1 Grado generalizzato

In questo lavoro proveremo a determinare dei criteri per poter trarre informazioni sull'andamento di una classe particolare di funzioni razionali e irrazionali in due o più variabili mentre si avvicinano opportunamente all'origine degli assi.

Prima di proseguire introduciamo alcune notazioni utili che useremo in seguito, innanzitutto con $n \in \mathbb{N}$ indicheremo, se non specificato diversamente, il numero di variabili della funzione f che andremo a studiare, in altre parole il dominio di f sarà sempre un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Definiamo inoltre

$$\begin{gathered}
I = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_i > 0 \text{ per ogni } i \in \mathcal{I}_n\} \\
J = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_i < 0 \text{ per almeno un } i \in \mathcal{I}_n\} \\
K = \mathbb{R}^n \setminus (I \cup J)
\end{gathered}$$

dove $\mathcal{I}_m = \{1, 2, 3, \ldots, m-1, m\}$ e x_i è la i-esima componente del vettore $\mathbf{x}$.

Infine poniamo $\mathcal{M}(m, n)$ l'insieme delle matrici in $\mathbb{R}$ di m righe e m' colonne, e $\mathcal{M}^+(m, n) \subseteq \mathcal{M}(m, n)$ il sottoinsieme delle matrici con tutte le componenti non negative. Data una matrice $A \in \mathcal{M}(m, n)$ e un indice i indichiamo con $A_i \in \mathcal{M}(1, n)$ la i-esima riga se $i \in \mathcal{I}_m$ e con $A^i \in \mathcal{M}(m, 1)$ la i esima colonna di A se $i \in \mathcal{I}_n$. Per comodità di notazione identifichiamo $\mathcal{M}(m, 1)$ con $\mathbb{R}^m$.

Definizione 1.1. Fissato $n \in \mathbb{N}$ ogni parte finita non vuota A di $\mathcal{M}(1, n)$ è detta *multivettore di ordine* n, indichiamo con $\mathcal{M}[n]$ l'insieme di tutti i multivettori di ordine n.

Un multivettore A è detto *non negativo* se e solo se è anche un sottoinsieme di $\mathcal{M}^+(1, n)$, il simbolo $\mathcal{M}^+[n]$ denota l'insieme di tutti i multivettori non negativi.

I multivettori di ordine 1 sono insiemi finiti non vuoti di numeri reali, quindi se $A \in \mathcal{M}[1]$ possiamo definire la quantità

$$\begin{gathered}
\max A = \max_{a \in A} a \\
\min A = \min_{a \in A} a
\end{gathered}$$

ancora possiamo definire per ogni scelta di $m, n \in \mathbb{N}$ la seguente funzione suriettiva

$$\pi : A \in \mathcal{M}(m, n) \to \{A_i | i \in \mathcal{I}_m\} \in \mathcal{M}[n]$$

che trasforma ogni matrice nel multivettore composto interamente dalle sue righe. Poiché $\mathcal{M}(m, 1) = \mathbb{R}^m$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\min \mathbf{x} = \min \pi(\mathbf{x}) = \min \{x_i | i \in \mathcal{I}_n\}$$

in tal modo gli insiemi precedenti possono essere espressi nella forma

$$\begin{gathered}
I = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \min \mathbf{x} > 0\} \\
J = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \min \mathbf{x} < 0\} \\
K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \min \mathbf{x} = 0\}
\end{gathered}$$

Definiamo adesso alcune operazioni tra multivettori che useremo in seguito per dimostrare vari teoremi.

Definizione 1.2. Presi $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathcal{M}[m]$ e $C \in \mathcal{M}(m,n)$ poniamo

$$\begin{aligned} \alpha A &= \{\alpha a | a \in A\} \\ AC &= \{aC | a \in A\} \in \mathcal{M}[n] \\ A \oplus B &= A \cup B \\ A \otimes B &= \{a + b | a \in A \text{ e } b \in B\} \end{aligned}$$

Da questa definizione segue immediatamente che

Proposizione 1.3. *Presi $n, n' \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}[n]$, $B \in \mathcal{M}[n]$, $C \in \mathcal{M}(n, n')$ allora*

$$(A \oplus B)\, C = AC \oplus BC \tag{1.1}$$
$$(A \otimes B)\, C = AC \otimes BC \tag{1.2}$$

Definizione 1.4. Una funzione *algebrica positiva* è una qualunque funzione $F : I \to]0, +\infty[$ definita per ricorsione nella seguente maniera:

- Tutte le costanti positive sono funzioni algebriche positive;
- $F(\mathbf{x}) = x_i$ è algebrica positiva;
- Se F e G sono algebriche positive allora anche $F + G$ e FG lo sono;
- Se F è una funzione algebrica positiva e $a \in \mathbb{R}$ allora anche F^a è algebrica positiva.

Definizione 1.5. Sia P una funzione algebrica positiva, ogni funzione $F_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ costruita a partire da P tramite il seguente procedimento ricorsivo

- Se $P(\mathbf{x}) = c > 0$ costante allora poniamo $F_P = 0$;
- Se $P(\mathbf{x}) = x_i$ allora $F_P(\mathbf{d}) = d_i$;
- Se $P(\mathbf{x}) = [Q(\mathbf{x})]^a$ con $a \in \mathbb{R}$ allora $F_P = aF_Q$;
- Se $P(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})R(\mathbf{x})$ allora $F_P = F_Q + F_R$;
- Se $P(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x})$ allora $F_P = \min\{F_Q, F_R\}$.

è un *grado generalizzato* di P.

Diamo adesso alcune proprietà dei minimi che ci saranno utili in seguito.

Proposizione 1.6. *Siano $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ allora valgono le uguaglianze*

$$\min\{\min \mathbf{x}, \min \mathbf{y}\} = \min(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \tag{1.3}$$
$$\min \mathbf{x} + \min \mathbf{y} = \min(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \tag{1.4}$$

Dimostrazione. La (1.3) è banale, concentriamoci sulla (1.4). Innanzitutto $x_i \geq \min \mathbf{x}$ e $y_j \geq \min \mathbf{y}$ per ogni scelta ammissibile di i e j, quindi $\min \mathbf{x} + \min \mathbf{y} \leq \min (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y})$.

Viceversa siano i e j tali che $\min (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = x_i + y_j$ allora segue immediatamente la disuguaglianza opposta e quindi la tesi. ■

Proposizione 1.7. *Presi* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ *e* $\lambda \geq 0$ *allora*

$$\min \lambda \mathbf{x} = \lambda \min \mathbf{x}$$

Proposizione 1.8 (Omogeneità)**.** *Preso F grado generalizzato allora F è continua e per ogni* $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$*,* $t \geq 0$ *vale*

$$F(t\mathbf{d}) = tF(\mathbf{d})$$

Dimostriamo ora uno dei teoremi principali della sezione

Teorema 1.9. *Sia F un grado generalizzato di una qualche funzione algebrica positiva. Allora esistono* $A, B \in \mathcal{M}^+ [n]$ *tali che per ogni* $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$

$$F(\mathbf{d}) = \min A\mathbf{d} - \min B\mathbf{d} \tag{1.5}$$

Dimostrazione. Usiamo l'induzione sulla lunghezza di F: se F è identicamente nulla il teorema è dimostrato ponendo $A = B = 0$, se $F \equiv d_i$ poniamo $F = \min\{d_i\} - \min\{0\}$ ottenuta ponendo $B = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ e $A = \{I_i\}$ dove $I \in \mathcal{M}(n, n)$ rappresenta la matrice identica. Supponiamo $F = aG$ con $G \equiv \min A\mathbf{d} - \min B\mathbf{d}$ allora si ha

$$F \equiv \min(aA\mathbf{d}) - \min(aB\mathbf{d}) \text{ se } a \geq 0$$
$$F \equiv \min(-aB\mathbf{d}) - \min(-aA\mathbf{d}) \text{ se } a < 0$$

Poniamo $F = G + H$ con $G \equiv \min A\mathbf{d} - \min B\mathbf{d}$ e $H \equiv \min C\mathbf{d} - \min D\mathbf{d}$ allora sfruttando la (1.2) e la (1.4) osserviamo che

$$\begin{aligned} F &\equiv (\min A\mathbf{d} + \min C\mathbf{d}) - (\min B\mathbf{d} + \min D\mathbf{d}) \\ &= \min(A\mathbf{d} \otimes C\mathbf{d}) - \min(B\mathbf{d} \otimes D\mathbf{d}) = \min(A \otimes C)\mathbf{d} - \min(B \otimes D)\mathbf{d} \end{aligned}$$

Infine se $F = \min\{G, H\}$ allora

$$\begin{aligned} F &\equiv \min \{\min A\mathbf{d} - \min B\mathbf{d}, \min C\mathbf{d} - \min D\mathbf{d}\} \\ &= \min \{\min A\mathbf{d} + \min D\mathbf{d}, \min C\mathbf{d} + \min B\mathbf{d}\} - \min B\mathbf{d} - \min D\mathbf{d} \\ &= \min \{\min(A \otimes D)\mathbf{d}, \min(C \otimes B)\mathbf{d}\} - \min(B \otimes D)\mathbf{d} \\ &= \min [(A \otimes D) \oplus (C \otimes B)]\, \mathbf{d} - \min(B \otimes D)\mathbf{d} \end{aligned}$$

e la dimostrazione è conclusa. ■

Una conseguenza interessante di questo teorema si ha ponendo $n = 1$ limitandoci a studiare il caso unidimensionale. In questo caso il vettore $\mathbf{d}$ è in realtà uno scalare (che indichiamo con d) mentre i multivettori A e B si trovano in $\mathcal{M}^+[1]$. Possiamo perciò raccogliere d e portarlo fuori dai minimi ottenendo

$$F(d) = \begin{cases} (\min A - \min B)\, d & \text{se } d \geq 0 \\ (\max A - \max B)\, d & \text{se } d < 0 \end{cases}$$

Prendiamo ora due numeri interi $m \geq n \geq 0$ e scegliamo un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots + a_{m-1} x^{m-1} + a_m x^m$ con $a_i \geq 0$ per ogni indice i ed $a_n, a_m > 0$, per quanto detto prima il grado generalizzato di P vale

$$F(d) = \begin{cases} nd & \text{se } d \geq 0 \\ md & \text{se } d < 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

con m il grado del polinomio e n il suo "grado inferiore". Quindi il grado generalizzato in qualche modo estende il concetto usuale di grado ad una classe molto più ampia di funzioni non necessariamente polinomiali.

Dimostriamo ora il seguente teorema

Teorema 1.10. *Per ogni funzione algebrica positiva P con grado generalizzato F_P esistono $0 < b \leq c$ tali che per ogni $a \in]0,1[$ e $\mathbf{d} \in I$*

$$b a^{F_P(\mathbf{d})} \leq P\left(a^{d_1}, a^{d_2}, \ldots, a^{d_n}\right) \leq c a^{F_P(\mathbf{d})} \tag{1.7}$$

Dimostrazione. Se P è una costante, $P = x_i$ oppure $P = Q \cdot R$ le disuguaglianze seguono con estrema facilità, se ora $P = (Q)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $b a^{F_Q} \leq Q \leq c a^{F_Q}$ basta ricordare che la funzione x^α su $]0, +\infty[$ è crescente per $\alpha \geq 0$ e decrescente per $\alpha \leq 0$ e perciò

$$\begin{aligned} b^\alpha a^{\alpha F_Q} \leq (Q)^\alpha \leq c^\alpha a^{\alpha F_Q} \text{ se } \alpha \geq 0 \\ c^\alpha a^{\alpha F_Q} \leq (Q)^\alpha \leq b^\alpha a^{\alpha F_Q} \text{ se } \alpha < 0 \end{aligned}$$

Ci rimane da analizzare solamente il caso $P = Q + R$ dove possiamo porre senza perdere in generalità che $b a^{F_Q} \leq Q \leq c a^{F_Q}$ e $b a^{F_R} \leq R \leq c a^{F_R}$. Posto $L = \min\{F_Q, F_R\}$ otteniamo

$$b a^L \left(a^{F_Q - L} + a^{F_R - L}\right) \leq Q + R \leq c a^L \left(a^{F_Q - L} + a^{F_R - L}\right)$$

Innanzitutto sia $F_Q - L$ che $F_R - L$ sono maggiori o uguali a 0 e quindi $a^{F_Q - L} + a^{F_R - L} \leq 2$, però dalla definizione di minimo per ogni vettore $\mathbf{d}$ almeno uno di quei termini si deve annullare e perciò $a^{F_Q - L} + a^{F_R - L} \geq 1$. In formule

$$b a^L \leq Q + R \leq 2 c a^L$$

∎

Corollario 1.11. *Se P, Q sono due funzioni algebriche positive che coincidono su I allora $F_P(\mathbf{d}) = F_Q(\mathbf{d})$ per ogni $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Dal teorema 1.10 esistono $b, c, b', c' > 0$ tali che

$$ba^{F_P(\mathbf{d})} \leq P\left(a^{d_1}, a^{d_2}, \ldots, a^{d_n}\right) \leq ca^{F_P(\mathbf{d})}$$
$$b'a^{F_Q(\mathbf{d})} \leq Q\left(a^{d_1}, a^{d_2}, \ldots, a^{d_n}\right) \leq c'a^{F_Q(\mathbf{d})}$$

quindi per ogni $\mathbf{d} \in I$

$$ba^{F_P(\mathbf{d})} \leq c'a^{F_Q(\mathbf{d})}$$
$$b'a^{F_Q(\mathbf{d})} \leq ca^{F_P(\mathbf{d})}$$

Se $F_P(\mathbf{d}) < F_Q(\mathbf{d})$ allora per ogni $t > 0$

$$a^{t\left[F_P(\mathbf{d}) - F_Q(\mathbf{d})\right]} \leq \frac{b}{c'}$$

il che è assurdo poiché $a^{F_P(\mathbf{d}) - F_Q(\mathbf{d})} > 1$, ma anche ponendo $F_P(\mathbf{d}) > F_Q(\mathbf{d})$ otterremmo una contraddizione, quindi devono necessariamente coincidere. ■

Con questo corollario siamo in grado di affermare che ogni funzione algebrica positiva ha un unico grado generalizzato anche se è stata costruita con diversi procedimenti. Prima di passare alla prossima sezione dimostriamo un ultimo risultato sui gradi generalizzati.

Proposizione 1.12. *Sia F un grado generalizzato e $a, b \in \mathbb{R}$ due costanti che stanno entrambe o in $]0, 1[$ o in $]1, +\infty[$. Allora per ogni $\mathbf{x} \in I$*

$$a^{F(\log_a x_1, \ldots, \log_a x_n)} = b^{F(\log_b x_1, \ldots, \log_b x_n)}$$

e quindi la funzione

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a^{F(\log_a x_1, \ldots, \log_a x_n)}$$

non dipende dalla particolare scelta di $a \in]0, 1[$.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} > 0$ e sfruttando le proprietà del grado generalizzato e dei logaritmi

$$a^{F(\log_a x_1, \ldots, \log_a x_n)} = a^{F(\log_a b \log_b x_1, \ldots, \log_a b \log_b x_n)}$$
$$= a^{\log_a b F(\log_b x_1, \ldots, \log_b x_n)} = b^{F(\log_b x_1, \ldots, \log_b x_n)}$$

■

possiamo così riscrivere la (1.7) nella forma compatta

$$bU_P(\mathbf{x}) \leq P(\mathbf{x}) \leq cU_P(\mathbf{x}) \text{ per ogni } \mathbf{x} \in I \tag{1.8}$$

In generale P e U_P sono distinte: se prendiamo

$$P(x, y) = x + y$$

allora non è complicato mostrare che

$$U_P(x, y) = \max\{x, y\}$$

Più nello specifico la funzione U_P si ottiene a partire da P imponendo tutte le costanti positive ad 1 e sostituendo le operazioni di addizione con estrazioni del valore massimo. Ricordando che per ogni $a \in]0, 1[$ vale la relazione

$$F_P(d_1, \ldots, d_n) = \log_a U_P\left(a^{d_1}, \ldots, a^{d_n}\right)$$

che ci fornisce un'altra formula per determinare il grado generalizzato di una funzione algebrica positiva.

2 Teoremi di convergenza

Lo scopo principale di questa sezione è trovare una condizione sul grado generalizzato che permetta di stabilire se il limite di una determinata funzione algebrica positiva converga o meno per $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ all'interno di I.

Dimentichiamoci per un attimo di stare in $\mathbb{R}^n$ e spostiamoci su un generico spazio normato X con norma $\|\cdot\|$.

Definizione 2.1. Se $C \subset X$ è chiuso sia $\mathbf{x}_k \in X$ una generica successione, diciamo che $\mathbf{x}_k \to C$ se e solo se esiste una successione $\mathbf{y}_k \in C$ tale che

$$\lim_{k \to +\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| = 0$$

Proposizione 2.2. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ funzione lineare continua non identicamente nulla. Esistono allora P_f, Q_f funzioni lineari continue da X in sé tali che per ogni $x \in X$*

$$\|Q_f x\| = K\,|f(x)| \ \text{per un qualche } K \geq 0 \tag{2.1}$$

$$x = P_f x + Q_f x \tag{2.2}$$

$$P_f x \in \ker f \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Poiché non è identicamente nullo esisterà un $z \in X$ tale che $f(z) = 1$, poniamo allora

$$Q_f x = f(x)z$$
$$P_f x = x - f(x)z$$

Sono entrambe funzionali lineari continui da X in X e l'uguaglianza (2.1) si ottiene ponendo $K = \|z\|$. Ancora

$$f(P_f x) = 0 \Rightarrow P_f x \in \ker f$$

per linearità e la dimostrazione è così conclusa. ■

Osservazione. Senza altre condizioni su X possiamo solo constatare che $K \geq \frac{1}{\|f\|}$ ed esiste una successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tale che $f(z_n) = 1$ e $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\| = \frac{1}{\|f\|}$.

Se però X è uno spazio riflessivo (ad esempio $\mathbb{R}^n$) esisterà sicuramente un $z \in X$ tale che $f(z) = 1$ e $\|z\| = \frac{1}{\|f\|}$.

Dimostriamo ora il teorema più importante di questo fascicolo:

Teorema 2.3. *Consideriamo $A, C_1, C_2, \ldots C_m$ funzionali lineari continui non identicamente nulli da X in $\mathbb{R}$. Posto $\mathcal{C}_i = \{\mathbf{x} \in X : C_i(\mathbf{x}) \geq 0\}$ allora esiste una costante $K_X(A, C_1, C_2, \ldots, C_m) > 0$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{D} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ con $|A(\mathbf{x})| \leq \|A\|$ esiste un certo $\mathbf{y} \in \mathcal{D}$ tale che $A(\mathbf{y}) = 0$ e*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq K_X(A; C_1, C_2, \ldots, C_m)$$

Dimostrazione. Estendiamo innanzitutto il teorema nel caso in cui A è identicamente nulla su X, in questo caso possiamo porre $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ e

$$K_X(A; \cdots) = 0$$

indipendentemente dalla scelta dei C_i. Dimostreremo il teorema ragionando per induzione su m supponendo da ora in poi A non identicamente nulla.

Se $m = 0$ scegliamo $\mathbf{x}$ tale che $|A(\mathbf{x})| \leq \|A\|$ allora posto $A' = \frac{1}{\|A\|}A$ definiamo $\mathbf{y} = P_{A'}\mathbf{x} \in \ker A$ e $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|Q_{A'}\mathbf{x}\| = Q\,|A'(\mathbf{x})|$, dove la costante $Q \geq 1$ è definita a partire dalla (2.1). Il teorema è soddisfatto ponendo

$$K_X(A) = Q$$

Supponiamo ora che il teorema sia soddisfatto per ogni $0 \leq m' < m$, con $\mathbf{y}_1$ definito come nel caso $m = 0$, per ogni $i \in \mathcal{I}_m$ poniamo $C'_i : \mathbf{x} \in \ker A \to C_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ funzionale lineare continuo sul sottospazio normato $\ker A$ e inoltre $\|C'_i\| \leq \|C_i\|$.

Se esiste un indice i tale che $\|C'_i\| \neq 0$ definiamo la quantità

$$U = \max_{\|C'_i\| \neq 0} \frac{\|C_i\|}{\|C'_i\|} \geq 1$$

(se tutti i C'_i fossero identicamente nulli poniamo $U = 1$ ma potremmo scegliere un qualunque valore per U in quanto non influirà nell'espressione finale).

Posto $\mathbf{z} \in \ker A$ tale che $C'_i(\mathbf{z}) < 0$ per un certo i allora esisterà sicuramente un $j \geq 1$ tale che

$$jC'_i(\mathbf{z}) = C_i(\mathbf{z} - \mathbf{x})$$

in quanto $C_i(\mathbf{x}) \geq 0$ e quindi l'espressione

$$(j - 1)C_i(\mathbf{z}) + C_i(\mathbf{x})$$

si annullerà sicuramente per un certo $j \geq 1$. Perciò

$$\left|C'_i(\mathbf{z})\right| \leq j\left|C'_i(\mathbf{z})\right| \leq \|C_i\|\,\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|$$

Come per il caso $m = 0$ definiamo $\mathbf{y}_1$ e supponiamo inizialmente $C'_1(\mathbf{y}_1) < 0$ quindi $\|C'_1\| > 0$ e per le disuguaglianze precedenti abbiamo

$$\left|C'_1(\mathbf{y}_1)\right| \leq \|C_1\| \, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_1\| \leq QU \left\|C'_1\right\|$$

e possiamo applicare l'ipotesi di induzione sullo spazio normato $\ker A$, esisterà dunque $\mathbf{y}_2 \in \ker A$ tale che $C'_1(\mathbf{y}_2) = 0$ e

$$\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \leq QUK_{\ker A}(C'_1) \tag{2.4}$$

se invece $C'_1(\mathbf{y}_1) \geq 0$ allora possiamo porre $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1$ e la (2.4) continua comunque a valere. Dalla disuguaglianza triangolare

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_2\| \leq Q \left[1 + UK_{\ker A}(C'_1)\right]$$

Supponiamo ora che $C'_2(\mathbf{y}_2) < 0$ e ancora

$$\left|C'_2(\mathbf{y}_2)\right| \leq \|C_2\| \, \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}\| \leq QU \left\|C'_2\right\| \left[1 + UK_{\ker A}(C'_1)\right]$$

quindi ancora per ipotesi induttiva esisterà $\mathbf{y}_3 \in \ker A$ tale che $C'_2(\mathbf{y}_3) = 0$, $C'_1(\mathbf{y}_3) \geq 0$ e

$$\|\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2\| \leq QUK_{\ker A}(C'_2; C'_1) \left[1 + UK_{\ker A}(C'_1)\right]$$

che automaticamente continua a valere anche per $C'_2(\mathbf{y}_2) \geq 0$ ponendo $\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_2$. Ancora

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_3\| \leq Q \left[1 + UK_{\ker A}(C'_2; C'_1)\right] \left[1 + UK_{\ker A}(C'_1)\right]$$

Per maggior chiarezza calcoliamo anche $\mathbf{y}_4$. Innanzitutto dai risultati precedenti sappiamo che $C'_2(\mathbf{y}_3), C'_1(\mathbf{y}_3) \geq 0$ e supponiamo ora $C'_3(\mathbf{y}_3) < 0$ abbiamo allora

$$\begin{aligned}\left|C'_3(\mathbf{y}_3)\right| &\leq Q \|C_3\| \left[1 + UK_{\ker A}(C'_2; C'_1)\right] \left[1 + UK_{\ker A}(C'_1)\right] \\ &\leq QU \left\|C'_3\right\| \left[1 + UK_{\ker A}(C'_2; C'_1)\right] \left[1 + UK_{\ker A}(C'_1)\right]\end{aligned}$$

esiste per induzione $\mathbf{y}_4 \in \ker A$ affinché $C'_3(\mathbf{y}_4) = 0$, $C'_2(\mathbf{y}_4) \geq 0$, $C'_1(\mathbf{y}_4) \geq 0$ e

$$\|\mathbf{y}_4 - \mathbf{y}_3\| \leq QUK_{\ker A}(C'_3; C'_1, C'_2) \left[1 + UK_{\ker A}(C'_2; C'_1)\right] \left[1 + UK_{\ker A}(C'_1)\right]$$

e quindi

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_4\| \leq Q \left[1 + UK_{\ker A}(C'_3; C'_1, C'_2)\right] \left[1 + UK_{\ker A}(C'_2; C'_1)\right] \left[1 + UK_{\ker A}(C'_1)\right]$$

Continuando così otteniamo una sequenza $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \ldots, \mathbf{y}_m, \mathbf{y}$ in $\ker A$ tale che $C'_i(\mathbf{y}) \geq 0$ per ogni i e

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq Q \left[1 + UK_{\ker A}(C'_m; C'_1, \ldots, C'_{m-1})\right] &\left[1 + UK_{\ker A}(C'_{m-1}; C'_1, \ldots, C'_{m-2})\right] \\ \cdots &\left[1 + UK_{\ker A}(C'_2; C'_1)\right] \left[1 + UK_{\ker A}(C'_1)\right]\end{aligned}$$

che conclude la tesi ■

Corollario 2.4. *Nelle stesse ipotesi del teorema 2.3 presa una qualunque successione $\mathbf{x}_k \in \mathcal{D}$ e $A : X \to \mathbb{R}$ lineare continuo si ha*

$$A(\mathbf{x}_k) \to 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_k \to \mathcal{D} \cap \ker A$$

Dimostrazione. Se vale $\mathbf{x}_k \to \mathcal{D} \cap \ker A$ esisterà una successione $\mathbf{y}_k \in \mathcal{D} \cap \ker A$ tale che $\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k$ tende al vettore nullo. Per continuità di A si ha $A(\mathbf{x}_k) = A(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k) \to 0$.

Viceversa possiamo porre senza perdere in generalità che $\|A\| = 1$, per ogni $i \in \mathbb{N}$ esiste $\nu_i \in \mathbb{N}$ (che possiamo porre maggiore o uguale a ν_{i-1}) tale che per ogni $k \geq \nu_i$

$$A(\mathbf{x}_k) \leq \frac{1}{i}$$

Dal teorema 2.3 esisterà $\mathbf{z}_{i,k} \in \ker A \cap \mathcal{D}$ tale che $\|\mathbf{z}_{i,k} - i\mathbf{x}_k\| \leq K$, costruiamo ora una successione $\mathbf{y}_k \in \ker A \cap \mathcal{D}$ che soddisfi le ipotesi del teorema:

- Se $k < \nu_1$ poniamo $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$;
- Se esiste i tale che $\nu_i \leq k < \nu_{i+1}$ allora poniamo $\mathbf{y}_k = \frac{\mathbf{z}_{i,k}}{i}$ da cui segue che

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| \leq \frac{K}{i}$$

- Se $k \geq \nu_i$ per ogni i significa che $A(\mathbf{x}_k) = 0$ definitivamente, quindi poniamo $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k \in \mathcal{D}$.

Quindi $\mathbf{x}_k \to \ker A \cap \mathcal{D}$ e il teorema è così dimostrato. ■

Ritorniamo ora in $\mathbb{R}^n$ e allo studio del grado generalizzato di una funzione algebrica positiva. Diamo ora alcune definizioni che ci serviranno per i prossimi teoremi.

Definizione 2.5. Un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *conico* se e solo se per ogni $x \in A$ e $t \in \mathbb{R}^+$ anche tx è un elemento di A.

Gli insiemi I, J e K definiti all'inizio sono chiaramente insiemi conici, così come lo sono i sottospazi vettoriali.

Definizione 2.6. Sia F un grado generalizzato e U un sottoinsieme conico di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che

- F è *definita positiva* su U se e solo se per ogni $\mathbf{x} \in U$ si ha $F(\mathbf{x}) > 0$;
- F è *definita negativa* su U se e solo se per ogni $\mathbf{x} \in U$ si ha $F(\mathbf{x}) < 0$;
- F è *semidefinita positiva* su U se e solo se per ogni $\mathbf{x} \in U$ si ha $F(\mathbf{x}) \geq 0$;
- F è *semidefinita negativa* su U se e solo se per ogni $\mathbf{x} \in U$ si ha $F(\mathbf{x}) \leq 0$;
- F è *indefinita* su U se e solo se per esistono $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ tali che $F(\mathbf{x})F(\mathbf{y}) < 0$.

Teorema 2.7. *Se F è un grado generalizzato definito positivo su I allora*

$$\inf_{\mathbf{d}\in[1,+\infty[^n} F(\mathbf{d}) > 0 \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Possiamo ricondurre F nella forma (1.5) con $A \in \mathcal{M}^+(m,n)$ e $B \in \mathcal{M}^+(m',n)$. Se per assurdo $\inf_{\mathbf{d}\in[1,+\infty[^n} F(\mathbf{d}) = 0$ esisterà una successione $\mathbf{d}_k \in [1,+\infty[^n$ tale che $F(\mathbf{d}_k) \to 0$. Non possiamo ancora usare il corollario 2.4 in quanto la nostra funzione non è lineare, però per ogni $i \in \mathcal{I}_m$, $j \in \mathcal{I}_{m'}$ definiamo i seguenti insiemi

$$\mathcal{A}_i = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n |\min A\mathbf{d} = A_i\mathbf{d}\} = \bigcap_{k\neq i}\{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n|(A_k - A_i)\mathbf{d} \geq 0\}$$
$$\mathcal{B}_j = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n |\min B\mathbf{d} = B_j\mathbf{d}\}$$
$$\mathcal{C}_{i,j} = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_j$$

Fissiamo ora gli indici indici i e j affinché $\mathcal{C}_{i,j}$ contenga un'estratta di $\mathbf{d}_k$ e definiamo il funzionale lineare su $\mathbb{R}^n$

$$G(\mathbf{d}) = (A_i - B_j)\mathbf{d}$$

Ora per le ipotesi iniziali $\mathcal{C}_{i,j}$ e $\ker G$ non si possono intersecare in I e quindi la loro intersezione sarà interamente contenuta nell'insieme $\{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n|d_i \leq 0 \text{ per un certo } i\}$.

Sfruttando il corollario 2.4 seguirebbe che $\mathbf{d}_k \to \ker G \cap \mathcal{C}_{i,j}$ che è assurdo in quanto per ogni $\mathbf{a} \in [1,+\infty[^n$, $\mathbf{b} \notin I$ esisterà un $k \in \mathcal{I}_n$ tale che $b_k \leq 0$ e

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \geq |a_k - b_k| = a_k + |b_k| \geq 1$$

Raggiungendo così un assurdo nato dall'aver ammesso l'esistenza di $\mathbf{x}_k$ ■

Teorema 2.8 (Primo teorema di convergenza)**.** *Sia P algebrica positiva e F_P il suo grado generalizzato. Allora*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} P(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow F_P \text{ è definita positiva su } I \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Mostriamo prima l'implicazione $\Leftarrow$. Innanzitutto $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} P(\mathbf{x}) = 0$ se e solo se per ogni $\epsilon \in]0,1[$ esiste un $\delta \in]0,a]$, dove $a < 1$, tale che per ogni $0 < x_i < \delta$ vale $P(x_1, x_1, \ldots, x_n) < \epsilon$. Esisteranno allora $d_i \geq 1$ tali che $x_i = a^{d_i}$ e $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$. Il teorema 1.10 afferma che esistono $0 < b \leq c$ tali che

$$ba^{F(\mathbf{d})} \leq P(\mathbf{x}) \leq ca^{F(\mathbf{d})}$$

Ci basta verificare che per ogni $a^{d_i} < \delta \Leftrightarrow d_i > \log_a \delta$ con $\delta \leq a$ vale la disuguaglianza $F(\mathbf{d}) > \log_a \frac{\epsilon}{c}$. Posto $M = \inf_{\mathbf{d}\in[1,+\infty[^n} F(\mathbf{d})$, che è strettamente maggiore di 0 per il teorema 2.7, per l'omogeneità segue che $d_i \geq k > 0$ implica $F(\mathbf{d}) \geq kM$ quindi imponendo $M \log_a \delta \geq \log_a \frac{\epsilon}{c}$ otteniamo la seguente stima per δ

$$\delta = \min\left\{a,\ \sqrt[M]{\frac{\epsilon}{c}}\right\}$$

con la quale possiamo affermare che $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} P(\mathbf{x}) = 0$.

Mostriamo ora l'implicazione $\Rightarrow$. Sia $\mathbf{d} \in I$ tale che $F(\mathbf{d}) \leq 0$ allora $F(t\mathbf{d}) \leq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ e possiamo considerare la successione di vettori

$$\mathbf{x}_t = \left(2^{-td_1}, 2^{-td_2}, \ldots, 2^{-td_n}\right)$$

Pet $t \to +\infty$ $\mathbf{x}_t \to \mathbf{0}$ ma $U_P(\mathbf{x}_t) \geq 1$ e dalla (1.8) segue che questo limite se esiste non può essere uguale a 0. ∎

Corollario 2.9 (Secondo teorema di convergenza). *Sia P algebrica positiva e F_P il suo grado generalizzato. Allora*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} P(\mathbf{x}) = +\infty \Leftrightarrow F_P \text{ è definita negativa su } I \tag{2.7}$$

Dimostrazione. Il grado generalizzato di $\frac{1}{P(\mathbf{x})}$ vale esattamente $-F_P(\mathbf{d})$ e la tesi segue dal primo teorema di convergenza. ∎

Corollario 2.10 (Terzo teorema di convergenza). *Sia P una qualunque funzione algebrica positiva e F_P il suo grado generalizzato. Supponiamo inoltre che F_P non sia identicamente nulla su I, allora per $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ $P(\mathbf{x})$ non può convergere ad alcuna costante $c \in \mathbb{R}^+$.*

Quindi se F_P non è definita (positiva o negativa) e non è identicamente nulla su I il limite $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} P(\mathbf{x})$ non esiste.

Questi risultati ci permettono di determinare nella maggior parte dei casi la convergenza o meno del limite $\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} P(\mathbf{x})$ in base ai valori assunti dal suo grado generalizzato F_P sull'insieme I. L'unico caso indeterminato è quando F_P si annulla su tutto I poiché i teoremi precedenti non sono in grado di fornirci molte informazioni sul comportamento di P intorno all'origine.

Proposizione 2.11. *Se il grado generalizzato F_P di P si annulla su tutto I allora esiste un intorno V dell'origine e due numeri $0 < b \leq c$ tali che $P(\mathbf{x}) \in [c, d]$ per ogni $\mathbf{x} \in V \cap I$*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal teorema 1.7 con $V =]0, 1[^n$. ∎

Questo risultato ci suggerisce di studiare la funzione $P(\mathbf{x}) - k$ con $k \in [c, d]$ scelto in modo tale che $P(\mathbf{x}) - k$ sia algebrica positiva o possa essere ricondotta in qualche maniera ad una o più funzioni algebriche positive.

Diamo qualche esempio pratico di questo metodo

Esempio. Calcoliamo il seguente limite in due variabili

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{x^2 + y}{x^2 + 2y^2 + y}$$

per ogni $x, y > 0$. Il suo grado generalizzato è identicamente nullo su I ma sottraendo $k = 1$ otteniamo

$$\frac{x^2 + y}{x^2 + 2y^2 + y} - 1 = -\frac{2y^2}{x^2 + 2y^2 + y}$$

che è l'opposto di una funzione algebrica positiva con grado generalizzato

$$F'(d_1, d_2) = 2d_2 - \min\{2d_1, d_2\} \geq d_2$$

che è definita positiva e dal primo teorema di convergenza segue che

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{x^2 + y}{x^2 + 2y^2 + y} = 1$$

Esempio. Se invece ora consideriamo

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{x^2 + 2y}{x^2 + 2y^2 + y}$$

con $x, y > 0$ il suo grado generalizzato è ancora identicamente nullo ma sottraendo $k = 2$ otteniamo

$$\frac{x^2 + 2y}{x^2 + 2y^2 + y} - 2 = -\frac{x^2 + 4y^2}{x^2 + 2y^2 + y}$$

e quindi

$$F'(d_1, d_2) = \min\{2d_1, 2d_2\} - \min\{2d_1, d_2\}$$

Studiamo i vari casi:

- Se $d_2 \leq d_1$ allora $F' = 2d_2 - d_2 = d_2$;
- Se $d_1 \leq d_2 \leq 2d_1$ allora $F' = 2d_1 - d_2 \geq 0$;
- Se $d_2 \geq 2d_1$ allora $F' = 2d_1 - 2d_1 = 0$.

quindi F' è semidefinita ma non definita positiva e perciò

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{x^2 + 2y}{x^2 + 2y^2 + y} \text{ non esiste}$$

Esempio. Studiamo ora il limite

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{x + x^2 + y}{x + y^2 + y}$$

Sottraendo 1 all'argomento del limite non otteniamo una funzione algebrica positiva, ciononostante il limite si può determinare senza alcuna difficoltà:

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{x + x^2 + y}{x + y^2 + y} - 1 = \lim_{x,y\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x + y^2 + y} = \lim_{x,y\to 0} \frac{x^2}{x + y^2 + y} - \lim_{x,y\to 0} \frac{y^2}{x + y^2 + y} = 0$$

e quindi il limite iniziale vale 1.

Teorema 2.12. *Consideriamo la funzione algebrica positiva in due variabili*

$$P(x,y) = \frac{x^a y^b}{\prod_{i=1}^m (x^{c_i} + y^{d_i})^{\alpha_i}}$$

con $m \in \mathbb{N}$*,* $a, b \geq 0$ *e* $c_i, d_i, \alpha_i > 0$ *definita per ogni* $(x,y) \in I$*. Allora il suo grado generalizzato non è mai identicamente nullo ed è definito positivo se e solo se per ogni* $i \in \mathcal{I}_m$ *vale la disuguaglianza stretta*

$$\frac{a}{c_i} + \frac{b}{d_i} > \sum_{j=1}^m \alpha_j \min\left\{\frac{c_j}{c_i}, \frac{d_j}{d_i}\right\} \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Il grado generalizzato di P vale esattamente

$$F_P(x,y) = ax + by - \sum_{j=1}^m \alpha_j \min\{c_j x, d_j y\}$$

Dimostriamo innanzitutto che non può essere identicamente nulla su I, se lo fosse per continuità sarebbe identicamente nulla anche su K e quindi ponendo prima $y = 0$ e poi $x = 0$ otterremmo che $a = b = 0$. In tal caso poiché sia c_1 che d_1 sono maggiori stretti di 0 si ha $\left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{d_1}\right) \in I$ e quindi

$$F_P\left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{d_1}\right) \leq -\alpha_1 < 0$$

e quindi non è mai identicamente nulla.

Se F_P è definita positiva vale necessariamente la (2.8) per ogni i, dimostriamo il viceversa. Osserviamo che F_P è una funzione lineare in tutti i punti di non derivabilità quindi tali punti non possono essere né punti di massimo né di minimo, quindi dobbiamo studiare il segno solamente nei pressi della frontiera di I e nei punti di non derivabilità interni che corrispondono esattamente agli elementi dell'insieme

$$\bigcup_{i=1}^m \{(x,y) \in I | c_i x = d_i y\}$$

Se vale la (2.8) per ogni i per linearità F_P è strettamente maggiore di 0 sui punti di non derivabilità interni ad I, mentre su K osserviamo che F_P è uguale ad a oppure a b, in entrambi i casi è maggiore o uguale a 0. Combinando tutte queste informazioni possiamo concludere che se vale la (2.8) allora F_P è definita positiva. ■

3 Cambio dominio

I risultati ottenuti finora ci permettono di studiare il comportamento di una funzione algebrica positiva in base al segno assunto dal suo grado generalizzato all'interno dell'insieme I. In questa sezione cambiando il dominio del grado generalizzato studieremo altre proprietà delle funzioni algebriche positive.

Supponiamo di voler studiare l'andamento di $P(\mathbf{x})$ nel caso in cui $\|\mathbf{x}\| \to +\infty$, potremmo sia modificare tutti i risultati ottenuti precedentemente per adattarli a questo nuovo caso oppure usare la sostituzione

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}$$

da cui segue

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|}$$

e quindi $\|\mathbf{x}\| \to +\infty$ se e solo se $\|\mathbf{y}\| \to 0$ e potendo così riutilizzare tutti i risultati ottenuti precedentemente.

Il grado generalizzato di P con questa sostituzione è pari a $F_P\left[T(\mathbf{d})\right]$ dove $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è definita come

$$T(\mathbf{d}) = \mathbf{d} - 2\mathbf{u} \min \mathbf{d}$$

dove abbiamo posto $\mathbf{u} = (1, 1, \ldots, 1, 1) \in \mathbb{R}^n$. Quindi per studiare il comportamento di P al tendere di $\|\mathbf{x}\|$ all'infinito è sufficiente sfruttare i teoremi di convergenza con l'unica accortezza di valutare F_P non su I ma sull'insieme $T(I)$ che è anch'esso conico. Possiamo essere ancora più precisi a riguardo grazie al seguente risultato:

Proposizione 3.1. *L'applicazione T è biiettiva e inoltre*

$$T(I) = J$$
$$T(J) = I$$
$$T(K) = K$$

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che l'inversa di T concide con T ovvero

$$T\left[T(\mathbf{d})\right] = \mathbf{d}$$

infatti

$$\begin{aligned} T\left[T(\mathbf{d})\right] &= \mathbf{d} - 2\mathbf{u} \min \mathbf{d} - 2\mathbf{u} \min\left(\mathbf{d} - 2\mathbf{u} \min \mathbf{d}\right) \\ &= \mathbf{d} - 2\mathbf{u} \min \mathbf{d} - 2\mathbf{u}\left(\min \mathbf{d} - 2 \min \mathbf{d}\right) = \mathbf{d} \end{aligned}$$

Inoltre con un procedimento analogo verifichiamo che

$$\min T(\mathbf{d}) = -\min \mathbf{d}$$

che insieme all'invertibilità ci permette di concludere la dimostrazione. ∎

Quindi analizzando F_P su I conosciamo il comportamento di P quando ci si avvicina all'origine mentre analizzandolo su J possiamo studiare il suo comportamento quando invece ci allontaniamo dall'origine verso l'infinito.

Consideriamo di nuovo il caso in cui $P(x)$ sia un polinomio a coefficienti non negativi e il suo grado generalizzato può essere espresso nella forma (1.6) come si è visto prima.

I teoremi ottenuti fin'ora sono perfettamente in linea con i risultati classici dell'analisi unidimensionale: quando infatti la variabile x tende a 0 da destra è il termine di grado inferiore di P ad avere un ruolo predominante nella determinazione del limite, mentre se tende a $+\infty$ viene considerato solo il termine di grado massimo.

Entrambe queste eventualità sono riassunte all'interno del grado generalizzato di P: il caso $x \to 0^+$ è determinato dal grado generalizzato valutato in $d > 0$ che tiene conto come si è visto del grado minimo di P, mentre il caso $x \to +\infty$ da $d < 0$ e quindi dal grado vero e proprio di P. Quindi il grado generalizzato estende il concetto di grado anche nello studio dei limiti grazie ai teoremi precedenti.

Come sappiamo gli insiemi I e J sono stati definiti in base al segno del minimo tra le componenti dei vettori che li compongono, quindi per studiare il segno di un grado generalizzato in n variabili su questi insiemi dobbiamo porre delle limitazioni su tutte le n variabili. In certi casi ciò porta ad ulteriori complicazioni e per questo vogliamo trovare degli insiemi equipotenti a I, J e K che però ci permettano di limitare una sola variabile lasciando tutte le altre libere di variare su $\mathbb{R}$. A tale scopo definiamo i seguenti insiemi

$$I' = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | y_1 > 0\}$$
$$J' = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | y_1 < 0\}$$
$$K' = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | y_1 = 0\}$$

che a differenza delle loro controparti sono determinati da una sola componente, troviamo adesso una funzione biiettiva che ci permetta di passare da un'insieme all'altro.

Definiamo ora l'applicazione $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che ad ogni $\mathbf{x}$ associa il vettore $\mathbf{y} = H(\mathbf{x})$ definito nella seguente maniera:

$$y_1 = \min \mathbf{x}$$
$$y_i = x_i - x_1 \text{ per ogni } i > 1$$

Per trovare un'inversa di H definiamo per ogni vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ il vettore $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ definito come

$$(\tilde{\mathbf{y}})_1 = 0$$
$$(\tilde{\mathbf{y}})_i = y_i \text{ per ogni } i > 1$$

Prendiamo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e poniamo per comodità $\mathbf{y} = H(\mathbf{x})$, allora $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{x} - x_1\mathbf{u}$ dove $\mathbf{u} = (1, 1, \ldots, 1, 1) \in \mathbb{R}^n$ e

$$\min \tilde{\mathbf{y}} = \min \mathbf{x} - x_1 \Leftrightarrow x_1 = y_1 - \min \tilde{\mathbf{y}}$$
$$y_i = x_i - x_1 \Leftrightarrow x_i = y_i + y_1 - \min \tilde{\mathbf{y}} \text{ per ogni indice } i > 1$$

ovvero

$$H^{-1}(\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{u}(y_1 - \min \tilde{\mathbf{y}})$$

Abbiamo appena dimostrato che $H^{-1}[H(\mathbf{x})] = \mathbf{x}$, osserviamo che

$$\begin{aligned}\min\left[\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{u}(y_1 - \min \tilde{\mathbf{y}})\right] = \min \tilde{\mathbf{y}} + y_1 - \min \tilde{\mathbf{y}} = y_1 \\ \left[\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{u}(y_1 - \min \tilde{\mathbf{y}})\right]_i - \left[\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{u}(y_1 - \min \tilde{\mathbf{y}})\right]_1 = (\tilde{\mathbf{y}})_i - (\tilde{\mathbf{y}})_1 = y_i\end{aligned}$$

e quindi $H[H^{-1}(\mathbf{y})] = \mathbf{y}$ e quindi H è biiettiva. Dall'uguaglianza

$$\min H^{-1}(\mathbf{y}) = y_1$$

segue le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}H(I) = I' \\ H(J) = J' \\ H(K) = K'\end{aligned}$$

Definizione 3.2. Posta P algebrica positiva con F_P come grado generalizzato, allora la funzione $G_P = F_P \circ H^{-1}$ è chiamata *grado normalizzato* di P.

Per stabilire il carattere di una funzione tramite il grado normalizzato basta analizzarlo su I' o su J' a seconda dei casi o più semplicemente porre $y_1 > 0$ e $y_1 < 0$ rispettivamente lasciando gli altri parametri completamente liberi.

Osserviamo ancora che il grado normalizzato della funzione

$$P(\mathbf{x}) = \sqrt[a]{\sum_{i=1}^{n} x_i^a}$$

dove $a > 0$ vale sempre $G(\mathbf{y}) = y_1$.

Teorema 3.3. *Consideriamo la funzione su* $\mathbb{R}^n$

$$P(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{b_i}\right)^{\alpha}}$$

con $a_i \geq 0$, $b_i > 0$ *e* $\alpha > 0$. *Allora il limite* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} P(\mathbf{x})$ *esiste finito se e solo se vale la disuguaglianza*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} > \alpha \tag{3.1}$$

e in tal caso il limite è 0

Dimostrazione. Il grado generalizzato vale

$$F_P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \alpha \min_i b_i x_i$$

In questo caso non ci conviene calcolare il grado normalizzato, al suo posto useremo una funzione simile che ci permette di semplificare un bel po' di calcoli senza modificarne l'analisi in maniera significativa. Posto

$$W : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I = (b_1 x_1, b_2 x_2, \cdots, b_n x_n) \in I$$

che dalle ipotesi è chiaramente invertibile. Poniamo $G_P(\mathbf{y}) = F_P\left[(H \circ W)^{-1}(\mathbf{y})\right]$ otteniamo

$$\begin{aligned} G_P(\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} - \alpha\right) y_1 - \min \mathbf{z} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{b_i} y_i \\ = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} - \alpha\right) y_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} (z_i - \min \mathbf{z}) \end{aligned}$$

dove per comodità di notazione abbiamo posto $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{y}}$.

La quantità

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} (z_i - \min \mathbf{z})$$

è sempre maggiore o uguale a 0 e si annulla in $y_2 = y_3 = \cdots = y_n = 0$. Da questa affermazione segue che il limite vale 0 se e solo se $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} - \alpha$ è strettamente maggiore di 0.

Supponiamo ora che $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} - \alpha \leq 0$, dobbiamo considerare due casi. Se $a_i = 0$ per ogni i si annullano tutti i termini tranne quello in α e quindi G_P è strettamente negativa su I' e il limite è infinito. Altrimenti per y_1 abbastanza piccolo G_P diventa positiva mentre per indici opportuni G_P si annulla o diventa negativa, in entrambi i casi il limite non esiste.

Passando a J' valgono analoghi risultati con l'unica differenza che bisogna invertire il segno di (3.1). ∎