Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова»
Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики

Численное моделирование нестационарного двумерного течения газа с использованием неявной разностной схемы с центральными разностями ($\ln \rho$, u)

Работу выполнила:
Лобанова Валерия, 410 группа

Преподаватель:
кандидат физико-математических наук,
доцент А. В. Попов

Москва, 2022

Содержание

1 Введение

1.1 Постановка задачи

В работе будет рассматриваться разностная схема с центральными разностями ($\ln\rho$, u) для решения начально-краевых задач для системы уравнений, описывающей нестационарное двумерное движение вязкого баротропного газа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = \rho f_0; \\ \rho\left[\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u},\,\nabla)\mathbf{u}\right] + \nabla p = L\mathbf{u} + \rho\mathbf{f}; \\ L\mathbf{u} = \operatorname{div}(\mu\nabla\mathbf{u}) + \dfrac{1}{3}\nabla(\mu\operatorname{div}\mathbf{u}); \\ p = p(\rho). \end{cases} \tag{1}$$

В данной схеме известными считаются:

- μ – коэффициент вязкости газа, который считаем известной положительной константой.
- p – функция давления газа. Будем использовать две возможные зависимости:
  $p(\rho) = C\rho$, где C – неотрицательная константа или
  $p(\rho) = \rho^\gamma$, где $\gamma = 1.4$.
- $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ – вектор внешних сил, который является функцией переменных Эйлера $(t, \mathbf{x}) \in \Omega = \Omega_t \times \Omega_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

Неизвестными же считаются функции переменных Эйлера:

- ρ – функция плотности;
- $\mathbf{u} = (u_1,\,\ldots,\,u_d)$ – функция скорости.

Систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial\rho u_i}{\partial x_i} = \rho f_0; \\ \dfrac{\partial\rho u_s}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial\rho u_i u_s}{\partial x_i} + \dfrac{\partial p}{\partial x_s} = \mu\left(\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial^2 u_s}{\partial x_i^2} + \dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_s\partial x_i}\right) + \rho f_s, \quad s = 1,\,\ldots,\,d. \end{cases}$$

Сделав замену $g = \ln\rho$ и ряд преобразований, систему (1) можно переписать в виде (см. [1])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{d}\left(u_i\dfrac{\partial g}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_i g}{\partial x_i} + (2-g)\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = f_0; \\ \dfrac{\partial u_s}{\partial t} + \dfrac{1}{3}\left(u_s\dfrac{\partial u_s}{\partial x_s} + \dfrac{\partial u_s^2}{\partial x_s}\right) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}\left(u_i\dfrac{\partial u_s}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_i u_s}{\partial x_i} - u_s\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) + \\ \qquad + p_\rho(e^g)\dfrac{\partial g}{\partial x_s} = \mu e^g\left(\dfrac{4}{3}\dfrac{\partial^2 u_s}{\partial x_s^2} + \displaystyle\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}\left(\dfrac{\partial^2 u_s}{\partial x_i^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_s\partial x_i}\right)\right) + f_s, \quad s = 1,\,\ldots,\,d. \end{cases} \tag{2}$$

Дополним систему (1) начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} (\rho,\,\mathbf{u})|_{t=0} &= (\rho_0,\,\mathbf{u}_0), \quad \mathbf{x} \in \Omega_x; \\ u(t,\,\mathbf{x}) &= 0, \quad (t,\,\mathbf{x}) \in \Omega_t \times \partial\Omega_x. \end{aligned} \tag{3}$$

В качестве областей Ω_t и Ω_x рассмотрим $[0;\,T] \subset \mathbb{R}$ и $\Omega_{x_1}\times\ldots\times\Omega_{x_d} \subset \mathbb{R}^d$, где $\Omega_{x_s} = [0;\,X_s]$, $s = 1,\,\ldots,\,d$, соответственно.

1.2 Основные обозначения

Введем на областях $\Omega_t = [0;T]$ и $\Omega_{x_s} = [0;X_s]$, равномерные сетки с шагом τ и h_s соответственно:

$$\omega_\tau = \{n\tau \,|\, n = 0, \ldots, N\}, \text{ где } N\tau = T$$

$$\omega_{h_s} = \{mh_s \,|\, m = 0, \ldots, M_s\}, \text{ где } M_s h_s = X_s$$

Обозначим

$$\mathbf{h} = (h_1,\, \ldots,\, h_d), \quad \omega_{\mathbf{h}} = (\omega_{h_1} \times\, \ldots \times\, \omega_{h_d}), \quad \omega_{\tau,\, h} = \omega_\tau \times \omega_h$$

$$\gamma^-_{\mathbf{h},\, s} = \omega_{h_1} \times \ldots \times \omega_{h_{s-1}} \times \{0\} \times \omega_{h_{s+1}} \times \ldots \times \omega_{h_d}$$

$$\gamma^+_{\mathbf{h},\, s} = \omega_{h_1} \times \ldots \times \omega_{h_{s-1}} \times \{X_s\} \times \omega_{h_{s+1}} \times \ldots \times \omega_{h_d}$$

$$\gamma_{\mathbf{h},\, s} = \gamma^-_{\mathbf{h},\, s} \cup \gamma^+_{\mathbf{h},\, s}, \quad \gamma_{\mathbf{h}} = \gamma_{\mathbf{h},\, 1} \cup \ldots \cup \gamma_{\mathbf{h},\, d}$$

Для сокращения записи обозначим $m = (m_1,\, \ldots,\, m_d)$, $m \pm q_s = (m_1,\, \ldots, m_{s-1},\, m_s \pm q,\, m_{s+1},\, \ldots,\, m_d)$, значение для произвольной функции g в узле $(n,\, m)$ через g^n_m, g^{n+1}_m через $\widehat{g}$.
Введем обозначения для среднего значения величин сеточной функции в двух соседних узлах:

$$g_{\mathrm{avg}_s} = \frac{g^n_m + g^n_{m+1_s}}{2}, \quad g_{\overline{\mathrm{avg}}_s} = \frac{g^n_m + g^n_{m-1_s}}{2}$$

и для разностных операторов:

$$g_t = \frac{g^{n+1}_m - g^n_m}{\tau}, \quad g_{x_s} = \frac{g^n_{m+1_s} - g^n_m}{h_s},$$

$$g_{\overline{x}_s} = \frac{g^n_m - g^n_{m-1_s}}{h_s}, \quad g_{\mathring{x}_s} = \frac{g^n_{m+1_s} - g^n_{m-1_s}}{2h_s},$$

$$g_{x_s\overline{x}_s} = (g_{x_s})_{\overline{x}_s} = \frac{g^n_{m+1_s} - 2g^n_m + g^n_{m-1_s}}{h_s^2}.$$

2 Описание схемы

2.1 Схема

Обозначим через G и V_s, $s = 1,\, \ldots,\, d$, приближенные значения функций $\ln\rho$ и u_s соответственно.
Для поиска численного решения задачи (2) с начальными условиями (3) можно использовать следующую разностную схему:

$$\begin{cases} F_0(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = f_0, & \mathbf{x} \in \operatorname{int}\omega_h \\ F^-_{0,\, s}(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = f_0, & \mathbf{x} \in \gamma^-_{h,\, s} \\ F^+_{0,\, s}(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = f_0, & \mathbf{x} \in \gamma^+_{h,\, s} \\ F_s(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = f_s, & \mathbf{x} \in \operatorname{int}\omega_h \\ \widehat{V}_s = 0, & \mathbf{x} \in \gamma_{h,\, s}, \end{cases} \tag{4}$$

$s = 1,\, \ldots,\, d$, где

$$F_0(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = G_t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\big(V_i\widehat{G}_{\mathring{x}_i} + (V_i\widehat{G})_{\mathring{x}_i} + 2(\widehat{V}_i)_{\mathring{x}_i} - G(V_i)_{\mathring{x}_i}\big) - \tau\eta\sum_{i=1}^{d}(\Phi_{\mathrm{avg}_i}\widehat{G}_{x_i})_{\overline{x}_i} \tag{5}$$

$$F^-_{0,\, s}(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = G_t + \frac{1}{2}\big((V_s\widehat{G})_{x_s} + 2(\widehat{V}_s)_{x_s} - G(V_s)_{x_s}\big) - A^-_s - \tau\eta\frac{2\Phi_{\mathrm{avg}_s}}{h_s}\widehat{G}_{x_s} \tag{6}$$

$$F^+_{0,\, s}(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = G_t + \frac{1}{2}\big((V_s\widehat{G})_{\overline{x}_s} + 2(\widehat{V}_s)_{\overline{x}_s} - G(V_s)_{\overline{x}_s}\big) + A^+_s + \tau\eta\frac{2\Phi_{\overline{\mathrm{avg}}_s}}{h_s}\widehat{G}_{\overline{x}_s} \tag{7}$$

$$A^\pm_s(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = 0.5h_s\big[(GV_k)^{\pm 1_s}_{x_s\overline{x}_s} - 0.5(GV_k)^{\pm 2_s}_{x_s\overline{x}_s}(2-G)((V_s))^{\pm 1_s}_{x_s\overline{x}_s} - 0.5(V_s)^{\pm 2_s}_{x_s\overline{x}_s})\big] \tag{8}$$

$$F_s(G,\, V_1,\, \dots,\, V_d) =$$
$$= (V_s)_t + \frac{1}{3}\big(V_s(\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_s} + (V_s\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_s}\big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}\big(V_i(\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_i} + (V_i\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_i} - V_s(V_i)_{\mathring{x}_i}\big) + p_\rho(e^G)\widehat{G}_{\mathring{x}_s} -$$
$$-\widetilde{\mu}\left(\frac{4}{3}(\widehat{V}_s)_{x_s\overline{x}_s} + \sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}(\widehat{V}_s)_{x_i\overline{x}_i}\right) + (\widetilde{\mu} - \mu e^{-G})\cdot\left(\frac{4}{3}(V_s)_{x_s\overline{x}_s} + \sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}(V_s)_{x_i\overline{x_i}}\right) - \frac{1}{3}\mu e^{-G}\sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}(V_i)_{\mathring{x}_s\mathring{x}_i}, \tag{9}$$

где
$$\widetilde{\mu} = \mu\,\|\exp(-G^n)\| = \mu\,\max_m|\exp(-G^n_m)| = \mu\,\exp\big(-\min_m G^n_m\big)$$
и функция Φ берется равной либо e^G, либо V^2.

Величина η является положительной константой и подбирается экспериментально. Наличие слагаемых с коэффициентом η, называемых искусственными вязкостями, обусловлено использованием в схеме центральных разностей, которые приводят к появлению осцилляций у численного решения на фоне точного решения дифференциальной задачи.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку ω_h функций $\ln\rho_0$ и u_0 (запись $g(hm)$ стоит понимать как $g(h_1m_1,\, \dots,\, h_dm_d)$):
$$G^0_m = \ln\rho_0(hm), \quad V^0_m = \mathbf{u}_0(hm),$$
а граничные значения скорости полагаются равными нулю (последнее уравнение в (4)):
$$V^n_m = 0,$$
$n = 1,\, \dots,\, N$.

Так как
$$p_\rho(e^g) = C\gamma e^{(\gamma-1)g}$$
для $p(\rho) = C\rho^\gamma$, то
$$p_\rho(e^{G^n_m}) = C\gamma e^{(\gamma-1)G^n_m}.$$

2.2 Координатная запись уравнений

Пользуясь обозначениями, приведенными в разделе 1.2, перепишем уравнения из (4) в координатном виде.

2.2.1 Первое уравнение

Рассматриваем уравнение (5):
$$F_0(G,\, V_1,\, \dots,\, V_d) = G_t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\big(V_i\widehat{G}_{\mathring{x}_i} + (V_i\widehat{G})_{\mathring{x}_i} + 2(\widehat{V}_i)_{\mathring{x}_i} - G(V_i)_{\mathring{x}_i}\big) - \tau\eta\sum_{i=1}^{d}(\Phi_{\mathrm{avg}_i}\widehat{G}_{x_i})_{\overline{x}_i}$$

Распишем в общем случае:
$$F_0(G,\, V_1,\, \dots,\, V_d) = \left(\frac{1}{\tau} + \tau\eta\sum_{i=1}^{d}\frac{\Phi^n_{m+1_i} + 2\Phi^n_m + \Phi^n_{m-1_i}}{2h_i^2}\right)G^{n+1}_m +$$
$$+\sum_{i=1}^{d}\left(-\frac{(V_i)^n_m + (V_i)^n_{m-1_i}}{4h_i} - \tau\eta\frac{(\Phi^n_m + \Phi^n_{m-1_i})}{2h_i^2}\right)G^{n+1}_{m-1_i} + \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{(V_i)^n_m + (V_i)^n_{m+1_i}}{4h_i} - \tau\eta\frac{(\Phi^n_m + \Phi^n_{m+1_i})}{2h_i^2}\right)G^{n+1}_{m+1_i} +$$
$$+\sum_{i=1}^{d}\left(-\frac{1}{2h_i}\right)(V_i)^{n+1}_{m-1_i} + \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{1}{2h_i}\right)(V_i)^{n+1}_{m+1_i} - \left(\frac{G^n_m}{\tau} + \sum_{i=1}^{d}G^n_m\frac{(V_i)^n_{m+1_i} - (V_i)^n_{m-1_i}}{4h_i}\right)$$

В программной реализации будем полагать $\eta = 0$:
$$F_0(G,\, V_1,\, \dots,\, V_d) = \left(\frac{1}{\tau}\right)G^{n+1}_m + \sum_{i=1}^{d}\left(-\frac{(V_i)^n_m + (V_i)^n_{m-1_i}}{4h_i}\right)G^{n+1}_{m-1_i} + \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{(V_i)^n_m + (V_i)^n_{m+1_i}}{4h_i}\right)G^{n+1}_{m+1_i} +$$
$$+\sum_{i=1}^{d}\left(-\frac{1}{2h_i}\right)(V_i)^{n+1}_{m-1_i} + \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{1}{2h_i}\right)(V_i)^{n+1}_{m+1_i} - \left(\frac{G^n_m}{\tau} + \sum_{i=1}^{d}G^n_m\frac{(V_i)^n_{m+1_i} - (V_i)^n_{m-1_i}}{4h_i}\right)$$

Домножим на 4τ и раскроем суммы для $d = 2$:

$$4\tau\, F_0(G,\, V_1,\, V_2) = 4\, G_m^{n+1} + \left(-\frac{\tau}{h_1}\right)\left({V_1}_m^n + {V_1}_{m_1-1,m_2}^n\right) G_{m_1-1,m_2}^{n+1} + \left(-\frac{\tau}{h_2}\right)\left({V_2}_m^n + {V_2}_{m_1,m_2-1}^n\right) G_{m_1,m_2-1}^{n+1} +$$
$$+ \left(\frac{\tau}{h_1}\right)\left({V_1}_m^n + {V_1}_{m_1+1,m_2}^n\right) G_{m_1+1,m_2}^{n+1} + \left(\frac{\tau}{h_2}\right)\left({V_2}_m^n + {V_2}_{m_1,m_2+1}^n\right) G_{m_1,m_2+1}^{n+1} +$$
$$+ \left(-\frac{2\tau}{h_1}\right) {V_1}_{m_1-1,m_2}^{n+1} + \left(-\frac{2\tau}{h_2}\right) {V_2}_{m_1,m_2-1}^{n+1} + \left(\frac{2\tau}{h_1}\right) {V_1}_{m_1+1,m_2}^{n+1} + \left(\frac{2\tau}{h_2}\right) {V_2}_{m_1,m_2+1}^{n+1} -$$
$$- \left[4 + \left(\frac{\tau}{h_1}\right)\left({V_1}_{m_1+1,m_2}^n - {V_1}_{m_1-1,m_2}^n\right) + \left(\frac{\tau}{h_2}\right)\left({V_2}_{m_1,m_1+1}^n - {V_2}_{m_1,m_2-1}^n\right)\right] G_m^n$$

$\mathbf{x} \in \operatorname{int}\omega_h :\ (m_1;\, m_2) \in (1,\, \ldots,\, M_1 - 1;\, 1,\, \ldots,\, M_2 - 1)$

2.2.2 Второе уравнение

Рассматриваем уравнение (6):

$$F_{0,\,s}^-(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = G_t + \frac{1}{2}\big((V_s\widehat{G})_{x_s} + 2(\widehat{V}_s)_{x_s} - G(V_s)_{x_s}\big) - A_s^- - \tau\eta\frac{2\Phi_{\text{avg}_s}}{h_s}\widehat{G}_{x_s}$$

Распишем в общем случае:

$$F_{0,\,s}^-(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = \left(\frac{1}{\tau} - \frac{(V_s)_m^n}{2h_s} + \tau\eta\frac{\Phi_m^n + \Phi_{m+1_s}^n}{h_s^2}\right) G_m^{n+1} + \left(\frac{(V_s)_{m+1_s}^n}{2h_s} - \tau\eta\frac{\Phi_m^n + \Phi_{m+1_s}^n}{h_s^2}\right) G_{m+1_s}^{n+1} +$$
$$+ \left(-\frac{1}{h_s}\right)(V_s)_m^{n+1} + \left(\frac{1}{h_s}\right)(V_s)_{m+1_s}^{n+1} - \left(\frac{G_m^n}{\tau} + G_m^n\frac{(V_s)_{m+1_s}^n - (V_s)_m^n}{2h_s}\right) - A_s^-$$

В программной реализации будем полагать $\eta = 0$:

$$F_{0,\,s}^-(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = \left(\frac{1}{\tau} - \frac{(V_s)_m^n}{2h_s}\right) G_m^{n+1} + \left(\frac{(V_s)_{m+1_s}^n}{2h_s}\right) G_{m+1_s}^{n+1} +$$
$$+ \left(-\frac{1}{h_s}\right)(V_s)_m^{n+1} + \left(\frac{1}{h_s}\right)(V_s)_{m+1_s}^{n+1} - \left(\frac{G_m^n}{\tau} + G_m^n\frac{(V_s)_{m+1_s}^n - (V_s)_m^n}{2h_s}\right) - A_s^-$$

Домножим на 2τ и запишем для $d = 2,\ s = 1$:

$$2\tau F_{0,\,1}^-(G,\, V_1,\, V_2) = \left(2 - \frac{\tau}{h_1}\, {V_1}_m^n\right) G_m^{n+1} + \left(\frac{\tau}{h_1}\, {V_1}_{m_1+1,m_2}^n\right) G_{m_1+1,m_2}^{n+1} +$$
$$+ \left(-\frac{2\tau}{h_1}\right) {V_1}_m^{n+1} + \left(\frac{2\tau}{h_1}\right) {V_1}_{m_1+1,m_2}^{n+1} - \left[2 + \left(\frac{\tau}{h_1}\right)\left({V_1}_{m_1+1,m_2}^n - {V_1}_m^n\right)\right] G_m^n - 2\tau A_1^-$$

$$2\tau A_1^-(G,\, V_1,\, V_2) = \frac{2\tau}{h_1}\Big[-2.5G_{m_1+1,m_2}^n {V_1}_{m_1+1,m_2}^n + 2G_{m_1+2,m_2}^n {V_1}_{m_1+2,m_2}^n - 0.5G_{m_1+3,m_2}^n {V_1}_{m_1+3,m_2}^n +$$
$$+ (2 - G_m^n)(-2.5{V_1}_{m_1+1,m_2}^n + 2{V_1}_{m_1+2,m_2}^n - 0.5{V_1}_{m_1+3,m_2}^n)\Big]$$

$\mathbf{x} \in \gamma_{\mathbf{h},\,1}^- :\ (m_1;\, m_2) \in (0;\, 0,\, \ldots,\, M_2)$
$\mathbf{x} \in \gamma_{\mathbf{h},\,2}^- :\ (m_1;\, m_2) \in (0,\, \ldots,\, M_1;\, 0)$

2.2.3 Третье уравнение

Рассматриваем уравнение (7):

$$F_{0,\,s}^+(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = G_t + \frac{1}{2}\big((V_s\widehat{G})_{\overline{x}_s} + 2(\widehat{V}_s)_{\overline{x}_s} - G(V_s)_{\overline{x}_s}\big) + A_s^+ + \tau\eta\frac{2\Phi_{\overline{\text{avg}}_s}}{h_s}\widehat{G}_{\overline{x}_s}$$

Распишем в общем случае:

$$F_{0,\,s}^+(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{(V_s)_m^n}{2h_s} + \tau\eta\frac{\Phi_m^n + \Phi_{m-1_s}^n}{h_s^2}\right) G_m^{n+1} + \left(-\frac{(V_s)_{m-1_s}^n}{2h_s} - \tau\eta\frac{\Phi_m^n + \Phi_{m+1_s}^n}{h_s^2}\right) G_{m-1_s}^{n+1} +$$
$$+ \left(\frac{1}{h_s}\right)(V_s)_m^{n+1} + \left(-\frac{1}{h_s}\right)(V_s)_{m-1_s}^{n+1} - \left(\frac{G_m^n}{\tau} + G_m^n\frac{(V_s)_m^n - (V_s)_{m-1_s}^n}{2h_s}\right) + A_s^+$$

В программной реализации будем полагать $\eta = 0$:

$$F^{+}_{0,\,s}(G,\,V_1,\,\dots,\,V_d) = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{(V_s)^n_m}{2h_s}\right) G^{n+1}_m + \left(-\frac{(V_s)^n_{m-1_s}}{2h_s}\right) G^{n+1}_{m-1_s} + \\ + \left(\frac{1}{h_s}\right)(V_s)^{n+1}_m + \left(-\frac{1}{h_s}\right)(V_s)^{n+1}_{m-1_s} - \left(\frac{G^n_m}{\tau} + G^n_m \frac{(V_s)^n_m - (V_s)^n_{m-1_s}}{2h_s}\right) + A^{+}_s$$

Домножим на 2τ и запишем для $d = 2$, $s = 1$:

$$2\tau F^{+}_{0,\,1}(G,\,V_1,\,V_2) = \left(2 + \frac{\tau}{h_1}\,{V_1}^n_m\right) G^{n+1}_m + \left(-\frac{\tau}{h_1}\,{V_1}^n_{m_1+1,m_2}\right) G^{n+1}_{m_1+1,m_2} + \\ + \left(\frac{2\tau}{h_1}\right){V_1}^{n+1}_m + \left(-\frac{2\tau}{h_1}\right){V_1}^{n+1}_{m_1+1,m_2} - \left[2 + \left(\frac{\tau}{h_1}\right)\left({V_1}^n_m - {V_1}^n_{m_1-1,m_2}\right)\right] G^n_m - 2\tau A^{+}_1$$

$$2\tau A^{+}_1(G,\,V_1,\,V_2) = \frac{2\tau}{h_1}\Big[-2.5G^n_{m_1-1,m_2}{V_1}^n_{m_1-1,m_2} + 2G^n_{m_1-2,m_2}{V_1}^n_{m_1-2,m_2} - 0.5G^n_{m_1-3,m_2}{V_1}^n_{m_1-3,m_2} + \\ + (2 - G^n_m)(-2.5{V_1}^n_{m_1-1,m_2} + 2{V_1}^n_{m_1-2,m_2} - 0.5{V_1}^n_{m_1-3,m_2})\Big]$$

$\mathbf{x} \in \gamma^{+}_{\mathbf{h},\,1}:\ (m_1;\, m_2) \in (M_1;\, 0,\,\dots,\,M_2)$
$\mathbf{x} \in \gamma^{+}_{\mathbf{h},\,2}:\ (m_1;\, m_2) \in (0,\,\dots,\,M_1;\, M_2)$

2.2.4 Четвертое уравнение

Рассматриваем уравнение (9):

$$F_s(G,\,V_1,\,\dots,\,V_d) = \\ = (V_s)_t + \frac{1}{3}\big(V_s(\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_s} + (V_s\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_s}\big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}\big(V_i(\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_i} + (V_i\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_i} - V_s(V_i)_{\mathring{x}_i}\big) + p_\rho(e^G)\widehat{G}_{\mathring{x}_s} - \\ - \widetilde{\mu}\left(\frac{4}{3}(\widehat{V}_s)_{x_s\overline{x}_s} + \sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}(\widehat{V}_s)_{x_i\overline{x}_i}\right) + (\widetilde{\mu} - \mu e^{-G})\cdot\left(\frac{4}{3}(V_s)_{x_s\overline{x}_s} + \sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}(V_s)_{x_i\overline{x_i}}\right) - \frac{1}{3}\mu e^{-G}\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}(V_i)_{\mathring{x}_s\mathring{x}_i}$$

Распишем в общем случае:

$$F_s(G,\,V_1,\,\dots,\,V_d) = \frac{(V_s)^{n+1}_m - (V_s)^n_m}{\tau} + \\ + \frac{1}{3}\left[(V_s)^n_m\frac{(V_s)^{n+1}_{m+1_s} - (V_s)^{n+1}_{m-1_s}}{2h_s} + \frac{(V_s)^n_{m+1_s}(V_s)^{n+1}_{m+1_s} - (V_s)^n_{m-1_s}(V_s)^{n+1}_{m-1_s}}{2h_s}\right] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}\left[(V_i)^n_m\frac{(V_s)^{n+1}_{m+1_i} - (V_s)^{n+1}_{m-1_i}}{2h_i} + \frac{(V_i)^n_{m+1_i}(V_s)^{n+1}_{m+1_i} - (V_i)^n_{m-1_i}(V_s)^{n+1}_{m-1_i}}{2h_i} - \right. \\ \left. - (V_s)^n_m\frac{(V_i)^n_{m+1_i} - (V_i)^n_{m-1_i}}{2h_i}\right] + p_\rho(\exp(G^n_m))\cdot\frac{G^{n+1}_{m+1_s} - G^{n+1}_{m-1_s}}{2h_s} - \\ - \widetilde{\mu}\left[\frac{4}{3}\frac{(V_s)^{n+1}_{m+1_s} - 2(V_s)^{n+1}_m + (V_s)^{n+1}_{m-1_s}}{h_s^2} + \sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}\frac{(V_s)^{n+1}_{m+1_i} - 2(V_s)^{n+1}_m + (V_s)^{n+1}_{m-1_i}}{h_i^2}\right] + \\ + (\widetilde{\mu} - \mu\exp(-G^n_m))\cdot\left[\frac{4}{3}\frac{(V_s)^n_{m+1_s} - 2(V_s)^n_m + (V_s)^n_{m-1_s}}{h_s^2} + \sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}\frac{(V_s)^n_{m+1_i} - 2(V_s)^n_m + (V_s)^n_{m-1_i}}{h_i^2}\right] - \\ - \frac{1}{3}\mu\exp(-G^n_m)\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}\frac{(V_i)^n_{m+1_s+1_i} - (V_i)^n_{m+1_s-1_i} - (V_i)^n_{m-1_s+1_i} + (V_i)^n_{m-1_s-1_i}}{4h_sh_i}$$

Сгруппируем:

$$
\begin{aligned}
&F_s(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = \\
&\quad = \left(-\frac{p_\rho(\exp(G^n_m))}{2h_s}\right) G^{n+1}_{m-1_s} + \left(\frac{p_\rho(\exp(G^n_m))}{2h_s}\right) G^{n+1}_{m+1_s} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{8\widetilde{\mu}}{3h_s^2} + \sum_{i=1,\, i\neq s}^{d} \frac{2\widetilde{\mu}}{h_i^2}\right)(V_s)^{n+1}_m + \\
&\quad + \left(-\frac{(V_s)^n_m + (V_s)^n_{m-1_s}}{6h_s} - \frac{4\widetilde{\mu}}{3h_s^2}\right)(V_s)^{n+1}_{m-1_s} + \sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}\left(-\frac{(V_i)^n_m + (V_i)^n_{m-1_i}}{4h_i} - \frac{\widetilde{\mu}}{h_i^2}\right)(V_s)^{n+1}_{m-1_i} + \\
&\qquad + \left(\frac{(V_s)^n_m + (V_s)^n_{m+1_s}}{6h_s} - \frac{4\widetilde{\mu}}{3h_s^2}\right)(V_s)^{n+1}_{m+1_s} + \sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}\left(\frac{(V_i)^n_m + (V_i)^n_{m+1_i}}{4h_i} - \frac{\widetilde{\mu}}{h_i^2}\right)(V_s)^{n+1}_{m+1_i} - B_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_s(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = \frac{(V_s)^n_m}{\tau} + \sum_{i=1,\, i\neq s}^{d} (V_s)^n_m \frac{(V_i)^n_{m+1_i} - (V_i)^n_{m-1_i}}{4h_i} - \\
&- (\widetilde{\mu} - \mu\exp(-G^n_m)) \cdot \left[\frac{4}{3}\frac{(V_s)^n_{m+1_s} - 2(V_s)^n_m + (V_s)^n_{m-1_s}}{h_s^2} + \sum_{i=1,\, i\neq s}^{d} \frac{(V_s)^n_{m+1_i} - 2(V_s)^n_m + (V_s)^n_{m-1_i}}{h_i^2}\right] + \\
&\qquad + \frac{1}{3}\mu\exp(-G^n_m) \sum_{i=1,\, i\neq s}^{d} \frac{(V_i)^n_{m+1_s+1_i} - (V_i)^n_{m+1_s-1_i} - (V_i)^n_{m-1_s+1_i} + (V_i)^n_{m-1_s-1_i}}{4h_s h_i}
\end{aligned}
$$

Домножим на 6τ и запишем для $d = 2$, $s = 1$:

$$
\begin{aligned}
&6\tau F_s(G,\, V_1,\, V_2) = \\
&\quad = \left(\frac{3\tau p_\rho}{h_1}\ \exp(G^n_m)\right) G^{n+1}_{m_1-1,m_2} + \left(\frac{3\tau p_\rho}{h_1}\ \exp(G^n_m)\right) G^{n+1}_{m_1+1,m_2} + \left[6 + 4\tau\widetilde{\mu}\left(\frac{4}{h_1^2} + \frac{3}{h_2^3}\right)\right] V1^{n+1}_m - \\
&\quad - \left[\frac{\tau}{h_1}\left(V1^n_{m_1-1,m_2} + V1^n_m\right) + \frac{8\tau\widetilde{\mu}}{h_1^2}\right] V1^{n+1}_{m_1-1,m_2} - \left[\frac{3\tau}{2h_2}\left(V2^n_{m_1,m_2-1} + V1^n_m\right) + \frac{6\tau\widetilde{\mu}}{h_2^2}\right] V1^{n+1}_{m_1,m_2-1} + \\
&\quad + \left[\frac{\tau}{h_1}\left(V1^n_{m_1+1,m_2} + V1^n_m\right) - \frac{8\tau\widetilde{\mu}}{h_1^2}\right] V1^{n+1}_{m_1+1,m_2} + \left[\frac{3\tau}{2h_2}\left(V2^n_{m_1,m_2+1} + V1^n_m\right) - \frac{6\tau\widetilde{\mu}}{h_2^2}\right] V1^{n+1}_{m_1,m_2+1} - B_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&6\tau B_1(G,\, V_1,\, V_2) = \left[6 + \frac{3\tau}{2h_2}\left(V2^n_{m_1,m_2+1} - V2^n_{m_1,m_2-1}\right)\right] V1^n_m - \\
&- 6\tau(\widetilde{\mu} - \mu\exp(-G^n_m)) \cdot \left[\frac{4}{3h_1^2}\left(V1^n_{m_1+1,m_2} - 2V1^n_m + V1^n_{m_1-1,m_2}\right) + \frac{1}{h_2^2}\left(V1^n_{m_1,m_2+1} - 2V1^n_m + V1^n_{m_1,m_2-1}\right)\right] + \\
&\qquad + \frac{\tau\mu}{2h_1h_2}\exp(-G^n_m)\left(V2^n_{m_1+1,m_2+1} - V2^n_{m_1-1,m_2+1} - V2^n_{m_1+1,m_2-1} + V2^n_{m_1-1,m_2-1}\right)
\end{aligned}
$$

3 Программная реализация

3.1 Описание области

Задана область

$$\Omega = \Omega_{01} \cup \Omega_{02} \cup \Omega_{11} \cup \Omega_{12} \cup \Omega_{10} \cup \Omega_{10} \cup \Omega_{20}$$

.
Неизвестные функции: плотность ρ и вектор скорости $\mathbf{u}$ являются функциями переменных Эйлера $(t, x) \in Q = [0, T] \times \Omega$.

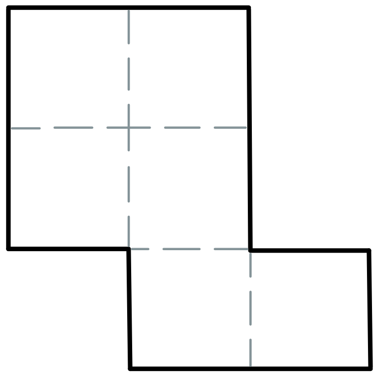

Рис. 1: Заданная область

3.2 Особенности реализации программы

Система (4) является линейной относительно переменных G^{n+1}, $(V_s)^{n+1}$, $s = 1, \ldots, d$ с разреженной матрицей коэффициентов и, следовательно, может быть эффективно решена с помощью какого-либо итерационного алгоритма. В качестве же начального приближения можно взять значения на n-ом слое.

Для использования итерационных методов решения разреженных линейных систем матрицы стоит делать ближе к диагональной. Для этого необходимо упорядочить уравнения системы (4). Зададим сперва на сетке ω_h порядок: нулевым узлом будем считать узел, имеющий наименьшие значения всех пространственных координат; далее последовательно выбираются узлы, у которых в первую очередь увеличивается первая координата, потом вторая и т.д., причем при изменении s-ой координаты, $s = 2, \ldots, d$, координаты $1, \ldots, s-1$ принимают наименьшее возможное значение. Пронумеровав все узлы, обозначим $z = (\widehat{G}_0, (\widehat{V}_1)_0, (\widehat{V}_2)_0, \ldots, (\widehat{V}_d)_0, \widehat{G}_1, (\widehat{V}_1)_1, (\widehat{V}_2)_1, \ldots, (\widehat{V}_d)_1, \ldots)^T$. В результате получится система $Az = b$ с почти $3(d+1)$ диагональной матрицей A.

В случае $d = 2 : z = (\widehat{G}_0, (\widehat{V}_1)_0, (\widehat{V}_2)_0, \widehat{G}_1, (\widehat{V}_1)_1, (\widehat{V}_2)_1, \ldots)^T$. Матрица почти 9-диагональная.

Для решения системы будем использовать стабилизированный метод бисопряжённых градиентов (англ. bi-conjugate gradient stabilized method, BiCGStab) с использованием ILUT (Incomplete LU with Threshold) предобусловливателя. Реализация метода была взята из библиотеки Eigen (см. [2]), все параметры, кроме предобусловливателя, по умолчанию.

4 Отладочный тест

4.1 Постановка задачи

Зададим функции

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\rho}\,(t,\,x_1,\,x_2) = (\cos(2\pi x_1) + 1.5)(\sin(2\pi x_2) + 1.5)\exp(t);\\
&\widetilde{u}_2(t,\,x_1,\,x_2) = \sin(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)\exp(t);\\
&\widetilde{u}_2(t,\,x_1,\,x_2) = \sin(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)\exp(-t);
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Определим функции $\widetilde{f}_0,\,\widetilde{f}_1,\,\widetilde{f}_2$ так, чтобы они удовлетворяли системе (2) с правой частью, составленной из этих функций, а именно:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial\widetilde{\rho}\widetilde{u}_i}{\partial x_i} = \widetilde{\rho}\widetilde{f}_0;\\[2ex]
\dfrac{\partial\widetilde{\rho}\widetilde{u}_s}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial\widetilde{\rho}\widetilde{u}_i\widetilde{u}_s}{\partial x_i} + \dfrac{\partial p}{\partial x_s} = \mu\left(\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial^2\widetilde{u}_s}{\partial x_i^2} + \dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial^2\widetilde{u}_i}{\partial x_s\partial x_i}\right) + \widetilde{\rho}\widetilde{f}_s, \quad s = 1,\,2.
\end{cases}
\tag{11}
$$

Выпишем отдельно все частные производные, необходимые для подсчета функций $\widetilde{f}_s$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} &= \tilde{\rho} & \frac{\partial\tilde{g}}{\partial t} &= \frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} = 1\\
\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x_1} &= -2\pi\sin(2\pi x_1)(1.5 + \sin(2\pi x_2))\exp(t) & \frac{\partial\tilde{g}}{\partial x_1} &= \frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x_1}\\
\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x_2} &= 2\pi(\cos(2\pi x_1) + 1.5)\cos(2\pi x_2))\exp(t) & \frac{\partial\tilde{g}}{\partial x_2} &= \frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{u_1}}{\partial t} &= u_1 & \frac{\partial\tilde{u_2}}{\partial t} &= -u_2\\
\frac{\partial\tilde{u_1}}{\partial x_1} &= 2\pi\cos(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)\exp(t) & \frac{\partial\tilde{u_2}}{\partial x_1} &= 2\pi\cos(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)\exp(-t)\\
\frac{\partial\tilde{u_1}}{\partial x_2} &= 2\pi\sin(2\pi x_1)\cos(2\pi x_2)\exp(t) & \frac{\partial\tilde{u_2}}{\partial x_2} &= 2\pi\sin(2\pi x_1)\cos(2\pi x_2)\exp(-t)
\end{aligned}
$$

Выписывать явный вид для функций $\widetilde{f}_s$ не имеет смысла, так они являются комбинациями описанных выше функций и производных и намного проще реализовать отдельные части этих комбинаций.
Таким образом, функции (10) являются гладким точным решением дифференциальной задачи (2) с начальными и граничными условиями:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\rho}(0,\mathbf{x}) = (\cos(2\pi x_1) + 1.5)(\sin(2\pi x_2) + 1.5)\\
&\tilde{u_1}(0,\mathbf{x}) = \tilde{u_2}(0,\mathbf{x}) = \sin(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)
\end{aligned}
$$

4.2 Численные эксперименты

Будем рассматривать зависимости $p(\rho) = C\rho,\ C \in \{1, 10\}$.

Ниже приведены результаты численных экспериментов, а именно таблицы с ошибками (нормами разности между разностным решением и точным решением дифференциальной задачи на последнем временном слое; нормы C, L_2, W_2^1) для различных пар параметра $\mu \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$ и зависимости $p(\rho)$.

Для решения системы $Ax = b$ использовался метод $BiCGSTab$ + $ILUT$ предобусловливатель из библиотеки Eigen (см. [2]) с параметрами $eps = 10^{-8}$, $iter = 2000$.

4.2.1 Ошибки для G

τ \ h	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	1.181652e+01 4.893319e+00 3.968220e+01	1.443212e+00 8.042684e-01 7.933857e+00	1.443281e+00 8.003429e-01 7.912020e+00	1.443604e+00 8.002513e-01 7.926450e+00
0.006250	6.248864e+01 1.900438e+01 1.708589e+02	7.175910e-02 9.393308e-03 1.042025e-02	7.231800e-02 8.899933e-03 1.012728e-02	6.908043e-02 8.774750e-03 9.885382e-03
0.003125	7.120057e+00 1.926111e+00 2.143837e+01	4.123032e-02 5.053052e-03 5.520194e-03	3.766751e-02 4.634440e-03 5.153051e-03	3.592457e-03 4.625282e-03 4.965253e-03
0.001563	2.155197e+00 1.278056e+00 1.193935e+01	2.625566e-02 2.909929e-03 3.239691e-03	1.891171e-02 2.367424e-03 2.587931e-03	1.903686e-02 2.355307e-03 2.673878e-03

Таблица 1: Таблица для G при $C = 1$ и $\mu = 0.1$.

τ \ h	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	4.564166e+00 1.573963e+00 1.560271e+01	3.245672e-01 2.206281e-02 2.446337e-02	3.056571e-01 2.188531e-02 2.315404e-02	nan -nan -nan
0.006250	4.794683e+01 1.094421e+01 1.408516e+02	1.792192e-01 8.201671e-02 1.382530e+00	1.776189e-01 8.096468e-02 1.425657e+00	1.776132e-01 8.095492e-02 1.431199e+00
0.003125	1.167069e+04 5.143610e+03 1.591441e+04	9.662915e-02 6.153489e-03 6.669465e-03	8.650345e-02 5.475710e-03 6.091467e-03	8.298890e-02 5.249146e-03 6.160562e-03
0.001563	3.367458e+04 1.547585e+04 5.749273e+04	4.769869e-02 4.247154e-03 4.365953e-03	4.218015e-02 2.805642e-03 3.184885e-03	4.292776e-02 2.724375e-03 3.010823e-04

Таблица 2: Таблица для G при $C = 1$ и $\mu = 0.01$.

τ \ h	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	4.644843e+00 1.375789e+00 1.273598e+01	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.006250	3.119576e+03 1.568071e+03 1.374665e+04	7.508658e-01 2.383993e-02 2.637653e-02	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.003125	2.079895e+04 9.170933e+03 2.839086e+04	3.062194e-01 1.324792e-02 1.367280e-02	2.608487e-01 7.942716e-03 9.034159e-03	4.845622e-01 9.802728e-03 1.047662e-02
0.001563	5.783370e+04 2.657601e+04 9.607411e+04	1.494132e-01 8.024104e-03 9.302050e-03	1.462905e-01 4.124584e-03 4.781897e-03	1.033737e-01 3.949808e-04 4.261782e-03

Таблица 3: Таблица для G при $C = 1$ и $\mu = 0.001$.

$\tau \backslash h$	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	3.222515e+00 1.120161e+00 1.339440e+01	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.006250	5.048784e+01 1.562821e+01 9.405579e+01	2.294542e-02 1.154502e-02 1.030876e-01	2.236461e-02 1.111025e-02 9.997687e-02	nan -nan -nan
0.003125	9.549526e+02 4.195816e+02 1.360581e+03	1.318460e-02 6.533726e-03 7.547581e-03	1.285138e-02 6.383568e-02 5.744328e-02	2.610631e-03 1.292612e-03 1.037825e-02
0.001563	8.625099e+02 4.645395e+02 1.326580e+03	8.395926e-03 4.172065e-03 4.806334e-03	8.182901e-03 4.065086e-03 3.637995e-02	1.652392e-03 8.231357e-04 6.042953e-03

Таблица 4: Таблица для G при $C = 10$ и $\mu = 0.1$.

$\tau \backslash h$	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.006250	nan -nan -nan	8.568521e-02 1.611803e-02 1.838759e-02	2.443923e-02 4.034803e-03 .456690e-03	nan -nan -nan
0.003125	9.670434e+02 6.789979e+02 1.396412e+03	8.536886e-02 1.599702e-02 1.786157e-02	2.312920e-02 4.187899e-03 4.378687e-03	nan -nan -nan
0.001563	nan -nan -nan	8.549353e-02 1.663654e-02 1.767401e-02	2.244814e-02 4.086817e-03 4.314045e-03	nan -nan -nan

Таблица 5: Таблица для G при $C = 10$ и $\mu = 0.01$.

$\tau \backslash h$	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.006250	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.003125	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.001563	nan -nan -nan	1.188810e+00 2.229982e-01 6.577662e+00	1.504082e+00 2.498056e-01 1.274563e+01	nan -nan -nan

Таблица 6: Таблица для G при $C = 10$ и $\mu = 0.001$.

4.2.2 Ошибки для V_1

$\tau \backslash h$	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	1.273794e+00 8.811622e-01 9.179300e+00	1.551070e-01 1.041228e-01 1.393490e+00	1.025871e-01 7.591445e-02 8.867576e-01	9.633164e-02 7.586060e-02 8.485213e-01
0.006250	1.293501e+00 8.823137e-01 9.265235e+00	1.312914e-02 1.872861e-03 2.118845e-03	1.207071e-02 1.821878e-03 2.065799e-03	1.274534e-02 1.925126e-03 2.039209e-03
0.003125	1.303324e+00 8.832444e-01 9.313359e+00	7.230558e-03 9.901299e-04 1.068712e-03	6.670095e-03 9.469786e-04 1.013110e-03	6.167628e-03 9.603860e-04 1.009190e-03
0.001563	1.308248e+00 8.838033e-01 9.338764e+00	4.062450e-03 6.132697e-04 6.866265e-04	3.346889e-03 4.605327e-04 5.172722e-04	3.286874e-03 4.502363e-04 5.148565e-04

Таблица 7: Таблица для V_1 при $C = 1$ и $\mu = 0.1$.

$\tau \backslash h$	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	1.866822e+00 9.253075e-01 1.105338e+01	7.427562e-02 7.664623e-03 8.030954e-03	7.177158e-02 7.815092e-03 8.001478e-03	nan -nan -nan
0.006250	4.516776e+00 2.027162e+00 1.681788e+01	4.011474e-02 3.723153e-04 4.286078e-03	3.963280e-02 3.851547e-03 4.067230e-03	3.491151e-02 3.766783e-03 4.042329e-03
0.003125	1.198286e+02 8.521162e+01 4.602923e+02	2.131346e-02 2.119743e-03 2.290072e-03	1.989980e-02 1.906876e-03 2.112616e-03	1.981068e-02 2.140683e-03 2.015946e-03
0.001563	3.264518e+02 1.533002e+02 1.169740e+03	1.092496e-02 1.271825e-03 1.467415e-03	9.794785e-03 9.667033e-04 1.040100e-03	1.032803e-02 9.108287e-04 1.000033e-03

Таблица 8: Таблица для V_1 при $C = 1$ и $\mu = 0.01$.

$\tau \backslash h$	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	2.460338e+00 8.548715e-01 3.736768e+01	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.006250	3.004367e+01 2.515557e+00 2.874351e+02	2.002819e-01 6.097723e-03 6.782334e-03	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.003125	1.026350e+02 1.174078e+02 6.337207e+02	7.188423e-02 3.381587e-03 3.810086e-03	5.615562e-02 2.579925e-03 2.676709e-03	5.842451e-02 2.542173e-03 2.709279e-03
0.001563	4.051511e+02 1.976979e+02 1.466415e+03	3.686363e-02 2.246079e-03 2.364163e-03	3.392110e-02 1.308220e-03 1.443221e-03	2.953018e-02 1.267860e-03 1.377610e-03

Таблица 9: Таблица для V_1 при $C = 1$ и $\mu = 0.001$.

h / τ	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	1.036814e+00 4.747769e-01 7.415459e+00	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.006250	6.693492e-01 3.841093e-01 5.275533e+00	7.120181e-02 6.125506e-02 7.653887e-01	4.105627e-02 3.037243e-02 4.990148e-01	nan -nan -nan
0.003125	6.898148e-01 3.887243e-01 5.293374e+00	4.091018e-02 3.519377e-02 4.977300e-01	2.035193e-02 1.497539e-02 2.828827e-01	1.286745e-02 1.212288e-02 1.234002e-01
0.001563	6.974933e-01 3.918021e-01 5.316663e+00	2.602997e-02 2.248209e-02 1.657248e-02	1.988486e-02 1.526551e-02 1.826980e-01	7.397704e-03 5.680946e-03 6.283041e-02

Таблица 10: Таблица для V_1 при $C = 10$ и $\mu = 0.1$.

h / τ	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.006250	nan -nan -nan	3.587676e-01 1.372684e-01 1.042954e+00	3.583525e-01 1.376053e-01 1.038226e+00	nan -nan -nan
0.003125	8.119136e+00 2.784903e+00 4.732915e+01	4.936708e+00 1.133611e+00 3.634725e+01	4.065698e-02 1.624499e-02 1.135627e-01	nan -nan -nan
0.001563	nan -nan -nan	5.278974e-01 2.203448e-01 3.996600e+00	2.611910e+00 3.915495e-01 2.400678e+01	nan -nan -nan

Таблица 11: Таблица для V_1 при $C = 10$ и $\mu = 0.01$.

h / τ	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.006250	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.003125	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.001563	nan -nan -nan	2.280346e+00 4.910456e-01 1.649031e+01	3.756206e+00 7.027945e-01 3.591326e+01	nan -nan -nan

Таблица 12: Таблица для V_1 при $C = 10$ и $\mu = 0.001$.

4.2.3 Ошибки для V_2

τ \ h	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	5.163690e-01 3.710638e-01 4.912846e+00	7.834257e-02 4.704192e-02 6.923876e-01	3.625120e-02 2.846157e-02 3.657932e-01	3.748265e-02 2.731132e-02 3.230456e-01
0.006250	5.087459e-01 3.736701e-01 4.961063e+00	4.781025e-03 8.932582e-04 9.188853e-04	4.600605e-03 8.590230e-04 9.525336e-04	4.633240e-03 9.060256e-04 9.885460e-04
0.003125	5.045737e-01 3.751897e-01 4.987012e+00	2.626844e-03 4.381523e-04 4.665895e-04	2.364410e-03 4.578924e-04 5.105645e-04	2.400256e-03 4.488578e-04 5.046092e-04
0.001563	5.023952e-01 3.760130e-01 5.000552e+00	1.582459e-03 2.480354e-04 2.550212e-04	1.287314e-03 2.171915e-04 2.466425e-04	1.174618e-03 2.277401e-04 2.481845e-04

Таблица 13: Таблица для V_2 при $C = 1$ и $\mu = 0.1$.

τ \ h	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	7.722225e-01 3.827521e-01 4.572299e+00	2.928174e-02 3.653824e-03 3.758897e-03	2.850887e-02 3.645285e-03 3.789490e-04	nan -nan -nan
0.006250	1.868392e+00 8.385481e-01 6.956820e+00	1.467524e-02 1.785325e-03 1.981065e-03	1.485738e-02 1.959472e-03 2.087443e-03	1.474188e-02 1.873547e-03 2.058897e-03
0.003125	4.956784e+01 3.524831e+01 1.904027e+02	8.136315e-03 9.405169e-04 1.015001e-03	7.592297e-03 9.099835e-04 9.989750e-04	8.089271e-03 9.191887e-04 1.086301e-03
0.001563	1.350388e+02 6.341356e+01 4.848702e+02	4.344691e-03 5.224014e-04 5.856468e-04	3.996205e-04 4.631010e-04 4.896936e-04	3.882547e-02 4.786033e-04 5.372300e-04

Таблица 14: Таблица для V_2 при $C = 1$ и $\mu = 0.01$.

τ \ h	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	5.288268e+00 7.239103e-01 2.857697e+01	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.006250	8.851676e+02 7.623203e+01 3.151807e+03	4.168968e-02 2.916886e-03 3.149599e-03	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.003125	2.206399e+02 2.536968e+02 1.362785e+03	2.252184e-02 1.626586e-03 1.846045e-03	1.465716e-02 1.291201e-03 1.400078e-03	6.104416e-02 1.503596e-03 1.696563e-03
0.001563	8.783452e+02 4.249335e+02 9.823657e+02	1.619970e-02 1.126007e-03 1.218537e-03	6.390871e-03 6.351960e-04 7.101450e-04	7.007016e-03 6.884207e-04 7.390172e-04

Таблица 15: Таблица для V_2 при $C = 1$ и $\mu = 0.001$.

τ \ h	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	2.165418e+00 6.351958e-01 7.905731e+00	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.006250	8.312315e-01 3.822130e-01 4.891632e+00	2.034365e-02 3.729191e-02 2.112174e-01	1.019122e-02 2.107756e-01 1.614125e+01	nan -nan -nan
0.003125	8.269354e-01 3.851720e-01 4.902898e+00	1.126190e-02 1.681320e-02 1.962839e-01	8.227372e-03 1.540167e-02 1.683013e-01	6.628496e-03 9.199642e-03 8.086515e-02
0.001563	8.244676e-01 3.876225e-01 4.915134e+00	8.172919e-03 7.620079e-03 9.625839e-02	7.634258e-03 6.734669e-03 9.210913e-02	4.366243e-03 3.723740e-03 4.933159e-02

Таблица 16: Таблица для V_2 при $C = 10$ и $\mu = 0.1$.

τ \ h	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.006250	nan -nan -nan	3.453573e-01 1.321374e-01 1.003969e+00	3.449571e-01 1.324617e-01 9.994184e-01	nan -nan -nan
0.003125	8.917835e+00 2.486541e+00 4.611964e+01	4.537756e+00 1.132115e+00 3.617020e+01	3.913727e-02 1.563777e-02 1.093178e-01	nan -nan -nan
0.001563	nan -nan -nan	5.483957e-01 2.722312e-01 4.002362e+00	3.739123e+00 6.060822e-01 2.986859e+01	nan -nan -nan

Таблица 17: Таблица для V_2 при $C = 10$ и $\mu = 0.01$.

τ \ h	0.10000	0.050000	0.025000	0.012500
0.012500	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.006250	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.003125	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
0.001563	nan -nan -nan	2.239013e+00 5.312365e-01 1.526734e+01	3.284141e+00 4.945560e-01 3.052237e+01	nan -nan -nan

Таблица 18: Таблица для V_2 при $C = 10$ и $\mu = 0.001$.

4.3 Вывод

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что разностная схема сходится в зависимости от внешних параметров μ и C. Условия на сходимость можно выразить как: $h_i > 0.1$, $\tau > 0.0125$, $A < \frac{h}{\tau} < B$, для некоторых A, B. Сходимость имеет порядок $\tau + h_1^2 + h_2^2$.

5 Задача протекания

5.1 Постановка задачи

Задана область
$$\Omega = \Omega_{01} \cup \Omega_{02} \cup \Omega_{11} \cup \Omega_{12} \cup \Omega_{10} \cup \Omega_{10} \cup \Omega_{20}$$

Неизвестные функции: плотность ρ и вектор скорости $\mathbf{u}$ являются функциями переменных Эйлера $(t, x) \in Q = [0, T] \times \Omega$.
Граничные условия для неизвестного решения:

$$\rho\big|_{\Gamma-} = \rho_\gamma\,, \quad u_1\big|_{\Gamma-} = w\,, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}\big|_{\Gamma+} = 0$$

На оставшейся границе компоненты скорости равны нулю, а функция плотности считается неизвестной.

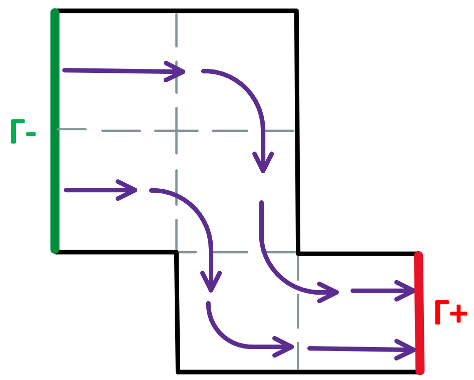

Рис. 2: Заданная область

5.2 Численные эксперименты

Будем рассматривать зависимости $p(\rho) = C\rho,\ C \in \{1, 10\}$, а также параметры $\mu \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$, $\rho_\gamma \in \{1, 10\}$. Если предыдущее состояние газа не отличается от текущего на $\epsilon = 10^{-3}$, то останавливаем расчёт. При фиксированных τ, $h_1 = h_2 = h$ будем исследовать момент завершения программы.

Будут приведены графики на рассматриваемой области, иллюстрирующие изменение плотности и векторов скорости от момента времени.

Для решения системы $Ax = b$ использовался метод $BiCGSTab + ILUT$ предобусловливатель из библиотеки Eigen (см. [2]) с параметрами $eps = 10^{-8}$, $iter = 2000$.

5.3 $C = 1,\ \mu = 0.10,\ w = 0.5,\ \rho_\gamma = 1,\ \tau = 0.010,\ h = 0.050$

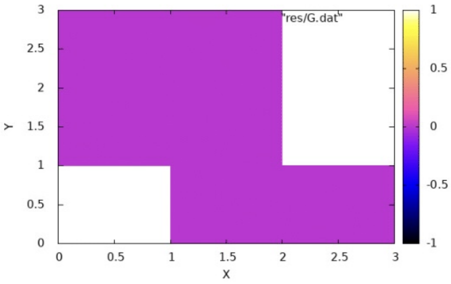

Рис. 3. t = 0

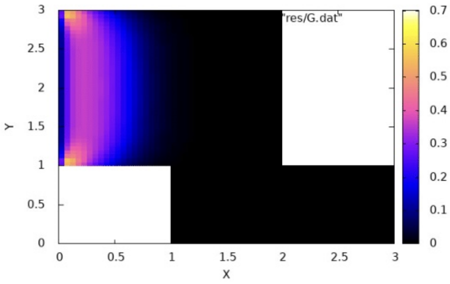

Рис. 4. t = 0.5

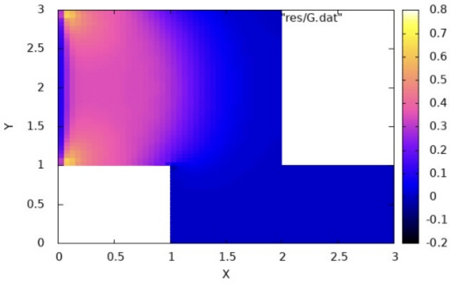

Рис. 5. t = 1

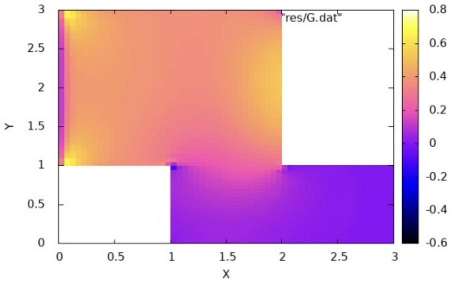

Рис. 6. t = 2

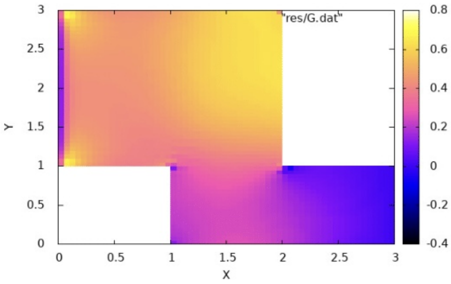

Рис. 7. t = 3

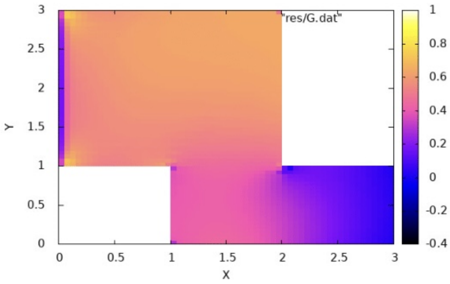

Рис. 8. t = 4

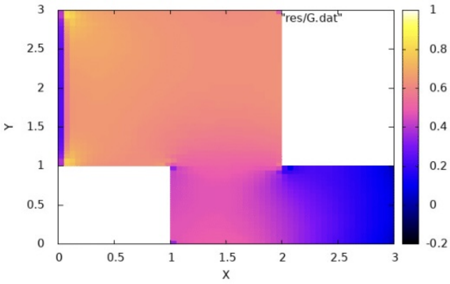

Рис. 9. t = 5

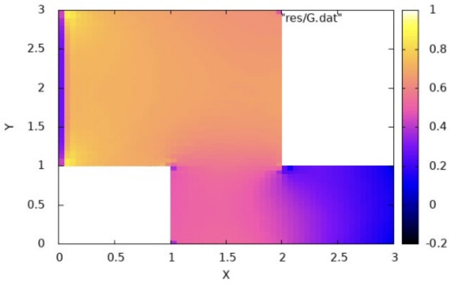

Рис. 10. t = 5.40

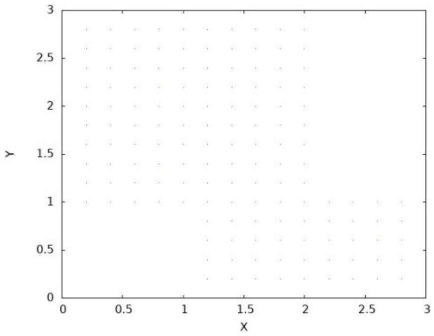

Рис. 11. t = 0

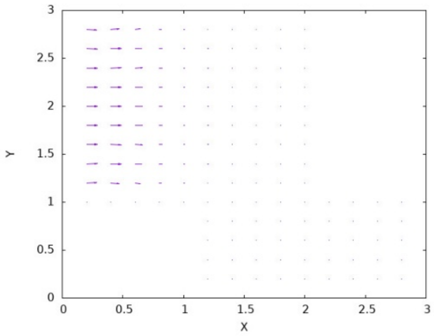

Рис. 12. t = 0.5

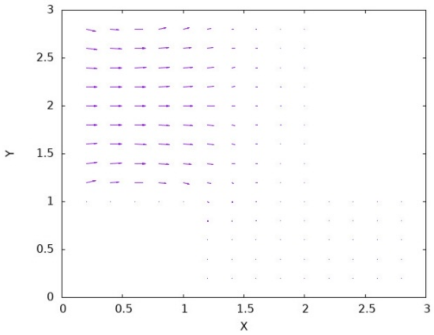

Рис. 13. t = 1

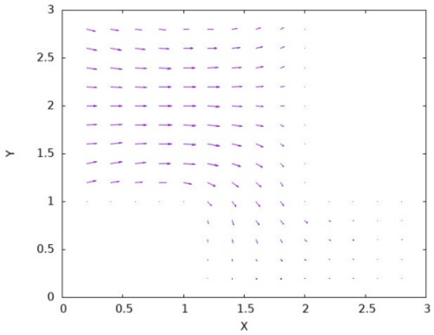

Рис. 14. t = 2

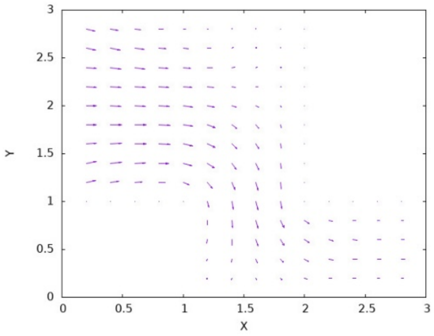

Рис. 15. t = 3

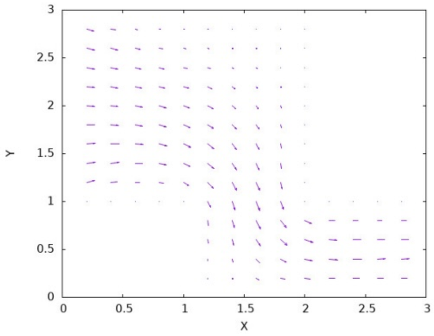

Рис. 16. t = 4

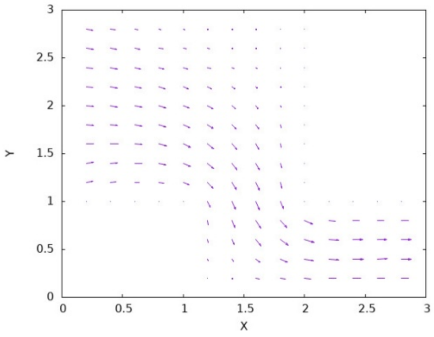

Рис. 17. t = 5

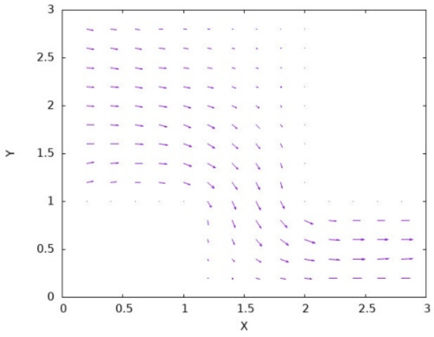

Рис. 18. t = 5.40

5.4 $C = 1$, $\mu = 0.01$, $w = 0.5$, $\rho_\gamma = 1$, $\tau = 0.005$, $h = 0.025$

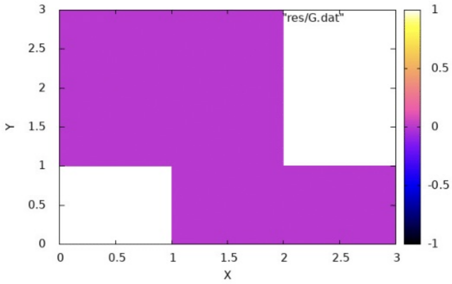

Рис. 20. t = 0

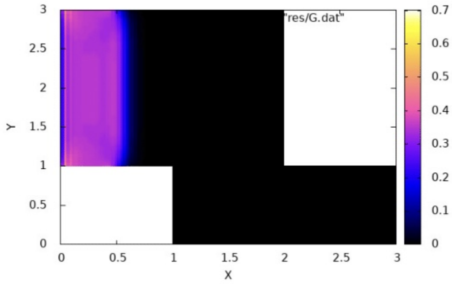

Рис. 21. t = 0.5

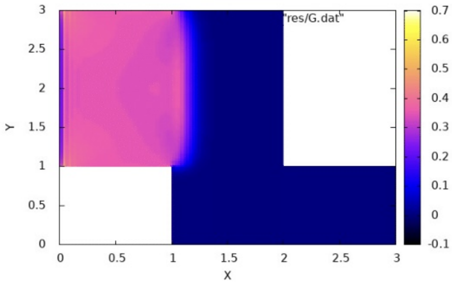

Рис. 22. t = 1

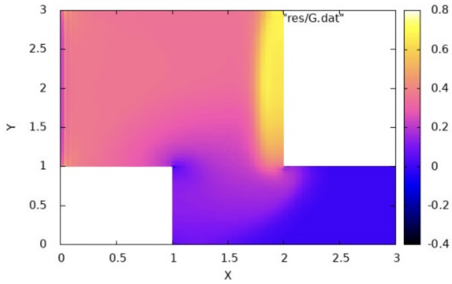

Рис. 23. t = 2

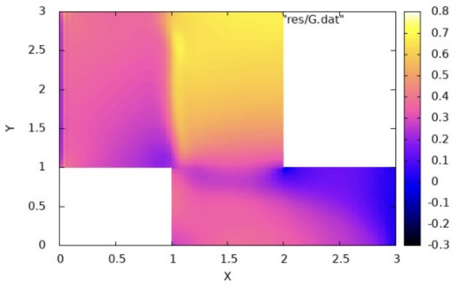

Рис. 24. t = 3

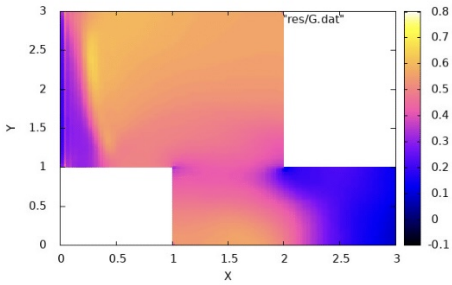

Рис. 25. t = 4

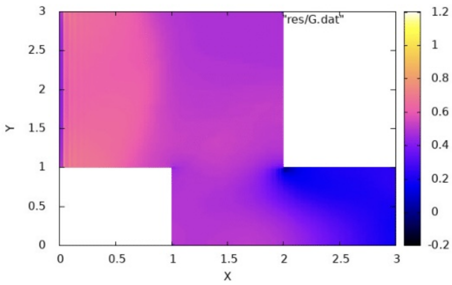

Рис. 26. t = 5

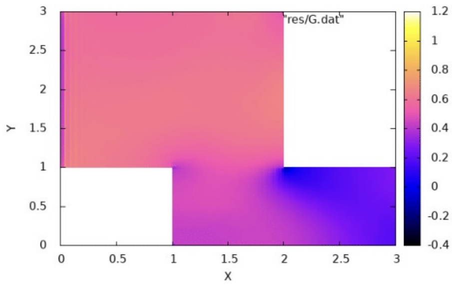

Рис. 27. t = 6

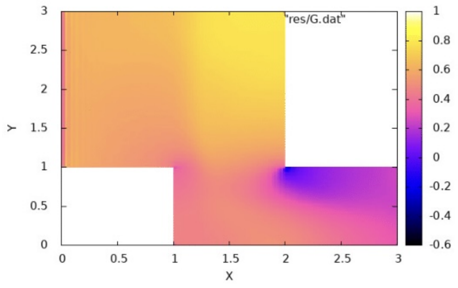

Рис. 28. t = 7

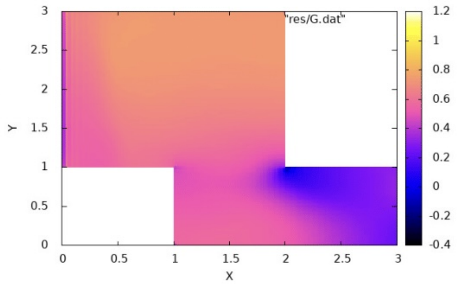

Рис. 29. t = 8

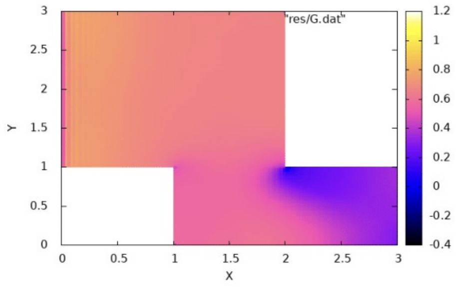

Рис. 30. t = 9

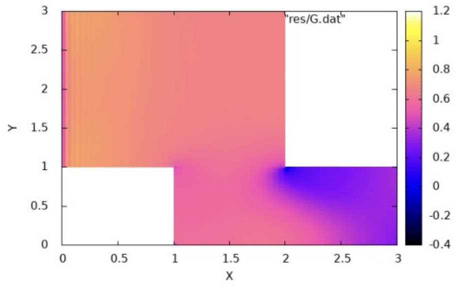

Рис. 31. t = 9.085

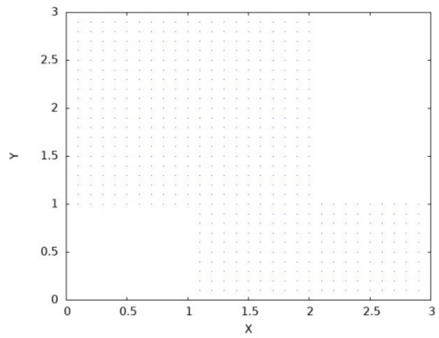

Рис. 32. t = 0

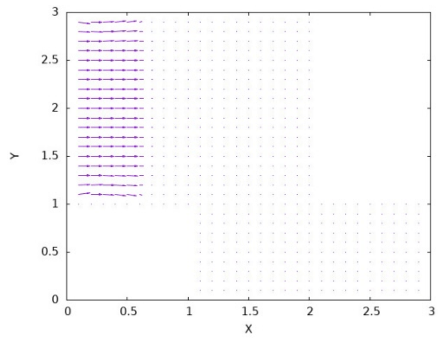

Рис. 33. t = 0.5

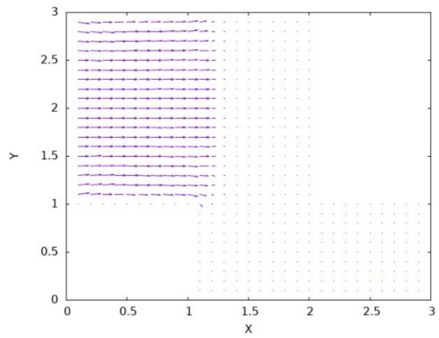

Рис. 34. t = 1

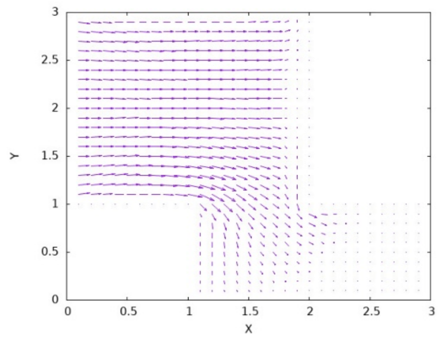

Рис. 35. t = 2

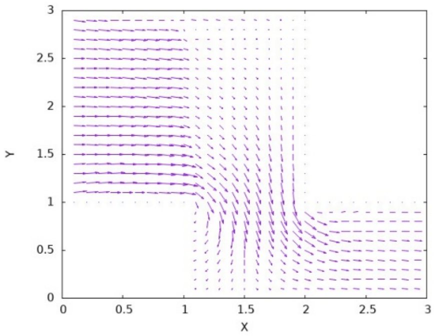

Рис. 36. t = 3

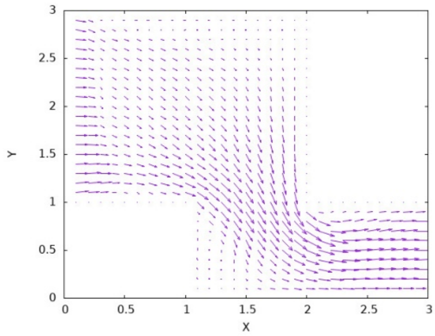

Рис. 37. t = 4

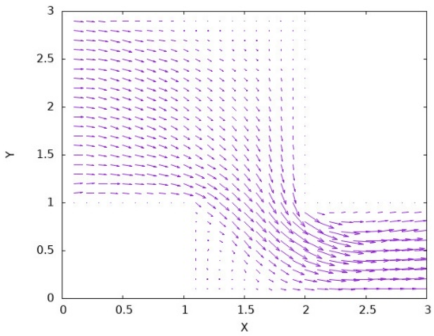

Рис. 38. t = 5

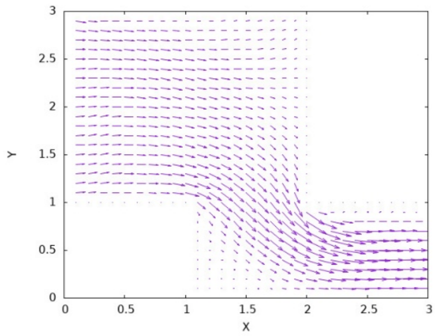

Рис. 39. t = 6

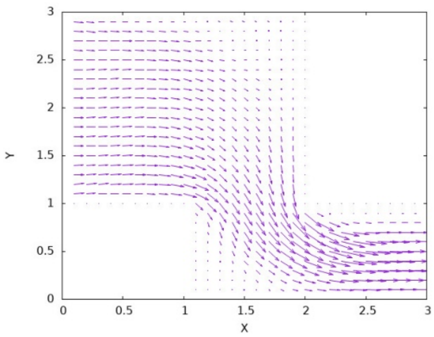

Рис. 40. t = 7

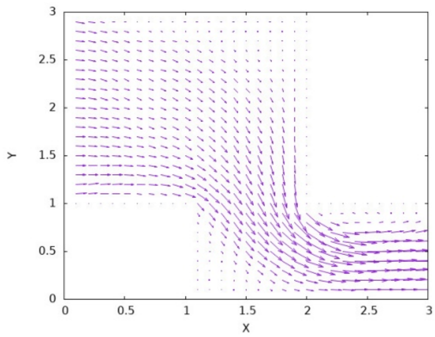

Рис. 41. t = 8

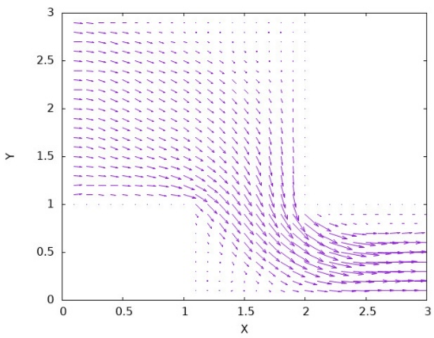

Рис. 42. t = 9

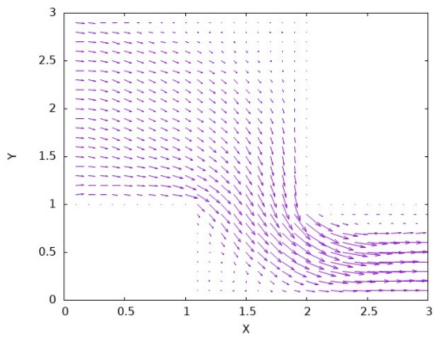

Рис. 43. t = 9.085

Список литературы

[1] Попов А. В. Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием неявных разностных схем.

[2] Eigen. C++ template library for linear algebra: matrices, vectors, numerical solvers, and related algorithms. https://eigen.tuxfamily.org/.