Lecture 8: Adaptive Boosting

> 课件链接：[Hsuan-Tien Lin - adaptive boosting]
>
> **Adaptive Boosting(自适应增强)**
>
> - Motivation of Boosting：增强的动机(略)
> - Diversity by Re-weighting：通过重赋权重来增加多样性
> - Adaptive Boosting Algorithm：自适应增强算法
> - Adaptive Boosting in Action：AdaBoost-Stump

1. Motivation of Boosting：增强的动机

略(建议看视频)。

2. Diversity by Re-weighting：通过重赋权重来增加多样性

回忆上一章最后提到的**Bootstrapping**方法——通过放回抽样的方式，从同一笔资料中，生出许多笔不同的资料。例如，原始数据集为$D=\{(\mathbf{x}_1,y_1),(\mathbf{x}_2,y_2),(\mathbf{x}_3,y_3),(\mathbf{x}_4,y_4)\}$。假设在进行一次bootstrap后，我们得到的数据为$\tilde{D}_t=\{(\mathbf{x}_1,y_1),(\mathbf{x}_1,y_1),(\mathbf{x}_2,y_2),(\mathbf{x}_4,y_4)\}$。对比$D$，我们发现，这一次的重采样数据集中没有第三个样本，而第一个样本被抽到了两次。因此，我们可以将bootstrap看做**为每一个样本赋予权重的过程(re-weighting process)**：在上述重采样得到的数据集中：

- 第一笔资料被抽到两次，因此权重为2；
- 第二笔资料被抽到一次，因此权重为1；
- 第三笔资料没有被抽到，因此权重为0；
- 第四笔资料被抽到一次，因此权重为1。

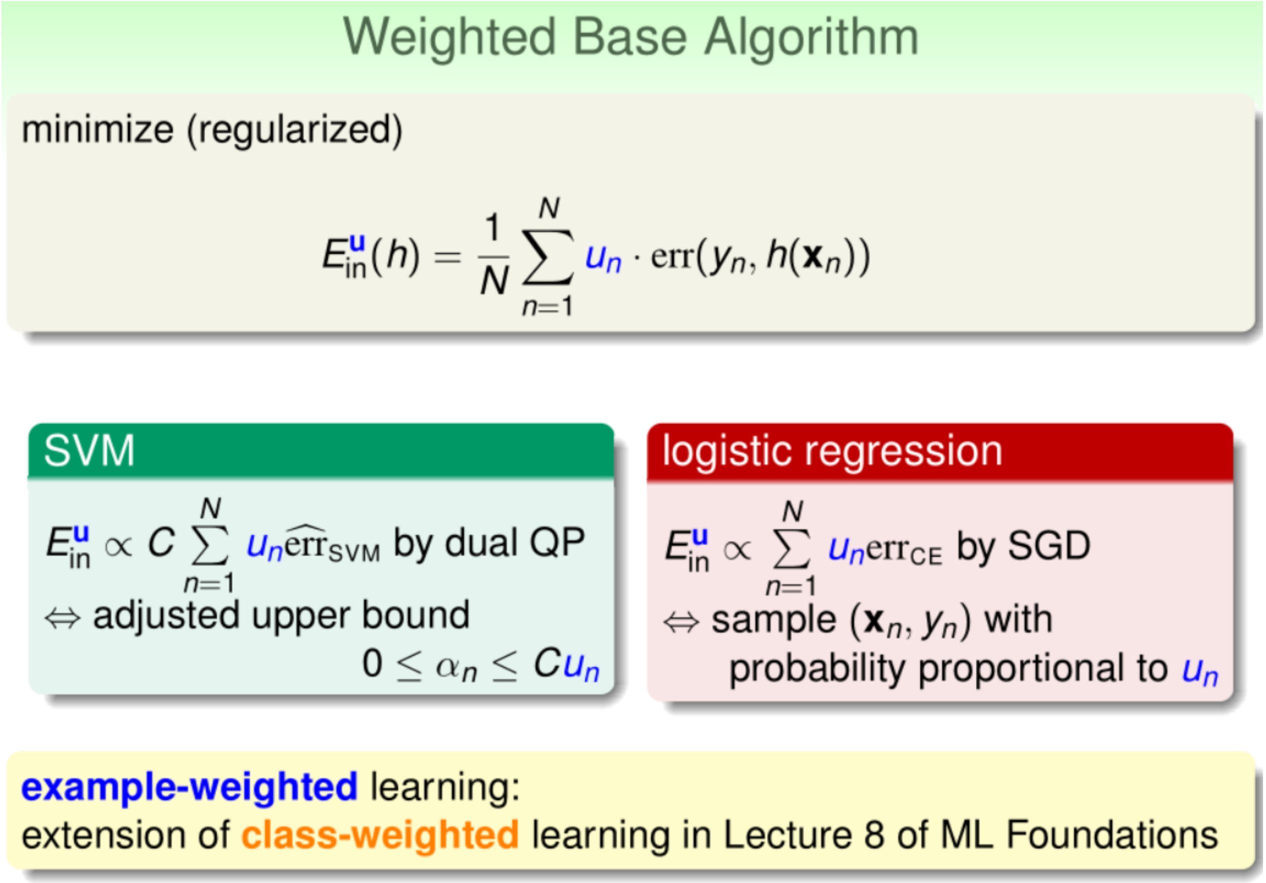
如果在重采样得到的数据集$\tilde{D}_t$上进行训练，那么需要最小化假说h在其上E_{in}——考虑分类问题(损失函数取0-1误差)。此时，E_{in}可以表示为：

$$
\begin{aligned}
E_{in}^{0/1}(h) &= \frac{1}{4}\sum_{(\mathbf{x},y)\in\tilde{D}_t} I[y\neq h(\mathbf{x})] \\
&= \frac{1}{4}\Big(I[y_1\neq h(\mathbf{x}_1)]+I[y_1\neq h(\mathbf{x}_1)]+I[y_2\neq h(\mathbf{x}_2)]+I[y_4\neq h(\mathbf{x}_4)]\Big)
\end{aligned}
$$

可以从"**权重**"的视角等价地改写上式：

$$
\begin{aligned}
E_{in}^{0/1}(h) &= \frac{1}{4}\Big(2\cdot I[y_1\neq h(\mathbf{x}_1)]+1\cdot I[y_2\neq h(\mathbf{x}_2)]+0\cdot I[y_3\neq h(\mathbf{x}_3)]+1\cdot I[y_4\neq h(\mathbf{x}_4)]\Big) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4} u_n^{(t)}\cdot I[y_n\neq h(\mathbf{x}_n)]
\end{aligned}
$$

其中，$u_1=2,u_2=1,u_3=0,u_4=1$——再次体现了"权重"。因此，我们可以将bootstrap想象成为每一个样本重新赋权；基于bootstrap得到的数据集进行模型训练，则是基于"新权重"进行训练——最小化bootstrap赋权的weighted E_{in}。对于不同的$\mathbf{u}$，基算法(base algorithm)将返回不同的g。



从权重的视角看，Bagging算法所做的事情，是通过**随机**重赋权重以训练出许许多多不同的g，然后将它们均匀混合起来。自然我们会想，能不能**有目的**的重赋权重以训练处许许多多不同的g，然后将它们按照**一定比例**混合起来？

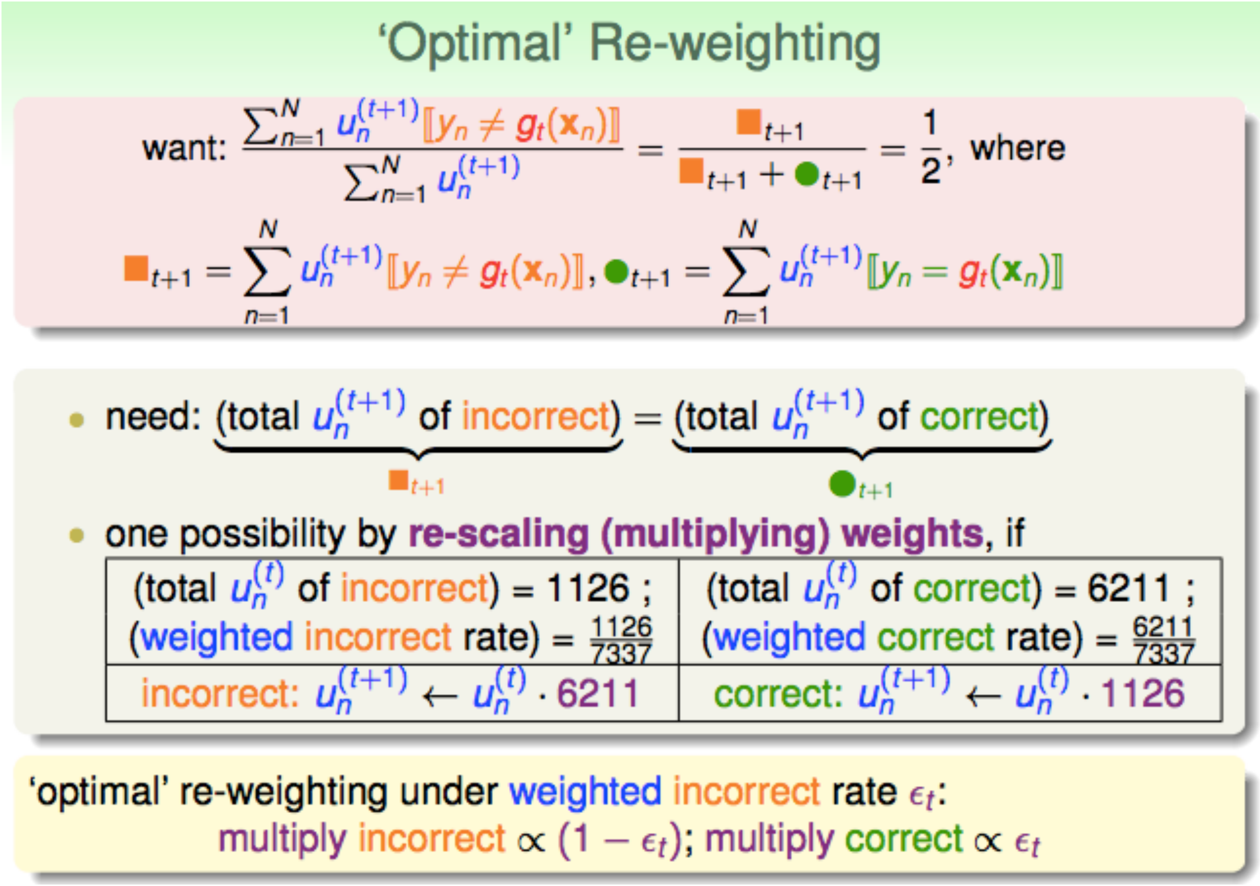
g_t与g_{t+1}的表达式如下(注意，两式中仅有$\mathbf{u}$不同)：

$$
\begin{aligned}
g_t &= \underset{h\in\mathcal{H}}{argmin}\left(\sum_{n=1}^{N}u_n^{(t)}I[y_n\neq h(\mathbf{x}_n)]\right)\\
g_{t+1} &= \underset{h\in\mathcal{H}}{argmin}\left(\sum_{n=1}^{N}u_n^{(t+1)}I[y_n\neq h(\mathbf{x}_n)]\right)
\end{aligned}
$$

如果g_t对于$\mathbf{u}^{(t+1)}$的数据非常差，那么根据$\mathbf{u}^{(t+1)}$学到的g_{t+1}应该和g_t非常不一样。因此，我们考虑这样构建$\mathbf{u}^{(t+1)}$，使得g_t在其上的表现与"丢铜板"的表现差不多，即错误分类的概率为1/2：

$$
\frac{\sum_{n=1}^{N}u_n^{(t+1)}I[y_n\neq g_t(\mathbf{x}_n)]}{\sum_{n=1}^{N}u_n^{(t+1)}}=\frac{1}{2}
$$

这也在暗示着，$\mathbf{u}^{(t+1)}$中上一轮犯错的样本点权重可能比较大。因为只有这样，g_t在其上的表现才会比较差。具体的构造方法如下：



分子(橙色方框)的含义：所有在g_t上犯错的点的$u^{(t+1)}$的和。分母可以拆成两个部分：

- 橙色方框：与分子一样，所有在g_t上犯错的点的$u^{(t+1)}$的和；
- 绿色方框：所有在g_t上正确的点的$u^{(t+1)}$的和；

分子与分母同时除以分子，容易看出，若让此式等于1/2，也就是要让橙色方框与绿色方框相等，即：在g_t上犯错的点的$u^{(t+1)}$的和与没有在g_t上犯错的点的$u^{(t+1)}$的和相等。

所以，一种容易想到的调整权重的方法是：给所有犯错点的u^t乘以未犯错点的u^t之和，给所有未犯错点的u^t乘以犯错点u^t之和(类似于交叉相乘)。抑或，可以给未犯错的点乘以**加权错误率(weighted incorrect rate)**，给犯错点乘以1减加权错误率。其中，加权错误率ϵ_t的计算为：

$$\epsilon_t = \frac{\sum_{n=1}^{N} u_n^t \ for\ incorrect\ samples}{\sum_{n=1}^{N} u_n^t}$$

3. Adaptive Boosting Algorithm：自适应增强算法

上一节推出了从u^t到$u^{(t+1)}$的更新规则：

1. 计算weighted incorrect rate：ϵ_t
2. 所有错误点$u^{(t+1)} = u^t \cdot (1 - \epsilon_t)$，所有正确点$u^{(t+1)} = u^t \cdot \epsilon_t$

现在，我们定义一个**等价的**新的**放缩因子(scaling factor)**：$\diamondsuit_t = \sqrt{\frac{1-\epsilon_t}{\epsilon_t}}$

- 对于所有错误点，我们将其权重**乘以**$\diamondsuit_t$；
- 对于所有正确点，我们将其权重**除以**$\diamondsuit_t$；

因为g_t是根据u^t学到的，因此只要是靠谱的base algorithm，g_t的加权错误率ϵ_t都应该小于1/2，即至少比随机丢铜板要好。因此，$\Diamond_t \geq 1$。这具有实际意义：

- 对于错误点，我们将其权重乘以比1大的数，也就是放大了；
- 对于错误点，我们将其权重除以比1大的数，也就是缩小了。

现在，我们有了一个初步的算法：

> $u^{(1)} = [\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}]$
>
> for $t = 1, 2, \cdots, T$
>
> 1. $g_t = A(D, u^{(t)})$，这里A是在最小化基于权重$u^{(t)}$的0/1误差；
> 2. 计算g_t的加权错误率ϵ_t，然后计算$\Diamond_t$，根据规则更新得到$u^{(t+1)}$
>
> 回传$G(\mathbf{x}) = ?$

此时，需要考虑用什么样的方式将得到的一个个g组合起来：

- 不能是uniform，因为g_1对E_{in}很好，但是g_2和g_1很不一样，所以g_2对E_{in}会很差；
- 可以用线性或者非线性方式；
- AdaBoost选择的方法：在生成g_t时，顺便决定了α_t。

改进的算法：

> $u^{(1)} = [\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}]$
>
> for $t = 1, 2, \cdots, T$
>
> 1. $g_t = A(D, u^{(t)})$，这里A是在最小化基于权重$u^{(t)}$的0/1误差；
> 2. 计算g_t的加权错误率ϵ_t，然后计算$\Diamond_t$，根据规则更新得到$u^{(t+1)}$；
> 3. 计算α_t；
>
> 回传$G(\mathbf{x}) = sign\left(\sum_{t=1}^{T} \alpha_t g_t(\mathbf{x})\right)$

怎么确定α_t？一种直觉是，"好的"g_t应该被赋予"大的"α_t——好的g_t，其ϵ_t应该很小，对应$\Diamond_t$应该很大——所以α_t应该正比于$\Diamond_t$：

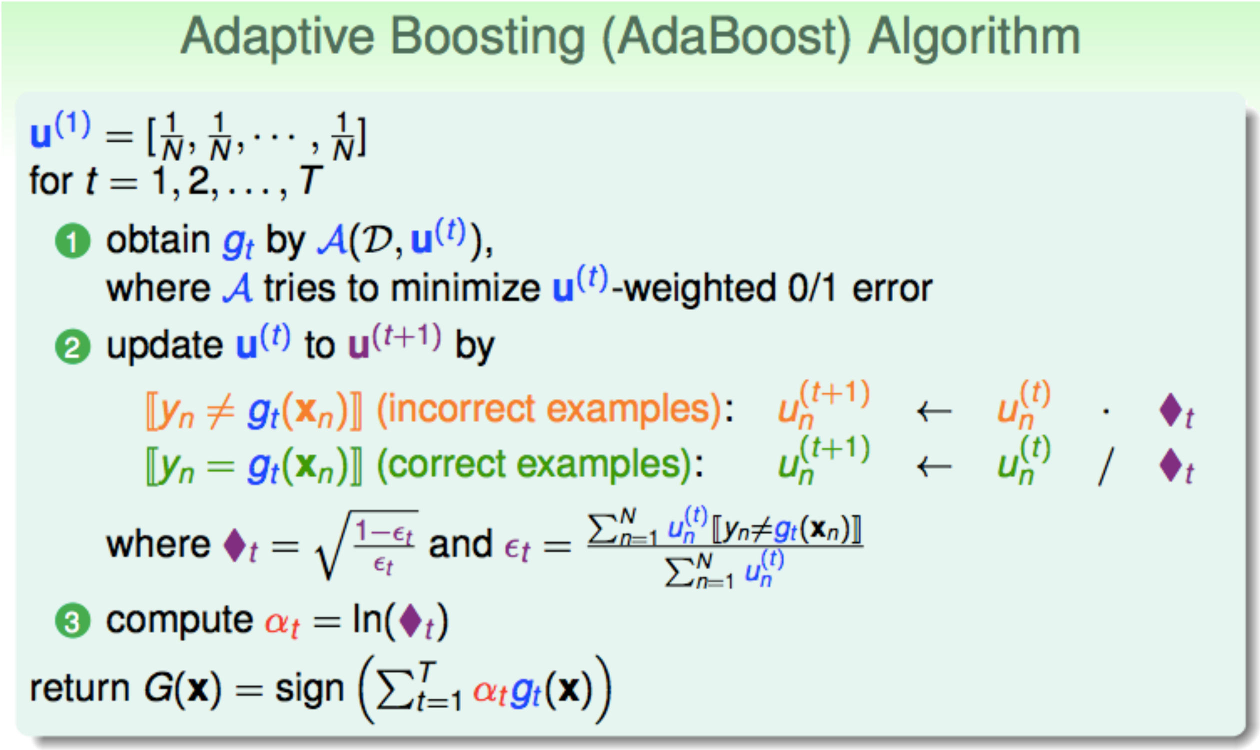
$$\alpha_t = ln(\Diamond_t)$$

- 如果$\epsilon_t = \frac{1}{2}$，则$\Diamond_t = 1$，则$\alpha_t = 0$：丢铜板的g被赋予0票；
- 如果$\epsilon_t = 0$，则$\Diamond_t = \infty$，则$\alpha_t = \infty$：炒鸡好的g被赋予无限票。

综合上面的组合权重计算，我们得到了**Adaptive Boosting算法**：

- weak base learning algorithm A = **Student**；
- optimal re-weighting factor $\Diamond_t$ = **Teacher**；
- magic linear aggregation α_t = **Class**。

完整的AdaBoost算法：



基于VC维的AdaBoost的理论保证：

$$E_{out}(G) \leq E_{in}(G) + O\left(\sqrt{O(d_{vc}(\mathcal{H}) \cdot T\ log\ T) \cdot \frac{log\ N}{N}}\right)$$

- 第一项会很小：在每次$\epsilon_t \leq \epsilon \leq \frac{1}{2}$时，经过$T = O(log\ N)$迭代后，就可以大概得到$E_{in}(G) = 0$——这里的必要条件是：base algorithm要比"乱猜"好；
- 第二项会很小：d_{vc} grows "slowly" with T。

最后，为什么叫做**Boosting(增强)**？如果A很弱，但是比乱猜好，那么通过AdaBoost算法，可以使其变得很强——$E_{in} = 0$且E_{out}很小。

4. AdaBoost-Stump

通过此前论证，我们知道，AdaBoost算法最好搭配一个“弱弱的”base algorithm：①该算法能够接受带有权重信息的数据；②该算法的性能不需要太好，但要比"抛铜板"这样的乱猜法好一些——**—个不错的选择是：Decision Stump，决策树桩：**

$$h_{s,i,\theta}(\mathbf{x}) = s \cdot sign(x_i - \theta)$$

三个参数：

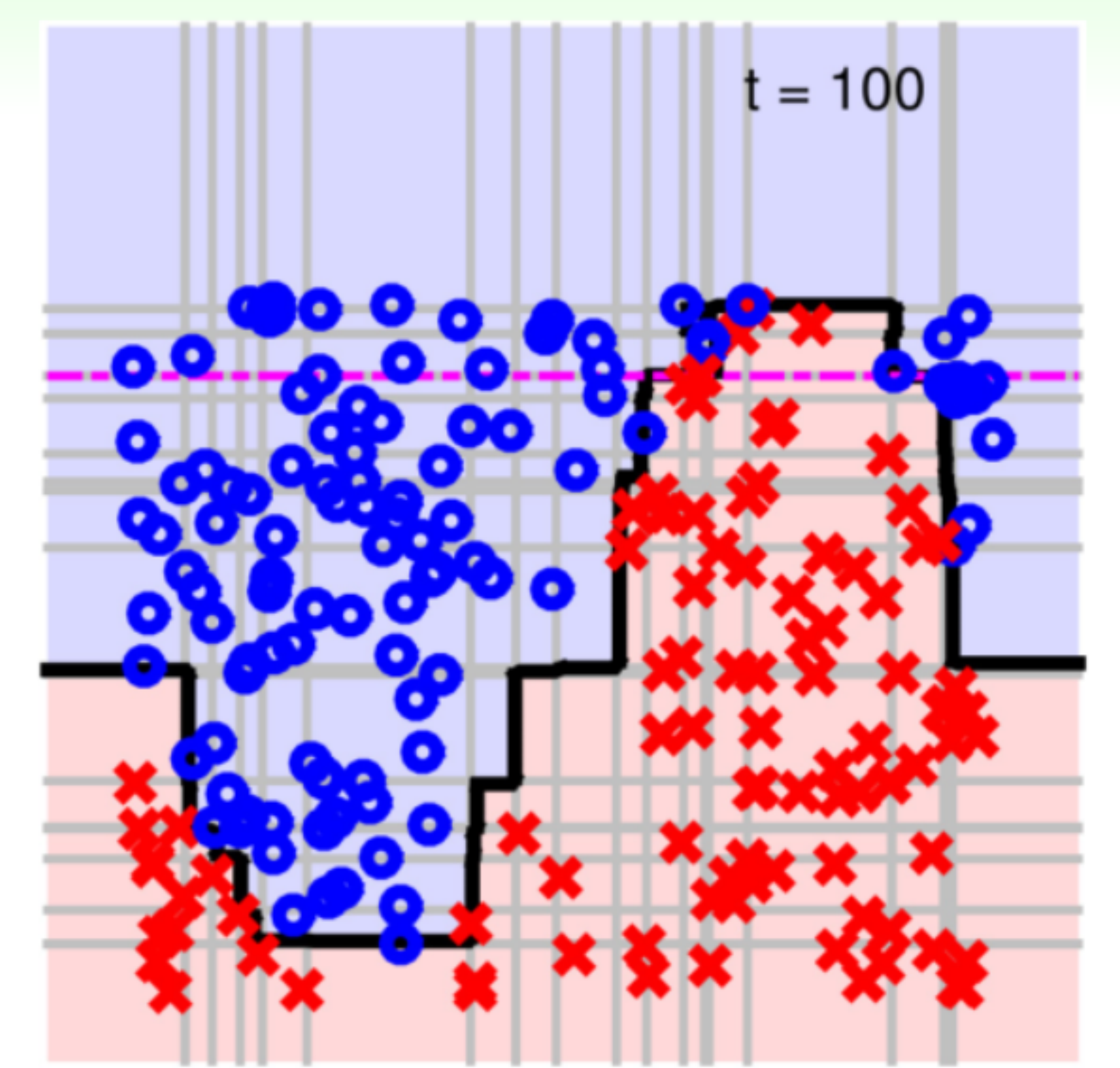
- s：切分方向(direction)：哪个方向是正类；
- i：切分维度(feature)：关注的是哪一个维度；
- θ：切分位置(threshold)：切在哪里；

可以搜索所有三种参数的组合（因为样本是有限的，因此该组合也是有限的），得到最好的hypothesis——这也是为数不多的可以把E_{in}真的做到最好的hypothesis set——当然也可以做带权重的E_{in}！

决策树桩的几何意义：2D上的垂直线或水平线。

时间复杂度：$O(d \cdot Nlog\ N)$

单独用Decision Stump当然不好，但是配合AdaBoost效果会很好。



5. Summary

- 在本章伊始，我们从"重赋权重"的角度重新审视了Bagging算法，知道Bagging实质是通过随机性的重赋权重来获得一个个不同的g然后均匀混合起来。基于此，我们受到启发，希望能够有目的、有方向地重赋权重以得到许多互补的g，然后按照一定比例混合起来。
- AdaBoost每一轮重赋权重的方法，是希望刚刚训练出的g_t在下一轮的新数据集$\mathbf{u}^{(t+1)}$上表现很差，这样才能保证在$\mathbf{u}^{(t+1)}$上训练出的新的g_{t+1}与g_t很不一样，互相补充。基于这种思想，我们通过一系列推导，得到了放缩因子——错误点乘，正确点除——这保证了错误点的权重在新的一轮里被放大：

$$\Diamond_t = \sqrt{\frac{1-\epsilon_t}{\epsilon_t}}$$

- 最后，我们希望混合系数α_t能够反映g_t的好坏，因此小ϵ_t，即大$\Diamond_t$的g_t权重应该大一些，我们取：

$$\alpha_t = ln(\Diamond_t)$$

- 综上，AdaBoost算法可以将弱弱的演算法效力提升，这就是Boosting——降低偏差(bias)，而上一节最后的Bagging则是降低方差(variance)。
- AdaBoost常常用决策树桩作为基算法，效果很好。