Phạm Xuân Lộc – Nguyễn Đức Tiến

Câu 1:

Câu 1:

a, $L(u) = 5u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_1u_2 + 8u_1 + 3u_2$

Xét điều kiện cần có cực trị

$$\begin{cases} L_u(u) = 0 & (1) \\ L_{uu}(u) > 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial u_1} \\ \frac{\partial L}{\partial u_2} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10u_1 + 2u_2 + 8 = 0 \\ 4u_2 + 2u_1 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -0,72 \\ u_2 = -0,39 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial u_2^2} \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} > 0$$

(luôn đúng)

$\Rightarrow$ Cực trị là điểm $\begin{bmatrix} -0,72 \\ -0,39 \end{bmatrix}$

b, $L(u) = u_1^3 + u_2^3 - 3u_1u_2$

xét đk cần có cực trị

$$\begin{cases} L_u(u) = 0 & (1) \\ L_{uu}(u) > 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1^2 - 3u_2 = 0 \\ 3u_2^2 - 3u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 = u_2 \\ u_2^2 = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = u_2 = 1$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial u_2^2} \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6u_1 & -3 \\ -3 & 6u_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} > 0$$

(luôn đúng)

$\Rightarrow$ Cực trị là điểm $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Câu 2:

Câu 2 :

a, $L(u) = 5u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_1 u_2 + 8u_1 + 3u_2$

$f(u) = u_1 + 6u_2 - 2 = 0$

Hàm Hamilton : $H(u) = L(u) + \lambda^T f(u)$

$\Rightarrow H(u) = 5u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_1 u_2 + 8u_1 + 3u_2 + \lambda(u_1 + 6u_2 - 2)$

Đk cần có cực trị :

$$\begin{cases} H_x(u) = 0 \\ H_u(u) = 0 \\ f(u) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial H(u)}{\partial u_1} = 0 \\ \dfrac{\partial H(u)}{\partial u_2} = 0 \\ f(u) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10u_1 + 2u_2 + 8 + \lambda = 0 \\ 2u_1 + 4u_2 + 3 + 6\lambda = 0 \\ u_1 + 6u_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -0,84 \\ u_2 = 0,47 \end{cases} \quad \lambda = -0,54$$

b, $L(x, u) = (x-2)^2 + (u-2)^2$

$u = x^2 + 3x - 6$

Hàm Hamiltona $H(x, u) = L(x, u) + \lambda^T f(x, u)$

$\Rightarrow H(x, u) = (x-2)^2 + (u-2)^2 + \lambda(x^2 + 3x - 6 - u)$

Đk cần có cực trị :

$$\begin{cases} H_x(x, u) = 0 \\ H_u(x, u) = 0 \\ f(x, u) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2) + 2\lambda x + 3\lambda = 0 \\ 2(u-2) - \lambda = 0 \\ x^2 + 3x - 6 - u = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4,53 ,\ y = 0,92 \\ x = 1,71 ,\ y = 2,04 \\ x = -1,68 ,\ y = -8,22 \end{array} \right.$$

Thay cái giá trị cực tiểu địa phg vào để tìm cực tiểu cục bộ ta có $\begin{cases} L_1 = 43,8 \\ L_2 = 0,09 \\ L_3 = 117,9 \end{cases} \Leftrightarrow L_{2\,min}$ với $(x, u)_{min} = (1,71; 2,04)$

c, $L(x,u) = x^2 + u^2 - xu + x + u - 4$

$f(x,u) = x + u + 3 = 0$

Hàm Hamilton

$$H(x,u) = L(x,u) + \lambda^T f(x,u)$$
$$= x^2 + u^2 - xu + x + u - 4 + \lambda(x + u + 3)$$

Đk để có cực trị

$$\begin{cases} H_x(x,u) = 0 \\ H_u(x,u) = 0 \\ f(x,u) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial H(x,u)}{\partial x} = 2x - u + 1 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial H(x,u)}{\partial u} = 2u - x + 1 + \lambda = 0 \\ f(x,u) = x + u + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}, \; y = \frac{-3}{2}, \; \lambda = \frac{1}{2}$$

Câu 3:

Câu 3:

a, $J(x) = \int_0^4 \dot{x}^2(t)\,dt$ $\quad \begin{cases} f(x,t) = \int_0^4 x(t)\,d(t) = n \\ x(0) = 0, \; x(4) = 0 \end{cases}$

Hàm Hamilton:

$$H(x,\dot{x},\lambda,t) = L(x,\dot{x},t) + \lambda f(x,\dot{x},t)$$

$$\Rightarrow H(x,\dot{x},\lambda,t) = \dot{x}^2(t) + \lambda x(t)$$

Pt Euler - Lagrange:

$$\frac{dH(x,\dot{x},\lambda,t)}{dx} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dH(x,\dot{x},\lambda,t)}{d\dot{x}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda - \frac{d}{dt}\{2\dot{x}(t)\} = 0 \quad \Rightarrow \lambda - 2\ddot{x}(t) = 0$$

Ta có: $\ddot{x}(t) = \frac{\lambda}{2}$ $\quad \dot{x}(t) = \frac{\lambda}{2}t + c_1$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\lambda}{4}t^2 + c_1 t + c_2$$

Dựa vào đk biên và đk ràng buộc ta có:

$$\begin{cases} x(0) = \frac{\lambda}{4}\cdot 0 + c_1 0 + c_2 = 0 \quad (1) \\ x(4) = 4\lambda + 4c_1 = 0 \quad (2) \\ \int_0^4 x(t)\,dt = \left[\frac{\lambda}{12}t^3 + \frac{c_1}{2}t^2\right]\Big|_0^4 = \frac{16\lambda}{3} + 8c_1 = n \quad (3) \end{cases}$$

Giải hệ (1)(2)(3) ta có
$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ \lambda = -c_1 = -\frac{3n}{8} \\ c_1 = \frac{3n}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^*(t) = \frac{-3n}{32}t^2 + \frac{3n}{8}t$$

b, $J(x) = \int_0^2 [5(x_1-1)^2 + x_2^2]\,dt$ $\begin{cases} f(x,\dot{x},t) = \dot{x}_1 + 2x_1 - x_2 = 0 \\ x(0) = 0,\ x(2) = 1 \end{cases}$

Hàm Hamilton:

$$H(x,\dot{x},\lambda,t) = 5(x_1-1)^2 + x_2^2 + \lambda(\dot{x}_1 + 2x_1 - x_2)$$

Pt Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_1} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10(x_1-1) + 2\lambda - \dot{\lambda} = 0 & (1) \\ 2x_2 - \lambda = 0 & (2) \end{cases}$$

(3)

$$\text{đk} \begin{cases} \lambda = 2x_2 \\ \dot{\lambda} = 2\dot{x}_2 \end{cases}$$

Giải hệ (1)(2)(3) ta có pt $2\ddot{x}_1 - 18x_1 + 10 = 0$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát $x_1(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{3t} + 0{,}556$

đk biên $\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_1(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 0{,}556 = 0 \\ 0{,}0025C_1 + 403{,}42C_2 + 0{,}556 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0{,}55 \\ C_2 = 0{,}001 \end{cases}$

$$\Rightarrow x_1(t) = 0{,}55e^{-3t} + 0{,}001e^{3t} + 0{,}556$$

Lại có, thay (2) vào (3) $x_2 = \dot{x}_1 + 2x_1$

$$\Rightarrow x_2(t) = -0{,}55e^{-3t} + 0{,}005e^{3t} + 1{,}112$$

Câu 4:

Câu 4 :

Ta có pt trạng thái $\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{M} u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2u(t) \end{cases}$$

Ta có: $t_f = 1$, đứng yên tại 10 cm

$$\Rightarrow J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t)\,dt \quad \min$$

Xđ đk biên $\begin{cases} x_1(0) = y(0) = 0, \; x_2(0) = \dot{y}(0) = 0 \\ x_1(1) = y(1) = 10, \; x_2(1) = \dot{y}(1) = 0 \end{cases}$

Hàm Hamilton:

$$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T(t) f(x,u,t)$$
$$= \frac{1}{2} u^2(t) + \lambda_1 x_2(t) + \lambda_2 2u(t)$$

Ta có hệ pt:

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2u(t) \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \end{cases} & (2) \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 & (3) \\ x(0) = [0;0]^T & (4) \\ x(1) = [10;0]^T & (5) \end{cases}$$

Giải hệ ta có, nghiệm pt (2) là $\begin{cases} \lambda_1(t) = C_1 \\ \lambda_2(t) = -C_1 t + C_2 \end{cases}$

nghiệm pt (3) $u(t) = -2\lambda_2(t) = 2C_1 t - 2C_2$

thay vào (1) ta có $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2u(t) = 4C_1 t - 4C_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{2}{3}C_1 t^3 - 4C_2 t^2 + C_3 t + C_4 \\ x_2(t) = 2C_1 t^2 - 4C_2 t + C_3 \end{cases}$$

Thay (4)(5) vào

$$\begin{cases} x_1(0) = C_4 = 0 \\ x_2(0) = C_3 = 0 \\ x_1(1) = \frac{2}{3}C_1 - 2C_2 = 10 \\ x_2(1) = 2C_1 - 4C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_4 = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_1 = -30 \\ C_2 = -15 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ luật đk tối ưu $u(t) = -60t + 30$