Решение системы линейных уравнений блочным методом Холецкого

Лобанова Валерия, группа 310

Содержание

1 Введение

1.1 Постановка задачи. Разложение Холецкого

Задача. *Найти решение системы линейных уравнений* $Ax = b$*, где*
A *— симметричная вещественнозначная матрицы размера* $n \times n$*,*
b *— известный вектор размера* n*,*
x *— неизвестный вектор.*

Идея решения. Поиск решения будет осуществляться с помощью разложения Холецкого матрицы $A = R^T DR$, где
R — верхнетреугольная матрица,
D — диагональная матрица с 1 или -1 на диагонали.
Найдем такое y, что $R^T y = b$ и затем из условия $DRx = y$ найдем x. $\square$

Теорема. *Пусть матрица* A *— самосопряженная и все ее угловые миноры отличны от нуля. Тогда существует матрица* $R = (r_{ij}) \in RT(n)$ *с вещественными положительными элементами на главной диагонали и диагональная матрица* D *с вещественными равными по модулю единице дигональными элементами такие, что* $A = R^T DR$*.*

Решение задачи. Применим точечный метод Холецкого для поиска матрицы R. Элементы d_{ii}, r_{ii} ,r_{ij} могут быть вычислены по следующим формулам:

$$d_{ii} = sgn(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |r_{ki}|^2 d_{kk}),\ i = 1, ..., n, \tag{1}$$

$$r_{ii} = \sqrt{\left| a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |r_{ki}|^2 d_{kk} \right|},\ i = 1, ..., n,$$

$$r_{ij} = (r_{ii} d_{ii})^{-1} (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} d_{kk} r_{kj}),\ i < j,\ i, j = 1, ..., n,$$

$\square$

1.2 Оценка сложности алгоритма построения верхнетреугольной матрицы в разложении Холецкого

Из формул (1) следует, что для вычисления элемента d_{ii}, $i = 1, ..., n$ требуется $2(i-1)$ операций (умножение на d_{ii} за операцию не считаем). Следовательно, вычисление всех элементов матрицы D требует

$$\sum_{i=1}^{n} 2(i-1) = n(n-1) = O(n^2),\ n \to \infty \quad \text{операций.}$$

Для вычисления элемента r_{ii} требуется $2(i-1) + 1 = 2i - 1$ операций (учитываем 1 операцию извлечения корня).
При фиксированном $i = 1, ..., n$ вычисление элементов r_{ij} для всех $j = i + 1, ..n$ по формулам (1) требует

$$\sum_{j=i+1}^{n} (2i-1) = (n-i)(2i-1) \quad \text{операций.}$$

Таким образом нахождение матрицы R требует

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i)(2i-1)+(2i-1) = \frac{2n^2+3n+1}{6} = \frac{n^3}{3}+O(n^2),\ n \to \infty \quad \text{операций.}$$

2 Блочный метод Холецкого

2.1 Описание блочного метода Холецкого

Разобьем матрицу A на блоки (A_{ij}) размера $m \times m$, где $m < n$ и если $m \nmid n \Rightarrow n = m * k + l, l \neq 0$, то крайние блоки могут иметь размеры $m \times l$, или $l \times m$, или $l \times l$. Матрицы R и D можно также искать в виде блочных матриц.

Из формулы $A = R^T DR$ ясно, что формулы для нахождения блоков матрицы R имеют вид:

$$R_{ii}^T D_i R_{ii} = A_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} R_{ji}^T D_j R_{ji},\ i = 1, ..., k, \tag{2}$$

$$R_{ii}^T D_i R_{is} = A_{is} - \sum_{j=1}^{i-1} R_{ji}^T D_j R_{js},\ i, s = 1, ..., k,\ i < s$$

$$R_{is} = D_i (R_{ii}^T)^{-1} (A_{is} - \sum_{j=1}^{i-1} R_{ji}^T D_j R_{js}),\ i, s = 1, ..., k,\ i < s \tag{3}$$

Тем самым сначала R_{ii} и D_i ищутся разложением из (2), а после для $s = i + 1, ...n$ вычисляются R_{is}, используя формулу (3).

2.2 Оценка сложности в алгоритме построения верхнетреугольной матрицы в блочном разложении Холецкого

Если известно количество операций в случае $l = 0$, то количество операций в случае $l \neq 0$ можно оценить сверху, сделав в имеющейся оценке замену k на $k+1$.

Начнём с оценки количества операций для $R_{ji}^T D_j R_{js}$,
чтобы не путаться в индексах рассмотим это произвдение как $R^T DR$, тогда

$$(R^T DR)_{ij} = \sum_{k=1}^{min(i,j)} r_{ki} d_k r_{kj}$$

здесь $min(i,j) - 1$ аддитивных и $min(i,j)$ мультипликативных операций, то есть всего $2min(i,j) - 1$ операций для одного элемента (по аналогии с неблочным методом умножение на d_i за операцию не считаем).

Тогда для вычисления $R_{ji}^T D_j R_{js}$ требуется

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (2min(i,j) - 1) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{i} (2j-1) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m} (2i-1) =$$

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(2m^2 - 3m + 1)}{6} = \frac{m(2m^2+1)}{3}$$

Обозначим как $Mult(m) = (2m^3 + m)/3$.

Для вычисления $A_{is} - \sum_{k=1}^{i-1} R_{ji}^T D_j R_{js}$ требуется:

$H(i,m) = (i-1)(Mult(m) + m^2) = (i-1)(2m^3 + 3m^2 + m)/3$ операций.

Сложность разложения Холецкого $Chol(m) = m^3/3$.
Сложность вычисления блока R_{ii} и D_i : $H(i,m) + Chol(m)$
Сложность вычисления всех диагональных блоков:

$$S_1(n,m,k) = \sum_{i=1}^{k} (H(i,m) + Chol(m)) = n(2mn + 3n + k - 3m - 1)/6$$

Умножение на треугольную матрицу требует $Y(m) = m^3$ операций. Здесь имеется ввиду умножение на $(R_{ii}^T)^{-1}$ в формуле (3). Подсчёт обратной к R_{ii}^T учтёем позже, так как это вычисление выполняется 1 раз при подсчете всей строки.

Итак, сложность вычисления недиагонального блока R_{ij}:

$$R(i,m) = H(i,m) + Y(m) = (i-1)(2m^3 + 3m^2 + m)/3 + m^3$$

Сложность вычисления всех недиагональных блоков R:

$$S_2(n,m,k) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=i+1}^{k} R(i,m) = n(k-1)(2mn + 3n + k + 5m^2 - 6m - 2)/18$$

Для вычисления строки - R_{ij} при фиксированном i требуется $(R_{ii}^T)^{-1}$, следовательно нужно $(k-1)$ раз найти обратную матрицу за $S_3(n,m) = (k-1)Chol(m) = (k-1)m^3/3$ операций.

Итак, нахождение всех блоков R_{is} требует

$$S(n,m) = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{n(2mn + 3n + k - 3m - 1)}{6} +$$

$$+ \frac{n(k-1)(2mn + 3n + k + 5m^2 - 6m - 2)}{18} + \frac{(k-1)m^3}{3} =$$

$$= \frac{n(2n^2 + m^2 + 9mn - 3m - 1 + 3nk + k^2)}{18} - \frac{m^3}{3} =$$

$$= \boxed{\frac{n^3}{9} + \frac{nm^2}{18} + \frac{n^2m}{3} - \frac{nm}{6} - \frac{n}{18} + \frac{n^3}{6m} + \frac{n^3}{18m^2} - \frac{m^3}{3}}$$

$$S(n,n) = \frac{n^3}{9} + \frac{n^3}{18} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{6} - \frac{n}{18} + \frac{n^2}{6} + \frac{n}{18} - \frac{n^3}{3} = \frac{n^3}{3}$$

$$S(n,1) = \frac{n^3}{9} + \frac{n}{18} + \frac{n^2}{3} - \frac{n}{6} - \frac{n}{18} + \frac{n^3}{6} + \frac{n^3}{18} - \frac{1}{3} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{3} - \frac{n}{6}$$

$$\boxed{S(n,n) = \frac{n^3}{3} \quad S(n,1) = \frac{n^3}{3} + O(n^2),\ n \to \infty}$$

2.3 Хранение матриц

Так как матрица A симметричная, то логично хранить не всю матрицу, а только верхнюю ее часть над главной диагональю и саму диагональ.

$$a_{00} = a[0];\ a_{11} = a[n];\ a_{22} = a[n + (n-1)]; ...$$

$$a_{ii} = a[\sum_{j=0}^{i-1}(n-j)] = a[i * (2 * n - i + 1)/2];$$

$$a_{is} = a[\sum_{j=0}^{i-1}(n-j)] = a[i * (2 * n - i + 1)/2 + (s - i)],\ i \leq s$$

У матрицы D хранить нужно только диагональ в массиве длины n.

При вычислении матрицы R элементы R_{is} можно записывать сразу на место A_{is}, так как A_{is} больше не будет использоваться.