Vetores, Sistemas de Equações e Espaços Vetoriais

Mali

20 de setembro de 2016

1. Para cada sistema de equações abaixo,

   - classifique o sistema em homogêneo ou não homogêneo
   - escreva a equação matricial correspondente
   - classifique as linhas da matriz em LI ou LD
   - classifique a solução (solução única, solução indeterminada ou sem solução)
   - se a solução for única, apresente a solução
   - se a solução for indeterminada, apresente uma forma geral da solução
   - calcule o determinante da matriz

   (obs.: faça os ítens na ordem que preferir)

2. (exemplo)

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - y &= 5 \end{aligned}$$

   (solução)

   - não-homogêneo
   - forma matricial:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$
   - LI
   - Solução única
   - $x = 8/3$, $y = -7/3$
   - determinante $-2 - 1 = -3$

   (a)

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ x - 3z &= 0 \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 0 \\ x - y + z &= 5 \\ x + 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ x - y &= 2 \\ 5x + y/2 &= 10 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} 2y + z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

3. Nos casos abaixo, a equação está na forma matricial. Escreva o sistema de equações correspondente, e então faça os mesmos passos que no exercício anterior.

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(e)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(f)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Quais dos seguintes conjuntos são bases do espaço $\mathbb{R}^3$? Tente desenhar o espaço gerado por esses conjuntos.

(a)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

(b)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

(c)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

(d)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

(e)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \right\}$$

(f)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

5. Para as seguintes bases do espaço $\mathbb{R}^2$, escreva as matrizes de mudança de base para a base canônica e vice-versa.

(a)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(b)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(c)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(d)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(e)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

(f)
$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

6. Vamos verificar o efeito da multiplicação de algumas matrizes por uma matriz genérica,

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

. Calcule os produtos:

(a)
$$M \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M$$

(c)
$$M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M$$

(e)
$$M \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(f)
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M$$

(g)
$$M \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(h)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M$$

(i)
$$M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(j)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} M$$

(k)
$$M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(l)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M$$

(m)

$$M\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(n)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}M$$

(o)

$$M\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(p)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}M$$

(q)

$$M\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(r)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}M$$

7. Como você descreveria os efeitos das multiplicações acima sobre a matriz M? Usando essa intuição, tente encontrar as inversas dessas matrizes. Lembre que se $AM = N$, então $A^{-1}N = M$, ou seja, a matriz inversa desfaz a transformação original.

8. Mostre que o produto de duas matrizes inversíveis é uma matriz inversível.