottoinsieme convesso tale che 0 sia un punto internale di K. Definiamo allora per ogni $v \in V$ l'insieme

$$I(v) = \left\{ \alpha > 0 \,\middle|\, \alpha^{-1} v \in K \right\}$$

e la funzione

$$p_K : v \in V \to \inf I(v) \in [0, +\infty]$$

dove $p_K(v) = +\infty \Leftrightarrow I(v) = \emptyset$.

Tale funzione è chiamata *funzionale di Minkowski.*

Proposizione 3.3.4. *Sia p_K il funzionale di Minkowski di un convesso K che possiede 0 come punto internale. Allora*

1. $p_K(v) < +\infty$;
2. *Per ogni $\alpha > 0$ si ha $p_{(\alpha K)}(v) = \alpha^{-1} p_K(v)$;*
3. *Per ogni $\alpha \geq 0$ vale $p_K(\alpha v) = \alpha p_K(v)$;*
4. *Se K è bilanciato allora per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ vale $p_K(\alpha v) = |\alpha|\, p_K(v)$;*
5. *Se $v \in K$ allora $p_K(v) \leq 1$, se $v \in V \setminus K$ allora $p_K(v) \geq 1$;*
6. $p_K(u + v) \leq p_K(u) + p_K(v)$;
7. *Il punto v è internale a K se e solo se $p_K(v) < 1$;*
8. *Il punto v è frontaliero rispetto a K se e solo se $p_K(v) = 1$.*

Dimostrazione. Analizziamo i vari casi:

1. Dalla definizione di internale esiste $N_0 > 0$ tale che per ogni $N > N_0$ si ha $N^{-1}v \in K \Rightarrow]N_0, +\infty[\subseteq I(v)$.

2. Innanzitutto $v \in \alpha K$ se e solo se $\alpha^{-1}v \in K$ quindi

$$\begin{aligned} p_{(\alpha K)}(v) = \inf \left\{ t > 0 \,\middle|\, \frac{v}{t} \in \alpha K \right\} &= \inf \left\{ t > 0 \,\middle|\, \frac{v}{\alpha t} \in K \right\} \\ &= \inf \left\{ \alpha^{-1} t > 0 \,\middle|\, \frac{v}{t} \in K \right\} \\ &= \alpha^{-1} p_K(v) \end{aligned}$$

3. Banale in quanto $t^{-1}v = (t\alpha)^{-1}(\alpha v)$ e quindi $t \in I(v)$ se e solo se $\alpha t \in I(\alpha v)$.

4. Dimostriamo che per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| = 1$ si ha $p_K(v) = p_K(\lambda v)$. Se $\alpha_n > 0$ è una successione minimizzante tendente ad $p_K(v)$ con $\alpha_n^{-1}v \in K$ allora per ipotesi $\alpha_n^{-1}(\lambda v) \in K$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| = 1$ e perciò $p_K(v) \geq p_K(\lambda v)$. Invertendo v con λv e λ con λ^{-1} otteniamo l'uguaglianza.

5. $v \in K \Leftrightarrow [1, +\infty] \subseteq I(v)$ sfruttandone la convessità, se invece $v \in V - K$ consideriamo un generico $\delta > 0$ tale che $\delta^{-1}v \in K$. Sempre per convessità deve essere $\delta^{-1} < 1$, perciò per l'arbitrarietà di δ segue immediatamente che $p_K(v) \geq 1$.

6. Prendiamo due successioni $\alpha_n, \beta_n > 0$ tendenti rispettivamente a $p_K(u)$ e $p_K(v)$ tali che $\alpha_n^{-1}u, \beta_n^{-1}v \in K$, per convessità allora

$$(\alpha_n + \beta_n)^{-1}(u + v) \in K$$

   (il lettore può verificarla senza difficoltà) e quindi anche la successione $\alpha_n + \beta_n$ rientra tra quelle "ammissibili" per determinare $p_K(u + v)$. Perciò $p_K(u + v) \leq p_K(u) + p_K(v)$.

7. Dimostriamo entrambe le implicazioni. Supponiamo che v sia internale, esisterà un certo $\delta > 0$ tale che $v + \delta v \in K$ (è sempre possibile sceglierne uno positivo) da cui $(1 + \delta)^{-1} \in I(v)$ e perciò $p_K(v) < 1$.

   Viceversa, esisterà un $\varepsilon \in]0, 1[$ tale che $p_K(v) < 1 - \varepsilon$ e per ogni $u \in V$ e $\delta > 0$ si ha

$$p_K(v + \delta u) \leq p_K(v) + \delta p_K(u) < 1 - \varepsilon + \delta p_K(u)$$

   Se $p_K(u) = 0$ allora prendiamo un δ qualunque altrimenti scegliamo

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{p_K(u)}$$

   in entrambi i casi $p_K(v + \delta u) < 1 \Rightarrow 1 \in]p_K(v + \delta u), +\infty[\subseteq I(v + \delta u)$ che implica $v + \delta u \in K$.

8. Dobbiamo solo dimostrare che v è internale a $V-K$ se e solo se $p_K(V) > 1$. Se v è internale a $V-K$ allora esiste $\delta \in]0,1[$ tale che $v-\delta v$ non appartiene a K e perciò $I(v)$ non conterrà un numero reale strettamente maggiore di 1. Tale insieme è però connesso e superiormente illimitato perciò anche il suo estremo inferiore deve essere strettamente maggiore di 1.

   Viceversa esiste $\varepsilon > 0$ tale che $p_K(v) > 1+\varepsilon$, in tal caso per ogni $u \in V$ e $\delta > 0$ si ha

   $$p_K(v) = p_K(v+\delta u-\delta u) < p_K(v+\delta u)+\delta p_K(-u) \Leftrightarrow p_K(v+\delta u) > 1+\varepsilon-\delta p_K(-u)$$

   Se $p_K(-u) = 0$ allora prediamo δ arbitrario, altrimenti sia

   $$\delta < \frac{\varepsilon}{p_K(-u)}$$

   e ragionando come nel punto precedente $v+\delta u \in V-K$.

■

Siamo ora in grado di invertire il teorema 3.2.6

Teorema 3.3.5 (Von Neumann). *Consideriamo un generico spazio vettoriale topologico localmente convesso V con topologia τ, allora esiste una famiglia di seminorme $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ che la genera. Se V è uno spazio di Hausdorff allora tale famiglia di seminorme è anche totale*

Dimostrazione. Dalla proposizione 3.1.8 esisterà un sistema fondamentale di intorni convessi e bilanciati dell'origine, che possiamo supporre anche aperti in quanto l'interno di un insieme convesso e bilanciato se è non vuoto sarà ancora convesso e bilanciato. Indichiamo con $\mathcal{H}_0$ questo sistema fondamentale di intorni dunque per ogni $K \in \mathcal{H}_0$ l'origine sarà un punto internale grazie alla proposizione 3.3.2.

Per ogni $K \in \mathcal{H}_0$ il funzionale di Minkowski p_K è una seminorma e quindi la classe di seminorme $\{p_K\}_{K\in\mathcal{H}_0}$ genera su V una topologia τ' che rende V uno spazio vettoriale topologico localmente convesso.

Per ogni $v \in V$ si ha $v \in K \Leftrightarrow p_K(v) < 1$ e quindi $K = I_K^1(0)$ da cui segue immediatamente che

$$I_{K_1,\ldots,K_k}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}(0) = \bigcap_{i=1}^{k} \varepsilon_i K_i$$

e quindi $\tau = \tau'$.

Se ora (V,τ) è uno spazio di Hausdorff allora per ogni $u \neq 0$ esiste $K \in \mathcal{H}_0$ tale che $u \notin K$ ovvero $p_K(u) \geq 1$ e quindi la classe di seminorme è totale. ■

3.4 Topologie deboli di spazi vettoriali topologici

Consideriamo un generico spazio vettoriale V con V^+ il suo duale algebrico. Osserviamo innanzitutto che per ogni $f \in V^+$ l'applicazione

$$|f| : x \in V \to |f(x)| \in \mathbb{R}$$

è una seminorma su V. Quindi, fissata una famiglia di funzionali lineari $\mathcal{F} \subseteq V^+$ *totale* su V, potremmo generare su V due diverse topologie:

- La topologia iniziale $\mathcal{W}(\mathcal{F})$ definita nella sezione 1.4;
- Una topologia da spazio vettoriale topologico localmente convesso generato dalla famiglia di seminorme $\{|f|\}_{f\in\mathcal{F}}$ come spiegato sopra.

In realtà le due topologie coincidono in quanto gli aperti che le generano coincidono:

$$I^{\varepsilon}_{|f|}(x) = L_f^{B_{x,\varepsilon}}(x)$$

dove $B_{x,\varepsilon} = \{\mu \in \mathbb{K} \mid |\mu - f(x)| < \varepsilon\}$.

Chiameremo quindi *topologia debole* di V generata da $\mathcal{F} \subseteq V^+$ la topologia iniziale $\mathcal{W}(\mathcal{F})$. Inoltre V dotato della topologia debole $\mathcal{W}(\mathcal{F})$ è uno spazio vettoriale localmente convesso di Hausdorff e quindi soddisfa tutte le proprietà degli spazi vettoriali topologici localmente convessi.

Definizione 3.4.1. Sia V spazio vettoriale topologico munito della topologia debole generata da $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq V^+$. Una successione $v_n \in V$ è detta *debolmente di Cauchy* se e solo se per ogni $\alpha \in A$ la successione $f_\alpha(v_n)$ converge ovvero

$$\forall\varepsilon > 0, \alpha \in A\, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall m, n > N \;\; |f_\alpha(v_m) - f_\alpha(v_n)| < \varepsilon$$

difatti per la completezza di $\mathbb{R}$ la successione $f_\alpha(v_n)$ convergerà ad un certo $r_\alpha \in \mathbb{R}$.

Uno spazio vettoriale è *debolmente completo* se le successioni debolmente di Cauchy convergono debolmente, quindi esisterà $v \in V$ tale che

$$r_\alpha = f_\alpha(v)$$

Capitolo 4

Spazi normati e di Banach

4.1 Norme

Definizione 4.1.1. Sia X spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, una *norma* su X è un'applicazione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tale che:

- $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- $\|tx\| = |t| \, \|x\|$ per ogni $x \in X$ e $t \in \mathbb{K}$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per $x, y \in X$.

Una norma è chiaramente anche una seminorma quindi $\|x\| \geq 0$ per ogni $x \in X$, quindi dalla norma possiamo indurre su X una topologia che lo rende uno spazio vettoriale topologico localmente convesso di Hausdorff. D'altronde spazio normato è anche uno metrico ponendo

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

e le due topologie coincidono in quanto per ogni $x \in X$ ed $r > 0$

$$B_r(x) = I^r_{\|\cdot\|}(x)$$

dove $B_r(x)$ è la palla unitaria indotta dalla metrica d mentre $I^r_{\|\cdot\|}(x)$ è l'intorno definito in (3.2.1).

Definizione 4.1.2. Uno spazio normato X è di *Banach* se il relativo spazio metrico è completo.

Proposizione 4.1.3. *Se X è uno spazio di Banach e $N \leq X$ è un sottospazio chiuso allora anche N è uno spazio di Banach rispetto alla medesima norma.*

Dimostrazione. Ogni successione x_n di Cauchy in N è di Cauchy anche in E e quindi esisterà $x \in E$ per cui $x_n \to x$. Ma N è chiuso in E quindi $x \in N$. ∎

Definizione 4.1.4. Siano X, X' spazi normati e $f : X \to X'$ lineare, f è *limitato* se e solo se esiste $L > 0$ tale che per ogni $x \in X$

$$\|f(x)\| \leq L \|x\|$$

Proposizione 4.1.5. *Siano X, X' spazi normati e $f : X \to X'$ lineare, sono equivalenti*

1. *f limitato;*
2. *f continuo su tutto X;*
3. *f continuo in 0.*

Dimostrazione. Esercizio per lo studente. ■

Definizione 4.1.6. Siano X, X' spazi normati, lo spazio

$$L(X, X') = \{f : X \to X' \mid f \text{ lineare e limitata}\}$$

è uno spazio normato su $\mathbb{K}$ normato con norma

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

Poniamo inoltre $X^* = L(X, \mathbb{K})$ che chiamiamo *duale* di X.

Proposizione 4.1.7. *Siano X, Y, Z spazi normati e $f \in L(X, Y)$, $g \in L(Y, Z)$. Allora $g \circ f \in L(X, Z)$ e*

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$$

Dimostrazione. per ogni $x \in X$

$$\|(g \circ f)(x)\| = \|g[f(x)]\| \leq \|g\| \|f(x)\| \leq \|g\| \|f\| \|x\|$$

e per l'arbitrarietà di x segue la tesi. ■

Proposizione 4.1.8. *Se X è uno spazio normato e Y spazio di Banach allora anche $L(X, Y)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia f_n successione di Cauchy su $L(X, Y)$, ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m, n > N$ e per ogni $x \in X$

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$$

Quindi $f_n(x)$ è una successione di Cauchy per ogni $x \in X$ perciò ammette limite. Poniamo

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

che è ancora lineare, passando ancora al limite in m si ha

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \Rightarrow \|f(x)\| \leq (\|f_n\| + \varepsilon) \|x\|$$

per ogni $n > N$ ed è quindi limitata. L'unica cosa che bisogna dimostrare che f_n converge a f in norma, difatti per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ e per ogni $x \in X$

$$\frac{\|f_n(x) - f(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \|f_n - f\| \leq \varepsilon$$

dimostrando così la tesi. ■

Osservazione. Se X è uno spazio normato generico allora X^* è sempre uno spazio di Banach.

Consideriamo adesso uno spazio vettoriale complesso X dotato di norma $\|\cdot\|$, chiaramente $(X_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|)$ è ancora uno spazio normato come è facile da verificare. Abbiamo già visto all'inizio che non tutti gli operatori lineari su $X_{\mathbb{R}}$ possono essere trasportati su X, vedremo ora che tra gli elementi del duale è invece possibile. Innanzitutto dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ indicheremo con $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$ rispettivamente la parte reale e immaginaria di z.

Lemma 4.1.9. *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato complesso, allora esiste un'applicazione biiettiva*

$$F : X^* \to X_{\mathbb{R}}^*$$

che conserva la norma.

Dimostrazione. Poiché gli elementi di X^* sono funzionali nella forma $f : X \to \mathbb{C}$ possiamo definire F in modo tale che per ogni $x \in X$

$$F(f)(x) = \operatorname{Re} f(x) \in \mathbb{R}$$

chiaramente $F(f)(x + y) = F(f)(x) + F(f)(y)$ e $F(f)(rx) = rF(f)(x)$ per ogni $r \in \mathbb{R}$ e quindi $F(f) \in X_{\mathbb{R}}^+$ dimostriamo adesso che $\|F(f)\| = \|f\|$.

Innanzitutto abbiamo

$$|f(x)| = \sqrt{[\operatorname{Re} f(x)]^2 + [\operatorname{Im} f(x)]^2} \geq |\operatorname{Re} f(x)|$$

dunque $F(f)$ è limitata e $\|F(f)\| \leq \|f\|$. Tralasciamo per il momento la dimostrazione dell'uguaglianza per la biettività. Se $\operatorname{Re} f(x) = 0$ per ogni $x \in X$ allora $0 = \operatorname{Re} f(ix) = -i \operatorname{Im} f(x)$ e quindi $f(x) = 0$, se ora prendiamo $f, g \in X^*$ tali che $F(f) = F(g)$ allora $F(f - g) = 0$ per la $\mathbb{R}$-linearità della parte reale, dunque F è iniettiva.

Consideriamo ora una qualunque $g : X \to \mathbb{R}$ lineare continua, possiamo allora definire $g' : X \to \mathbb{C}$ in modo tale che

$$g'(x) = g(x) - ig(ix) \tag{4.1.1}$$

Chiaramente g' è $\mathbb{R}$-lineare mentre $g'(ix) = g(ix) - ig(-x) = (-i)ig(ix) + ig(x) = ig'(x)$ e quindi g' è $\mathbb{C}$-lineare. Per la continuità basta osservare che

$$|g'(x)| \leq |g(x)| + |g(ix)| \leq \|g\| \, \|x\| + \|ix\| = \|g\| \, \|x\|$$

infine $F(g') = g$ e quindi F è suriettiva e biettiva mentre (4.1.1) è la sua inversa.

Per dimostrare che F conserva la norma fissiamo $f \in X^* \setminus \{0\}$ e sia $x \in X$ per cui $f(x) \neq 0$, definiamo

$$\lambda = \frac{f(x)}{|f(x)|} \in \mathbb{C}$$

applicando la (4.1.1)

$$|f(x)| = \frac{f(x)}{\lambda} = F(f)\left(\frac{x}{\lambda}\right) - iF(f)\left(\frac{ix}{\lambda}\right)$$

Ma il primo membro è reale, perciò $F(f)\,(ix/\lambda) = 0$ e quindi

$$|f(x)| \leq \|F(f)\| \left\|\frac{x}{\lambda}\right\| = \|F(f)\|\,\|x\|$$

per un certo $x \in X$, che combinata con la precedente uguaglianza e con la definizione di norma duale avremo $\|f\| = \|F(f)\|$. ■

Sia X uno spazio normato con norma $\|\cdot\|$, prendiamo un sottospazio chiuso $N \leq X$ diverso da X. Possiamo allora definire lo *spazio quoziente* X/N che sarà ancora uno spazio vettoriale. Si ricorda che gli elementi di X/N sono i sottoinsiemi di X nella forma $[x] = x + N$.

Definiamo su X/N l'applicazione

$$\|x + N\| = \inf_{x-y\in N} \|y\| = \inf_{z\in N} \|x + z\| = d(x, N)$$

Innanzitutto la definizione precedente è ben posta in quanto

$$\begin{aligned} x + N = y + N \Rightarrow \|x + N\| &= \inf_{z\in N} \|x + z\| \\ &= \inf_{z\in N} \|y + x - y + z\| = \inf_{z\in N} \|y + z\| = \|y + N\| \end{aligned}$$

Dimostriamo la disuguaglianza triangolare, le altre le lasciamo al lettore: per ogni $z, z' \in N$

$$\|x + y + N\| \leq \|x + y + z + z'\| \leq \|x + z\| + \|y + z'\|$$

questo per ogni scelta di z e z', quindi passando agli estremi inferiori segue la tesi.

Si osserva che l'applicazione lineare canonica

$$\pi_N : x \in X \to x + N \in X/N$$

è banalmente continua.

Teorema 4.1.10. *Sia X spazio normato e $N \leq X$ chiuso e diverso da X. Allora*

$$X \text{ è uno spazio di Banach } \Leftrightarrow N \text{ e } X/N \text{ sono spazi di Banach}$$

Dimostrazione. Sia X uno spazio di Banach, allora anche N è uno spazio di Banach e dobbiamo perciò dimostrare la completezza solo di X/N. Sia $x_n + N$ successione di Cauchy quindi per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $N_k \in \mathbb{N}$ *crescente* tale che per ogni $m, n > N_k$

$$\|x_n - x_m + N\| < \frac{1}{2^k}$$

esisterà allora un $z_k \in N$ tale che

$$\left\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k} + z_k\right\| < \frac{1}{2^k}$$

Definiamo adesso $y_k = x_{N_{k+1}} - x_{N_1} + \sum_{i=1}^k z_i$ essa rimane ancora di Cauchy e pertanto ha un'estratta convergente a y. Infine si ha

$$\|x_{N_k} - x_{N_1} - y + N\| \leq \left\|x_{N_k} - x_{N_1} - y + \sum_{i=1}^k z_i\right\| = \|y_k - y\|$$

e quindi $x_{N_k} + N$ converge ad $y + x_{N_1} + N$.

Supponiamo ora che N e X/N sono spazi di Banach e consideriamo una successione di Cauchy $x_n \in E$, allora anche $x_n + N$ è di Cauchy in X/N e per ipotesi esiste $x \in X$ tale che $x_n + N \to x + N$. Esisterà inoltre per ogni $k \in \mathbb{N}$ una successione crescente $N_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|x_{N_k} - x + N\| < \frac{1}{2^k}$$

e quindi esisteranno $y_k \in N$ tali che $\|x_{N_k} - x - y_k\| < 1/2^k$.

Poiché x_{N_k} è una successione di Cauchy anche y_k lo è quindi esisterà $y \in N$ tale che $y_k \to y$. Mettendo insieme tutti i pezzi avremo che

$$\|x_{N_k} - x - y\| \leq \|x_{N_k} - x - y_k\| + \|y_k - y\| \to 0$$

e il teorema è così dimostrato. ■

4.2 Teorema di Hahn-Banach

In questa sezione daremo una versione più generale del teorema di Hahn-Banach su spazi vettoriali non normati ma provvisti di seminorma (si veda la definizione 3.2.1). Ciononostante tale teorema viene enunciato qui piuttosto che nel capitolo degli spazi vettoriali topologici in quanto le applicazioni più interessanti si ottengono nel caso in cui la seminorma è una norma vera e propria.

Teorema 4.2.1 (Hahn-Banach)**.** *Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $W \leq V$ un suo sottospazio. Sia inoltre p una seminorma su V e $f : W \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che per ogni $x \in W$*

$$f(x) \leq p(x)$$

Allora esiste un funzionale lineare $\overline{f} : V \to \mathbb{R}$ tale che $\overline{f}(x) = f(x)$ se $x \in W$ e per ogni $x \in V$ si ha

$$\overline{f}(x) \leq p(x)$$

Dimostrazione. Consideriamo la seguente classe

$$\mathcal{F} = \{g : U \to \mathbb{R} \mid g \text{ lineare } \wedge W \leq U \leq V \wedge f(x) = g(x) \text{ se } x \in W \wedge g(x) \leq p(x)\}$$

e definiamo la seguente relazione d'ordine su $\mathcal{F}$:

$$g \preceq h \Leftrightarrow W_g \leq W_h \wedge g(x) = h(x) \text{ per ogni } x \in W_g$$

Il lettore può dimostrare facilmente che tale classe è induttiva, quindi dal lemma di Zorn ammette un elemento massimale $\overline{f} : U \to \mathbb{R}$. Per assurdo U è diverso da V e sia $x \in V \setminus U$, definiamo perciò

$$g : u + tx \in U \oplus \langle x \rangle \to \overline{f}(u) + \alpha t$$

con α opportuno che ci ricaveremo dopo. L'applicazione g è chiaramente lineare definita su un sottospazio strettamente più grande di U ed estende la funzione di partenza f, dobbiamo solo dimostrare che

$$g(u + tx) = \overline{f}(u) + \alpha t \leq p(u + tx)$$

Dividendo per $|t|$ otteniamo le seguenti disuguaglianze

$$\begin{aligned} \overline{f}(u) - \alpha &\leq p(u - x) \\ \overline{f}(v) + \alpha &\leq p(v + x) \end{aligned}$$

ottenute rispettivamente per t negativo e positivo. La costante α deve perciò soddisfare

$$\overline{f}(u) - p(u - x) \leq \alpha \leq p(v + x) - \overline{f}(v) \text{ per ogni } u, v \in U$$

L'esistenza di un tale α equivale perciò a verificare se per ogni $u, v \in U$ vale

$$\overline{f}(u) + \overline{f}(v) \leq p(v + x) + p(u - x)$$

che è banalmente vera come il lettore può dimostrare senza alcuna difficoltà. Quindi possiamo prendere α in modo tale che

$$\sup_{u \in U} \left[\overline{f}(u) - p(u - x)\right] \leq \alpha \leq \inf_{v \in U} \left[p(v + x) - \overline{f}(v)\right]$$

e quindi $g \in \mathcal{F}$, ottenendo un assurdo. ■

Teorema 4.2.2. *Sia X spazio normato su $\mathbb{K}$ e $Y \leq X$ dotato della stessa norma di X, allora per ogni $f \in Y^*$ esiste un funzionale $F \in X^*$ tale che $\|F\| = \|f\|$ e per ogni $y \in Y$ si ha $f(y) = F(y)$*

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Consideriamo la seminorma

$$p(x) = \|f\| \, \|x\|$$

chiaramente $f(x) \leq p(x)$ per continuità, da Hahn-Banach esiste perciò F funzionale lineare definito su tutto X che estende f e tale che $F(x) \leq \|f\| \, \|x\|$ per ogni $x \in X$. In particolare

$$-F(x) = F(-x) \leq \|f\| \, \|x\|$$

e quindi $F \in X^*$ con $\|F\| \leq \|f\|$. Però essendo F un prolungamento di f segue immediatamente che $\|f\| \leq \|F\|$ e quindi la tesi.

Consideriamo adesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e sia $f \in Y^*$ allora $F(f) \in Y_{\mathbb{R}}^*$ dove F è la funzione definita nel lemma 4.1.9. Poiché $Y_{\mathbb{R}} \leq X_{\mathbb{R}}$ esisterà $g' \in X_{\mathbb{R}}^*$ che lo estende su X e

$$\|f\| = \|F(f)\| = \|g'\| = \left\|F^{-1}(g')\right\|$$

inoltre la funzione $g = F^{-1}(g') \in X^*$ è una estensione di f in quanto per ogni $y \in Y$ avremo $iy \in Y$ e

$$g(y) = g'(y) - ig'(iy) = \operatorname{Re} f(y) - i \operatorname{Re} f(iy) = f(y)$$

Il teorema è così dimostrato. ■

Corollario 4.2.3. *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$ allora per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ esiste $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ tale che*

$$\|x\| = |f(x)| = \max_{g \neq 0} \frac{|g(x)|}{\|g\|}$$

Dimostrazione. Consideriamo il funzionale

$$g : tx \in \langle x \rangle \to t \, \|x\| \in \mathbb{K}$$

chiaramente g è lineare e $\|g\| = 1$, quindi da Hahn-Banach esiste $f \in X^*$ che estende g su tutto X e $\|f\| = 1$. In particolare avremo che $f(x) = g(x) = \|x\|$ poiché $x \in \langle x \rangle$. ■

Proposizione 4.2.4. *Se X è uno spazio normato e $Y < X$ sottospazio chiuso diverso da X e fissiamo $x \in X \setminus Y$. Allora esiste $f \in X^*$ di norma unitaria che vale* 0 *su Y e $f(x) = d(x, Y)$.*

Dimostrazione. Applichiamo il corollario precedente allo spazio X/Y rispetto al punto $x + Y \neq Y$ avremo così un funzionale $F : X/Y \to \mathbb{K}$ lineare continuo di norma unitaria tale che $F(x + Y) = \|x + Y\| = d(x, Y)$.

Definiamo allora

$$f : z \in X \to F(z + Y) \in \mathbb{K}$$

allora f è ancora lineare in X e si annulla su Y. Ora per ogni $z \notin Y$ abbiamo chiaramente $|f(z)| / \|z\| \leq |f(z)| / d(z,Y)$, inoltre per ogni $z \notin Y$ e $\varepsilon > 0$ esiste $y \in Y$ tale che $1/d(z,Y) \leq 1/\|z-y\| + \varepsilon$ e quindi

$$\frac{|f(z)|}{d(z,Y)} \leq \frac{|f(z-y)|}{\|z-y\|} + \varepsilon \leq \sup_{u \neq 0} \frac{|f(u)|}{\|u\|} + \varepsilon$$

quindi $\|f\| = \|F\| = 1$, in particolare $f \in X^*$. Infine osserviamo che $f(x) = F(x+Y) = d(x,Y)$ e la dimostrazione è così conclusa. ■

Osservazione. Se X è uno spazio normato generico non possiamo assolutamente dire se, fissato $f \in X^*$ la quantità

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

ammette massimo su $X \setminus \{0\}$. Anzi per molti spazi normati l'estremo superiore di tale quantità non viene mai raggiunto da alcun elemento di X.

Grazie al teorema di Hahn-Banach possiamo invertire il risultato della proposizione 4.1.8 sfruttando il fatto che se $X \neq \{0\}$ allora $X^* \neq \{0\}$ per il corollario 4.2.3.

Proposizione 4.2.5. *Siano X ed Y spazi normati con $X \neq \{0\}$. Allora $L(X,Y)$ è uno spazio di Banach se e solo se Y è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $y_n \in Y$ una successione di Cauchy e supponiamo che $L(X,Y)$ sia uno spazio di Banach. Esisterà dunque $f \in X^* \setminus \{0\}$ ed $z \in X$ tali che $f(z) = 1$. Definiamo allora la seguente applicazione

$$F_n(x) = y_n f(x) \in L(X,Y)$$

chiaramente $\|F_m - F_n\| \leq \|y_m - y_n\| \|f\|$ e quindi F_n è una successione di Cauchy in $L(X,Y)$ che dovrà necessariamente convergere ad un certo $F \in L(X,Y)$. Dunque

$$y_n = F_n(z) \to F(z) = y \in Y$$

e quindi anche Y è uno spazio di Banach. ■

Lemma 4.2.6. *Sia X spazio normato, se X^* è separabile allora anche X è separabile.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che X sia uno spazio reale, la dimostrazione sui complessi è la stessa. Dal lemma 2.4.4 esisterà una successione $f_n \in X^*$ che risulti densa sull'insieme $\{f \in X^* \mid \|f\| = 1\}$. Esisteranno allora $x_n \in X$ di norma unitaria con $f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}$, l'insieme

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^{m} q_i x_i \;\middle|\; m \in \mathbb{N} \wedge q_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

è numerabile e $\overline{U} = \overline{\langle x_n | n \in \mathbb{N} \rangle}$. Difatti per ogni $x \in \overline{\langle x_n | n \in \mathbb{N} \rangle}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $m \in \mathbb{N}$ ed $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$ tali che $\|x - \sum_{i=1}^m r_i x_i\| < \varepsilon$. Per la densità dei numeri razionali possiamo trovare $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{Q}$ tali che $|r_i - q_i| < \varepsilon/m$ e quindi

$$\left\| x - \sum_{i=1}^m q_i x_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^m r_i x_i \right\| + \sum_{i=1}^m |r_i - q_i| < 2\varepsilon$$

e quindi $x \in \overline{U}$.

Se per assurdo non fosse denso in X allora per la proposizione 4.2.4 esisterà un $y \in X \setminus \overline{\langle x_n | n \in \mathbb{N} \rangle}$ e un $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ che vale 0 sugli x_n e $f(y) \neq 0$. Ma allora

$$\frac{1}{2} \leq |f(x_n)| + |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|$$

raggiungendo un assurdo poiché $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è denso. ∎

Fissiamo adesso un elemento $x \in X$ e definiamo a partire da esso una nuova applicazione definita come

$$\hat{x} : f \in X^* \to f(x) \in \mathbb{K}$$

È banale constatare che $\hat{x}$ è lineare e continua, mentre dal corollario 4.2.3 segue immediatamente che $\|\hat{x}\| = \|x\|$. L'applicazione

$$J_X : x \in X \to \hat{x} \in X^{**} \tag{4.2.1}$$

è un'*isometria* ($\|J_X(x)\| = \|x\|$) lineare e quindi iniettiva.

Teorema 4.2.7. *Sia X spazio normale, allora esistono uno spazio di Banach B e un'isometria lineare f da X in B tale che $f(X)$ è denso in B.*

Dimostrazione. Innanzitutto $J_X(X)$ è un sottospazio di X^{**} isomorfo a X, poniamo $B = \overline{J_X(X)}$ (la chiusura viene effettuata su tutto X^{**}) e $f = J_X$. Dato che X^{**} è uno spazio di Banach e B è un suo sottospazio chiuso allora per la proposizione 4.1.3 anche B è uno spazio di Banach. ∎

4.3 Norme su spazi vettoriali finitamente generati

Definizione 4.3.1. Sia V spazio vettoriale generico e $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ due norme su V. La prima norma è *equivalente* alla seconda se e solo se esistono due costanti positive $C \geq c > 0$ tali che per ogni $x \in V$

$$c \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C \|x\|_2$$

La dimostrazione che l'equivalenza tra norme è una relazione di equivalenza è lasciata al lettore come esercizio.

Proposizione 4.3.2. *Le topologie indotte da due norme equivalenti coincidono.*

Dimostrazione. Ogni palla aperta della prima topologia ne contiene un'altra dell'altra topologia con lo stesso centro e viceversa. Dalla (2.1.4) segue immediatamente che le due topologie coincidono. ■

Teorema 4.3.3. *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione* finita *allora tutte le norme su V sono equivalenti.*

Dimostrazione. Sia $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base di V, allora per ogni $x \in V$ con $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ definiamo la norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \tag{4.3.1}$$

L'enunciato del teorema è equivalente ad affermare che ogni norma su V è equivalente a $\|\cdot\|_1$. Sia perciò $\|\cdot\|$ una norma generica su V. Innanzitutto se $C = \max_i \|v_i\|$ (che non dipende da x) allora $\|x\| \leq C\|x\|_1$ dalla disuguaglianza triangolare, determiniamo adesso una costante c tale che $\|x\|_1 \leq c\|x\|$.

Se per assurdo non fosse vera allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $x_n \in X$ tale che $\|x_n\|_1 > n\|x_n\|$. Possiamo supporre senza perdere in generalità $\|x_n\|_1 = 1$ e

$$\|x_n\| < \frac{1}{n}$$

Ponendo $x_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k v_i$ allora $\left|\alpha_i^k\right| \leq 1$ e quindi esiste un'estratta x_{n_k} che converge ad un certo x in norma $\|\cdot\|_1$, in particolare $\|x\|_1 = 1$. Da quanto abbiamo dimostrato prima allora x_{n_k} converge a x anche rispetto alla norma $\|\cdot\|$, ma allora $\|x\| = 0$ il che è assurdo. ■

Quindi per gli spazi vettoriali di dimensione finita esiste un'unica topologia indotta da una norma, quindi ogniqualvolta non viene specificata la topologia di uno spazio vettoriale di dimensione finita si intende sempre quella generata da una norma.

Corollario 4.3.4. *Gli spazi vettoriali di dimensione finita sono completi.*

Dimostrazione. Esercizio. ■

Corollario 4.3.5. *I sottospazi di dimensione finita di un generico spazio normato X sono sempre chiusi.*

Dimostrazione. Sia $M \leq X$ un sottospazio di dimensione finita, allora la norma di X è completa in M perciò le successioni di M convergenti in X hanno limite in M stesso (per l'unicità del limite). ■

Vogliamo adesso dare una caratterizzazione topologica degli spazi vettoriali di dimensione finita, ovvero una condizione necessaria e sufficiente sulla topologia affinché il nostro spazio vettoriale abbia dimensione finita. Più precisamente l'aver dimensione finita equivarrebbe alla *relativa sequenziale compattezza* del sottoinsieme $D_1(0)$ di X rispetto a una qualunque sua norma.

Proposizione 4.3.6. *Sia X spazio vettoriale di dimensione finita e $\|\cdot\|$ una sua norma, allora la palla chiusa unitaria $D_1(0)$ (rispetto a tale norma) è compatta.*

Dimostrazione. Sia $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base di X, per il teorema 4.3.3 la norma $\|\cdot\|$ è equivalente alla norma $\|\cdot\|_1$ definita in (4.3.1) e quindi l'insieme $D = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ è compatto in $(X, \|\cdot\|)$ se e solo se è compatto in $(X, \|\cdot\|_1)$.

L'applicazione

$$\varphi : \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \in (X, \|\cdot\|_1) \to (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{K}^n, |\cdot|)$$

è una isometria lineare e biettiva, in particolare è un omeomorfismo. Sempre per l'equivalenza delle norme D è chiuso e limitato in $(X, \|\cdot\|_1)$ e quindi φ lo manda in un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ o di $\mathbb{C}^n$, in entrambi i casi per Heine-Borel è compatto.

Quindi D è compatto rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ e quindi è compatto anche rispetto alla norma $\|\cdot\|$. ∎

Prima di dimostrare l'implicazione opposta abbiamo bisogno del seguente lemma

Lemma 4.3.7 (dei quasi ortogonali di Riesz)**.** *Sia X spazio normato e $M < X$ sottospazio chiuso. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in X$ con $\|x\| = 1$ e*

$$d(x, M) \geq 1 - \varepsilon$$

Dimostrazione. Sia $x_1 \in X \setminus M$ generico e poniamo $R = d(x_1, M)$, dalla proposizione 2.3.3 segue che $R > 0$, quindi per ogni $0 < \varepsilon < 1$ esiste $y_1 \in M$ tale che

$$\|x_1 - y_1\| \leq \frac{R}{1 - \varepsilon}$$

Poniamo ora

$$x = \frac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|} \in X \setminus M$$

ha chiaramente norma unitaria e per ogni $y \in M$

$$\|x - y\| = \frac{\|(x_1 - y_1 - \|x_1 - y_1\| \, y)\|}{\|x_1 - y_1\|} \geq 1 - \varepsilon$$

ottenendo la tesi passando all'estremo inferiore. ∎

Teorema 4.3.8 (Riesz)**.** *Sia X spazio normato, se $D_1(0)$ è relativamente sequenzialmente compatto allora X ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Per assurdo X ha dimensione infinita, sia $x_1 \in X$ con $\|x_1\| = 1$, costruiamo per ricorrenza grazie al lemma precedente una successione $x_n \in X$ con $\|x_n\| = 1$ e

$$d(x_n, \langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \rangle) \geq \frac{1}{2}$$

da cui segue che $d(x_n, x_m) \geq \frac{1}{2}$ per ogni m, n e quindi la successione non può avere estratte di Cauchy. Raggiungiamo così un assurdo poiché $\{x_n\} \subseteq D_1(0)$ è relativamente sequenzialmente compatto. ∎

Questo teorema mostra che le norme che rendono le palle chiuse compatte sono relativamente rare in quanto definibili esclusivamente sugli spazi vettoriali di dimensione finita. Questa osservazione giustifica il fatto che, nel momento in cui definiamo la norma di un operatore tramite la formulazione equivalente

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

non possiamo in alcun modo sostituire l'estremo superiore con un massimo senza condizioni aggiuntive sullo spazio X.

4.4 Il principio di uniforme limitatezza per spazi di Banach

Teorema 4.4.1 (Banach-Steinhaus)**.** *Siano X e Y spazi di Banach e $\{\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,Y)$ tali che per ogni $x \in X$*

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \|\Lambda_i x\| < +\infty$$

Allora

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \|\Lambda_i\| < +\infty$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$C_n = \{x \in X \mid \|\Lambda_i x\| \leq n \ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

che è chiaramente un insieme chiuso in X e per ipotesi vale $\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n = X$. Dal teorema di Baire esistono allora $x \in X$, $r > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che

$$D_r(x) \subseteq C_n$$

Per ogni $y \in X$ con $\|y\| = 1$ allora vale $\|\Lambda_i(ry)\| \leq n + \|\Lambda_i x\|$ da cui $\|\Lambda_i\| \leq \frac{n+\|\Lambda_i x\|}{r}$ che è dominato da una certa costante per ogni $i \in \mathbb{N}$, ottenendo così la tesi. ■

Corollario 4.4.2. *Siano X e Y spazi di Banach e $\{\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,Y)$ tali che per ogni $x \in X$ $\Lambda_n x$ converge in Y ad una certa quantità Λx. Allora Λ è un operatore lineare continuo e vale*

$$\|\Lambda\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|\Lambda_n\|$$

Dimostrazione. Λ è chiaramente lineare e il lettore può dimostrare dal teorema di Banach - Steinhaus che è anche continuo.

Dalla continuità della norma si dimostra facilmente che

$$\|\Lambda x\| \leq \left(\liminf_{n\to+\infty} \|\Lambda_n\|\right) \|x\|$$

per ogni x e la dimostrazione è conclusa. ■

Da questo risultato discendono molti teoremi importanti della teoria degli spazi di Banach, tra i quali riveste una particolare importanza il seguente

Teorema 4.4.3 (della funzione aperta)**.** *Siano X e Y spazi di Banach e $\Lambda \in L(X,Y)$ suriettiva. Allora Λ è una funzione aperta.*

chiaramente la suriettività di Λ è strettamente necessaria, difatti se Λ fosse identicamente nulla allora la sua immagine sarebbe uguale a $\{0\}$ che non è chiaramente aperta. Da questo teorema discende il seguente corollario di notevole importanza nel seguito

Corollario 4.4.4. *Se Λ è lineare, continua e biettiva allora anche Λ^{-1} è continua.*

Dimostrazione. Λ aperto $\Leftrightarrow$ Λ^{-1} continua. ■

In questa sede dimostreremo un risultato più forte del teorema della funzione aperta:

Teorema 4.4.5. *Sia X spazio di Banach e Y spazio normato. Se Λ è un funzionale lineare continuo da X in Y per cui $\Lambda(X)$ è di seconda categoria allora*

- $\Lambda(X) = Y$;
- *Λ è aperta;*
- *Y è uno spazio di Banach.*

Per dimostrare il seguente risultato procederemo per gradi, dimostrando mano mano vari risultati parziali.

Proposizione 4.4.6. *Siano X, Y spazi normati e $\Lambda : X \to Y$ lineare, allora sono equivalenti*

1. *Λ è aperta;*
2. *esiste $r > 0$ tale che $\Lambda(B_1) \supseteq B_r$.*

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che Λ sia aperta, poiché $\Lambda(0) = 0$ allora $\Lambda(B_1)$ è un aperto contenente $0 \in Y$, da cui segue immediatamente il secondo punto.

Viceversa supponiamo ora che valga il secondo punto e prendiamo un generico aperto U di E, dimostriamo che $\Lambda(U)$ è ancora aperto in Y. Preso $y \in \Lambda(U)$ esisterà $x \in U$ tale che $\Lambda x = y$. Esisterà inoltre una costante $R > 0$ per cui $B_R(x) = x + RB_1 \subseteq U$.

Per la linearità di Λ avremo dunque

$$\Lambda(U) \supseteq \Lambda\left(B_R(x)\right) = y + R\Lambda(B_1) \supseteq y + RB_r = B_{Rr}(y)$$

per ogni y, quindi $\Lambda(U)$ è aperto in Y. ■

Lemma 4.4.7. *Siano X, Y spazi normati, $\Lambda \in L(X,Y)$ tale che $\Lambda(X)$ è di seconda categoria. Allora $\overline{\Lambda\left(B_1\right)} \supset B_r$ per un opportuno $r > 0$.*

Dimostrazione. Per comodità di notazione sia $K = \Lambda(B_1)$, chiaramente abbiamo

$$\Lambda(X) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nK$$

poiché $\Lambda(X)$ è un insieme di seconda categoria esisterà $n \in \mathbb{N}$ tale che $\overline{nK} = n\overline{\Lambda(B_1)} = \overline{\Lambda(B_n)}$ possiede un punto interno. Quindi, sempre per linearità, esisterà $y \in \overline{\Lambda(B_1)}$ ed $r > 0$ tali che $\overline{\Lambda(B_1)} \supseteq B_r(y)$ e quindi $\overline{\Lambda(B_1)} \supseteq B_r(-y)$.

Poiché la chiusura di insiemi convessi è convessa avremo che $\overline{\Lambda(B_1)}$ è convesso, quindi se riusciamo a scrivere gli elementi di B_r come combinazioni convesse di elementi di $\overline{\Lambda(B_1)}$ abbiamo finito. Sia $z \in B_r$ allora

$$z = \frac{1}{2}(z-y) + \frac{1}{2}(z+y)$$

e quindi $B_r \subseteq \overline{\Lambda(B_1)}$. ■

Lemma 4.4.8. *Sia X spazio di Banach, Y spazio normato e $\Lambda \in L(X,Y)$ tale che $\overline{\Lambda(B_1)}$ è un intorno dell'origine. Allora anche $\Lambda(B_1)$ è un intorno di 0.*

Dimostrazione. Esiste $r > 0$ tale che $\overline{\Lambda(B_1)} \supseteq B_{4r}$, dimostreremo che $\Lambda(B_1) \supseteq B_r$. Prendiamo allora un generico $y \in B_r \subseteq \overline{\Lambda(B_{1/4})}$ allora esisterà $x_1 \in B_{1/4}$ tale che $\|y - \Lambda x_1\| < r/2$ e quindi

$$y - \Lambda x_1 \in B_{r/2} \subseteq \overline{\Lambda(B_{1/8})}$$

e quindi esisterà $x_2 \in B_{1/8}$ tale che $\|y - \Lambda x_1 - \Lambda x_2\| < r/4$. Lavorando per induzione avremo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_n\| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$y - \Lambda x_1 - \Lambda x_2 - \cdots - \Lambda x_n \in B_{r/2^n} \subseteq \overline{\Lambda\left(B_{1/2^n}\right)}$$

Consideriamo ora $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \in X$ allora per ogni $m \geq n$

$$\|S_m - S_n\| = \|x_{n+1} + \cdots + x_m\| \leq \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{2^{i+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

ed essendo X uno spazio di Banach la successione S_n convergerà ad un certo $x \in X$. Poiché $\|S_n\| < 1/2$ avremo che $\|x\| \leq 1/2$ e quindi $x \in B_1$ mentre per la continuità di Λ si avrà $y = \Lambda x \in \Lambda(B_1)$ e la tesi è così dimostrata. ■

In questa maniera abbiamo dimostrato che Λ è una applicazione aperta. La suriettività di Λ è una diretta conseguenza di questo risultato

Proposizione 4.4.9. *Sia X spazio vettoriale topologico e $Y \leq X$ un suo sottospazio. Se Y è aperto allora $X = Y$.*

Dimostrazione. Prendiamo un qualunque $x \in X$, dalla definizione di spazio vettoriale topologico l'applicazione $\alpha \in \mathbb{K} \to \alpha x \in X$ è continua, quindi l'insieme

$$V = \{\alpha \in \mathbb{K} \mid \alpha x \in Y\}$$

è non vuoto (contiene lo zero) e aperto in quanto controimmagine di un aperto. Quindi esiste $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $\alpha x \in Y$ e quindi $x = (\alpha x)/\alpha \in Y$. ■

L'ultimo risultato da dimostrare è il seguente

Lemma 4.4.10. *Siano X spazio di Banach, Y normato, $\Lambda \in L(X, Y)$ funzione aperta. Allora anche Y è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. L'insieme $\ker \Lambda$ è chiuso in X e proprio per la suriettività di Λ, quindi $\tilde{X} = X/\ker \Lambda$ è ancora uno spazio di Banach. Possiamo definire l'applicazione $\Phi : \tilde{X} \to Y$ affinché

$$\Phi(x + \ker \Lambda) = \Lambda(x)$$

Il lettore può verificare facilmente che Φ è un'applicazione ben definita, lineare e continua. Inoltre è chiaramente iniettiva e suriettiva, verifichiamo che è aperta.

Sia $r > 0$ tale che $B_r \subseteq \Lambda(B_1)$, quindi per ogni $y \in B_r \subseteq Y$ esisterà $x \in B_1 \subseteq X$ tale che $y = \Lambda x = \Phi(x + \ker \Lambda)$ e $\|x + \ker \Lambda\| \leq \|x\| < 1$ e quindi $B_r \subseteq \Phi\left(B_{1,\tilde{X}}\right)$.

Abbiamo così dimostrato che anche l'inversa Φ^{-1} è continua, quindi se $y_n \in Y$ è una successione di Cauchy allora $\Phi^{-1}(y_n)$ è di Cauchy nello spazio di Banach $\tilde{X}$ dunque esisterà $x \in X$ tale che $\Phi^{-1}(y_n) \to x + \ker \Lambda$. Per continuità avremo che $y_n \to \Phi(x + \ker \Lambda) = \Lambda(x) \in Y$ e quindi Y è uno spazio di Banach. ■

La dimostrazione del teorema 4.4.5 si ottiene mettendo assieme questi risultati parziali.

Corollario 4.4.11. *Sia X spazio vettoriale ed $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ due norme che rendono entrambe X uno spazio di Banach. Se esiste $C > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq C \|x\|_2$ per ogni $x \in X$ allora le due norme sono equivalenti*

Dimostrazione. L'applicazione lineare seguente

$$i : x \in (X, \|\cdot\|_2) \to x \in (X, \|\cdot\|_1)$$

è chiaramente lineare e invertibile, per ipotesi è anche continua quindi la sua inversa è continua ovvero esiste $c > 0$ tale che $\|x\|_2 \leq c \|x\|_1$. ■

Definizione 4.4.12. Poniamo $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati, allora definiamo sullo spazio vettoriale $X \times Y$ la *norma prodotto* la seguente norma

$$\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

Proposizione 4.4.13. *Siano X e Y spazi di Banach, allora anche $X \times Y$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma prodotto.*

Dimostrazione. Esercizio. ■

Definizione 4.4.14. Siano X e Y stavolta insiemi generici e $f : X \to Y$ una funzione. Il *grafico* di f è l'insieme

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} = \{[x, f(x)] \mid x \in X\}$$

Teorema 4.4.15 (del grafico chiuso)**.** *Siano X e Y spazi di Banach e $\Lambda : X \to Y$ funzione lineare. Allora*

$$\Lambda \text{ continuo} \Leftrightarrow G(f) \text{ chiuso in } X \times Y \text{ rispetto alla norma prodotto}$$

Dimostrazione. L'implicazione $\Rightarrow$ è lasciata al lettore come esercizio, dimostriamo l'implicazione opposta. Il sottospazio $G(f)$ è ancora uno spazio di Banach rispetto alla topologia prodotto poiché era chiuso in $X \times Y$, inoltre le due proiezioni

$$P_1 : (x, y) \in G(f) \to x \in X$$
$$P_2 : (x, y) \in G(f) \to y = f(x) \in Y$$

sono entrambe continue e P_1 è invertibile.

Dal corollario 4.4.4 la funzione $P_2 \circ P_1^{-1} : X \to Y$ è continua e coincide con f. ■

4.5 Topologia debole e debole*

Definizione 4.5.1. Sia X spazio normato, allora la topologia debole generata dalla famiglia di funzionali X^* (si veda le sezioni 1.4 ed 3.4) è detta più semplicemente *topologia debole* di X.

Infatti grazie al corollario 4.2.3 lo spazio duale X^* è una famiglia di funzionali lineari totale. Quindi il limite debole se esiste è unico. Poiché le funzioni in X^* sono continue nella topologia della norma allora la topologia debole è meno fine di quella generata dalla norma che abbiamo usato finora, chiamata anche *topologia forte.*

Diciamo inoltre che un insieme è *debolmente aperto* o *debolmente chiuso* se e solo se è rispettivamente aperto o chiuso per la topologia debole, mentre è *fortemente aperto* o *fortemente chiuso* se lo è rispetto alla topologia generata dalla norma di X, ovvero la topologia forte. Quando diciamo che un insieme è aperto o chiuso senza specificare la topologia intendiamo sempre rispetto alla topologia forte come abbiamo fatto precedentemente.

Definizione 4.5.2. Una qualunque successione $x_n \in X$ *converge debolmente* a $x \in X$ se e solo se x_n converge a x rispetto alla topologia debole e si indica con

$$x_n \rightharpoonup x$$

Se X ed Y sono spazi normati, presa una qualunque applicazione $f : X \to Y$ diciamo che

- f è *continua forte-forte*, o più semplicemente *continua*, se è un'applicazione continua rispetto agli spazi topologici X ed Y entrambi dotati della topologia forte.
- f è *continua debole-forte* se è un'applicazione continua da X dotato della topologia debole in Y con la topologia forte.
- f è *continua debole-debole*, o più semplicemente *debolmente continua*, se e solo se è continua con X ed Y dotati delle rispettive topologie deboli.

Poiché gli insiemi debolmente aperti sono aperti allora una funzione continua debole-forte è sia continua che debolmente continua. Definiamo in maniera del tutto analoga la continuità per successioni nel caso di topologie deboli, difatti la topologia debole su uno spazio normato generico non è quasi mai $\mathcal{N}_1$ e quindi non è detto che la continuità coincida con la continuità sequenziale. Chiaramente ogni f in X^* è continua debole-forte.

Proposizione 4.5.3. *Consideriamo un qualunque spazio normato X, allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow$ *per ogni* $f \in X^*$ $f(x_n) \to f(x)$;
2. *Se* $x_n \to x$ *allora* $x_n \rightharpoonup x$;
3. *Se* x_n *converge debolmente a* x *allora* $\|x_n\|$ è limitato *e inoltre*
$$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$$
4. *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *e* $f_n \to f$ *(in* X^**) allora*
$$f_n(x_n) \to f(x)$$

Dimostrazione. Dimostriamo i vari casi:

1. Si veda la proposizione 1.4.3.
2. Banale poiché la topologia debole è contenuta in quella forte.
3. Dal punto 1. se $x_n \rightharpoonup x$ allora per ogni $f \in X^*$ $\hat{x}_n(f) \to \hat{x}(f)$, per il corollario 4.4.2 (X^* di Banach) segue immediatamente la tesi.
4. È immediata in quanto $\|x_n\|$ è limitato e
$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \, \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)|$$

■

Proposizione 4.5.4. *Se* $\dim X < +\infty$ *allora la topologia debole coincide con quella forte.*

Dimostrazione. Consideriamo una base $e_1, \ldots, e_n$ di X, poiché tutte le norme su X sono equivalenti possiamo considerare la seguente norma su X

$$\|x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

dove $x_i \in \mathbb{K}$. Le proiezioni sulla i esima componente $p_i : X \to \mathbb{K}$ sono continue rispetto a tale norma e quindi $p_i \in X^*$, posto $Q(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \|y - x\|_\infty < \varepsilon\}$ allora si vede chiaramente che

$$Q(x, \varepsilon) = I^{\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{p_1, p_2, \ldots, p_n}(x)$$

e quindi gli aperti della topologia forte sono aperti anche nella topologia debole. ∎

Proposizione 4.5.5. *Siano X, Y spazi normati e $T : X \to Y$ un'applicazione lineare. Se T è anche continua allora è debolmente continua.*

Dimostrazione. Per la proposizione 1.4.5 abbiamo che $T : X \to Y$ è debolmente continua se e solo se per ogni $f \in Y^*$ l'applicazione $f \circ T : X \to \mathbb{K}$ è continua rispetto alla topologia debole di X. Se T è continua allora $f \circ T \in X^*$, da cui segue immediatamente la tesi in quanto la topologia debole su X è la più piccola topologia rispetto alla quale tutti i funzionali in X^* risultano continui. ∎

Definizione 4.5.6. Prendiamo X spazio di Banach e $\hat{X} = \{\hat{x} \in X^{**} \mid x \in X\}$ che abbiamo visto essere isomorfo a X. Si definisce *topologia debole** la topologia meno fine su X^* che renda tutti i funzionali in $\hat{X}$ continui.

Proposizione 4.5.7. *La topologia debole* è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Chiaramente per ogni $f \neq 0$ esiste $x \in X$ tale che $\hat{x}(f) = f(x) \neq 0$ e quindi la famiglia $\hat{X}$ è totale. ∎

Per ogni successione $f_n \in X^*$ e $f \in X^*$ indichiamo col simbolo

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$$

che la successione f_n converge a f secondo la topologia debole*.

Proposizione 4.5.8. *Lo spazio X^* munito della topologia debole* è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso di Hausdorff.*

Proposizione 4.5.9. *Consideriamo un qualunque spazio di Banach X, allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \Leftrightarrow$ *per ogni* $x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$;
2. *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *allora* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;
3. *Se* f_n *converge debolmente* a* f *allora* $\|f_n\|$ è limitato *e inoltre*

$$\|f\| \le \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|$$

4. Se $x_n \to x$ *e* $f_n \xrightarrow{*} f$ *allora*

$$f_n(x_n) \to f(x)$$

Dimostrazione. Esercizio per il lettore, si veda la proposizione analoga delle topologie deboli. ■

Proposizione 4.5.10. *Se* X *è di Banach allora* X^* *è completo rispetto alla topologia debole* ovvero per ogni* $f_n \in X^*$ *vale l'implicazione*

$$f_n(x) \text{ converge per ogni } x \in X \Rightarrow \ \exists f \in X^* \text{ tale che } f_n \xrightarrow{*} f$$

Dimostrazione. Immediatamente dal corollario 4.4.2. ■

4.6 Teoremi di separazione di Mazur

In questa sezione ci occuperemo di dimostrare in quali casi è possibile separare due sottoinsiemi non vuoti di uno spazio normato X su $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mediante un iperpiano, il quale può essere determinato univocamente da un funzionale $f \in X_{\mathbb{R}}^+$ e da una costante $\alpha \in \mathbb{R}$ nella seguente maniera.

Definizione 4.6.1. Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, presi due qualunque suoi sottoinsiemi non vuoti A e B diremo che $f \in X_{\mathbb{R}}^+$ *separa* A e B se e solo se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in A$ e per ogni $y \in B$ si ha

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y)$$

Diremo invece che f *separa strettamente* A e B se e solo se esiste anche un $\varepsilon > 0$ tale che

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq f(y)$$

per ogni $x \in A$, $y \in B$.

Grazie al lemma 4.1.9 se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora per ogni $f \in X_{\mathbb{R}}^+$ esiste un unica $g \in X^+$ tale che $f = \operatorname{Re} g$, quindi il nostro funzionale f possiamo prenderlo sia in $X_{\mathbb{R}}^+$ che in X^+.

Prima di dimostrare i teoremi di separazione abbiamo bisogno del seguente risultato preliminare:

Lemma 4.6.2. *Sia* V *spazio vettoriale su* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *e* $K \subseteq V$ *convesso con punti internali. Allora per ogni* $v_0 \in V \setminus K$ *esiste* $f \in V_{\mathbb{R}}^+ \setminus \{0\}$ *tale che per ogni* $v \in K$

$$f(v) \leq f(v_0)$$

Dimostrazione. Supponiamo per il momento che 0 sia un punto internale di K, definiamo allora l'applicazione $\mathbb{R}$-lineare

$$f : tv_0 \in \langle v_0 \rangle \subseteq X_{\mathbb{R}} \to t \in \mathbb{R}$$

Poiché v_0 non si trova in K convesso si ha $f(v_0) \leq p_K(v_0)$ dove p_K è il funzionale di Minkowski di K, per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo inoltre

$$t \geq 0 \Rightarrow f(tv_0) = t \leq tp_K(v_0) = p_K(tv_0)$$
$$t < 0 \Rightarrow f(tv_0) = t < 0 \leq p_K(tv_0)$$

possiamo perciò applicare Hahn-Banach ed estendere f su tutto V sempre con $f(v) \leq p_K(v)$. Ora $f(v_0) = 1$ mentre per ogni $v \in K$ $f(v) \leq p_K(v) \leq 1$.

Consideriamo adesso un generico punto u internale in K allora 0 è internale in $K - u$ e quindi $f(v - u) \leq f(v_0 - u)$ e la tesi segue dalla linearità di f. ■

Teorema 4.6.3 (Separazione larga in spazi vettoriali o primo teorema di Mazur)**.** *Prendiamo due insiemi A, B non vuoti disgiunti convessi dello spazio vettoriale V, supponiamo anche che A abbia punti internali, allora A e B possono essere separati in senso largo da un iperpiano.*

Dimostrazione. L'insieme $K = A - B$ è convesso non vuoto, non contiene l'elemento 0 e contiene punti internali: se v_0 è internale in A e $v \in B$ allora per ogni $x \in V$ e δ arbitrariamente piccolo $v_0 + \delta x - v \in A - B$ banalmente e $v_0 - v$ internale in $A - B$.

Per il lemma precedente esisterà un funzionale $f \in X_{\mathbb{R}}^+$ tale che per ogni $v \in K$ si ha $f(v) \leq 0$ e quindi per ogni $v \in A$, $w \in B$ segue che $f(v) \leq f(w)$. Esisterà allora $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\sup_{v \in A} f(v) \leq \alpha \leq \inf_{w \in B} f(w)$$

e quindi f separa in senso largo i due insiemi. ■

Sia ora X uno spazio normato su un campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Proposizione 4.6.4. *Sia $f \in X_{\mathbb{R}}^+$ allora l'iperpiano $H_f(x) = \{y \in X \mid f(y - x) = 0\}$ è chiuso se e solo se f è continua.*

Dimostrazione. L'implicazione $\Leftarrow$ è banale, supponiamo ora che l'insieme $H_f(x)$ sia chiuso, perciò il suo complementare è aperto. Sia allora $y \in X$ tale che $f(y) < f(x)$ esisterà allora un $r > 0$ tale che per ogni $\|z - y\| < r$ si abbia $f(z) < f(x)$ per linearità.

Ma allora per ogni $z \in B_1(0)$ si ha $f(y + rz) = f(y) + rf(z) < f(x)$ dunque

$$|f(z)| \leq \frac{f(x) - f(y)}{r}$$

per ogni z quindi $f \in X_{\mathbb{R}}^*$. ■

Teorema 4.6.5 (Separazione stretta in spazi normati o secondo teorema di Mazur)**.** *Siano A, B sottoinsiemi convessi non vuoti e disgiunti in X. Se A è chiuso e B compatto allora esiste $f \in X_{\mathbb{R}}^*$ che separa in senso stretto A e B.*

Dimostrazione. Definiamo per ogni $\varepsilon > 0$

$$A_\varepsilon = A + B_\varepsilon(0) = \{y \in X \mid \exists x \in A \text{ tale che } \|x - y\| < \varepsilon\}$$
$$B_\varepsilon = B + B_\varepsilon(0) = \{y \in X \mid \exists x \in B \text{ tale che } \|x - y\| < \varepsilon\}$$

tanto A_ε quanto B_ε sono aperti per il medesimo ragionamento fatto nella dimostrazione del primo teorema di Mazur. Dalla proposizione 2.3.3 esisterà un ε abbastanza piccolo tale che $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$. Ancora A_ε è convesso poiché somma di insiemi convessi.

Dal teorema di separazione larga esiste f lineare non nulla che separa A_ε da B_ε e quindi esistono $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $f \in X_{\mathbb{R}}^+ \setminus \{0\}$ tali che per ogni $a \in A$, $b \in B$ e per ogni $z \in B_1(0)$ si ha $f(a + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(b - \varepsilon z)$. Dunque si ha

$$f(a) \leq \alpha - \varepsilon f(z) < \alpha + \varepsilon f(z) \leq f(b)$$

e quindi separa A e B in senso stretto.

Per dimostrare la continuità di f basta fissare un qualunque $a \in A$ e quindi riscrivere la disuguaglianza precedente nella seguente forma

$$\|f\| = \sup_{\|z\|=1} f(z) \leq \frac{\alpha - f(a)}{\varepsilon}$$

e perciò $f \in X_{\mathbb{R}}^*$. ■

Esempio 3. L'ipotesi di convessità non può essere in alcun modo tolta negli enunciati dei due teoremi di separazione qui sopra, difatti i due insiemi $A = \mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$ e $B = D_1(0)$ in $\mathbb{R}^n$ con la norma usuale sono entrambi non vuoti, il primo è chiuso e il secondo compatto e convesso. Ciononostante non esiste alcun iperpiano che li possa separare, anzi per ogni $f \in V^+ \setminus 0$ e per ogni $N > 0$ esistono $x, y \in A$ tali che $f(x) > N$ e $f(y) < -N$. In altre parole A non può essere delimitato da alcun iperpiano.

Proposizione 4.6.6. *Se K è un sottoinsieme convesso di uno spazio normato X allora*

$$K \text{ debolmente chiuso } \Leftrightarrow K \text{ fortemente chiuso}$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo l'implicazione $\Leftarrow$ poiché i chiusi della topologia forte sono chiusi anche per quella debole essendo meno fine. Sia K fortemente chiuso, dal teorema di separazione stretta e dal lemma 4.1.9 per ogni $x \notin K$ esistono $f_x \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ tali che

$$K \subseteq \{y \in X \mid \operatorname{Re} f_x(y) < \alpha - \varepsilon\}$$
$$x \in \{y \in X \mid \operatorname{Re} f_x(y) > \alpha + \varepsilon\} = A_x$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora $\operatorname{Re} f_x = f_x$ e dunque A_x è debolmente aperto, se invece $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora A_x è la controimmagine mediante f_x del seguente aperto di $\mathbb{C}$

$$\{a + ib \in \mathbb{C} \mid a > \alpha + \varepsilon, b \in \mathbb{R}\}$$

in entrambi i casi il complementare di K è debolmente aperto e perciò K è debolmente chiuso. ■

Teorema 4.6.7 (Terzo teorema di Mazur). *Sia ora X spazio di Banach con $x_n \rightharpoonup x$ in X, allora esiste una applicazione strettamente crescente $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $c_1^n, c_2^n, \ldots, c_{N(n)}^n \in [0,1]$ tali che*

$$\sum_{i=1}^{N(n)} c_i^n = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{i=1}^{N(n)} c_i^n x_i - x \right\| = 0$$

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$A = \left\{ y \in X \;\middle|\; y = \sum_{i=1}^{n} c_i^n x_i \text{ con } n \in \mathbb{N}, c_i^n \in [0,1] \text{ e } \sum_{i=1}^{n} c_i^n = 1 \right\}$$

dimostriamo che A è convesso. Presi $u = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j$ elementi di A con $n \le m$ e $\lambda \in [0,1]$ allora

$$\lambda u + (1-\lambda)v = \sum_{i=1}^{n} \left[\lambda c_i + (1-\lambda)d_i\right] x_i + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda c_i x_i$$

che appartiene ad A in quanto

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\lambda c_i + (1-\lambda)d_i\right] + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda c_i = \lambda \sum_{i=1}^{m} c_i + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} d_i = 1$$

Ricordando che la chiusura rispetto alla norma di X di un insieme convesso è convesso allora $\overline{A}$ è debolmente chiuso. Poiché $x_n \in A$ allora $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x \in \overline{A} \Rightarrow$ esiste una successione in A che tende fortemente a x. ■

Corollario 4.6.8. *Usando la definizione di inviluppo convesso (pagina 79) allora se X è uno spazio di Banach vale la seguente relazione*

$$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x \in \overline{\operatorname{con}\left(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}\right)}$$

quindi se una successione converge debolmente possiamo trovare una nuova successione ottenuta tramite una combinazione convessa che vi converge fortemente.

4.7 Spazi riflessivi

L'applicazione (4.2.1) è una isometria lineare da X in X^{**}. In generale non è biiettiva, ovvero esistono funzionali in X^{**} che non possono essere rappresentati da elementi di X. Per questo motivo introduciamo una nuova classe di spazi per cui l'applicazione J_X definita precedentemente risulti biiettiva.

Definizione 4.7.1. Uno spazio normato è *riflessivo* se e solo se esiste un'isometria lineare *biunivoca* tra X e X^{**}.

Questi spazi possiedono molte proprietà interessanti, per esempio abbiamo

Proposizione 4.7.2. *Se X è riflessivo allora le topologie debole e debole* su X^* coincidono.*

Proposizione 4.7.3. *Poniamo X spazio riflessivo, allora per ogni $f \in X^*$ esiste $x \in X$ tale che $\|x\| = 1$ e*

$$\|f\| = |f(x)| = \max_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

Dimostrazione. Dal corollario 4.2.3 ed essendo X riflessivo esiste $x \in X$ tale che

$$\|x\| = \|\hat{x}\| = |\hat{x}(f)| = |f(x)|$$

■

Proposizione 4.7.4. *Gli spazi riflessivi sono spazi di Banach.*

Dimostrazione. Se x_n è una successione di Cauchy in X allora lo è anche $\hat{x}_n$ in X^{**}. Ora X^{**} è il duale di X^* e quindi è uno spazio di Banach, esisterà allora $F \in X^{**}$ tale che $x_n \to F$ in X^{**}, ma per la riflessività di X esisterà $x \in X$ tale che $F = \hat{x}$ e $x_n \to x$ in X. ■

Negli spazi riflessivi oltre alla completezza forte vale anche quella debole, difatti

Proposizione 4.7.5. *Gli spazi riflessivi sono debolmente completi.*

Per la definizione di spazio debolmente completo si veda la definizione 3.4.1

Dimostrazione. Prendiamo x_n successione debolmente di Cauchy nello spazio riflessivo X, ovvero per ogni $f \in X^*$ la successione $f(x_n)$ ammette limite. possiamo applicare il corollario 4.4.2 alla sequenza di funzionali $\hat{x}_n \in X^{**}$ dunque esiste $F \in X^{**}$ tale che

$$F(f) = \lim_{n \to +\infty} \hat{x}_n(f) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$$

La tesi segue immediatamente dalla riflessività di X. ■

A differenza di quanto possa suggerire il nome, la debole completezza non deriva automaticamente da quella forte, anzi esistono spazi di Banach che non sono debolmente completi, per un esempio si vedano le dispense aggiuntive disponibili attualmente all'indirizzo `https://loara.github.io`.

Teorema 4.7.6. *Sia X spazio di Banach, allora X è riflessivo se e solo se X^* è riflessivo.*

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che X sia riflessivo e prendiamo $F = X^{***}$ che sarà un'applicazione lineare continua da X^{**} in $\mathbb{R}$. Posto

$$l : x \in X \to F\left[J_X(x)\right] \in \mathbb{R}$$

allora $l \in X^*$ e per ogni $f \in X^{**}$ avremo

$$F(f) = l\left[J_X^{-1}(f)\right] = f(l)$$

ovvero $F = J_{X^*}(l)$.

Supponiamo adesso che X^* sia uno spazio riflessivo, poniamo $M = J_X(X)$ che sarà un sottospazio di $X^* *$ isomorfo ad X e dimostriamo che è chiuso. Sia $y_n \in M$ ed $y \in X^{**}$ tale che $y_n \to y$ e quindi esisteranno $x_n \in X$ tali che $y_n = \hat{x}_n$. Poiché y_n è una successione di Cauchy, essendo J_X isometria anche x_n è una successione di Cauchy e avendo supposto che X sia uno spazio di Banach avremo dunque che $x_n \to x \in X$. Perciò sempre per continuità avremo che $y = J_X(x)$ e quindi M è chiuso.

Se per assurdo $M \neq X^{**}$ dalla proposizione 4.2.4 esiste $F \in X^{***}$ non nullo tale che $F(M) = 0$, per ipotesi avremo un $f \in X^*$ tale che $F = J_{X^*}(f)$ e quindi per ogni $x \in X$

$$f(x) = J_X(x)(f) = F\left[J_X(x)\right] = 0$$

ma allora $f = 0$ il che implicherebbe che $F = 0$ assurdo, perciò $M = X^{**}$ e X è riflessivo. ■

Teorema 4.7.7. *Sia X spazio di Banach, allora X è riflessivo e separabile se e solo se X^* è riflessivo e separabile.*

Dimostrazione. L'implicazione da destra a sinistra è una semplice applicazione del teorema precedente e del lemma 4.2.6.

Viceversa supponiamo che X sia separabile e riflessivo, allora anche X^{**} è separabile e per il lemma 4.2.6 X^* è riflessivo. Sempre dal teorema 4.7.6 segue che X^* è riflessivo. ■

Abbiamo già visto che i sottoinsiemi chiusi degli spazi di Banach sono anch'essi spazi di Banach, vale un risultato analogo anche per gli spazi riflessivi come afferma il seguente teorema.

Teorema 4.7.8. *Se X è riflessivo allora ogni suo sottospazio chiuso è riflessivo.*

Dimostrazione. Sia $Y \leq X$ un sottospazio chiuso e $F \in Y^{**}$ un'applicazione lineare da Y^* in $\mathbb{R}$. Possiamo considerare allora l'applicazione $f \in X^* \to f|_Y \in Y^*$ che ad ogni f associa la sua restrizione su Y. Questa applicazione è ben definita, lineare e continua e quindi esiste un unico $G \in X^{**}$ tale che per ogni $f \in X^*$

$$G(f) = F\left(f|_Y\right) = f(x) \tag{4.7.1}$$

con $x \in X$ per riflessività. Se $x \in Y$ allora per ogni $g \in Y^*$ possiamo applicare la (4.7.1) ad una sua qualunque estensione $\tilde{g}$ su tutto X mediante il teorema di Hahn-Banach per ottenere $F(g) = \tilde{g}(x) = g(x)$.

Supponiamo allora che $x \notin Y$ dunque per la proposizione 4.2.4 esiste $f \in X^*$ che si annulla su M ma non in x, il che è assurdo in quanto $f(x) = F\left(f|_Y\right) = 0$. Quindi per ogni $F \in Y^{**}$ esiste $y \in Y$ tale che $F(f) = f(y)$ e Y è riflessivo. ∎

Teorema 4.7.9. *Se X è uno spazio riflessivo separabile sul campo $\mathbb{K}$ allora per ogni successione $x_n \in X$ limitata in norma da un certo $L > 0$ ne esiste un'estratta debolmente convergente.*

Dimostrazione. Lo spazio X^{**} è separabile, perciò dal lemma 4.2.6 X^* è anch'esso separabile. Esiste allora una successione f_n densa in X^*. Inoltre $f_1(x_n)$ è contenuto in una palla compatta di raggio $L\,\|f_1\|$, esiste quindi un'estratta x_n^1 di $x_n^0 = x_n$ tale che la successione $f_1\left(x_n^1\right)$ converge. Iterando il procedimento esisterà un'estratta x_n^k di x_n^{k-1} tale che $f_k(x_n^k)$ converge.

Definiamo la successione

$$y_n = x_n^n$$

allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ la successione $\{f_k(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad una quantità finita. Ora consideriamo $f \in X^*$ generica, per ogni $\varepsilon > 0$ esisterà $n \in \mathbb{N}$ tale che $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$ e inoltre

$$\begin{aligned} |f(y_i - y_j)| &\leq |f(y_i - y_j) - f_n(y_i - y_j)| + |f_n(y_i - y_j)| \\ &\leq 2L\,\|f - f_n\| + |f_n(y_i - y_j)| \leq \varepsilon(2L + 1) \end{aligned}$$

e quindi y_n è una successione debolmente di Cauchy. Per la proposizione 4.7.5 esiste $y \in X$ tale che y_n converge debolmente ad y. ∎

Corollario 4.7.10. *Se X è uno spazio riflessivo e separabile allora gli insiemi (debolmente) chiusi e limitati sono debolmente sequenzialmente compatti.*

Il seguente teorema è fornisce un *criterio di sequenziale compattezza debole**.

Teorema 4.7.11. *Se X è uno spazio di Banach separabile allora ogni successione $f_n \in X^*$ limitata in norma ammette un'estratta debolmente* convergente in X^*.*

Dimostrazione. Prendiamo x_n successione densa in X, ragionando come nella dimostrazione del criterio di sequenziale compattezza debole esiste un'estratta g_n di f_n tale che per ogni $x \in X$ $\hat{x}(g_n) = g_n(x)$ converge e quindi g_n è una successione debolmente* di Cauchy, la tesi segue dalla completezza della topologia debole*. ∎

Proposizione 4.7.12 (Weierstrass generalizzato)**.** *Sia X spazio riflessivo separabile e $K \subseteq X$ chiuso convesso e limitato. Posto $F : K \to \mathbb{R}$ convessa e semicontinua inferiormente (rispetto alla topologia forte) allora F ha un punto di minimo in K. Se F è strettamente convessa allora il punto di minimo è unico.*

Dimostrazione. Sia $m = \inf_{k\in K} F(k)$ allora esiste una successione $x_n \in K$ tale che $F(x_n) \to m$. L'insieme K essendo convesso è anche debolmente chiuso e dal criterio di compattezza debole esiste un'estratta x_{n_k} che converge debolmente ad un certo $x \in K$, vogliamo dimostrare che $F(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(x_n)$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ poniamo per comodità $P_\alpha = \{x \in X \mid F(x) \leq \alpha\}$ insieme fortemente chiuso, inoltre per ogni $x, y \in P_\alpha$ e $\lambda \in [0,1]$ si ha

$$F[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \leq \alpha$$

quindi P_α è convesso e debolmente chiuso, allora F è debolmente semicontinua inferiormente e quindi

$$m \leq F(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(x_n) = m$$

e x è un punto di minimo. In particolare si ha $m > -\infty$.

Ricordiamo che F è strettamente convessa se e solo se per ogni $x \neq y$ e $\lambda \in]0,1[$ vale

$$F[\lambda x + (1-\lambda)y] < \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$$

Per assurdo esistono due punti di minimo $x, y \in K$ diversi, allora per ogni $\lambda \in]0,1[$

$$m \leq F[\lambda x + (1-\lambda)y] < \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) = m$$

assurdo. ■

Osservazione. Ogni applicazione lineare e continua è banalmente convessa e semicontinua inferiormente, anzi in questo caso la dimostrazione del teorema di Weierstrass generalizzato diventa immediata e discende direttamente dalla definizione di topologia debole.

Useremo ora il teorema di Weierstrass generalizzato per dimostrare una versione più forte della proposizione 2.3.3. Innanzitutto abbiamo già dimostrato che per ogni $M \subseteq X$ non vuoto e chiuso l'applicazione

$$x \in X \to d(x, M) \in \mathbb{R}$$

è continua e a maggior ragione semicontinua inferiormente. Supponiamo ora che M sia anche convesso, allora per ogni $x, y \in X$, $m, m' \in M$ e $\lambda \in [0,1]$ abbiamo $\lambda m + (1-\lambda)m' \in M$ e perciò

$$d[\lambda x + (1-\lambda)y, M] \leq \|\lambda(x-m) + (1-\lambda)(y-m')\| \leq \lambda \|x-m\| + (1-\lambda)\|y-m'\|$$

passando all'estremo inferiore per m e m' otteniamo

$$d[\lambda x + (1-\lambda)y, M] \leq \lambda d(x, M) + (1-\lambda)d(y, M)$$

ed è perciò una funzione convessa.

Prendiamo ora un qualunque N chiuso convesso e limitato in X, per il teorema di Weierstrass generalizzato esiste un $n \in N$ punto di minimo della funzione precedente, in altre parole

$$d(N, M) = d(n, M) = \lim_{i\to+\infty} \|n - m_i\|$$

per un'opportuna successione di elementi di M.

Fissiamo adesso un generico $u \in M \setminus N$ allora $M \cap D_{2\|n-u\|}(n)$ è chiuso, convesso e limitato ma soprattutto la successione m_i da un certo indice in poi è contenuta all'interno dell'insieme $M \cap D_{2\|n-u\|}(n)$. Dal criterio di compattezza debole m_i ammette un'estratta debolmente convergente ad un certo $m \in M$. Ma la distanza è debolmente semicontinua inferiormente e quindi, a meno di passare a tale estratta

$$\|m - n\| = \liminf_{i \to +\infty} \|n - m_i\| = d(N, M)$$

Abbiamo appena dimostrato il

Lemma 4.7.13. *Sia X spazio riflessivo separabile e $M, N \subseteq X$ convessi chiusi con N limitato. Allora esistono $m \in M$, $n \in N$ tali che*

$$d(M, N) = \|m - n\|$$

Il criterio precedente ci fornisce un criterio di sequenziale compattezza debole di uno spazio separabile riflessivo X. In generale una topologia debole non è metrizzabile, quindi i concetti di compattezza e sequenziale compattezza sono distinti ed esistono insiemi che appartengono all'una e non all'altra classe.

In realtà per gli spazi di Banach le due nozioni di compattezza coincidono, infatti vale il seguente risultato

Teorema 4.7.14 (Eberlein–Šmulian)**.** *Se X è uno spazio di Banach allora ogni insieme $K \subseteq X$ è debolmente compatto se e solo se è debolmente sequenzialmente compatto.*

e quindi il criterio di compattezza sequenziale debole è anche un criterio di compattezza debole.

Per quanto riguarda la compattezza nella topologia debole* il seguente teorema

Diamo adesso la dimostrazione del

Teorema 4.7.15 (Banach-Alaoglu)**.** *Sia X spazio normato su $\mathbb{K}$, allora l'insieme*

$$B = \{f \in X^* \mid \|f\| \le 1\}$$

è compatto in X^* rispetto alla topologia debole.*

Dimostrazione. Possiamo dotare come visto nel primo capitolo lo spazio $\mathbb{K}^X$ dotato della topologia prodotto. Ricordiamo che lo spazio $\mathbb{K}^X$ è composto interamente da funzioni con dominio X e codominio $\mathbb{C}$, mentre la topologia prodotto è semplicemente la topologia iniziale su $\mathbb{K}^X$ generata dalle funzioni

$$\pi_x : f \in \mathbb{K}^X \to f(x) \in \mathbb{K}$$

al variare di $x \in X$. Chiaramente avremo che $X^* \subseteq \mathbb{K}^X$ e la topologia debole* di X^* non è nient'altro che la topologia indotta da $\mathbb{K}^X$ in quanto $\pi_x(f) = \hat{x}(f)$ per ogni $f \in X^*$. Quindi se dimostriamo che B è compatto in $\mathbb{R}^X$ allora sarà chiaramente compatto anche in X^* rispetto alla topologia debole*.

Ricordiamo che X^+ denota l'insieme di tutti i funzionali lineari su X in $\mathbb{K}$, dimostriamo che è chiuso in $\mathbb{K}^X$. Infatti per ogni $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ le applicazioni

$$A_{x,y} : f \in \mathbb{K}^X \to f(x+y) - f(x) - f(y) = \pi_{x+y}(f) - \pi_x(f) - \pi_y(f) \in \mathbb{K}$$
$$B_{x,\lambda} : f \in \mathbb{K}^X \to f(\lambda x) - \lambda f(x) = \pi_{\lambda x}(f) - \lambda \pi_x(f) \in \mathbb{K}$$

sono continue e quindi l'insieme

$$\bigcap_{x,y \in X} A_{x,y}^{-1}(\{0\}) \cap \bigcap_{\substack{x \in X \\ \lambda \in \mathbb{R}}} B_{x,\lambda}^{-1}(\{0\}) = X^+$$

è chiuso. Ora

$$f \in B \Leftrightarrow f \text{ lineare e } |f(x)| \leq \|x\| \;\; \forall x \in X \Leftrightarrow f \in X^+ \cap \prod_{x \in X} D_{\|x\|}(0)$$

dove $D_{\|x\|}(0) \subseteq \mathbb{K}$ e quindi $\mathcal{D}' = \prod_{x \in X} D_{\|x\|}(0) \subseteq \prod_{x \in X} \mathbb{K} = \mathbb{K}^X$.

Dal teorema di Tychonoff $\mathcal{D}'$ è compatto e quindi anche B lo è in quanto intersezione di un compatto e di un chiuso di $\mathbb{K}^X$. Poiché la topologia debole* di X^* è semplicemente la topologia indotta di $\mathbb{K}^X$ allora B è compatto anche rispetto alla topologia debole* di X^*. ■

Abbiamo dimostrato precedentemente che uno spazio normato ha dimensione finita se e solo se la palla chiusa unitaria è compatta (rispetto alla topologia forte). Il prossimo risultato mostrerà che uno spazio di Banach è riflessivo se e solo se la palla unitaria è debolmente compatta.

Dimostreremo questo risultato per gradi, dimostrando mano mano dei risultati intermedi.

Proposizione 4.7.16. *Se X è uno spazio riflessivo allora la palla chiusa unitaria è debolmente compatta.*

Dimostrazione. Dal teorema di Banach-Alaoglu la palla unitaria chiusa $D_{X^{**}}$ in X^{**} è debolmente* compatta. Vogliamo dimostrare che l'applicazione $J_X^{-1} : X^{**} \to X$ è continua quando X^{**} è dotato della topologia debole* e X dotato della topologia debole. Per la proposizione 1.4.5 basta dimostrare che per ogni $f \in X^*$ l'applicazione $f \circ J_X^{-1}$ è continua se X^{**} è dotato della topologia debole*.

Ma per ogni $\hat{x} \in X^{**}$

$$(f \circ J_X^{-1})(\hat{x}) = f(x) = \hat{x}(f) = J_{X^*}(f)(\hat{x})$$

e quindi $f \circ J_X^{-1} = J_{X^*}(f) \in J_{X^*}(X^*)$ e quindi risulta continua rispetto alla topologia debole* di X^{**}.

Perciò J_X^{-1} manda insiemi debolmente* compatti in X^{**} in insiemi debolmente compatti in X, quindi $D_X = J_X^{-1}(D_{X^{**}})$ è debolmente compatto. ■

Lemma 4.7.17 (Helly)**.** *Sia X spazio di Banach, $f_1, f_2, \ldots, f_k \in X^*$ ed $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Allora sono equivalenti*

1. *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in D_X$ tale che*
$$|f_i(x) - \alpha_i| < \varepsilon$$
per ogni i;

2. *Per ogni $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$*
$$\left|\sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i\right\|$$

Dimostrazione. Supponiamo che X soddisfi la 1 e prendiamo $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$, allora per ogni ε esiste $x \in D_X$ tale che

$$\left|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i(x) - \sum_{i=1}^k \beta_i \alpha_i\right| \leq \sum_{i=1}^k |\beta_i| \, |f_i(x) - \alpha_i| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^k |\beta_i|$$

e quindi
$$\left|\sum_{i=1}^k \beta_i \alpha_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i(x)\right| + \varepsilon \sum_{i=1}^k |\beta_i| \leq \left\|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i\right\| + \varepsilon \sum_{i=1}^k |\beta_i|$$
e il membro a destra non dipende da x.

Se invece vale la 2 per comodità poniamo $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^k$ e

$$\varphi : x \in X \to [f_1(x), \ldots, f_k(x)] \in \mathbb{K}^k$$

per assurdo $d\left(\vec{\alpha}, \varphi\left(D_X\right)\right) > 0$ e quindi $\vec{(\alpha)} \notin \overline{\varphi(D_X)}$, dal teorema di separazione stretta esiste $\vec{\beta} \in \mathbb{K}^k$ ed $a \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $x \in D_X$

$$\mathrm{Re}\, \vec{\beta} \cdot \varphi(x) < a < \mathrm{Re}(\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha})$$

ovvero per ogni $x \in D_X$

$$\sum_{i=1}^k \mathrm{Re}\, \beta_i f_i(x) < a < \sum_{i=1}^k \mathrm{Re}\, \beta_i \alpha_i$$

Il lemma 4.1.9 afferma che per ogni $g \in X^*$ si ha $\|\mathrm{Re}\, g\| = \|g\|$, quindi

$$\left\|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i\right\| < a < \mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^k \beta_i \alpha_i\right)$$

assurdo. ■

Lemma 4.7.18 (Goldstine)**.** *Se X è uno spazio di Banach allora $J_X(D_X)$ è denso in $D_{X^{**}}$ rispetto alla topologia debole* di X^{**}.*

Dimostrazione. Preso un qualunque aperto non vuoto V di X^{**} che interseca $D_{X^{**}}$ vogliamo dimostrare che interseca anche $J_X(D_X)$. Sia $F \in V \cap D_{X^{**}}$ senza perdere in generalità possiamo supporre che V sia nella forma

$$\begin{aligned} V &= \{G \in \mid |J_{X^*}(f_i)(G - F)| < \varepsilon, i = 1, 2, \ldots, k\} \\ &= \{G \in \mid |F(f_i) - G(f_i)| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

per opportuni $f_1, \ldots, f_k \in X^*$.

Posto $\alpha_i = F(f_i)$ avremo per ogni $\beta_i \in \mathbb{K}$

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \beta_i \alpha_i\right| = \left|F\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i\right)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i\right\|$$

e per il lemma di Helly per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in D_X$ tale che per ogni i

$$|f_i(x_\varepsilon) - F(f_i)| < \varepsilon$$

e quindi $J_X(x_\varepsilon) \in V$. ■

Teorema 4.7.19 (Kakutani)**.** *Se X è uno spazio di Banach e se D_X è debolmente compatta allora X è riflessivo.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $J_X : X \to X^{**}$ è continua anche se X è dotato della topologia debole e X^{**} della topologia debole*, difatti per ogni $f \in X^*$ si ha $J_{X^*}(f) \circ J_X = f$. Ma allora $J_X(D_X)$ è debolmente* compatto in $D_{X^{**}}$ ed essendo la topologia debole* di Hausdorff sarà anche chiuso in $D_{X^{**}}$.

Dal lemma di Goldstine tale insieme è anche denso dunque $J_X(D_X) = D_{X^{**}}$, per linearità di J_X lo spazio X è riflessivo. ■

4.8 Spazi uniformemente convessi

Definizione 4.8.1. Uno spazio di Banach X si dice *uniformemente convesso* se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in X$ con $\|x\|, \|y\| \leq 1$ e $\|x - y\| > \varepsilon$ si abbia

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta$$

In altre parole per ogni coppia di elementi distinti della palla chiusa unitaria il loro punto medio è sufficientemente distante dalla sua frontiera. La proprietà di uniforme convessità non dipende dalla topologia adottata, difatti su $X = \mathbb{R}^2$ la norma $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ è uniformemente convessa mentre $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ no.

Teorema 4.8.2 (Milman-Pettis)**.** *Gli spazi di Banach uniformemente convessi sono riflessivi.*

Dimostrazione. Sia X spazio di Banach uniformemente convesso e $J_X : X \to X^{**}$ l'operatore definito in (4.2.1), per comodità poniamo

$$D_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$
$$D_{X^{**}} = \{x \in X^{**} \mid \|x\| \leq 1\}$$

Dobbiamo solo dimostrare che ogni elemento $F \in X^{**}$ di norma unitaria appartiene alla chiusura di $J_X(D_X)$. Infatti poiché X è uno spazio di Banach isomorfo a $J_X(X)$ allora esso sarà un sottospazio chiuso di X^{**} contenente tutti gli elementi di norma unitaria, dunque dovrà coincidere con X^{**}.

Scegliamo un qualunque $\varepsilon > 0$ allora esisterà un $\delta > 0$ che soddisfa la condizione di uniforme continuità, d'altronde esisterà $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ tale che

$$F(f) \geq 1 - \frac{\delta}{2}$$

Inoltre l'insieme

$$Y = \left\{ G \in X^{**} \,\middle|\, |F(f) - G(f)| < \frac{\delta}{2} \right\}$$

è un intorno di F nella topologia debole* di X^{**} in quanto controimmagine della palla aperta di centro $F(f)$ e raggio $\delta/2$ mediante $J_{X^*}(f)$. Dal lemma di Goldstine avremo che $J_X(D_X) \cap Y \neq \emptyset$ e perciò esiste $x \in D_X$ tale che $|f(x) - F(f)| < \delta/2$.

Per assurdo esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\|F - J_X(x)\| > \varepsilon$ e, poiché $D_{X^{**}}$ è chiuso rispetto anche alla topologia debole*, avremo che $F \in Z = X \setminus [J_X(x) + \varepsilon D_{X^{**}}]$ e Z è debolmente* aperto. Sempre dal lemma di Goldstine $J_X(D_X) \cap Y \cap Z \neq \emptyset$ ovvero esiste $y \in D_X$ tale che $J_X(y) \in Y \cap X$ ovvero

$$|f(y) - F(f)| < \frac{\delta}{2}$$
$$\|y - x\| > \varepsilon$$

Ma allora

$$1 - \frac{\delta}{2} \leq F(f) < \delta + f(x) + f(y) \leq \|x + y\| + \delta$$

raggiungendo in tal modo un assurdo. ∎

Proposizione 4.8.3. *Sia X spazio uniformemente convesso e siano $x_n, x \in X$. Se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$ allora $x_n \to x$.*

Dimostrazione. Per assurdo possiamo supporre che $x \neq 0$ ed esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\|x_n - x\| > \varepsilon$ per ogni n. Per l'uniforme convessità esiste $\delta > 0$ per cui $\|(x_n + x)/2\| < \|x\| - \delta$. D'altronde poiché x_n converge debolmente a x allora anche $(x_n + x)/2$ converge debolmente a x dunque

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \left\| \frac{x_n + x}{2} \right\| \leq \limsup_{n\to+\infty} \left\| \frac{x_n + x}{2} \right\| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\|x_n\| + \|x\|}{2} = \|x\|$$

ma allora $\|(x_n + x)/2\| \to \|x\|$ il che è assurdo per l'uniforme continuità. ∎

Capitolo 5

Operatori in spazi normati

5.1 Aggiunto di operatori

Consideriamo un generico spazio normato X con spazio duale X^*. Possiamo definire la seguente applicazione bilineare $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^* \times X \to \mathbb{K}$ tale che

$$\langle f, x \rangle = f(x)$$

Proposizione 5.1.1. *L'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è continua, ovvero per ogni $x_n \to x \in X$ e $f_n \to f \in X^*$ si ha*

$$\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$$

Dimostrazione. Innanzitutto per ogni $f \in X^*$ e $x \in X$ abbiamo

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \, \|x\|$$

nei rispettivi spazi. Quindi se $f_n \to f$ in X^* allora esiste $M > 0$ tale che $\|f_n\| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma allora

$$|\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| = |\langle f_n, x_n - x \rangle + \langle f_n - f, x \rangle| \leq M \, \|x_n - x\| + \|f_n - f\| \, \|x\| \to 0$$

e quindi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è continuo. ■

In realtà grazie alle proposizioni 4.5.3 ed 4.5.9 abbiamo anche i seguenti risultati di continuità per successioni

- Se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \to f$ allora $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$;
- Se $x_n \to x$ e $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ allora $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Non possiamo però fare a meno della convergenza forte come si può vedere nell'esempio seguente

Esempio 4. Sia $X = \ell^2$ e consideriamo la sequenza $e_n \in ell^2$ definita nella seguente maniera

$$e_n(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = n \\ 0 & \text{se } i \neq n \end{cases}$$

Allora $e_n \rightharpoonup 0$ e $e_n \in \left(\ell^2\right)^*$ e converge anche in questo caso a 0 debolmente. Ma $\langle e_n, e_n \rangle = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ mentre $\langle 0, 0 \rangle = 0$ e quindi non è sequenzialmente continua rispetto alla topologia debole su X ed X^*.

Definizione 5.1.2. Per ogni operatore continuo $T \in L(X, Y)$ definiamo l'*aggiunto* di T l'applicazione

$$T^* : g \in Y^* \to g \circ T \in X^*$$

In particolare per ogni $g \in Y^*$ e $x \in X$ avremo che

$$\langle T^* g, x \rangle = \langle g, Tx \rangle$$

e quindi l'aggiunto di un operatore è l'analogo negli spazi normati della matrice trasposta negli spazi vettoriali finitamente generati.

Proposizione 5.1.3. *Se $T \in L(X, Y)$ allora $T^* \in L(Y^*, X^*)$ e inoltre*

$$\|T\| = \|T^*\|$$

Dimostrazione. Per ogni $f, g \in Y^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x \in X$

$$\left[T^*(\alpha f + \beta g)\right](x) = \alpha f(Tx) + \beta g(Tx) = \alpha \left[T^* f\right](x) + \beta \left[T^* g\right](x)$$

Il lettore può dimostrare facilmente che per ogni $f \in Y^*$

$$\|f \circ T\| \leq \|f\| \, \|T\|$$

e quindi T^* è un operatore lineare continuo con $\|T^*\| \leq \|T\|$. Viceversa per ogni $x \in X$ esiste $g_x \in Y^*$ di norma unitaria tale che $g_x(Tx) = \|Tx\|$ e quindi

$$\|Tx\| = \|(T^* g_x)(x)\| \leq \|T^* g_x\| \, \|x\| \leq \|T^*\| \, \|x\|$$

che ci permette di ottenere la disuguaglianza opposta. ■

Usando la notazione $\langle f, x \rangle = f(x)$ per $x \in X$ e $f \in X^*$ allora per ogni $g \in Y^*$

$$\langle g, Tx \rangle = \langle T^* g, x \rangle$$

Proposizione 5.1.4. *Siano $A, B \in L(X, Y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $(A + B)^* = A^* + B^*$ e $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.*

Dimostrazione. Esercizio. ■

Definizione 5.1.5. Prendiamo $H \subseteq X$, definiamo l'*annichilatore (destro)* di H l'insieme

$$H^{\perp} = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle = 0 \text{ per ogni } x \in H\}$$

Considerando invece $H \subseteq X^*$ definiamo l'*annichilatore (sinistro)* di H l'insieme

$$^{\perp}H = \{x \in X \mid \langle x^*, x\rangle = 0 \text{ per ogni } x^* \in H\}$$

Proposizione 5.1.6. *Gli annichilatori destro e sinistro sono sempre sottospazi vettoriali chiusi*

Dimostrazione. Prendiamo $H \subseteq X^*$ ed $x_n \in {}^{\perp}H$ tale che $x_n \to x$. Allora per ogni $x^* \in H$ si ha $\langle x^*, x_n\rangle = 0 \Rightarrow \langle x^*, x\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle x^*, x_n\rangle = 0$ per la continuità di x^*.

Possiamo usare lo stesso ragionamento per l'annichilatore destro semplicemente ricordando che ogni $x \in X$ può essere visto come un elemento di X^{**} e quindi è continuo sul duale di X. ■

Proposizione 5.1.7. *Se $M \leq X$ è chiuso allora*

$$^{\perp}\left(M^{\perp}\right) = M$$

Dimostrazione. È banale constatare che $M \subseteq {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$, per assurdo sia $i \in {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right) \setminus M$ ovvero $\langle f, i\rangle = 0$ per ogni $f \in M^{\perp}$, dal corollario 4.2.4 esiste $k \in X^*$ che annulla M ma non i ovvero $k \in M^{\perp}$ ma $\langle k, i\rangle \neq 0$ assurdo. ■

Proposizione 5.1.8. *Se $M \subseteq X$ allora*

$$^{\perp}\left(M^{\perp}\right) = \overline{\langle M\rangle}$$

Dimostrazione. Definiamo $Y = \overline{\langle M\rangle}$ sottospazio chiuso, dimostriamo innanzitutto che $Y^{\perp} = M^{\perp}$. Chiaramente $Y^{\perp} \subseteq M^{\perp}$, prendiamo ora un generico $x^* \in M^{\perp}$ ovvero per ogni $x \in \langle M\rangle$ $\langle x^*, x\rangle = 0$ e per continuità per ogni $x \in \overline{\langle M\rangle}$ $\langle x^*, x\rangle = 0$ ovvero $x^* \in Y^{\perp}$. ■

Teorema 5.1.9 (Operatori a codominio chiuso)**.** *Prendiamo X, Y spazi normati e $A \in L(X, Y)$, allora*

$$\operatorname{im} A \textit{ chiuso } \Leftrightarrow \operatorname{im} A = {}^{\perp}\ker A^*$$

Dimostrazione. L'implicazione $\Leftarrow$ deriva direttamente dalla proposizione 5.1.6, basta allora dimostrare che $(\operatorname{im} A)^{\perp} = \ker A^*$. Per ogni $y^* \in Y^*$

$$\begin{aligned} y^* \in (\operatorname{im} A)^{\perp} \Leftrightarrow\ \forall x \in X\ \langle y^*, Ax\rangle = 0 \Leftrightarrow\ \forall x \in X\ \langle A^*y^*, x\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow A^*y^* = 0 \Leftrightarrow y^* \in \ker A^* \end{aligned}$$

E applicando la proposizione 5.1.7 otteniamo la tesi. ■

Corollario 5.1.10. *Sia $A \in L(X,Y)$ operatore con $\operatorname{im} A$ chiuso, allora*

$$A \text{ suriettivo } \Leftrightarrow A^* \text{ iniettivo}$$

Teorema 5.1.11. *Siano stavolta X, Y spazi di Banach e $A \in L(X,Y)$, allora*

$$A \text{ iniettivo e a codominio chiuso } \Leftrightarrow \exists c > 0 \text{ tale che } \|x\| \leq c\,\|Ax\|$$

Dimostrazione. Sia A iniettivo e a codominio chiuso, allora $\operatorname{im} A$ è uno spazio di Banach e dal teorema della funzione aperta esiste $A^{-1} \in L(\operatorname{im} A, X)$ inversa di A e quindi

$$\|x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|Ax\|$$

Supponiamo ora che esiste $c > 0$ tale che $\|x\| \leq c\,\|Ax\|$ allora A è immediatamente iniettiva, dobbiamo solo dimostrare che il suo codominio è chiuso. Per ogni $x_n \in X$ tale che $y_n = Ax_n$ tende ad un certo $y \in Y$ vale per ipotesi

$$\|x_n - x_m\| \leq c\,\|y_n - y_m\|$$

e quindi x_n è una successione di Cauchy che tende ad un certo $x \in X$ (spazio di Banach). Per continuità di A si ha $y = Ax$. ■

Ricordando la definizione di spazio quoziente l'operatore

$$\mathcal{A} : x + \ker A \in X/\ker A \to Ax \in Y$$

è chiaramente ben definito, lineare e iniettivo e

$$\|\mathcal{A}(x + \ker A)\| = \|A(x+z)\| \leq \|A\|\,\|x+z\|$$

per ogni $z \in \ker A$ e quindi $\mathcal{A}$ rimane continuo. Infine $\operatorname{im} A = \operatorname{im} \mathcal{A}$.

Adesso abbiamo tutte le carte in regola per generalizzare il teorema precedente:

Teorema 5.1.12. *Siano stavolta X, Y spazi di Banach e $A \in L(X,Y)$, allora*

$$A \text{ a codominio chiuso } \Leftrightarrow \exists c > 0 \text{ tale che } d(x, \ker A) \leq c\,\|Ax\|$$

Teorema 5.1.13. *Siano X, Y spazi di Banach e $A \in L(X,Y)$ a codominio chiuso, allora A^* è a codominio chiuso e inoltre*

$$\operatorname{im} A^* = \ker A^{\perp}$$

Dimostrazione. Consideriamo $x^* \in Y^*$ e $x \in \ker A$ allora

$$\langle A^*x^*, x\rangle = \langle x^*, Ax\rangle = 0$$

e quindi $\operatorname{im} A^* \subseteq \ker A^{\perp}$.

Prendiamo ora $x^* \in \ker A^\perp$ ovvero per ogni $x \in \ker A$ $\langle x^*, x\rangle = 0$ e quindi l'applicazione lineare

$$\mathcal{M} : y \in \operatorname{im} A \to \langle x^*, x\rangle \in \mathbb{R} \text{ con } y = Ax$$

è ben definita sullo spazio di Banach $\operatorname{im} A$ (chiuso) dal teorema 5.1.12 esiste $c > 0$ tale che

$$d(x, \ker A) \leq c \|Ax\| = c \|y\|$$

allora per ogni $z \in \ker A$ si ha

$$|\mathcal{M}(y)| = |\langle x^*, x\rangle| = |\langle x^*, x+z\rangle| \leq \|x^*\| \|x+z\| \\ \Rightarrow |\mathcal{M}(y)| \leq \|x^*\| d(x, \ker A) \leq c \|x^*\| \|y\|$$

e quindi è anche una funzione continua, per Hahn-Banach possiamo estendere $\mathcal{M}$ su tutto Y e quindi $\mathcal{M} \in Y^*$.

Quindi per ogni $x \in X$ $\langle A^*\mathcal{M}, x\rangle = \langle \mathcal{M}, Ax\rangle = \langle x^*, x\rangle$ ovvero $x^* \in \operatorname{im} A^*$ e la dimostrazione è conclusa. ■

Riepilogo relazioni di ortogonalità e complementarità

In questa sezione facciamo un riepilogo di tutte le relazioni ottenute in questa sezione.

- Se X, Y normati e $A \in L(X,Y)$ allora $\operatorname{im} A^\perp = \ker A^*$;
- Se X, Y normati e $A \in L(X,Y)$ allora $\ker A = {}^\perp\operatorname{im} A^*$;
- Se X, Y normati, $A \in L(X,Y)$ con codominio chiuso allora $\operatorname{im} A = {}^\perp\ker A^*$;
- Se X, Y di Banach, $A \in L(X,Y)$ con codominio chiuso allora $\ker A^\perp = \operatorname{im} A^*$;
- Se X, Y normati e $A \in L(X,Y)$ allora A iniettivo $\Leftrightarrow$ A^* suriettivo;
- Se X, Y normati, $A \in L(X,Y)$ con codominio chiuso allora A suriettivo $\Leftrightarrow$ A^* iniettivo.

5.2 Operatori di Fredholm

Definizione 5.2.1. Sia $M \leq X$ sottospazio chiuso, un sottospazio $N \leq X$ è il *supplemento topologico* di M se e solo se N è chiuso e $X = M \oplus N$.

In genere non è detto che esista o meno il supplemento topologico di un sottospazio chiuso né che esso sia unico.

Lemma 5.2.2. *Prendiamo X uno spazio normato. Allora*

1. *Se $x_1, x_2, \dots x_n$ sono linearmente indipendenti in X allora esistono $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \in X^*$ tali che*

$$\langle x_i^*, x_j\rangle = \delta_{i,j}$$

2. *Se* $x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*$ *sono linearmente indipendenti in* X^* *allora esistono* $x_1, x_2, \dots,$ $x_n \in X$ *tali che*
$$\langle x_i^*, x_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Dimostrazione. Dimostriamo i vari punti.

1. Per ogni i vale
$$x_i \notin \langle x_j | j \neq i \rangle = F_i$$
poiché la dimensione di F_i è finita allora per il corollario 4.3.5 F_i è chiuso e dal lemma 4.2.4 esistono $x_i^* \in X^*$ tali che $\langle x_i^*, x_i \rangle = 1$ e $x_i^*(F_i) = \{0\}$.

2. Usiamo l'induzione su n. Per $n = 1$ allora $x_1^* \neq 0$ e quindi la tesi è immediata, supponiamolo valido per $n-1$ quindi esistono $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$ tali che per $i, j < n$ si ha $\left\langle x_i^*, x'_j \right\rangle = \delta_{i,j}$.

   Supponiamo per assurdo che
$$\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker x_i^* \subseteq \ker x_n^*$$
allora per ogni $x \in X$ il vettore $x' = x - \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_i^*, x \rangle x'_i$ annulla tutte le x_i^* per ipotesi allora annulla anche x_n^* e perciò
$$\langle x_n^*, x \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_n^*, x'_i \rangle \langle x_i^*, x \rangle \Leftrightarrow x_n^* = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_n^*, x'_i \rangle x_i^*$$
assurdo perché sono linearmente indipendenti.

   Quindi esisterà un certo x_n che annullerà ogni x_i^* per $i < n$ ma $\langle x_n^*, x_n \rangle = 1$, perciò basta porre
$$\begin{gathered} x_1 = x'_1 - \langle x_n^*, x'_1 \rangle x_n \\ x_2 = x'_2 - \langle x_n^*, x'_2 \rangle x_n \\ \dots \\ x_{n-1} = x'_{n-1} - \langle x_n^*, x'_{n-1} \rangle x_n \\ x_n = x_n \end{gathered}$$
e quindi l'ipotesi vale anche per n concludendo l'induzione.

■

Corollario 5.2.3. *Ogni sottospazio di dimensione finita di* X *ha un supplementare topologico.*

Dimostrazione. I sottospazi $N \leq X$ di dimensione finita sono chiaramente chiusi, consideriamo $x_1, \dots, x_n$ una sua base, per il lemma precedente esistono $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ tali che $x_i^*(x_j) = \delta_{i.j}$. Allora il sottospazio

$$M = \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$$

è chiuso (intersezione di chiusi) e $M \cap N = \{0\}$. Infine per ogni $x \in X$

$$x - \sum_{i=1}^{n} \langle x_i^*, x \rangle \, x_i \in M$$

e perciò $X = M \oplus N$. ■

Corollario 5.2.4. *Sia $N \leq X$ sottospazio chiuso tale che $\dim N^\perp = n$ finito, allora esiste un sottospazio B di X di dimensione n tale che $X = N \oplus B$.*

Dimostrazione. Se $x_1^*, \dots, x_n^*$ è una base di $N^\perp$ allora

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$$

e quindi la tesi segue dal lemma e dal corollario precedente. ■

Proposizione 5.2.5. *Consideriamo uno spazio topologico X e $R \leq X^*$ tale che esiste $N \leq X$ di dimensione n e $R = N^\perp$, allora esiste $S \leq X^*$ di dimensione n tale che $X^* = R \oplus S$.*

Dimostrazione. Analoga alle precedenti. ■

Definizione 5.2.6. Siano X e Y spazi di Banach, un operatore $A \in L(X, Y)$ è *semifredholmiano*, e si indica con $A \in \Phi_+(X.Y)$ se e solo se $\dim \ker A < +\infty$ e $\operatorname{im} A$ è chiuso.

$A \in L(X, Y)$ è invece *fredholmiano*, e si indica con $A \in \Phi(X, Y)$, se e solo se $A \in \Phi_+(X, Y)$ e $A^* \in \Phi_+(Y^*, X^*)$ e il numero $I_A = \dim \ker A - \dim \ker A^*$ è detto *indice* di A.

Ricordiamo che se X e Y sono spazi di Banach allora $\operatorname{im} A^\perp = \ker A^*$.

Proposizione 5.2.7. *Siano X e Y spazi di Banach e $A \in L(X, Y)$. Allora*

$$A \in \Phi(X, Y) \Leftrightarrow A \in \Phi_+(X, Y) \wedge \text{\textit{Il supplementare topologico di} } \operatorname{im} A \text{ \textit{ha dimensione finita.}}$$

Dimostrazione. Supponiamo A fredholmiano, allora è anche semifredholmiano e il supplementare topologico di $\operatorname{im} A$ ha la stessa dimensione di $\ker A^*$ per la proposizione precedente.

Viceversa essendo spazi di Banach $\operatorname{im} A^*$ è chiuso mentre la dimensione di $\operatorname{im} A^\perp$ coincide con quella del supplementare topologico di $\operatorname{im} A$. ■

Proposizione 5.2.8. *Se X è uno spazio di Banach e M, N due sottospazi chiusi di X tali che $X = M \oplus N$ allora le applicazioni*

$$P_M : m + n \in X \to m \in M$$
$$P_N : m + n \in X \to n \in N$$

sono continue.

Dimostrazione. Ci basta far vedere che il grafico di P_M è chiuso, scegliamo allora $x_n, x \in X$, $y \in M$ tali che $x_n \to x$ e $P_M x_n \to y$ dobbiamo dimostrare che $y = P_M x$. Innanzitutto la successione $x_n - P_M x_n \in N$ converge a $x - y \in N$ per la chiusura di N, ancora $x_n = P_M x_n + (x_n - P_M x_n)$ e passando al limite si ha $P_M x + P_N x = y + (x - y) \Rightarrow P_M x = y$ e dal teorema del grafico chiuso P_M è continua. ■

Teorema 5.2.9. *Siano X, Y spazi di Banach e $A \in \Phi_+(X, Y)$. Allora esiste un sottospazio chiuso $X_0 \leq X$ e posto $A_0 : x \in X_0 \to Ax \in \operatorname{im} A$ si ha A_0 invertibile e $A_0^{-1} \in L(\operatorname{im} A, X_0)$.*

Se inoltre A è fredholmiano allora esiste $\hat{A} \in L(Y, X)$ tale che per ogni $y \in \operatorname{im} A$

$$\hat{A}y = A_0^{-1} y$$

Dimostrazione. Prendiamo X_0 il supplemento topologico di $\ker A$ che è chiuso, quindi si ha $A_0 \in L(X_0, \operatorname{im} A)$. Sia ora $x \in X_0$ tale che $A_0 x = 0$ allora $x \in \ker A \cap X_0 = \{0\}$ e quindi è iniettivo, se ora $y \in \operatorname{im} A$ esiste $x' \in X$ tale che $y = Ax' = A_0(P_{X_0} x')$ e quindi è anche suriettivo. Dal corollario 4.4.4 l'inversa è continua.

Se A è fredholmiano allora $\ker A^* = \operatorname{im} A^\perp$ ha dimensione finita e quindi esiste il supplementare topologico B di $\operatorname{im} A$. La tesi segue osservando che

$$\hat{A} : A_0^{-1} \circ P_{\operatorname{im} A}$$

è continua. ■

Definizione 5.2.10. Poniamo ora X spazio vettoriale e $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ due norme di X. Allora $|\cdot|$ è *più debole* di $\|\cdot\|$ se e solo se ogni successione limitata in $(X, \|\cdot\|)$ ammette un'estratta di Cauchy in $(X, |\cdot|)$

Teorema 5.2.11 (Peetre)**.** *Siano X, Y spazi di Banach e $A \in L(X, Y)$. Allora*

$$A \in \Phi_+(X, Y) \Leftrightarrow \text{ Esiste } c > 0 \text{ e una norma } \|\cdot\|_1 \text{ più debole di } \|\cdot\| \text{ tale che } \|x\| \leq c\,\|Ax\| + \|x\|_1$$

Dimostrazione. Sia A semifredholmiano, allora esiste il supplementare topologico F di $\ker A$ e possiamo restringere A ad F ottenendo l'operatore $A_{|F}$ lineare continuo invertibile con inversa $B \in L(\operatorname{im} A, F) \Rightarrow \exists c > 0$ tale che $\|f\| \leq c\,\|Af\|$ per ogni $f \in F$.

Per ogni $x \in X$ poniamo $\|x\|_1 = \|P_{\ker A} x\|$ che è ancora una norma su X, allora

$$\|x\| = \|P_F x + P_{\ker A} x\| \leq c\,\|A(P_F x)\| + \|x\|_1 = c\,\|Ax\| + \|x\|_1$$

dobbiamo dimostrare che la norma appena definita è più debole di $\|\cdot\|$. Se $\|x_n\|$ è limitata allora per continuità anche $\|x_n\|_1$ è limitata, però $\ker A$ ha dimensione finita e quindi ammette un'estratta convergente in $\ker A$.

Dimostriamo ora l'implicazione inversa. Per ogni $x \in \ker A$ allora $\|x\| \leq \|x\|_1$ con $\|\cdot\|_1$ una norma più debole, quindi ogni successione limitata in $\|\cdot\|$ ha un'estratta di Cauchy in $\|\cdot\|_1$ e quindi anche in $\|\cdot\|$ e quindi le palle chiuse in $\ker A$ sono relativamente sequenzialmente compatte, per il teorema di Riesz allora $\dim \ker A < +\infty$.

Sia ora $x_n \in X$ e $y \in Y$ tale che $Ax_n \to y$ e F il supplementare topologico di $\ker A$ e quindi x_n può essere scomposto univocamente come somma di $z_n \in \ker A$ e $w_n \in F$. Per assurdo $\|w_n\|$ è illimitato allora potremmo trovarne una sottosuccessione che la farebbe tendere a $+\infty$, allora poniamo

$$q_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}$$

e quindi ammette un'estratta q_{n_k} di Cauchy rispetto alla norma debole ma allora

$$\left\|q_{n_i} - q_{n_j}\right\| \leq \frac{\|Aw_{n_i}\|}{\|w_{n_i}\|} + \frac{\left\|Aw_{n_j}\right\|}{\left\|w_{n_j}\right\|} + \left\|q_{n_i} - q_{n_j}\right\|$$

il lettore può constatare allora che per ipotesi segue che q_{n_k} è di Cauchy anche rispetto alla norma iniziale e quindi ammette limite q di norma unitaria. Per continuità però $Aq = 0$ e $q \in \ker A \cap F$ assurdo.

Abbiamo dimostrato così che $\|w_n\|$ è limitata e perciò ammette un'estratta di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ ma è di Cauchy anche rispetto alla norma iniziale e perciò ammette limite $x \in X$. La tesi allora segue per continuità in quanto $y = Ax = \lim_{n\to+\infty} Ax_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} Aw_{k_n}$. ■

5.3 Operatori compatti

Definizione 5.3.1. Siano X, Y spazi normati e $\Lambda : X \to Y$ applicazione lineare, allora Λ è *compatto* se e solo se per ogni $K \subseteq X$ limitato $\overline{\Lambda(K)}$ è compatto.

Proposizione 5.3.2. *Un operatore $\Lambda : X \to Y$ è compatto se e solo se per ogni successione $x_n \in X$ limitata esiste un'estratta n_k tale che Λx_{n_k} converge in Y*

Dimostrazione. Consideriamo un qualunque sottoinsieme K limitato in X e sia $y_n \in \overline{\Lambda(K)}$ una successione generica, allora esiste $x_n \in K$ tale che $\|y_n - \Lambda x_n\| < \frac{1}{n}$, possiamo quindi trovare un'estratta tale che Λx_{n_k} converge ad un certo $y \in \overline{\Lambda(K)}$ e quindi $y_{n_k} \to y$ e $\overline{\Lambda(K)}$ è sequenzialmente compatto, quindi compatto. ■

Proposizione 5.3.3. *Gli operatori compatti sono continui.*

Dimostrazione. Se per assurdo non lo fosse allora esisterebbe una successione $x_n \in X$ con $\|x_n\| = 1$ tale che $\|\Lambda x_n\| \to +\infty$ e quindi non possiede estratte convergenti. ■

Definiamo l'insieme degli operatori compatti come

$$K(X, Y) = \{\Lambda \in L(X, Y) \mid \Lambda \text{ compatto}\}$$

Proposizione 5.3.4. *Se* $\dim Y < +\infty$ *allora* $K(X, Y) = L(X, Y)$.

Dimostrazione. Dalla continuità segue che $\Lambda(K)$ è limitato per ogni K limitato, quindi $\overline{\Lambda(K)}$, essendo un sottoinsieme chiuso della palla chiusa che è compatta (proposizione 4.3.6) è compatto. ■

Proposizione 5.3.5. *Se X è uno spazio normato e Y spazio di Banach allora $K(X, Y)$ è un sottospazio chiuso di $L(X, Y)$, in particolare è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. È immediato dimostrare che è un sottospazio, ovvero somma e prodotto per uno scalare di operatori compatti rimane compatto. Sia Λ_n successione di operatori compatti convergente in norma a $\Lambda \in L(X, Y)$, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq N_\varepsilon\, \forall x \in X \;\; \|\Lambda_n x - \Lambda x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

Se prendiamo adesso una successione x_m limitata da $L > 0$ allora dalla compattezza di Λ_n con un procedimento analogo a quello usato nella dimostrazione del teorema di Ascoli-Arzelà esiste una successione x_k^n estratta da x_k^{n-1} (con $x_k^0 = x_k$) tale che

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(n, \varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall m, m' > N(n, \varepsilon) \;\; \|\Lambda_n x_m^n - \Lambda_n x_{m'}^n\| < \varepsilon$$

Allora per ogni $m, n > \max\{N(N_\varepsilon, \varepsilon), N_\varepsilon\}$ si ha

$$\|\Lambda x_m^m - \Lambda x_n^n\| \leq \|\Lambda x_m^m - \Lambda_{N_\varepsilon} x_m^m\| + \|\Lambda_{N_\varepsilon} x_m^m - \Lambda_{N_\varepsilon} x_n^n\| + \|\Lambda_{N_\varepsilon} x_n - \Lambda x_n\| < \varepsilon(1 + 2L)$$

poiché vale

$$\left\|\Lambda_{N_\varepsilon} x_m^{N_\varepsilon} - \Lambda_{N_\varepsilon} x_n^{N_\varepsilon}\right\| < \varepsilon$$

e da questa possiamo ricondurci alla precedente in quanto per ogni $n \geq N_\varepsilon$ esiste $n' \geq n$ intero tale che

$$x_n^n = x_{n'}^{N_\varepsilon}$$

dato che stiamo lavorando per estratte. Dato che Y è uno spazio di Banach Λ è compatto. ■

Teorema 5.3.6 (Schauder)**.** *Siano X, Y spazi normati, allora*

$$T \in K(X, Y) \Rightarrow T^* \in K(Y^*, X^*)$$

Dimostrazione. Consideriamo $y_n^* \in Y^*$ successione limitata da $L > 0$, vogliamo dimostrare che $T^* y_n^*$ è di Cauchy.

Poniamo $B = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ allora $T(B)$ è relativamente sequenzialmente compatto (la sua chiusura è compatta). Per comodità indichiamo con $f_{|A}$ la restrizione di f su A, poniamo allora

$$\mathcal{F} = \left\{ z_n^* = y^*_{n|T(B)} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

classe di funzioni "lineari" continue.

- $\mathcal{F}$ equilimitato. Banalmente $\left\|y^*_{nT(B)}\right\| \leq \|y^*_n\| \leq L$ e quindi per ogni $x \in B$
$$\|z^*_n(Tx)\| \leq L\,\|T\|$$
- $\mathcal{F}$ equicontinua. Basta dimostrare che
$$\exists C > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N}\, \forall x, y \in T(B)\ \ \|z^*_n(x) - z^*_n(y)\| \leq C\,\|x - y\|$$
ma è banale in quanto
$$\|z^*_n(x) - z^*_n(y)\| = \|y^*_n(x) - y^*_n(y)\| \leq \|y^*_n\|\,\|x - y\| \leq L\,\|x - y\|$$

Possiamo applicare perciò il teorema di Ascoli-Arzelà ($T(B)$ relativamente sequenzialmente compatto) trovando in tal modo un'estratta che renda $z^*_{n_k}$ di Cauchy ovvero
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall i, j > N\, \forall y \in T(B)\ \ \left\|z^*_{n_i}(y) - z^*_{n_j}(y)\right\| \leq \varepsilon$$
ovvero per la linearità di T
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall i, j > N\, \forall x \in X\ \ \left\|y^*_{n_i}(Tx) - y^*_{n_j}(Tx)\right\| \leq \varepsilon\,\|x\|$$
e quindi $y^*_{n_i} \circ T = T^*(y^*_{n_i})$ è di Cauchy in X^*. La tesi è immediata poiché la chiusura di sottospazi relativamente sequenzialmente compatti in spazi completi (X^* è di Banach) è compatta. ■

5.4 Teorema del punto fisso di Shauder

Innanzitutto diamo alcuni risultati senza dimostrazione che utilizzeremo più avanti.

Teorema 5.4.1 (del punto fisso di Brouwer)**.** *Sia $D_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ la palla chiusa unitaria rispetto alla norma standard e sia $f : D_1(0) \to D_1(0)$ continua, allora esiste un $x \in D_1(0)$ tale che $f(x) = x$.*

Lemma 5.4.2. *Sia X spazio normato di dimensione finita e $K \subseteq H$ convesso, chiuso e limitato che non sia un singleton. Allora esiste una costante $m \in \mathbb{N}$ ed un omeomorfismo tra K e $D_1(0) \subseteq \mathbb{R}^m$.*

Proposizione 5.4.3. *Sia X spazio normato di dimensione finita e $K \subseteq X$ convesso, chiuso e limitato. Allora ogni applicazione continua $f : K \to K$ ha un punto fisso.*

Dimostrazione. Se $\varphi : K \to D_1(0)$ è l'omeomorfismo del lemma precedente allora $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ soddisfa il teorema di Brouwer. ■

Definizione 5.4.4. Sia V spazio vettoriale e $P \subseteq V$, l'*inviluppo convesso* di P è l'insieme
$$\mathrm{con}(P) = \bigcap \{C \subseteq V \mid P \subseteq C \wedge C \text{ convesso}\}$$
Invece se V è uno spazio di Banach l'*inviluppo convesso chiuso* di P è l'insieme
$$\overline{\mathrm{con}}(P) = \bigcap \{C \subseteq V \mid P \subseteq C \wedge C \text{ chiuso convesso}\}$$

Proposizione 5.4.5. *Sia X spazio normato e $K \subseteq X$ non vuoto, allora*

$$\operatorname{con}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \wedge x_i \in K \wedge \lambda_i \in [0,1] \wedge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che l'insieme al secondo membro è convesso: scegliamo due suoi elementi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ e $\sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$ e fissiamo $\lambda \in [0,1]$.

Definiamo

$$\eta_k = \begin{cases} \lambda\lambda_k & \text{se } 1 \le k \le n \\ (1-\lambda)\mu_{k-n} & \text{se } n+1 \le k \le m+n \end{cases}$$

allora

$$\sum_{k=1}^{m+n} \eta_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda)\mu_j = \lambda + 1 - \lambda = 1$$

Ancora ponendo

$$z_k = \begin{cases} x_k & \text{se } 1 \le k \le n \\ y_{k-n} & \text{se } n+1 \le k \le m+n \end{cases}$$

chiaramente $z_k \in K$ e

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda\lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda)\mu_j y_j = \sum_{k=1}^{m+n} \eta_k z_k$$

quindi l'insieme è convesso. Inoltre esso è contenuto in ogni convesso che contenga anche K e quindi deve coincidere con $\operatorname{con}(K)$. ■

Proposizione 5.4.6. *Sia $K = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ spazio di Banach allora*

$$\operatorname{con}(K) = \overline{\operatorname{con}}(K)$$

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente e dalla finitezza di K abbiamo

$$\operatorname{con}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i \in [0,1] \wedge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Dimostriamo che $\operatorname{con}(K)$ è sequenzialmente compatto (e in particolare chiuso): per ogni successione y_n di suoi elementi possiamo determinare $\lambda_{i,n} \in [0,1]$ tali che $y_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} x_i$ e quindi posso sceglierne un'estratta affinché i coefficienti convergano, ottenendo così un'estratta convergente. Infine la relazione $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ che è soddisfatta per ogni termine della successione per continuità è soddisfatta anche dal limite e quindi il limite dell'estratta giace ancora nello stesso insieme. ■

Proposizione 5.4.7. *Sia X spazio di Banach e $K \subseteq X$, allora*

$$\overline{\operatorname{con}}(K) = \overline{\operatorname{con}(K)}$$

Dimostrazione. Innanzitutto $\mathrm{con}(K) \subseteq \overline{\mathrm{con}}(K)$ poiché è intersezione di un maggior numero di insiemi, per la definizione di chiusura allora $\overline{\mathrm{con}(K)} \subseteq \overline{\mathrm{con}}(K)$.

Dimostriamo adesso che la chiusura di un insieme convesso C è convessa: se x, y appartengono alla chiusura e $\lambda \in [0,1]$ allora esistono $x_n, y_n \in C$ tali che $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Ma

$$\|\lambda x_n + (1-\lambda)y_n - \lambda x - (1-\lambda)y\| \leq \lambda \|x_n - x\| + (1-\lambda)\|y_n - y\|$$

e quindi $\lambda x + (1-\lambda)y$ è il limite di una successione in C e quindi appartiene ancora alla chiusura che risulta anch'essa convessa.

Quindi $\overline{\mathrm{con}}(K) \subseteq \overline{\mathrm{con}(K)}$ ottenendo la tesi. ■

Ricordiamo ora la definizione di spazio metrico precompatto (si veda pagina 19), diciamo che un sottoinsieme non vuoto K di uno spazio normato X è precompatto se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$$

Dal teorema di Hausdorff e dalla proposizione 2.1.11 se X è di Banach e K è chiuso e precompatto allora è anche compatto. Dimostriamo il seguente risultato

Lemma 5.4.8. *Sia X spazio normato e $K \subseteq X$ precompatto, allora anche* $\mathrm{con}(K)$ *è precompatto.*

Dimostrazione. Poiché K è precompatto per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq K$ tale che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon/2}(x_i) \tag{5.4.1}$$

L'insieme $\mathrm{con}(F)$ è un sottoinsieme chiuso e limitato del sottospazio $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ di dimensione finita, quindi $\mathrm{con}(F)$ è sequenzialmente compatto e quindi precompatto, esisteranno allora $y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathrm{con}(F)$ tali che

$$\mathrm{con}(F) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{\varepsilon/2}(y_i) \tag{5.4.2}$$

Dimostriamo la proposizione. Sia $z \in \mathrm{con}(K)$ allora esistono $z_1, z_2, \ldots z_k \in K$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in [0,1]$ tali che $\sum_i \lambda_i = 1$ e $\sum_i \lambda_i z_i = z$. Dalla (5.4.1) esistono $u_1, \ldots, u_k \in F$ non necessariamente distinti tali che $\|z_i - u_i\| < \varepsilon/2$ per ogni indice i, allora

$$\left\| z - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sfruttando ora la (5.4.2) esiste y_j tale che

$$\|z - y_j\| \leq \left\| z - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i - y_j \right\| < \varepsilon$$

e quindi

$$\mathrm{con}(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{\varepsilon}(y_1)$$

ovvero con(K) è precompatto. ■

Corollario 5.4.9. *Sia X spazio di Banach e $K \subseteq X$ precompatto, allora $\overline{\mathrm{con}}(K)$ è compatto*

Dimostrazione. Segue dal lemma precedente e dalla proposizione 2.1.11. ■

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema più importante di questa sottosezione:

Teorema 5.4.10 (del punto fisso di Shauder)**.** *Sia X spazio di Banach e K sottoinsieme non vuoto compatto convesso, allora ogni applicazione continua $f : K \to K$ ha un punto fisso.*

Dimostrazione. Per ogni $m \in M$ esistono $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tali che $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{1}{m}}(x_i)$, poniamo $K_m = \mathrm{con}(\{x_i \mid i \leq n\}) \subseteq K$. Definiamo la funzione

$$\varphi_m : x \in K \to \frac{\sum_{i=1}^{n} d(x, K \setminus B_{\frac{1}{m}}(x_i))x_i}{\sum_{i=1}^{n} d(x, K \setminus B_{\frac{1}{m}}(x_i))} \in K_m$$

Per come sono stati definiti gli x_i il denominatore non si annulla mai e per la proposizione 2.1.6 è continuo. Quindi

$$\|x - \varphi_m(x)\| \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} d(x, K \setminus B_{\frac{1}{m}}(x_i)) \|x - x_i\|}{\sum_{i=1}^{n} d(x, K \setminus B_{\frac{1}{m}}(x_i))}$$

ricordiamo che $d(x, K) \setminus B_{\frac{1}{m}}(x_i)) > 0 \Leftrightarrow x \in B_{\frac{1}{m}}(x_i) \Leftrightarrow \|x - x_i\| \leq \frac{1}{m}$ e quindi

$$\|x - \varphi_m(x)\| \leq \frac{1}{m}$$

Ora alla restrizione di $\varphi \circ f$ su K_m convesso chiuso, limitato e contenuto in un sottospazio di dimensione finita può essere applicato il teorema di Bouwer, esisterà $y_m \in K_m \subseteq K$ tale che $y_m = \varphi[f(y_m)]$. Esisterà allora un'estratta di y_m che convergerà ad un certo $y \in K$ ma dalla

$$\|y_m - f(y_m)\| = \|\varphi[f(y_m)] - f(y_m)\| \leq \frac{1}{m}$$

segue che $f(y) = y$ completando così la tesi. ■

Teorema 5.4.11 (Leray-Schauder)**.** *Sia sempre X spazio di Banach ed $f : X \to X$ una generica funzione continua che manda successioni limitate in successioni con un'estratta convergente in X. Supponiamo anche che l'insieme*

$$\{x \in X \mid \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tale che } x = \lambda f(x)\}$$

è limitato, allora f possiede un punto fisso.

Dimostrazione. Sia $M > 0$ la costante che delimita tale insieme ovvero

$$\mathcal{A} = \{x \in X \mid \exists \lambda \in [0,1] \text{ tale che } x = \lambda f(x)\} \subseteq B_M(0)$$

Definiamo l'applicazione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } \|f(x)\| \leq M \\ \frac{M}{\|f(x)\|} f(x) & \text{se } \|f(x)\| > M \end{cases}$$

la funzione g potremmo vederla anche come applicazione da $D_M(0)$ in sé stesso e continua a mandare successioni chiuse in successioni con un'estratta convergente. Posto $K = \overline{\text{con}}(g(D_M(0))) \subseteq D_M(0)$ allora dal corollario 5.4.9 K è convesso e compatto poiché $g(D_M(0))$ è precompatto, difatti

$$y_n \in g(D_M(0)) \to y_n = g(x_n) \text{ con } \|x_n\| < M \Rightarrow y_n \text{ ha estratta di Cauchy}$$

e dal teorema 2.3.5 è precompatto. Perciò $g(K) \subseteq K$ e possiamo porre $g : K \to K$, applichiamo il teorema del punto fisso di Schauder e quindi esisterà un punto fisso x di g.

Se $\|f(x)\| \leq M$ allora è un punto fisso anche per f altrimenti si avrebbe $x = \frac{M}{\|f(x)\|} f(x) = \lambda f(x)$ e quindi $x \in \mathcal{A}$, ma allora $M > \|x\| = \|g(x)\| = M$ il che è assurdo. ■

5.5 Operatori di Riesz

Definizione 5.5.1. Consideriamo ora uno spazio di Banach X. Un operatore $A \in L(X,X)$ è di *Riesz* se e solo se esiste $K \in K(X,X)$ tale che

$$A = I - K$$

con I l'operatore identico.

Proposizione 5.5.2. *Sia $L \in L(X,X)$ allora*

$$(I - L)^* = I - L^*$$

Dimostrazione. per ogni $x \in X$ e $f \in X^*$

$$[(I - L)^* f](x) = f(x - Lx) = f(x) - f(Lx) = [(I - L^*)f](x)$$

■

Corollario 5.5.3. *Se A è un operatore di Riesz allora anche A^* è di tipo Riesz.*

Proposizione 5.5.4. *Gli operatori di Riesz sono fredholmiani.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che ogni operatore A di Riesz è semifredholmiano in quanto anche l'aggiunto è un operatore di Riesz.

Sia $A + K = I$ con K compatto, allora la norma $\|x\|_1 = \|Kx\|$ è chiaramente più debole di $\|\cdot\|$ quindi $\|x\| \leq \|Ax\| + \|x\|_1$ e la tesi segue da Peetre. ∎

Teorema 5.5.5 (Primo teorema di Fredholm)**.** *Se X è uno spazio di Banach allora l'operatore di Riesz A è iniettivo se e solo se è suriettivo.*

Dimostrazione. Per assurdo $A = I - K$ è iniettivo ma non suriettivo, essendo semifredholmiano $X_1 = A(X) \leq X$ è chiuso, dimostriamo che $A(X_1) < X_1$. Infatti se fossero uguali e $x \in X \setminus X_1$ allora $Ax \in X_1 = A(X_1)$ e quindi esiste $y \in X_1$ con $Ax = Ay$ assurdo poiché A è iniettiva.

Possiamo quindi costruire una successione decrescente di sottospazi chiusi $X_n = A(X_{n-1}) < X_{n-1}$ in quanto la restrizione di operatori di Riesz su sottospazi chiusi rimane di Riesz. Dal lemma 4.3.7 esiste una successione $x_n \in E_{n-1}$ di norma unitaria con $d(x_n, E_n) \geq \frac{1}{2}$, prendiamo ora due interi $i < j$ allora

$$X_j < X_{j-1} \leq X_i < X_{i-1}$$

e

$$\|Kx_i - Kx_j\| = \|Ax_j - Ax_i + x_i - x_j\| \geq d(x_i, X_i) \geq \frac{1}{2}$$

ovvero Kx_n non ammette estratte di Cauchy raggiungendo così un assurdo che può essere risolto solo supponendo A suriettivo.

Vivecersa se A è suriettivo dalle relazioni di ortogonalità A^* è iniettivo e per il punto precedente A^* è suriettiva e perciò $\{0\} = {}^{\perp}\mathrm{im}\, A^* = \ker A$. ∎

Teorema 5.5.6 (Secondo teorema di Fredholm)**.** *Sia $A = I - K$ di Riesz sullo spazio di Banach X, allora*

$$A \textit{ iniettivo } \Leftrightarrow A^* \textit{ suriettivo } \Leftrightarrow A^* \textit{ iniettivo } \Leftrightarrow A \textit{ suriettivo}$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla dimostrazione del teorema precedente. ∎

Il seguente teorema è conosciuto anche come *teorema indice zero.*

Teorema 5.5.7 (Terzo teorema di Fredholm)**.** *Per ogni operatore $A = I - K$ di Riesz vale $I_A = 0$.*

Dimostrazione. Prendiamo $m = \dim \ker A$ e $n = \dim \ker A^*$, se $n = 0$ dal secondo teorema di Fredholm anche $m = 0$ e viceversa, quindi possiamo supporli entrambi positivi. Due casi

Supponiamo $n < m$, sia B il supplementare topologico di $\ker A$ e S il supplementare topologico di $\mathrm{im}\, A$ con $\dim S = m$ poiché $\mathrm{im}\, A = {}^{\perp}\ker A^*$.

Prendiamo $x_1, \ldots, x_n$ base di $\ker A$ e $y_1, \ldots, y_m$ base di S e ricordiamo che le proiezioni $P_{\ker A}$ e P_B sono continue. Ora definiamo l'applicazione

$$K_1 : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + x_B \in \ker A \oplus B \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \in X$$

che è lineare e continua, è anche compatto poiché $\operatorname{im} K_1$ ha dimensione finita. Posto $A_1 = A - K_1$ è di Riesz.

Dimostriamo che

- A_1 è iniettiva. Per ogni $x \in \ker A_i$

$$x - Kx - K_1x = 0 \Rightarrow x - Kx \in S \cap \operatorname{im} A \Rightarrow x \in \ker A \cap B \Rightarrow x = 0$$

- A_1 non è suriettivo. Per assurdo esiste $x \in X$ tale che $A_1x = y_m$ ovvero $Ax = y_m + sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \in S \cap \operatorname{im} A$ ma è assurdo poiché gli y_i sono indipendenti e $\alpha_m = 1$.

Ciò però porta ad un assurdo per il primo teorema di Fredholm, e questo assurdo è nato nell'aver posto $n < m$.

Supponiamo infine $m < n$, costruiamo l'operatore

$$K_2 : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + x_B \in \ker A \oplus B \to \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i \in X$$

e $A_2 = A - K_2$ è ancora di Riesz. Dimostriamo che

- A_2 è suriettiva. Infatti per ogni $y = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i + y_B \in S \oplus \operatorname{im} A = X$ esiste $x_B \in B$ tale che $y_B = Ax_B$ poiché B è il supplemento topologico di $\ker A$. Quindi l'immagine di
$$-\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + x_B$$
coincide con y.

- A_2 non è iniettiva. Difatti $A_2(x_n) = A(x_n) = 0$ poiché x_n è un elemento della base del kernel di A.

Abbiamo quindi raggiunto di nuovo un assurdo, perciò deve per forza valere $m = n$. ■

Rimettendo insieme tutti i risultati precedenti otteniamo il seguente

Teorema 5.5.8 (dell'alternativa di Fredholm)**.** *Sia X spazio di Banach, $K \in K(X, X)$ e $A = I - K$ operatore di Riesz. Allora vale una ed una sola trale seguenti affermazioni:*

1. $\ker A = \{0\}$*,* $\operatorname{im} A = X$*,* $\ker A^* = \{0\}$ *e* $\operatorname{im} A^* = X^*$*;*

2. $\dim \ker A = \dim \ker A^* \in \mathbb{N}$ *e* $\operatorname{im} A = {}^\perp\ker A^*$*,* $\operatorname{im} A^* = \ker A^\perp$*.*

Oppure in maniera analoga

1. *Le equazioni in x e x^**

$$Ax = y$$
$$A^*x^* = y^*$$

Hanno un'unica soluzione per ogni $y \in X$ e per ogni $y^* \in X^*$.

2. *Le soluzioni delle equazioni in x e x^**

$$Ax = 0$$
$$A^*x^* = 0$$

sono infinite e generano due sottospazi di dimensione finita di X e X^* con la stessa dimensione.

5.6 Teoria spettrale

Definizione 5.6.1. Sia $T \in L(X, X)$ definito si X spazio di Banach, il *risolvente* di T è l'insieme

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid T - \lambda I \text{ è invertibile da } X \text{ in } X\}$$

Lo *spettro* di T è l'insieme $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$, mentre lo *spettro puntuale* di T è l'insieme

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid T - \lambda I \text{ non è iniettiva su } X\}$$

Gli elementi di $\sigma_p(T)$ sono detti *autovalori* di T, mentre per ogni $\lambda \in \sigma_p(T)$ un elemento $x \in X \setminus \{0\}$ è un *autovettore* di T associato a λ se e solo se

$$Tx = \lambda x$$

Gli autovettori associati ad un particolare autovalore λ formano un sottospazio vettoriale, se esso ha dimensione finita la sua dimensione è detta *molteplicità geometrica* di λ.

Definizione 5.6.2. Lo *spettro continuo* di T è l'insieme

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T) \mid (T - \lambda I)(X) \text{ è denso in } X\}$$

mentre lo *spettro residuo* di T è l'insieme

$$\sigma_r(T) = \sigma(T) \setminus [\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)]$$

In questa sezione alcuni risultati saranno validi sono per gli spazi normati su $\mathbb{C}$ e non su quelli reali a differenza dei capitoli precedenti. In questi casi nell'enunciato verrà specificato che X è uno spazio normato complesso.

Proposizione 5.6.3. *Lo spettro di un operatore continuo $T : X \to X$, se non vuoto, è compatto e*

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$$

Dimostrazione. Prendiamo $|\lambda| > \|T\|$ e per ogni $y \in X$ l'operatore

$$x \in X \to \frac{1}{\lambda}(Tx - y) \in X$$

è una contrazione di X e quindi ammette un unico punto fisso, quindi λ si trova nel risolvente.

Dimostriamo ora che $\rho(T)$ è aperto: per ogni $\lambda_0 \in \rho(T)$ l'operatore $T - \lambda_0 I$ è invertibile e continuo, dal teorema della funzione aperta anche l'inversa è continua. Prendiamo quindi $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che

$$|\lambda - \lambda_0| < \left\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\right\|$$

e per ogni $y \in X$ consideriamo l'applicazione

$$\mathcal{C} : x \in X \to (T - \lambda_0 I)^{-1} [y + (\lambda - \lambda_0)x] \in X$$

Non è difficile verificare che risulta una contrazione, quindi dal teorema di Banach-Cacioppoli possiede un unico punto fisso per ogni $y \in X$.

Ma allora per ogni $y \in X$ esiste un unico $x \in X$ tale che

$$x = (T - \lambda_0 I)^{-1} [y + (\lambda - \lambda_0)x] \Rightarrow Tx - \lambda_0 x = y + \lambda x - \lambda_0 x \Rightarrow Tx - \lambda x = y$$

e quindi λ appartiene al risolvente di T. ■

Nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lo spettro $\sigma(T)$ non è mai vuoto. La dimostrazione di questo risultato non verrà data in questa sede in quanto richiede conoscenze non banali sulle funzioni analitiche. Nel caso particolare in cui X sia finitamente generato l'esistenza di elementi nello spettro è una immediata conseguenza del teorema fondamentale dell'algebra applicato al polinomio

$$p(\lambda) = \det (I - \lambda T)$$

Lo spettro puntuale $\sigma_p(T)$ invece può essere vuoto, basta considerare in $X = \ell^2$ l'applicazione

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

Lemma 5.6.4. *Autovettori associati a diversi autovalori sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione. Per $n = 1$ banalmente vero, quindi supponiamolo vero per $n - 1$ allora siano $x_1, \dots, x_n$ autovettori associati rispettivamente a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tutti distinti, siano allora $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tali che

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i = 0$$

Inoltre

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_n x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda) x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ per ogni } i < n$$

ovvero $\alpha_n x_n = 0$ ed essendo x_n non nullo anche $\alpha_n = 0$ e sono linearmente indipendenti. ■

Proposizione 5.6.5. *Se $T \in K(X,X)$ allora*

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$$

Se poi X ha dimensione infinita allora $0 \in \sigma(T)$.

Dimostrazione. Se $0 \notin \sigma(T)$ allora T^{-1} è continuo e $I = T \circ T^{-1}$ rimane compatto e quindi le palle chiuse sono sequenzialmente compatte, ovvero $\dim X < +\infty$.

Se ora $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ allora $I - \frac{1}{\lambda}T$ è un operatore di Riesz non invertibile, perciò non è né iniettiva né suriettiva e quindi $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$. ■

Proposizione 5.6.6. *Sia $T \in K(X,X)$ con X di Banach allora l'unico punto di accumulazione di $\sigma(T) \setminus \{0\}$ è proprio 0.*

Dimostrazione. Sia $\lambda_n \in \sigma_n(T) \setminus \{0\}$ convergente ad un certo $\lambda \in \mathbb{K}$ e sia x_n autovettore di λ_n. Definiamo

$$X_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

ed essendo linearmente indipendenti $X_{n-1} < X_n$ perciò esiste $y_n \in X_n$ di norma 1 e $d(y_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$.

Dimostriamo che $(T - \lambda_n I)(X_n) \leq X_{n-1}$, infatti

$$(T - \lambda_n I)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n)x_i \in X_{n-1}$$

quindi per $m < n$ si ha $X_{m-1} < X_m \leq X_{n-1} < X_n$ e

$$\left\| \frac{Ty_m}{\lambda_m} - \frac{Ty_n}{\lambda_n} \right\| = \left\| \frac{Ty_m - \lambda_m y_m}{\lambda_m} - \frac{Ty_n - \lambda_n y_n}{\lambda_n} + y_m - y_n \right\| \geq \frac{1}{2}$$

Se ora λ_n non tendesse a 0 allora esiste $L > 0$ tale che $|\lambda_n| > L$ per n abbastanza grande e quindi, a meno di passare ad un'estratta, $\frac{1}{\lambda_n}$ è di Cauchy e

$$\left\| \frac{Ty_m}{\lambda_m} - \frac{Ty_n}{\lambda_n} \right\| = \left\| \frac{Ty_m}{\lambda_m} - \frac{Ty_n}{\lambda_m} + \frac{Ty_n}{\lambda_m} - \frac{Ty_n}{\lambda_n} \right\| \leq \frac{\|Ty_m - Ty_n\|}{L} + \left| \frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\lambda_n} \right| \|T\|$$

raggiungendo un assurdo poiché T è un operatore compatto. Quindi l'unico valore a cui una successione di autovalori può convergere è 0. ■

Corollario 5.6.7. *Lo spettro di un operatore compatto T è al più numerabile.*

Dimostrazione. Innanzitutto $\sigma_p(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$ inoltre

$$\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \cap \bigcup_{i=2}^{n} \left(\left[-\|T\|, -\frac{\|T\|}{n} \right] \cup \left[\frac{\|T\|}{n}, \|T\| \right] \right)$$

e ogni insieme nella forma $\sigma_p(T) \cap \left(\left[-\|T\|, -\frac{\|T\|}{n} \right] \cup \left[\frac{\|T\|}{n}, \|T\| \right] \right)$ deve essere necessariamente finito. Quindi lo spettro è al più numerabile. ■

5.7 Raggio spettrale

Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $L(X) = L(X, X)$ lo spazio delle funzioni lineari e continue su X. Possiamo definire allora su $L(X)$ il prodotto interno

$$AB = A \circ B$$

per ogni $A, B \in L(X)$. Per la linearità degli operatori abbiamo che

$$(A + B)C = AC + BC$$
$$A(B + C) = AB + AC$$

e quindi $L(X)$ è un'algebra sul campo $\mathbb{K}$. In particolare per ogni polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ e per ogni $T \in L(X)$ possiamo definire un nuovo operatore $p(T)$ in modo tale che per ogni $x \in X$

$$p(T)(x) = a_0 x + a_1 Tx + a_2 T^2 x + \cdots + a_n T^n x$$

Poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \ln \|T^n\|$$

Proposizione 5.7.1. *Per ogni* $m, n \in \mathbb{N}$

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n$$

Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$$

Dimostrazione. La prima affermazione segue immediatamente dalla semplice disuguaglianza $\|T^{m+n}\| \leq \|T^m\| \|T^n\|$. Scegliamo ora un intero $m \in \mathbb{N}$ allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono e sono unici $q, r \in \mathbb{N}_0$ con $r < m$ tali che $n = mq + r$ e quindi

$$a_n = a_{mq+r} \leq q a_m + a_r \leq \frac{n}{m} a_m + \max\{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$$

Ma allora $\limsup_{n\to+\infty}(a_n/n) \leq a_m/m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e quindi anche il secondo punto è verificato. ∎

Una conseguenza immediata di questo risultato è che il limite $\lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{1/n}$ esiste finito ed è più piccolo di $\|T\|$. Tale quantità è il *raggio spettrale* dell'operatore T e lo indicheremo con $r(T)$.

Esempio 5. Sia $X = \mathbb{R}^2$ con la norma classica e consideriamo l'operatore

$$T(x, y) = (y, 0)$$

allora $T^2 = 0$ e $r(T) = 0$ mentre $\|T\| = 1$. Quindi la disuguaglianza $r(T) \leq \|T\|$ può essere stretta.

Il raggio spettrale di un operatore permette di ottenere una stima migliore di quella ottenuta nella proposizione 5.6.3. Vale infatti

Proposizione 5.7.2. *Sia $T \in L(X, X)$ allora*

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq r(T)\}$$

Dimostrazione. Scegliamo $\lambda \in \mathbb{K}$ in modo tale che $|\lambda| > r(T)$, per la proposizione precedente esiste $n \in \mathbb{N}$ per cui $|\lambda^n| > \|T^n\|$.

Se $\lambda \in \sigma_p(T)$ chiaramente si avrà $\lambda^n \in \sigma_p(T^n)$, supponiamo quindi che $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$. Se per assurdo $T^n - \lambda^n I$ è suriettivo allora per ogni $y \in X$ esiste $x \in X$ tale che $T^n x = \lambda^n x + y$ e quindi

$$y = (T^n - \lambda^n I)(x) = (T - \lambda I)(T^{n-1} + \lambda T^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-2} T + \lambda^{n-1} I)(x)$$

e quindi y apparterrebbe all'immagine di $T - \lambda I$ assurdo, quindi $\lambda^n \in \sigma(T)$.

In entrambi i casi si ha una contraddizione a causa della proposizione 5.6.3. ■

Teorema 5.7.3. *Se X è uno spazio normato su $\mathbb{C}$ e $T \in L(X)$ allora*

$$r(T) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$$

Dimostrazione. Omessa. ■

Sfruttando lo stesso ragionamento della precedente dimostrazione il lettore può velocemente verificare che

$$p\,[\sigma_p(T)] \subseteq \sigma_p[p(T)] \qquad\qquad p[\sigma(T)] \subseteq \sigma[p(T)]$$

Dimostriamo ora che se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora le inclusioni sono uguaglianze.

Sia $\lambda \in \sigma_p[p(T)]$ e per assurdo $\lambda \notin p[\sigma_p(T)]$. Dal teorema fondamentale dell'algebra esistono $l, l_1, l_2, \ldots, l_k \in \mathbb{C}$ non necessariamente distinti tali che

$$p(x) - \lambda = l(x - l_1)(x - l_2) \cdots (x - l_k) \tag{5.7.1}$$

con $l_i \notin \sigma_p(T)$ altrimenti $\lambda = p(l_i)$. Inoltre esiste $x \neq 0$ tale che $p(T)(x) = \lambda x$. Ma $T - l_i I$ è iniettivo per ogni i e quindi si avrebbe $x = 0$ assurdo.

Supponiamo ora che $\lambda \in \sigma[p(T)]$ e $\lambda \notin p[\sigma(T)]$, allora vale ancora la (5.7.1) con $l_i \notin \sigma(T)$ per ogni i. Ma allora tutte le $T - l_i I$ sono biiettive dunque $p(T) - \lambda I$ è biettiva, assurdo.

Capitolo 6

Spazi di Hilbert

La maggior parte delle dimostrazioni contenute nel seguente capitolo non sono state trattate durante il corso di Analisi Funzionale, le uniche necessarie al superamento dell'esame sono raccolte nella sezione 6.5 di questo capitolo.

Ciononostante le definizioni e gli enunciati di alcuni teoremi sono necessari per la comprensione degli argomenti trattati durante il corso, le dimostrazioni verranno perciò inserite per completezza.

6.1 Spazi prehilbertiani e di Hilbert

Definizione 6.1.1. Sia H spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ è un *prodotto scalare* se e solo se valgono

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ e vale l'uguaglianza se e solo se $x = 0$;
2. Per ogni $u, v, w \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ vale $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$;
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.

Osserviamo che se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora il punto 3 diventa

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

Se H è uno spazio prehilbertiano allora definiamo

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

che risulta essere una norma su H. Quindi tutti gli spazi prehilbertiani sono spazi normati e inoltre vale

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Proposizione 6.1.2 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.** *Per ogni* $x, y \in H$ *si ha*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Dimostrazione. Prendiamo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{K}$ con $|k| = 1$ allora vale

$$0 \leq \|\lambda k x - y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}(k \langle x, y\rangle) + \|y\|^2$$

quindi il discriminante $[\operatorname{Re}(k\langle x, y\rangle)]^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$ deve essere necessariamente minore o uguale a 0 per ogni k. Se $\langle x, y\rangle \neq 0$ poniamo

$$k = \frac{\langle y, x\rangle}{|\langle x, y\rangle|}$$

e quindi $\operatorname{Re}(k\langle x, y\rangle) = |\langle x, y\rangle|$ da cui segue immediatamente la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. ■

Proposizione 6.1.3. *Per ogni* $x, y \in H$ *si ha*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Dimostrazione.

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

■

Quindi ogni spazio prehilbertiano è anche uno spazio normato.

Definizione 6.1.4. Uno spazio prehilbertiano è *di Hilbert* se e solo se il relativo spazio normato è di Banach.

Sia H uno spazio prehilbertiano complesso, allora possiamo dotare $H_{\mathbb{R}}$ (che ricordiamo essere H dotato di una struttura di spazio vettoriale reale) del seguente prodotto scalare reale

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}\langle x, y\rangle$$

in particolare se H è uno spazio di Hilbert anche $H_{\mathbb{R}}$ è uno spazio di Hilbert.

Proposizione 6.1.5. *Sia* H *uno spazio vettoriale complesso e* $(\cdot,\cdot)$ *un prodotto scalare reale su* $H_{\mathbb{R}}$ *tale che*

$$(x, iy) = -(ix, y) \tag{6.1.1}$$

per ogni $x, y \in H$. *Allora esiste un unico prodotto scalare* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *su* H *tale che* $(x, y) = \operatorname{Re}\langle x, y\rangle$ *per ogni* $x, y \in H$.

Dimostrazione. L'unicità discende immediatamente dall'uguaglianza

$$\operatorname{Im}\langle x, y\rangle = i \operatorname{Re}\langle x, iy\rangle = i(x, iy)$$

Prendiamo ora un prodotto scalare reale (x, y) su $H_{\mathbb{R}}$ che soddisfi la (6.1.1), definiamo

$$\langle x, y\rangle = (x, y) + i(x, iy)$$

se $x = y$ allora avremo dalla che $(ix, x) = (x, ix) = -(ix, x)$ e quindi $(x, ix) = 0$ e $\langle x, x\rangle \geq 0$ e si annulla se e solo se $x = 0$.

Abbiamo inoltre

$$\langle x, y\rangle = (x, y) + i(x, iy) = (y, x) - i(y, ix) = \overline{\langle y, x\rangle}$$

mentre l'applicazione $x \to \langle x, y\rangle$ è $\mathbb{R}$-lineare per ogni $y \in H$. Inoltre

$$\langle ix, y\rangle = (ix, y) + i(ix, iy) = -(x, iy) - i(x, -y) = i\langle x, y\rangle$$

e quindi è anche $\mathbb{C}$-lineare. ■

Nel primo capitolo abbiamo verificato che non tutti gli spazi vettoriali reali possono essere dotati di una struttura di spazio vettoriale complesso a meno che non sia possibile trovare un'applicazione lineare $\hat{\imath}$ tale che $\hat{\imath}^2(x) = -x$.

Sia ora H uno spazio prehilbertiano reale con prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ e supponiamo che esista un operatore $\hat{\imath} : H \to H$ che soddisfi le seguenti relazioni

$$\begin{gathered}\hat{\imath}^2(x) = -x \\ (x, \hat{\imath}(y)) = -(\hat{\imath}(x), y)\end{gathered}$$

allora per la proposizione precedente H può essere dotato di una struttura di spazio prehilbertiano complesso con $ix = \hat{\imath}(x)$ e $\langle x, y\rangle = (x, y) + i(x, iy)$.

Se H è uno spazio prehilbertiano (reale o complesso) allora non è difficile verificare che vale l'uguaglianza

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{6.1.2}$$

per ogni $x, y \in H$, detta *uguaglianza del parallelogramma.* In realtà si può dimostrare che vale anche il viceversa, ovvero che se X è uno spazio normato (reale o complesso) che soddisfa la (6.1.2) allora possiede un prodotto scalare la cui norma indotta coincide con la norma propria di X.

La dimostrazione di tale risultato è piuttosto lunga, e considereremo separatamente il caso reale e quello complesso.

Teorema 6.1.6 (Fréchet–von Neumann–Jordan, Caso reale)**.** *Sia* $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato reale, allora esiste un prodotto scalare* $\langle\cdot, \cdot\rangle$ *su* X *tale che* $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ *se e solo se vale la* (6.1.2)*. In tal caso vale l'uguaglianza*

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

Se X è uno spazio prehilbertiano allora

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle - \|x\|^2 - \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle = 4\langle x,y\rangle$$

Sia X uno spazio normato la cui norma soddisfi la (6.1.2), per ogni $x, y \in X$ poniamo

$$(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

Chiaramente $(x,y) = (y,x)$ e $(x,x) = \|x\|^2$, dobbiamo solo dimostrare le proprietà di linearità e di omogeneità, procediamo per gradi.

- Dimostriamo che $(2x,y) = 2(x,y)$ e $(-x,y) = -(x,y)$. Infatti abbiamo

$$\begin{aligned}(2x,y) &= \frac{\|x+(x+y)\|^2 - 4\|x\|^2 - \|y\|^2}{2} \\ &= \frac{2\|x+y\|^2 + 2\|x\|^2 - \|(x+y)-x\|^2 - 4\|x\|^2 - \|y\|^2}{2} \\ &= \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \\ &= 2(x,y)\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}(-x,y) &= \frac{\|y-x\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} \\ &= \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y+x\|^2}{2} \\ &= -(x,y)\end{aligned}$$

- Dimostriamo la linearità nella prima coordinata. Per ogni $x, y, z \in X$ applicando più volte l'uguaglianza del parallelogramma

$$\begin{aligned}2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 &= \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \\ &= \|x+y\|^2 + 2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2 - \|x+y+2z\|^2 \\ &= \|x+y\|^2 + 2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2 - 2\|x+y+z\|^2 \\ &\quad - 2\|z\|^2 + \|x+y\|^2\end{aligned}$$

ovvero

$$\|x+y+z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2$$

e così abbiamo che

$$\begin{aligned}2(x+y,z) &= \|x+y+z\|^2 - \|x+y\|^2 - \|z\|^2 \\ &= \left(\|x+z\|^2 - \|x\|^2 - \|z\|^2\right) + \left(\|y+z\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2\right) \\ &= 2(x,z) + 2(y,z)\end{aligned}$$

- Per induzione $(nx, y) = n\,(x, y)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma allora

$$\left(\frac{m}{n}x, y\right) = \frac{m}{n}\,(x, y)$$

per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ e quindi per ogni numero razionale. Sia ora $\lambda \in \mathbb{R}$ esisterà una successione $\lambda_n \in \mathbb{Q}$ tale che $\lambda_n \to \lambda$. Perciò

$$\begin{aligned}\lambda\,(x, y) = \lim_{n\to+\infty} (\lambda_n x, y) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\|\lambda_n x + y\|^2 - \|\lambda_n x\|^2 - \|y\|^2}{2} \\ = \frac{\|\lambda x + y\|^2 - \|\lambda x\|^2 - \|y\|^2}{2}\end{aligned}$$

e quindi $\lambda\,(x, y) = (\lambda x, y)$.

La dimostrazione del caso reale è conclusa.

Teorema 6.1.7 (Fréchet–von Neumann–Jordan, Caso complesso)**.** *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato complesso, allora esiste un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su X tale che $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ se e solo se vale la* (6.1.2)*. In tal caso vale l'uguaglianza*

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\,\|x + iy\|^2 - i\,\|x - iy\|^2}{4}$$

Se X è uno spazio prehilbertiano allora

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle - \|x\|^2 - \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \\ &= 4\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \\ i\,\|x + iy\|^2 - i\,\|x - iy\|^2 &= i\,\|x\|^2 + i\,\|y\|^2 + 2i\operatorname{Re}\langle x, iy\rangle - i\,\|x\|^2 - i\,\|y\|^2 + 2i\operatorname{Re}\langle x, iy\rangle \\ &= 4i\operatorname{Re}\langle x, iy\rangle = 4\operatorname{Im}\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

Se X è uno spazio normato complesso che soddisfa l'uguaglianza del parallelogramma allora anche $X_{\mathbb{R}}$ lo soddisfa. Quindi per il risultato precedente $X_{\mathbb{R}}$ è dotato di un prodotto scalare reale il quale induce un unico prodotto scalare complesso su X, e questo prodotto scalare assume la medesima forma dell'enunciato.

Proposizione 6.1.8. *Gli spazi di Hilbert sono uniformemente convessi, in particolare sono riflessivi.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in H$ con $\|x\|, \|y\| \leq 1$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $\|x - y\| > \varepsilon$. Per l'uguaglianza del parallelogramma avremo allora che

$$\left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \frac{\|x - y\|^2}{4} < 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

e quindi prendendo $\delta = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ si ha la tesi. ∎

Sia $x \in H$ elemento fissato, allora l'applicazione

$$L_y : x \in H \to \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$$

è lineare per definizione di prodotto scalare e continua dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz con

$$\|L_y\| = \|y\|$$

in quanto $L_x(x) = \|x\|^2$.

6.2 Proiezioni ortogonali

Definizione 6.2.1. Due elementi $x, y \in H$ con H spazio prehilbertiano sono *ortogonali* se e solo se $\langle x, y \rangle = 0$ e lo indichiamo con la notazione $x \perp y$.

Per ogni $U \subseteq H$ definiamo

$$U^p = \{x \in H \mid x \perp y \, \forall y \in U\}$$

il quale, come è facile da verificare, è un sottospazio prehilbertiano chiuso di H.

Ricordando la definizione 5.1.5 allora per ogni $x \in H$

$$x \in U^p \Leftrightarrow L_x \in U^\perp$$

Proposizione 6.2.2. *Sia $U \subseteq H$ prehilbertiano allora*

$$U^p = \overline{\langle U \rangle}^p$$

Dimostrazione. Chiaramente $U^p \supseteq \overline{\langle U \rangle}^p$, viceversa se $x \in U^p$ allora $U \subseteq \ker L_x \Leftrightarrow \overline{\langle U \rangle} \leq \ker L_x \Leftrightarrow x \in \overline{\langle U \rangle}^p$ e quindi la tesi. ∎

quindi ci possiamo limitare a considerare esclusivamente i sottospazi chiusi.

Proposizione 6.2.3. *Se $x \perp y$ allora $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Teorema 6.2.4. *Sia H spazio di Hilbert e M un suo sottoinsieme chiuso non vuoto e convesso, allora esiste un unico elemento x di M di norma minima.*

Dimostrazione. Prendiamo $\delta = \inf \{\|x\| \mid x \in M\}$ quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $y_n \in M$ tale che $\delta \leq \|y_n\| < \delta + \frac{1}{n}$. Ma allora per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ avremo che $(y_m + y_n)/2 \in M$ e

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 = 2\|y_m\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|y_m + y_n\|^2 &= 4\left(\frac{\|y_m\|^2 + \|y_n\|^2}{2} - \left\|\frac{y_m + y_n}{2}\right\|^2\right) \\ &\leq 4\delta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) + 2\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

quindi y_n è una successione di Cauchy.

Poiché H è uno spazio di Hilbert allora la successione convergerà ad un certo $x \in M$ tale che $\|x\| = \delta$.

Se per assurdo esistessero due elementi $x, y \in M$ di norma minima allora sempre per convessità vale

$$\|x - y\|^2 = 4\left(\frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2\right) \leq 0$$

e quindi $x = y$. ■

Corollario 6.2.5. *Sia H spazio di Hilbert e M un suo sottoinsieme chiuso non vuoto e convesso. Prendiamo inoltre $x \in H$ allora esiste un unico elemento y di M che minimizza la quantità $\|z - x\|$ al variare di z in M.*

L'elemento y è detto proiezione *di x su M e lo indicheremo con il simbolo $P_M x$.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in H$ l'insieme $M - x$ è ancora convesso, d'altronde gli spazi di Hilbert sono chiaramente spazi vettoriali topologici quindi $M - x$ è chiuso. Possiamo quindi applicare il teorema precedente all'insieme $M - x$ e quindi esisterà $y - x \in M - x$ tale che $\|y - x\|$ sia minima. ■

Proposizione 6.2.6. *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente allora $\tilde{x}$ è la proiezione di x su M se e solo se per ogni $y \in M$*

$$\operatorname{Re}\langle x - \tilde{x}, y - \tilde{x}\rangle \leq 0 \tag{6.2.1}$$

Dimostrazione. Se $M = \{\tilde{x}\}$ allora è banale, quindi possiamo supporre che esistano almeno due elementi distinti in M.

Se $\tilde{x}$ è la proiezione di x su M sia $y \in M \setminus \{\tilde{x}\}$ e definiamo l'applicazione

$$\varphi : t \in [0,1] \to \|x - [(1-t)\tilde{x} + ty]\|^2$$

che ha minimo in $t = 0$. Infine

$$\varphi(t) = \|x - \tilde{x} - t(y - \tilde{x})\|^2 = \|x - \tilde{x}\|^2 - 2t\operatorname{Re}\langle x - \tilde{x}, y - \tilde{y}\rangle + t^2\|y - \tilde{x}\|$$

che ha derivata

$$\varphi'(t) = -2\operatorname{Re}\langle x - \tilde{x}, y - \tilde{y}\rangle + 2t\|y - \tilde{x}\|$$

e perciò deve essere $\varphi'(0) \geq 0$.

Supponendo ora che vale la (6.2.1), in tal caso $\varphi'(0) \geq 0$ e $\varphi''(t) > 0$ per ogni t. Dunque φ' è strettamente crescente perciò $\varphi(0) < \varphi(1)$ ovvero $\|x - \tilde{x}\| < \|x - y\|$. ■

Corollario 6.2.7. *Sia $M \leq H$ sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert e $x \in H$. Allora l'elemento $\tilde{x} \in M$ è la proiezione di x su M se e solo se*

$$x - \tilde{x} \in M^p$$

Dimostrazione. È immediato constatare che se vale $x - \tilde{x} \in M^p$ allora $\langle x - \tilde{x}, y - \tilde{x} \rangle = 0$ per ogni $y \in M$ e quindi è una proiezione. Viceversa supponiamo che $\operatorname{Re} \langle x - \tilde{x}, y - \tilde{x} \rangle \leq 0$ per ogni $y \in M$, allora per ogni $z \in M$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| = 1$ avremo $\lambda z \in M$ e

$$\operatorname{Re} \langle x - \tilde{x}, \lambda z \rangle = \operatorname{Re} \langle x - \tilde{x}, (\lambda z + \tilde{x}) - \tilde{x} \rangle \leq 0$$

Ponendo $\lambda = \pm 1$ avremo che $\operatorname{Re} \langle x - \tilde{x}, z \rangle = 0$, inoltre se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ponendo $\lambda = \pm i$ avremo anche $\operatorname{Im} \langle x - \tilde{x}, z \rangle = 0$ e quindi $x - \tilde{x} \in M^p$. ■

Proposizione 6.2.8. *Sia H spazio di Hilbert e $M \leq H$ sottospazio chiuso, allora esistono e sono uniche le applicazioni lineari continue $P_M : X \to M$ e $Q_M : X \to M^p$ tali che*

$$x = P_M x + Q_M x \in M + M^p$$

e tale scrittura è unica per x.

Inoltre se M è diverso da $\{0\}$ e da H avremo che $\|P_M\| = \|Q_M\| = 1$.

Dimostrazione. Per ogni $x \in H$ indichiamo con $P_M x$ la sua proiezione su x, allora per il corollario precedente $x - P_M x \in M^p$.

Se prendiamo $x, y \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ osserviamo che per ogni $z \in M$

$$\langle \alpha x + \beta y - \alpha P_M x - \beta P_M y, z \rangle = \alpha \langle x - P_M x, z \rangle + \beta \langle y - P_M y, z \rangle = 0$$

e quindi $\alpha P_M x + \beta P_M y = P_M(\alpha x + \beta y)$ per l'unicità della proiezione. Posto invece $Q_M x = x - P_M x$ allora Q_M è ancora lineare ed è contenuto interamente in M^p sempre per il corollario 6.2.7.

Siano ora $y \in M$, $z \in M^p$ tali che $y + z = P_M x + Q_M x$ allora $y - P_M x = Q_M x - z \in M \cap M^p = \{0\}$ ovvero $y = P_M x$ e $z = Q_M x$ garantendo l'unicità.

Per concludere osserviamo che per ogni $x \in H$ vale

$$\|x\|^2 = \|Px + Qx\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 + 2 \langle Px, Qx \rangle = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$$

da cui segue la continuità delle proiezioni con norma $\|P\| \leq 1$ e $\|Q\| \leq 1$. Poiché M è diverso dal sottospazio banale e P fissa gli elementi di M allora $\|P\| = 1$. Poiché M è chiuso e diverso da H allora M^p è diverso da $\{0\}$, infatti preso $z \in H \setminus M$ allora $y = Qz = z - Pz$ deve essere necessariamente diverso dal vettore nullo ed essendo $y = Qy$ la norma di Q vale anch'essa 1. ■

Corollario 6.2.9. *Se H è uno spazio di Hilbert e $M < H$ è un suo sottospazio chiuso proprio allora $M^p \neq \{0\}$.*

Corollario 6.2.10 (Teorema di Pitagora)**.** *Preso H spazio di Hilbert e $x \in H$ un suo generico elemento, allora*

$$\|x\|^2 = \|P_M x\|^2 + \|Q_M x\|^2$$

Corollario 6.2.11. *Se H spazio di Hilbert e M sottospazio chiuso, allora $(M^p)^p = M$.*

Dimostrazione. Banalmente $M \subseteq (M^p)^p$, sia $x \in (M^p)^p$ e P_M, Q_M le proiezioni riferite al sottospazio chiuso M. Perciò

$$0 = \langle x, Q_M x\rangle = \langle P_M x, Q_M x\rangle + \langle Q_M x, Q_M x\rangle = \|Q_M x\|^2$$

ovvero $x = P_M x \in M$. ■

Teorema 6.2.12 (Rappresentazione di Riesz)**.** *Se H è uno spazio di Hilbert allora per ogni $f \in H^*$ esiste un unico $w \in H$ tale che $\|f\| = \|w\|$ e per ogni $x \in H$*

$$f(x) = \langle x, w\rangle$$

In altre parole esiste un'isometria lineare invertibile tra H e H^*.

Dimostrazione. L'unicità è immediata da verificare, dimostreremo quindi solo l'esistenza di tale elemento. Se $f \neq 0$ allora il suo kernel sarà chiuso e non banale, per cui esisterà $z \in (\ker f)^p$ non nullo tale che $f(z) = 1$. Poniamo allora

$$w = \frac{z}{\|z\|^2}$$

Per ogni $x \in H$ si ha $x - f(x)z \in \ker f$ e

$$\langle x, w\rangle = \left\langle f(x)z, \frac{z}{\|z\|^2}\right\rangle = f(x)$$

quindi $f = L_w$ e per quanto detto precedentemente $\|f\| = \|L_w\| = \|w\|$. ■

Possiamo dimostrare la riflessività degli spazi di Hilbert anche senza sfruttare l'ipotesi di uniforme convessità.

Consideriamo innanzitutto l'isometria bilineare

$$T : x \in H \to L_x \in H^*$$

Prendiamo allora $F \in H^{**}$ allora $F \circ T \in H^*$ e quindi esiste un unico $x \in H$ tale che $F \circ T = L_x = Tx$. Dunque per ogni $f \in H^*$

$$F(f) = (F \circ T)\left(T^{-1}f\right) = L_x\left(T^{-1}f\right) = \left\langle x, T^{-1}f\right\rangle = f(x)$$

e quindi $F = J_H x$ e H è riflessivo.

Corollario 6.2.13. *Se H è uno spazio di Hilbert allora per ogni $M \leq H$ M^p è isomorfo a $M^\perp$ e per ogni $U \leq H^*$ sottospazio chiuso esiste un altro sottospazio chiuso $M \leq H$ isomorfo a U tale che ${}^\perp U = M^p$.*

Per gli spazi di Hilbert quindi i tre sottospazi M^p, $M^\perp$ e ${}^\perp M$ coincidono a meno di isometrie invertibili.

Proposizione 6.2.14. *Sia $T : H \to K$ un qualunque funzionale lineare con H e K spazi di Hilbert, allora*

$$\|T\| = \sup\left\{\langle Tx, y\rangle \mid x \in H, y \in K, \|x\|, \|y\| \leq 1\right\}$$

Dimostrazione. Innanzitutto abbiamo che $\|y\| = \sup_{\|z\|\leq 1} \langle y, z\rangle$, quindi avremo che

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} \langle Tx, y\rangle$$

e quindi la tesi. ■

6.3 Serie di Fourier in spazi di Hilbert

Definizione 6.3.1. Sia H spazio di Hilbert e S sottoinsieme non vuoto. S è un *sistema ortonormale* se e solo se per ogni $a, b \in S$ valgono le relazioni $\langle a, b\rangle = 0 \Leftrightarrow a \neq b$ e $\|a\| = \|b\| = 1$.

Tralasciamo per il momento gli spazi di Hilbert. Consideriamo un qualunque insieme non vuoto A e sia $\varphi : A \to [0, +\infty]$ una qualunque applicazione, possiamo definire allora la seguente quantità

$$\sum_{\alpha\in A} \varphi(\alpha) = \sup\left\{\sum_{\alpha\in A'} \varphi(\alpha) \,\middle|\, A' \subseteq A \text{ finito non vuoto}\right\}$$

se invece φ è una funzione in A a valori in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ diremo che $\varphi \in \ell^p(A, \mathbb{K})$, dove $p \in [1, +\infty[$, se e solo se

$$\sum_{\alpha\in A} |\varphi(\alpha)|^p < +\infty$$

Si può dimostrare che $\ell^p(A, \mathbb{K})$ è un $\mathbb{K}$-spazio normato con norma

$$\|\varphi\|_{\ell^p} = \left(\sum_{\alpha\in A} |\varphi(\alpha)|^p\right)^{1/p}$$

Proposizione 6.3.2. *Siano f, g funzioni su A a valori in $[0, +\infty]$ e $a, b \geq 0$ allora*

$$\sum_{\alpha\in A} [af(\alpha) + bg(\alpha)] = a\sum_{\alpha\in A} f(\alpha) + b\sum_{\alpha\in A} g(\alpha) \tag{6.3.1}$$

Per ogni $\varphi : A \to \mathbb{R}$ poniamo $\varphi^+(\alpha) = \max\{\varphi(\alpha), 0\}$ e $\varphi^-(\alpha) = -\min\{\varphi(\alpha), 0\}$ allora si ha

$$\sum_{\alpha\in A} |\varphi(\alpha)| = \sum_{\alpha\in A} \varphi^+(\alpha) + \sum_{\alpha\in A} \varphi^-(\alpha)$$

quindi se $\varphi \in \ell^1(A, \mathbb{R})$ la quantità a destra è finita e possiamo allora definire

$$\sum_{\alpha\in A} \varphi(\alpha) = \sum_{\alpha\in A} \varphi^+(\alpha) - \sum_{\alpha\in A} \varphi^-(\alpha)$$

ancora, se $\varphi = f + ig \in \ell^1(A, \mathbb{C})$ dove f e g sono funzioni su A a valori reali

$$\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha) = \sum_{\alpha \in A} f(\alpha) + i \sum_{\alpha \in A} g(\alpha)$$

Anche per le funzioni in $\ell^p(A, \mathbb{K})$ vale la (6.3.1) per $a, b \in \mathbb{K}$. Enunciamo anche i seguenti risultati che però non dimostreremo

Teorema 6.3.3. *Per ogni $p \in [1, +\infty[$ lo spazio $\ell^p(A, \mathbb{K})$ è uno spazio di Banach.*

Teorema 6.3.4 (Hölder)**.** *Siano $p, q \geq 1$ tali che $1/p + 1/q = 1$ ed $f \in \ell^p(A, \mathbb{K})$, $g \in \ell^q(A, \mathbb{K})$. Allora $fg \in \ell^1(A, \mathbb{K})$ e*

$$\|fg\|_{\ell^1} \leq \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q}$$

Corollario 6.3.5. *Lo spazio $\ell^2(A, \mathbb{K})$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\alpha \in A} f(\alpha)\overline{g(\alpha)}$$

Teorema 6.3.6 (Convergenza dominata)**.** *Siano f_n, f funzioni su A a valori in $\mathbb{K}$ tali che $f_n(\alpha) \to f(\alpha)$ per ogni $\alpha \in A$. Se esistono $g_n, g \in \ell^1(A, \mathbb{K})$ tali che $|f_n(\alpha)| \leq |g_n(\alpha)|$ per ogni $\alpha \in A$ e $\|g_n\|_{\ell^1} \to \|g\|_{\ell^1}$ allora $f_n, f \in \ell^1(A, \mathbb{K})$ e $f_n \to f$ in norma ℓ^1.*

Consideriamo adesso il sistema ortonormale $S = \{u_\alpha \in H \mid \alpha \in A\}$ con A l'insieme degli indici, definiamo per ogni $x \in H$ l'applicazione

$$\hat{x} : \alpha \in A \to \langle x, u_\alpha\rangle \in \mathbb{K}$$

Teorema 6.3.7 (Disuguaglianza di Bessel)**.** *Per ogni $x \in H$ vale la disuguaglianza*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2$$

Dimostrazione. Sia $A' \subseteq A$ sottoinsieme finito, $M = \langle u_\alpha | \alpha \in A'\rangle$ e $\tilde{x} = \sum_{\alpha \in A'} \hat{x}(\alpha) u_\alpha$ che appartiene ad M. Da quanto detto nel capitolo degli spazi normati M è chiuso poiché ha dimensione finita e per ogni $\alpha \in A'$

$$\langle x - \tilde{x}, u_\alpha\rangle = \langle x, u_\alpha\rangle - \hat{x}(\alpha) = 0$$

ovvero $\tilde{x} = Px$ e iterando il teorema di Pitagora otteniamo la disuguaglianza $\|x\|^2 \geq \sum_{\alpha \in A'} |\hat{x}(\alpha)|^2$.

Passando all'estremo superiore otteniamo così la tesi. ∎

Corollario 6.3.8. *Fissato un sistema ortonormale $S = \{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$ per ogni $x \in H$ si ha $\hat{x} \in \ell^2(A, \mathbb{K})$ e l'applicazione*

$$\mathcal{F} : x \in H \to \hat{x} \in \ell^2(A, \mathbb{K}) \tag{6.3.2}$$

è lineare, continua ed iniettiva su $\langle S\rangle$.

Teorema 6.3.9 (Riesz-Fischer)**.** *L'applicazione* (6.3.2) *è suriettiva.*

Dimostrazione. Prendiamo $\varphi(\alpha)$ una qualunque funzione a quadrato sommabile e per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo gli insiemi

$$A_n = \left\{ |\varphi| > \frac{1}{n} \right\}$$

Se indichiamo con $\#(A_n)$ la cardinalità di A_n allora

$$\|\varphi\|^2_{\ell^2(A)} \geq \sum_{\alpha \in A_n} |\varphi(\alpha)|^2 \geq \frac{\#(A_n)}{n^2}$$

e quindi A_n è finito. Possiamo allora definire la successione

$$x_n = \sum_{\alpha \in A_n} \varphi(\alpha) u_\alpha \in \langle S \rangle$$

Dimostriamo innanzitutto che $\hat{x}_n = \mathcal{F}(x_n)$ converge in norma $\ell^2(A, \mathbb{K})$ ad φ. Per ogni $\alpha \in A$ si ha allora

$$\hat{x}_n(\alpha) = \begin{cases} \varphi(\alpha) & \text{se } \alpha \in A_n \\ 0 & \text{se } \alpha \notin A_n \end{cases}$$

e in particolare se $\varphi(\alpha) \neq 0$ allora per n sufficientemente grande avremo che $\hat{x_n}(\alpha) = \varphi(\alpha)$. Quindi $\hat{x}_n$ converge puntualmente a φ e inoltre $|\hat{x}_n|^2 \leq |\varphi|^2 \in \ell^1$ e applicando il teorema della convergenza dominata segue che $\hat{x}_n$ converge in norma ℓ^2 ad φ.

Poiché $\mathcal{F}$ è un'isometria su $\langle S \rangle$ allora

$$\|x_m - x_n\| = \|\hat{x}_m - \hat{x}_m\|_{l^2(A)}$$

e quindi la successione x_n è di Cauchy e convergerà ad un certo $x \in H$ per completezza. Dalla continuità di $\mathcal{F}$ segue immediatamente che $\mathcal{F}(x) = \varphi$. ∎

Osservazione. Sia $x \in H$, posto $\varphi = \hat{x}$ allora la successione x_n ottenuta nel teorema 6.3.9 di solito *non* converge a x ma alla *proiezione* di x su $M = \overline{\langle S \rangle}$.

Infatti se x_n converge a $y \in H$ allora $y \in M$ e $\langle x - y, u_\alpha \rangle = x \hat{-} y(\alpha) = \hat{x}(\alpha) - \hat{y}(\alpha) = 0$.

Corollario 6.3.10. *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente si ha*

$$\ker \mathcal{F} = S^\perp$$

Dimostrazione.

$$z \in \ker \mathcal{F} \Leftrightarrow \hat{z}(\alpha) = 0 \text{ per ogni } \alpha \in A \Leftrightarrow \langle z, u_\alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow z \in S^\perp$$

∎

Basi ortonormali

Definizione 6.3.11. Un sistema ortonormale S è una *base ortonormale* se e solo se risulta massimale rispetto all'inclusione.

Dal lemma di Zorn segue immediatamente che ogni spazio di Hilbert ammette almeno una base ortonormale.

Proposizione 6.3.12. *Sia S un sistema ortonormale, allora le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti:*

1. *S è una base ortonormale;*
2. *$S^{\perp} = \{0\}$;*
3. *$\overline{\langle S \rangle} = H$;*
4. *Per ogni $x \in H$ vale l'*identità di Parseval
$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|\hat{x}\|^2_{\ell^2}$$
5. *$\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha)\overline{\hat{y}(\alpha)}$;*
6. *$\mathcal{F}$ è invertibile su H.*

Dimostrazione. L'equivalenza tra i primi due punti è immediata da verificare in quanto gli eventuali elementi di $S^{\perp}$ potrebbero essere aggiunti al sistema nel caso non fosse massimale. Anche l'equivalenza tra il secondo e il terzo è dimostrabile con facilità.

Dimostriamo ora il punto 5 a partire dal 4: sia H che $\ell^2(A)$ sono spazi di Hilbert e quindi verificano l'uguaglianza del parallelogramma, allora se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ per la linearità degli integrali

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \frac{\|\hat{x} + \hat{y}\|^2 - \|\hat{x} - \hat{y}\|^2}{4} = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} = \langle x, y \rangle$$

e lo stesso vale anche se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dalla proposizione 6.3.10 e dal teorema 6.3.9 si ha l'equivalenza tra i punti 2 e 6, mentre supponendo vera la 4 dimostrare la 6 non richiede un grande sforzo.

Bisogna a questo punto dimostrare che il punto 3 implichi il 4 per concludere la proposizione. L'applicazione $\mathcal{F}$ è un'isometria su $\langle S \rangle$, per ipotesi fissato $x \in H$ esiste una successione $x_n \in \langle S \rangle$ convergente a y in H, per continuità la successione $\widehat{x_n}$ convergerà a $\hat{y}$ in norma l^2 e quindi per continuità della norma

$$\|\hat{y}\|_{l^2} = \lim_{n \to +\infty} \|\hat{x}_n\|_{l^2} = \lim_{n \to +\infty} \|x_n\| = \|y\|$$

e la dimostrazione è conclusa. ∎

Teorema 6.3.13. *Consideriamo uno spazio di Hilbert H non banale, allora H è separabile se e solo se ammette una base ortonormale finita o numerabile.*

Dimostrazione. Supponiamo H separabile con $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ denso in H, dal lemma di Zorn H ammette una base ortonormale $S = \{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Il lettore può verificare che le palle aperte $B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(u_\alpha)$ sono tutte disgiunte tra loro.

Per definizione di densità l'applicazione

$$\alpha \in A \to \min \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; x_n \in B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(u_\alpha) \right\} \in \mathbb{N}$$

è ben definita ed iniettiva, quindi A è al più numerabile.

Viceversa se S è una base ortonormale finita o numerabile allora l'insieme composto dalle combinazioni finite di elementi di S con scalari in $\mathbb{Q}$ (o in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) è denso in H oltre che numerabile. ■

Definizione 6.3.14. Sia H spazio di Hilbert e $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sottospazi chiusi di H, allora H è *somma hilbertiana* di $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e si indica col simbolo

$$H = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} H_i$$

se e solo se valgono le seguenti proprietà:

- Per ogni $n \neq m$ si ha $H_n \perp H_m$ ovvero $\langle x, y \rangle = 0$ per ogni $x \in H_n$ e $y \in H_m$ (in particolare $H_n \cap H_m = \{0\}$);
- $H = \overline{\langle H_n | n \in \mathbb{N} \rangle}$.

6.4 Il teorema di Lax-Milgram

Definizione 6.4.1. Sia H spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$ e $T \in L(H) = L(H, H)$. Diremo che T è *definita positiva* se e solo se esiste $\beta > 0$ tale che per ogni $x \in H$

$$\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle \geq \beta \|x\|^2$$

Teorema 6.4.2. *Sia $T \in L(H)$ tale che $|\langle Tx, x \rangle| \geq \beta \|x\|^2$ per ogni $x \in H$, allora T è biiettiva e $\|T^{-1}\| \leq 1/\beta$.*

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz abbiamo immediatamente che

$$\beta \|u\|^2 \leq \|Tu\| \|u\| \Rightarrow \|u\| \leq \frac{1}{\beta} \|Tu\| \tag{6.4.1}$$

e quindi per il teorema 5.1.11 l'operatore T è iniettivo e $\operatorname{im} T$ è chiuso in H. Se per assurdo $\operatorname{im} T \neq H$ allora per la proposizione 6.2.8 esisterà $y \in \operatorname{im} T^\perp$ non nullo, ma allora

$$\beta \|y\|^2 \leq |\langle Ty, y \rangle| = 0$$

il che è assurdo, quindi T deve essere suriettivo. Dalla (6.4.1) avremo che T^{-1} è anch'esso continuo con $\|T^{-1}\| \leq 1/\beta$. ■

Definizione 6.4.3. Un'applicazione $F : H \times H \to \mathbb{K}$ è una *forma bilineare* se e solo se per ogni $u \in H$ le applicazioni

$$x \in H \to F(x,u) \in \mathbb{K}$$
$$x \in H \to \overline{F(u,x)} \in \mathbb{K}$$

sono lineari.

Teorema 6.4.4 (Lax-Milgram)**.** *Sia $F : H \times H \to \mathbb{R}$ bilineare definita sullo spazio di Hilbert H. Supponiamo che esistano $\alpha, \beta > 0$ tale che per ogni $x, y \in H$*

$$|F(x,y)| \leq \alpha \|x\| \|y\|$$
$$|F(x,x)| \geq \beta \|x\|^2$$

Allora per ogni $f \in H^*$ esiste un unico $w \in H$ tale che per ogni $x \in H$

$$f(x) = F(x,w)$$

Dimostrazione. Per ogni $u \in H$ definiamo l'applicazione $g_u : v \in H \to F(v,u) \in \mathbb{K}$, chiaramente g_u è lineare e limitata quindi esiste un'unica applicazione $T : H \to H$ tale che

$$g_u(v) = F(v,u) = \langle v, Tu \rangle$$

Il lettore può verificare facilmente che T è lineare, continua e definita positiva per le ipotesi su F, quindi dal teorema precedente T è biiettiva. Se allora prendiamo $f \in H^*$ esisterà un unico $u \in H$ tale che $f(v) = \langle v, u \rangle = F\left(v, T^{-1}u\right)$ e quindi il teorema è dimostrato. ■

Proposizione 6.4.5. *Nelle stesse ipotesi del teorema di Lax-Milgram, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $F(x,y) = F(y,x)$ per ogni $x, y \in H$ allora per ogni $f \in H^*$ avremo che $F(w,x) = f(x)$ per ogni x se e solo se w è il minimo del funzionale*

$$J(u) = \frac{1}{2}F(u,u) - f(u)$$

Dimostrazione. Sia $w \in H$ tale che $F(w,x) = f(x)$ per ogni $x \in H$, allora preso un generico $u \in H$ si ha

$$J(w+u) = J(w) + \frac{1}{2}F(u,u) + F(w,u) - f(u) \geq J(w) + \frac{\beta}{2}\|u\|^2$$

quindi $J(w)$ è l'unico minimo di J su H. Per l'unicità di w vale anche il viceversa. ■

6.5 Operatori autoaggiunti

Dal teorema di rappresentazione di Riesz esiste un'isometria lineare invertibile tra lo spazio di Hilbert H e il suo duale H^*, quindi per ogni operatore $T \in L(H)$ il suo aggiunto T^* può essere visto come un operatore da H in sé stesso ponendo, per ogni $u, v \in H$

$$\langle Tv, u \rangle = \langle v, T^* u \rangle$$

L'aggiunto T^* continua ad essere un operatore lineare e continuo di H in sé ma

$$(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$$

e quindi $T \in L(H) \to T^* \in L(H)$ non è lineare se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Poniamo per ogni $T \in L(H)$

$$\mathcal{N}(T) = \left\{ \frac{\langle Tx, x \rangle}{\|x\|^2} \;\middle|\; x \in H \setminus \{0\} \right\}$$

vogliamo dimostrare che

$$\sigma(T) \subseteq \overline{\mathcal{N}(T)}$$

Sia $\lambda \notin \overline{\mathcal{N}(T)}$ allora $\alpha = d(\lambda, \mathcal{N}(T)) > 0$ e

$$|\langle Tx - \lambda x, x \rangle| \geq \alpha \|x\|^2$$

per ogni $x \in H$. Dunque dal teorema di Lax-Milgram avremo che $\lambda \in \rho(T)$.

Definizione 6.5.1. Un operatore $T \in L(H, H)$ è *simmetrico* o *autoaggiunto* se e solo se $T^* = T$ ovvero per ogni $u, v \in H$

$$\langle Tv, u \rangle = \langle v, Tu \rangle$$

Se T è un operatore autoaggiunto allora per ogni $x \in H$

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$$

e quindi $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$.

Proposizione 6.5.2. *Prendiamo T autoaggiunto e $\sigma(T)$ il suo spettro. Posto*

$$m = \inf_{\|u\|=1} \langle Tu, u \rangle$$
$$M = \sup_{\|u\|=1} \langle Tu, u \rangle$$

Allora $\sigma(T) \subset [m, M]$ e $m, M \in \sigma(T)$ in particolare $\sigma(T) \neq \emptyset$. Infine se $\sigma(T) = \{0\}$ allora T è nullo.

Dimostrazione. Innanzitutto dalla proposizione 6.5.2 $\sigma(T) \subseteq [m, M]$ mentre dalla proposizione 5.6.3 sia m che M sono finiti. Dimostriamo ora che M si trova nello spettro. È banale constatare che la forma

$$[u, v] = \langle Mu - Tu, v\rangle$$

è simmetrica (T autoaggiunto) e $[u, u] \geq 0$, quindi possiamo applicare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e inoltre

$$\|Mu - Tu\| = \sup_{\|v\|=1} \langle Mu - Tu, v\rangle \leq C\sqrt{\langle Mu - Tu, u\rangle}$$

con $C = \sqrt{(M + \|T\|)}$.

Esisterà allora $x_n \in H$ di norma unitaria tale che $\langle Tx_n, x_n\rangle \to M$ e quindi $Mx_n - Tx_n$ tenderebbe a 0, allora se $M \in \rho(T)$ allora $MI - T$ avrebbe inversa continua e quindi per continuità anche x_n tenderebbe a 0, assurdo.

Valgono analoghe proprietà anche per m sostituendo $-T$ a T. Infine se lo spettro contiene solo lo zero allora sia m che M valgono 0 e quindi per ogni $u, v \in H$ essendo T autoaggiunto

$$0 = \langle Tu + Tv, u + v\rangle = 2\langle Tu, v\rangle$$

e quindi T è l'operatore nullo. ∎

Corollario 6.5.3. *Ogni operatore lineare non nullo e autoaggiunto possiede un autovalore reale non nullo.*

Decomposizione spettrale per operatori compatti

Sia ora $T \in L(H, H)$ operatore autoaggiunto compatto, sia μ_n la successione dei suoi autovalori ponendo $\mu_0 = 0$ e poniamo

$$H_n = \ker(T - \mu_n I)$$

se $n \neq 0$ allora H_n ha dimensione finita per la proposizione 5.5.4. Allora

Teorema 6.5.4 (Decomposizione spettrale)**.** *Sia H spazio di Hilbert di dimensione infinita e $T \in L(H, H)$ compatto e autoaggiunto allora*

$$H = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} H_n \tag{6.5.1}$$

Dimostrazione. Siano $u \in H_m$, $v \in H_n$ con $\mu_m \neq \mu_n$, allora

$$(\mu_m - \mu_n)\langle u, v\rangle = \langle Tu, v\rangle - \langle u, Tv\rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$$

e quindi sono in particolare disgiunti.

Sia $W = \left\langle \bigcup_{n=0}^{+\infty} H_n \right\rangle$ è un sottospazio di H, vogliamo dimostrare che è denso. Per ogni $w \in W$ il lettore può dimostrare che anche $Tw \in W$ (W è composizione finita di elementi degli H_n), allora $T(W^\perp) \leq W^\perp$ poiché per ogni $x \in W^\perp$ e $w \in W$

$$\langle Tx, w \rangle = \langle x, Tw \rangle = 0$$

La restrizione R dell'operatore T su $W^\perp$ (chiuso) è allora autoaggiunto e compatto e $\sigma(R) = \{0\}$ poiché H ha dimensione infinita, difatti se ci fosse un altro elemento non nullo esso sarebbe un autovalore diverso da ogni μ_n ottenendo una contraddizione. Quindi T è nullo su $W^\perp$ e allora $W^\perp \leq \ker T = H_0 \Rightarrow W^\perp = \{0\} \Rightarrow \overline{W} = H$. ■

Corollario 6.5.5. *Lo spettro residuo di un operatore compatto e autoaggiunto è nullo.*

Dimostrazione. L'unico elemento dello spettro che potrebbe non appartenere allo spettro puntuale è 0. Supponiamo allora che non si trovi nello spettro puntuale, quindi T è iniettivo ovvero $H_0 = \{0\}$. Per la (6.5.1) H è separabile ed ha un sistema denso numerabile composto interamente da autovettori associati ad autovalori non nulli. Questo implica che tutti gli autovettori appartengono a $\operatorname{im} T = (T - 0I)(X)$ e quindi lo 0 appartiene allo spettro continuo. ■

Bibliografia

[1] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer.

[2] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel e Lawrence E. Spence. *Linear Algebra*. Pearson.

[3] Marco Manetti. *Topologia Generale*. Springer, 2014.

Indice analitico