# Lista 1: Os Naturais: Múltiplos e Divisores

Mali - Álgebra

28 de abril de 2014

Dizemos que um natural p é múltiplo de um natural q se existe uma multiplicação de q que resulta em p, ou seja, existe um natural n tal que $nq = p$. Podemos também dizer que q é divisor de p, porque $p/q = n$ e n é natural. Em notação abreviada: Dados $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, dizemos que $q|p \iff \exists n : p = nq$.

Note que só faz sentido falar de múltiplos e divisores com números inteiros, já que para p ser múltiplo de q, o resultado de q/p tem que ser um número inteiro. Saber lidar com múltiplos e divisores é fundamental para conseguir simplificar contas difíceis.

1. Como vimos aula passada, todo número par que é múltiplo de 3 também é múltiplo de 6. Usando alguns dos divisores de um número, podemos descobrir outros! Complete as frases, descobrindo sempre pelo menos um novo divisor em comum:
   (a) Todo número par que é múltiplo de 5 também é múltiplo de
   (b) Todo número que é múltiplo de 3 e de 4 é múltiplo de
   (c) Todo número que é múltiplo de 2, de 3 e de 5 é múltiplo de
2. Qual é a regra geral que podemos observar no exercício anterior?
3. Preste atenção ao completar as próximas frases:
   (a) Todo número que é múltiplo de 4 e de 6 é múltiplo de
   (b) Todo número que é múltiplo de 6 e de 10 é múltiplo de
   (c) Todo número que é múltiplo de 100 e de 30 é múltiplo de
4. Qual a diferença entre essas frases e as do exercício 1?

   Esses exercícios consistem em encontrar múltiplos comuns entre números. É daí que surge o conceito de Mínimo Múltiplo Comum. O MMC entre a e b é o menor número que é múltiplo, tanto de a, quanto de b. Em notação matemática, definimos o conjunto de múltiplos de um natural $a$ como $a\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} : a|x\}$, ent]ao definimos o mmc assim: $mmc\{a, b\} = \min a\mathbb{N} \cup b\mathbb{N}$.
5. Qual é a regra geral que podemos observar nos exercícios anteriores? Escreva deste jeito: dados dois naturais p e q, todo número múltiplo de p e de q também é...
6. Encontre todos os divisores dos números abaixo. Depois, dê sua fatoração em potências de primos.
   (a) exemplo: 20
   divisores: 1, 2, 4, 5, 10 e 20
   fatoração: $2^2$x5
   (b) 64
   (c) 120
   (d) 714
   (e) 153

7. Depois de fazer o exercício anterior, escolha três pares de números (por exemplo, os pares 64 e 120, 153 e 714, 120 e 153) e encontre, para cada par, todos os divisores comuns, o Maior Divisor Comum (mdc) e o Menor Divisor Comum (mmc).

8. Explique como encontrar o mmc e o mdc entre dois números usando a fatoração em potências de primos.

9. Mostre que (isto é, explique porquê), dados naturais a, b e c, com b ¿ c, se $a|b$ e $a|c$, então $a|b+c$ e $a|b-c$ (ou seja, o divisor comum entre dois números também é divisor da soma e da subtração desses números). Além disso, perceba que $a$ também é divisor de todos os múltiplos de b e c.

10. Na notação decimal, se um número é escrito usando os algarismos $abcd$ (por exemplo, para 1988, $a = 1$, $b = 9$ $c = 8$ e $d = 8$) então $abcd = 1000a + 100b + 10c + d$. Usando isso, demonstre que se a soma dos algarismos é um múltiplo de 9, então $abcd$ é múltiplo de 9. Obs: mesma propriedade vale para o 9 e para o 3. Será que essa propriedade vale para outros números?

11. Dizemos que dois números são **primos entre si** se eles não têm nenhum divisor comum entre si fora o 1. Mostre que (explique porquê) dois números consecutivos sempre são primos entre si.

12. Qual o mdc entre números primos entre si? E o mmc?

13. Tome dois números naturais $a$ e $b$ e divida eles por seu máximo divisor comum $d$. O que podemos dizer sobre os números resultantes, $a/d$ e $b/d$? Qual o mdc entre eles? E o mmc? Por quê? O que isso significa?

14. Desafio: você consegue escrever a generalização do exercício acima? Isto é, dados $n$ números naturais divididos pelo seu mdc $d$...

15. Um número é **primo** se ele só é divisível por 1 e por si mesmo. Dado um primo $p$ e um número $n$, se eles não forem primos entre si, então qual a relação entre eles?

16. Desenvolva (ou aprenda) um método pra encontrar números primos. Encontre os primeiros 20 primos. Explique como você os encontrou.

17. Encontre o mdc e o mmc entre os seguintes conjuntos de números:

    (a) 125, 55
    (b) 192, 3351, 504
    (c) 28, 68
    (d) 24, 128
    (e) 63, 112, 56
    (f) 60, 72

18. Some as frações:

    (a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{10} + \frac{2}{6}$
    (b) $1 + \frac{5}{4}$
    (c) $\frac{5}{9} + \frac{1}{21}$
    (d) $\frac{2}{3} + 3$
    (e) $5 + \frac{3}{2}$
    (f) $\frac{1}{10} + \frac{10}{2}$
    (g) $\frac{2}{4} - \frac{4}{2}$
    (h) $\frac{4}{34} + \frac{7}{170}$
    (i) $\frac{3}{16} + \frac{1}{18}$
    (j) $\frac{1}{12} + \frac{9}{11} + \frac{5}{15}$
    (k) $\frac{15}{14} + \frac{13}{28} - \frac{7}{8}$