Отчёт по заданию "Системы нелинейных уравнений"

Лобанова Валерия, группа 208

Содержание

1 Задача

Найти решение $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ системы

$$F(x, y, \alpha) = \begin{cases} 4x + \sin^2 \frac{1}{1+x^2} + \sin^2 \frac{1}{1+y^2} & = & \alpha \\ \frac{1}{1+x^2+y^2} + 2 \operatorname{tg} y & = & 0 \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ – произвольно.

2 Теорема

Пусть:

1. X – полное нормированное пространство
2. $\Omega \subset X$, $\overline{\Omega} = \Omega$ – замкнутое множество
3. отображение $F : \Omega \times A \mapsto \Omega$
4. $\forall \overline{x} \in \Omega \;\; \exists F'_{\overline{x}}(\overline{x}, \alpha) = \frac{\partial F(\overline{x}, \alpha)}{\partial \overline{x}}$
5. $\forall \overline{x} \in \Omega$, $\forall \alpha \in A \;\; \left\| F'_{\overline{x}}(\overline{x}, \alpha) \right\| \leq q < 1$
6. $\forall \overline{x} \in \Omega$ отображение $F(\overline{x}, \alpha)$ непрерывно по α в точке α_0
7. Ω – выпуклое множество

Тогда:

1. F – сжимающее отображение
2. $\exists!$ решение $\overline{x}_* = \overline{x}_*(\alpha) \; F(\overline{x}_*) = \overline{x}_*$
3. это решение $\overline{x}_* = \lim\limits_{k \to \infty} \overline{x}_k, \;\; \overline{x}_k = \overline{x}_k(\alpha), \; \overline{x}_{k+1} = F(\overline{x}_k, \alpha)$
4. скорость сходимости $\rho(\overline{x}_k, \overline{x}_*) \leq \frac{q^k}{1-q} \; \rho(\overline{x}_0, \overline{x}_1), \; 0 \leq q < 1$
5. $\overline{x}_*(\alpha)$ непрерывна в точке α_0

3 Исследование отображения

3.1 Преобразование исходной системы

Приведём исходную систему (1) к виду

$$\begin{cases} f_1(x,y,\alpha) & = & x \\ f_2(x,y,\alpha) & = & y \end{cases}$$

Видно, что для первой строки системы (1) достаточно перенести слагаемые $4x$ и α в противоположные части уравнения, а затем умножить обе части на $\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Ко второй строке системы (1) применим преобразование хитрее.
Для выкладок заменим $1+x^2+y^2$ на P, тогда

$$\frac{1}{1+x^2+y^2}+2\operatorname{tg} y = 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{P}+2\operatorname{tg} y = 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{-2P} = \operatorname{tg} y \ \Rightarrow\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2P}\right)+\pi z = y,\ z\in\mathbb{Z}$$

Теперь преобразуем получившийся арктангенс:

$$y-\pi z = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2P}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2P}\right) = [P>0] = -\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} 2P\right) = \operatorname{arctg} 2P - \frac{\pi}{2}$$

Итак, получим, что система (1) эквивалентна[1]:

$$\widetilde{F}(x,y,\alpha) = \begin{cases} f_1(x,y,\alpha) & = & -\frac{1}{4}\left(\sin^2\frac{1}{1+x^2}+\sin^2\frac{1}{1+y^2}-\alpha\right) & = & x \\ \\ f_2(x,y,\alpha) & = & \operatorname{arctg}\left(2(1+x^2+y^2)\right)-\frac{\pi}{2}-\pi n & = & y,\quad n\in\mathbb{N}_0 \end{cases} \tag{2}$$

[1] $z\in\mathbb{Z}$ заменили на $n\in\mathbb{N}_0$ с обратным знаком из-за условия на систему $y<0$, которое хоть и очевидно, но будет строго выведено позже

3.2 Вычисление Якобиана отображения

Посчитаем Якобиан отображения, заданного системой (2).
Заметим, что достаточно посчитать производные по x - исходя из симметричности формул, производные по y легко восстанавливаются.

$$\frac{\partial f_1(x,y,\alpha)}{\partial x} = \left(-\frac{1}{4}\left(\sin^2\frac{1}{1+x^2} + \sin^2\frac{1}{1+y^2} - \alpha\right)\right)'_x = -\frac{1}{4}\left(\sin^2\frac{1}{1+x^2}\right)'_x =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(2\sin\frac{1}{1+x^2}\cos\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)^2}\ \sin\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f_2(x,y,\alpha)}{\partial x} = \left(\operatorname{arctg}\left(2(1+x^2+y^2)\right) - \frac{\pi}{2}\right)'_x = \left(\operatorname{arctg}\left(2(1+x^2+y^2)\right)\right)'_x =$$

$$= \frac{2\cdot 2x}{1+(2(1+x^2+y^2))^2} = \frac{4x}{1+4(1+x^2+y^2)^2}$$

Полученный Якобиан назовем J:

$$J = J_{\widetilde{F}\,(x,y,\alpha)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(1+x^2)^2}\sin\left(\frac{2}{1+x^2}\right) & \frac{y}{2(1+y^2)^2}\sin\left(\frac{2}{1+y^2}\right) \\ \\ \frac{4x}{1+4(1+x^2+y^2)^2} & \frac{4y}{1+4(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

3.3 Оценка нормы Якобиана

Для того, чтобы оценить сверху норму матрицы Якоби (3), оценим сверху максимум модуля каждого её элемента[2].

$$|\, j_{11}| = \left|\frac{x}{2(1+x^2)^2}\sin\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\right| \le \left|\frac{x}{2(1+x^2)^2}\right| = |\, \widetilde{j_{11}}(x)\,|$$

В силу нечетности $\widetilde{j_{11}}(x)$ видим, что $\max|\,\widetilde{j_{11}}(x)\,| = \max_{x\ge 0}\widetilde{j_{11}}(x)$.

Посчитаем производную $\widetilde{j_{11}}(x)$:

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{j_{11}}(x)\right)'_x = \left(\frac{x}{2(1+x^2)^2}\right)'_x = \frac{1}{4(1+x^2)^4}\cdot\left(2(1+x^2)^2 - 2\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x\cdot x\right) = \\ \frac{1}{2(1+x^2)^3}\cdot\left(1+x^2-4x^2\right) = \frac{1-3x^2}{2(1+x^2)^3}\end{aligned} \tag{4}$$

Приравняем (4) нулю и найдем точки экстремума:

$$\frac{1-3x^2}{2(1+x^2)^3} = 0 \;\Rightarrow\; 1-3x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_e = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Функция $\widetilde{j_{11}}(x)$ возрастает на промежутке $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \max_{x\ge 0}\widetilde{j_{11}}(x) = \widetilde{j_{11}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{2(1+\frac{1}{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{32} < 0,17 \;\Rightarrow\; |\, j_{11}| < 0,17$$

Аналогично оценивается $|\, j_{12}| < 0,17$.

$$|\, j_{21}| = \left|\frac{4x}{1+4(1+x^2+y^2)^2}\right| \le \left|\frac{x}{(1+x^2+y^2)^2}\right| \le \left[\, x^2, y^2 \ge 0\,\right] \le \left|\frac{x}{1+x^2}\right| = |\, \widetilde{j_{21}}(x)\,|$$

Дальше считаем производную $\widetilde{j_{21}}(x)$, приравниваем её к нулю, находим точки экстремума:

$$\left(\widetilde{j_{21}}(x)\right)'_x = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)'_x = \frac{1+x^2-2x\cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \;\Rightarrow\; 1-x^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x_e = \pm 1 \;\Rightarrow\; \max|\,\widetilde{j_{21}}(x)\,| = \max_{x\ge 0}\widetilde{j_{21}}(x) = \widetilde{j_{21}}(1) = \frac{1}{2} < 1 \;\Rightarrow\; |\, j_{21}| < 0,5$$

Аналогично оценивается $|\, j_{22}| < 0,8$.

Теперь оценим норму матрицы матрицы Якоби (3):

$$\|J\|_1 = \max_k \sum_{i=1}^{2} |\, j_{ik}| = \max\left\{|\, j_{11}\,| + |\, j_{21}\,|\,,\; |\, j_{12}\,| + |\, j_{22}\,|\right\} < 0,17 + 0,5 = 0,67 = q < 1$$

$$\|J\|_1 < 0,67 = q < 1 \tag{5}$$

[2]Исользуется стандартная нумерация элементов матрицы

3.4 Проверка условий теоремы

Оценка нормы матрицы Якоби верна для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Но из второго уравнения системы (1) следует:

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} = -2\operatorname{tg} y \;, \; \frac{1}{1+x^2+y^2} > 0 \;\Rightarrow\; -2\operatorname{tg} y < 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg} y < 0 \;\Rightarrow\; y < 0$$

$$0 \leq -2\operatorname{tg} y = \frac{1}{1+x^2+y^2} \leq \left[x^2 \,\geq\, 0\right] \leq \frac{1}{1+y^2} < \left[y^2 \,>\, 0\right] < 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \operatorname{tg} y > -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; [y \,<\, 0] \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}|y| < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y \in \left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi n \;;\; 0\right) \;,\, n \in \mathbb{N}_0$$

В свою очередь для x ограничения связаны только со значением α. Вычислим из первого уравнения системы (1) эти ограничения для контроля соотношения решение-параметр:

$$4x + \sin^2\frac{1}{1+x^2} + \sin^2\frac{1}{1+y^2} = \alpha \;\Rightarrow\; 4x \leq \alpha \leq 4x+2 \;\Rightarrow\; \alpha - 2 \leq 4x \leq \alpha \;\Rightarrow\; x \in \left[\frac{\alpha-2}{4} \;;\; \frac{\alpha}{4}\right]$$

$X = \mathbb{R}^2$ – полное нормированное пространство. Областей Ω_n будет несколько - занумеруем их по числу n из промежутка значений y:

$$\boxed{\Omega_0 = \mathbb{R} \times \left[-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \;;\; 0\right]}$$

$$\boxed{\Omega_n = \mathbb{R} \times \left[-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi n \;;\; -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi(n-1)\right] ,\, n \in \mathbb{N}}$$

Так же заметим, что для любого фиксированного $x \in \Omega$ отображение $F\left(x, y, \alpha\right)$ непрерывно (а именно, линейно) по α .

Таким образом, все условия теоремы [стр. 2] выполнены для данного отображения (1) $F\left(x, y, \alpha\right) \sim \widetilde{F}\left(x, y, \alpha\right)$, и её можно использовать для решения задачи.

4 Оценка количества итераций

Требуемая точность $\rho\left(x_k, x_*\right) < \varepsilon;\ \ q = 0,67\ (5)$

Для оценки количества итераций используем формулу $\rho\left(x_k, x_*\right) \leq \frac{q^k}{1-q}\ \rho\left(x_0, x_1\right) \leq \varepsilon$

$$\varepsilon \geq \frac{q^k}{1-q}\rho\left(x_0, x_1\right) \ \Rightarrow\ \frac{\varepsilon\left(1-q\right)}{\rho\left(x_0, x_1\right)} \geq q^k \ \Rightarrow\ k \leq \log_q \frac{\varepsilon\left(1-q\right)}{\rho\left(x_0, x_1\right)} \tag{6}$$

В качестве начального условия возьмем:

$$\overline{x}_0(\alpha) = \begin{pmatrix} x_0(\alpha) \\ y_0(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\overline{x}_1(\alpha)$ и $\rho\left(\overline{x}_0, \overline{x}_1\right)$:

$$\overline{x}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} x_1(\alpha) \\ y_1(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\left(x_0, y_0, \alpha\right) \\ f_2\left(x_0, y_0, \alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\left(2\sin^2 1 - \alpha\right) \\ \\ \operatorname{arctg}\, 2 - \frac{\pi}{2} - \pi n \end{pmatrix}$$

$$\rho\left(\overline{x}_0, \overline{x}_1\right) = \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\left(2\sin^2 1 - \alpha\right) \\ \\ \operatorname{arctg}\, 2 - \frac{\pi}{2} - \pi n \end{pmatrix} \right| \geq \sqrt{\left(\frac{\alpha+2}{4}\right)^2 + \left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi n\right)^2} \geq \operatorname{arctg}(0,5) \tag{7}$$

Полученную оценку (7) для $\rho\left(\overline{x}_0, \overline{x}_1\right)$ подставим в (6):

$$k \leq \log_q \frac{\varepsilon\left(1-q\right)}{\rho\left(x_0, x_1\right)} \leq \log_q \frac{\varepsilon\left(1-q\right)}{\operatorname{arctg}(0,5)} = \frac{\ln\varepsilon + \ln\frac{(1-q)}{\operatorname{arctg}(0,5)}}{\ln q} = \left[q = 0,67\ (5)\,\right] =$$

$$= \frac{\ln\varepsilon + \ln\frac{0.33}{\operatorname{arctg}(0,5)}}{\ln 0,67} < \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon} + 0,35}{0,04} < 9 - 25\ln\varepsilon \ \Rightarrow\ \boxed{k \leq 9 - 25\ln\varepsilon}$$