Complementi di analisi funzionale

De Donato Paolo

25 marzo 2019

1 La chiusura della palla aperta

In uno spazio metrico generico valgono le disuguaglianze

$$B_r(x) \subseteq \overline{B_r(x)} \subseteq D_r(x)$$

queste inclusioni possono essere sia disuguaglianze strette sia uguaglianze tra insiemi. Preso un qualunque insieme S contenente almeno due elementi distinti possiamo sempre dotarlo della seguente metrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \tag{1.1}$$

La topologia indotta da tale metrica rende tutti i singleton aperti e quindi ogni sottoinsieme di S è sia aperto che chiuso. Fissato $x \in S$ segue che

$$\{x\} = B_1(x) = \overline{B_1(x)} \subsetneq D_1(x) = S$$

Su uno spazio vettoriale normato $X \neq \{0\}$ invece si ha sempre $B_r(x) \subsetneq \overline{B_r(x)} = D_r(x)$, infatti possiamo sempre trovare vettori di norma arbitraria e per ogni $y \in D_r(x)$ la successione

$$x_n = \frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)y$$

è contenuta in $B_r(x)$ e converge a y, quindi per una proposizione precedente $\overline{B_r(x)} = D_r(x)$.

2 Esempi notevoli di spazi vettoriali topologici

2.1 Lo spazio L^1_{loc}

Diamo un esempio di spazio vettoriale topologico localmente convesso usato ampiamente nei corsi di analisi avanzata.

Innanzitutto fissiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto non vuoto e definiamo lo spazio delle funzioni *localmente sommabili* nella seguente maniera

$$L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^m \text{ misurabile } : \int_K \|f(x)\| dx < +\infty \ \forall K \subseteq \Omega \text{ compatto in } \mathbb{R}^n \right\}$$

che come è ben noto risulta essere uno spazio vettoriale reale. Siano ora $f_n, f \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ diciamo che la successione *converge localmente* a f se e solo se

$$\lim_{n \to +\infty} \int_K \|f_n(x) - f(x)\| dx = 0$$

per ogni $K \subseteq \Omega$ compatto. Chi ha un po' di familiarità con l'analisi si renderà conto che non esiste alcuna norma su L^1_{loc} che erediti la definizione di convergenza locale, quindi non possiede una struttura di spazio normato.

Possiamo però dotare L^1_{loc} di una struttura di spazio vettoriale topologico localmente convesso in modo tale che ogni successione convergente rispetto a tale topologia debba convergere allo stesso limite anche localmente e viceversa. Definita la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{K} = \{K \subseteq \Omega : K \text{ compatto in } \mathbb{R}^n\}$ costruiamo le seguenti seminorme su L^1_{loc}

$$\{p_K(f)\}_{K\in\mathcal{K}} = \left\{ \int_K \|f(x)\| dx \right\}_{K\in\mathcal{K}}$$

da questa famiglia di seminorme rendiamo $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso in cui la convergenza di successioni coincide con la convergenza locale come è ben facile verificare.

Tale famiglia di seminorme non risulta totale, se però identifichiamo le funzioni che coincidono quasi ovunque allora tale famiglia risulta anche totale. Sia infatti f tale che l'insieme $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ abbia misura non nulla (altrimenti coinciderebbe con la funzione nulla) allora da una conseguenza del teorema di rappresentazione di Riesz esisterà un compatto K contenuto in tale insieme con misura strettamente maggiore di 0 e quindi $\displaystyle\int_K \|f(x)\| dx > 0$.

Quindi il limite di una successione convergente in L^1_{loc} se esiste è unico.

2.2 Convergenza puntuale e uniforme

Prendiamo ancora $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e denotiamo con $C_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ l'insieme di tutte le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continue e tali che il *supporto* di f, definito come

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

sia compatto e contenuto in Ω. Possiamo definire su C_c la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \|f(x)\|$$

Allora $C_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ è uno spazio normato e inoltre presi $f_k, f \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ vale

$$\lim_{k\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in \mathbb{R}^n \ \|f_k(x) - f(x)\| < \epsilon$$

il secondo termine è proprio la definizione di *convergenza uniforme* di una successione di funzioni. Per quanto riguarda la convergenza puntuale dobbiamo spostarci sugli spazi topologici localmente convessi. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ possiamo considerare la seminorma

$$F_x : f \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^m) \to \|f(x)\| \in \mathbb{R}$$

e la famiglia $\{F_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ induce su C_c una struttura di spazio vettoriale topologico localmente convessa. Dimostriamo che la convergenza su tale spazio coincide con la convergenza puntuale.

Supponiamo innanzitutto che la successione f_k converge a f rispetto alla topologia indotta dalle F_x, allora

$$\forall\epsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall k \geq N \ f_k \in I^\epsilon_x(f) \Leftrightarrow \|f_k(x) - f(x)\| < \epsilon$$

e quindi si ha convergenza puntuale su tutto $\mathbb{R}^n$. Viceversa supponiamo $f_k(x) \to f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, allora per ogni $x_1, x_2, \ldots, x_l \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_l > 0$ esistono $N_1, N_2, \ldots, N_l \in \mathbb{N}$ tali che $f_j \in I^{\epsilon_i}_{x_i}(f)$ per ogni $j > N_i$.

Preso $N = \max\{N_1, \dots, N_l\}$ allora per ogni $i > N$ si ha

$$f_i \in I^{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_l}_{x_1, x_2, \dots, x_l}(f) \tag{2.1}$$

poiché gli insiemi che compaiono nella (2.1) formano un sistema fondamentale di intorni di f si ha che f_i converge ad f rispetto alla topologia indotta dalle F_x.

Il prezzo di non poter definire una norma per la convergenza puntuale viene ripagato dalla possibilità di definirla su molti più spazi di funzioni rispetto alla norma uniforme, la quale può operare solo su spazi di funzioni limitate, in particolare per le funzioni misurabili.

Osserviamo che sullo spazio delle funzioni misurabili $\mathcal{M}(X, \mathbb{R}^m)$ definite su uno spazio di misura X munito della struttura di spazio vettoriale topologica ottenuta prima, grazie al lemma di Fatou l'applicazione

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R}^m) \to \int_X \|f\| d\mu \in [0, +\infty]$$

è sequenzialmente semicontinua inferiormente.

2.3 Lo spazio delle funzioni test

Prendiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e denotiamo con $C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ lo spazio di tutte le funzioni $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ derivabili infinite volti su $\mathbb{R}^n$ tali che l'insieme

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) \neq 0\}}$$

detto *supporto* di ϕ se non vuoto è compatto e contenuto in Ω. È chiaramente uno spazio vettoriale detto *spazio delle funzioni test*.

Sia ora $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n_0$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ allora poniamo per comodità di notazione

$$D^\alpha \phi(x) = \phi(x) \text{ se } |\alpha| = 0$$
$$D^\alpha \phi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \text{ altrimenti}$$

Possiamo definire su $C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ la seguente famiglia di seminorme

$$\{p_\alpha(\phi)\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n_0} = \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}^n} \|D^\alpha \phi(x)\| \right\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n_0}$$

che rende lo spazio delle funzioni test uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Con questa topologia diciamo che una successione ϕ_k converge a ϕ in $C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se e solo se per ogni multiindice α la successione $D^\alpha \phi_k$ converge uniformemente a $D^\alpha \phi$ riottenendo così la definizione usuale di convergenza delle funzioni test.

3 Metriche non archimedee

Consideriamo uno spazio metrico (S, d) allora la metrica d è detta *non archimedea* se e solo se per ogni $x, y, z \in S$ vale la disuguaglianza

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \tag{3.1}$$

questa disuguaglianza è una versione più forte della disuguaglianza triangolare tipica degli spazi metrici usuali, ciononostante le metriche non archimedee hanno proprietà davvero insolite anche per uno spazio metrico generico.

Osservazione. La metrica definita nella sezione 1 è chiaramente una metrica non archimedea: presi $x, y \in S$ tali che $x \neq y$ allora per ogni $z \in S$ vale $x \neq z$ oppure $y \neq z$ e perciò

$$d(x, y) = 1 = \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

Proposizione 3.1. *Se d è una metrica non archimedea allora per ogni $x, y, z \in S$ vale almeno una delle seguenti formule*

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) = d(z, y) \\ d(x, z) &\leq d(x, y) = d(y, z) \\ d(z, y) &\leq d(z, x) = d(x, y) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Se poniamo

$$\begin{aligned} a &= d(x, y) \\ b &= d(x, z) \\ c &= d(z, y) \end{aligned}$$

allora a meno di un riordinamento possiamo supporre $a \leq b \leq c$. Dalle proprietà della metrica si ha $c \leq \max\{a, b\} = b$ e quindi $c = b$. ■

In maniera euristica potremmo affermare che in una metrica non archimedea *tutti i triangoli sono isosceli o equilateri.* Le proprietà insolite di queste metriche non si esauriscono qui, difatti vale anche il seguente risultato

Proposizione 3.2. *Fissato $r > 0$ la relazione su S*

$$x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) < r$$

è una relazione di equivalenza in S. Quindi la famiglia

$$\{B_r(x)\}_{x \in S}$$

determina una partizione di S.

Dimostrazione. Le proprietà di riflessività e simmetria sono sempre verificate, dimostriamo ora la transitività: se $x \sim y$ e $y \sim z$ allora

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} < r$$

e la transitività è così verificata. ■

Corollario 3.3. *Ogni punto di una palla aperta è anche il suo centro ovvero*

$$y \in B_r(x) \Leftrightarrow B_r(y) = B_r(x)$$

Corollario 3.4. *Gli insiemi $B_r(x)$ sono sia aperti che chiusi, quindi se S ha almeno due elementi distinti allora è sconnesso.*

Corollario 3.5. *Siano $x, y \in S$ ed $0 < r \leq R$ tali che $B_r(x) \cap B_R(y) \neq \emptyset$ allora $B_r(x) \subseteq B_R(y)$.*

Dimostrazione. Sia $z \in B_r(x) \cap B_R(y)$ quindi $B_r(x) = B_r(z) \subseteq B_R(z) = B_R(y)$. ■

Corollario 3.6. *Per ogni $x \in S$ ed $r > 0$ l'insieme $D_r(x)$ è aperto.*

La proposizione 3.2 e il corollario 3.5 ci danno molte informazioni su come definire nuove metriche non archimedee su un insieme non vuoto S. Le famiglie di aperti $\mathcal{F}_r = \{B_r(x)\}_{x \in S}$ con $r \in L = \mathbb{R}^+$ soddisfano le seguenti proprietà:

1. $\mathcal{F}_r$ è una partizione di S per ogni $r \in L$;
2. Siano $r, R \in L$ tali che $r < R$ e presi $A \in \mathcal{F}_r$, $B \in \mathcal{F}_R$ allora vale l'implicazione
$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$$
3. Per ogni $x, y \in S$ *distinti* l'insieme
$$\{r \in I : \exists A \in \mathcal{F}_r \text{ tale che } \{x, y\} \subseteq A\} \tag{3.2}$$
è non banale, ovvero è diverso sia da $\emptyset$ che da L.

Possiamo però anche ragionare a ritroso, ovvero da queste proprietà ricostruirci una metrica non archimedea compatibile con le partizioni $\mathcal{F}_r$. Per la trattazione risulta più comodo riscrivere le precedenti proprietà in termini di relazioni di equivalenza.

Preso un insieme di indici $L \subseteq \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ e una famiglia di relazioni di equivalenza su S $\{\equiv_t\}_{t \in L}$ diciamo che tale famiglia è *non archimedea* se e solo se soddisfa i seguenti assiomi:

- *Trasferibilità* Se $x \equiv_s y$ per un certo $s \in L$ allora per ogni $t > s$ si ha $x \equiv_t y$;
- *Separabilità* Per ogni $x, y \in S$ distinti esiste un $s \in L$ tale che $x \not\equiv_s y$;
- *Confrontabilità* Per ogni $x, y \in S$ esiste un $s \in L$ tale che $x \equiv_s y$.

Teorema 3.7. *Presa una famiglia di relazioni di equivalenza non archimedea $\{\equiv_t\}_{t \in L}$ esistono due metriche non archimedee d^+, d^- su S (non necessariamente distinte) a valori in $\{0\} \cup \overline{L}$ tali che $d^-(x, y) \leq d^+(x, y)$ e per ogni $r \in L$*
$$B_r^{d^+}(x) \subseteq B_r^{d^-}(x) \subseteq \varphi_r(x) \subseteq D_r^{d^+}(x) \subseteq D_r^{d^-}(x)$$
dove $\varphi_r(x)$ è la classe di equivalenza di x rispetto alla relazione $\equiv_r$. Quindi d^- induce su S una topologia più fine di d^+, in entrambe le topologie $\varphi_r(x)$ è aperto.

Dimostrazione. Definiamo per ogni $x, y \in S$ gli insiemi
$$I(x, y) = \{r \in L : x \equiv_r y\}$$
$$I^c(x, y) = \{r \in L : x \not\equiv_r y\} \cup \{0\}$$
dalla proprietà di confrontabilità non è mai vuoto e da quella di separazione $I^c(x, y) = \{0\} \Leftrightarrow x = y$. Per la trasferibilità I^c è un segmento iniziale di $L \cup \{0\}$ mentre I ne è un segmento finale, in altre parole
$$r \in I(x, y) \wedge R \in L \cap]r, +\infty[\Rightarrow R \in I(x, y)$$
$$R \in I^c(x, y) \wedge r \in L \cap [0, R[\Rightarrow r \in I^c(x, y)$$

Definiamo adesso le quantità
$$d^+(x, y) = \inf I(x, y)$$
$$d^-(x, y) = \sup I^c(x, y)$$

È immediato constatare che sono entrambe simmetriche e si annullino solamente se $x = y$. È immediato constatare anche che $d^- \leq d^+$, dimostriamo la (1.1)

Presi $x, y, z \in S$ dalle proprietà delle relazioni di equivalenza e dei segmenti iniziali e finali segue che

$$\begin{aligned} I(x,y) \cap I(y,z) \subseteq I(x,z) \Rightarrow \inf I(x,z) &\leq \inf\left[I(x,y) \cap I(y,z)\right] \\ &= \max\left\{\inf I(x,y), \inf I(y,z)\right\} \\ I^c(x,z) \subseteq I^c(x,y) \cup I^c(y,z) \Rightarrow \sup I^c(x,z) &\leq \sup\left[I^c(x,y) \cup I^c(y,z)\right] \\ &= \max\left\{\sup I^c(x,y), \sup I^c(y,z)\right\} \end{aligned}$$

e quindi d^+ e d^- sono metriche non archimedee.

Sia ora $r \in L$ e $x \in \varphi_r(x)$ allora

$$y \in B_r^{d^-}(x) \Rightarrow d^-(x,y) < r \Rightarrow r \in I(x,y) \Rightarrow y \in \varphi_r(x)$$

e quindi $B_r(x) \subseteq A$, mentre

$$y \in \varphi_r(x) \Rightarrow r \in I(x,y) \Rightarrow d^+(x,y) \leq r \Rightarrow y \in D_r^{d^+}(x)$$

■

Corollario 3.8. *Fissato $x \in S$, allora valgono le seguenti affermazioni*

1. *Se $I^c(x,y)$ ha massimo per ogni $y \in S$ allora per ogni $r \in L$*

$$B_r^{d^-}(x) = \varphi_r(x)$$

2. *Se $I^c(x,y)$ non ha massimo per ogni $y \in S$ allora per ogni $r \in L$*

$$D_r^{d^-}(x) = \varphi_r(x)$$

3. *Se $I(x,y)$ ha minimo per ogni $y \in S$ allora per ogni $r \in L$*

$$D_r^{d^+}(x) = \varphi_r(x)$$

4. *Se $I(x,y)$ non ha minimo per ogni $y \in S$ allora per ogni $r \in L$*

$$B_r^{d^+}(x) = \varphi_r(x)$$

Dimostrazione. Dimostriamo per chiarezza tutti i punti

1. Posto $M_y = \max I^c(x,y)$ allora

$$y \in \varphi_r(x) \Rightarrow r > M_y = d^-(x,y)$$

2. Per ogni $r \in I^c(x,y)$ esiste $r' > r$ tale che $r' \in I^c(x,y)$, quindi

$$d^-(x,y) \leq r \Rightarrow r \notin I^c(x,y) \Rightarrow y \in \varphi_r(x)$$

3. Posto $m_y = \min I(x,y)$ allora

$$m_y = d^+(x,y) \leq r \Rightarrow r \in I(x,y) \Rightarrow y \in \varphi_r(x)$$

4. Per ogni $r \in I(x,y)$ esiste $r' < r$ tale che $r' \in I(x,y)$, quindi

$$y \in \varphi_r(x) \Rightarrow r' \in I(x,y) \Rightarrow d^+(x,y) \leq r' < r$$

■

Osservazione. Se $L = \{n^k : k \in \mathbb{Z}\}$ con $n > 1$ allora si ha

$$d^+(x,y) = nd^-(x,y)$$

e per ogni $r \in L$

$$B_{nr}^{d^+}(x) = B_r^{d^-}(x) = \varphi_r(x) = D_r^{d^+}(x) = D_{r/n}^{d^-}(x)$$

e quindi possiamo descrivere le metriche a partire da $\varphi_r(x)$ in quanto

$$d^+(x,y) = n^k \Leftrightarrow y \in \varphi_{n^k}(x) \setminus \varphi_{n^{k-1}}(x)$$

Esempio. Può accadere che le inclusioni del precedente teorema siano strette e quindi le due condizioni sui minimi di $I(x,y)$ non sono mutualmente esclusive. Consideriamo $S = \{1,2,3\}$ con la seguente famiglia di partizioni

$$\mathcal{F}_r = \begin{cases} \{S\} & \text{se } r > 1 \\ \{\{1,2\},\{3\}\} & \text{se } r = 1 \\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\} & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

Allora dal teorema precedente si ha $d^-(1,2) = d^-(2,3) = d^-(3,1) = d^+(1,2) = d^+(2,3) = d^+(3,1) = 1$ e quindi

$$\{1\} = B_1(1) \subset \{1,2\} \subset D_1(1) = S$$

Se invece prendiamo $L = \{1/2, 1, \pi\}$ e

$$\mathcal{F}_r = \begin{cases} \{S\} & \text{se } r = \pi \\ \{\{1,2\},\{3\}\} & \text{se } r = 1 \\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\} & \text{se } r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

allora

$$d^+(1,2) = 1 \qquad d^+(1,3) = \pi \qquad d^+(2,3) = \pi$$
$$d^-(1,2) = \frac{1}{2} \qquad d^-(1,3) = 1 \qquad d^-(2,3) = 1$$

e quindi gli elementi della partizione coincidono con le palle aperte e chiuse delle opportune metriche.

Questo esempio mostra come modificando l'insieme degli indici L della famiglia si ottengano metriche completamente diverse.

La metrica p-adica

Definiamo su $\mathbb{Q}$ una metrica non archimedea molto importante in vari aspetti della teoria dei numeri.

Innanzitutto fissiamo un numero primo p e definiamo la funzione

$$v_p : x \in \mathbb{Z} \to \inf \{n \in \mathbb{Z} : p^n x \text{ è un numero intero}\} \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$$

Chiaramente $v_p(x) \leq 0$, $v_p(x) = -\infty \Leftrightarrow x = 0$, $v_p(-x) = v_p(x)$ e sfruttando risultati basiliari dell'aritmetica $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. Quest'ultima proprietà in particolare ci garantisce che l'applicazione

$$u_p : \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \to v_p(a) - v_p(b) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$$

è ben definita. Dimostriamo ora che per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$ si ha

$$v_p(a+b) \leq \max\{v_p(a), v_p(b)\}$$

Possiamo supporre sia a che b diversi da 0 e $m = v_p(a)$, $n = v_p(b)$. Ora $m \leq n$ implica che $p^n(a+b) = p^{n-m}p^m a + p^n b$ è un numero intero e quindi $v_p(a+b) \leq n$. Se ora $x = \frac{a}{b}$, $y \in \frac{c}{d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ si ha

$$\begin{aligned} u_p\left(x+y\right) = v_p(ad+bc) - v_p(b) - v_p(d) &\leq \max\{v_p(ad), v_p(bc)\} - v_p(b) - v_p(d) \\ &= \max\{v_p(a) - v_p(b), v_p(c) - v_p(d)\} = \max\{u_p(x), u_p(y)\} \end{aligned}$$

e la disuguaglianza continua a valere anche per i razionali.

Definiamo allora la "norma" p-adica $|\cdot|_p$ in modo tale che per ogni $x \in \mathbb{Q}$

$$|x|_p = p^{u_p(x)} \in [0, +\infty[$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{gathered} |x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ |xy|_p = |x|_p\,|y|_p \\ |-x| = |x|_p \\ |x+y|_p \leq \max\left\{|x|_p\,, |y|_p\right\} \end{gathered}$$

Abbiamo usato le virgolette quando abbiamo nominato la norma p-adica poiché essa non è affatto una norma su $\mathbb{Q}$ in quanto quest'ultimo non è uno spazio vettoriale reale e perciò non potrebbe essere definito il prodotto per uno scalare. Se presi $x, y \in \mathbb{Q}$ poniamo

$$d(x,y) = |x-y|_p$$

allora lo spazio $(\mathbb{Q}, d)$ è uno spazio metrico e d è una metrica non archimedea.

Come per i numeri reali possiamo completare $\mathbb{Q}$ rispetto alla metrica p-adica ottenendo un nuovo campo non isomorfo ad $\mathbb{R}$ e con proprietà del tutto peculiari.

Ricaviamoci ora la metrica p-adica tramite le relazioni di equivalenza. Fissato $p \in \mathbb{N}$ numero primo definiamo l'insieme

$$\mathbb{H}_p = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^+$$

e la famiglia di relazioni di equivalenza $\{\equiv_{p^n}\}_{p^n \in \mathbb{H}_p}$ tali che per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$

$$x \equiv_{p^n} y \Leftrightarrow \text{ esiste } k \in \mathbb{N} \text{ coprimo con } p \text{ tale che } kp^n(x-y) \in \mathbb{Z}$$

Non è difficile dimostrare le proprietà di trasferibilità, separabilità e confrontabilità di questa famiglia di relazioni di equivalenza. Inoltre ogni sezione finale di $\mathbb{H}_p$ non banale possiede minimo quindi $\equiv_i$ è una famiglia non archimedea inferiormente chiusa su ogni punto di $\mathbb{Q}$.

Preso $p^n \in \mathbb{H}_p$ per l'osservazione precedente abbiamo che

$$D_{p^n}^{d^+}(0) = \left\{\frac{a}{p^k b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ non divisibili per } p \text{ e } k \leq n\right\}$$

e quindi mantenendo la notazione

$$d^+\left(0, \frac{a}{p^n b}\right) = p^n$$

inoltre poiché le relazioni di equivalenza sono invarianti per traslazioni anche le relative metriche lo sono, quindi per ogni $x \in \mathbb{Q}$

$$d^+\left(x, x + \frac{a}{p^n b}\right) = p^n$$

Per maggiori informazioni sulle norme p-adiche si consulti Koblitz N. *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta Functions*, Springer-Verlag, New York 1977.

4 Spazi di funzioni continue

Sia (X, τ) uno spazio topologico generico, allora poniamo

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ continua su } X\}$$

e per ogni $f \in C(X)$ definiamo la quantità

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \tag{4.1}$$

In realtà questa applicazione non definisce affatto una norma su $C(X)$, se invece consideriamo lo spazio

$$C_b(X) = \{f \in C(X) : \|f\| < +\infty\}$$

allora $\|\cdot\|$ è una norma su di esso.

Teorema 4.1. *Lo spazio $C_b(X)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Prendiamo una successione di Cauchy f_n allora per ogni $x \in X$ anche $f_n(x)$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ quindi esiste un'applicazione $f : X \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in X$

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

Innanzitutto dimostriamo che $\|f\| < +\infty$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m, n > N_\epsilon$ abbiamo $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ per ipotesi, ovvero $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ per ogni $x \in X$. Quindi

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_{n \to +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

per ogni $x \in X$, ma allora

$$|f(x)| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| \leq \|f_n\| + \epsilon$$

quindi f_n converge ad f la quale è limitata, dobbiamo solo dimostrarne la continuità.

Fissato $x \in X$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intorno aperto U di x tale che per ogni $y \in U$ vale $|f_{N_\epsilon}(y) - f_{N_\epsilon}(x)| < \epsilon$ e quindi

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_{N_\epsilon}(y)| + |f_{N_\epsilon}(y) - f_{N_\epsilon}(x)| + |f(x) - f_{N_\epsilon}(x)| \leq 3\epsilon$$

ovvero $f \in C_b(X)$. ∎

Definiamo lo spazio delle funzioni a supporto compatto come

$$C_c(X) = \{f \in C(X) : \exists K \text{ chiuso e compatto in } X \text{ tale che } f(x) = 0 \text{ per ogni } x \notin K\}$$

dal teorema di Weierstrass segue che $C_c(X) \subseteq C_b(X)$ ma in generale non è un sottospazio chiuso, ovvero esistono successioni di Cauchy contenute in $C_c(X)$ il cui limite non appartiene a $C_c(X)$.

Lo spazio delle funzioni a supporto compatto non è nemmeno denso in $C_b(X)$ ma lo è sullo spazio delle funzioni che si annullano sulla "frontiera" di X. Prima di costruire tale spazio osserviamo che se X è compatto allora

$$C_c(X) = C_b(X) = C(X) \tag{4.2}$$

e quindi supponiamo da ora in poi che X non sia compatto. Il nostro scopo è quello di rendere in qualche modo X compatto in modo da utilizzare la (4.2) per determinare tale spazio.

Innanzitutto poniamo $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ dove ∞ è un elemento arbitrario che non appartiene ad X e lo dotiamo della seguente topologia

$$\hat{\tau} = \tau \cup \left\{\hat{X} \setminus K : K \text{ compatto di } X\right\}$$

Proposizione 4.2. *Lo spazio topologico $(\hat{X}, \hat{\tau})$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di aperti di $\hat{X}$ tale che $\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A = \hat{X}$, esisterà allora $A' \in \mathcal{F}$ tale che $\infty \in A$. Quindi avremo un insieme chiuso e compatto K di X tale che $A' = \hat{X} \setminus K$ e quindi, denotando con $\mathcal{F}'$ la famiglia $\mathcal{F}$ senza A'

$$\hat{X} = (\hat{X} \setminus K) \cup \bigcup_{B\in\mathcal{F}'} B \Leftrightarrow K \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{F}'} (B \setminus \{\infty\})$$

Non è difficile dimostrare che $B \setminus \{\infty\}$ è sempre aperto in X, per la compattezza di K possiamo sempre estrarne un sottoricoprimento finito, concludendo così la dimostrazione. ■

Diciamo allora che $\hat{X}$ è la *compattificazione* di X. Una funzione $f \in C(X)$ ha *traccia nulla* se e solo se la funzione

$$g : x \in \hat{X} \to \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \\ 0 & \text{se } x = \infty \end{cases} \tag{4.3}$$

è *continua* su $\hat{X}$. Lo spazio di tutte le funzioni a traccia nulla lo indichiamo con il simbolo $C_0(X)$.

Proposizione 4.3.

$$f \in C_0(X) \Leftrightarrow f \in C(X) \text{ e } \forall\epsilon > 0\, \exists K \text{ chiuso e compatto di } X \text{ tale che } \forall x \notin K\ |f(x)| < \epsilon$$

Dimostrazione. Prendiamo $U = B_\epsilon(x) \subseteq \mathbb{R}$, se $x \neq 0$ possiamo scegliere ϵ abbastanza piccolo in modo tale che $0 \notin B_\epsilon(x)$. Allora dalla (4.3) segue immediatamente che $g^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ e quindi o sono entrambi aperti o nessuno dei due lo è. Se invece $x = 0$ allora $\infty \in g^{-1}(U)$ e quindi $g^{-1}(U)$ è aperto se e solo se esiste $K \subseteq X$ chiuso e compatto tale che $g^{-1}(U) = \hat{X} \setminus K$.

Quindi

$$\begin{aligned} g^{-1}(U) \text{ aperto } &\Leftrightarrow \exists K \subseteq X \text{ chiuso e compatto tale che } g^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cup \{\infty\} = \hat{X} \setminus K \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(U) = X \setminus K \Leftrightarrow f^{-1}(U) \text{ è aperto e inoltre } |f(x)| < \epsilon \text{ per ogni } x \notin K \end{aligned}$$

■

Prima di dimostrare il risultato fondamentale della sezione osserviamo che nel caso in cui X fosse già compatto allora ogni suo sottoinsieme chiuso è anch'esso compatto, quindi la topologia del suo compattificato $\hat{X}$ ha come aperti tutti gli aperti di X ai quali può essere aggiunto o meno il punto ∞ e non ve ne sono altri. Quindi la funzione è sempre continua e quindi $C_0(X) = C(X)$.

Teorema 4.4. *Se X è uno spazio topologico allora $C_c(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X)$ e inoltre $C_0(X)$ è chiuso rispetto alla norma definita in* (4.1).

Se X è uno spazio di Tychonoff (ovvero soddisfa la forma debole del lemma di Urysohn) allora $C_0(X)$ coincide con la chiusura di $C_c(X)$.

Dimostrazione. Dal teorema di Weierstrass e dalla proposizione 4.2 segue l'inclusione $C_0(X) \subseteq C_b(X)$. Se $f \in C_c(X)$ allora $f \in C(X)$ ed esiste K compatto tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \notin K$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ l'insieme $K_\epsilon = \{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}$ è chiuso in X e contenuto in K compatto, ma allora K_ϵ è chiuso e compatto in X e dalla proposizione 4.3 segue immediatamente che $f \in C_0(X)$.

Per dimostrare che $C_0(X)$ è un sottospazio chiuso basta osservare che è un sottospazio di Banach di $C_b(X)$. Considerando l'applicazione

$$f \in C_0(X) \to \hat{f} \in C(\hat{X}) = C_b(\hat{X})$$

che associa ad ogni f la sua estensione su $\hat{X}$ è ben definita, lineare ma soprattutto è una isometria. Presa una qualunque successione di Cauchy $f_n \in C_0(X)$ anche $\hat{f}_n \in C(\hat{X})$ è di Cauchy e quindi converge in norma ad un certo $F \in C(\hat{X})$.

Poiché

$$|F(\infty)| = \lim_{n\to+\infty} \left|F(\infty) - \hat{f}_n(\infty)\right| \leq \lim_{x\to+\infty} \left\|F - \hat{f}_n\right\| = 0$$

esisterà $f \in C_0(X)$ tale che $F = \hat{f}$ e quindi f_n convergerà ad f in norma.

Sia ora X uno spazio di Tychonoff e prendiamo $f \in C_0(X)$, definiamo allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $K_n = \{x \in X : |f(x)| \geq 1/n\} = \left\{x \in \hat{X} : \left|\hat{f}(x)\right| \geq 1/n\right\}$ dove $\hat{f}$ è l'estensione di f su $\hat{X}$. Innanzitutto $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$ e poiché K_n è chiuso e non contiene ∞ allora è compatto e chiuso. Dalla formulazione debole del lemma di Urysohn esiste una funzione continua $T_n : X \to [0,1]$ tale che $T_n(x) = 1$ per ogni $x \in K_n$ e $T_n(x) = 0$ se invece $x \notin \overset{\circ}{K}_{n+1}$.

La funzione T_n è continua a supporto compatto e perciò anche la funzione

$$f_n(x) = T_n(x)f(x) \in C_c(X)$$

è continua e a supporto compatto. Vogliamo dimostrare che f_n converge uniformemente ad f. Prendiamo allora $x \in X$ ed $n \in \mathbb{N}$, se $x \notin K_n$ allora $|f(x)| < 1/n$ altrimenti $T_n(x) = 1$. Quindi

$$\|f - T_n f\| \leq \frac{1}{n}$$

e quindi $f \in C_b(X)$ è una successione di elementi di $C_c(X)$ e quindi coincide con la sua chiusura. ■

Ogni spazio metrico S è anche uno spazio di Tychonoff, difatti per ogni $K \subseteq U \subseteq S$ con U aperto e K compatto non vuoto in S la funzione

$$T : x \in S \to \frac{d(x, S \setminus U)}{d(x, S \setminus U) + d(x, K)} \in [0,1]$$

possiamo dimostrare facilmente che T è ben definita e continua.

Esempio. Consideriamo ora $X = \Omega$ aperto limitato e non vuoto di $\mathbb{R}^n$, dimostriamo che $f \in C_0(\Omega)$ se e solo se per ogni $x \in \partial\Omega$

$$\lim_{y \to x} f(y) = 0$$

ovvero f si annulla sulla frontiera di Ω.

Tutte le funzioni a supporto compatto si annullano sulla frontiera di Ω quindi anche $f \in C_0(\Omega)$ si deve annullare sulla frontiera di Ω. Viceversa se f si annulla su $\partial\Omega$ allora può essere estesa a 0 su tutto $\mathbb{R}^n$ rimanendo continua. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $K_n = \{x : |f(x)| > 1/n\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^n$ e contenuto in Ω quindi è compatto, perciò $f \in C_0(\Omega)$.

Consideriamo adesso un qualunque spazio topologico X e $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme non vuoto e aperto. Possiamo dotare Y della topologia indotta da X su Y, che essendo Y aperto in X diventa

$$U \text{ è aperto in } Y \Leftrightarrow \exists U \subseteq Y \text{ e } U \text{ è aperto in } X$$

e quindi $C(Y)$ denota l'insieme di tutte le funzioni $f : Y \to \mathbb{R}$ continue in Y. In generale *non* è sempre possibile estendere una funzione $f \in C_b(Y)$ su tutto X in modo tale che risulti ancora continua, basta prendere $X = \mathbb{R}$ $Y = \mathbb{R}^+$ e

$$f : y \in Y \to \sin\frac{1}{y} \in [-1, 1]$$

che non ammette alcuna estensione continua in 0. Se invece $f \in C_0(Y)$ allora una tale estensione esiste sempre come vedremo nel seguente risultato

Proposizione 4.5 (Estensione)**.** *Sia X spazio topologico di Hausdorff e $Y \subseteq X$ sottoinsieme aperto non vuoto dotato della topologia indotta. Allora per ogni $f \in C_0(Y)$ la funzione*

$$g : x \in X \to \begin{cases} f(x) & se\ x \in Y \\ 0 & se\ x \notin Y \end{cases}$$

è continua su X, in particolare $g \in C_0(X)$.

Dimostrazione. Prendiamo un generico aperto U di $\mathbb{R}$ contenente l'origine, allora $V = f^{-1}(U)$ è un insieme aperto in X e $Y \setminus V$ è chiuso e compatto in Y. Ma allora $Y \setminus V$ è compatto anche in X e quindi chiuso, perciò

$$g^{-1}(U) = V \cup (X \setminus Y) = X \setminus (Y \setminus V)$$

è aperto e quindi $g \in C_0(X)$. ■

Se X non fosse di Hausdorff il risultato potrebbe non valere più, basta prendere la seguente topologia su $\mathbb{R}$

$$\tau = \{\mathbb{R}\} \cup \{A \subseteq]0, 1[\text{ aperto rispetto alla topologia usuale}\}$$

Le uniche funzioni continue su $\mathbb{R}$ sono le funzioni costanti mentre tutte le funzioni continue nel senso usuale su $]0, 1[$ continuano ad esserlo nella nuova topologia.

5 Uno spazio di Banach non debolmente completo

Indichiamo con $C[0,1]$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue dotato della seguente norma

$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

La convergenza rispetto a tale norma coincide con il concetto di convergenza uniforme, quindi si può dimostrare che $C[0,1]$ è uno spazio di Banach. Dimostriamo ora che non è debolmente completo.

Possiamo definire una successione f_n nel seguente modo

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Allora per ogni coppia di indici $m < n$ abbiamo

$$f_m(x) - f_n(x) = \begin{cases} (n-m)x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 - mx & \text{se } \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{m} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{m} < x \leq 1 \end{cases}$$

dimostriamo che f_n è debolmente di Cauchy. Innanzitutto dal teorema di rappresentazione di Riesz per ogni $F \in (C[0,1])^*$ esiste una misura borelliana finita μ sull'intervallo $[0,1]$ tale che

$$F(f) = \int_0^1 f(x)d\mu$$

Quindi per ogni misura μ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f_m(x) - f_n(x)]d\mu \leq 0 + \frac{n-m}{n}\mu\left(\left]0, \frac{1}{n}\right]\right) + \left(1 - \frac{m}{n}\right)\mu\left(\left]\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right]\right) \\ \leq \mu\left(\left]0, \frac{1}{m}\right]\right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Poiché μ è una misura finita abbiamo

$$\lim_{m\to+\infty} \mu\left(\left]0, \frac{1}{m}\right]\right) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty} \left]0, \frac{1}{m}\right]\right) = \mu(\emptyset) = 0$$

quindi per m abbastanza grande possiamo minorare la (5.1) con una quantità arbitrariamente piccola e quindi la serie è debolmente di Cauchy.

Ora per ogni $y \in [0,1]$ definiamo il funzionale

$$F_y(f) = f(y)$$

è banalmente lineare e continuo ($|f(y)| \leq \|f\|$) ma

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} F_0(f_n) = 1 \\ &\lim_{n\to+\infty} F_y(f_n) = 0 \text{ per ogni } y > 0 \end{aligned}$$

quindi f_n convergerebbe debolmente ad una funzione f che vale 1 in 0 e 0 altrove, ma tale funzione non è continua raggiungendo così un assurdo.

Da questo esempio possiamo dedurre che $C[0,1]$ non è uno spazio riflessivo.

6 Il teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki

Negli appunti è stato dimostrato il criterio di compattezza debole* all'interno di spazi normati separabili. La condizione di separabilità di X in realtà è superflua, benché permetta di ottenere una dimostrazione molto più semplice, e il teorema continua a valere anche per spazi normati generici. La dimostrazione del caso separabile, vista sugli appunti, è stata pubblicata da Banach nel 1932 mentre questa versione generale venne pubblicata nel 1940 da Leonidas Alaoglu.

Per dimostrare il teorema abbiamo bisogno di generalizzare il concetto di prodotto insiemistico nel caso di una famiglia infinita di insiemi. Prendiamo per esempio $\mathbb{R}^n$, i suoi vettori possono essere espressi nella forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elencandone le componenti x_i. Questo vettore lo possiamo vedere anche come una applicazione f che ad ogni indice i compreso tra 1 ed n associa un numero reale x_i chiamata i-esima componente di f.

Se allora poniamo $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ e per ogni coppia di insiemi non vuoti X e Y poniamo X^Y l'insieme di tutte le funzioni che vanno da Y ad X, allora possiamo osservare chiaramente che

$$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{I_n}$$

Usiamo tale idea per definire il prodotto di infiniti insiemi. Preso I un qualunque insieme non vuoto e $\{X_i\}_{i\in I}$ una generica famiglia di insiemi non vuoti, allora definiamo

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \text{ tale che } f(i) \in X_i \ \forall i \in I \right\}$$

e lo chiamiano *prodotto* della famiglia di insiemi $\{X_i\}_{i\in I}$. Se $X_i = X$ per ogni I allora $\prod_{i\in I} X_i = X^I$.

Se ora ogni insieme X_i è dotato di una topologia τ_i definiamo la *topologia prodotto* delle topologie τ_i la più piccola topologia τ su $\prod_{i\in I} X_i$ tale che per ogni $i \in I$ le *proiezioni i-esime*

$$P_i : f \in \prod_{j\in I} X_j \to f(i) \in X_i$$

siano tutte quante continue. La dimostrazione del teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki si basa interamente sul seguente teorema che non dimostreremo in questa sede

Teorema 6.1 (Tychonoff). *Se gli spazi topologici X_i sono compatti per ogni $i \in I$ allora anche $\prod_{i\in I} X_i$ è compatto.*

Diamo adesso la dimostrazione del

Teorema 6.2 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Sia X spazio normato e X^* il suo spazio duale. Allora l'insieme*

$$H = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$$

è compatto in X^* rispetto alla topologia debole.*

Dimostrazione. Possiamo dotare come visto sopra lo spazio $\mathbb{R}^X$ della topologia prodotto. Lo spazio $\mathbb{R}^X$ è composto interamente da funzioni da X in $\mathbb{R}$ e quindi $X^* \subseteq \mathbb{R}^X$, vogliamo dimostrare che l'inclusione $\phi : X^* \hookrightarrow \mathbb{R}^X$ è continua se X^* è dotato della topologia debole*.

Dalla definizione di topologia prodotto se F_n converge a F in $\mathbb{R}^X$ allora $P_x(F_n)$ converge a $P_x(F)$ per ogni $x \in X$, dimostriamo che vale anche il viceversa. Con un ragionamento analogo a quello fatto sugli spazi vettoriali topologici la famiglia di insiemi

$$\left\{ \bigcap_{x\in J} P_x^{-1}(U_x) : J \subseteq X \text{ finito } \wedge U_x \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto} \right\}$$

forma una base topologica di $\mathbb{R}^X$ e non è difficile mostrare che se $P_x(F_n)$ converge a $P_x(F)$ allora F_n converge a F.

Allora per ogni $f_n, f \in X^*$ abbiamo

$$f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x) \text{ per ogni } x \in X \Leftrightarrow P_x(f_n) \to P_x(f) \Leftrightarrow f_n \to f \text{ in } \mathbb{R}^X$$

quindi sia ϕ che ϕ^{-1} sono continue tra X^* e $\phi(X^*)$. Perciò se $\phi(X^*)$ è compatto allora anche X^* è compatto e la tesi è così dimostrata.

Ricordiamo che X^+ denota l'insieme di tutti i funzionali lineari su X in $\mathbb{R}$, dimostriamo che è chiuso in $\mathbb{R}^X$. Infatti per ogni $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ le applicazioni

$$\begin{aligned} A(f) &= f(x+y) - f(x) - f(y) = P_{x+y} - P_x - P_y \\ B(f) &= f(\lambda x) - \lambda f(x) = P_{\lambda x} - \lambda P_x \end{aligned}$$

sono continue e quindi l'insieme $X^+ = \bigcap A^{-1}(0) \cap \bigcap B^{-1}(0)$ è chiuso. Ora

$$\begin{aligned} f \in H \Leftrightarrow f \text{ lineare e } |f(x)| \leq \|x\| \ \ \forall x \in X \Leftrightarrow f(x) \in [-\|x\|, \|x\|] \text{ e lineare} \\ \Leftrightarrow f \in X^+ \cap \prod_{x \in X} [-\|x\|, \|x\|] \end{aligned}$$

Dal teorema di Tychonoff $\prod_{x \in X} [-\|x\|, \|x\|]$ è compatto e quindi anche la sua intersezione con X^+ lo è, quindi H è compatto anche in X^* rispetto alla topologia debole*. ■

7 Cenni alle equazioni differenziali ellittiche

In questa sezione applicheremo tutti i risultati ottenuti precedentemente per studiare una particolare classe di operatori differenziali chiamati *ellittici* sugli spazi L^p e in particolar modo su L^2.

Si richiede che il lettore sia già a conoscenza delle principali proprietà degli spazi L^p e $W^{k,p}$, in particolare si ricorda che per ogni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, +\infty]$ gli spazi $L^p(\Omega)$ e $W^{k,p}(\Omega)$ sono spazi di Banach mentre $L^2(\Omega)$ e $W^{k,2}(\Omega)$ sono spazi di Hilbert, mentre se $p \in]1, +\infty[$ allora $L^p(\Omega)$ è riflessivo con spazio duale

$$(L^p)^* = L^{\frac{p}{p-1}}$$

Fissiamo Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $A : \Omega \to M_n$ dove $M_n = \mathbb{R}^{n^2}$ è lo spazio delle matrici quadrate di ordine n, $b : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funzioni generiche. Fissiamo anche $u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 su Ω, vogliamo trovare tutte le funzioni $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 su Ω tali che

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A \cdot \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Definizione 7.1. L'applicazione $A : \Omega \to M_n$ è detta *uniformemente ellittica* se e solo se esiste una costante $m > 0$ tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \Omega$ vale la disuguaglianza

$$(A(x) \cdot \lambda) \cdot \lambda = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \lambda_j \lambda_i \geq m \|\lambda\|^2$$

dove $a_{i,j}$ è l'elemento di A in corrispondenza della i-esima riga e della j-esima colonna.

Un equazione differenziale nella forma precedente è detta *uniformemente ellittica* se lo è la matrice dei coefficienti A.

Osserviamo che sotto particolari condizioni sui coefficienti possiamo integrare ambo i coefficienti e utilizzare la formula di integrazione per parti e per ogni $v \in C_c^1(\Omega)$ l'espressione precedente diviene

$$\int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla v dx + \int_\Omega (b \cdot \nabla u) v dx + \int_\Omega cuv dx = \int_\Omega fv dx$$

che continua a valere anche se u possiede solamente le derivate prime continue.

Supponiamo adesso che $A, b, c \in L^\infty(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$, allora nella formula precedente possiamo indebolire le condizioni su u e v supponendo che appartengono rispettivamente a $W^{1,2}$ e $W_0^{1,2}$. Dobbiamo ora dare un significato all'espressione $u = u_0$ sul bordo di Ω in quanto esso possiede misura nulla e le funzioni di Sobolev sono definite quasi ovunque e quindi l'espressione così com'è perderebbe di significato.

Tornando al caso delle funzioni C^1 $u - u_0$ si annulla sul bordo di Ω quindi è approssimabile tramite funzioni $C_c^1(\Omega)$, perciò nel caso di funzioni di Sobolev questo equivale a dire che $u - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Definizione 7.2. Nelle stesse ipotesi definite precedentemente una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è *soluzione debole* dell'equazione differenziale ellittica se e solo se $u - u_0 \in W_0^{1,2}$ e per ogni $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ vale

$$\int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla v dx + \int_\Omega (b \cdot \nabla u) v dx + \int_\Omega cuv dx = \int_\Omega fv dx$$

È facile dimostrare che per ogni $u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ vale l'uguaglianza

$$\begin{aligned}\int_\Omega [A\nabla(u-u_0)] \cdot \nabla v dx + \int_\Omega [b \cdot \nabla(u-u_0) v dx + \int_\Omega c(u-u_0) v dx \\ = \int_\Omega fv dx - \int_\Omega (A\nabla u_0) \cdot \nabla v dx - \int_\Omega (b \cdot \nabla u_0) v dx - \int_\Omega cu_0 v dx\end{aligned}$$

posto allora per ogni $v, w \in W_0^{1,2}$

$$B[v,w] = \int_\Omega [A\nabla v] \cdot \nabla w dx + \int_\Omega (b \cdot \nabla v) w dx + \int_\Omega cvw dx$$
$$\tilde{f}(v) = \int_\Omega fv dx - \int_\Omega (A\nabla u_0) \cdot \nabla v dx - \int_\Omega (b \cdot \nabla u_0) v dx - \int_\Omega cu_0 v dx$$

possiamo riscrivere l'equazione differenziale nella forma più compatta

$$B[u - u_0, v] = \tilde{f}(v) \text{ per ogni } v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Le applicazioni $u \to B[v,u]$ e $u \to \tilde{f}(u)$ sono lineari e continue per la limitatezza essenziale dei coefficienti, quindi $\tilde{f}$ appartiene al duale di $W_0^{1,2}$ e possiamo anche costruire un operatore lineare L che ad ogni $u \in W_0^{1,2}$ associa il funzionale lineare $(Lu)(v) = B[u,v]$.

D'ora in poi useremo $u \in W_0^{1,2}$ al posto di $u - u_0$, in quanto alla soluzione così ottenuta aggiungendo u_0 otteniamo la soluzione dell'equazione originaria.

Teorema 7.3 (Stime energetiche)**.** *Se B è una forma uniformemente ellittica (ovvero A è uniformemente ellittica) allora esistono delle costanti $\alpha, \beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tali che*

$$\gamma = \frac{\|b\|_\infty^2}{2m} + \left|c^-\right|_\infty$$
$$|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{W_0^{1,2}} \|v\|_{W_0^{1,2}}$$
$$\beta \|u\|_{W_0^{1,2}}^2 \leq B[u,u] + \gamma \|u\|_2^2$$

Teorema 7.4 (Primo teorema di esistenza)**.** *Nelle stesse ipotesi dei ragionamenti precedenti per ogni $\mu \geq \gamma$ l'equazione*

$$Lu + \mu\tilde{u} = \tilde{f}$$

possiede per ogni $f \in L^2$ come unica soluzione $Tf \in W_0^{1,2}$ con T ottenuto a partire da $B_\mu[u,v]$.

Proposizione 7.5. *Se per quasi ogni $x \in \Omega$ vale la disuguaglianza*

$$c(x) \geq \frac{\|b\|_\infty^2}{2m}$$

allora l'equazione $Lu = \tilde{f}$ ammette un unica soluzione.

Dimostrazione. Poniamo $d(x) = c(x) - \frac{\|b\|_\infty^2}{2m}$ e

$$C[f,g] = \int_\Omega (A\nabla f) \cdot \nabla g dx + \int_\Omega (b \cdot \nabla f) g dx + \int_\Omega d f g dx$$

allora $C_\gamma[u,v] = B[u,v]$ e la tesi è così dimostrata. ■

Come conseguenza di questo teorema la forma bilineare

$$B_\gamma[u,v] = B[u,v] + \gamma \int_\Omega uv dx$$

è continua e coerciva. Da Lax-Milgram esisterà un'applicazione $C : L^2 \to W_0^{1,2}$ tale che

$$\tilde{f}(u) = B_\gamma[Cf, u]$$

Per ogni $f \in L^2$ e $v \in W_0^{1,2}$ sia

$$\hat{f}(v) = \int_\Omega f v dx = \tilde{f} - \tilde{0}$$

e quindi $\hat{f}(u) = B_\gamma[Cf,u] - B_\gamma[C0,u] = B_\gamma[Tf,u]$ dove $Tf = Cf - C0$.

È immediato constatare la linearità di T, dimostriamone allora la continuità:

$$\beta \|Tf\|_{W^{1,2}}^2 \leq B_\gamma[Tf, Tf] = \left| \int_\Omega f T f dx \right| \leq \|f\|_2 \|Tf\|_{W^{1,2}}$$

Ora dal teorema di compattezza se estendiamo il codominio di T a tutto L^2 la nuova applicazione non solo è continua ma è addirittura un operatore compatto. Ricordiamo che dalla coercività di B_γ segue che $B_\gamma[u,u] = 0 \Leftrightarrow u = 0$ e quindi

$$\begin{aligned} Lu = \tilde{f} \Leftrightarrow B_\gamma[u,v] = \tilde{f}(v) + \gamma\hat{u}(v) = B_\gamma[Cf + \gamma T u, v] \\ \Leftrightarrow u = Cf + \gamma T u \Leftrightarrow (I - \gamma T)(u) = Cf \end{aligned}$$

e $I - \gamma T$ è un operatore di Riesz. Dal teorema dell'alternativa $I - \gamma T$ è suriettivo se e solo se iniettivo (e quindi la soluzione esiste ed è unica) e quindi l'equazione

$$Lu = 0$$

ha solo e soltanto la soluzione identicamente nulla. Abbiamo così dimostrato il seguente teorema

Teorema 7.6 (Secondo teorema di esistenza)**.** *Sia $f \in L^2$, allora $Lu = \tilde{f}$ ha un'unica soluzione se e solo se $Lu = 0$ ha come soluzione solamente la funzione nulla.*

Le soluzioni dell'equazione $Lu = 0$ formano sempre uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal teorema dell'alternativa di Fredholm. ■

Teorema 7.7 (Terzo teorema di esistenza)**.** *Definiamo Σ come insieme di tutti i $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che l'equazione $Lu = \lambda\hat{u}$ ha una soluzione non nulla. Fissato $f \in L^2$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e l'equazione*

$$Lu = \lambda\hat{u} + \tilde{f}$$

Sono allora verificate le seguenti asserzioni:

1. *L'equazione ha un'unica soluzione se e solo se $\lambda \notin \Sigma$;*

2. *Σ è finito o coincide con una successione crescente tendente a $+\infty$.*

Dimostrazione. Da primo teorema di esistenza segue che $\Sigma \subseteq]-\gamma, +\infty[$ e dal secondo teorema di esistenza segue immediatamente la prima asserzione, mentre dalla proposizione 5.5.6 segue che $Lu = \lambda\hat{u} + \tilde{f}$ ha un'unica soluzione se e solo se $\left(\frac{1}{\lambda+\gamma} I - T\right)$ è biiettivo ovvero iniettivo e quindi se $\frac{1}{\lambda+\gamma}$ non si trova nello spettro puntuale di T. Quindi se non è finito $\frac{1}{\lambda_n+\gamma}$ deve necessariamente tendere a 0 e la dimostrazione è così conclusa. ■