Lista 2 - Módulo e Equações

Mali - Álgebra

2 de fevereiro de 2017

Resolver uma equação significa a) identificar qual a incógnita e b) encontrar todos os valores possíveis para a incógnita que fazem a igualdade ser verdade. Por exemplo, resolver a equação

$$x^2 = 4 \tag{1}$$

significa se perguntar "quais são os números que elevados ao quadrados dão 4?". Sabemos que $2^2 = 4$, e que $(-2)^2 = 4$. Então 2 e -2 são soluções da equação. Existe alguma outra solução? Bem, se um número y é maior que 2 ou menor que -2, então $y^2 > 4$; por outro lado, se y está entre -2 e 2, então $y^2 < 4$. Com isso, sabemos que nenhum outro número real é solução dessa equação – as duas únicas soluções são 2 e -2.

1. Some as frações, colocando o resultado sobre um único denominador

   (a) exemplo: $\frac{y}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2y+1}{4}$
   (b) $\frac{1}{3} + \frac{2}{7}$
   (c) $1 + \frac{1}{3}$
   (d) $3 + \frac{1}{4} - \frac{2}{5}$
   (e) $x + \frac{x}{2}$
   (f) $x + \frac{1}{x}$
   (g) $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$
   (h) $\frac{1}{4x} - \frac{1}{6x}$
   (i) $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} - x$
   (j) $\frac{a}{2} + a - \frac{1}{a}$
   (k) $\frac{a}{2} + \frac{2}{10} + \frac{1}{a}$
   (l) $n(n-1) - \frac{1}{2}$

2. Resolva as equações:

   (a) $x + 5 = 10$
   (b) $2x - 3 = 2 - x$
   (c) $5y = 2 - y$
   (d) $\frac{y}{3} + \frac{y}{6} = y + 2$
   (e) $\frac{1}{t} = \frac{2}{t} + \frac{1}{2}$
   (f) $\frac{1}{3} + t = 1$

3. O módulo de um número, ou valor absoluto do número, é a distância dele até o zero, ou seja, na prática, o valor dele sem o sinal. Assim $|2| = |-2| = 2$. Calcule:

   (a) $|3| =$
   (b) $|-4| =$
   (c) $|1-2| =$
   (d) $|(-3)^3| =$

4. Podemos escrever o valor do módulo como:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Analogamente, quando temos o módulo de uma expressão, podemos dividir em casos como a seguir:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1,\ x \geq 1, \\ 1-x,\ x < 1 \end{cases}$$

Faça essa separação em casos para as seguintes expressões:

(a) $|-x| =$

(b) $|2-x| =$

(c) $|-1-x| =$

(d) $|-1+a| =$

(e) $|2a+3| =$

(f) $|3b-3| =$

(g) $|b^2+8| =$

(h) $|6-b^2| =$

(i) $|4+2b^2| =$

(j) $|3-b^3| =$

5. Resolva as seguintes equações envolvendo módulos, encontrando todas as soluções. Dica: quando em dúvida, use a técnica do exercício anterior.

(a) $|x| = 3$

(b) $|3| = x$

(c) $|x| = 3$

(d) $|-4| = x$

(e) $|x-1| = \frac{2}{3}$

(f) $-|2x-3| = 2$

(g) $|-x| = 1$

(h) $|2x| = x$

(i) $1-x = |2-8|$

(j) $|1-y| = 1$

(k) $|3-y| = 2y$

(l) $|y+1| = |1-5|$

(m) $|y|^2 = 1$

(n) $|y|^2 = 3^2$

(o) $|y^3| = |11-3|$

(p) $|1-\frac{x}{2}| = |x|$

6. Tente resolver as próximas equações sem efetuar as multiplicações. Dica: lembre que para uma multiplicação dar zero, um dos fatores tem que ser zero.

(a) $x^2 = 0$

(b) $x^8 = 0$

(c) $x(x-1) = 0$

(d) $x^5(2x+2) = 0$

(e) $x^2(x-5) = 0$

(f) $(x-1)^2 = 0$

(g) $(x+4)^3 = 0$

(h) $(2x-\frac{1}{8})^4 = 0$

(i) $(x-5)^18 = 0$

(j) $(x-1)(x-2) = 0$

(k) $2(x-1)x = 0$

(l) $x(x-3)^3 = 0$

(m) $x^4(x-2)^6 = 0$

(n) $\frac{3}{5}(x-2)(2x-1)(x+6) = 0$

(o) $(x+9)^3(x-1)^5(2x+3)^7 = 0$

7. De novo, tente resolver as próximas equações sem calcular as potências. Dica: tente descobrir primeiro que valores o parênteses pode ter. Por exemplo, na equação

$$(19x+5)^2 = 1 \tag{2}$$

sei que $(19x+5)$ tem que ser 1 ou -1, já que só esses números ao quadrado dão 1. Experimente substituir o parênteses por outro símbolo, por exemplo, na equação acima, se defino $(19x+5) = \heartsuit$, posso escrever $\heartsuit^2 = 1$, para o que as soluções são $\heartsuit = 1$ e $\heartsuit = -1$. A partir daí, tenho que procurar os casos em que o parênteses ($\heartsuit$) pode ter algum desses valores, ou seja, todos os valores de x para os quais $19x+5 = 1$ OU $19x+5 = -1$.

(a) $x^2 = 4$
(b) $x^3 = 11^3$
(c) $x^6 = 64$
(d) $(2x+1)^2 = 9$
(e) $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)^3 = 1000$
(f) $(x-1)^6 = 64$
(g) $(x+3)^2 = 100$

8. De novo, tente resolver as próximas equações sem calcular as potências.

   (a) $(x-2)^2 = (3x+1)^2$
   (b) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = (2x)^2$
   (c) $\left(2x + \frac{5}{2}\right)^3 = (3x-1)^3$
   (d) $(x-1)^5 = (2x)^5$

9. Execute as multiplicações, colocando o resultado como soma:

   (a) exemplo: $(a+b)(c+d+e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$
   (b) exemplo: $(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$

   (c) $(x-3)^2 =$
   (d) $(x-2)^2 =$
   (e) $(x-5)^2 =$
   (f) $(x+4)^2 =$
   (g) $2(x+3)^2 =$
   (h) $3(x+10)^2 =$
   (i) $(x-1)(x+1) =$
   (j) $(x-\sqrt{2}-)(x+\sqrt{2}) =$
   (k) $(y-2)(y+2) =$
   (l) $(a-b)(a+b) =$
   (m) $x(x-3) =$
   (n) $(x+3)(x-1) =$
   (o) $(x-1)^2(2+x) =$
   (p) $\frac{3}{5}(x-2)(2x-1)(x+6) =$
   (q) $x^5(2x+2) =$
   (r) $(x-1)(x-2) =$
   (s) $2(x-1)x =$
   (t) $x(x-3)^3 =$
   (u) $(x-y)(y-x) =$
   (v) $(a-b)^3 =$
   (w) $(x-2)^3 =$
   (x) $(x-1)(x+a-1) =$

10. Faça o contrário do exercício anterior: reduza as expressões a seguir a produtos como os dos exercícios acima.

   (a) exemplo: $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
   (b) exemplo: $x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x+2)^2$

   (c) $x^2 - 8x + 16 =$
   (d) $x^2 - 6x + 9 =$
   (e) $x^2 + 10x + 25 =$
   (f) $2x^2 - 4x + 2 =$
   (g) $y^2 - x^2 =$
   (h) $3x^3 + 12x^2 + 12x =$
   (i) $x^2 + 4ax + 4a^2 =$
   (j) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 =$