

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова»
Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики

**Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием
неявной разностной схемы с центральными разностями ($\ln \rho, u$)**

Работу выполнила:
Лобанова Валерия, 410 группа

Преподаватель:
кандидат физико-математических наук,
доцент А. В. Попов

Москва, 2021

Содержание

1 Введение	2
1.1 Постановка задачи	2
1.2 Преобразования	2
1.3 Основные обозначения	3
2 Описание схемы	3
2.1 Схема	3
2.2 Координатная запись уравнений	3
2.3 Программная реализация	5
3 Отладочный тест	6
3.1 Постановка задачи	6
3.2 Численные эксперименты	6
3.3 Вывод	21
4 Тест с негладкими начальными данными	21
4.1 Постановка задачи	21
4.2 Численные эксперименты для первой задачи	22
4.3 Численные эксперименты для второй задачи	41
4.4 Вывод	61
5 Задача о стабилизации осциллирующей функции	61
5.1 Постановка задачи	61
5.2 Численные эксперименты	62
5.3 Вывод	63
6 Задача протекания	64
6.1 Постановка задачи	64
6.2 Разностная схема	64
6.3 Численные эксперименты	65
6.4 Вывод	72

1 Введение

1.1 Постановка задачи

В работе будет рассматриваться разностная схема с центральными разностями $(\ln \rho, u)$ для решения начально-краевых задач для системы уравнений, описывающей нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f \\ p = p(\rho) \end{cases} \quad (1)$$

В данной схеме известными считаются:

- μ – коэффициент вязкости газа, который считаем известной положительной константой.
- p – функция давления газа. Будем использовать две возможные зависимости:
 $p(\rho) = C\rho$, где C – неотрицательная константа или
 $p(\rho) = \rho^\gamma$, где $\gamma = 1.4$.
- f – вектор внешних сил, являющийся функцией переменных Эйлера $(t, x) \in Q = [0, T] \times [0, X]$.

Неизвестными же считаются функции переменных Эйлера:

- ρ – функция плотности;
- u – функция скорости.

Дополним систему (1) начальными и граничными условиями. В начальный момент времени задаются функции, значениями которых являются плотность и скорость газа в точках отрезка $[0, X]$, а граничными условиями являются условия непротекания.

$$\begin{cases} (\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), x \in [0, X] \\ u(t, 0) = u(t, X) = 0, t \in [0, T] \end{cases} \quad (2)$$

1.2 Преобразования

Преобразуем систему (1) следующим образом. Раскроем конвективное слагаемое, используя формулу дифференцирования произведения функций, поделим получившееся выражение на ρ , обозначим $g = \ln \rho$ и получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial ug}{\partial x} + (2 - g) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

Аналогичное проделаем со вторым уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) + \tilde{p}'(e^g) \frac{\partial g}{\partial x} = \mu e^{-g} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

где $\tilde{p}'(x) = \frac{\partial p}{\partial \rho}(x)$

В итоге система (1) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial ug}{\partial x} + (2 - g) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) + \tilde{p}'(e^g) \frac{\partial g}{\partial x} = \mu e^{-g} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \\ \tilde{p}'(x) = \frac{\partial p}{\partial \rho}(x) \\ g = \ln \rho \\ p = p(\rho) \end{cases} \quad (3)$$

1.3 Основные обозначения

Рассмотрим временной интервал $\Omega_t = [0, T]$ и пространственную область в виде отрезка $\Omega_x = [0, X]$, введем на них равномерные сетки с шагом τ и h соответственно:

$$\bar{w}_\tau = \{n\tau \mid n = 0, \dots, N\}, \text{ где } N\tau = T$$

$$\bar{w}_h = \{mh \mid m = 0, \dots, M\}, \text{ где } Mh = X$$

В области $Q := \Omega_t \times \Omega_x$ вводится сетка $\bar{Q}_{\tau h} := \bar{w}_\tau \times \bar{w}_h$.

Значение функции g в узле (m, n) будем обозначать через g_m^n . Для сокращения записей будем также использовать следующие обозначения:

$$g_m^{n+1} = \hat{g}, \quad g_{m\pm 1}^n = g^{\pm 1}$$

Обозначения для среднего значения величин сеточной функции в двух соседних узлах:

$$g_s = \frac{g_{m+1}^n + g_m^n}{2}, \quad g_{\bar{s}} = \frac{g_m^n + g_{m-1}^n}{2}$$

Для разностных операторов применяются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} g_t &= \frac{g_m^{n+1} - g_m^n}{\tau}, & g_x &= \frac{g_{m+1}^n - g_m^n}{h} \\ g_{\dot{x}} &= \frac{g_{m+1}^n - g_{m-1}^n}{2h}, & g_{\bar{x}} &= \frac{g_m^n - g_{m-1}^n}{h} \\ g_{x\bar{x}} &= (g_x)_{\bar{x}} = \frac{g_{m-1}^n - 2g_m^n + g_{m+1}^n}{h^2} \end{aligned}$$

2 Описание схемы

2.1 Схема

Обозначим за G и V приближенные значения функций $\ln \rho$ и u соответственно. Для поиска численного решения задачи (3) с начальными условиями (2) можно использовать разностную схему, в которой для приближения конвективных членов используются центральные разности. Функции G и V на верхнем слое ищутся путем решения системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_t + 0.5[V\hat{G}_{\dot{x}} + (V\hat{G})_{\dot{x}} + 2\hat{V}_{\dot{x}} - GV_{\dot{x}}] = f_0 \\ G_{t,0} + 0.5[(V\hat{G})_{x,0} + 2\hat{V}_{x,0} - G_0 V_{x,0}] - \\ - 0.5h[(GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2 - G_0)(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})] = (f_0)_0 \\ G_{t,M} + 0.5[(V\hat{G})_{\bar{x},M} + 2\hat{V}_{\bar{x},M} - G_M V_{\bar{x},M}] + \\ + 0.5h[(GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2 - G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})] = (f_0)_M \\ V_t + \frac{1}{3}[V\hat{V}_{\dot{x}} + (V\hat{V})_{\dot{x}}] + \tilde{p}'(e^G)\hat{G}_{\dot{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f \end{array} \right. \quad (4)$$

где $f_0 \equiv 0$, $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$ и $\tilde{p}'(x) = \frac{\partial p}{\partial \rho}(x)$

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку \bar{w}_h функций $\ln(\rho_0)$ и u_0 :

$$G_m^0 = \ln((\rho_0)_m), \quad V_m^0 = (u_0)_m, \quad m = 0, \dots, M$$

Границные значения функции скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n = 1, \dots, N \quad (5)$$

2.2 Координатная запись уравнений

Пользуясь обозначениями, приведенными в разделе 1.3, перепишем уравнения из (4) в координатном виде.

2.2.1 Первое уравнение

$m = 1, \dots, M - 1$

$$G_t + 0.5[V\hat{G}_{\dot{x}} + (V\hat{G})_{\ddot{x}} + 2\hat{V}_{\dot{x}} - GV_{\ddot{x}}] = (f_0)_m^n$$

$$\begin{aligned} \frac{G_m^{n+1} - G_m^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left[V_m^n \frac{G_{m+1}^{n+1} - G_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{V_{m+1}^n G_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^n G_{m-1}^{n+1}}{2h} + \right. \\ \left. + 2 \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h} - G_m^n \frac{V_{m+1}^n - V_{m-1}^n}{2h} \right] = (f_0)_m^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{m-1}^{n+1} \left(-\frac{V_m^n + V_{m-1}^n}{4h} \right) + G_m^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} \right) + G_{m+1}^{n+1} \left(\frac{V_m^n + V_{m+1}^n}{4h} \right) + \\ + V_{m-1}^{n+1} \left(-\frac{1}{2h} \right) + V_{m+1}^{n+1} \left(\frac{1}{2h} \right) = (f_0)_m^n + G_m^n \left(\frac{1}{\tau} + \frac{V_{m+1}^n - V_{m-1}^n}{4h} \right) \end{aligned}$$

2.2.2 Второе уравнение

$m = 0$

$$\begin{aligned} G_{t,0} + 0.5[(V\hat{G})_{x,0} + 2\hat{V}_{x,0} - G_0 V_{x,0}] - \\ - 0.5h[(GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2 - G_0)(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})] = (f_0)_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{t,0} + 0.5[(V\hat{G})_{x,0} + 2\hat{V}_{x,0} - G_0 V_{x,0}] - \\ - 0.5h[(GV)_{x\bar{x},1} + (2 - G_0)V_{x\bar{x},1}] + 0.25h[(GV)_{x\bar{x},2} + (2 - G_0)V_{x\bar{x},2}] = (f_0)_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{G_0^{n+1} - G_0^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left[\frac{V_1^n G_1^{n+1} - V_0^n G_0^{n+1}}{h} + 2 \frac{V_1^{n+1} - V_0^{n+1}}{h} - G_0^n \frac{V_1^n - V_0^n}{h} \right] - \\ - \frac{h}{2} \left[\frac{G_0^n V_0^n - 2G_1^n V_1^n + G_2^n V_2^n}{h^2} + (2 - G_0^n) \frac{V_0^n - 2V_1^n + V_2^n}{h^2} \right] + \\ + \frac{h}{4} \left[\frac{G_1^n V_1^n - 2G_2^n V_2^n + G_3^n V_3^n}{h^2} + (2 - G_0^n) \frac{V_1^n - 2V_2^n + V_3^n}{h^2} \right] = (f_0)_0^n \end{aligned}$$

$$\frac{G_0^{n+1} - G_0^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left[\frac{V_1^n G_1^{n+1} - V_0^n G_0^{n+1}}{h} + 2 \frac{V_1^{n+1} - V_0^{n+1}}{h} \right] + \hat{A}_0^n = (f_0)_0^n$$

$$G_0^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{V_0^n}{2h} \right) + G_1^{n+1} \left(\frac{V_1^n}{2h} \right) + V_0^{n+1} \left(-\frac{1}{h} \right) + V_1^{n+1} \left(\frac{1}{h} \right) = A_0^n$$

$$\begin{aligned} A_0^n = (f_0)_0^n + \frac{G_0^n}{\tau} - \hat{A}_0^n = (f_0)_0^n + G_0^n \left(\frac{1}{\tau} + \frac{V_1^n - V_0^n}{2h} \right) + \\ + \frac{1}{2h} [G_0^n V_0^n - 2G_1^n V_1^n + G_2^n V_2^n + (2 - G_0^n)(V_0^n - 2V_1^n + V_2^n)] - \\ - \frac{1}{4h} [G_1^n V_1^n - 2G_2^n V_2^n + G_3^n V_3^n + (2 - G_0^n)(V_1^n - 2V_2^n + V_3^n)] \end{aligned}$$

2.2.3 Третье уравнение

$m = M$

$$\begin{aligned} G_{t,M} + 0.5[(V\hat{G})_{\bar{x},M} + 2\hat{V}_{\bar{x},M} - G_0 V_{\bar{x},M}] + \\ + 0.5h[(GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2 - G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})] = (f_0)_M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{t,M} + 0.5[(V\hat{G})_{\bar{x},M} + 2\hat{V}_{\bar{x},M} - G_0 V_{\bar{x},M}] + \\ + 0.5h[(GV)_{x\bar{x},M-1} + (2 - G_M)V_{x\bar{x},M-1}] - 0.25h[(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2 - G_M)V_{x\bar{x},M-2}] = (f_0)_M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{G_M^{n+1} - G_M^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left[\frac{V_M^n G_M^{n+1} - V_{M-1}^n G_{M-1}^{n+1}}{h} + 2 \frac{V_M^{n+1} - V_{M-1}^{n+1}}{h} - G_M^n \frac{V_M^n - V_{M-1}^n}{h} \right] + \\
& + \frac{h}{2} \left[\frac{G_{M-2}^n V_{M-2}^n - 2G_{M-1}^n V_{M-1}^n + G_M^n V_M^n}{h^2} + (2 - G_M^n) \frac{V_{M-2}^n - 2V_{M-1}^n + V_M^n}{h^2} \right] - \\
& - \frac{h}{4} \left[\frac{G_{M-3}^n V_{M-3}^n - 2G_{M-2}^n V_{M-2}^n + G_{M-1}^n V_{M-1}^n}{h^2} + (2 - G_M^n) \frac{V_{M-3}^n - 2V_{M-2}^n + V_{M-1}^n}{h^2} \right] = (f_0)_M^n \\
& \frac{G_M^{n+1} - G_M^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left[\frac{V_M^n G_M^{n+1} - V_{M-1}^n G_{M-1}^{n+1}}{h} + 2 \frac{V_M^{n+1} - V_{M-1}^{n+1}}{h} \right] + \hat{A}_M^n = (f_0)_M^n \\
& G_{M-1}^{n+1} \left(-\frac{V_{M-1}^n}{2h} \right) + G_M^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{V_M^n}{2h} \right) + V_{M-1}^{n+1} \left(-\frac{1}{h} \right) + V_M^{n+1} \left(\frac{1}{h} \right) = A_M^n \\
& A_M^n = (f_0)_M^n + \frac{G_M^n}{\tau} - \hat{A}_M^n = (f_0)_M^n + G_M^n \left(\frac{1}{\tau} + \frac{V_M^n - V_{M-1}^n}{2h} \right) - \\
& - \frac{1}{2h} [G_{M-2}^n V_{M-2}^n - 2G_{M-1}^n V_{M-1}^n + G_M^n V_M^n + (2 - G_M^n)(V_{M-2}^n - 2V_{M-1}^n + V_M^n)] + \\
& + \frac{1}{4h} [G_{M-3}^n V_{M-3}^n - 2G_{M-2}^n V_{M-2}^n + G_{M-1}^n V_{M-1}^n + (2 - G_M^n)(V_{M-3}^n - 2V_{M-2}^n + V_{M-1}^n)]
\end{aligned}$$

Четвёртое уравнение

$m = 1, \dots, M-1$

$$V_t + \frac{1}{3} [V \hat{V}_{\dot{x}} + (V \hat{V})_{\ddot{x}}] + \tilde{p}'(e^G) \hat{G}_{\dot{x}} = \tilde{\mu} \hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) V_{x\bar{x}} + f$$

$$\begin{aligned}
& \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} + \frac{1}{3} \left[V_m^n \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{V_{m+1}^n V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^n V_{m-1}^{n+1}}{2h} \right] + \\
& + \tilde{p}'(\exp(G_m^n)) \frac{G_{m+1}^{n+1} - G_{m-1}^{n+1}}{2h} = \tilde{\mu} \frac{V_{m-1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m+1}^{n+1}}{h^2} - \\
& - (\tilde{\mu} - \mu \exp(-G_m^n)) \frac{V_{m-1}^n - 2V_m^n + V_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& G_{m-1}^{n+1} \left(-\frac{\tilde{p}'(\exp(G_m^n))}{2h} \right) + G_{m+1}^{n+1} \left(\frac{\tilde{p}'(\exp(G_m^n))}{2h} \right) + V_m^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\tilde{\mu}}{h^2} \right) + \\
& + V_{m+1}^{n+1} \left(\frac{V_m^n}{6h} + \frac{V_{m+1}^n}{6h} - \frac{\tilde{\mu}}{h^2} \right) + V_{m-1}^{n+1} \left(-\frac{V_m^n}{6h} - \frac{V_{m-1}^n}{6h} - \frac{\tilde{\mu}}{h^2} \right) = \\
& = \frac{V_m^n}{\tau} - (\tilde{\mu} - \mu \exp(-G_m^n)) \frac{V_{m-1}^n - 2V_m^n + V_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n
\end{aligned}$$

2.3 Программная реализация

Разностная схема составлена таким образом, что система (4) с начальными и граничными условиями является линейной относительно переменных G_m^{n+1} и V_m^{n+1} , $m = 0, 1, \dots, M$.

В системе $2M$ уравнений, они упорядочены следующим образом:

- для $k = 2m$, $m = 0, 1, \dots, M$ записаны уравнения для G_m^{n+1} - 1-3 уравнения из схемы (4);
- для $k = 2m + 1$, $m = 0, 1, \dots, M$ записаны уравнения для V_m^{n+1} - четвертое уравнение из схемы (4) и граничные значения (5).

Из координатного вида уравнений видно, что матрица у системы является разреженной - в каждой строке не более 5 ненулевых элементов, поэтому для решения системы использовался стабилизованный метод бисопряжённых градиентов (англ. bi-conjugate gradient stabilized method, BiCGStab) с использованием ILUT (Incomplete LU with Threshold) предобусловливателя. Реализация метода была взята из библиотеки Eigen (см. [2]), все параметры, кроме предобусловливателя, по умолчанию.

3 Отладочный тест

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим область $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ и зададим функции ρ и u :

$$\tilde{\rho}(t, x) = e^t(\cos(3\pi x) + 1.5) \quad \tilde{u}(t, x) = \cos(2\pi t) \sin(4\pi x) \quad (6)$$

Определим функции f_0 (отличную от нуля правую часть уравнения неразрывности) и f так, чтобы функции $\tilde{\rho}$ и \tilde{u} удовлетворяли системе (3) с правой частью, составленной из этих функций, а именно:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = f_0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{p}'(e^g) \frac{\partial g}{\partial x} = \mu e^{-g} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + f \\ \tilde{p}'(x) = \frac{\partial p}{\partial \rho}(x) \\ p = p(\tilde{\rho}) \end{cases}$$

Выпишем отдельно все частные производные, необходимые для подсчета функций f и f_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} &= e^t(\cos(3\pi x) + 1.5) = \tilde{\rho} & \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} &= -3\pi e^t \sin(3\pi x) \\ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} &= \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = 1 & \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} &= \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial x} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= -2\pi \sin(2\pi t) \sin(4\pi x) & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= 4\pi \cos(2\pi t) \cos(4\pi x) \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} &= -16\pi^2 \cos(2\pi t) \sin(4\pi x) \end{aligned}$$

Выписывать явный вид для функций f и f_0 не имеет смысла, так они являются комбинациями описанных выше функций и производных и намного проще реализовать отдельные части этих комбинаций. Таким образом, функции (6) являются гладким точным решением дифференциальной задачи (1) с начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(0, x) &= \cos(3\pi x) + 1.5, x \in [0, 1] \\ \tilde{u}(0, x) &= \sin(4\pi x), x \in [0, 1] \\ \tilde{u}(t, 0) &= u(t, 1) = 0, t \in [0, 1] \end{aligned}$$

3.2 Численные эксперименты

Будем рассматривать зависимости

$$p(\rho) = C\rho, C \in \{1, 10, 100\}; \quad p(\rho) = \rho^\gamma, \gamma = 1.4$$

Ниже приведены результаты численных экспериментов, а именно таблицы с ошибками (нормами разности между разностным решением и точным решением дифференциальной задачи на последнем временном слое; нормы C, L_2, W_2^1) для различных пар параметра $\mu \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$ и зависимости $p(\rho)$.

Для каждой такой пары также варьируются шаги сетки τ и h :

$$(\tau, h) \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}^2$$

3.2.1 Ошибки для G

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	1.181652e+01	1.443212e+00	1.443281e+00	1.443604e+00
	4.893319e+00	8.042684e-01	8.003429e-01	8.002513e-01
	3.968220e+01	7.933857e+00	7.912020e+00	7.926450e+00
10^{-2}	6.248864e+01	1.766651e-01	1.708897e-01	1.708306e-01
	1.900438e+01	9.811932e-02	9.445940e-02	9.442351e-02
	1.708589e+02	7.879295e-01	7.587913e-01	7.584994e-01
10^{-3}	7.120057e+00	2.252087e-02	1.756171e-02	1.751225e-02
	1.926111e+00	1.232548e-02	9.001833e-03	8.971483e-03
	2.143837e+01	1.042810e-01	8.186950e-02	8.180130e-02
10^{-4}	2.155197e+00	6.803025e-03	1.804239e-03	1.755320e-03
	1.278056e+00	4.675248e-03	9.227605e-04	8.926073e-04
	1.193935e+01	3.956212e-02	8.415822e-03	8.227393e-03

Таблица 1: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	3.222515e+00	1.462851e-01	1.440101e-01	1.439917e-01
	1.120161e+00	6.801977e-02	6.715263e-02	6.714411e-02
	1.339440e+01	8.824962e-01	9.035803e-01	9.042429e-01
10^{-2}	5.048784e+01	2.294542e-02	2.236461e-02	2.235894e-02
	1.562821e+01	1.154502e-02	1.111025e-02	1.110629e-02
	9.405579e+01	1.030876e-01	9.997687e-02	1.001472e-01
10^{-3}	9.549526e+02	3.727700e-03	2.617173e-03	2.610631e-03
	4.195816e+02	1.869996e-03	1.296306e-03	1.292612e-03
	1.360581e+03	2.412181e-02	1.041279e-02	1.037825e-02
10^{-4}	8.625099e+02	3.212226e-03	2.719209e-04	2.652392e-04
	4.645395e+02	9.819210e-04	1.352273e-04	1.313576e-04
	1.326580e+03	1.802712e-02	1.133119e-03	1.042953e-03

Таблица 2: Ошибки для схемы 1 при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	4.851430e+04	1.183144e-01	1.022894e-02	1.020089e-02
	2.208050e+04	1.769615e-02	6.105316e-03	6.099189e-03
	3.103531e+05	1.126021e+00	6.339364e-02	6.348438e-02
10^{-2}	2.537852e+03	4.145018e-03	2.241746e-03	2.239338e-03
	1.606647e+03	1.611664e-03	1.183370e-03	1.183675e-03
	1.895135e+04	2.015021e-02	4.378571e-03	4.334379e-03
10^{-3}	1.434099e+02	3.399383e-03	2.303365e-04	2.279940e-04
	1.111249e+02	1.130865e-03	1.205005e-04	1.208826e-04
	2.821377e+02	1.889347e-02	4.640649e-04	4.105267e-04
10^{-4}	1.704815e+04	3.402526e-03	4.171373e-05	2.199472e-05
	1.281007e+04	1.142852e-03	1.560524e-05	1.165764e-05
	3.882601e+04	1.900494e-02	1.948088e-04	3.916520e-05

Таблица 3: Ошибки для схемы 1 при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	9.118165e+00	1.153563e+00	1.162321e+00	1.162278e+00
	3.344701e+00	6.000072e-01	5.989285e-01	5.990541e-01
	3.390989e+01	6.012765e+00	5.659256e+00	5.685288e+00
10^{-2}	8.146566e+00	9.039186e-02	8.840905e-02	8.838949e-02
	5.449893e+00	5.340469e-02	5.216930e-02	5.215748e-02
	3.567165e+01	4.388565e-01	4.531820e-01	4.561369e-01
10^{-3}	3.864207e+00	1.062531e-02	8.764154e-03	8.747440e-03
	1.116353e+00	6.322317e-03	4.838855e-03	4.828481e-03
	1.053306e+01	4.526193e-02	4.443798e-02	4.485572e-02
10^{-4}	4.602507e+00	7.991192e-03	8.912093e-04	8.744621e-04
	1.249849e+00	2.789505e-03	4.899526e-04	4.791004e-04
	1.250676e+01	2.929977e-02	4.359942e-03	4.469110e-03

Таблица 4: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.1$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	4.564166e+00	9.494955e-01	9.486571e-01	9.486554e-01
	1.573963e+00	5.196175e-01	5.187592e-01	5.187529e-01
	1.560271e+01	5.156837e+00	5.054622e+00	5.063952e+00
10^{-2}	4.794683e+01	1.792192e-01	1.776189e-01	1.776132e-01
	1.094421e+01	8.201671e-02	8.096468e-02	8.095492e-02
	1.408516e+02	1.382530e+00	1.425657e+00	1.431199e+00
10^{-3}	1.167069e+04	2.340101e-02	2.252434e-02	2.251531e-02
	5.143610e+03	1.035069e-02	8.646357e-03	8.636329e-03
	1.591441e+04	1.650773e-01	1.838053e-01	1.841455e-01
10^{-4}	3.367458e+04	5.953102e-03	2.323615e-03	2.314594e-03
	1.547585e+04	4.247154e-03	8.816500e-04	8.710264e-04
	5.749273e+04	4.241223e-02	1.887922e-02	1.910149e-02

Таблица 5: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	2.949404e+01	1.407143e-01	1.364428e-01	1.364126e-01
	1.364401e+01	6.651169e-02	6.472063e-02	6.471224e-02
	7.068992e+01	1.374316e+00	8.260481e-01	8.278018e-01
10^{-2}	1.481902e+02	3.883304e-02	3.797993e-02	3.797133e-02
	1.112713e+02	2.198733e-02	2.132080e-02	2.131430e-02
	5.665088e+02	2.085437e-01	2.067382e-01	2.070684e-01
10^{-3}	9.670434e+02	5.794690e-03	4.723141e-03	4.712316e-03
	6.789979e+02	3.066431e-03	2.658904e-03	2.656186e-03
	1.396412e+03	3.131827e-02	2.164434e-02	2.161422e-02
10^{-4}	9.197238e+04	2.514426e-03	4.946716e-04	4.827475e-04
	7.615748e+04	1.369688e-03	2.735480e-04	2.726988e-04
	1.859797e+05	1.963779e-02	2.236631e-03	2.189775e-03

Таблица 6: Ошибки для схемы 1 при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	2.464089e+03	4.004913e-01	1.236771e-02	1.236528e-02
	9.520705e+02	9.438113e-02	6.455602e-03	6.451369e-03
	1.004560e+04	8.056591e+00	5.645747e-02	5.615298e-02
10^{-2}	2.047359e+03	3.790905e-01	1.282005e+06	7.053810e+03
	1.285078e+03	2.368079e-01	5.063466e+04	3.578959e+02
	1.499430e+04	3.709077e+00	7.126936e+07	1.727106e+06
10^{-3}	4.428032e+01	3.426404e-03	1.629036e-04	1.296869e-02
	1.006138e+01	1.137896e-03	8.384069e-05	1.427647e-04
	1.359861e+02	1.892302e-02	3.215977e-04	8.021061e-01
10^{-4}	6.494181e+02	3.638056e-03	3.630427e-05	1.024102e-05
	3.778433e+02	1.213182e-03	1.223737e-05	5.829744e-06
	1.120882e+03	1.942868e-02	1.952241e-04	2.193910e-05

Таблица 7: Ошибки для схемы 1 при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	1.081077e+01	1.405509e+00	1.554279e+00	1.530040e+00
	2.953611e+00	6.648733e-01	6.465171e-01	6.464135e-01
	2.850794e+01	3.091198e+01	1.742743e+01	1.674844e+01
10^{-2}	4.488869e+01	1.886602e-01	1.947784e-01	1.948402e-01
	1.032222e+01	9.125062e-02	9.149386e-02	9.149660e-02
	1.392258e+02	8.469457e-01	8.583813e-01	8.586118e-01
10^{-3}	4.403143e+01	1.863844e-02	2.453877e-02	2.462269e-02
	1.002975e+01	9.563999e-03	1.039723e-02	1.040837e-02
	1.298019e+02	1.016197e-01	1.200189e-01	1.202715e-01
10^{-4}	7.846784e+03	6.085124e-03	2.456530e-03	2.543966e-03
	2.571961e+03	2.273406e-03	1.049314e-03	1.061467e-03
	3.324769e+04	2.876885e-02	1.232313e-02	1.256482e-02

Таблица 8: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	4.644843e+00	9.339581e-01	9.454470e-01	9.454472e-01
	1.375789e+00	5.171146e-01	5.222642e-01	5.222742e-01
	1.273598e+01	7.654285e+00	6.612843e+00	7.274872e+00
10^{-2}	3.119576e+03	2.020546e-01	2.057799e-01	2.058430e-01
	1.568071e+03	9.068643e-02	9.001549e-02	9.000926e-02
	1.374665e+04	2.009990e+00	2.085705e+00	2.092263e+00
10^{-3}	2.079895e+04	3.317090e-02	3.418815e-02	3.419134e-02
	9.170933e+03	1.110752e-02	9.974044e-03	9.969831e-03
	2.839086e+04	3.541826e-01	3.880979e-01	3.905942e-01
10^{-4}	5.783370e+04	6.246172e-03	3.812621e-03	3.837089e-03
	2.657601e+04	4.228745e-03	1.026119e-03	1.022018e-03
	9.607411e+04	1.141844e-01	4.647352e-02	4.690111e-02

Таблица 9: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	1.364200e+01	4.922234e-01	1.393322e-01	1.392993e-01
	5.253147e+00	1.189438e-01	6.596240e-02	6.595421e-02
	4.840460e+01	1.127427e+01	8.352395e-01	8.379238e-01
10^{-2}	2.386117e+02	2.513277e-01	6.492312e-01	1.282036e+04
	6.269362e+01	4.784184e-02	9.819604e-02	2.072580e+03
	5.114653e+02	4.572635e+00	4.903619e+01	1.001053e+07
10^{-3}	3.470740e+03	6.347424e-03	5.133947e-03	5.121749e-03
	1.291329e+03	3.345747e-03	2.961004e-03	2.959492e-03
	1.220914e+04	3.390511e-02	2.429845e-02	1.066549e-01
10^{-4}	3.039044e+05	4.101630e-03	5.421482e-04	5.255502e-04
	1.185721e+05	2.012198e-03	3.035657e-04	3.052982e-04
	5.708547e+05	2.528787e-02	2.512712e-03	2.486790e-03

Таблица 10: Ошибки для схемы 1 при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	1.159302e+04	4.601040e-01	1.280137e-02	1.279952e-02
	2.919661e+03	1.665885e-01	6.609273e-03	6.605422e-03
	3.974471e+04	1.885916e+01	5.661475e-02	5.629154e-02
10^{-2}	1.754655e+03	1.945944e+05	1.128779e+08	1.103493e+03
	1.085151e+03	4.035348e+04	3.870527e+06	1.657320e+02
	1.280808e+04	5.661580e+06	5.472757e+09	8.081585e+05
10^{-3}	4.130219e+03	3.429071e-03	4.527116e-01	6.321251e-01
	2.420955e+03	1.138629e-03	1.546874e-01	6.010732e-02
	1.568273e+04	1.894995e-02	6.560000e+01	2.288234e+02
10^{-4}	1.415345e+03	3.654740e-03	3.549009e-05	7.319722e-02
	7.271865e+02	1.227623e-03	1.226319e-05	2.389192e-03
	1.796642e+03	1.955633e-02	2.015581e-04	3.383820e+00

Таблица 11: Ошибки для схемы 1 при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	1.945624e+01	2.062883e+00	1.929525e+00	1.916657e+00
	4.505354e+00	8.176516e-01	8.062316e-01	8.064923e-01
	5.521580e+01	3.495932e+01	3.269724e+01	3.017376e+01
10^{-2}	4.847890e+01	2.696058e-01	2.698981e-01	2.699206e-01
	1.105904e+01	1.182793e-01	1.191437e-01	1.191536e-01
	1.476918e+02	1.315645e+00	1.329117e+00	1.330189e+00
10^{-3}	6.645240e+02	3.176059e-02	3.437645e-02	3.439877e-02
	3.231469e+02	1.260999e-02	1.368811e-02	1.370164e-02
	1.658289e+03	1.610896e-01	1.776191e-01	1.778211e-01
10^{-4}	4.612742e+04	7.008618e-03	3.580744e-03	3.603998e-03
	2.225423e+04	2.602330e-03	1.402300e-03	1.415658e-03
	3.104036e+05	4.368503e-02	1.869737e-02	1.888790e-02

Таблица 12: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.001$.

3.2.2 Ошибки для V

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	8.762809e-01	1.348669e+00	1.342298e+00	1.341862e+00
	5.537944e-01	7.229550e-01	7.210374e-01	7.210027e-01
	4.749375e+00	4.483788e+00	4.528983e+00	4.531776e+00
10^{-2}	4.075959e-01	1.772978e-01	1.721842e-01	1.721354e-01
	2.336403e-01	8.361451e-02	8.136064e-02	8.133973e-02
	2.392059e+00	7.401610e-01	7.065944e-01	7.062661e-01
10^{-3}	3.488753e+00	2.237554e-02	1.732869e-02	1.728098e-02
	1.405827e+00	1.055452e-02	8.324315e-03	8.305628e-03
	1.105232e+01	1.079447e-01	7.341196e-02	7.310727e-02
10^{-4}	2.986291e+00	7.080180e-03	1.771597e-03	1.723789e-03
	1.395914e+00	3.773419e-03	8.511408e-04	8.322779e-04
	1.189686e+01	4.721378e-02	7.641416e-03	7.333983e-03

Таблица 13: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	3.121001e+00	1.190793e+00	1.189083e+00	1.189049e+00
	1.277483e+00	4.430741e-01	4.422901e-01	4.422825e-01
	1.423335e+01	3.800451e+00	3.783993e+00	3.783820e+00
10^{-2}	2.029718e+01	1.809768e-01	1.831277e-01	1.831519e-01
	1.407690e+01	7.032735e-02	7.145740e-02	7.146924e-02
	7.428565e+01	5.231106e-01	5.249196e-01	5.249459e-01
10^{-3}	1.067053e+02	1.720042e-02	2.049104e-02	2.052488e-02
	7.041326e+01	6.895703e-03	8.160589e-03	8.177255e-03
	3.941923e+02	5.880525e-02	5.747657e-02	5.753378e-02
10^{-4}	1.544312e+02	5.239441e-03	2.046592e-03	2.081101e-03
	8.564401e+01	2.451002e-03	8.139745e-04	8.308442e-04
	6.108391e+02	2.884226e-02	5.768944e-03	5.821071e-03

Таблица 14: Ошибки для схемы 1 при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	1.221450e+05	8.282894e-01	8.374431e-01	8.374117e-01
	6.355984e+04	3.213536e-01	3.274242e-01	3.274126e-01
	8.721616e+05	3.427806e+00	2.522478e+00	2.522304e+00
10^{-2}	3.582042e+02	2.633103e-02	2.586666e-02	2.586229e-02
	1.799863e+02	1.066156e-02	1.096670e-02	1.097184e-02
	1.769586e+03	7.608705e-02	7.206453e-02	7.208729e-02
10^{-3}	2.689496e+02	3.450924e-03	8.283290e-04	8.200688e-04
	1.535635e+02	1.847529e-03	5.500819e-04	5.615079e-04
	2.107833e+03	2.579411e-02	3.069649e-03	3.221493e-03
10^{-4}	2.894767e+03	4.201373e-03	6.613191e-05	7.799611e-05
	1.675389e+03	2.143112e-03	3.933929e-05	4.893134e-05
	2.300055e+04	2.783126e-02	2.495662e-04	3.076418e-04

Таблица 15: Ошибки для схемы 1 при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	1.124344e+00	1.111107e+00	1.113744e+00	1.114761e+00
	6.272306e-01	5.856199e-01	5.893024e-01	5.898580e-01
	5.848721e+00	3.699576e+00	3.722526e+00	3.727498e+00
10^{-2}	1.362551e+00	1.924270e-01	1.902728e-01	1.902488e-01
	7.256166e-01	8.435152e-02	8.411943e-02	8.411734e-02
	6.238115e+00	6.252452e-01	6.131275e-01	6.130096e-01
10^{-3}	2.231360e+00	2.037382e-02	1.865748e-02	1.863992e-02
	1.272893e+00	8.330838e-03	8.027867e-03	8.029704e-03
	9.640793e+00	7.157309e-02	5.897025e-02	5.890070e-02
10^{-4}	2.292837e+00	4.904446e-03	1.874672e-03	1.857532e-03
	1.366261e+00	2.897638e-03	7.961373e-04	7.978944e-04
	1.032620e+01	3.084402e-02	5.927140e-03	5.856573e-03

Таблица 16: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.1$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	1.866822e+00	1.382223e+00	1.381771e+00	1.381777e+00
	9.253075e-01	5.788731e-01	5.785134e-01	5.785113e-01
	1.105338e+01	6.226226e+00	6.457578e+00	6.466466e+00
10^{-2}	4.516776e+00	2.203176e-01	2.244005e-01	2.244461e-01
	2.027162e+00	9.079278e-02	9.226341e-02	9.227849e-02
	1.681788e+01	1.243512e+00	1.297147e+00	1.300685e+00
10^{-3}	1.198286e+02	2.329110e-02	2.800903e-02	2.805475e-02
	8.521162e+01	9.087299e-03	1.028146e-02	1.029759e-02
	4.602923e+02	1.606967e-01	1.743950e-01	1.757838e-01
10^{-4}	3.264518e+02	7.135779e-03	2.830972e-03	2.876986e-03
	1.533002e+02	2.847010e-03	1.026755e-03	1.042526e-03
	1.169740e+03	5.130100e-02	1.808264e-02	1.831678e-02

Таблица 17: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	3.042338e+01	1.492729e+00	1.492465e+00	1.492426e+00
	1.786137e+01	5.855651e-01	5.874105e-01	5.873999e-01
	1.071383e+02	4.741990e+00	4.380465e+00	4.380273e+00
10^{-2}	9.433527e+01	3.587676e-01	3.583525e-01	3.583593e-01
	4.305765e+01	1.372684e-01	1.376053e-01	1.376093e-01
	4.490232e+02	1.042954e+00	1.038226e+00	1.038185e+00
10^{-3}	1.898119e+02	3.890466e-02	4.065698e-02	4.067434e-02
	1.059734e+02	1.531493e-02	1.624499e-02	1.625832e-02
	1.326760e+03	1.192319e-01	1.135627e-01	1.135633e-01
10^{-4}	2.059102e+03	9.761243e-03	4.097600e-03	4.107048e-03
	1.219866e+03	4.072662e-03	1.641794e-03	1.654582e-03
	1.705973e+04	4.882371e-02	1.143285e-02	1.139037e-02

Таблица 18: Ошибки для схемы 1 при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	2.276056e+01	1.271856e+00	8.596355e-01	8.595963e-01
	1.285530e+01	5.541903e-01	3.380158e-01	3.380047e-01
	1.250047e+02	3.173845e+01	2.568656e+00	2.568444e+00
10^{-2}	3.384577e+02	3.772718e-01	2.445923e+06	6.896017e+04
	1.709174e+02	1.893409e-01	1.026981e+05	1.730625e+03
	1.727007e+03	1.284382e+01	1.448051e+08	1.424168e+07
10^{-3}	3.823883e+01	3.467124e-03	6.438681e-04	4.420558e-03
	1.859732e+01	1.886601e-03	3.545313e-04	4.068894e-04
	1.696059e+02	2.606269e-02	3.333160e-03	5.073640e-01
10^{-4}	5.404804e+02	7.095552e-03	6.103606e-05	9.909208e-05
	2.367563e+02	4.174000e-03	3.629741e-05	5.007827e-05
	1.707153e+03	4.584491e-02	4.522311e-04	6.177592e-04

Таблица 19: Ошибки для схемы 1 при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	6.755426e+00	2.159496e+00	2.171635e+00	2.172201e+00
	3.255147e+00	8.229624e-01	8.245504e-01	8.246957e-01
	2.570541e+01	1.093887e+01	1.229038e+01	1.232680e+01
10^{-2}	3.240745e+00	1.638207e-01	1.629691e-01	1.629594e-01
	1.842575e+00	6.974711e-02	7.094666e-02	7.095944e-02
	1.594837e+01	9.778844e-01	9.706405e-01	9.709569e-01
10^{-3}	2.570587e+00	2.109513e-02	2.064166e-02	2.063866e-02
	1.831652e+00	7.591332e-03	8.653362e-03	8.670379e-03
	1.377001e+01	1.330150e-01	1.380703e-01	1.382600e-01
10^{-4}	3.164836e+07	7.291610e-03	2.125377e-03	2.121694e-03
	1.159038e+07	3.148414e-03	8.733354e-04	8.898385e-04
	1.326186e+08	4.127655e-02	1.432377e-02	1.441591e-02

Таблица 20: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	2.499247e+00	1.625805e+00	1.636371e+00	1.636625e+00
	1.110041e+00	6.276437e-01	6.299163e-01	6.300246e-01
	1.324640e+01	7.182896e+00	8.039431e+00	8.059145e+00
10^{-2}	6.643208e+01	2.979725e-01	2.948896e-01	2.948276e-01
	4.215700e+01	1.168625e-01	1.183004e-01	1.183150e-01
	2.874351e+02	1.909283e+00	1.949970e+00	1.954959e+00
10^{-3}	1.527744e+02	3.531857e-02	4.131314e-02	4.137837e-02
	1.174078e+02	1.170380e-02	1.301039e-02	1.302667e-02
	6.337207e+02	3.771821e-01	3.847270e-01	3.852552e-01
10^{-4}	4.051511e+02	9.020232e-03	4.510097e-03	4.588108e-03
	1.976979e+02	2.902244e-03	1.310970e-03	1.327108e-03
	1.466415e+03	1.248130e-01	4.592336e-02	4.648523e-02

Таблица 21: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	2.187930e+01	1.507703e+00	1.532674e+00	1.532652e+00
	1.196209e+01	6.164964e-01	6.078360e-01	6.078247e-01
	1.139058e+02	2.585269e+01	4.467050e+00	4.466852e+00
10^{-2}	4.796593e+01	4.283601e-01	3.423500e-01	6.059856e+04
	2.561751e+01	1.600718e-01	1.337274e-01	3.490504e+04
	1.597774e+02	8.536486e+00	1.184800e+01	1.912717e+05
10^{-3}	2.644110e+02	4.346291e-02	4.449849e-02	4.450749e-02
	1.397856e+02	1.710117e-02	1.781895e-02	1.783044e-02
	1.844355e+03	1.325574e-01	1.240966e-01	1.263534e-01
10^{-4}	3.235962e+03	1.076652e-02	4.483426e-03	4.477513e-03
	1.556500e+03	4.788524e-03	1.802351e-03	1.812800e-03
	2.108758e+04	5.702832e-02	1.247649e-02	1.237491e-02

Таблица 22: Ошибки для схемы 1 при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	1.146038e+02	2.681551e+00	8.618695e-01	8.618280e-01
	7.974051e+01	1.145585e+00	3.390848e-01	3.390752e-01
	3.096951e+02	1.159571e+02	2.573314e+00	2.573109e+00
10^{-2}	3.387665e+02	4.276125e+04	2.081394e+06	5.476387e+02
	1.8111969e+02	2.184386e+04	1.199855e+06	1.739579e+02
	1.710440e+03	3.253859e+05	6.288303e+06	6.593405e+04
10^{-3}	1.228847e+03	3.477593e-03	3.195484e-01	3.989721e-02
	7.998841e+02	1.899974e-03	1.530316e-01	1.755728e-02
	1.019607e+04	2.616471e-02	9.128367e+01	3.842754e+01
10^{-4}	6.044344e+02	8.707148e-03	7.171132e-05	7.957116e-02
	3.135619e+02	4.966010e-03	4.457280e-05	1.110378e-03
	2.078092e+03	5.306976e-02	5.306925e-04	9.694426e+00

Таблица 23: Ошибки для схемы 1 при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\frac{h}{\tau}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
10^{-1}	1.069411e+01	2.846656e+00	2.851724e+00	2.852341e+00
	3.903570e+00	1.082564e+00	1.097177e+00	1.097656e+00
	4.161031e+01	3.041534e+01	3.482685e+01	3.622985e+01
10^{-2}	4.075133e+00	3.006917e-01	3.046907e-01	3.047425e-01
	2.039748e+00	1.162158e-01	1.183053e-01	1.183294e-01
	1.997139e+01	1.598208e+00	1.590334e+00	1.590432e+00
10^{-3}	1.144955e+05	3.294221e-02	3.875467e-02	3.881834e-02
	4.583945e+04	1.021947e-02	1.214773e-02	1.217296e-02
	4.267857e+05	2.115227e-01	2.116635e-01	2.117360e-01
10^{-4}	9.867371e+09	6.760864e-03	3.996561e-03	4.066082e-03
	3.120673e+09	3.192129e-03	1.210434e-03	1.235945e-03
	4.400807e+10	5.499431e-02	2.210086e-02	2.218519e-02

Таблица 24: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.001$.

3.2.3 Ошибки для G методом вложенных сеток

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	1.253369e+01	1.207643e+01	1.194145e+01	1.181652e+01
	5.340344e+00	5.100815e+00	4.981200e+00	4.893319e+00
	4.067799e+01	4.025670e+01	4.003381e+01	3.968220e+01
10^{-2}	8.898848e-02	1.329437e-01	1.548267e-01	1.766651e-01
	5.153601e-02	7.543472e-02	8.692465e-02	9.811932e-02
	4.028767e-01	5.979688e-01	6.933094e-01	7.879295e-01
10^{-3}	8.783186e-03	1.317308e-02	1.536756e-02	1.756171e-02
	4.522259e-03	6.767357e-03	7.885920e-03	9.001833e-03
	4.090053e-02	6.138242e-02	7.156724e-02	8.186950e-02

Таблица 25: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	3.166500e+00	3.177658e+00	3.196248e+00	3.222515e+00
	1.086030e+00	1.100972e+00	1.109850e+00	1.120161e+00
	1.353279e+01	1.341818e+01	1.338757e+01	1.339440e+01
10^{-2}	1.061715e-02	1.654810e-02	1.968695e-02	2.294542e-02
	5.466373e-03	8.410225e-03	9.951641e-03	1.154502e-02
	5.707844e-02	8.097355e-02	9.202206e-02	1.030876e-01
10^{-3}	1.298833e-03	1.955559e-03	2.285755e-03	2.617173e-03
	6.434264e-04	9.686715e-04	1.132189e-03	1.296306e-03
	5.213734e-03	7.849615e-03	9.136063e-03	1.041279e-02

Таблица 26: Ошибки для схемы 1 при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	4.851437e+04	4.851431e+04	4.851431e+04	4.851430e+04
	2.208043e+04	2.208050e+04	2.208050e+04	2.208050e+04
	3.103523e+05	3.103531e+05	3.103531e+05	3.103531e+05
10^{-2}	2.900661e-03	3.727833e-03	3.991865e-03	4.145018e-03
	1.019272e-03	1.363252e-03	1.500089e-03	1.611664e-03
	1.505803e-02	1.843374e-02	1.959859e-02	2.015021e-02
10^{-3}	1.177425e-04	1.748300e-04	2.027989e-04	2.303365e-04
	6.141827e-05	9.128915e-05	1.059834e-04	1.205005e-04
	2.632870e-04	3.706553e-04	4.189140e-04	4.640649e-04

Таблица 27: Ошибки для схемы 1 при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	9.601373e+00	9.281939e+00	9.180867e+00	9.118165e+00
	3.617754e+00	3.451460e+00	3.390602e+00	3.344701e+00
	3.497895e+01	3.436551e+01	3.411839e+01	3.390989e+01
10^{-2}	4.610781e-02	6.845632e-02	7.947222e-02	9.039186e-02
	2.826461e-02	4.121450e-02	4.740317e-02	5.340469e-02
	2.257737e-01	3.305196e-01	3.862826e-01	4.388565e-01
10^{-3}	4.387671e-03	6.577270e-03	7.671046e-03	8.764154e-03
	2.432897e-03	3.639236e-03	4.239884e-03	4.838855e-03
	2.228184e-02	3.340479e-02	3.892185e-02	4.443798e-02

Таблица 28: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.1$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	4.386061e+00	4.470084e+00	4.516889e+00	4.564166e+00
	1.537111e+00	1.557131e+00	1.565479e+00	1.573963e+00
	1.721237e+01	1.673421e+01	1.619988e+01	1.560271e+01
10^{-2}	8.233537e-02	1.265394e-01	1.522039e-01	1.792192e-01
	4.078537e-02	6.131279e-02	7.163398e-02	8.201671e-02
	6.790384e-01	1.017965e+00	1.202701e+00	1.382530e+00
10^{-3}	1.109506e-02	1.676764e-02	1.963546e-02	2.252434e-02
	4.307235e-03	6.472682e-03	7.558475e-03	8.646357e-03
	8.997875e-02	1.362690e-01	1.599747e-01	1.838053e-01

Таблица 29: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	2.979399e+01	2.953241e+01	2.951620e+01	2.949404e+01
	1.367704e+01	1.364175e+01	1.364367e+01	1.364401e+01
	7.151111e+01	7.087184e+01	7.077172e+01	7.068992e+01
10^{-2}	1.872358e-02	2.742555e-02	3.297214e-02	3.883304e-02
	9.993156e-03	1.568339e-02	1.874661e-02	2.198733e-02
	1.110678e-01	1.598628e-01	1.832515e-01	2.085437e-01
10^{-3}	2.333335e-03	3.520898e-03	4.120164e-03	4.723141e-03
	1.311524e-03	1.980376e-03	2.318370e-03	2.658904e-03
	1.077181e-02	1.615044e-02	1.887700e-02	2.164434e-02

Таблица 30: Ошибки для схемы 1 при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	2.333123e+16	8.797645e+03	8.142750e+04	2.464089e+03
	2.331347e+16	3.338920e+03	5.332465e+04	9.520705e+02
	2.331365e+16	2.241914e+04	1.006713e+05	1.004560e+04
10^{-2}	4.774135e-01	4.783216e-01	3.889429e-01	3.790905e-01
	2.611464e-01	2.397932e-01	2.371807e-01	2.368079e-01
	2.182054e+01	6.787065e+00	3.375505e+00	3.709077e+00
10^{-3}	9.727123e-05	1.346982e-04	1.499038e-04	1.629036e-04
	4.985512e-05	6.919995e-05	7.720359e-05	8.384069e-05
	2.185211e-04	2.843040e-04	3.058941e-04	3.215977e-04

Таблица 31: Ошибки для схемы 1 при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	1.109840e+01	1.085101e+01	1.085446e+01	1.081077e+01
	3.021398e+00	2.923169e+00	2.935298e+00	2.953611e+00
	2.937721e+01	2.883205e+01	2.856370e+01	2.850794e+01
10^{-2}	8.159091e-02	1.306283e-01	1.582813e-01	1.886602e-01
	4.329276e-02	6.639171e-02	7.854616e-02	9.125062e-02
	3.724326e-01	5.892927e-01	7.098027e-01	8.469457e-01
10^{-3}	1.202429e-02	1.821785e-02	2.136209e-02	2.453877e-02
	5.140695e-03	7.753792e-03	9.071627e-03	1.039723e-02
	5.853451e-02	8.889199e-02	1.043583e-01	1.200189e-01

Таблица 32: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	4.406416e+00	4.529485e+00	4.587279e+00	4.644843e+00
	1.304921e+00	1.322575e+00	1.354848e+00	1.375789e+00
	1.153001e+01	1.253100e+01	1.287264e+01	1.273598e+01
10^{-2}	1.492147e-01	1.861235e-01	1.949450e-01	2.020546e-01
	4.699934e-02	6.888286e-02	7.972697e-02	9.068643e-02
	1.384848e+00	1.739787e+00	1.885459e+00	2.009990e+00
10^{-3}	1.631037e-02	2.504733e-02	2.956058e-02	3.418815e-02
	4.940809e-03	7.445129e-03	8.706417e-03	9.974044e-03
	1.866439e-01	2.850847e-01	3.359444e-01	3.880979e-01

Таблица 33: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	1.334468e+01	1.338180e+01	1.329570e+01	1.364200e+01
	5.193881e+00	5.185703e+00	5.198800e+00	5.253147e+00
	4.799195e+01	4.830389e+01	4.809707e+01	4.840460e+01
10^{-2}	2.101919e-01	2.446505e-01	2.477356e-01	2.513277e-01
	4.056075e-02	4.408270e-02	4.580417e-02	4.784184e-02
	3.849113e+00	4.229614e+00	4.388390e+00	4.572635e+00
10^{-3}	2.533496e-03	3.825285e-03	4.477640e-03	5.133947e-03
	1.457269e-03	2.202453e-03	2.579888e-03	2.961004e-03
	1.204363e-02	1.808909e-02	2.116451e-02	2.429845e-02

Таблица 34: Ошибки для схемы 1 при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	2.802788e+04	1.009402e+04	3.876481e+05	1.159302e+04
	9.920653e+03	4.099451e+03	1.357320e+05	2.919661e+03
	4.565943e+04	4.167557e+04	1.204900e+06	3.974471e+04
10^{-2}	6.723781e+05	2.299409e+05	1.945946e+05	1.945944e+05
	1.000930e+05	4.847551e+04	4.035354e+04	4.035348e+04
	6.819297e+06	5.087345e+06	5.661598e+06	5.661580e+06
10^{-3}	7.227391e-01	5.462907e-01	4.293167e-01	4.527116e-01
	1.677347e-01	1.542000e-01	1.544521e-01	1.546874e-01
	1.453544e+02	6.048373e+01	6.362970e+01	6.560000e+01

Таблица 35: Ошибки для схемы 1 при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	2.156395e+01	1.981044e+01	1.971110e+01	1.945624e+01
	5.129213e+00	4.593219e+00	4.569608e+00	4.505354e+00
	5.876904e+01	5.585198e+01	5.551285e+01	5.521580e+01
10^{-2}	1.232351e-01	1.901606e-01	2.281318e-01	2.696058e-01
	5.828806e-02	8.683748e-02	1.020365e-01	1.182793e-01
	8.069071e-01	1.011055e+00	1.151504e+00	1.315645e+00
10^{-3}	1.675787e-02	2.545043e-02	2.988419e-02	3.437645e-02
	6.724408e-03	1.017364e-02	1.192235e-02	1.368811e-02
	8.615130e-02	1.311386e-01	1.541812e-01	1.776191e-01

Таблица 36: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.001$.

3.2.4 Ошибки для V методом вложенных сеток

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	1.497440e+00	1.117859e+00	9.757665e-01	8.762809e-01
	9.202854e-01	7.198558e-01	6.299974e-01	5.537944e-01
	7.326097e+00	5.698887e+00	5.109705e+00	4.749375e+00
10^{-2}	9.058192e-02	1.350214e-01	1.565155e-01	1.772978e-01
	4.198269e-02	6.283105e-02	7.322907e-02	8.361451e-02
	3.795082e-01	5.624288e-01	6.519466e-01	7.401610e-01
10^{-3}	8.691211e-03	1.301658e-02	1.517456e-02	1.732869e-02
	4.162623e-03	6.243603e-03	7.283994e-03	8.324315e-03
	3.673740e-02	5.508296e-02	6.424958e-02	7.341196e-02

Таблица 37: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	3.883598e+00	3.492513e+00	3.317919e+00	3.121001e+00
	1.506742e+00	1.399536e+00	1.345208e+00	1.277483e+00
	1.723900e+01	1.596138e+01	1.521452e+01	1.423335e+01
10^{-2}	8.476121e-02	1.310730e-01	1.555208e-01	1.809768e-01
	3.241451e-02	5.052189e-02	6.018818e-02	7.032735e-02
	2.501765e-01	3.827546e-01	4.518025e-01	5.231106e-01
10^{-3}	1.015797e-02	1.530209e-02	1.789090e-02	2.049104e-02
	4.039726e-03	6.089790e-03	7.122569e-03	8.160589e-03
	2.853802e-02	4.295578e-02	5.020311e-02	5.747657e-02

Таблица 38: Ошибки для схемы 1 при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	1.221467e+05	1.221454e+05	1.221450e+05	1.221450e+05
	6.356061e+04	6.355995e+04	6.355983e+04	6.355984e+04
	8.721820e+05	8.721642e+05	8.721615e+05	8.721616e+05
10^{-2}	1.771055e-02	2.332227e-02	2.522033e-02	2.633103e-02
	6.872338e-03	9.199342e-03	1.006184e-02	1.066156e-02
	5.473151e-02	6.987523e-02	7.425956e-02	7.608705e-02
10^{-3}	4.952793e-04	6.853840e-04	7.633556e-04	8.283290e-04
	2.943690e-04	4.274528e-04	4.901146e-04	5.500819e-04
	1.605632e-03	2.354480e-03	2.714236e-03	3.069649e-03

Таблица 39: Ошибки для схемы 1 при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	1.426489e+00	1.085351e+00	1.098266e+00	1.124344e+00
	8.835346e-01	7.284267e-01	6.657531e-01	6.272306e-01
	8.162799e+00	6.519334e+00	5.979254e+00	5.848721e+00
10^{-2}	9.757992e-02	1.454790e-01	1.690906e-01	1.924270e-01
	4.329360e-02	6.415001e-02	7.433867e-02	8.435152e-02
	3.264508e-01	4.796196e-01	5.534001e-01	6.252452e-01
10^{-3}	9.351562e-03	1.401039e-02	1.633542e-02	1.865748e-02
	4.027555e-03	6.031164e-03	7.030384e-03	8.027867e-03
	2.960255e-02	4.431587e-02	5.165044e-02	5.897025e-02

Таблица 40: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.1$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	1.784096e+00	1.859894e+00	1.870118e+00	1.866822e+00
	7.849234e-01	8.500746e-01	8.757011e-01	9.253075e-01
	9.106497e+00	1.051391e+01	1.099866e+01	1.105338e+01
10^{-2}	1.077708e-01	1.533210e-01	1.856236e-01	2.203176e-01
	4.280437e-02	6.604274e-02	7.821540e-02	9.079278e-02
	6.212892e-01	9.358895e-01	1.085082e+00	1.243512e+00
10^{-3}	1.379588e-02	2.084938e-02	2.441586e-02	2.800903e-02
	5.101919e-03	7.681878e-03	8.979203e-03	1.028146e-02
	8.551513e-02	1.294734e-01	1.518115e-01	1.743950e-01

Таблица 41: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	3.124269e+01	3.094572e+01	3.073160e+01	3.042338e+01
	1.794478e+01	1.788934e+01	1.787415e+01	1.786137e+01
	1.135489e+02	1.105171e+02	1.090479e+02	1.071383e+02
10^{-2}	1.675180e-01	2.594057e-01	3.081415e-01	3.587676e-01
	6.249275e-02	9.796446e-02	1.171006e-01	1.372684e-01
	4.993892e-01	7.640619e-01	9.019860e-01	1.042954e+00
10^{-3}	2.020218e-02	3.040301e-02	3.552424e-02	4.065698e-02
	8.038578e-03	1.212124e-02	1.417807e-02	1.624499e-02
	5.664685e-02	8.509400e-02	9.932958e-02	1.135627e-01

Таблица 42: Ошибки для схемы 1 при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	1.176241e+07	2.219469e+04	4.060771e+04	2.276056e+01
	9.864888e+06	1.212547e+04	2.387947e+04	1.285530e+01
	4.997798e+07	4.801224e+04	1.374986e+05	1.250047e+02
10^{-2}	4.805052e-01	3.882553e-01	4.093621e-01	3.772718e-01
	2.240329e-01	1.923434e-01	1.907162e-01	1.893409e-01
	2.440707e+01	1.429881e+01	1.318739e+01	1.284382e+01
10^{-3}	3.114381e-04	4.661482e-04	5.471824e-04	6.438681e-04
	2.050992e-04	2.805874e-04	3.139441e-04	3.545313e-04
	1.467146e-03	2.234530e-03	2.675030e-03	3.333160e-03

Таблица 43: Ошибки для схемы 1 при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	6.567249e+00	6.696712e+00	6.721134e+00	6.755426e+00
	3.032587e+00	3.190672e+00	3.235410e+00	3.255147e+00
	2.601931e+01	2.560890e+01	2.551919e+01	2.570541e+01
10^{-2}	7.391739e-02	1.167851e-01	1.397961e-01	1.638207e-01
	3.197446e-02	4.987383e-02	5.952742e-02	6.974711e-02
	4.404070e-01	6.890184e-01	8.194399e-01	9.778844e-01
10^{-3}	1.016908e-02	1.536678e-02	1.799479e-02	2.064166e-02
	4.262132e-03	6.441050e-03	7.542957e-03	8.653362e-03
	6.751022e-02	1.022779e-01	1.199909e-01	1.380703e-01

Таблица 44: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	2.366081e+00	2.505394e+00	2.515007e+00	2.499247e+00
	8.871389e-01	9.832300e-01	1.042422e+00	1.110041e+00
	1.151615e+01	1.291425e+01	1.349871e+01	1.324640e+01
10^{-2}	1.958573e-01	2.544976e-01	2.771897e-01	2.979725e-01
	5.782859e-02	8.683485e-02	1.016636e-01	1.168625e-01
	1.305147e+00	1.638417e+00	1.786891e+00	1.909283e+00
10^{-3}	1.973661e-02	3.028482e-02	3.574973e-02	4.131314e-02
	6.449522e-03	9.715364e-03	1.135914e-02	1.301039e-02
	1.835135e-01	2.812976e-01	3.325543e-01	3.847270e-01

Таблица 45: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	2.198164e+01	2.202894e+01	2.201098e+01	2.187930e+01
	1.224404e+01	1.217412e+01	1.210386e+01	1.196209e+01
	1.150774e+02	1.151122e+02	1.146423e+02	1.139058e+02
10^{-2}	3.849609e-01	4.284301e-01	4.283033e-01	4.283601e-01
	9.035976e-02	1.221591e-01	1.402430e-01	1.600718e-01
	8.356215e+00	8.502538e+00	8.519629e+00	8.536486e+00
10^{-3}	2.214952e-02	3.330891e-02	3.890181e-02	4.449849e-02
	8.822492e-03	1.330005e-02	1.555455e-02	1.781895e-02
	6.206949e-02	9.313198e-02	1.086351e-01	1.240966e-01

Таблица 46: Ошибки для схемы 1 при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	8.179748e+04	1.279995e+04	1.455549e+04	1.146038e+02
	3.035173e+04	1.034660e+04	5.001999e+03	7.974051e+01
	3.328203e+05	5.311025e+04	5.687223e+04	3.096951e+02
10^{-2}	4.502753e+04	3.720091e+06	4.276134e+04	4.276125e+04
	2.369080e+04	2.165964e+06	2.184381e+04	2.184386e+04
	3.594172e+05	7.924567e+06	3.253861e+05	3.253859e+05
10^{-3}	3.659287e-01	3.190817e-01	3.195958e-01	3.195484e-01
	1.321617e-01	1.533102e-01	1.530107e-01	1.530316e-01
	1.081254e+02	9.235750e+01	9.134213e+01	9.128367e+01

Таблица 47: Ошибки для схемы 1 при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\tau = h$	1/2	1/4	1/8	u
10^{-1}	1.090468e+01	1.095785e+01	1.077425e+01	1.069411e+01
	4.262182e+00	4.069871e+00	3.953579e+00	3.903570e+00
	4.458606e+01	4.326100e+01	4.219661e+01	4.161031e+01
10^{-2}	1.631455e-01	2.105736e-01	2.528627e-01	3.006917e-01
	6.343158e-02	8.943870e-02	1.026367e-01	1.162158e-01
	1.046706e+00	1.261443e+00	1.409836e+00	1.598208e+00
10^{-3}	1.887220e-02	2.867918e-02	3.368103e-02	3.875467e-02
	6.031409e-03	9.079104e-03	1.061075e-02	1.214773e-02
	1.035952e-01	1.570542e-01	1.842068e-01	2.116635e-01

Таблица 48: Ошибки для схемы 1 при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.001$.

3.3 Вывод

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что разностная схема сходится в зависимости от внешних параметров. При больших μ и малых C сходимость безусловная, а при уменьшении μ или увеличении C появляется условие сходимости $\tau < h$. Сходимость имеет порядок $\tau + h^2$.

4 Тест с негладкими начальными данными

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим область $\Omega_x = [0, 10]$. Для системы (1) зададим 2 задачи, начальные и граничные условия которых определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= \begin{cases} 2, & x \in [4.5; 5.5] \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \\ u(0, x) &= 0, \quad x \in [0; 10] \\ u(t, 0) &= u(t, 10) = 0, \quad t \in [0; T] \end{aligned} \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= 1, \quad x \in [0; 10] \\ u(0, x) &= \begin{cases} 1, & x \in [4.5; 5.5] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \\ u(t, 0) &= u(t, 10) = 0, \quad t \in [0; T] \end{aligned} \tag{8}$$

Для обеих задач положим f и f_0 из правой части (3) тождественно равными нулю.

Суть эксперимента состоит в решении задач (7) и (8), причем вычисления следует проводить до момента времени $T = N_0\tau$, при котором решение перестанет зависеть от времени (выйдет на стационар). Критерием выхода на стационар будем считать

$$\|V^{N_0}\|_C = \max_{m=0 \dots M} |V_m^{N_0}| \leq \varepsilon$$

где величина ε является достаточно малой и определяется опытным путем.

Кроме того, для проверки консервативности системы определим массу газа на шаге n :

$$m(n) = h \sum_{m=0}^M H_m^n = h \sum_{m=0}^M \exp(G_m^n)$$

и введем функцию

$$\Delta_m(n) = \frac{m(n) - m(0)}{m(0)}$$

4.2 Численные эксперименты для первой задачи

Рассматривается задача (7). Зафиксируем выбранные опытным путём

$$\tau = 10^{-3}, h = 10^{-2}, \varepsilon = 10^{-2}$$

Будем рассматривать зависимости $p(\rho) = C\rho$ и $p(\rho) = \rho^\gamma$ и внешние параметры

$$(C, \mu) \in \{1, 10\} \times \{0.1, 0.01\}, \gamma = 1.4$$

4.2.1 Время стабилизации и ошибки решения

Далее приведена таблицы значений $\|V^n\|_C$.

В каждой ячейке таблицы приведены значения для сеток $\bar{Q}_{\tau,h}$, $\bar{Q}_{\tau,h/2}$, $\bar{Q}_{\tau/2,h}$, $\bar{Q}_{\tau/2,h/2}$ соответственно.

	$N_0\tau$	$n = N_0/4$	$n = N_0/2$	$n = 3N_0/4$	$n = N_0$
$C = 1$ $\mu = 0.1$	64.1290	1.396156e-01	9.770485e-02	4.554561e-02	9.990253e-03
	64.1300	1.401766e-01	9.804964e-02	4.562840e-02	9.990907e-03
	64.1305	1.402810e-01	9.811721e-02	4.561001e-02	9.990522e-03
	64.1315	1.408454e-01	9.847310e-02	4.569729e-02	9.994465e-03
$C = 10$ $\mu = 0.1$	77.0350	2.906708e-01	1.327069e-01	5.033752e-02	9.937961e-03
	77.0340	2.913508e-01	1.328551e-01	5.048223e-02	9.999980e-03
	80.1815	1.210648e-01	1.289557e-01	7.039494e-02	9.992452e-03
	81.7540	2.056498e-01	7.876163e-02	3.097946e-02	9.978467e-03
$\gamma = 1.4$ $\mu = 0.1$	69.5600	1.563148e-01	9.869631e-02	4.241056e-02	9.980259e-03
	69.5550	1.568927e-01	9.898179e-02	4.248563e-02	9.977743e-03
	69.5560	1.573937e-01	9.917836e-02	4.251199e-02	9.995456e-03
	69.5510	1.579854e-01	9.944954e-02	4.258724e-02	9.992397e-03
$C = 1$ $\mu = 0.01$	278.2240	8.603387e-02	3.767792e-02	1.924198e-02	9.997962e-03
	278.2280	8.596664e-02	3.763429e-02	1.922858e-02	9.999739e-03
	288.1590	7.650990e-02	3.666142e-02	3.359777e-02	9.996764e-03
	288.1630	7.675698e-02	3.661180e-02	3.361363e-02	9.999931e-03
$C = 10$ $\mu = 0.01$	216.0880	1.588704e-01	6.030228e-02	2.660252e-02	9.988689e-03
	216.0890	1.588565e-01	6.043748e-02	2.667736e-02	9.994787e-03
	247.6790	1.418862e-01	5.378805e-02	2.447350e-02	9.995949e-03
	247.6810	1.420525e-01	5.388815e-02	2.450650e-02	9.998647e-03
$\gamma = 1.4$ $\mu = 0.01$	247.5020	8.835711e-02	3.691059e-02	1.870417e-02	9.996049e-03
	247.4830	8.819201e-02	3.684642e-02	1.869037e-02	9.997412e-03
	251.5215	1.113215e-01	4.525027e-02	2.172460e-02	9.997047e-03
	251.5025	1.114972e-01	4.531320e-02	2.174818e-02	9.996424e-03

Таблица 49: Ошибки для скорости при $\tau = 10^{-3}, h = 10^{-2}$.

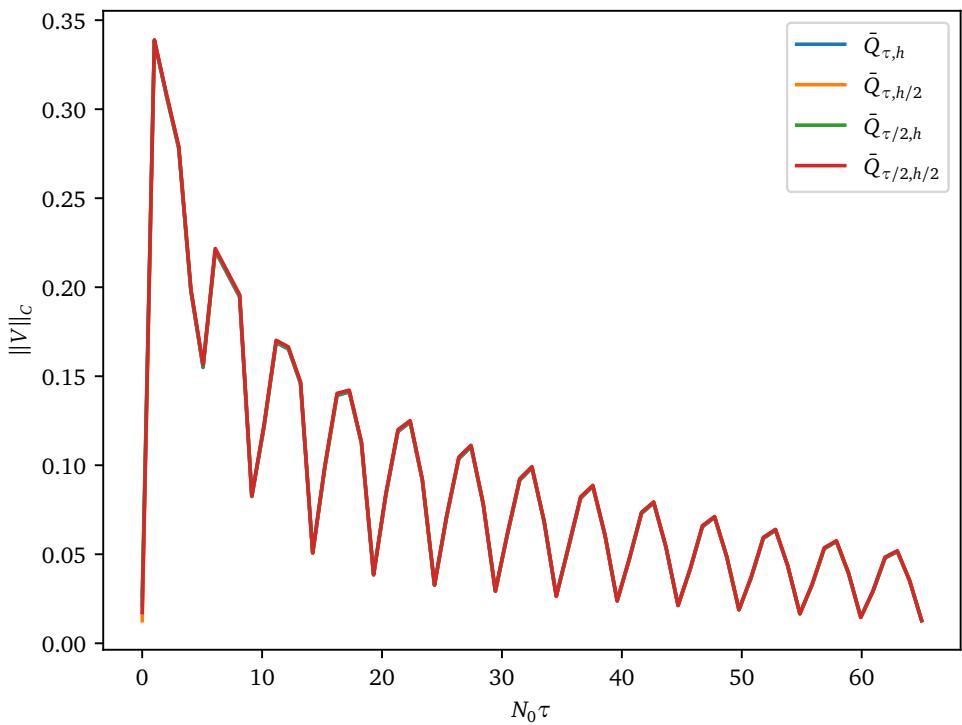


Рис. 1: График $\|V\|_C$ при $C = 1, \gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

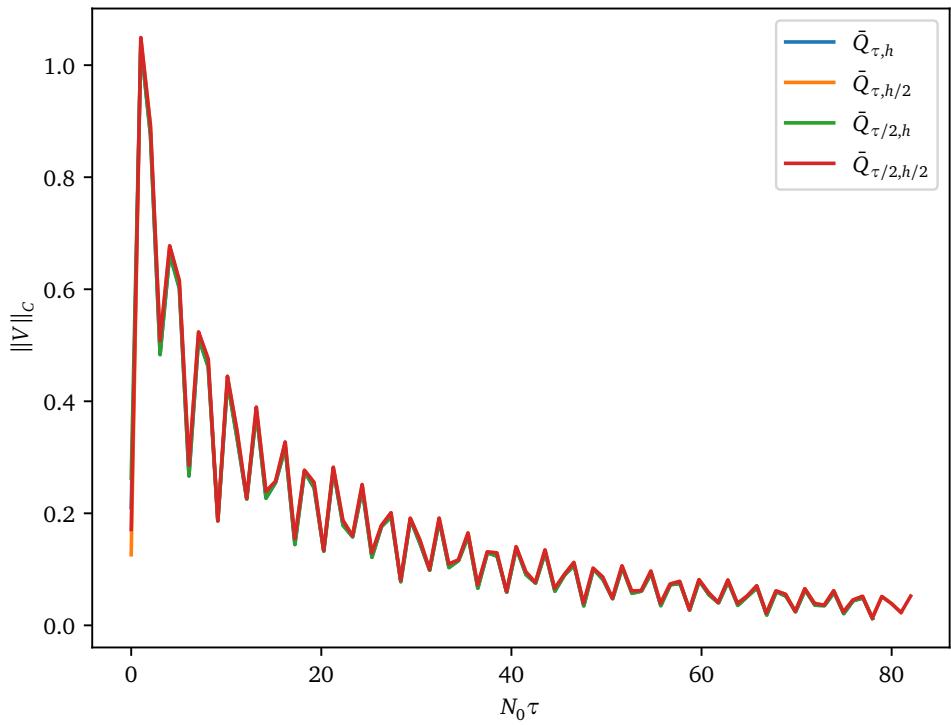


Рис. 2: График $\|V\|_C$ при $C = 10, \gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

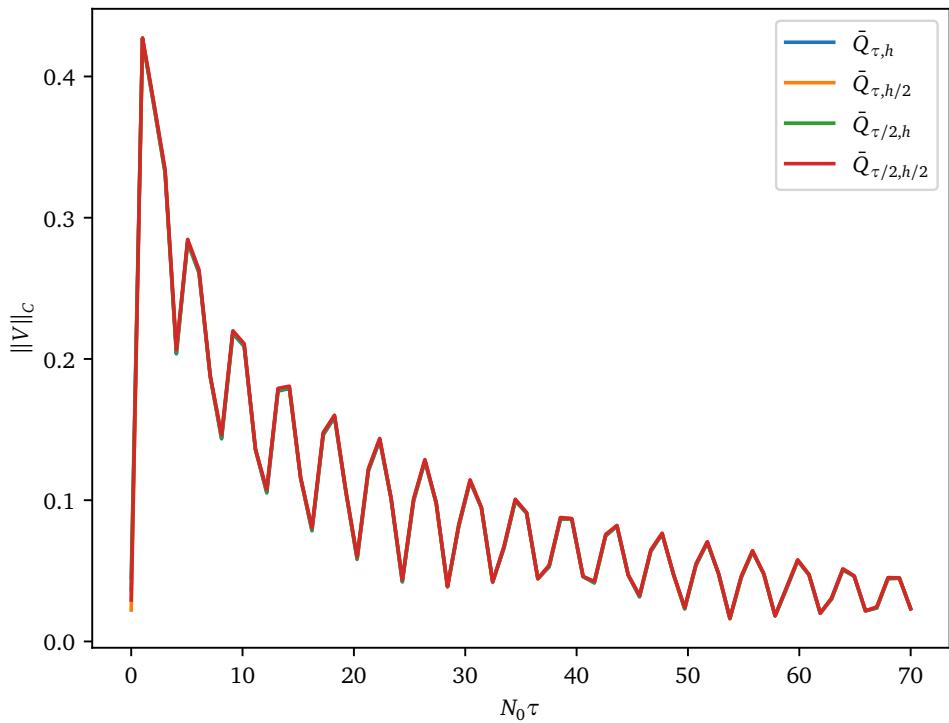


Рис. 3: График $\|V\|_C$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.1$.

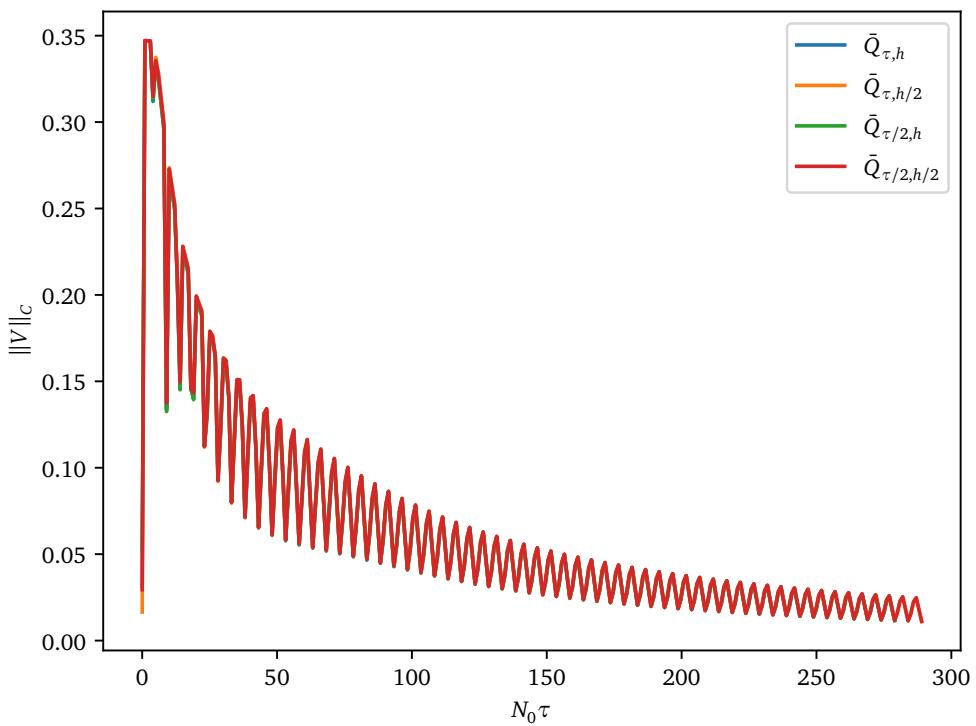


Рис. 4: График $\|V\|_C$ при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

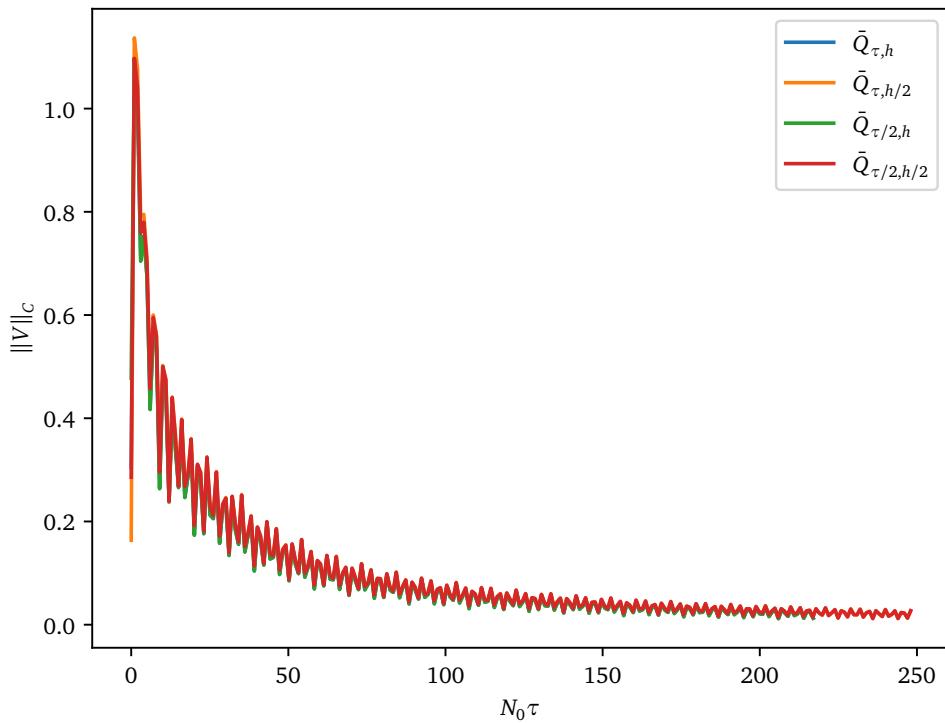


Рис. 5: График $\|V\|_C$ при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

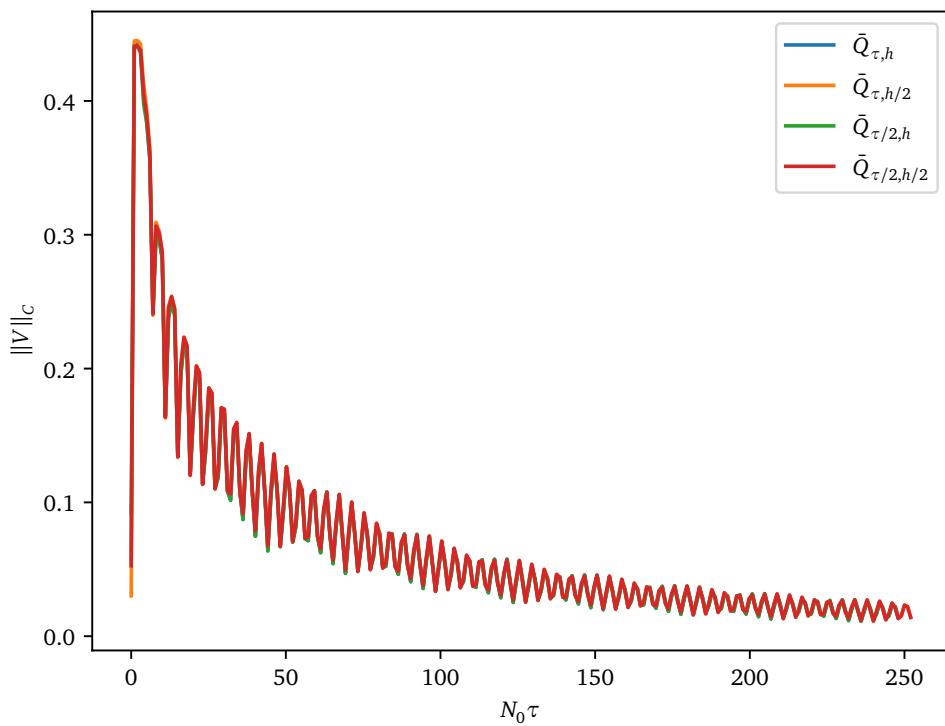


Рис. 6: График $\|V\|_C$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

4.2.2 Консервативность решения

Далее приведена таблица значений $\Delta_m(n)$.

В каждой ячейке таблицы приведены значения для сеток $\bar{Q}_{\tau,h}$, $\bar{Q}_{\tau,h/2}$, $\bar{Q}_{\tau/2,h}$, $\bar{Q}_{\tau/2,h/2}$ соответственно.

	$n = N_0/5$	$n = 2N_0/5$	$n = 3N_0/5$	$n = 4N_0/5$	$n = N_0$
$C = 1$ $\mu = 0.1$	-1.576194e-04	-1.981958e-04	-3.166168e-04	-3.012438e-04	-2.252491e-04
	-2.567727e-04	-2.970707e-04	-3.637339e-04	-3.604177e-04	-3.245736e-04
	1.546621e-05	-7.496624e-06	-1.188958e-04	-9.883572e-05	-2.044277e-05
	-7.924696e-05	-1.009926e-04	-1.605399e-04	-1.526765e-04	-1.145356e-04
$C = 10$ $\mu = 0.1$	-3.228625e-03	-3.368588e-03	-3.396079e-03	-3.401341e-03	-3.404017e-03
	-3.278029e-03	-3.443403e-03	-3.482686e-03	-3.494137e-03	-3.499076e-03
	-1.736748e-03	-1.721632e-03	-1.740789e-03	-1.760467e-03	-1.773013e-03
	-1.685181e-03	-1.802108e-03	-1.845356e-03	-1.862697e-03	-1.870293e-03
$\gamma = 1.4$ $\mu = 0.1$	-4.632917e-04	-3.701415e-04	-5.665389e-04	-5.237228e-04	-4.781895e-04
	-5.208406e-04	-4.986245e-04	-6.073323e-04	-5.901398e-04	-5.696901e-04
	-1.845740e-04	-6.699655e-05	-2.542901e-04	-2.071144e-04	-1.588117e-04
	-2.365174e-04	-1.900707e-04	-2.891894e-04	-2.677119e-04	-2.447111e-04
$C = 1$ $\mu = 0.01$	-3.130581e-03	-3.270885e-03	-3.420731e-03	-3.399867e-03	-3.454908e-03
	-3.189063e-03	-3.367047e-03	-3.471238e-03	-3.471312e-03	-3.503626e-03
	-1.704495e-03	-1.752921e-03	-1.757478e-03	-1.815081e-03	-1.821601e-03
	-1.730221e-03	-1.811384e-03	-1.828262e-03	-1.862207e-03	-1.867927e-03
$C = 10$ $\mu = 0.01$	-1.491760e-02	-1.518193e-02	-1.527227e-02	-1.527551e-02	-1.527354e-02
	-1.498850e-02	-1.526724e-02	-1.533916e-02	-1.534953e-02	-1.535239e-02
	-1.106924e-02	-1.120334e-02	-1.126469e-02	-1.126088e-02	-1.125641e-02
	-1.102762e-02	-1.117432e-02	-1.121923e-02	-1.122199e-02	-1.122184e-02
$\gamma = 1.4$ $\mu = 0.01$	-4.883364e-03	-5.077536e-03	-5.111989e-03	-5.120784e-03	-5.123262e-03
	-4.874091e-03	-5.088341e-03	-5.131940e-03	-5.145525e-03	-5.150902e-03
	-2.743725e-03	-2.725259e-03	-2.779172e-03	-2.801832e-03	-2.813967e-03
	-2.734016e-03	-2.788550e-03	-2.829544e-03	-2.845748e-03	-2.854010e-03

Таблица 50: Разность масс при $\tau = 10^{-3}$, $h = 10^{-2}$.

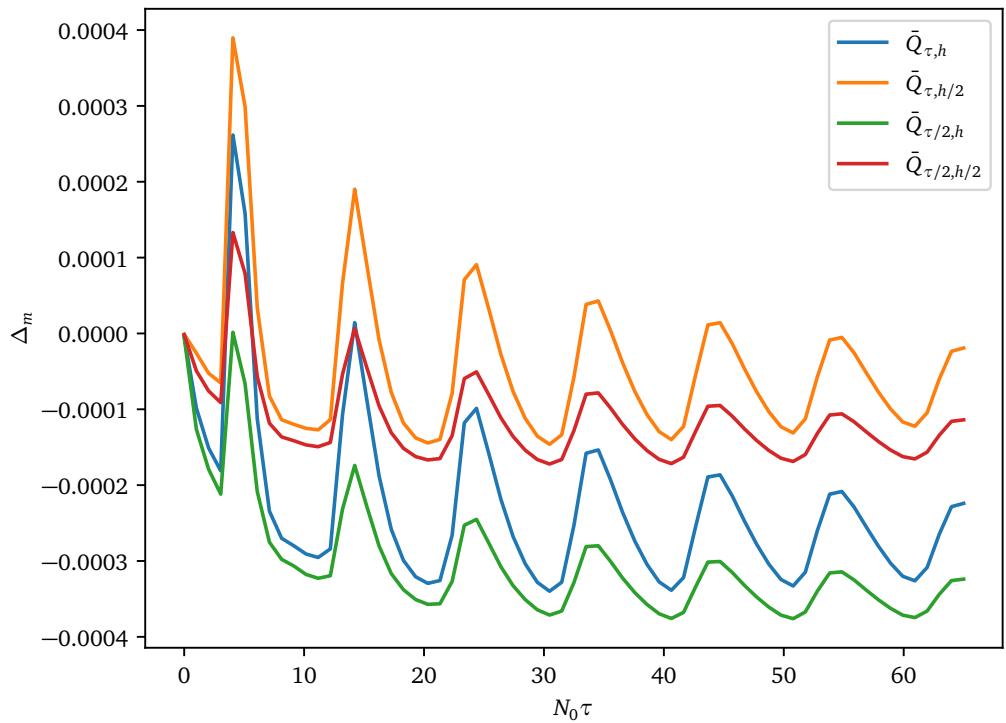


Рис. 7: График Δ_m при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

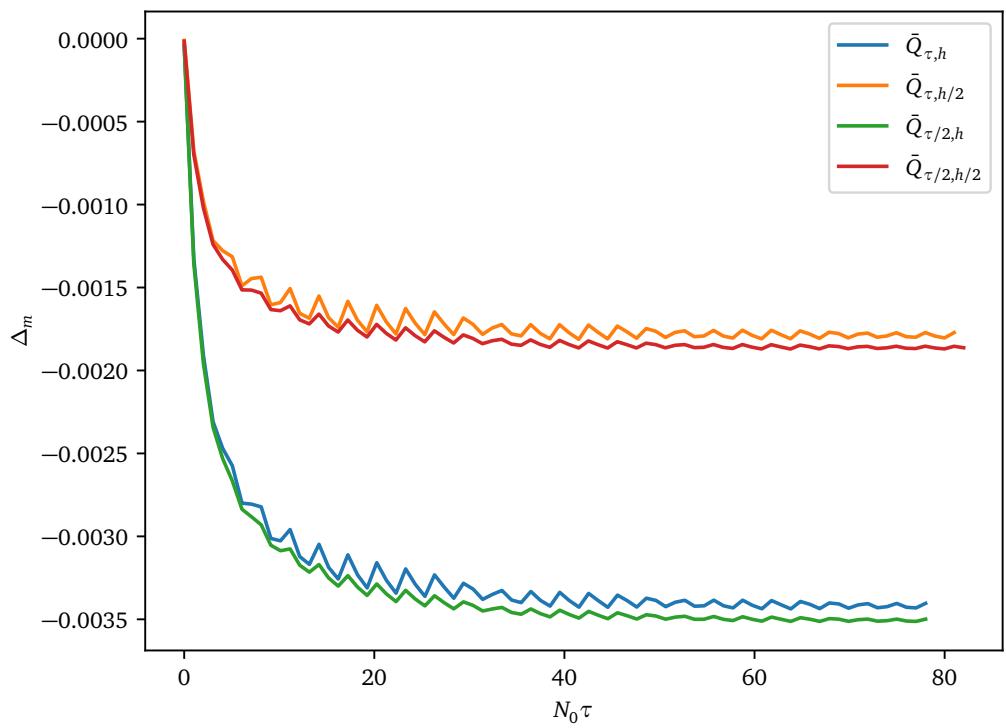


Рис. 8: График Δ_m при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

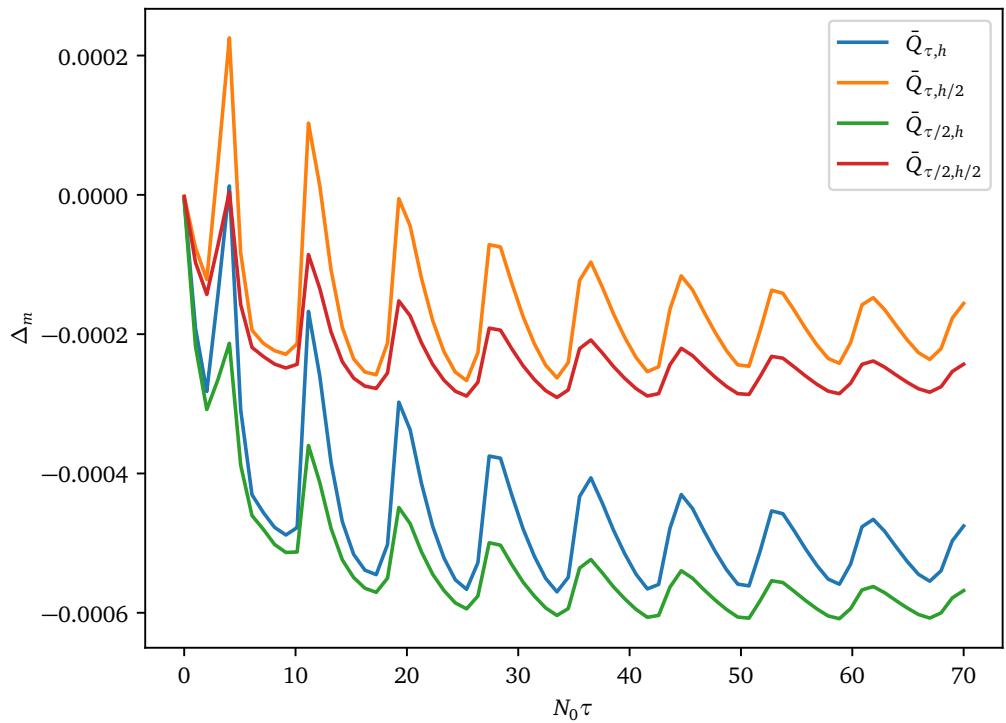


Рис. 9: График Δ_m при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.1$.

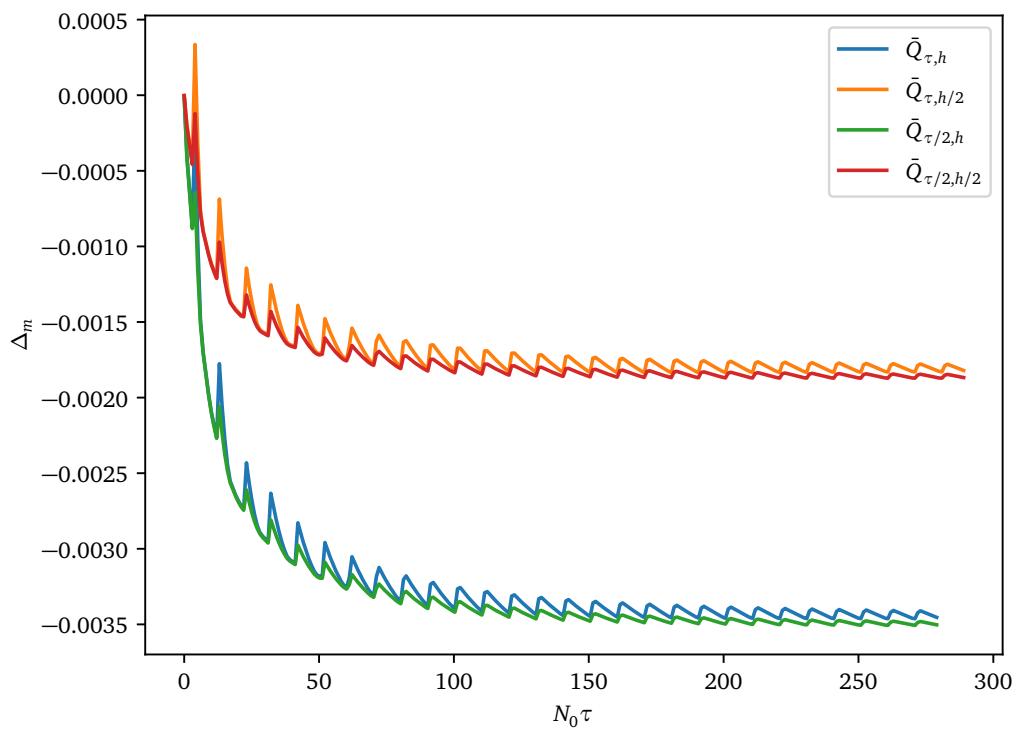


Рис. 10: График Δ_m при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

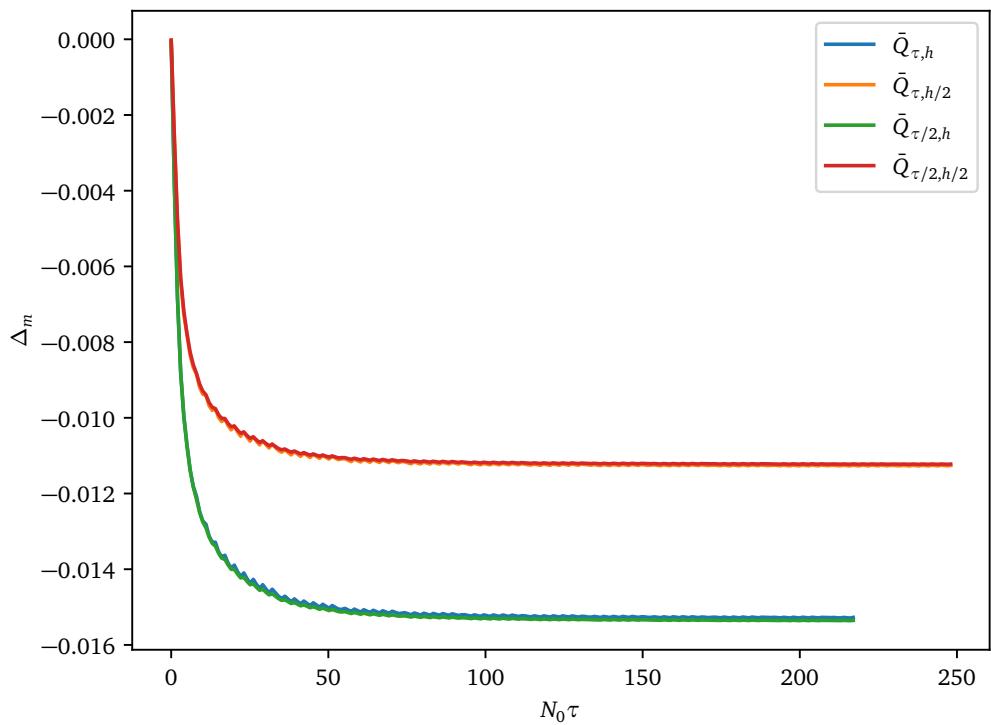


Рис. 11: График Δ_m при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

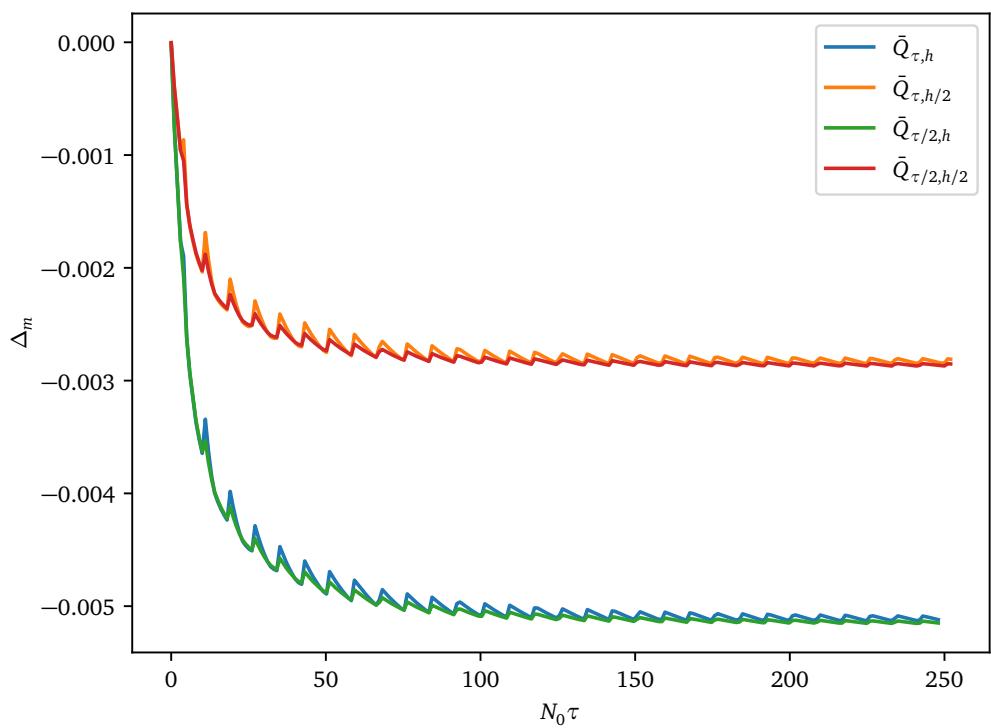


Рис. 12: График Δ_m при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

4.2.3 Динамика процесса решения

Рассмотрим $C = 1$, $\gamma = 1$, $\mu = 0.1$. Далее приведены срезы графиков V и G (динамика процесса) в разные моменты времени.

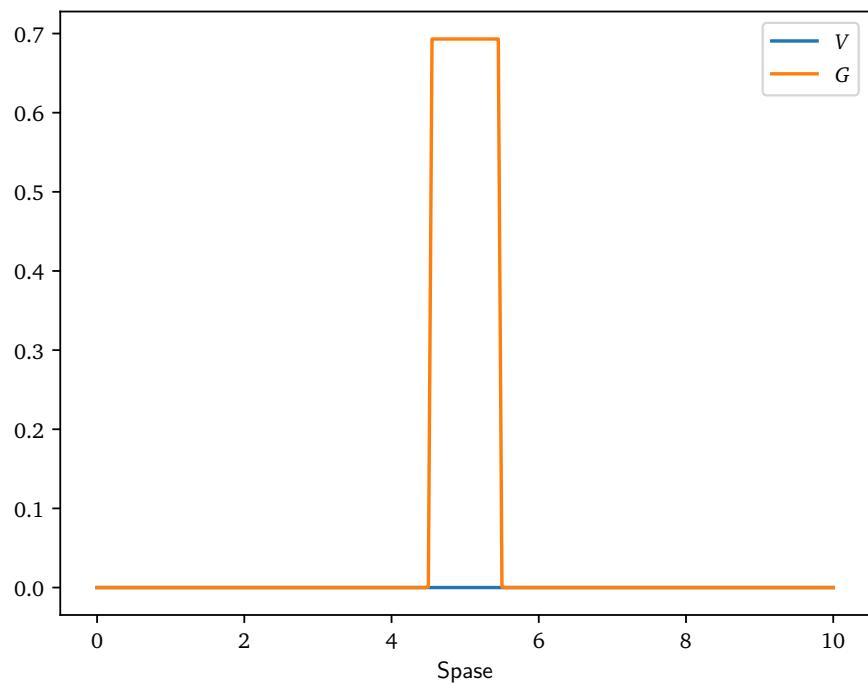


Рис. 13: Срез для $t = 0$.

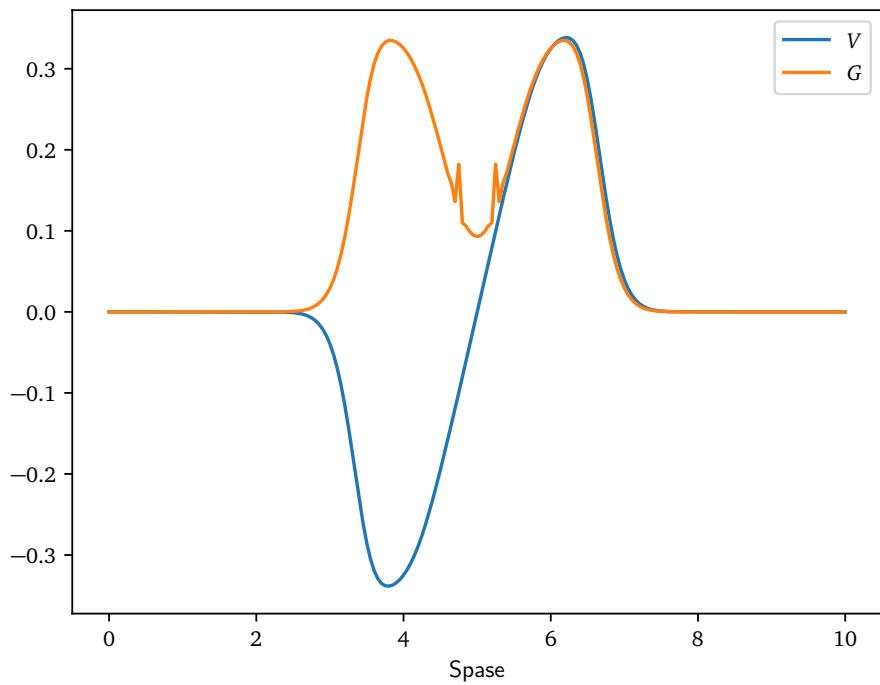


Рис. 14: Срез для $t = 1$.

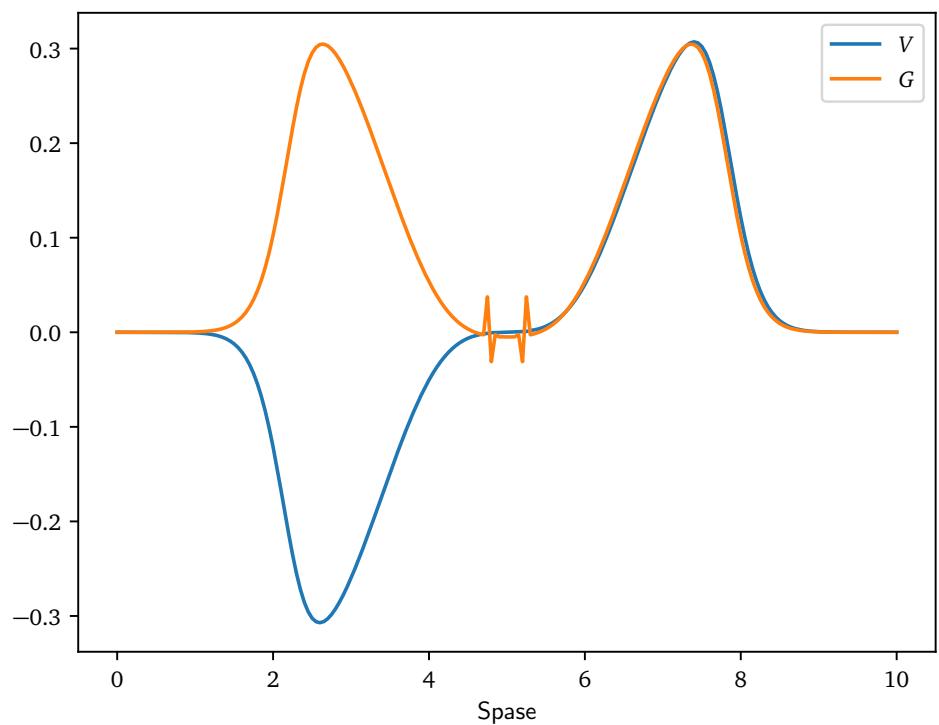


Рис. 15: Срез для $t = 2$.

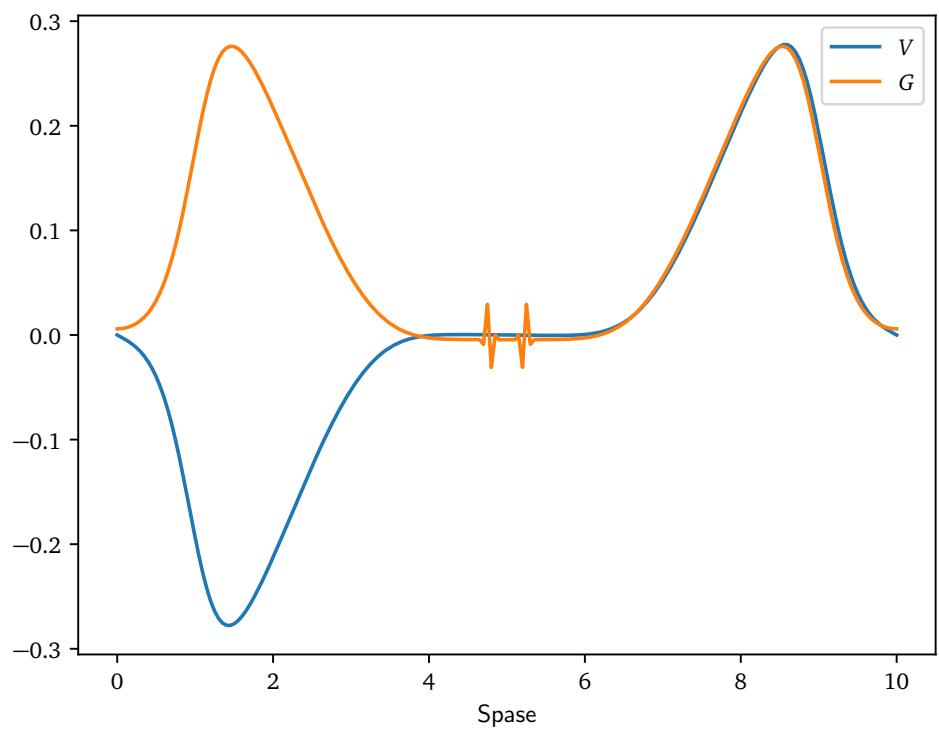


Рис. 16: Срез для $t = 3$.

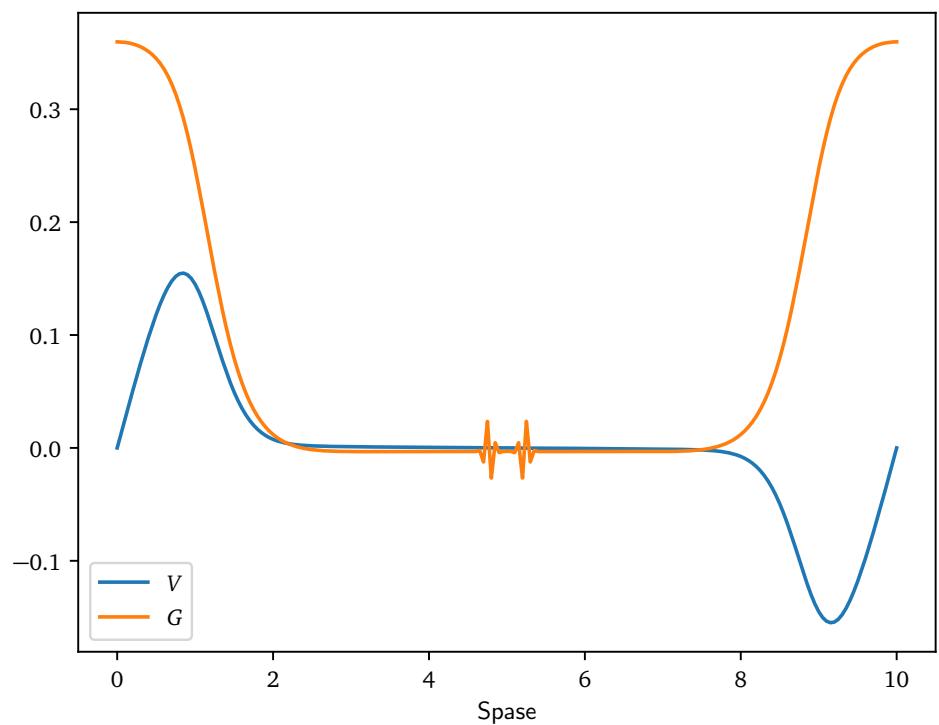


Рис. 17: Срез для $t = 5$.

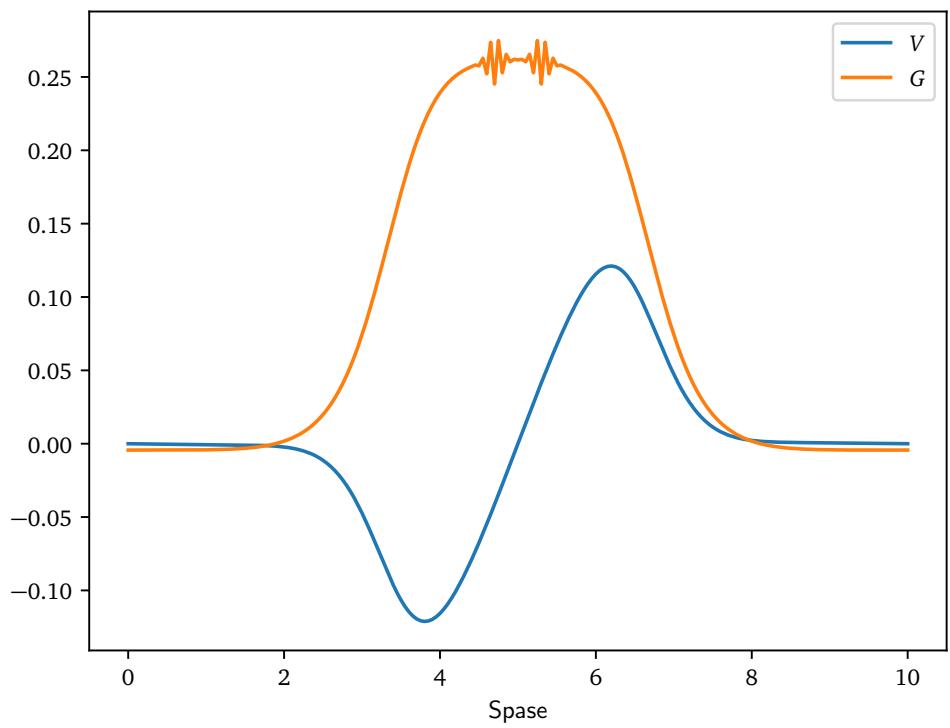


Рис. 18: Срез для $t = 10$.

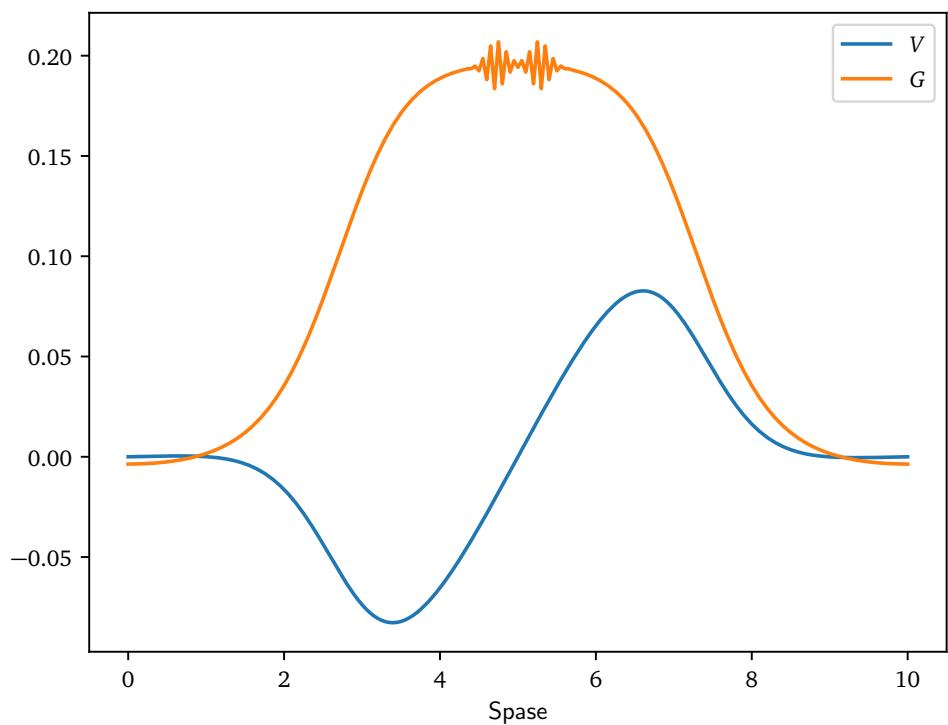


Рис. 19: Срез для $t = 20$.

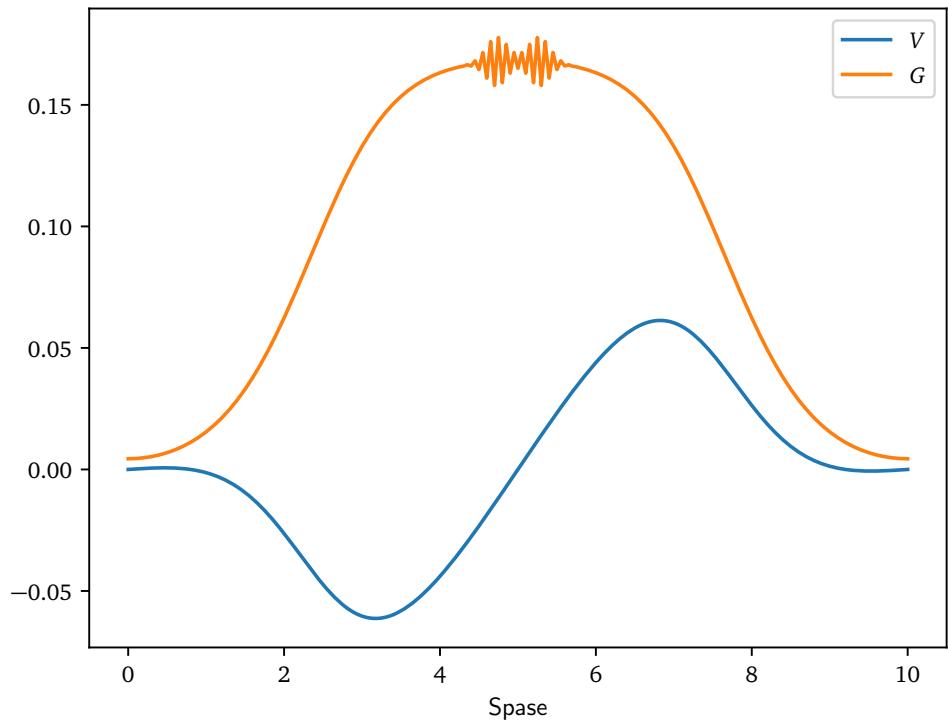


Рис. 20: Срез для $t = 30$.

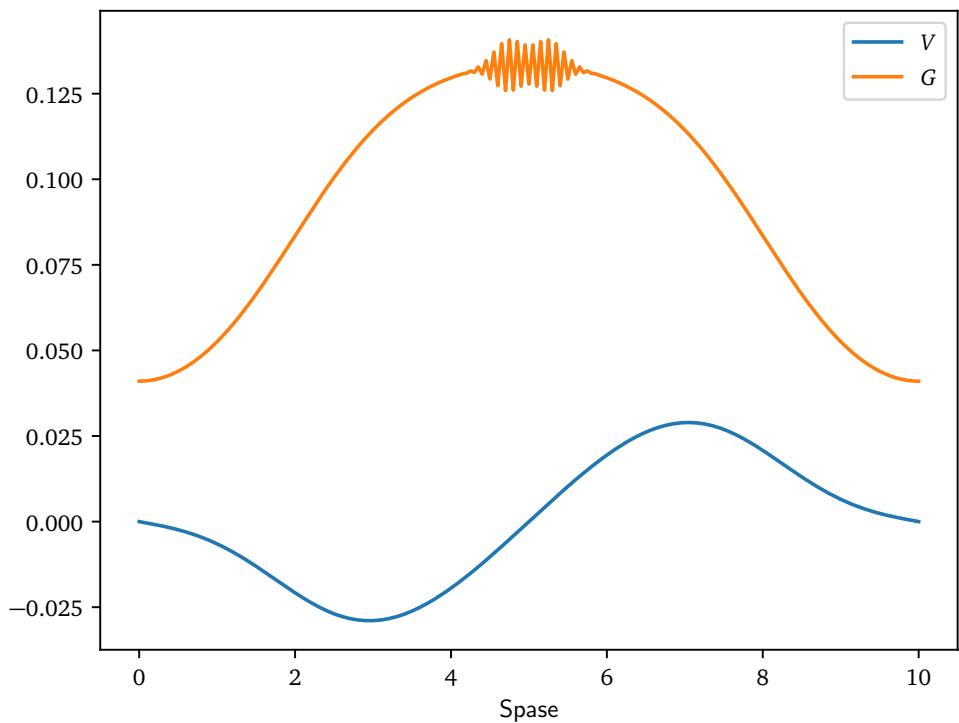


Рис. 21: Срез для $t = 60$.

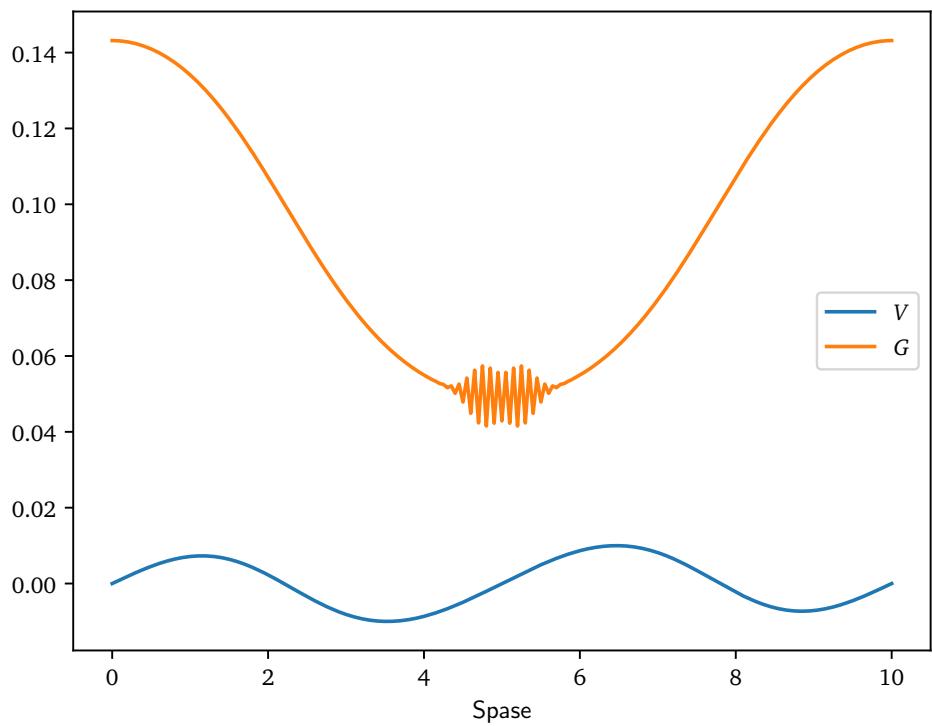


Рис. 22: Срез для $t = 64.129$.

4.2.4 Цикличность решения

Для изучения зависимости периода от параметров μ и C рассмотрим графики V и G для $T = 60$.

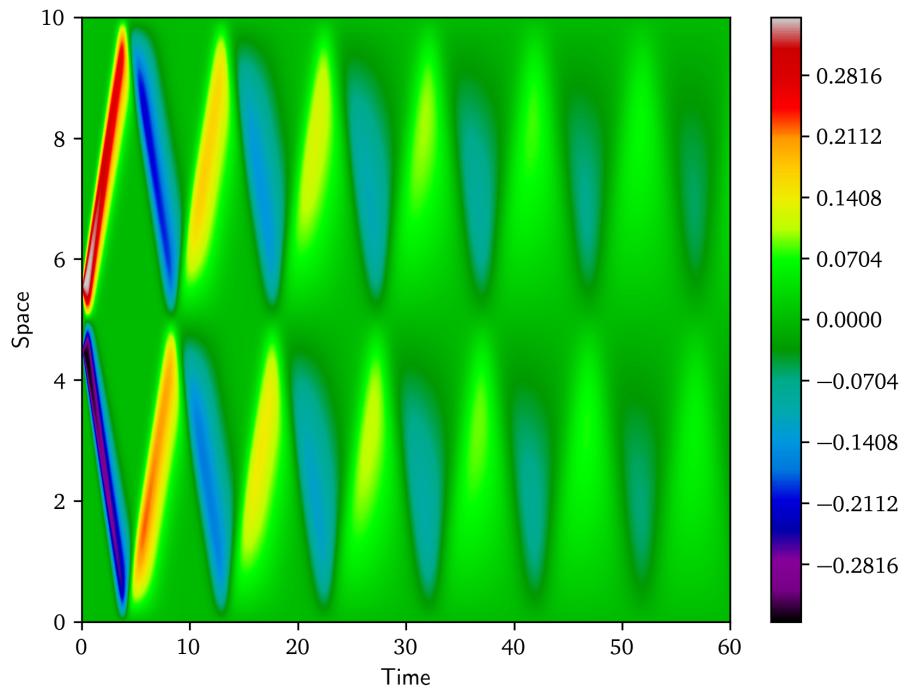


Рис. 23: График V для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

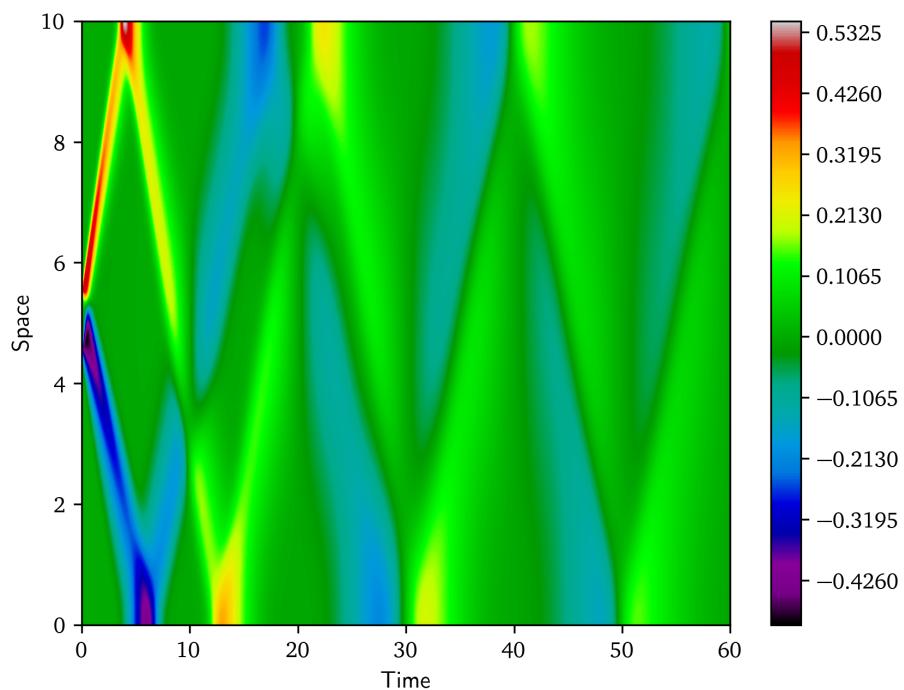


Рис. 24: График G для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

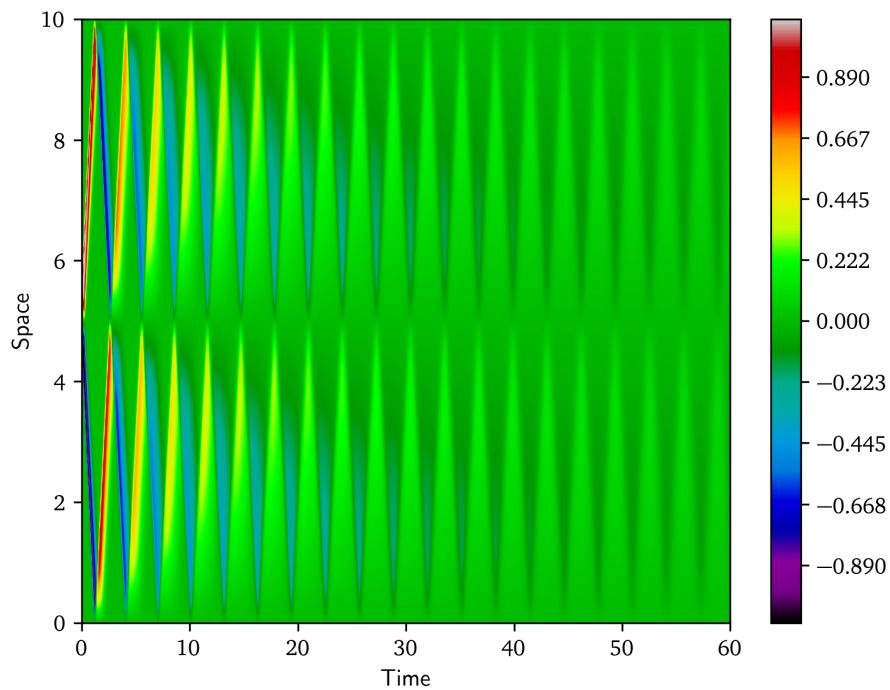


Рис. 25: График V для $T = 60$ при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

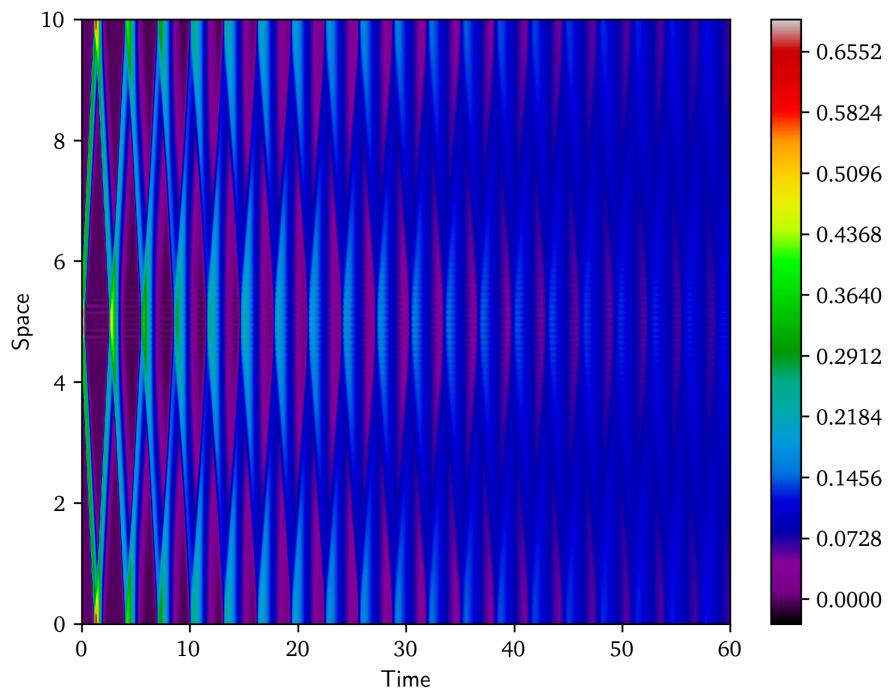


Рис. 26: График G для $T = 60$ при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

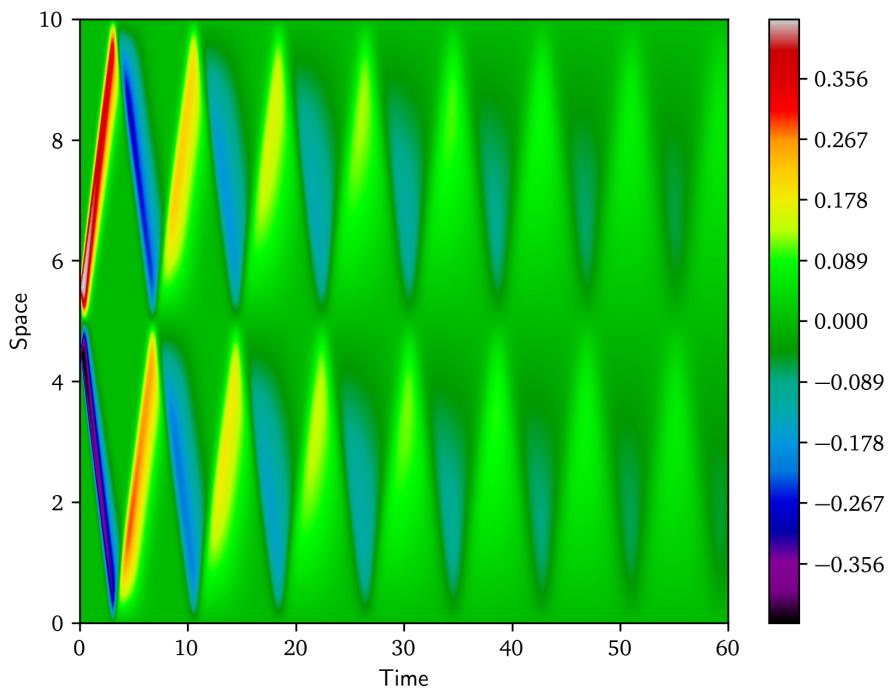


Рис. 27: График V для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.1$.

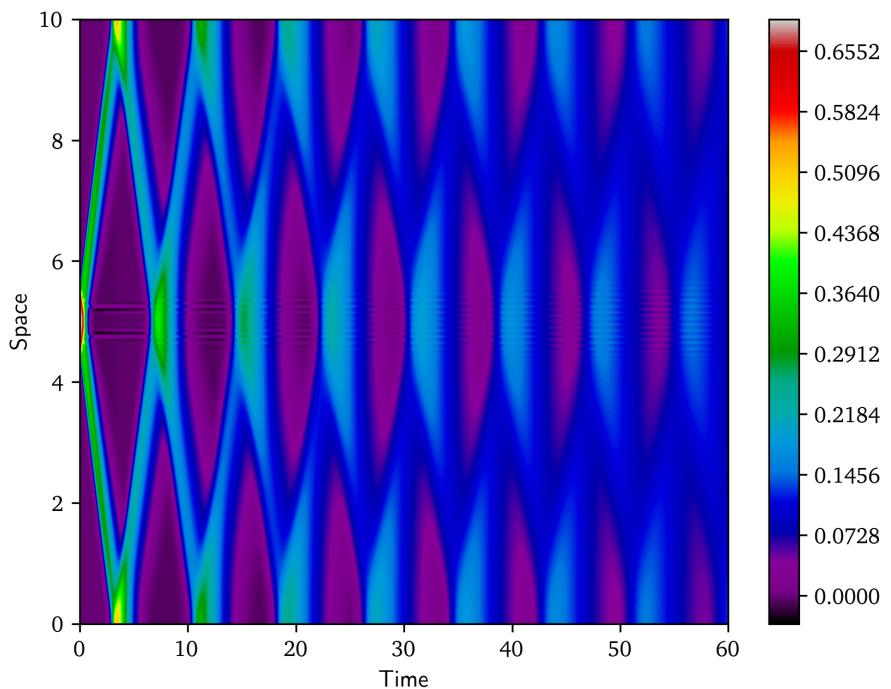


Рис. 28: График G для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.1$.

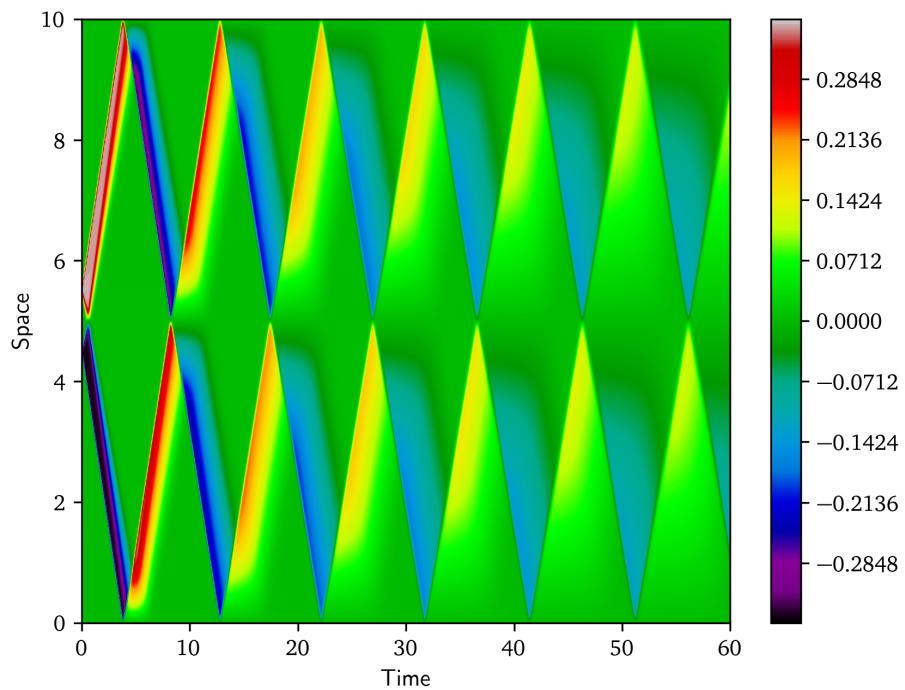


Рис. 29: График V для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

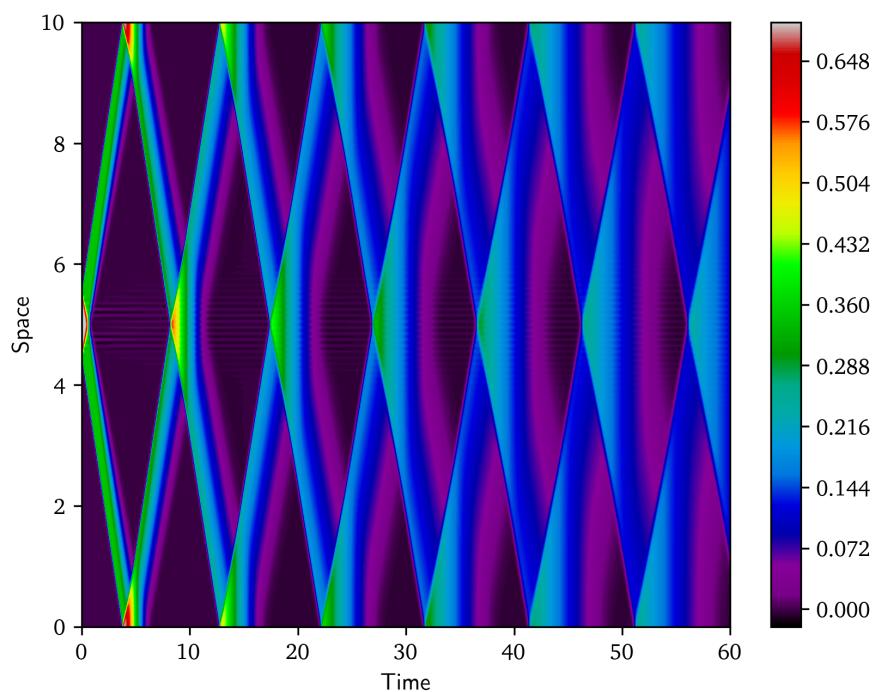


Рис. 30: График G для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

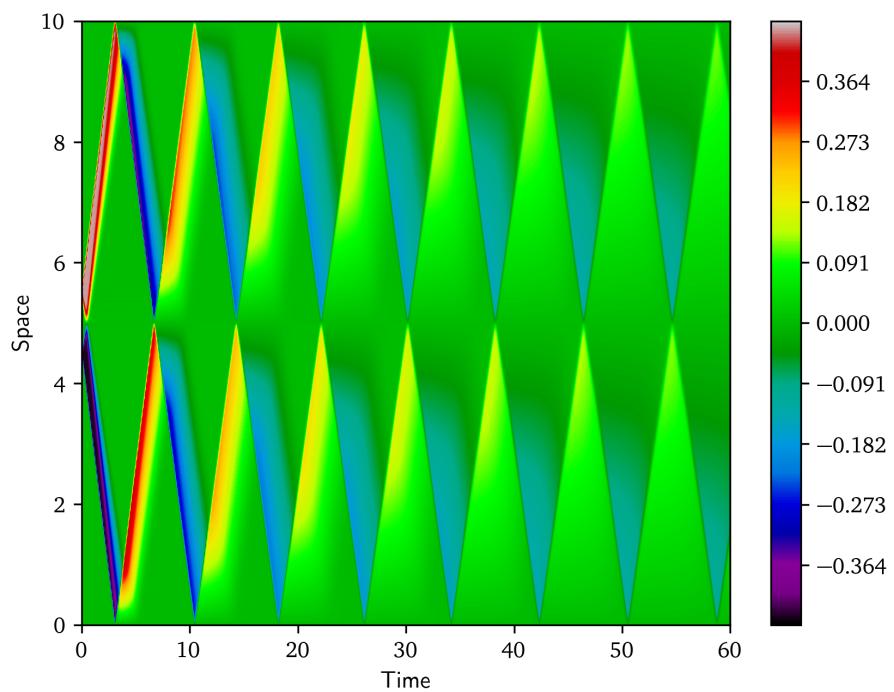


Рис. 31: График V для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

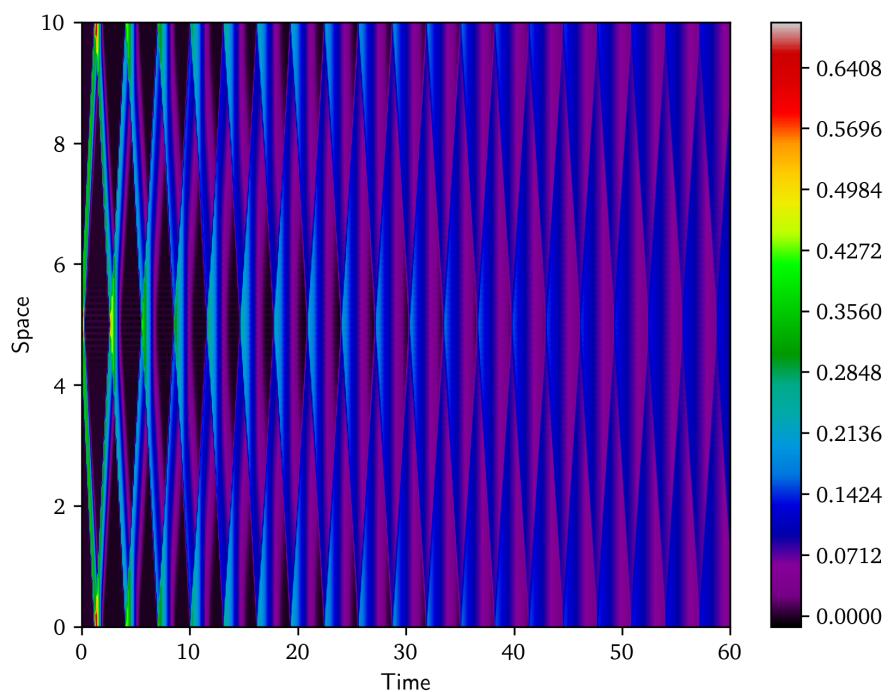


Рис. 32: График G для $T = 60$ при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

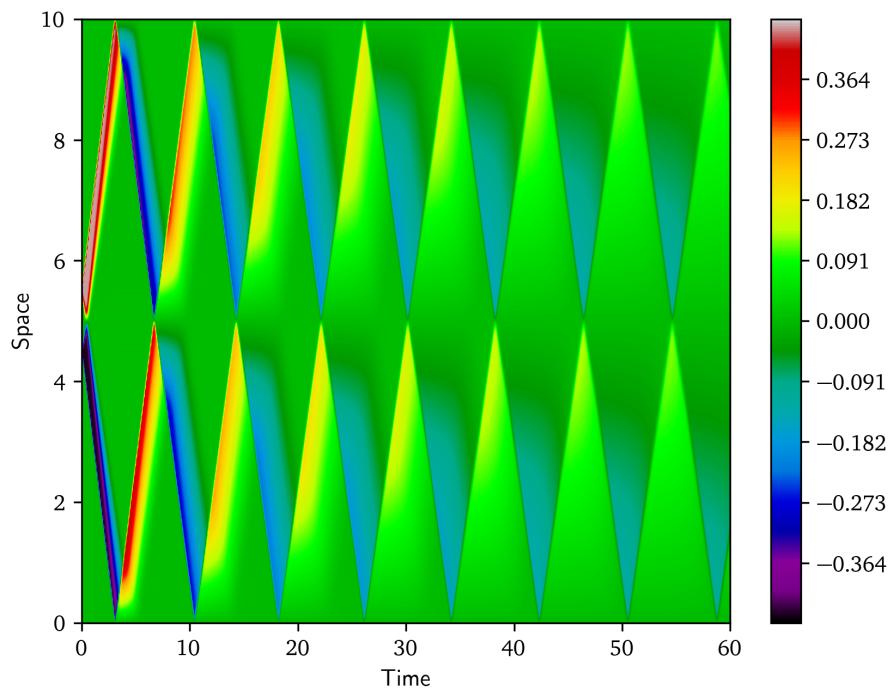


Рис. 33: График V для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

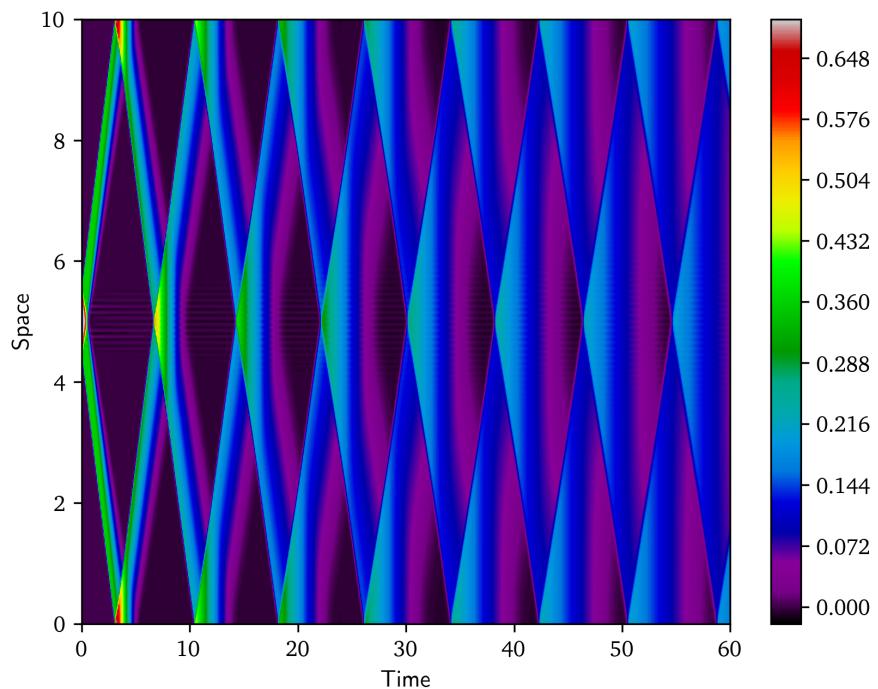


Рис. 34: График G для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

4.3 Численные эксперименты для второй задачи

Рассматривается задача (8). Зафиксируем выбранные опытным путём

$$\tau = 10^{-3}, h = 10^{-2}, \varepsilon = 10^{-2}$$

Будем рассматривать зависимости $p(\rho) = C\rho$ и $p(\rho) = \rho^\gamma$ и внешние параметры

$$(C, \mu) \in \{1, 10\} \times \{0.1, 0.01\}, \gamma = 1.4$$

4.3.1 Время стабилизации и ошибки решения

Далее приведена таблица значений $\|V^n\|_C$.

В каждой ячейке таблицы приведены значения для сеток $\bar{Q}_{\tau,h}$, $\bar{Q}_{\tau,h/2}$, $\bar{Q}_{\tau/2,h}$, $\bar{Q}_{\tau/2,h/2}$ соответственно.

	$N_0\tau$	$n = N_0/4$	$n = N_0/2$	$n = 3N_0/4$	$n = N_0$
$C = 1$ $\mu = 0.1$	184.3500	8.886548e-02	5.388636e-02	4.877991e-02	9.999477e-03
	184.3500	8.919424e-02	5.393855e-02	4.885916e-02	9.993337e-03
	184.3425	8.934444e-02	5.383778e-02	4.894741e-02	9.999198e-03
	184.3415	8.967087e-02	5.389481e-02	4.902369e-02	9.999165e-03
$C = 10$ $\mu = 0.1$	175.4550	1.374919e-01	5.963245e-02	2.829286e-02	9.983011e-03
	175.4560	1.380566e-01	5.976881e-02	2.835861e-02	9.979256e-03
	181.7615	8.194504e-02	5.846756e-02	4.922889e-02	9.994833e-03
	181.7625	8.226672e-02	5.857504e-02	4.927390e-02	9.989039e-03
$\gamma = 1.4$ $\mu = 0.1$	172.6220	1.252231e-01	4.962046e-02	2.412003e-02	9.994579e-03
	172.6210	1.254738e-01	4.966349e-02	2.413016e-02	9.993789e-03
	172.6015	1.253727e-01	4.953880e-02	2.406413e-02	9.996995e-03
	172.6000	1.256190e-01	4.957248e-02	2.407257e-02	9.998391e-03
$C = 1$ $\mu = 0.01$	392.5260	7.733281e-02	3.001341e-02	2.015440e-02	9.999783e-03
	392.5280	7.729101e-02	3.001539e-02	2.016473e-02	9.999348e-03
	392.0380	7.784926e-02	3.207508e-02	2.176397e-02	9.999605e-03
	392.0440	7.778733e-02	3.206222e-02	2.176099e-02	9.998503e-03
$C = 10$ $\mu = 0.01$	362.4490	5.245965e-02	3.269616e-02	3.009808e-02	9.994111e-03
	362.4540	5.231688e-02	3.277787e-02	3.013160e-02	9.998888e-03
	397.0865	5.245549e-02	3.063892e-02	2.395196e-02	9.996693e-03
	397.0940	5.265153e-02	3.062478e-02	2.395796e-02	9.996735e-03
$\gamma = 1.4$ $\mu = 0.01$	332.1150	7.612149e-02	2.920087e-02	2.000274e-02	9.996802e-03
	332.1220	7.605316e-02	2.917871e-02	1.998675e-02	9.999171e-03
	331.4605	7.658333e-02	3.178026e-02	2.209219e-02	9.998891e-03
	331.4700	7.648937e-02	3.173733e-02	2.206651e-02	9.997896e-03

Таблица 51: Ошибки для скорости при $\tau = 10^{-3}$, $h = 10^{-2}$.

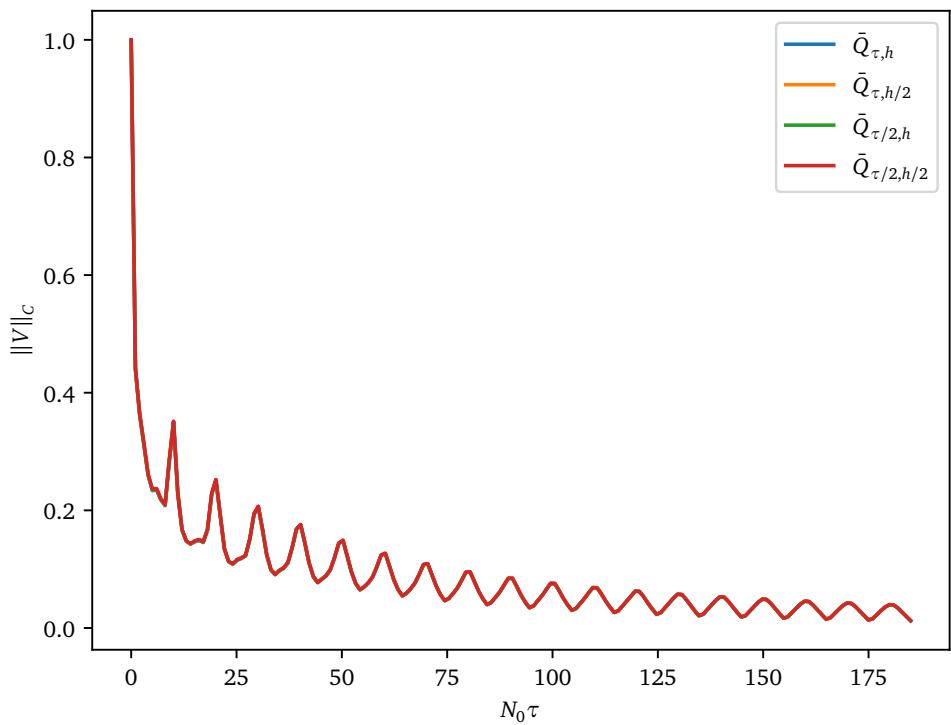


Рис. 35: График $\|V\|_C$ при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

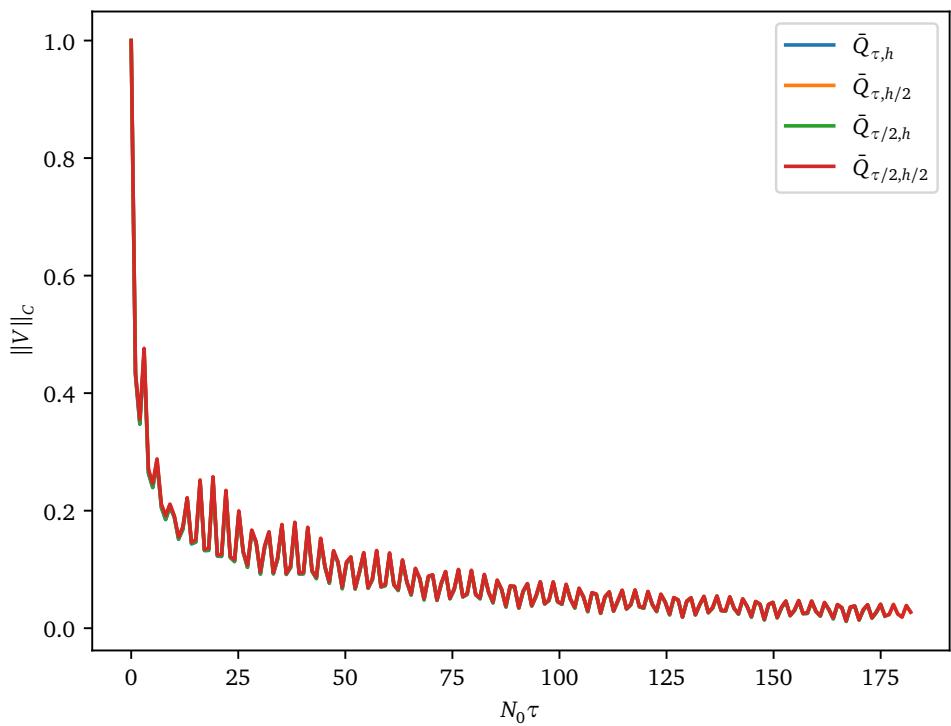


Рис. 36: График $\|V\|_C$ при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

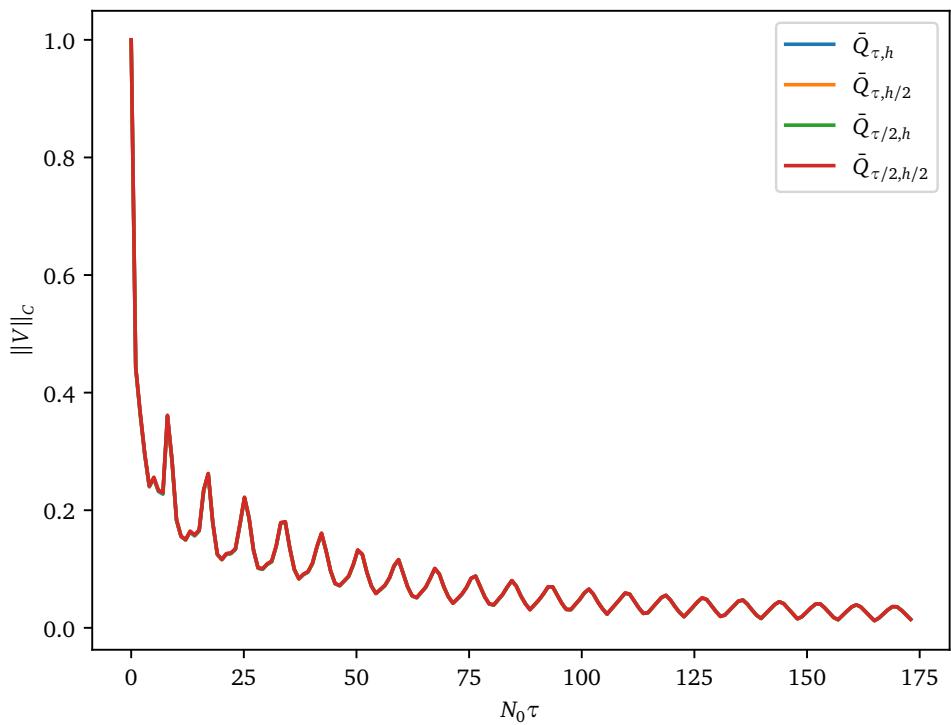


Рис. 37: График $\|V\|_C$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.1$.

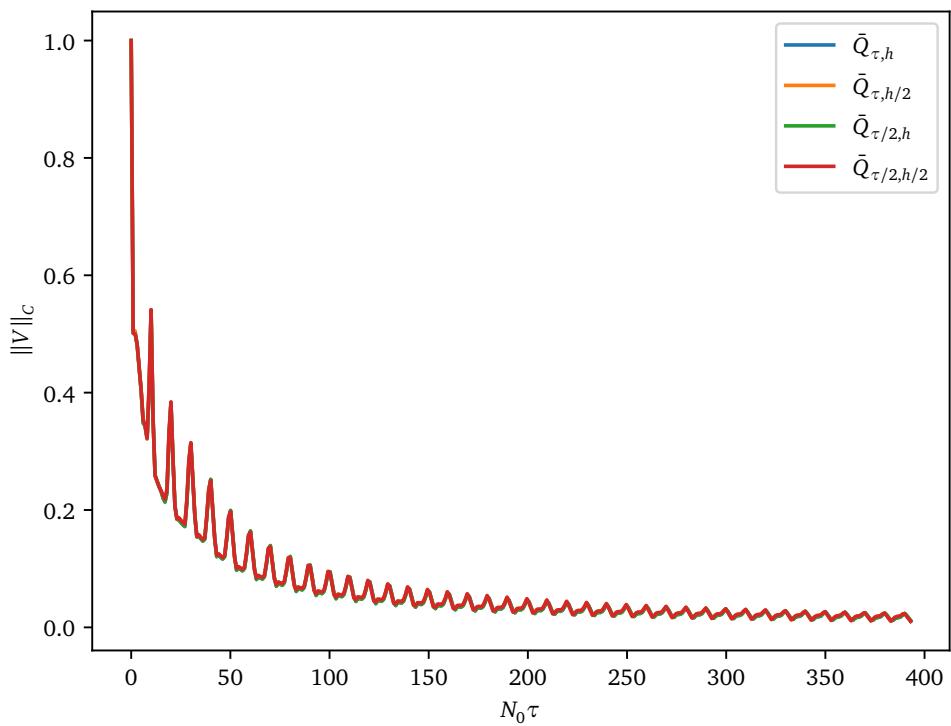


Рис. 38: График $\|V\|_C$ при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

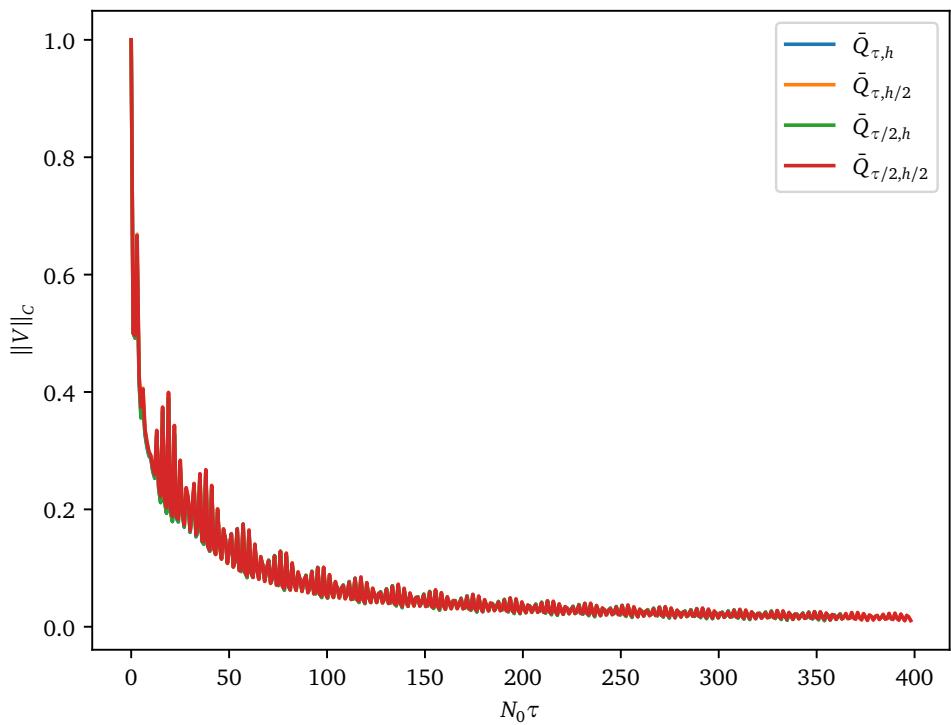


Рис. 39: График $\|V\|_C$ при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

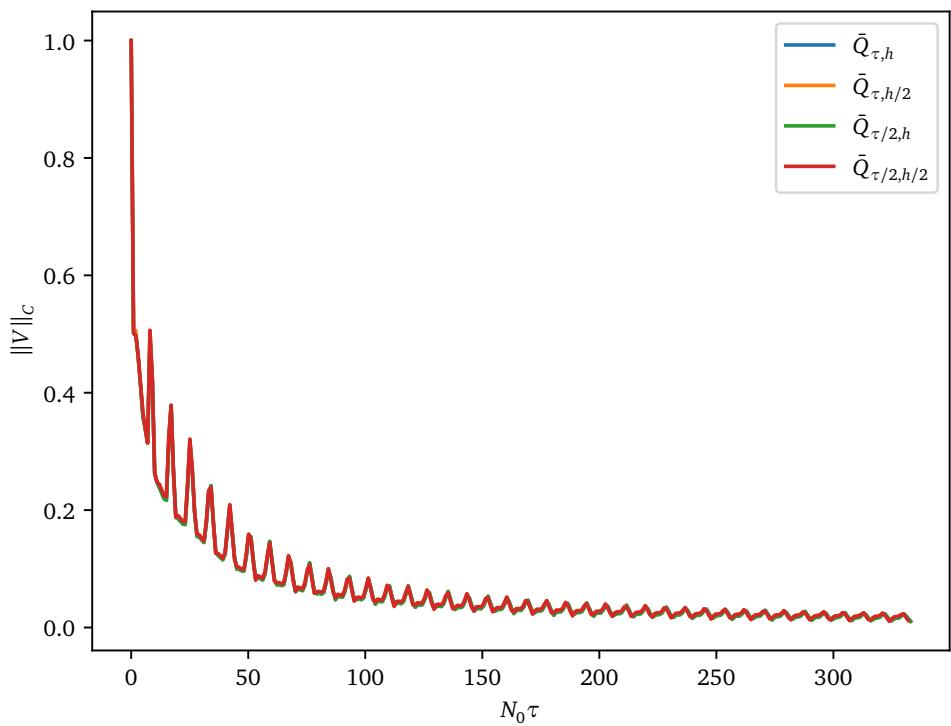


Рис. 40: График $\|V\|_C$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

4.3.2 Консервативность решения

Далее приведена таблица значений $\Delta_m(n)$.

В каждой ячейке таблицы приведены значения для сеток $\bar{Q}_{\tau,h}$, $\bar{Q}_{\tau,h/2}$, $\bar{Q}_{\tau/2,h}$, $\bar{Q}_{\tau/2,h/2}$ соответственно.

	$n = N_0/5$	$n = 2N_0/5$	$n = 3N_0/5$	$n = 4N_0/5$	$n = N_0$
$C = 1$ $\mu = 0.1$	-5.502533e-04	-5.082647e-04	-5.182660e-04	-5.563005e-04	-5.423538e-04
	-5.240835e-04	-5.212959e-04	-5.315258e-04	-5.528578e-04	-5.469145e-04
	-3.073558e-04	-2.474553e-04	-2.519579e-04	-2.881160e-04	-2.730784e-04
	-2.792590e-04	-2.584809e-04	-2.633547e-04	-2.826240e-04	-2.756177e-04
$C = 10$ $\mu = 0.1$	-3.752642e-04	-4.166575e-04	-4.345847e-04	-4.430217e-04	-4.475854e-04
	-3.892840e-04	-4.269541e-04	-4.412239e-04	-4.476141e-04	-4.509990e-04
	-2.090744e-04	-2.270015e-04	-2.319483e-04	-2.345223e-04	-2.351807e-04
	-2.108799e-04	-2.286606e-04	-2.338179e-04	-2.361652e-04	-2.370478e-04
$\gamma = 1.4$ $\mu = 0.1$	-3.960099e-04	-4.729305e-04	-5.013921e-04	-5.148312e-04	-5.222728e-04
	-4.373407e-04	-4.946519e-04	-5.135373e-04	-5.220566e-04	-5.266739e-04
	-1.619231e-04	-2.214319e-04	-2.453895e-04	-2.570853e-04	-2.636530e-04
	-2.018598e-04	-2.412881e-04	-2.556287e-04	-2.623858e-04	-2.661221e-04
$C = 1$ $\mu = 0.01$	-4.813085e-03	-4.901972e-03	-4.910707e-03	-4.911720e-03	-4.912010e-03
	-4.763098e-03	-4.869447e-03	-4.885623e-03	-4.890371e-03	-4.892520e-03
	-2.643366e-03	-2.672976e-03	-2.670151e-03	-2.667561e-03	-2.666532e-03
	-2.594086e-03	-2.641625e-03	-2.646474e-03	-2.647439e-03	-2.648000e-03
$C = 10$ $\mu = 0.01$	-2.354446e-03	-2.424573e-03	-2.436201e-03	-2.439728e-03	-2.441108e-03
	-2.358393e-03	-2.434463e-03	-2.448207e-03	-2.452852e-03	-2.454928e-03
	-1.560375e-03	-1.617198e-03	-1.630156e-03	-1.635535e-03	-1.638358e-03
	-1.576917e-03	-1.628091e-03	-1.638939e-03	-1.643201e-03	-1.645361e-03
$\gamma = 1.4$ $\mu = 0.01$	-4.403951e-03	-4.490887e-03	-4.500512e-03	-4.502095e-03	-4.502695e-03
	-4.365085e-03	-4.466641e-03	-4.482495e-03	-4.487232e-03	-4.489388e-03
	-2.463738e-03	-2.496054e-03	-2.494983e-03	-2.493373e-03	-2.492964e-03
	-2.420670e-03	-2.468070e-03	-2.473488e-03	-2.474819e-03	-2.475626e-03

Таблица 52: Разность масс при $\tau = 10^{-3}$, $h = 10^{-2}$.

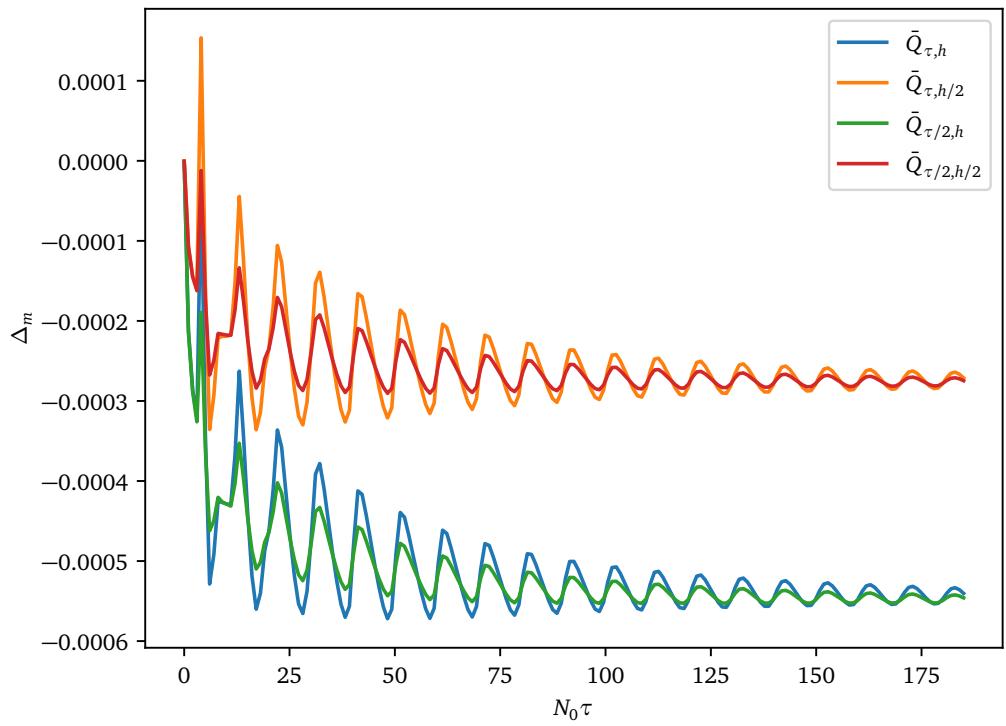


Рис. 41: График Δ_m при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

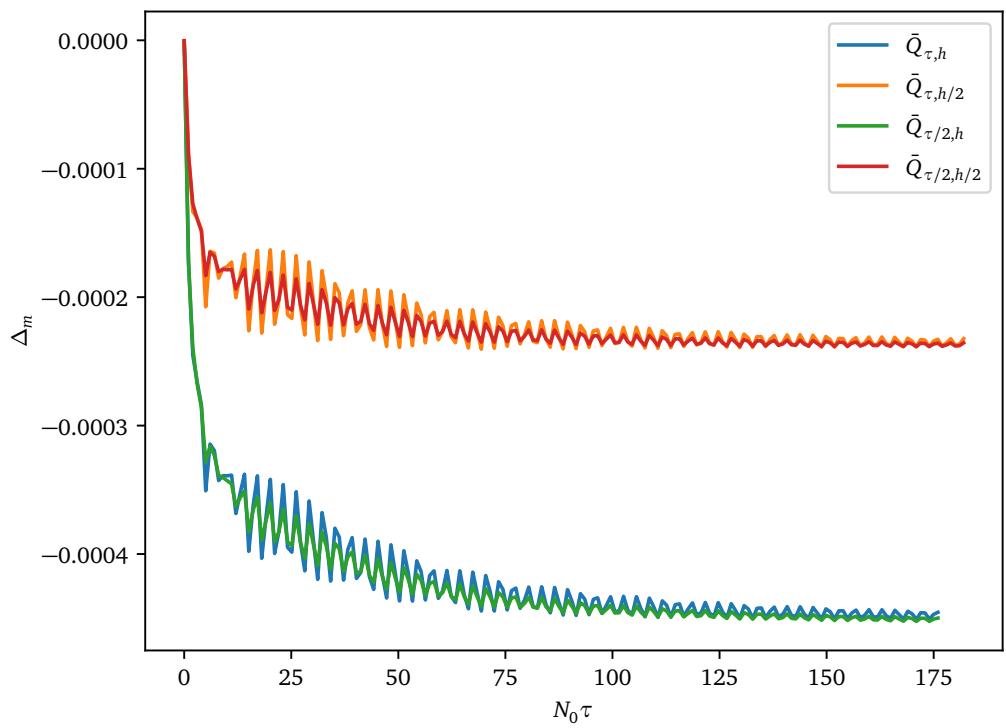


Рис. 42: График Δ_m при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

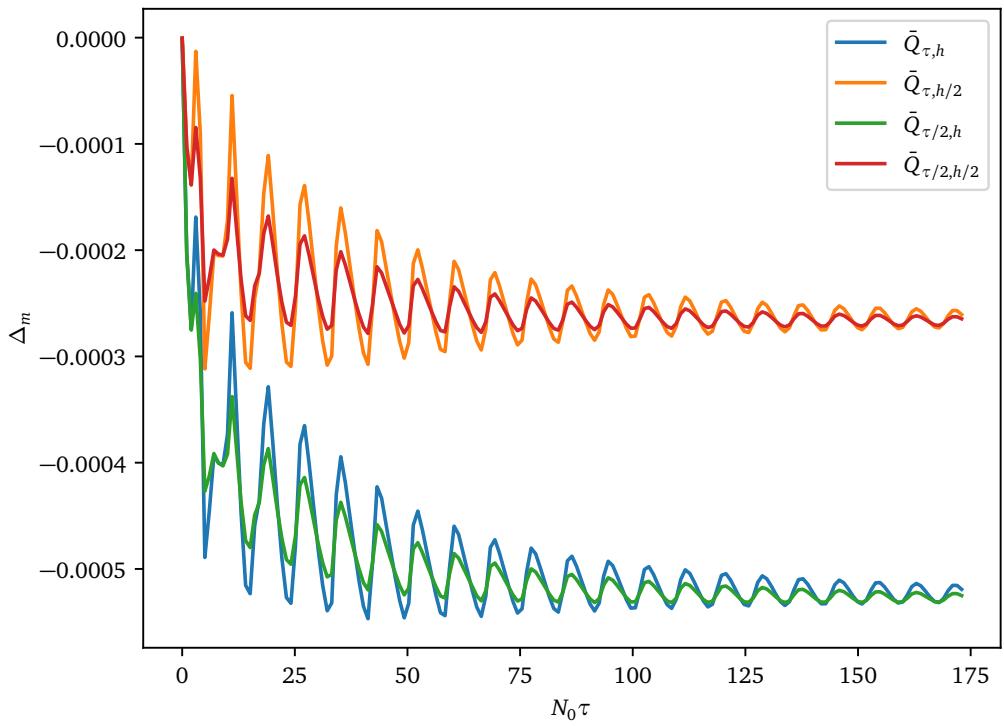


Рис. 43: График Δ_m при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.1$.

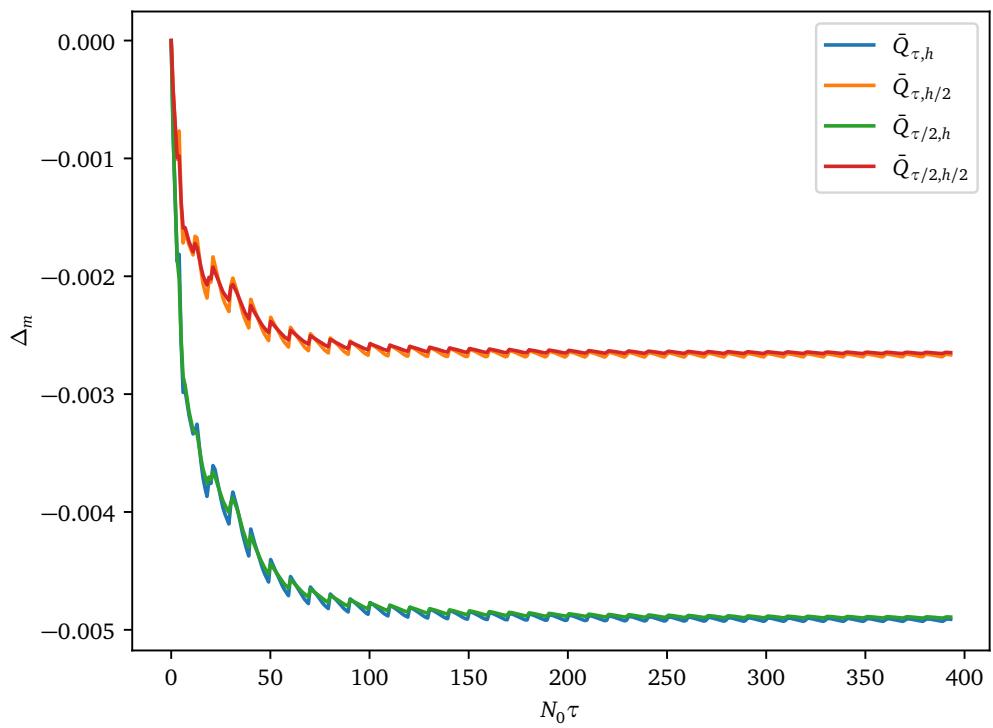


Рис. 44: График Δ_m при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

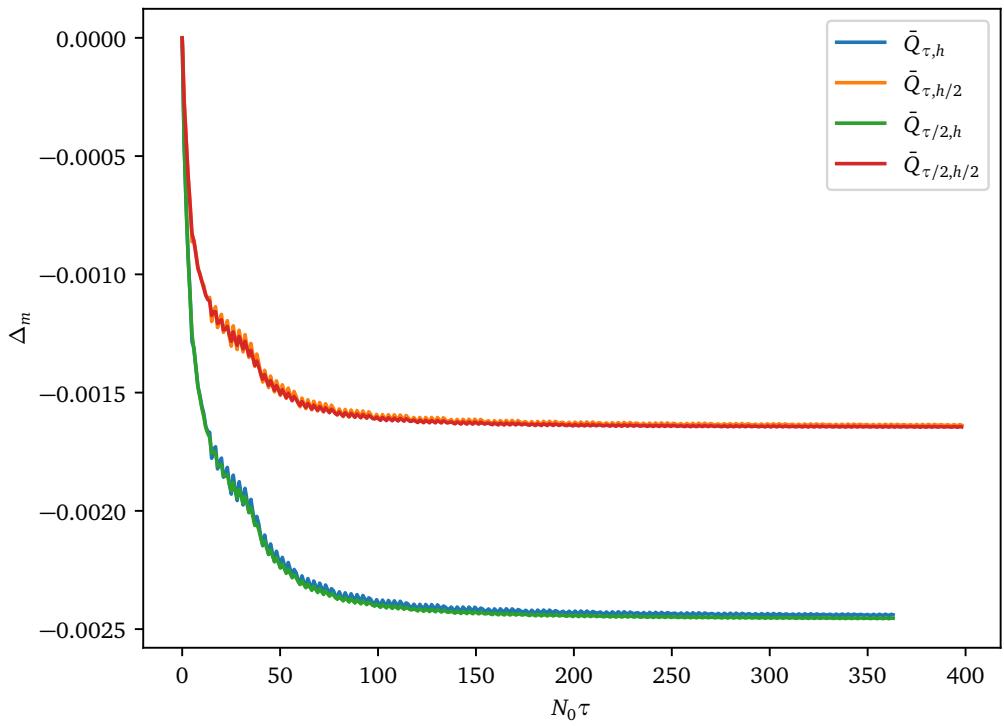


Рис. 45: График Δ_m при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

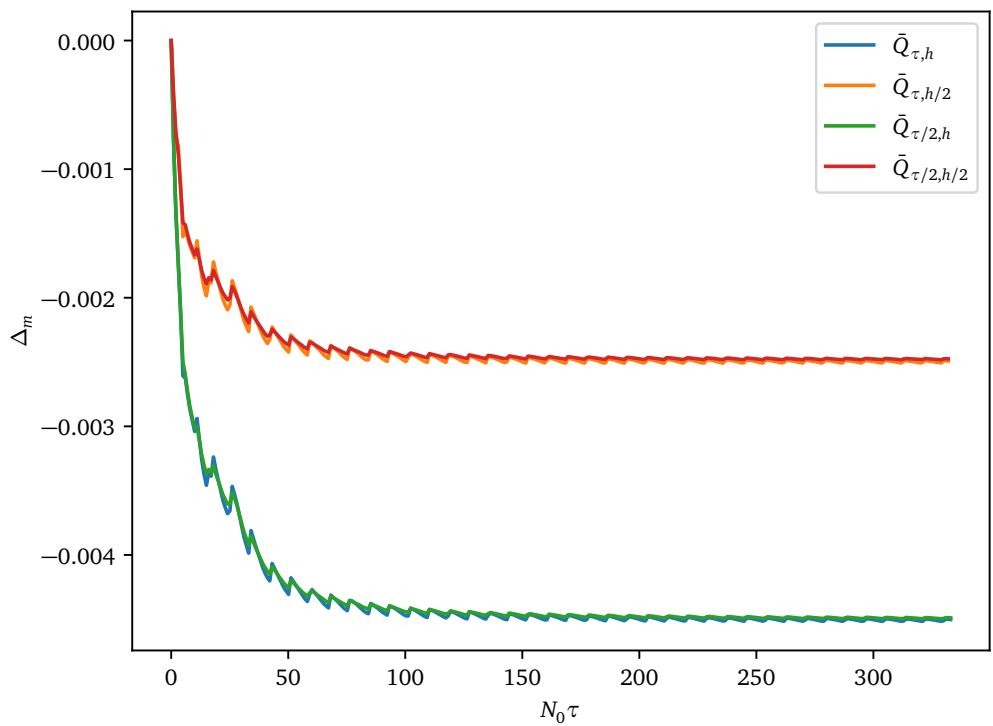


Рис. 46: График Δ_m при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

4.3.3 Динамика процесса решения

Рассмотрим $C = 1$, $\gamma = 1$, $\mu = 0.1$. Далее приведены срезы графиков V и G (динамика процесса) в разные моменты времени.

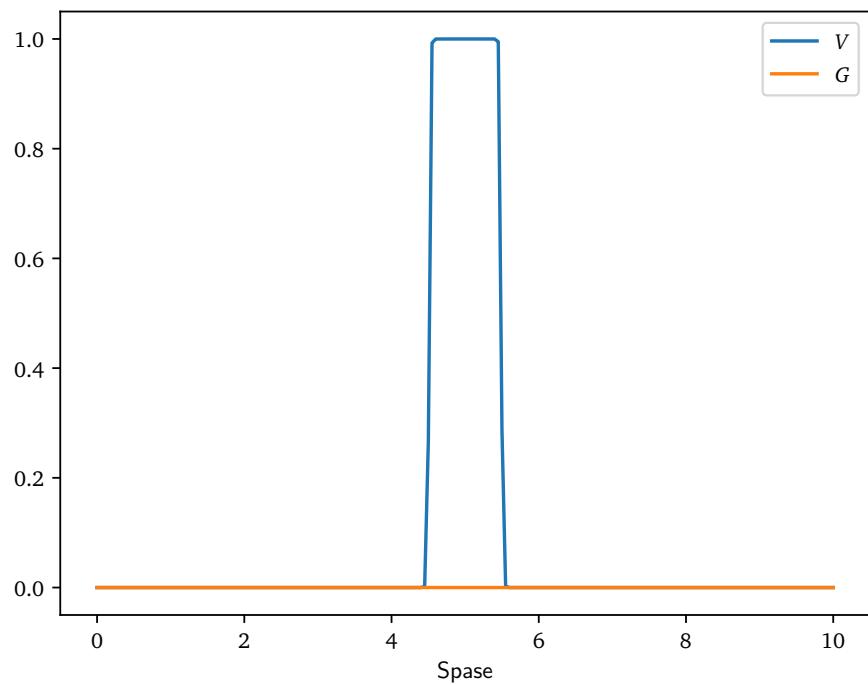


Рис. 47: Срез для $t = 0$.

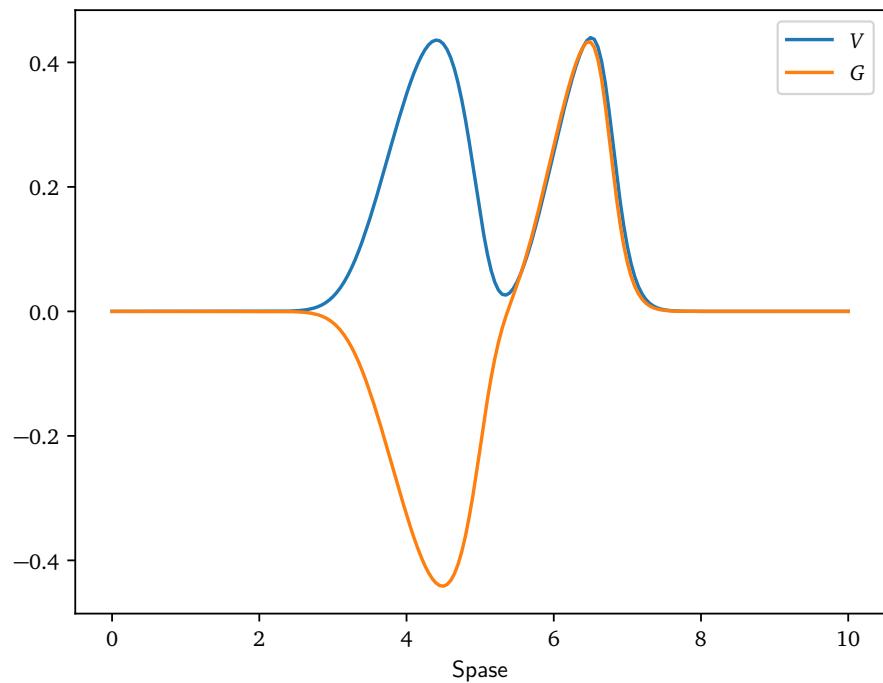


Рис. 48: Срез для $t = 1$.

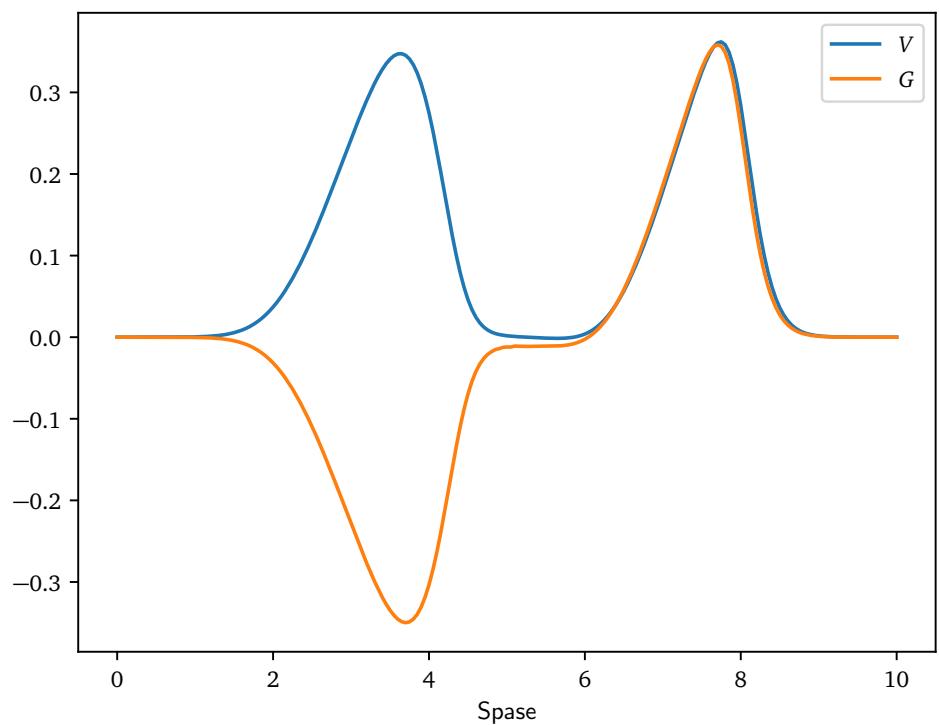


Рис. 49: Срез для $t = 2$.

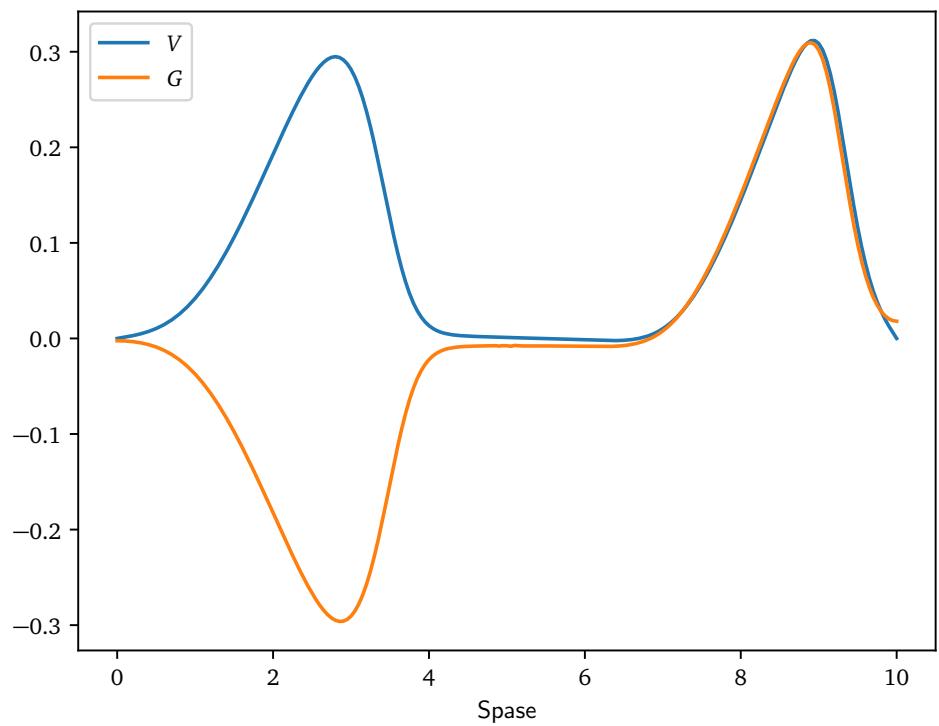


Рис. 50: Срез для $t = 3$.

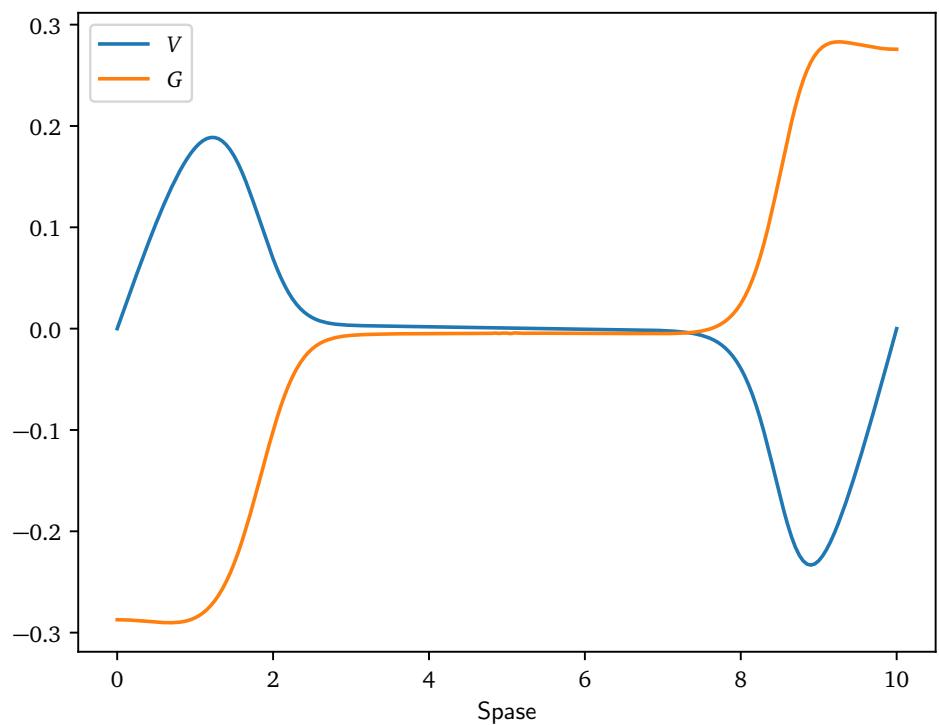


Рис. 51: Срез для $t = 5$.

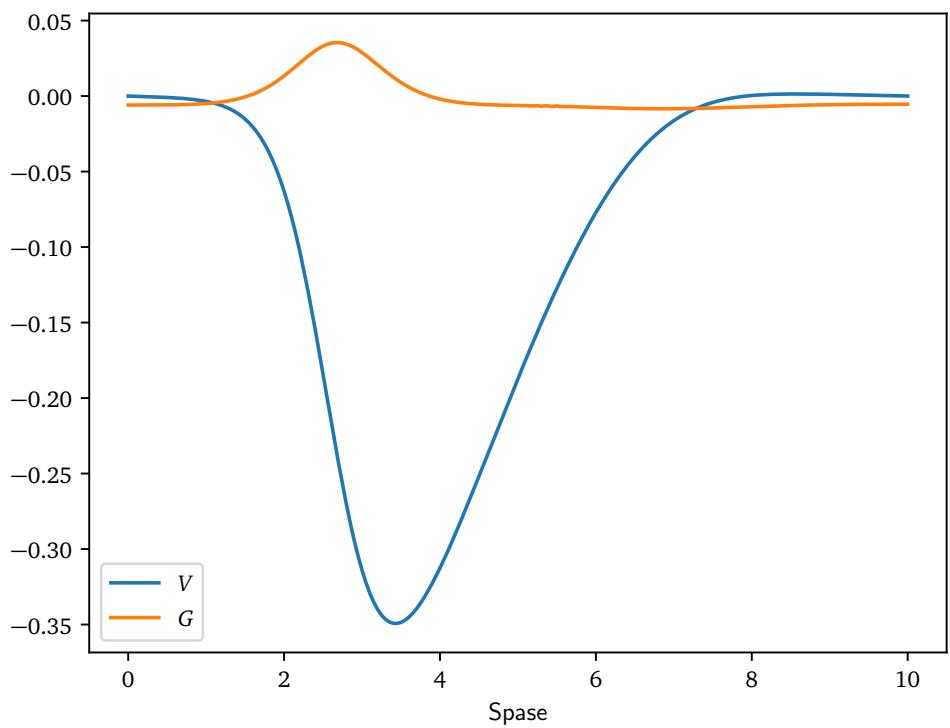


Рис. 52: Срез для $t = 10$.

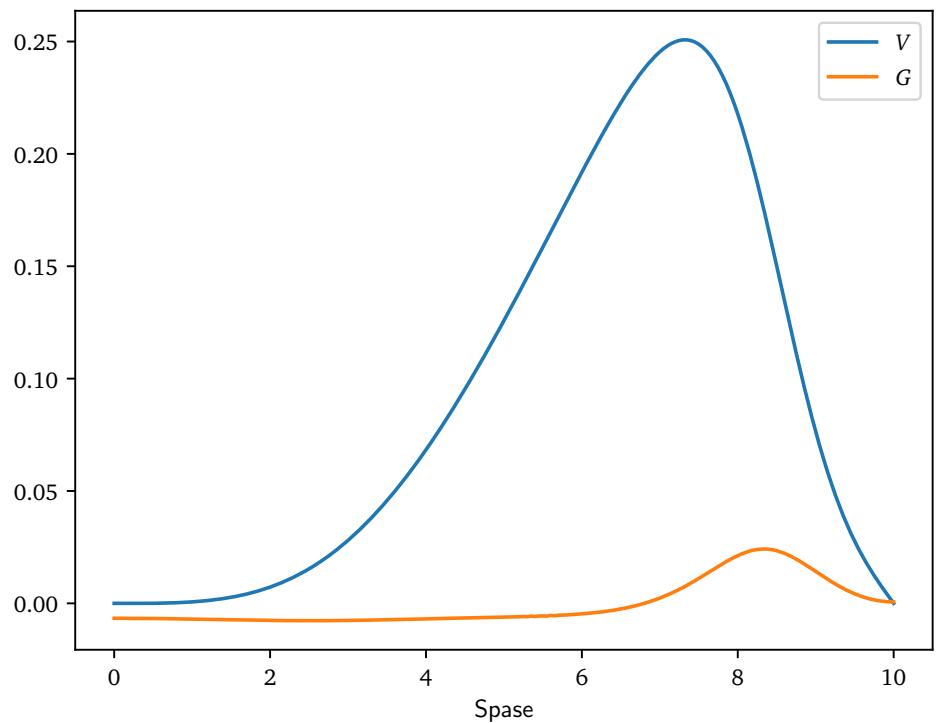


Рис. 53: Срез для $t = 20$.

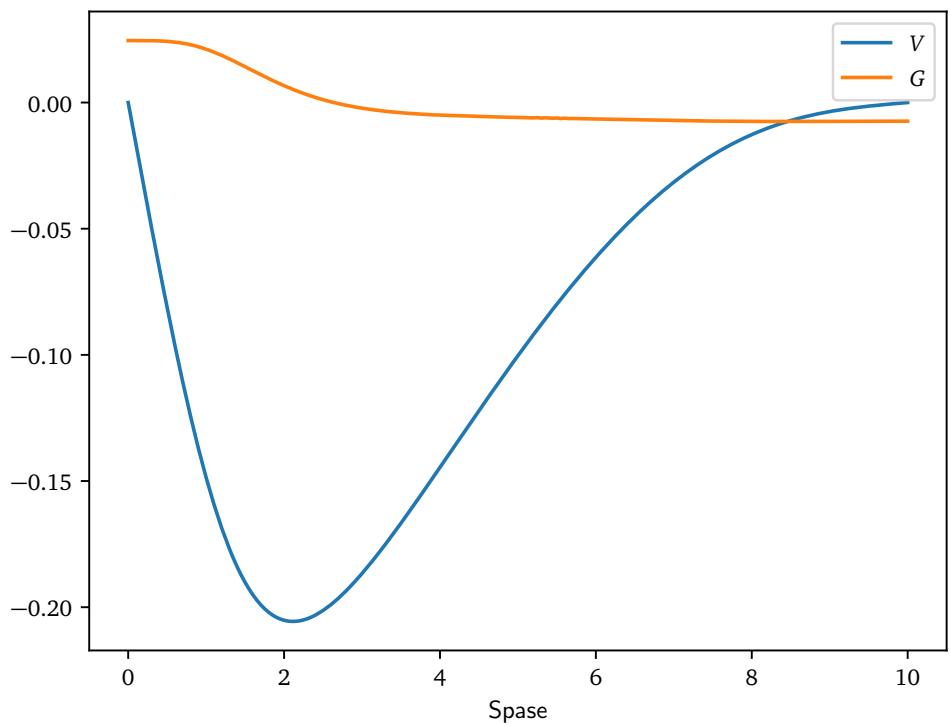


Рис. 54: Срез для $t = 30$.

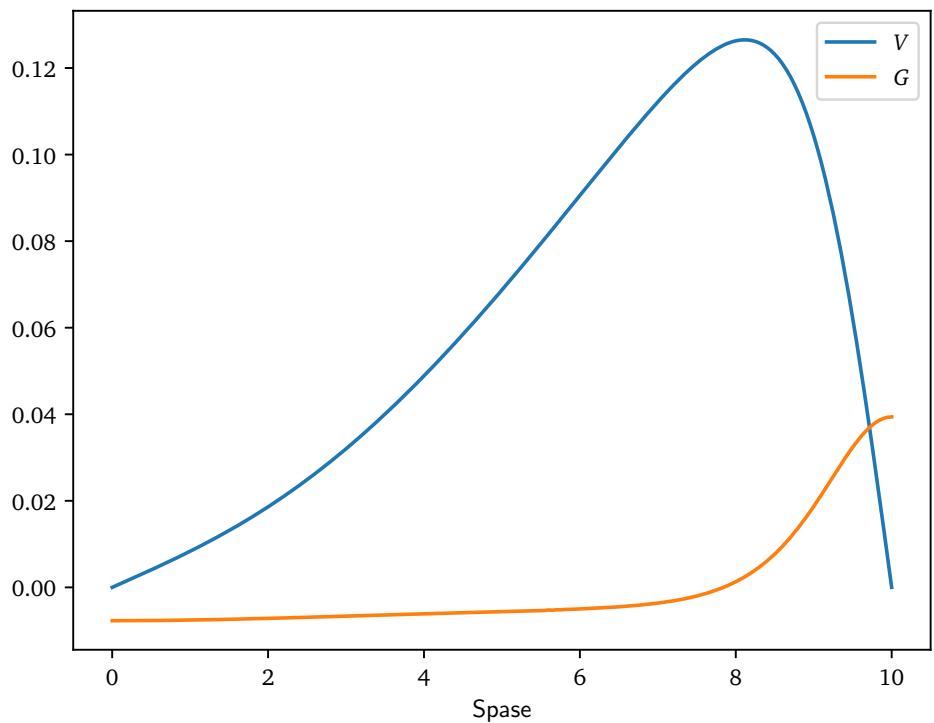


Рис. 55: Срез для $t = 60$.

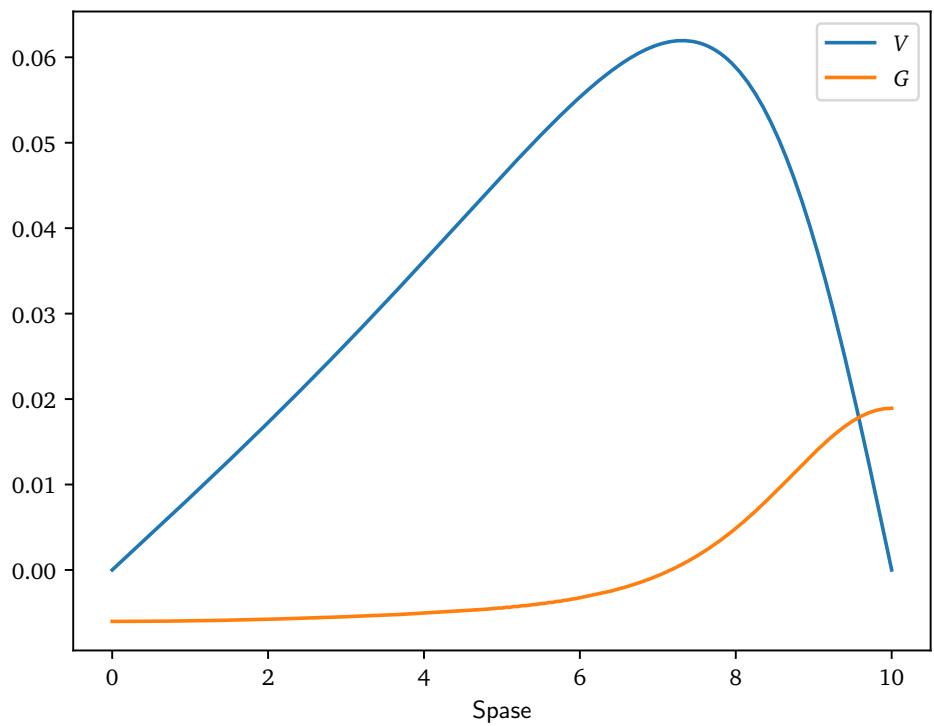


Рис. 56: Срез для $t = 120$.

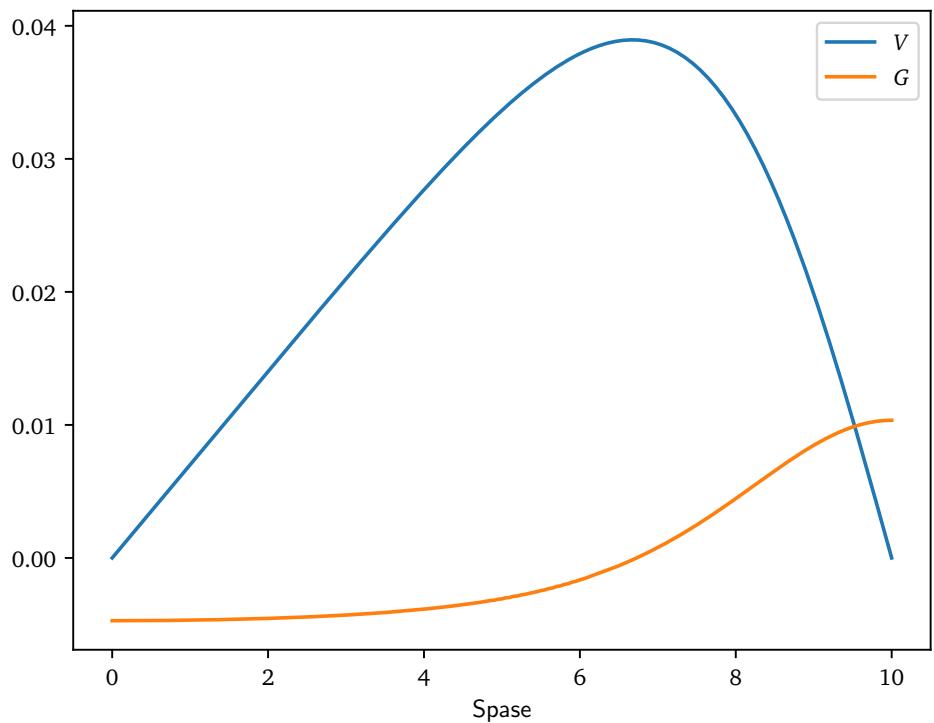


Рис. 57: Срез для $t = 180$.

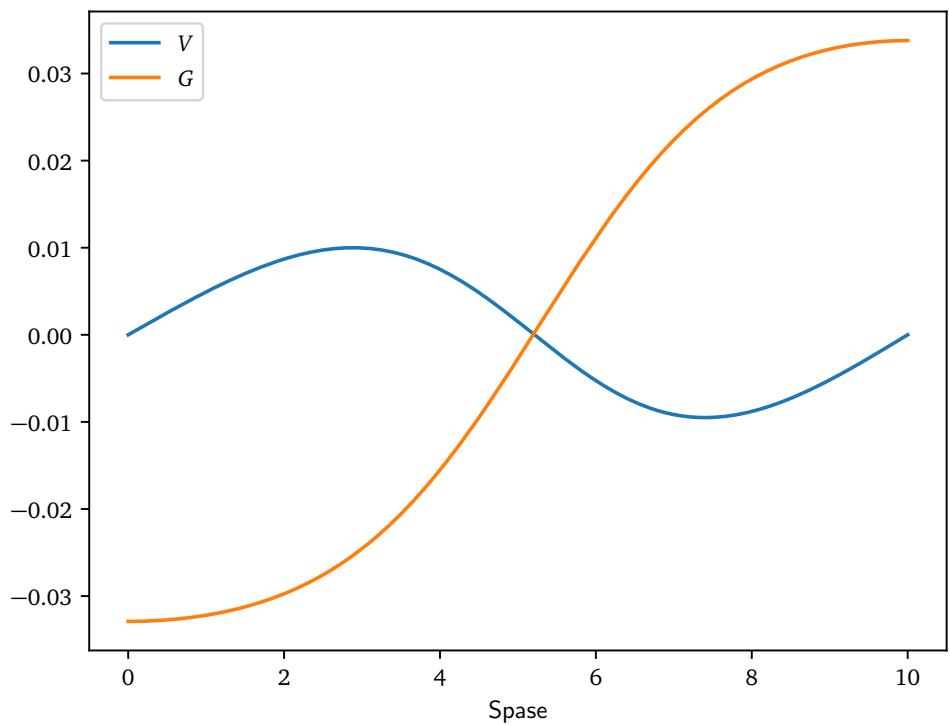


Рис. 58: Срез для $t = 184.35$.

4.3.4 Цикличность решения

Для изучения зависимости периода от параметров μ и C рассмотрим графики V и G для $T = 60$.

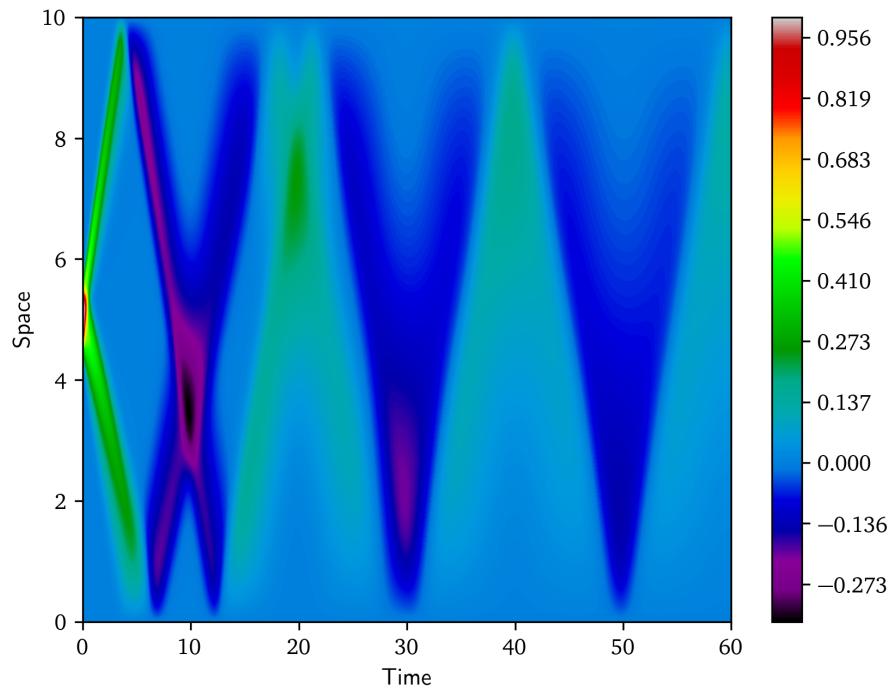


Рис. 59: График V для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

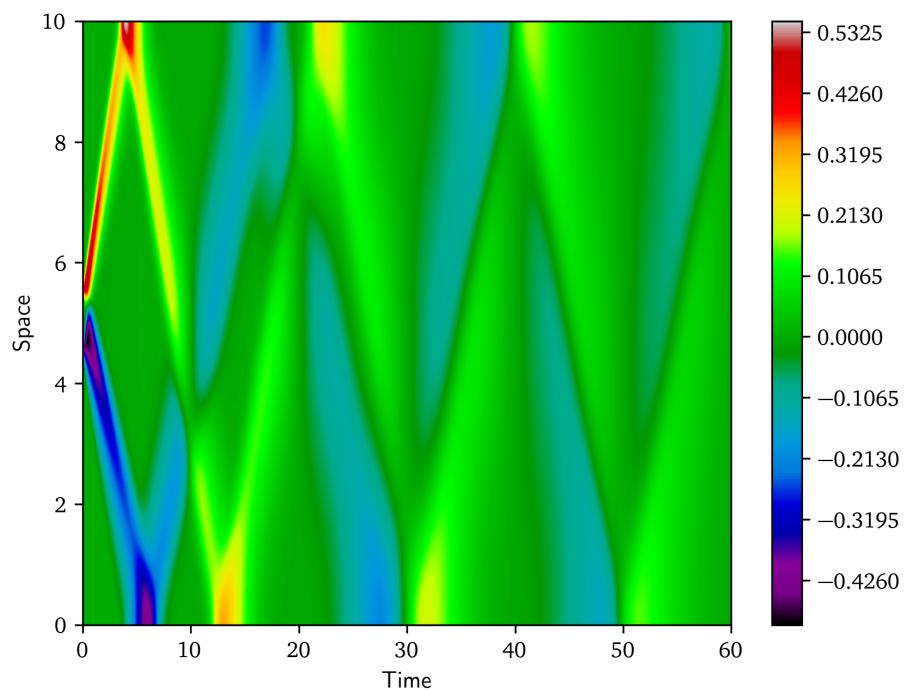


Рис. 60: График G для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

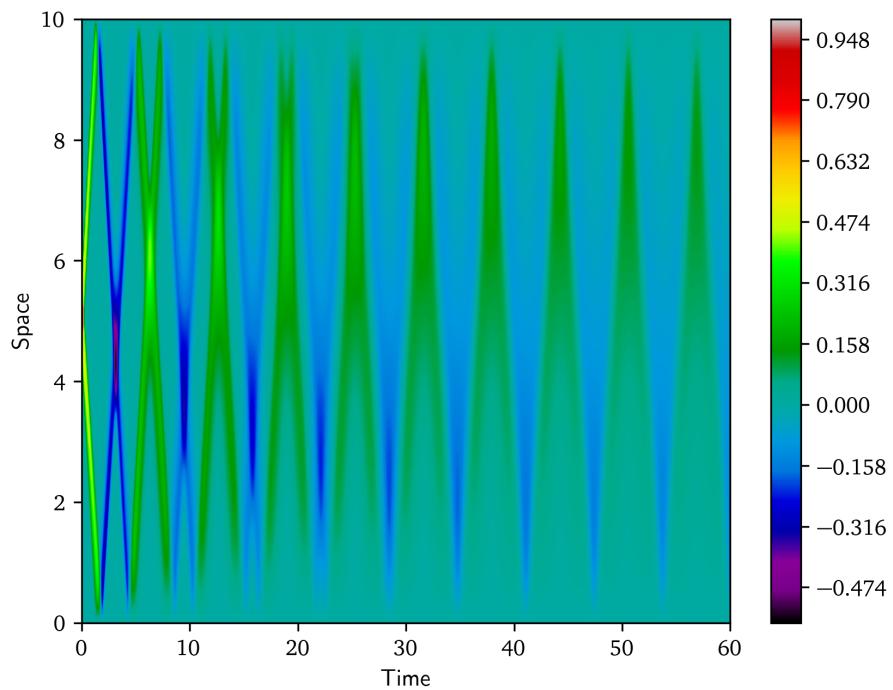


Рис. 61: График V для $T = 60$ при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

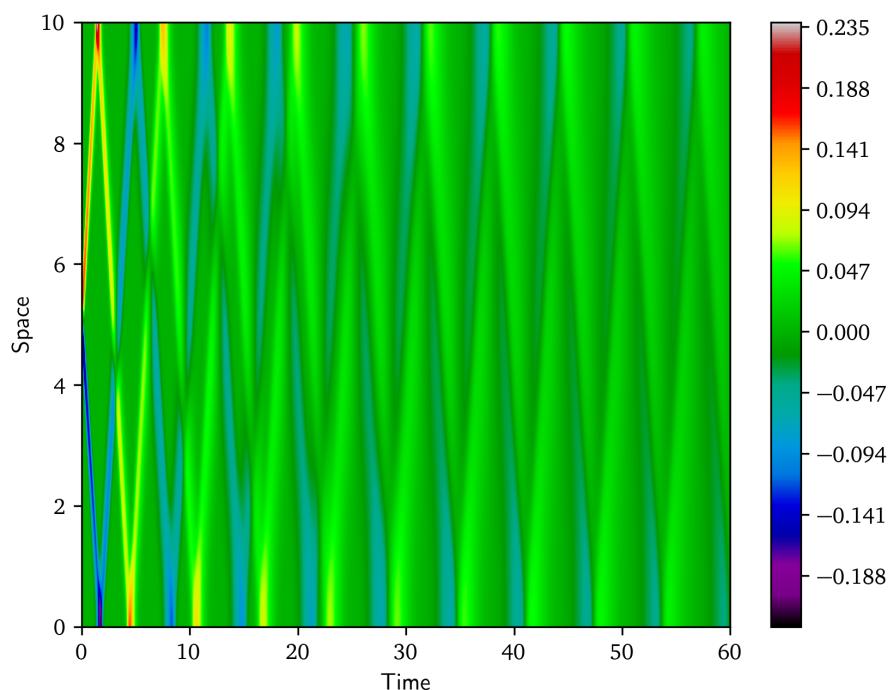


Рис. 62: График G для $T = 60$ при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

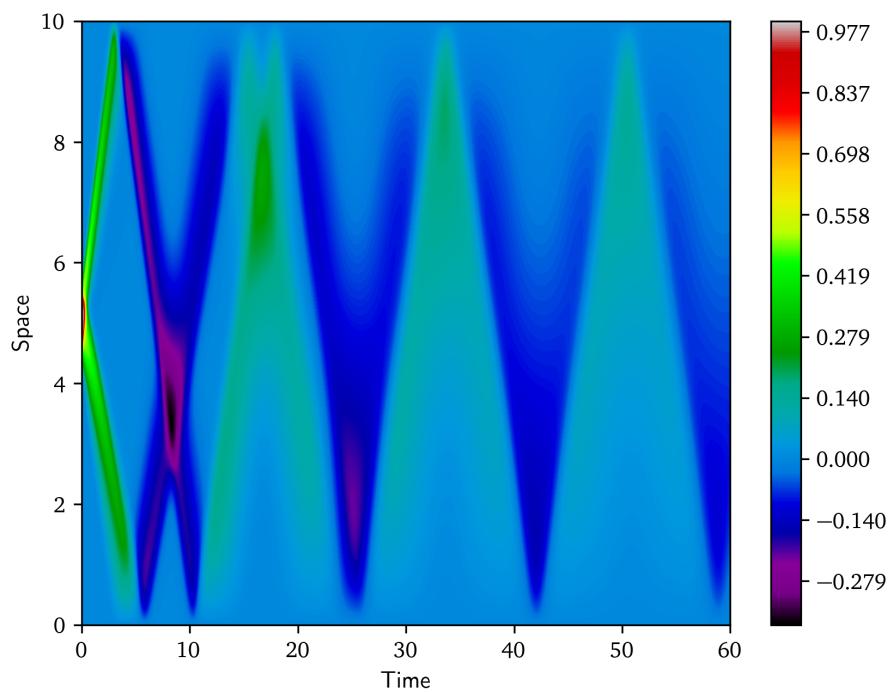


Рис. 63: График V для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.1$.

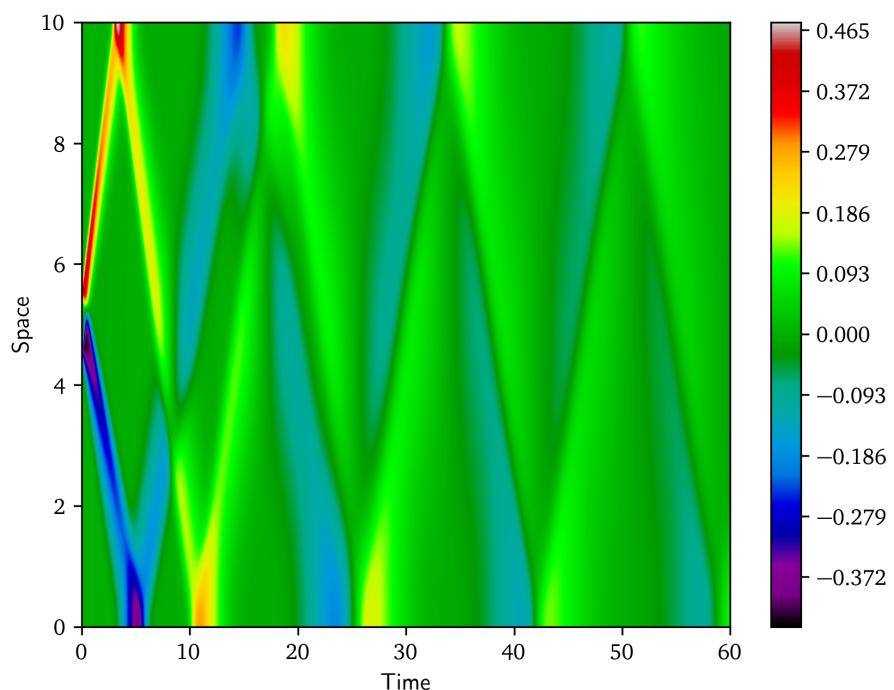


Рис. 64: График G для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.1$.

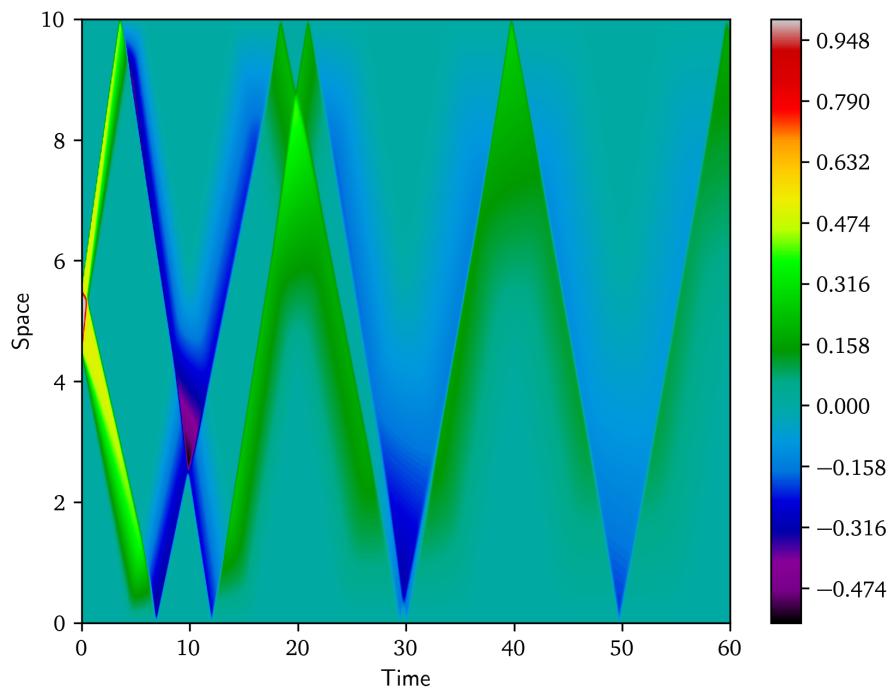


Рис. 65: График V для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

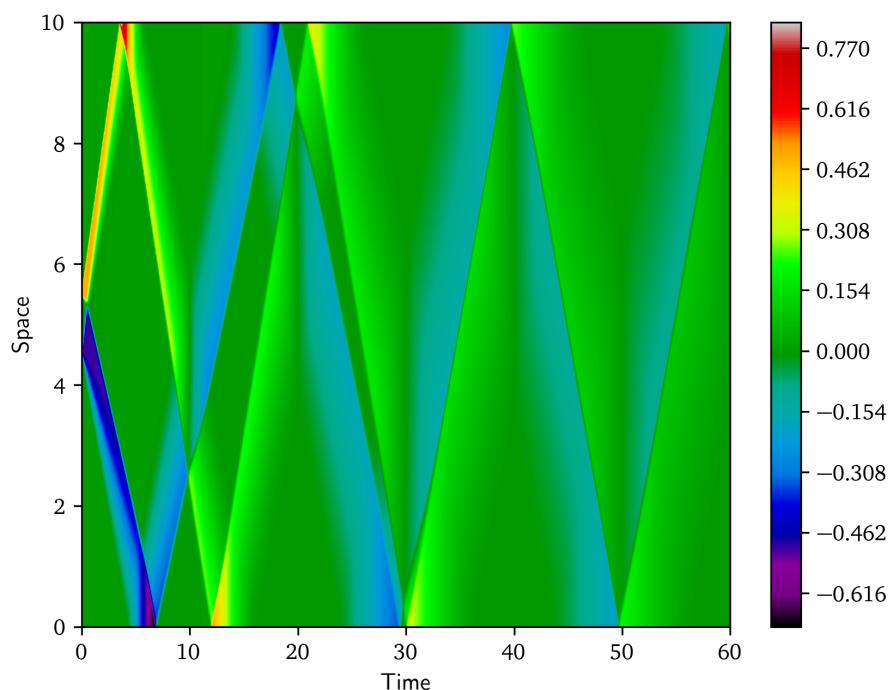


Рис. 66: График G для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

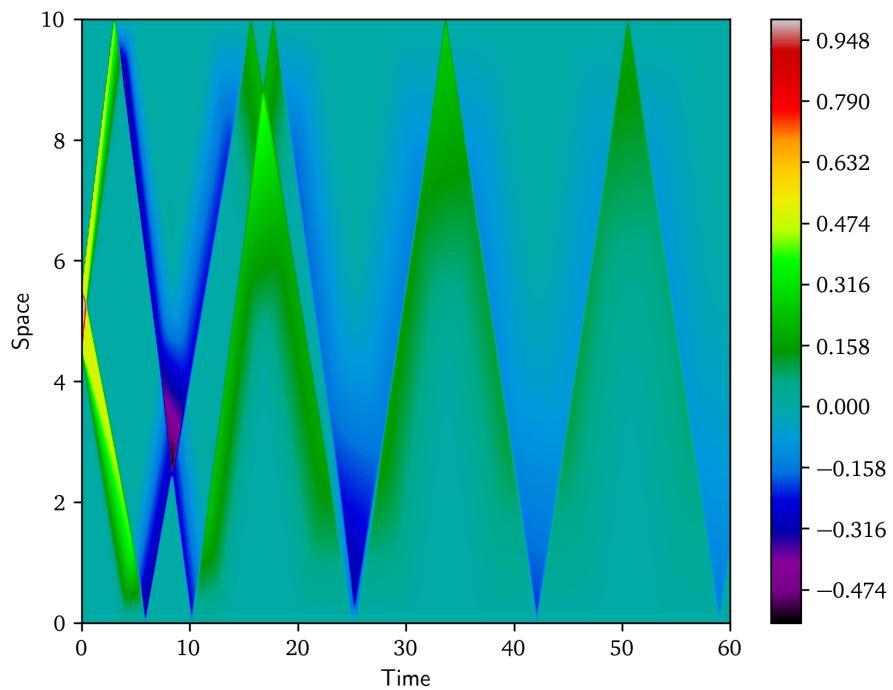


Рис. 67: График V для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

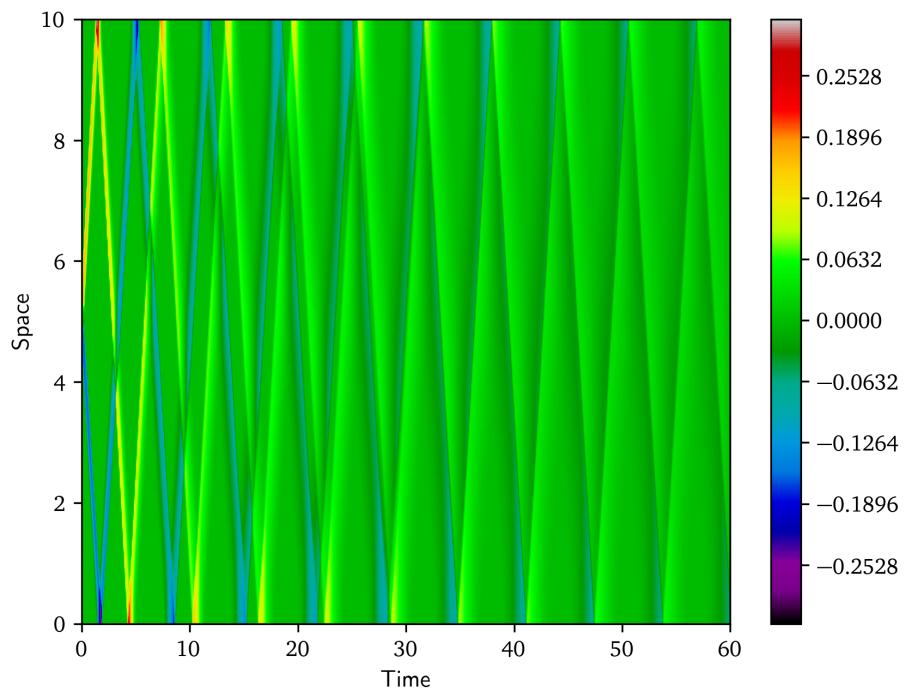


Рис. 68: График G для $T = 60$ при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

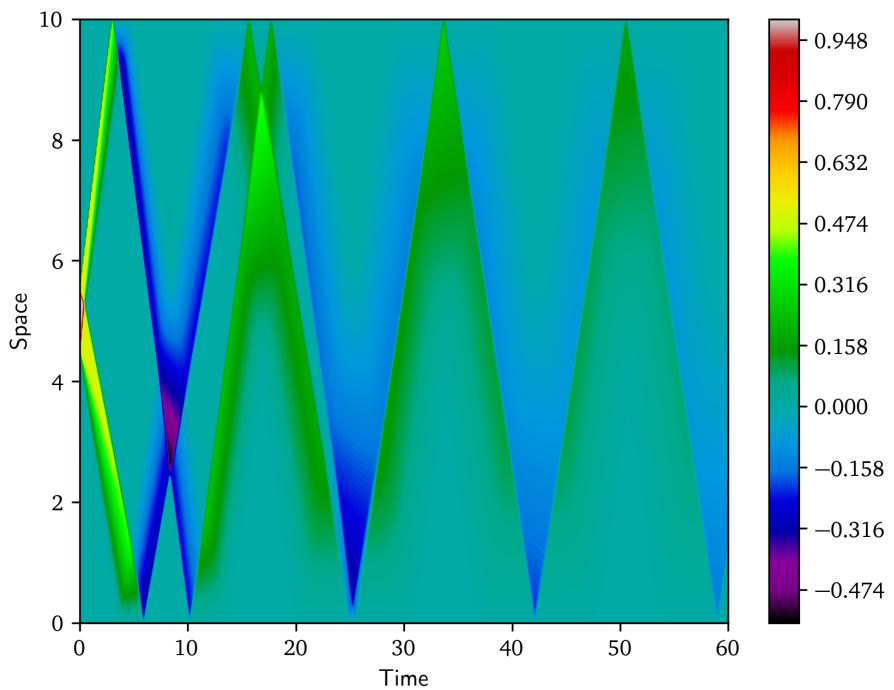


Рис. 69: График V для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

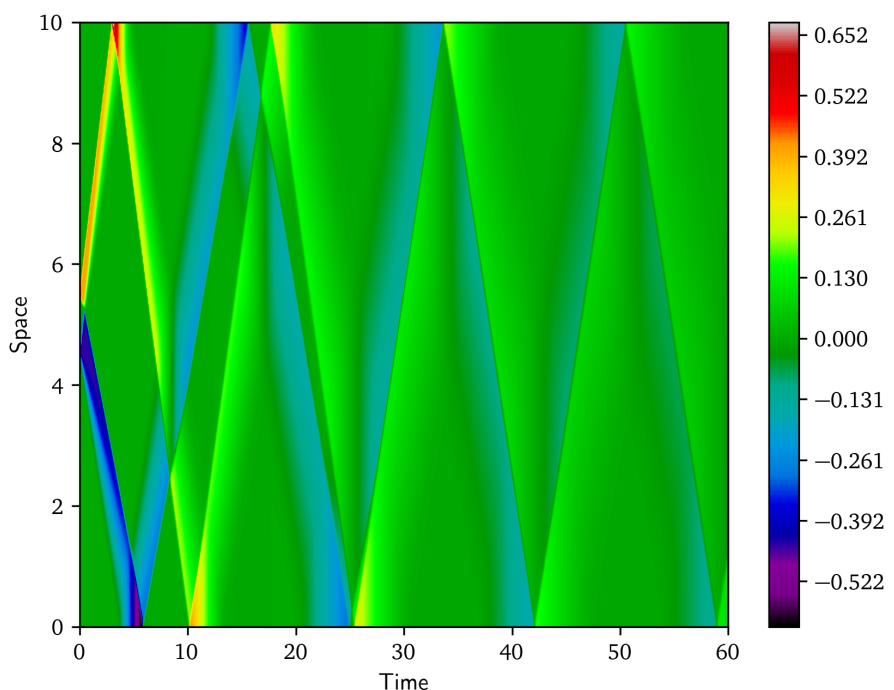


Рис. 70: График G для $T = 60$ при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

4.4 Вывод

Выводы для обеих задач одинаковы и заключаются в следующем:

1. По таблицам наблюдается зависимость времени выхода на стационар только от параметра μ : с уменьшением μ время выхода на стационар существенно увеличивается. Исходя из графиков ошибки для вложенных сеток решение не зависит от этих сеток.
2. Анализируя графики для Δ_m , можно сделать вывод о том, что система является консервативной при любых внешних параметрах. Потери массы составляют менее 1%. При этом зависимость Δ_m от τ незначительна, а от h линейная.
3. Исходя из графиков для проверки цикличности решения, период колебаний не зависит от μ , однако зависит от C , а именно с увеличением C уменьшается период. При уменьшении μ «рисунок» становится более четким (т.е. более четкий гребень волны), что говорит о более медленном затухании, т.е. о большем времени стабилизации.

5 Задача о стабилизации осциллирующей функции

5.1 Постановка задачи

Рассмотрим область $\Omega_x = [0, 1]$. Для системы (1) зададим 2 задачи, начальные и граничные условия которых определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= 2 + \sin(K\pi x), \quad x \in [0; 1] \\ u(0, x) &= 0, \quad x \in [0; 1] \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0, \quad t \in [0; T] \end{aligned} \tag{9}$$

и

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= 1, \quad x \in [0; 1] \\ u(0, x) &= \sin(K\pi x), \quad x \in [0; 1] \\ u(t, 0) &= u(t, 10) = 0, \quad t \in [0; T] \end{aligned} \tag{10}$$

Где K - некоторое натуральное число. Для численных экспериментов желательно брать $10Kh \leq 1$. Также для обеих задач положим f и f_0 из правой части (3) тождественно равными нулю.

Суть эксперимента состоит в решении задач (9) и (10), причем вычисления следует проводить до момента времени $T = N_0\tau$, при котором решение перестанет зависеть от времени (выйдет на стационар). Критерием выхода на стационар будем считать

$$\|V^{N_0}\|_C = \max_{m=0 \dots M} |V_m^{N_0}| \leq \varepsilon$$

где величина ε является достаточно малой и определяется опытным путем.

5.2 Численные эксперименты

Рассматриваются задачи (9) и (10). Зафиксируем

$$\tau = 10^{-3}, h = 10^{-2}, \varepsilon = 10^{-3}$$

Будем рассматривать зависимости $p(\rho) = C\rho$ и $p(\rho) = \rho^\gamma$ и внешние параметры

$$(C, \mu) \in \{1, 10, 100\} \times \{0.1, 0.01, 0.001\}, \gamma = 1.4$$

Далее приведены таблицы зависимости времени стабилизации $N_0\tau$ от параметров μ, C, K для обеих задач.

K	$C = 1$	$C = 10$	$C = 100$	$\gamma = 1.4$
1	2.520	2.854	2.799	1.254
2	11.039	11.083	11.796	5.213
3	2.548	3.025	2.923	1.511
4	8.023	9.179	8.847	4.606
5	1.511	2.214	1.092	1.302
6	6.018	8.228	7.372	4.204
7	1.004	1.896	0.727	1.000
8	5.013	7.278	6.632	3.903
9	1.001	1.738	0.727	0.950
10	4.012	6.645	5.894	3.902

Таблица 53: Время стабилизации первой задачи при $\mu = 0.1$.

K	$C = 1$	$C = 10$	$C = 100$	$\gamma = 1.4$
1	23.032	9.978	1.805	19.530
2	72.039	35.145	7.219	62.782
3	22.081	10.159	2.064	18.862
4	61.022	30.695	6.208	53.172
5	19.974	9.803	1.802	18.202
6	59.011	30.054	6.005	51.685
7	16.957	9.002	1.650	16.418
8	57.009	29.418	5.904	50.943
9	14.958	8.368	1.349	14.983
10	54.009	28.468	5.503	49.466

Таблица 54: Время стабилизации первой задачи при $\mu = 0.01$.

K	$C = 1$	$C = 10$	$C = 100$	$\gamma = 1.4$
1	62.065	12.986	1.855	39.428
2	196.141	47.182	7.520	138.423
3	61.134	13.331	2.014	41.201
4	156.048	40.824	6.809	112.334
5	60.499	13.445	1.852	41.461
6	150.037	39.547	6.205	107.849
7	59.440	12.797	1.750	41.204
8	148.022	39.225	6.204	106.349
9	57.915	12.002	1.449	40.530
10	147.021	38.905	5.803	106.342

Таблица 55: Время стабилизации первой задачи при $\mu = 0.001$.

K	$C = 1$	$C = 10$	$C = 100$	$\gamma = 1.4$
1	6.463	5.850	3.052	6.305
2	1.771	1.506	0.777	1.483
3	0.877	0.690	0.352	0.722
4	0.714	0.361	0.215	0.574
5	0.394	0.226	0.132	0.494
6	0.442	0.135	0.111	0.285
7	0.474	0.118	0.096	0.317
8	0.475	0.106	0.072	0.339
9	0.467	0.097	0.053	0.344
10	0.456	0.090	0.059	0.340

Таблица 56: Время стабилизации второй задачи при $\mu = 0.1$.

K	$C = 1$	$C = 10$	$C = 100$	$\gamma = 1.4$
1	44.391	27.362	5.753	41.958
2	12.705	7.676	1.578	12.069
3	6.145	3.538	0.719	5.788
4	3.615	2.023	0.390	3.496
5	2.498	1.367	0.232	2.292
6	1.753	0.983	0.228	1.630
7	1.364	0.662	0.109	1.279
8	1.072	0.501	0.083	0.909
9	0.959	0.411	0.086	0.812
10	0.662	0.372	0.078	0.648

Таблица 57: Время стабилизации второй задачи при $\mu = 0.01$.

K	$C = 1$	$C = 10$	$C = 100$	$\gamma = 1.4$
1	154.584	45.089	6.353	133.715
2	46.299	12.586	1.728	40.477
3	30.216	6.074	0.652	21.801
4	26.722	3.530	0.415	11.594
5	17.171	2.320	0.313	8.243
6	9.128	1.672	0.194	6.008
7	6.116	1.254	0.138	4.660
8	3.970	0.860	0.147	3.322
9	8.153	0.767	0.120	3.250
10	4.100	0.596	0.088	2.403

Таблица 58: Время стабилизации второй задачи при $\mu = 0.001$.

5.3 Вывод

Анализируя таблицы можно сделать следующие выводы:

1. Время стабилизации зависит от четности параметра K : при четных значениях время заметно выше, чем при нечетных. С уменьшением параметра μ время стабилизации увеличивается. С увеличением параметра C время стабилизации уменьшается.
2. С увеличением параметра K время стабилизации падает. С увеличением параметра C время стабилизации уменьшается. С уменьшением параметра μ время стабилизации увеличивается значительно для малых K и незначительно для больших K .

6 Задача протекания

6.1 Постановка задачи

Рассмотрим область $\Omega_x = [0, 10]$. Для системы (1) зададим начальные и граничные условия, которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(0, x) &= 1, \quad x \in [0; 10] \\ u(0, x) &= 0, \quad x \in [0; 10] \\ u(t, 0) &= \tilde{u}, \quad t \in [0; T] \\ \rho(t, 0) &= \tilde{\rho}, \quad t \in [0; T] \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=10} &= 0, \quad t \in [0; T] \end{aligned} \tag{11}$$

Где $\tilde{v} > 0$ и $\tilde{\rho} \geq 1$. Также положим f и f_0 из правой части (3) тождественно равными нулю.

Область $\Omega = [0, T] \times [0, 10]$, а функции f и f_0 тождественно равны 0. Параметры $v(v > 0)$ и $\tilde{\rho} \geq 1$ задают скорость и плотность, "набегающего" потока.

Вычисления будут проводится до времени $T = N_0\tau$, при котором решение перестанет зависеть от времени (выйдет на стационар). Критерием выхода на стационар будем считать

$$\|V^{N_0} - V_m^{N_0-50}\|_C = \max_{m=0 \dots M} |V_m^{N_0} - V_m^{N_0-50}| \leq \varepsilon$$

где величина ε является достаточно малой и определяется опытным путем.

6.2 Разностная схема

Для решения данной задачи необходимо модифицировать схему. Уравнение $V_M^{n+1} = 0$ заменяется на

$$V_M^{n+1} - V_{M-1}^{n+1} = 0$$

Иные граничные условия при $m = 0$:

$$\begin{aligned} G_0^{n+1} &= \ln(\tilde{\rho}) \\ V_0^{n+1} &= \tilde{u} \end{aligned}$$

Третье уравнение системы (4) в силу условия (11) заменяется на

$$G_{t,M} + 0.5[(V\hat{G})_{\bar{x},M} + V_M\hat{G}_{\bar{x},M}] + 0.5h[(GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2}] + 0.5h[V_M G_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_M G_{x\bar{x},M-2}] = 0$$

$$G_{t,M} + 0.5[(V\hat{G})_{\bar{x},M} + V_M\hat{G}_{\bar{x},M}] + 0.5h[(GV)_{x\bar{x},M-1} + VG_{x\bar{x},M-1}] - 0.25h[(GV)_{x\bar{x},M-2} + VG_{x\bar{x},M-2}] = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{G_M^{n+1} - G_M^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left[\frac{V_M^n G_M^{n+1} - V_{M-1}^n G_{M-1}^{n+1}}{h} + V_M^n \frac{G_M^{n+1} - G_{M-1}^{n+1}}{h} \right] + \\ + \frac{h}{2} \left[\frac{G_{M-2}^n V_{M-2}^n - 2G_{M-1}^n V_{M-1}^n + G_M^n V_M^n}{h^2} + V_M^n \frac{G_{M-2}^n - 2G_{M-1}^n + G_M^n}{h^2} \right] - \\ - \frac{h}{4} \left[\frac{G_{M-3}^n V_{M-3}^n - 2G_{M-2}^n V_{M-2}^n + G_{M-1}^n V_{M-1}^n}{h^2} + V_M^n \frac{G_{M-3}^n - 2G_{M-2}^n + G_{M-1}^n}{h^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$G_{M-1}^{n+1} \left(-\frac{V_{M-1}^n + V_M^n}{2h} \right) + G_M^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{V_M^n}{h} \right) = B_M^n$$

$$\begin{aligned} B_M^n = G_M^n \left(\frac{1}{\tau} \right) - \frac{1}{2h} [G_{M-2}^n V_{M-2}^n - 2G_{M-1}^n V_{M-1}^n + G_M^n V_M^n + V_M^n (G_{M-2}^n - 2G_{M-1}^n + G_M^n)] + \\ + \frac{1}{4h} [G_{M-3}^n V_{M-3}^n - 2G_{M-2}^n V_{M-2}^n + G_{M-1}^n V_{M-1}^n + V_M^n (G_{M-3}^n - 2G_{M-2}^n + G_{M-1}^n)] \end{aligned}$$

6.3 Численные эксперименты

Рассматривается задача (11). Зафиксируем

$$\tau = 10^{-3}, h = 10^{-2}, \varepsilon = 10^{-2}$$

Будем рассматривать зависимости $p(\rho) = C\rho$ и $p(\rho) = \rho^\gamma$ и внешние параметры

$$(C, \mu) \in \{1, 10, 100\} \times \{0.1, 0.01, 0.001\}, \gamma = 1.4$$

6.3.1 Стабилизация решения

Далее приведены таблицы зависимости времени стабилизации $N_0\tau$ от параметров μ , C , $\tilde{\rho}$ и \tilde{u} .

$\tilde{\rho} \backslash \tilde{u}$	1	2	3	4
1	7.730	26.261	10.136	6.274
2	6.686	15.668	7.586	4.951
3	6.101	12.863	6.659	4.442
4	5.723	11.453	6.153	4.159

Таблица 59: Время стабилизации при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\tilde{\rho} \backslash \tilde{u}$	1	2	3	4
1	7.067	7.897	7.183	5.489
2	7.905	5.503	3.038	26.221
3	7.158	3.043	2.359	5.817
4	5.419	2.415	2.132	3.888

Таблица 60: Время стабилизации при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\tilde{\rho} \backslash \tilde{u}$	1	2	3	4
1	8.184	8.346	6.619	5.821
2	7.454	5.799	5.561	4.606
3	5.604	4.238	4.877	6.615
4	5.348	4.749	6.964	7.566

Таблица 61: Время стабилизации при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\tilde{\rho} \backslash \tilde{u}$	1	2	3	4
1	6.905	55.486	14.283	7.916
2	5.764	32.822	10.457	6.256
3	5.195	4.295	9.147	5.623
4	4.864	3.961	8.456	5.274

Таблица 62: Время стабилизации при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.1$.

$\tilde{\rho} \backslash \tilde{u}$	1	2	3	4
1	8.601	25.736	9.438	5.662
2	6.875	15.399	7.302	4.667
3	6.286	12.688	6.511	4.351
4	6.037	11.344	6.051	4.239

Таблица 63: Время стабилизации при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\tilde{\rho}$	\tilde{u}	1	2	3	4
1		10.469	9.959	8.658	6.810
2		9.776	6.741	3.988	26.934
3		8.230	3.957	2.365	13.669
4		6.083	138.938	2.276	4.899

Таблица 64: Время стабилизации при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\tilde{\rho}$	\tilde{u}	1	2	3	4
1		8.297	8.564	7.710	5.874
2		7.360	5.692	6.031	4.483
3		5.470	4.512	35.671	19.222
4		18.271	13.940	12.548	12.381

Таблица 65: Время стабилизации при $C = 100$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\tilde{\rho}$	\tilde{u}	1	2	3	4
1		8.225	56.153	13.956	7.561
2		6.426	33.884	10.583	6.296
3		5.375	25.812	9.397	5.778
4		4.992	4.293	8.730	5.469

Таблица 66: Время стабилизации при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.01$.

$\tilde{\rho}$	\tilde{u}	1	2	3	4
1		9.509	23.464	8.956	5.536
2		7.285	15.754	7.361	5.168
3		6.824	13.275	6.636	5.024
4		6.553	11.871	6.240	4.958

Таблица 67: Время стабилизации при $C = 1$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\tilde{\rho}$	\tilde{u}	1	2	3	4
1		10.637	10.405	10.661	7.382
2		11.011	7.058	4.328	28.522
3		42.476	51.377	2.436	24.065
4		25.933	29.906	2.579	52.223

Таблица 68: Время стабилизации при $C = 10$, $\gamma = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\tilde{\rho}$	\tilde{u}	1	2	3	4
1		9.066	49.744	13.503	7.404
2		7.089	36.143	11.174	6.488
3		5.901	28.363	10.123	6.065
4		108.792	4.770	9.324	5.808

Таблица 69: Время стабилизации при $C = 1$, $\gamma = 1.4$ и $\mu = 0.001$.

6.3.2 Динамика процесса

Рассмотрим случай $C = 1$, $\gamma = 1$, $\mu = 0.1$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $\tilde{\rho} = 1$, $\tilde{u} = 1$. Далее приведены срезы графиков V и G (динамика процесса) в разные моменты времени.

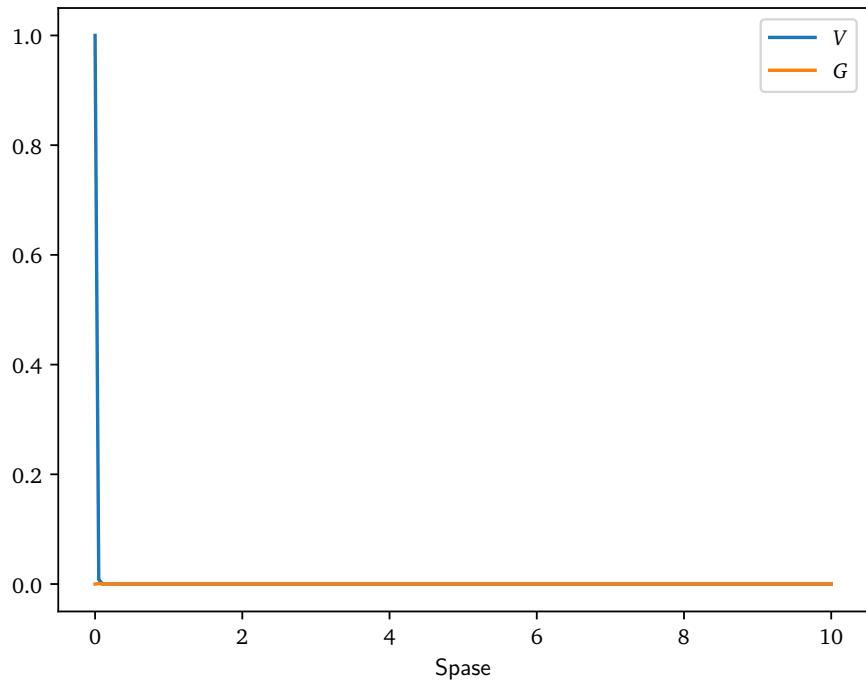


Рис. 71: Срез для $t = 0$.

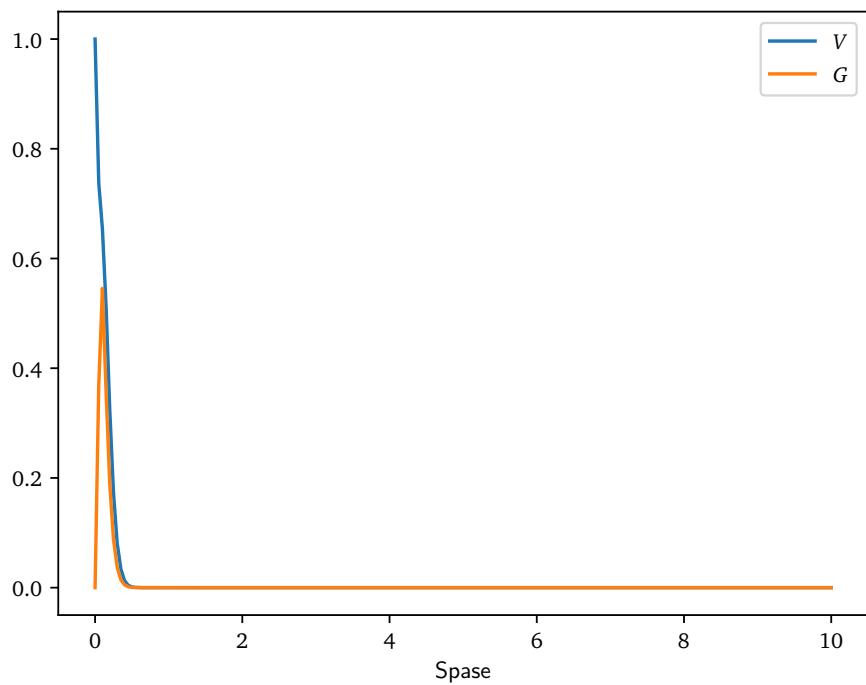


Рис. 72: Срез для $t = 0.1$.

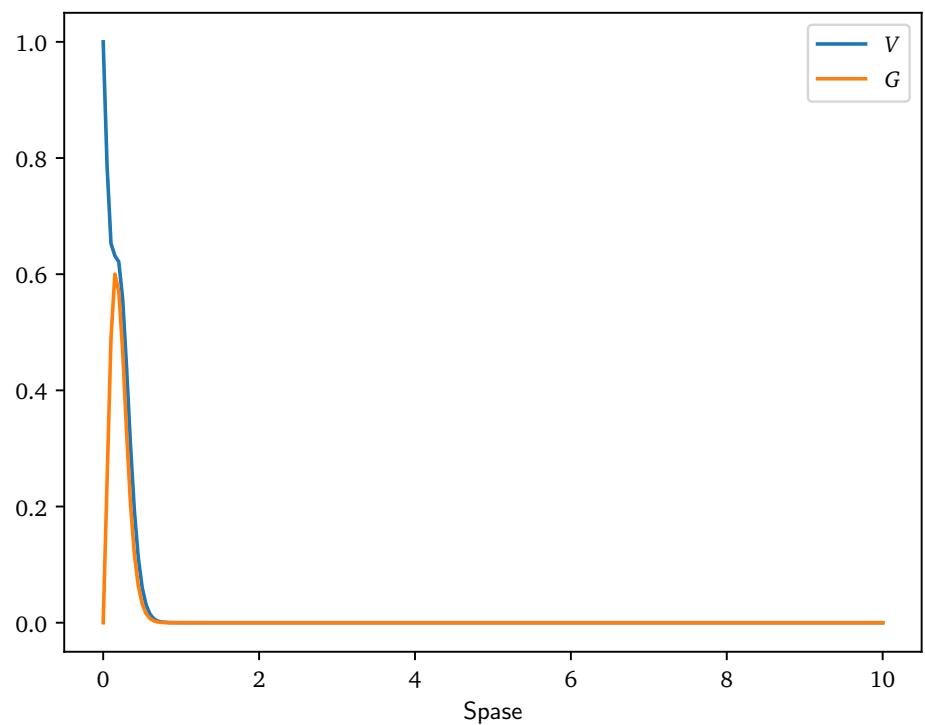


Рис. 73: Срез для $t = 0.2$.

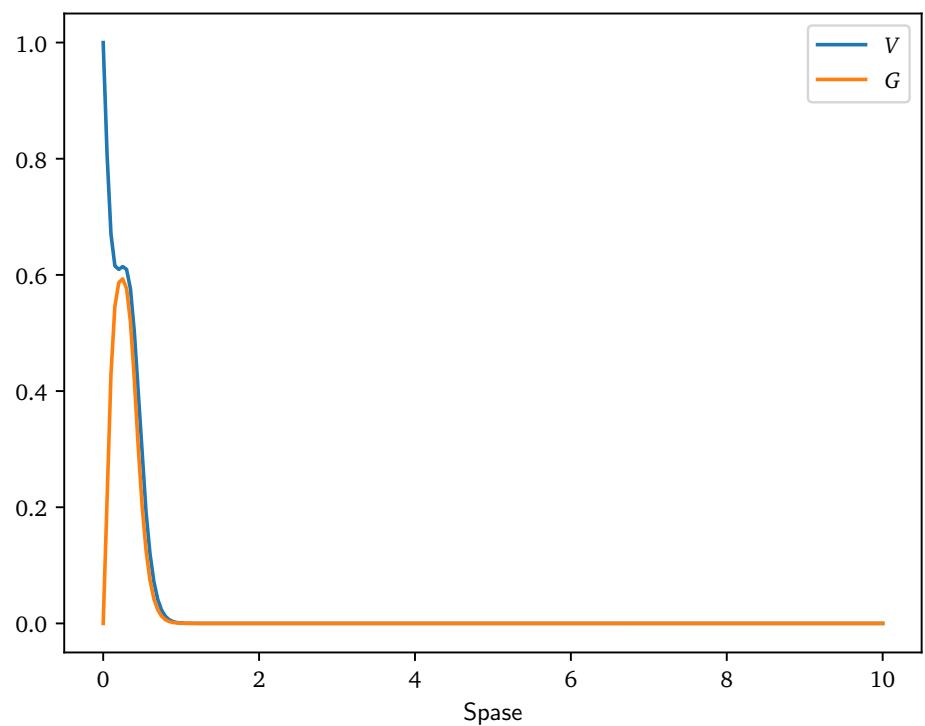


Рис. 74: Срез для $t = 0.3$.

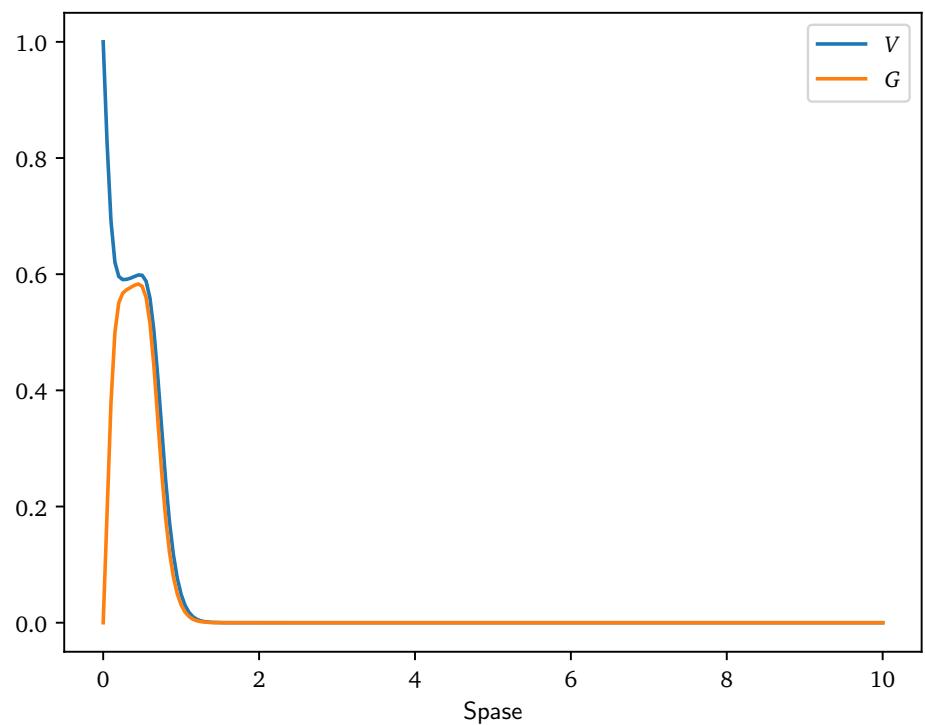


Рис. 75: Срез для $t = 0.5$.

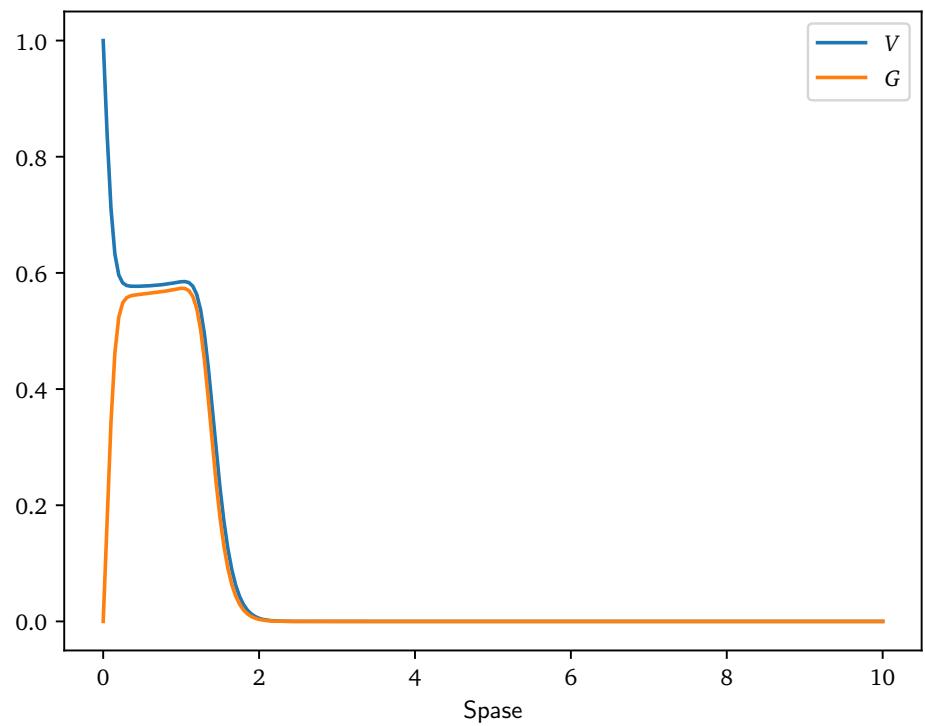


Рис. 76: Срез для $t = 1$.

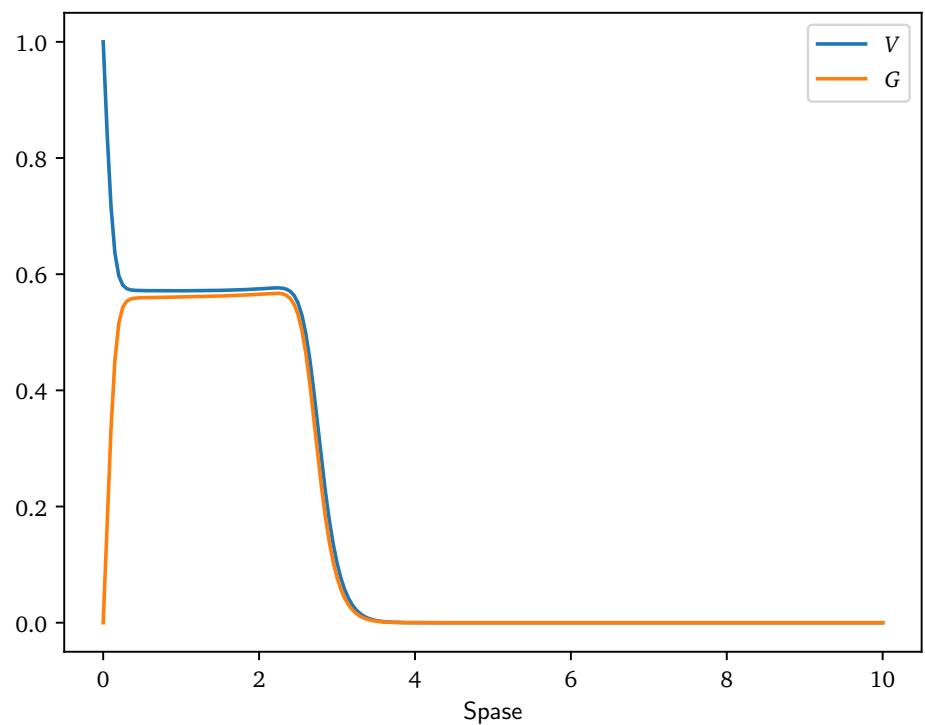


Рис. 77: Срез для $t = 2$.

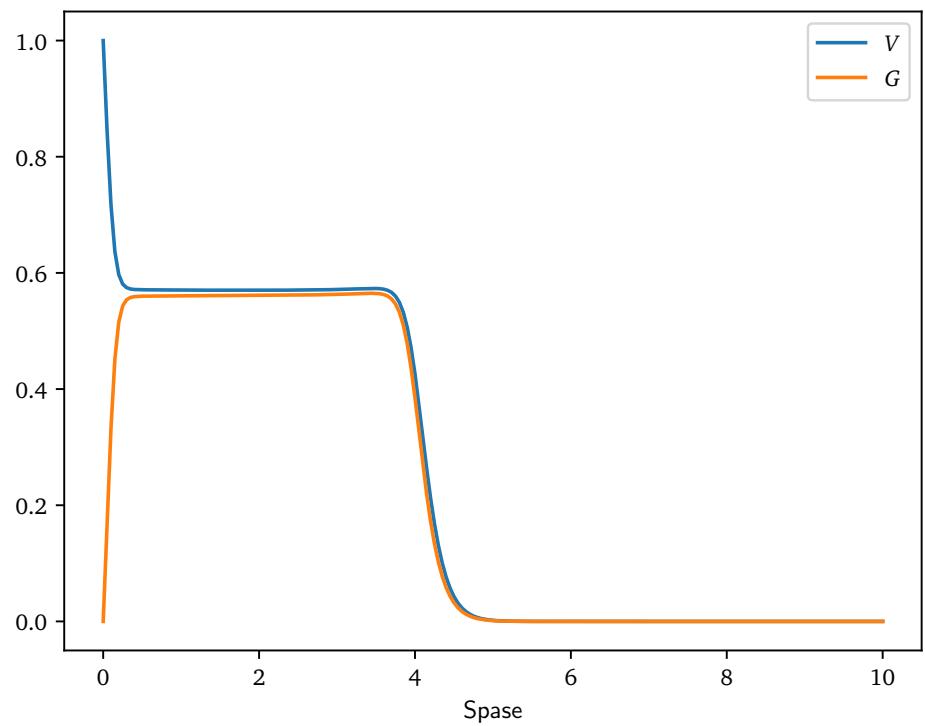


Рис. 78: Срез для $t = 3$.

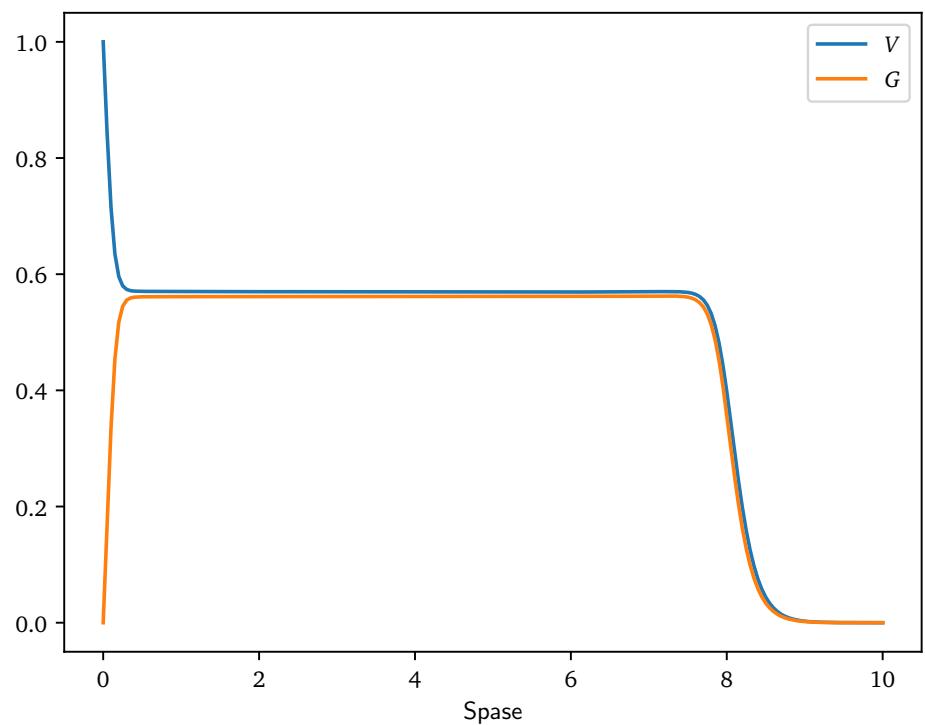


Рис. 79: Срез для $t = 6$.

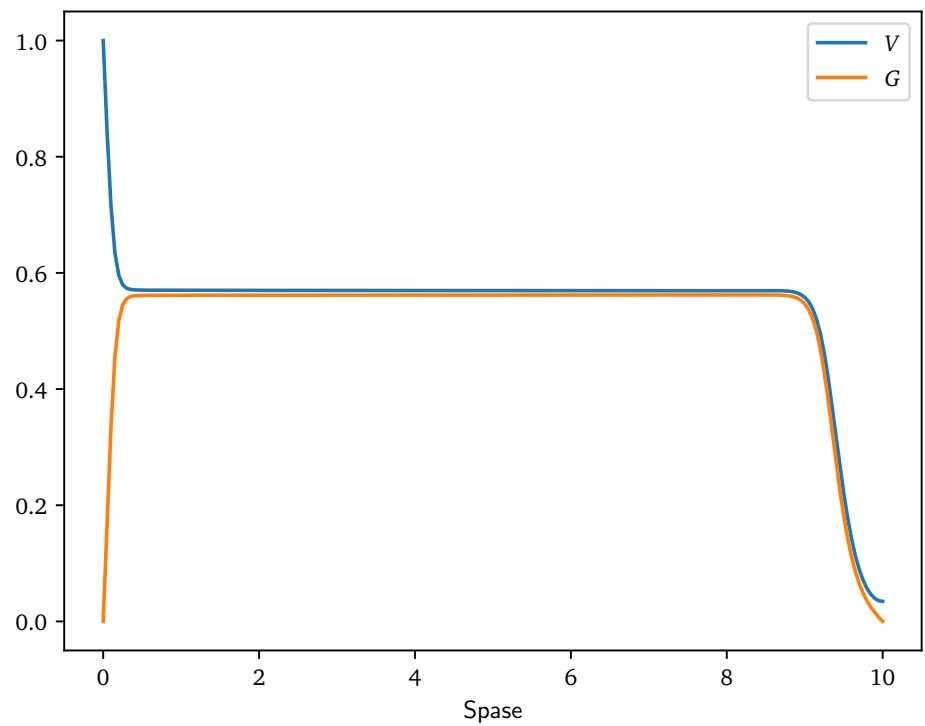


Рис. 80: Срез для $t = 7$.

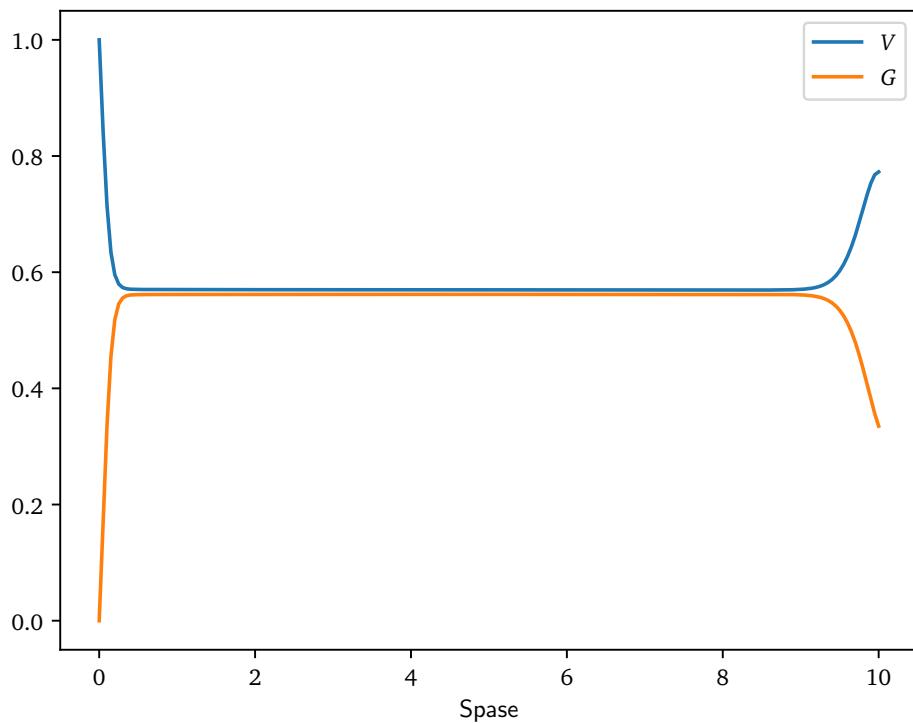


Рис. 81: Срез для $t = 7.73$.

6.4 Вывод

С уменьшением параметра μ время стабилизации увеличивается. Не замечено зависимости времени стабилизации от параметра C . Общей зависимости от пары параметров $(\tilde{\rho}, \tilde{u})$ замечено не было.

Список литературы

- [1] Попов А. В. Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием неявных разностных схем.
- [2] Eigen. C++ template library for linear algebra: matrices, vectors, numerical solvers, and related algorithms. <https://eigen.tuxfamily.org/>.