Вариант 10

$$A = \begin{pmatrix} 0.20 & 1.60 & -0.11 \\ 0.20 & -0.10 & 0.90 \\ -0.50 & -0.20 & -0.31 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1.98 \\ 2.30 \\ -2.32 \end{pmatrix}$$

Точным решением системы является вектор $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

При решении системы методом Гаусса (1) было получено решение

$$x' = \begin{pmatrix} 2.9999999999999982 \\ 1.0 \\ 2.0000000000000004 \end{pmatrix}$$

При решении системы методом Гаусса с выбором главного элемента по матрице (2) получено решение

$$x'' = \begin{pmatrix} 3.0000000000000004 \\ 0.9999999999999998 \\ 1.9999999999999991 \end{pmatrix}$$

Оценим погрешность для найденных решений по $\|\cdot\|_2$:

$$\|x - x'\|_2 = 1.831026719408895 * 10^{-15}$$

$$\|x - x''\|_2 = 1.0175362097255202 * 10^{-15}$$

Решения x' и x'' очень близки к точному решению x.

Погрешность у метода (2) чуть меньше, чем у метода (1).

Ссылка на GitHub: https://github.com/LobachevDanil/numerical_lab3.git

Проверим критерий сходимости для метода Якоби для данной системы:

Проверим критерий сходимости метода Якоби

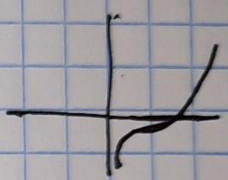
$A = L + D + R.$

$P = \det(L + \lambda D + R) = 0.$

$$P = 10^{-3} \begin{vmatrix} 2\lambda & 16 & -1{,}1 \\ 2 & -\lambda & 9 \\ -5 & -2 & -3{,}1\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$= P_2$

$P_2 = 2\lambda(3{,}1\lambda^2 + 18) - 16(-6{,}2\lambda + 45) - 1{,}1(-4 - 5\lambda) =$



$= 6{,}2\lambda^3 + 140{,}7\lambda - 715{,}6 = 0.$

P_2 − непр; ~~коэфф при старшей степени >0,~~

~~зн $\exists x_0 > 0: P_2(x_0) > 0$~~

$P_2(1) = 6{,}2 + 140{,}7 - 715{,}6 = -568{,}7 < 0$

$P_2(10) = 62 \cdot 100 + 1407 - 715{,}6 > 0$

зн $\exists x_0 \in (1, 10) : P_2(x_0) = 0$

зн. модуль какого-то собственного числа больше 1, т.е. метод Якоби расходится.

Проверим критерий сходимости для метода Гаусса-Зейделя для данной системы:

Проверим критерий сходимости метода Гаусса-Зейделя.

$$A = L + D + R.$$

$$P = \det(\lambda L + \lambda D + R) = 0.$$

$$P = 10^{-3} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2\lambda & 16 & -1,1 \\ 2\lambda & -\lambda & 9 \\ -5\lambda & -2\lambda & -3,1\lambda \end{vmatrix}}_{=P_2} = 0$$

$$P_2 = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda & 16 & -1,1 \\ 2\lambda & -\lambda & 9 \\ -5 & -2 & -3,1 \end{vmatrix} = \lambda \cdot [2\lambda \cdot (3,1\lambda + 18) -$$

$$- 16 \cdot (-6,2\lambda + 45) - 1,1 \cdot (-4\lambda - 5\lambda)] =$$

$$= \lambda \cdot (6,2\lambda^2 + 145,1\lambda - 720) = 0.$$

$\lambda_1 = 0 \qquad f(\lambda) = 6,2\lambda^2 + 145,1\lambda - 720 = 0.$

у параболы f ветви вверх, зн $\exists x_0 : f(x_0) > 0$

заметим, что $f(0) = -720 < 0$

зн у $f(x) = 0$ есть хотя бы один корень и $D \geq 0$ дискрим.

тогда $\lambda_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} \leq \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-145,1}{2 \cdot 6,2} \approx -11,702$

зн $\lambda_2 \leq -10 \Rightarrow |\lambda_2| > 1$, зн метод Гаусса-Зейделя расходится.