Appunti sparsi di Analisi Funzionale
Errata corrige

De Donato Paolo

Questo documento contiene tutti gli errori trovati e segnalati nella terza edizione degli appunti di analisi funzionale. Nel caso vengano riscontrati altri errori si prega di scrivere a `pdd.math@gmail.com`.

1 Errori

- Pagina 94, Il paragrafo corretto è

  Le applicazioni $u \to B[v,u]$ e $u \to \tilde{f}(u)$ sono lineari e continue per la limitatezza essenziale dei coefficienti, per questa ragione $\tilde{f}$ appartiene al duale di $W_0^{1,2}$ e possiamo anche costruire un operatore lineare L che ad ogni $u \in W_0^{1,2}$ associa il funzionale lineare $(Lu)(v) = B[u,v]$.

2 Complementi

2.1 La chiusura della palla aperta

In uno spazio metrico generico valgono le disuguaglianze

$$B_r(x) \subseteq \overline{B_r(x)} \subseteq D_r(x)$$

queste inclusioni possono essere sia disuguaglianze strette sia uguaglianze tra insiemi. Preso un qualunque insieme S contenente almeno due elementi distinti possiamo sempre dotarlo della seguente metrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

La topologia indotta da tale metrica rende tutti i singleton aperti e quindi ogni sottoinsieme di S è sia aperto che chiuso. Fissato $x \in S$ segue che

$$\{x\} = B_1(x) = \overline{B_1(x)} \subsetneq D_1(x) = S$$

Su uno spazio vettoriale normato $X \neq \{0\}$ invece si ha sempre $B_r(x) \subsetneq \overline{B_r(x)} = D_r(x)$, infatti possiamo sempre trovare vettori di norma arbitraria e per ogni $y \in D_r(x)$ la successione

$$x_n = \frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)y$$

è contenuta in $B_r(x)$ e converge a y, quindi per una proposizione precedente $\overline{B_r(x)} = D_r(x)$.

2.2 Lo spazio L^1_{loc}

Diamo un esempio di spazio vettoriale localmente convesso usato ampiamente nei corsi di analisi avanzata.

Innanzitutto fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto non vuoto e definiamo

$$L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^m \text{ misurabile } : \int_K \|f(x)\| dx < +\infty \ \forall K \subseteq \Omega \text{ compatto in } \mathbb{R}^n \right\}$$

che come è ben noto risulta essere uno spazio vettoriale reale. Siano ora $f_n, f \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ diciamo che la successione converge a f se e solo se

$$\lim_{n \to +\infty} \int_K \|f_n(x) - f(x)\| dx = 0$$

per ogni $K \subseteq \Omega$ compatto. Quindi denotando con $\mathcal{K} = \{K \subseteq \Omega : K \text{ compatto in } \mathbb{R}^n\}$ la famiglia di seminorme

$$\{p_K(f)\}_{K \in \mathcal{K}} = \left\{ \int_K \|f(x)\| dx \right\}_{K \in \mathcal{K}}$$

rende $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso come ben sappiamo in cui la convergenza di successioni coincide con la precedente definizione di convergenza.

Tale famiglia di seminorme non risulta totale, se però identifichiamo le funzioni che coincidono quasi ovunque allora tale famiglia risulta anche totale. Sia infatti f tale che l'insieme $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ abbia misura non nulla (altrimenti coinciderebbe con la funzione nulla) allora da una conseguenza del teorema di rappresentazione di Riesz esisterà un compatto K contenuto in tale insieme con misura strettamente maggiore di 0 e quindi $\displaystyle\int_K \|f(x)\| dx > 0$.

Quindi il limite di una successione convergente in L^1_{loc} se esiste è unico.