Chương 1
LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN PHI TUYẾN

Khái niệm về hệ phi tuyến

Hệ phi tuyến là hệ thống trong đó quan hệ vào – ra không thể mô tả bằng phương trình vi phân/sai phân tuyến tính.

Phần lớn các đối tượng trong tự nhiên mang tính phi tuyến.

Tùy theo dạng tín hiệu trong hệ thống mà hệ phi tuyến có thể chia làm hai loại:

- Hệ phi tuyến liên tục
- Hệ phi tuyến rời rạc.

Nội dung môn học chỉ đề cập đến hệ phi tuyến liên tục.

Hệ phi tuyến không thỏa mãn nguyên lý xếp chồng.

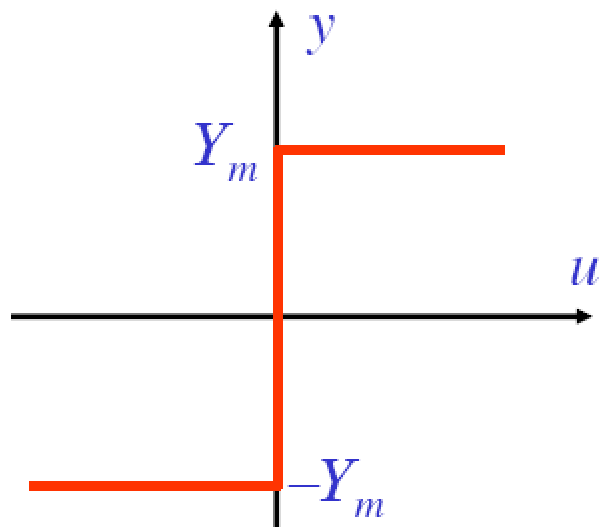
Tính ổn định của hệ phi tuyến không chỉ phụ thuộc vào cấu trúc, thông số của hệ thống mà còn phụ thuộc vào tín hiệu vào.

Nếu tín hiệu vào hệ phi tuyến là tín hiệu hình sin thì tín hiệu ra ngoài thành phần tần số cơ bản (bằng tần số tín hiệu vào) còn có các thành phần hài bậc cao (là bội số của tần số tín hiệu vào).

Hệ phi tuyến có thể xảy ra hiện tượng dao động tự kích.

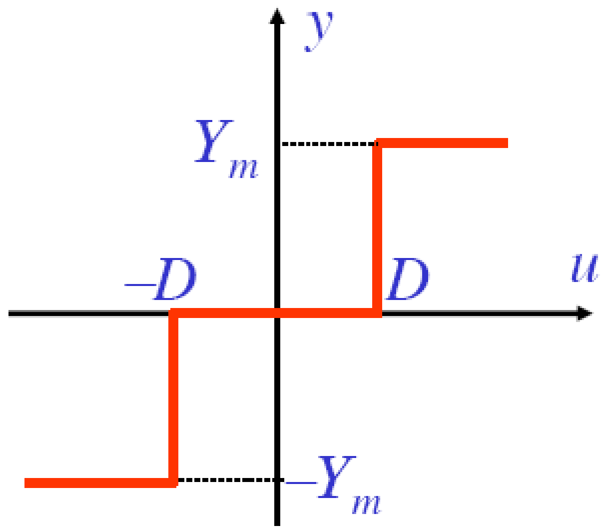
Các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu rơ le hai vị trí



$$y=Y_m \mathrm{sgn}(u)$$

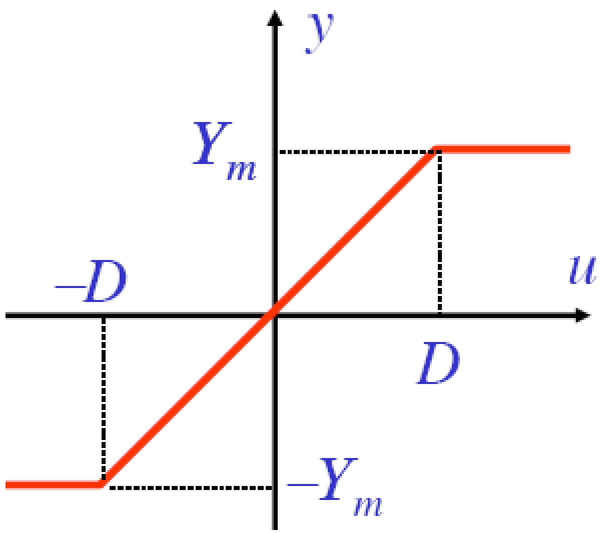
Khâu rơ le ba vị trí



$$y = \begin{cases} Y_m\ \mathrm{sgn}(u) & \text{nếu } |u| \geq D \\ 0 & \text{nếu } |u| < D \end{cases}$$

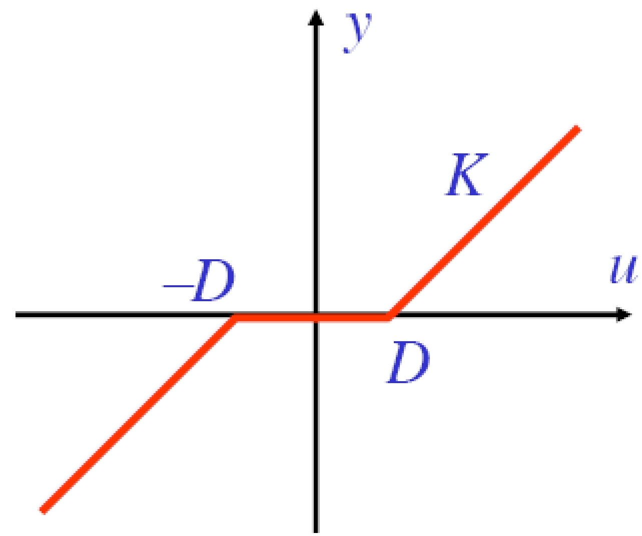
Các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu khuếch đại bão hòa



$$y = \begin{cases} Y_m \operatorname{sgn}(u) & \text{nếu } |u| > D \\ Ku & \text{nếu } |u| \le D \end{cases}$$

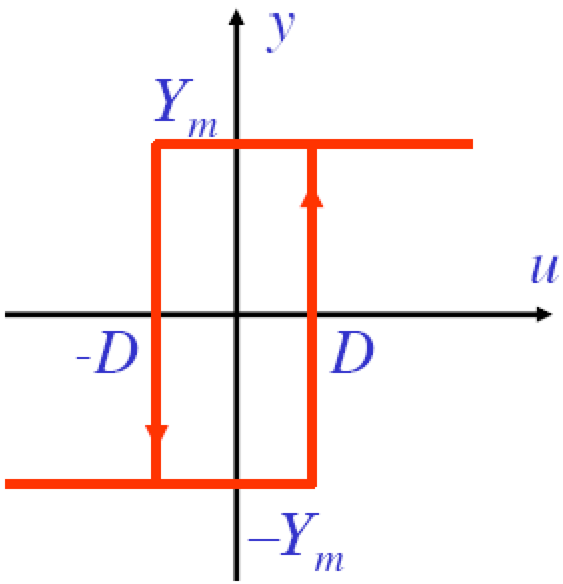
Khâu khuếch đại có vùng chết



$$y = \begin{cases} K[u - D\operatorname{sgn}(u)] & \text{nếu } |u| \ge D \\ 0 & \text{nếu } |u| < D \end{cases}$$

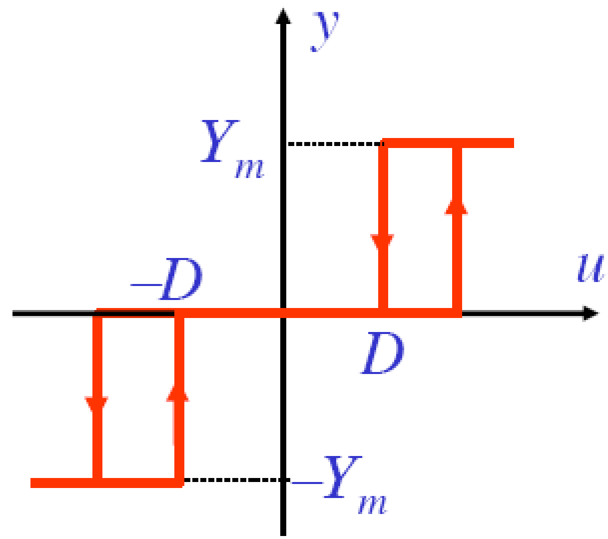
Các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu rơ le hai vị trí có trễ

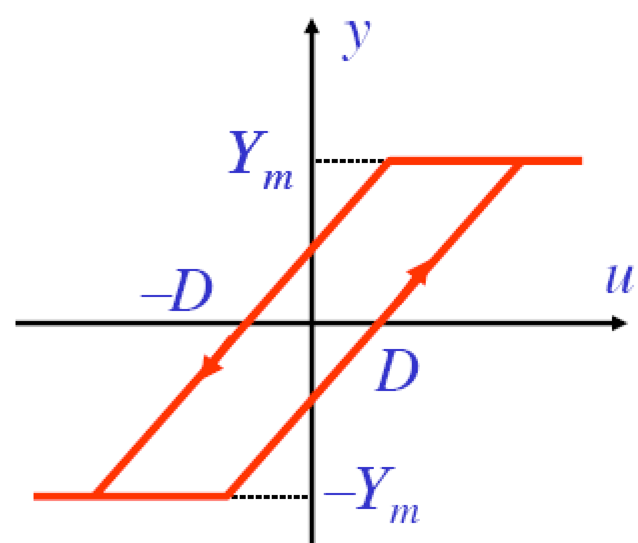


$$y = \begin{cases} Y_m \operatorname{sgn}(u) & \text{nếu } |u| \geq D \\ -Y_m \operatorname{sgn}(u) & \text{nếu } |u| < D \end{cases}$$

Khâu rơ le ba vị trí có trễ



Khâu khuếch đại bão hòa có trễ



Mô tả toán học hệ phi tuyến dùng phương trình vi phân

Quan hệ vào – ra của hệ phi tuyến liên tục có thể biểu diễn dưới dạng phương trình vi phân phi tuyến bậc n:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = g\left(\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t), \frac{d^m u(t)}{dt^m}, \dots, \frac{du(t)}{dt}, u(t)\right)$$

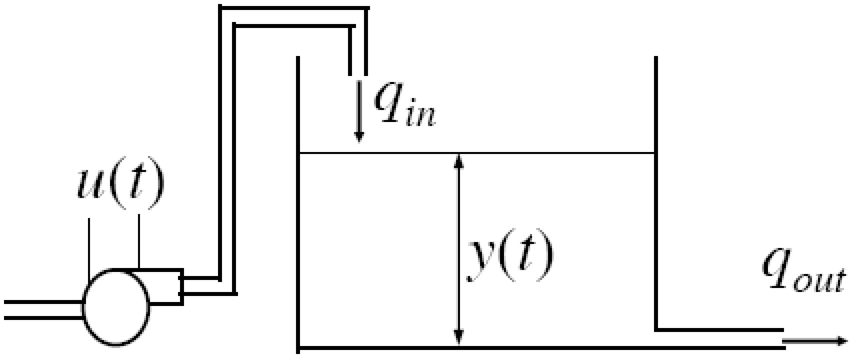
trong đó: $u(t)$ là tín hiệu vào,

$y(t)$ là tín hiệu ra,

$g(.)$ là hàm phi tuyến

Mô tả toán học hệ phi tuyến dùng phương trình vi phân

Ví dụ 1



a: tiết diện van xả
A: tiết diện ngang của bồn
g: gia tốc trọng trường
k: hệ số tỉ lệ với công suất bơm
C_D: hệ số xả

Phương trình cân bằng: $A\dot{y}(t) = q_{in}(t) - q_{out}(t)$

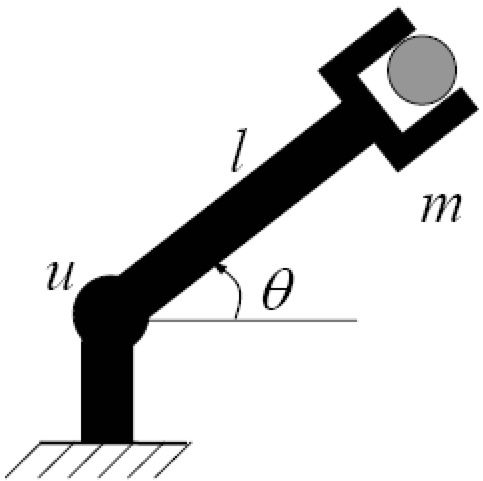
trong đó: $q_{in}(t) = ku(t)$

$$q_{out}(t) = aC_D\sqrt{2gy(t)}$$

$\Rightarrow$ $\dot{y}(t) = \frac{1}{A}\left(ku(t) - aC_D\sqrt{2gy(t)}\right)$ (hệ phi tuyến bậc 1)

Mô tả toán học hệ phi tuyến dùng phương trình vi phân

Ví dụ 2



J: moment quán tính của cánh tay máy

M: khối lượng của cánh tay máy

m: khối lượng vật nặng

l: chiều dài cánh tay máy

l_C : khoảng cách từ trọng tâm tay máy đến trục quay

B: hệ số ma sát nhớt

g: gia tốc trọng trường

$u(t)$: moment tác động lên trục quay của cánh tay máy

$\theta(t)$: góc quay (vị trí) của cánh tay máy

Theo định luật Newton

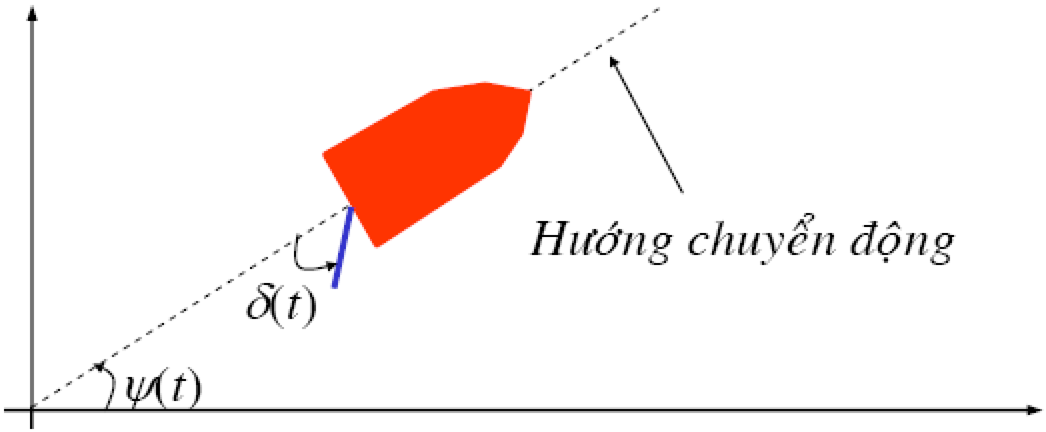
$$(J + ml^2)\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + (ml + Ml_C)g\cos\theta = u(t)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta}(t) = -\frac{B}{(J + ml^2)}\dot{\theta}(t) - \frac{(ml + Ml_C)}{(J + ml^2)}g\cos\theta + \frac{1}{(J + ml^2)}u(t)$$

(hệ phi tuyến bậc 2)

Mô tả toán học hệ phi tuyến dùng phương trình vi phân

Ví dụ 3



δ: góc bánh lái

ψ: hướng chuyển động của tàu

k: hệ số

τ_i: hệ số

Phương trình vi phân mô tả đặc tính động học hệ thống lái tàu

$$\dddot{\psi}(t) = -\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)\ddot{\psi}(t) - \left(\frac{1}{\tau_1\tau_2}\right)\left(\dot{\psi}^3(t) + \dot{\psi}(t)\right) + \left(\frac{k}{\tau_1\tau_2}\right)\left(\tau_3\dot{\delta}(t) + \delta(t)\right)$$

(hệ phi tuyến bậc 3)

Mô tả toán học hệ phi tuyến dùng phương trình trạng thái

Hệ phi tuyến liên tục có thể mô tả bằng phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$$

trong đó: $u(t)$ là tín hiệu vào,

$y(t)$ là tín hiệu ra,

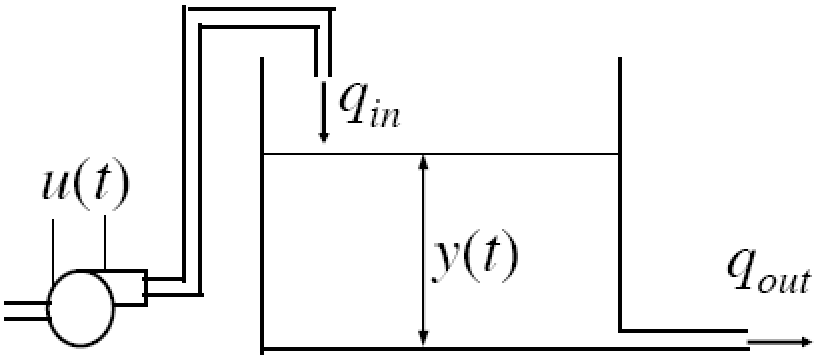
$\boldsymbol{x}(t)$ là vector trạng thái,

$\boldsymbol{f}(.)$, $h(.)$ là các hàm phi tuyến

Ví dụ 1. Hệ bồn chứa

Phương trình vi phân mô tả hệ

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{A}\left(ku(t) - aC_D\sqrt{2gy(t)}\right)$$



Đặt biến trạng thái: $x_1(t) = y(t)$

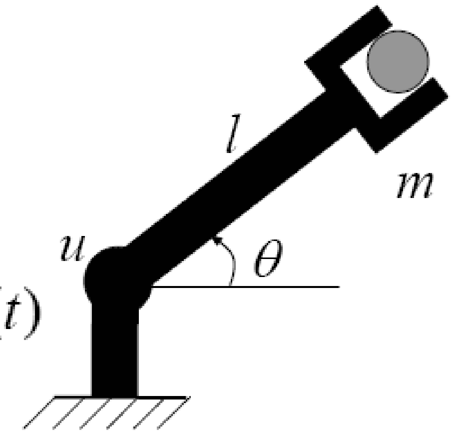
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = -\frac{aC_D\sqrt{2gx_1(t)}}{A} + \frac{k}{A}u(t)$$

$$h(x(t), u(t)) = x_1(t)$$

Mô tả toán học hệ phi tuyến dùng phương trình trạng thái

Ví dụ 2. Cánh tay máy



Phương trình vi phân mô tả hệ

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{B}{(J+ml^2)}\dot{\theta}(t) - \frac{(ml+Ml_C)}{(J+ml^2)}g\cos\theta + \frac{1}{(J+ml^2)}u(t)$$

Đặt biến trạng thái:

$$\begin{cases} x_1(t) = \theta(t) \\ x_2(t) = \dot{\theta}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{(ml+Ml_C)g}{(J+ml^2)}\cos x_1(t) - \frac{B}{(J+ml^2)}x_2(t) + \frac{1}{(J+ml^2)}u(t) \end{bmatrix}$$

$$h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) = x_1(t)$$

Các phương pháp khảo sát hệ phi tuyến

Không có phương pháp nào có thể áp dụng hiệu quả cho mọi hệ phi tuyến.

Môn học đề cập đến một số phương pháp thường dùng sau đây:

- Phương pháp tuyến tính hóa
- Phương pháp hàm mô tả
- Phương pháp Lyapunov

Phương pháp tuyến tính hóa

Điểm dừng của hệ phi tuyến

Xét hệ phi tuyến được mô tả bởi hệ phương trình trạng thái phi tuyến

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

Điểm trạng thái $\overline{\boldsymbol{x}}$ được gọi là điểm dừng của hệ phi tuyến nếu như hệ đang ở trạng thái $\overline{\boldsymbol{x}}$ và với tác động điều khiển $\overline{u}$ cố định, không đổi cho trước thì hệ sẽ nằm nguyên tại trạng thái đó.

Nếu $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{u})$ là điểm dừng của hệ phi tuyến thì:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t))\Big|_{\boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}, u=\overline{u}} = 0$$

Điểm dừng còn được gọi là điểm làm việc tĩnh của hệ phi tuyến

Điểm dừng của hệ phi tuyến

Ví dụ: Cho hệ phi tuyến mô tả bởi PTTT: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t).x_2(t) + u \\ x_1(t) + 2x_2(t) \end{bmatrix}$

Xác định điểm dừng của hệ thống khi $u(t) = \bar{u} = 1$

Giải:

Điểm dừng là nghiệm của phương trình:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t))\Big|_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}, u=\bar{u}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bar{x}_1.\bar{x}_2 + 1 = 0 \\ \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \sqrt{2} \\ \bar{x}_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = -\sqrt{2} \\ \bar{x}_2 = +\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Tuyến tính hóa hệ phi tuyến xung quanh điểm làm việc tĩnh

Xét hệ phi tuyến mô tả bởi PTTT phi tuyến:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

Khai triển Taylor $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)$ và $h(\boldsymbol{x}, u)$ xung quanh điểm làm việc tĩnh $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{u})$ ta có thể mô tả hệ thống bằng PTTT tuyến tính:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D}\tilde{u}(t) \end{cases}$$

trong đó:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \overline{\boldsymbol{x}}$$

$$\tilde{u}(t) = u(t) - \overline{u}$$

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \overline{y} \qquad (\overline{y} = h(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{u}))$$

Tuyến tính hóa hệ phi tuyến xung quanh điểm làm việc tĩnh

Các ma trận trạng thái của hệ tuyến tính quanh điểm làm việc tĩnh được tính như sau:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{u})} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{u})}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{u})} \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{u})}$$

Tuyến tính hóa hệ phi tuyến

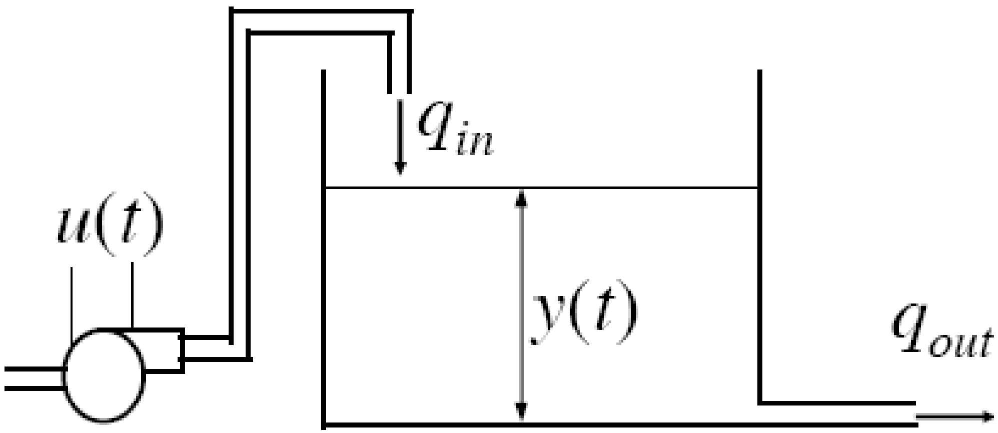
Ví dụ1:

Thông số hệ bồn chứa:

$a = 1cm^2, \quad A = 100cm^2$

$k = 150cm^3/s.V, \; C_D = 0.8$

$g = 981cm/s^2$



PTTT: $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$

trong đó:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = -\frac{aC_D\sqrt{2gx_1(t)}}{A} + \frac{k}{A}u(t) = -0.3544\sqrt{x_1(t)} + 0.9465u(t)$$

$$h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) = x_1(t)$$

Tuyến tính hóa hệ bồn chứa quanh điểm $y = 20$cm:

Tuyến tính hóa hệ phi tuyến **Ví dụ1:**

Xác định điểm làm việc tĩnh: $\overline{x}_1 = 20$

$$f(\overline{x},\overline{u}) = -0.3544\sqrt{\overline{x}_1} + 1.5\overline{u} = 0 \Rightarrow \overline{u} = 0.9465$$

Xác định các ma trận trạng thái tại điểm làm việc tĩnh:

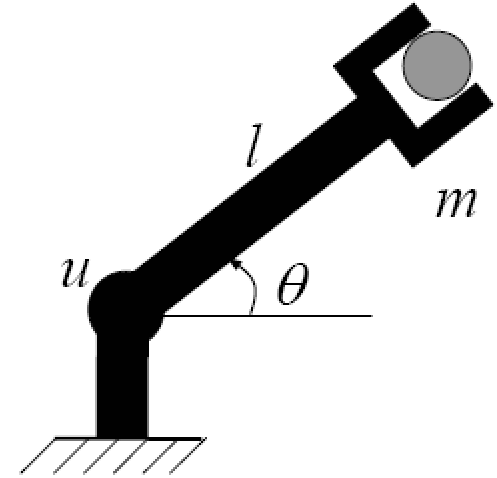
$$A = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(\overline{x},\overline{u})} = -\left.\frac{aC_D\sqrt{2g}}{2A\sqrt{x_1}}\right|_{(\overline{x},\overline{u})} = -0.0396 \qquad B = \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{(\overline{x},\overline{u})} = \left.\frac{k}{A}\right|_{(\overline{x},\overline{u})} = 1.5$$

$$C = \left.\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|_{(\overline{x},\overline{u})} = 1 \qquad D = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(\overline{x},\overline{u})} = 0$$

Vậy PTTT mô tả hệ bồn chứa quanh điểm làm việc y=20cm là:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = -0.0396\tilde{x}(t) + 1.5\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \end{cases}$$

Tuyến tính hóa hệ phi tuyến



Ví dụ 2: Thông số cánh tay máy :

$$l = 0.5m, \quad l_C = 0.2m, m = 0.1kg$$

$$M = 0.5kg, J = 0.02kg.m^2$$

$$B = 0.005, \quad g = 9.81m/\sec^2$$

PTTT: $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$

trong đó:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\dfrac{(ml + Ml_C)g}{(J + ml^2)} \cos x_1(t) - \dfrac{B}{(J + ml^2)} x_2(t) + \dfrac{1}{(J + ml^2)} u(t) \end{bmatrix}$$

$$h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) = x_1(t)$$

Tuyến tính hóa hệ tay máy quanh điểm làm việc $y = \pi/6$ (rad):

Tuyến tính hóa hệ phi tuyến   Ví dụ 2:

Xác định điểm làm việc tĩnh: $\bar{x}_1 = \pi/6$

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ -\dfrac{(ml+Ml_C)g}{(J+ml^2)}\cos\bar{x}_1 - \dfrac{B}{(J+ml^2)}\bar{x}_2 + \dfrac{1}{(J+ml^2)}\bar{u} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{u} = 1.2744 \end{cases}$$

Do đó điểm làm việc tĩnh cần xác định là: $\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/6 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{u} = 1.2744$

Xác định các ma trận trạng thái tại điểm làm việc tĩnh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad a_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{u})} = 0 \qquad a_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{u})} = 1$$

$$a_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{u})} = \left.\frac{(ml+Ml_C)}{(J+ml^2)}\sin x_1(t)\right|_{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{u})} \qquad a_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{u})} = -\left.\frac{B}{(J+ml^2)}\right|_{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{u})}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad b_1 = \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{u})} = 0 \qquad b_2 = \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{u})} = \frac{1}{J+ml^2}$$

Tuyến tính hóa hệ phi tuyến Ví dụ 2:

Xác định các ma trận trạng thái tại điểm làm việc tĩnh:

$$\boldsymbol{C} = [c_1 \quad c_2] \qquad c_1 = \left.\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = 1 \qquad c_2 = \left.\frac{\partial h}{\partial x_2}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = 0$$

$$\boldsymbol{D} = d_1 \qquad d_1 = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = 0$$

Vậy phương trình trạng thái cần tìm là:

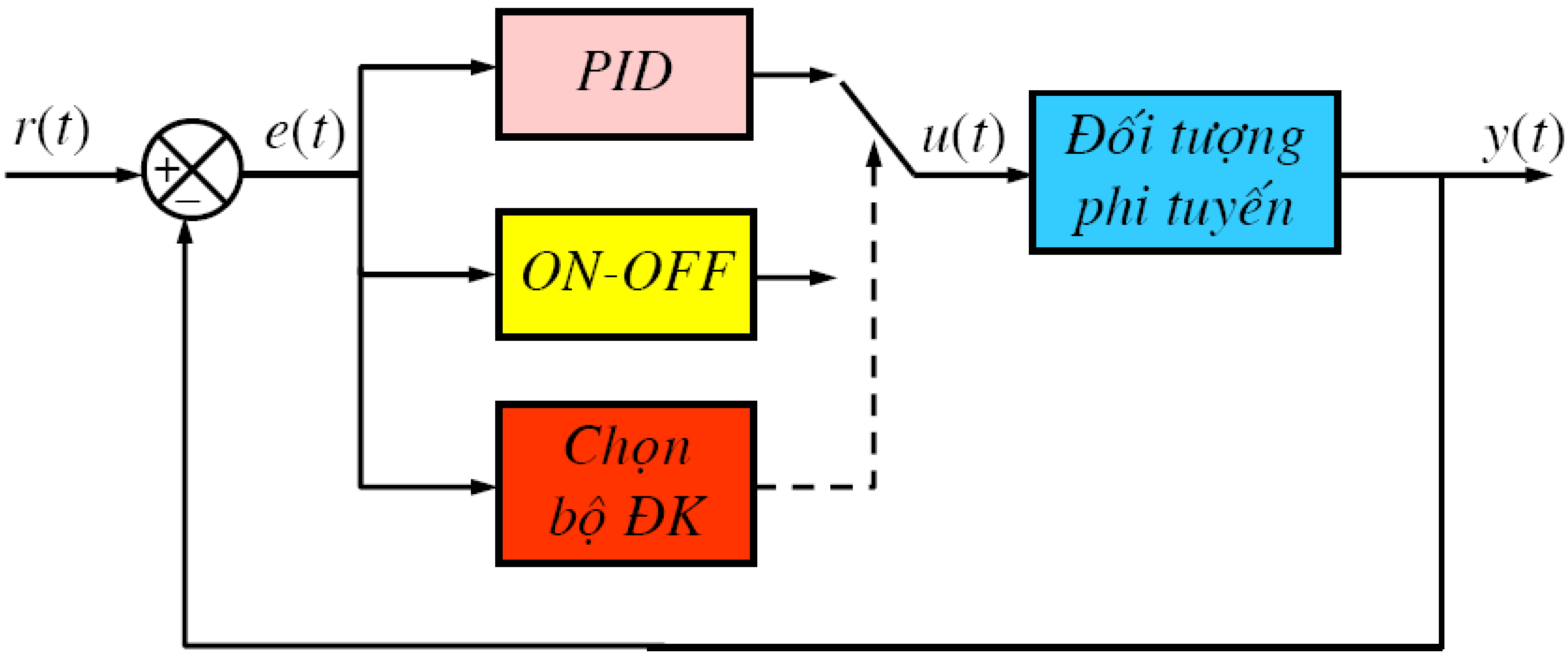
$$\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D}\tilde{u}(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = [1 \quad 0] \qquad \boldsymbol{D} = 0$$

Điều khiển ổn định hóa hệ phi tuyến quanh điểm làm việc tĩnh

Đưa hệ phi tuyến về miền xung quanh điểm làm việc tĩnh (đơn giản nhất có thể dùng bộ điều khiển ON-OFF)

Xung quanh điểm làm việc, dùng bộ điều khiển kinh điển thiết kế dựa vào mô hình tuyến tính (phổ biến nhất là bộ điều khiển PID).



Điều khiển ổn định hóa hệ phi tuyến quanh điểm làm việc tĩnh

Thuật toán chọn bộ điều khiển:

$$\begin{cases} \text{Nếu } e(t) > e_{\max} \text{ hoặc } e(t) < e_{\min} \text{ chọn bộ điều khiển ON - OFF} \\ \text{Nếu } e_{\min} \le e(t) \le e_{\max} \text{ chọn bộ điều khiển PID} \end{cases}$$

Thuật toán điều khiển ON-OFF:

$$\begin{cases} \text{Nếu } e(t) > e_{\max} \text{ thì } u(t) = u_{\max} \\ \text{Nếu } e(t) < e_{\min} \text{ thì } u(t) = u_{\min} \end{cases}$$

Thuật toán điều khiển PID:

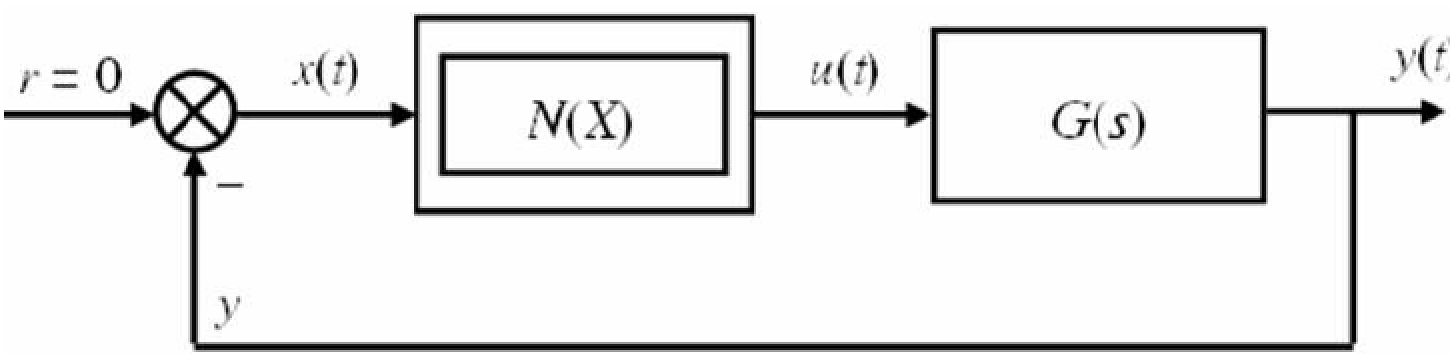
$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

Phương pháp hàm mô tả
(Phương pháp tuyến tính hóa điều hòa)

Phương pháp hàm mô tả mở rộng gần đúng hàm truyền đạt của hệ tuyến tính sang hệ phi tuyến.

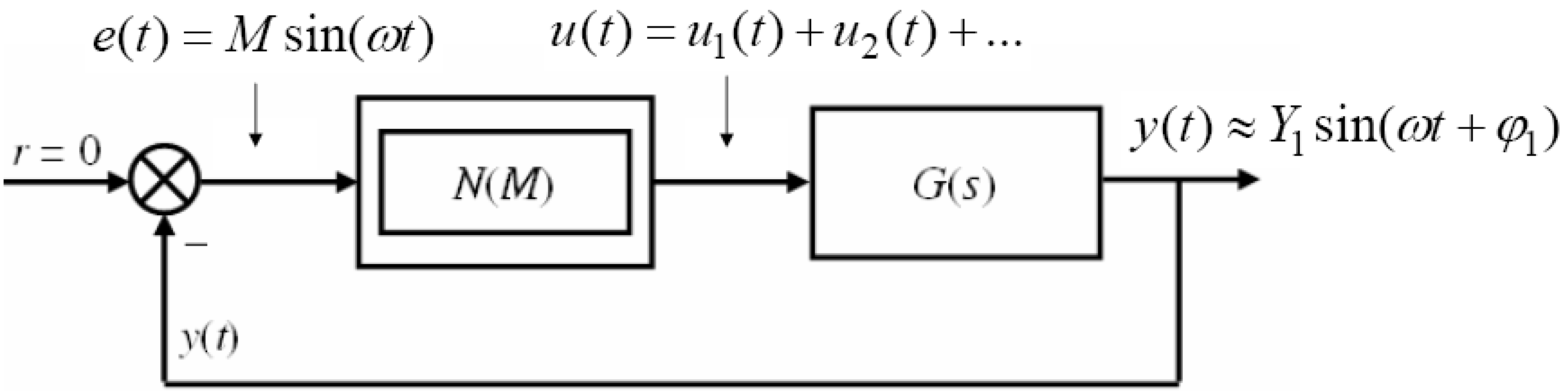
Phương pháp hàm mô tả là phương pháp khảo sát trong miền tần số có thể áp dụng cho các hệ phi tuyến bậc cao (n>2) do dễ thực hiện và tương đối giống tiêu chuẩn Nyquist.

Chỉ áp dụng được để khảo sát chế độ dao động trong hệ phi tuyến gồm có khâu phi tuyến nối tiếp với khâu tuyến tính theo sơ đồ khối như sau:



Phương pháp hàm mô tả

Đáp ứng của hệ phi tuyến khi tín hiệu vào hình sin



Điều kiện để trong hệ có dao động ổn định với tần số ω là:

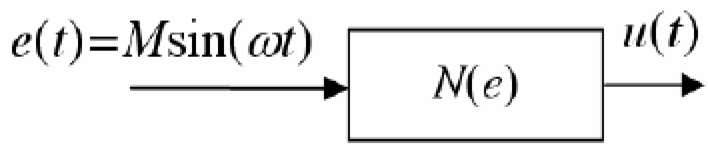
$$M\sin(\omega t) = e(t) = -y(t) \approx -Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

Suy ra: $\begin{cases} Y_1 = M & \text{Phương trình cân bằng biên độ} \\ \varphi_1 = \pi & \text{Phương trình cân bằng pha} \end{cases}$

Phương pháp hàm mô tả

Đáp ứng của hệ phi tuyến khi tín hiệu vào hình sin

Xét khâu phi tuyến :



Do khi tín hiệu vào của khâu phi tuyến là tín hiệu hình sin:

$$e(t) = M\sin(\omega t)$$

tín hiệu ra $u(t)$ xấp xỉ thành phần tần số cơ bản (do ta bỏ qua các thành phần hài bậc cao) $u(t) \approx u_1(t) = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t)$

nên ta có thể coi khâu phi tuyến như là một khâu khuếch đại có hệ số khuếch đại là:

$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M}$$

Tổng quát $N(M)$ là một hàm phức nên ta gọi là hệ số khuếch đại phức của khâu phi tuyến. Vì quan hệ vào ra của khâu phi tuyến có thể mô tả gần đúng bằng hệ số khuếch đại phức $N(M)$ nên $N(M)$ còn được gọi là hàm mô tả của khâu phi tuyến.

Phương pháp hàm mô tả

Định nghĩa hàm mô tả

Hàm mô tả (hay còn gọi là hệ số khuếch đại phức) là tỉ số giữa thành phần sóng hài cơ bản của tín hiệu ra của khâu phi tuyến và tín hiệu vào hình sin.

$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} \qquad A_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos(\omega t)d(\omega t)$$

Trong các công thức trên $u(t)$ là tín hiệu ra của khâu phi tuyến khi tín hiệu vào là $M\sin(\omega t)$. Nếu $u(t)$ là hàm lẻ thì:

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) \qquad B_1 = 0$$

Phương pháp hàm mô tả

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu rơ le hai vị trí

Do $u(t)$ là hàm lẻ nên:

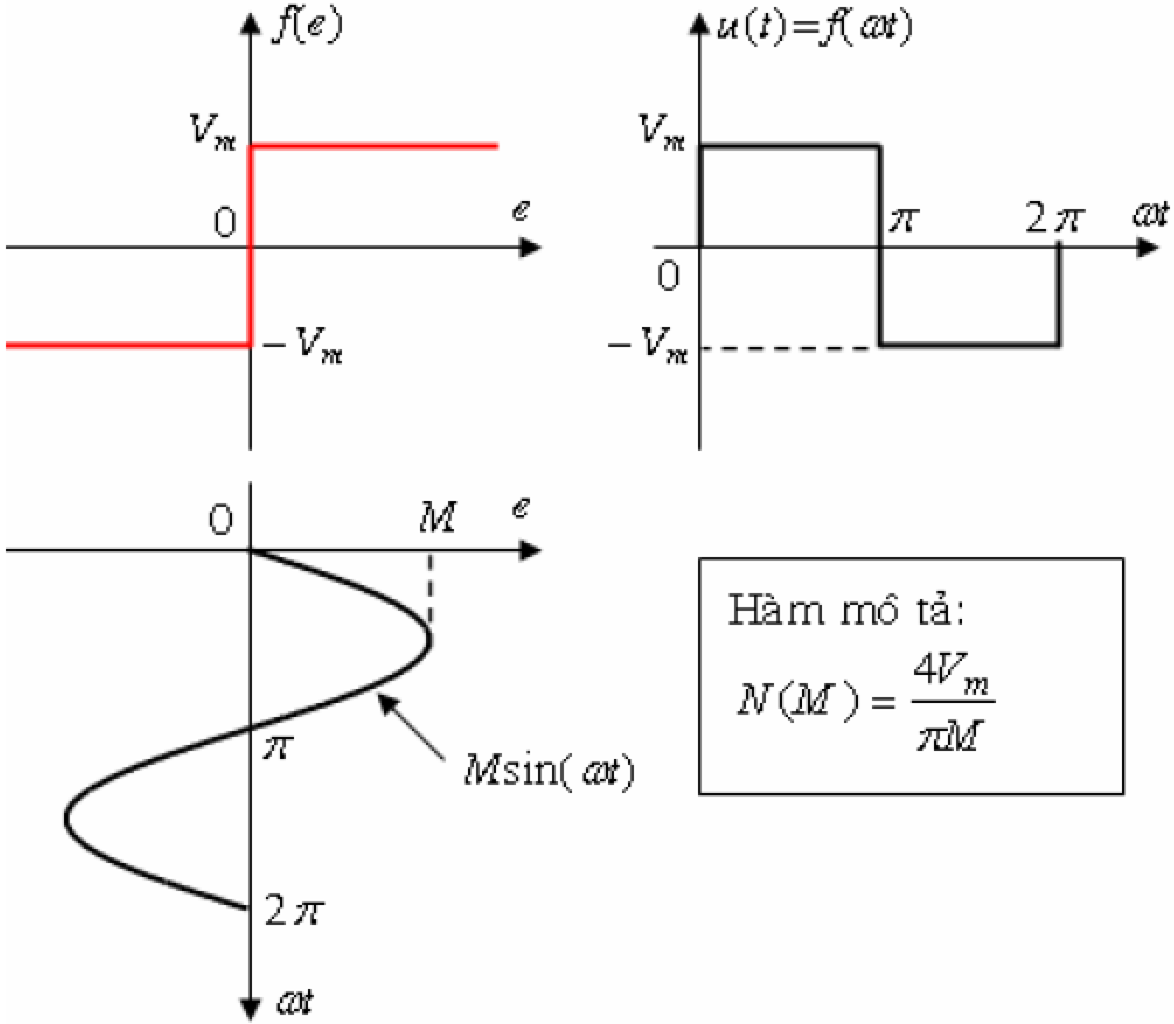
$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} V_m \sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$= \frac{2V_m}{\pi}\cos(\omega t)\Big|_{\omega t=0}^{\pi} = \frac{4V_m}{\pi}$$

Do đó hàm mô tả của khâu relay 2 vị trí là:

$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = \frac{4V_m}{\pi M}$$



Phương pháp hàm mô tả

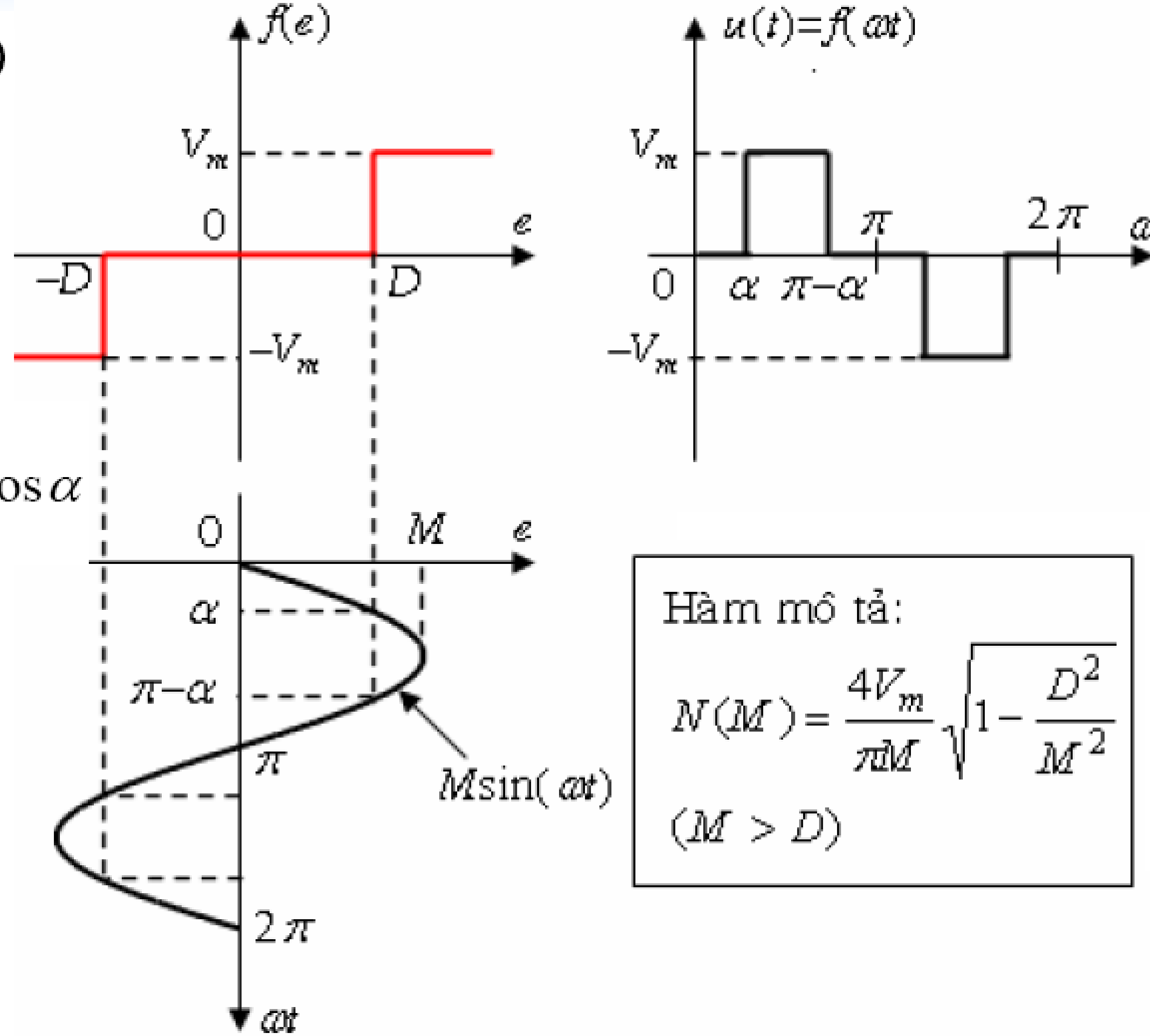
Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu rơ le ba vị trí $\quad B_1 = 0$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} V_m \sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$= \frac{2V_m}{\pi}\cos(\omega t)\Big|_{\omega t=\alpha}^{\pi-\alpha} = \frac{4V_m}{\pi}\cos\alpha$$



Hàm mô tả:

$$N(M) = \frac{4V_m}{\pi M}\sqrt{1-\frac{D^2}{M^2}}$$

$(M > D)$

Theo đồ thi ta có:

$$D = M\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{D}{M}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{D^2}{M^2}}$$

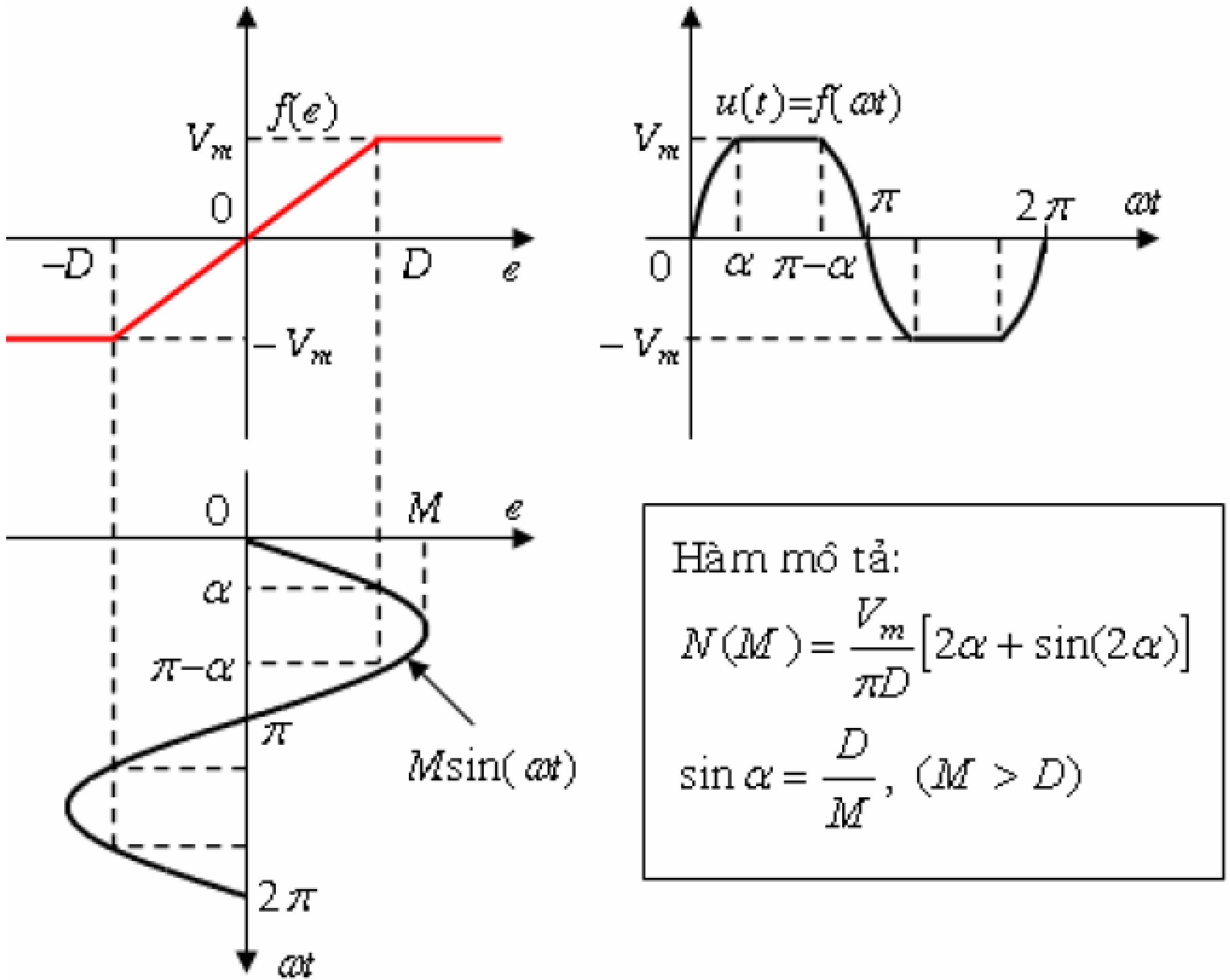
$$A_1 = \frac{4V_m}{\pi}\sqrt{1-\frac{D^2}{M^2}}$$

Do đó hàm mô tả của khâu relay 3 vị trí là: $N(M) = \dfrac{A_1 + jB_1}{M} = \dfrac{4V_m}{\pi M}\sqrt{1-\dfrac{D^2}{M^2}}$

Phương pháp hàm mô tả

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu khuếch đại bão hòa



Hàm mô tả:

$$N(M) = \frac{V_m}{\pi D}\left[2\alpha + \sin(2\alpha)\right]$$

$$\sin\alpha = \frac{D}{M}, \ (M > D)$$

Phương pháp hàm mô tả

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu khuếch đại bão hòa

Do $u(t)$ là hàm lẻ nên $B_1 = 0$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\alpha}\frac{V_m M}{D}\sin^2(\omega t)d(\omega t) + \int_{\alpha}^{\pi/2} V_m \sin(\omega t)d(\omega t)\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{V_m M}{2D}\left(\omega t - \frac{\sin(2\omega t)}{2}\right)\Bigg|_{\omega t=0}^{\alpha} - V_m\cos(\omega t)d(\omega t)\Bigg|_{\omega t=\alpha}^{\pi/2}\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{V_m M}{2D}\left(\alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2}\right) + V_m\cos\alpha\right] = \frac{M}{\pi}\left[\frac{V_m}{D}\left(2\alpha + \sin(2\alpha)\right)\right]$$

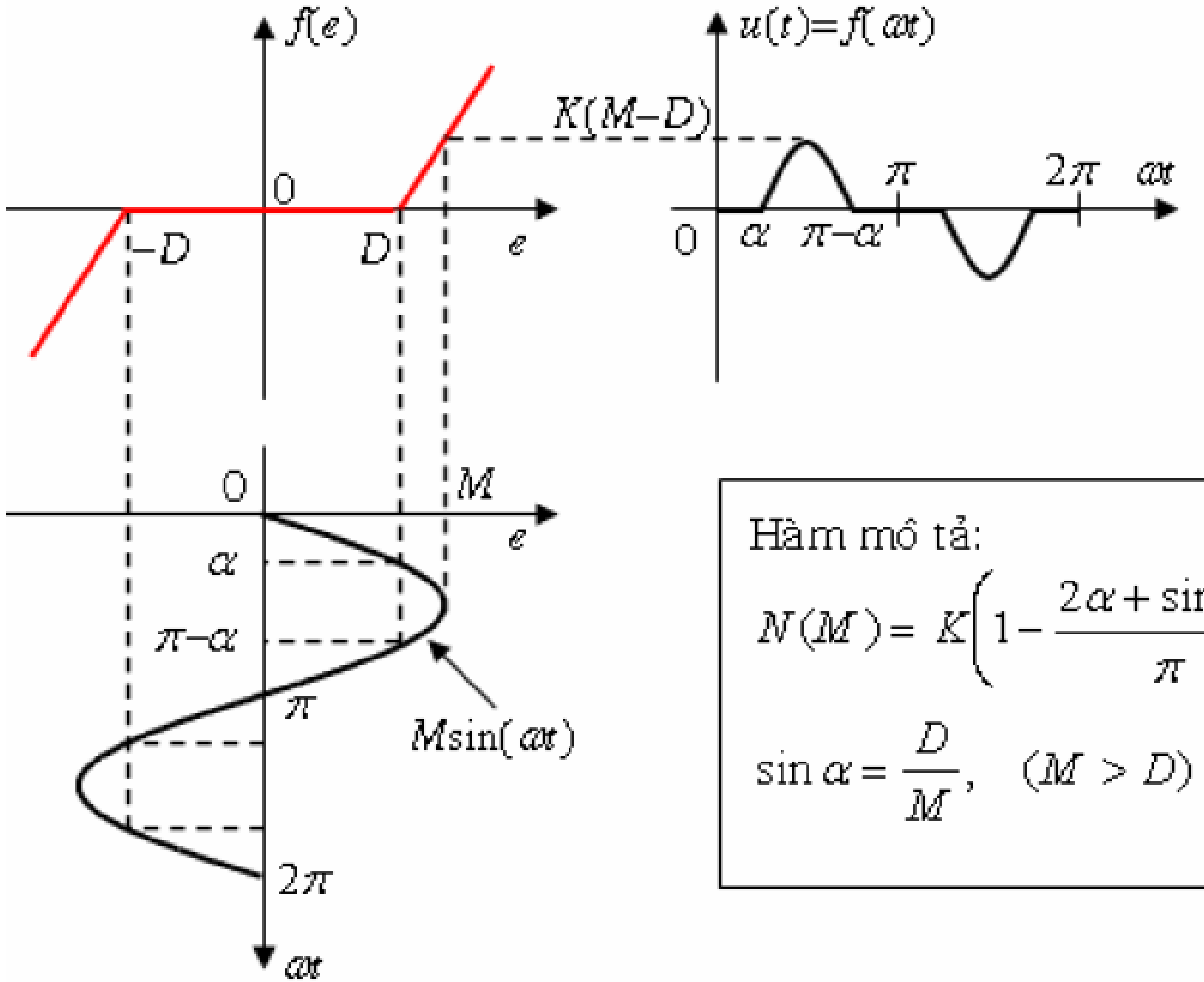
Do đó hàm mô tả của khâu khuếch đại bão hòa là:

$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = \frac{V_m}{\pi D}\left[2\alpha + \sin(2\alpha)\right] \qquad \left(\sin\alpha = \frac{D}{M}\right)$$

Phương pháp hàm mô tả

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu khuếch đại có vùng chết



Hàm mô tả:

$$N(M) = K\left(1 - \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi}\right)$$

$$\sin\alpha = \frac{D}{M}, \quad (M > D)$$

Phương pháp hàm mô tả

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu khuếch đại có vùng chết

Do $u(t)$ là hàm lẻ nên $B_1 = 0$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{4}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi/2} K[M\sin(\omega t) - D]\sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$= \frac{4KM}{\pi}\left[\left(\omega t - \frac{\sin(2\omega t)}{2}\right) + \frac{D}{M}\cos(\omega t)\right]_{\alpha}^{\pi/2}$$

$$= KM\left(1 - \frac{2\alpha + \sin(2\alpha)}{\pi}\right)$$

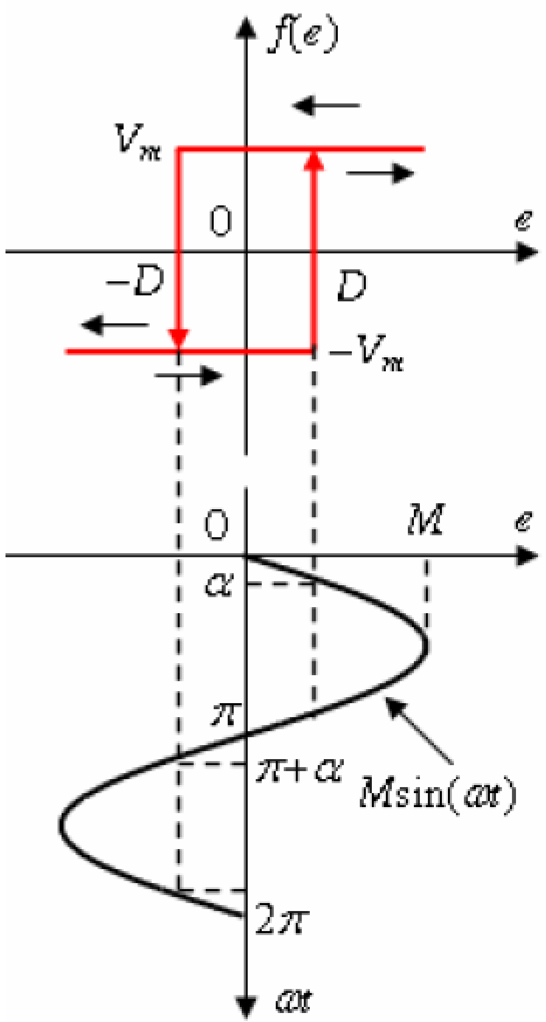
Do đó hàm mô tả của khâu khuếch đại có vùng chết là:

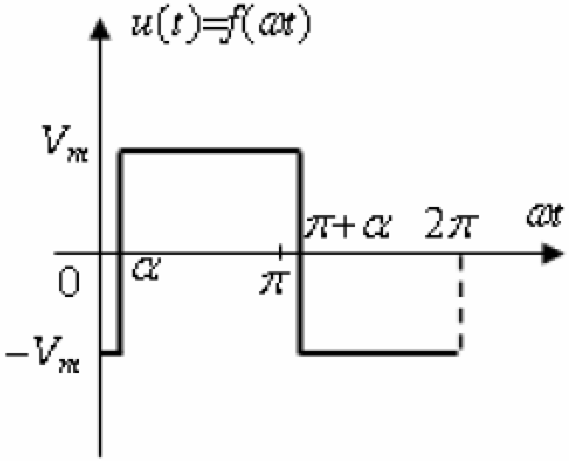
$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = K\left(1 - \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi}\right) \qquad \left(\sin\alpha = \frac{D}{M}\right)$$

Phương pháp hàm mô tả

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu rơ le hai vị trí có trễ:





Hàm mô tả:

$$N(M) = \frac{4V_m}{\pi M}(\cos\alpha - j\sin\alpha)$$

$$\sin\alpha = \frac{D}{M} \qquad (M > D)$$

Phương pháp hàm mô tả

Hàm mô tả của các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu rơ le hai vị trí có trễ:

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi+\alpha} V_m \sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{4V_m}{\pi}\cos\alpha$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} u(t)\cos(\omega t)d(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi+\alpha} V_m \cos(\omega t)d(\omega t) = -\frac{4V_m}{\pi}\sin\alpha$$

Do đó hàm mô tả của khâu rơ le hai vị trí có trễ:

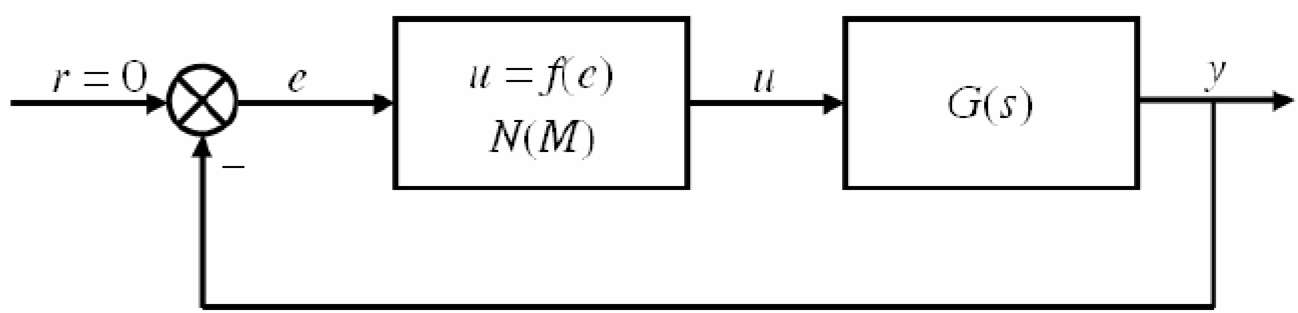
$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = \frac{4V_m}{\pi M}(\cos\alpha - j\sin\alpha)$$

$$\left(\sin\alpha = \frac{D}{M}\right)$$

Phương pháp hàm mô tả

Khảo sát chế độ dao động đều hòa trong hệ phi tuyến

Xét hệ phi tuyến có sơ đồ như sau:



Phương trình đặc trưng của hệ thống là:

$$1+N(M)G(j\omega)=0 \quad \Leftrightarrow \quad G(j\omega)=-\frac{1}{N(M)} \qquad (*)$$

Phương trình trên được gọi là phương trình cân bằng điều hòa. Phương trình này sẽ được dùng để xác định biên độ và tần số của dao động điều hòa trong hệ phi tuyến.

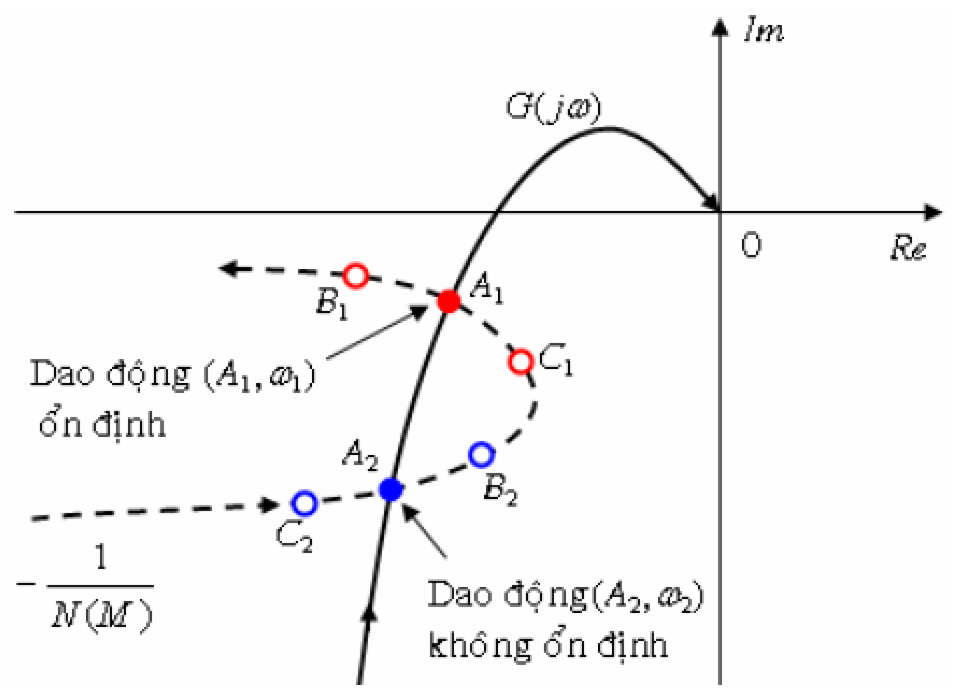
Nếu (M^*, ω^*) là nghiệm của phương trình trên thì trong hệ phi tuyến có dao động với tần số ω^*, biên độ M^*.

Phương pháp hàm mô tả

Khảo sát chế độ dao động đều hòa trong hệ phi tuyến

Về mặt hình học, nghiệm (M*, ω*) là nghiệm của phương trình (*) chính là giao điểm của đường cong Nyquist $G(j\omega)$ của khâu tuyến tính và đường đặc tính $-1/N(M)$ của khâu phi tuyến.

Dao động trong hệ phi tuyến là ổn định nếu đi theo chiều tăng của đặc tính $-1/N(M)$ của khâu phi tuyến, chuyển từ vùng không ổn định sang vùng ổn định của khâu tuyến tính $G(j\omega)$.



Phương pháp hàm mô tả

Trình tự khảo sát chế độ dao động trong hệ phi tuyến

B1: Xác định hàm mô tả của khâu phi tuyến (nếu khâu phi tuyến không phải là các khâu cơ bản).

B2: Điều kiện tồn tại dao động trong hệ: đường cong Nyquist $G(j\omega)$ và đường đặc tính $-1/N(M)$ phải cắt nhau.

B3: Biên độ, tần số dao động (nếu có) là nghiệm của phương trình:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(M)} \qquad (*)$$

Nếu $N(M)$ là hàm thực thì:

- Tần số dao động chính là tần số cắt pha $\omega_{-\pi}$ của khâu tuyến tính $G(j\omega)$.

$$\angle G(j\omega_{-\pi}) = -\pi$$

- Biên độ dao động là nghiệm của phương trình:

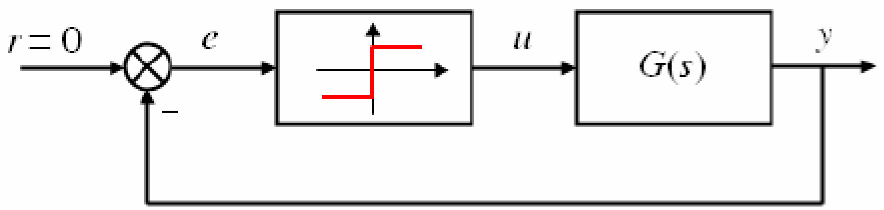
$$\frac{1}{N(M)} = \left|G(j\omega_{-\pi})\right|$$

Phương pháp hàm mô tả

Khảo sát chế độ dao động đều hòa trong hệ phi tuyến

Ví dụ:

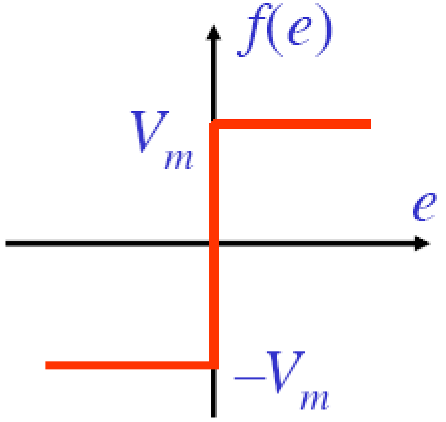
Xét hệ phi tuyến có sơ đồ như sau:



Hàm truyền của khâu tuyến tính là

$$G(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)(2s+1)}$$

Khâu phi tuyến là khâu relay 2 vị trí có V_m=6.



Hãy xác định biên độ và tần số dao động tự kích trong hệ (nếu có).

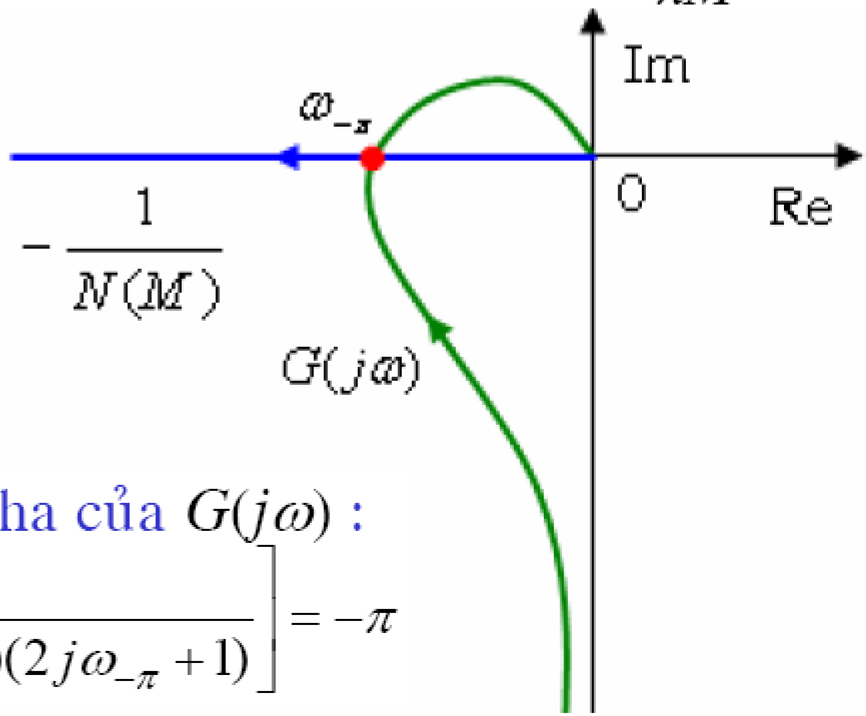
Phương pháp hàm mô tả

Khảo sát chế độ dao động đều hòa trong hệ phi tuyến

Ví dụ:

Giải: Hàm mô tả của khâu relay 2 vị trí là: $N(M) = \dfrac{4V_m}{\pi M}$

Do đường cong Nyquist $G(j\omega)$ và đường đặc tính $-1/N(M)$ luôn luôn cắt nhau (xem hình vẽ) nên trong hệ phi tuyến luôn luôn có dao động.



Tần số dao động là tần số cắt pha của $G(j\omega)$:

$$\angle G(j\omega_{-\pi}) = \arg\left[\frac{10}{j\omega_{-\pi}(0.2j\omega_{-\pi}+1)(2j\omega_{-\pi}+1)}\right] = -\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \arctan(0.2\omega) - \arctan(2\omega) = -\pi \qquad \Leftrightarrow \arctan(0.2\omega) + \arctan(2\omega) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(0.2\omega_{-\pi}) + (2\omega_{-\pi})}{1-(0.2\omega_{-\pi}).(2\omega_{-\pi})} = \infty \quad \Leftrightarrow 1-(0.2\omega_{-\pi}).(2\omega_{-\pi}) = 0 \quad \Leftrightarrow \omega_{-\pi} = 1.58 \ \ (\text{rad}/\text{sec})$$

Phương pháp hàm mô tả

Khảo sát chế độ dao động đều hòa trong hệ phi tuyến

Ví dụ:

Biên độ dao động là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{N(M)} = \left|G(j\omega_{-\pi})\right| = \frac{10}{1.58\sqrt{1+(0.2\times 1.58)^2}\sqrt{1+(2\times 1.58)^2}} = 1.82$$

$$\Rightarrow \frac{\pi M}{4V_m} = 1.82 \qquad \Rightarrow M = 13.90$$

Kết luận: Trong hệ phi tuyến có dao động $y(t) = 13.90\sin(1.58t)$

Phương pháp Lyapunov

Giới thiệu

Phương pháp Lyapunov cung cấp điều kiện đủ để đánh giá tính ổn định của hệ phi tuyến.

Có thể áp dụng cho hệ phi tuyến bậc cao bất kỳ.

Có thể dùng phương pháp Lyapunov để thiết kế các bộ điều khiển phi tuyến.

Hiện nay phương pháp Lyapunov là phương pháp được sử dụng rộng rãi nhất để phân tích và thiết kế hệ phi tuyến.

Phương pháp Lyapunov

Điểm cân bằng của hệ phi tuyến

Xét hệ phi tuyến mô tả bởi phương trình trạng thái sau: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)$

Một điểm trạng thái $\boldsymbol{x}_e$ được gọi là điểm cân bằng nếu như hệ đang ở trạng thái $\boldsymbol{x}_e$ và không có tác động nào từ bên ngoài thì hệ sẽ nằm nguyên tại đó.

Dễ thấy điểm cân bằng phải là nghiệm của phương trình:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e, u=0} = \mathbf{0}$$

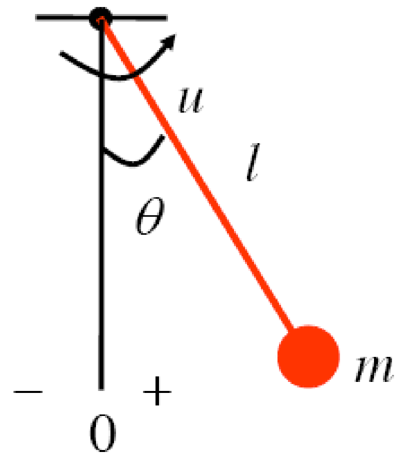
Hệ phi tuyến có thể có nhiều điểm cân bằng hoặc không có điểm cân bằng nào. Điều này hoàn toàn khác so với hệ tuyến tính , hệ tuyến tính luôn luôn có 1 điểm cân bằng là $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$.

Phương pháp Lyapunov

Điểm cân bằng của hệ phi tuyến

Ví dụ: Xét hệ con lắc mô tả bởi PTVP:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + mgl\sin\theta = u(t)$$



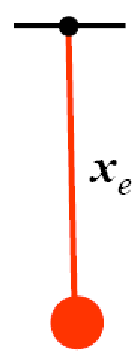
Đặt: $\begin{cases} x_1(t) = \theta(t) \\ x_2(t) = \dot{\theta}(t) \end{cases}$

PTTT mô tả hệ con lắc là: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t))$

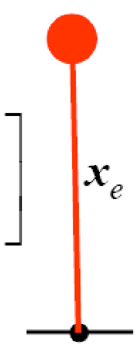
trong đó: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\dfrac{g}{l}\sin x_1(t) - \dfrac{B}{ml^2}x_2(t) + \dfrac{1}{ml^2}u(t) \end{bmatrix}$

Điểm cân bằng phải là nghiệm của phương trình: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)\Big|_{x=x_e, u=0} = \boldsymbol{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{2e} = 0 \\ -\dfrac{g}{l}\sin x_{1e} - \dfrac{B}{ml^2}x_{2e} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{2e} = 0 \\ x_{1e} = k\pi \end{cases}$$



$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$



$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} (2k+1)\pi \\ 0 \end{bmatrix}$

Kết luận: Hệ con lắc có vô số điểm cân bằng: $\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$

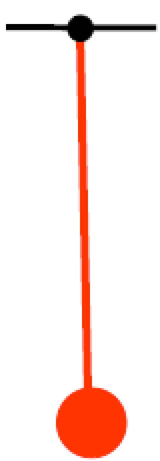
Phương pháp Lyapunov

Ổn định tại điểm cân bằng

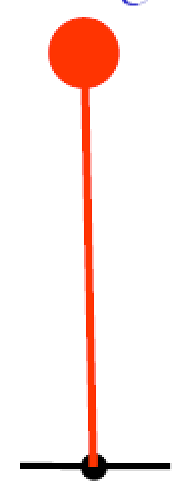
Định nghĩa: Một hệ thống được gọi là ổn định tại điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e$ nếu như có một tác động tức thời đánh bật hệ ra khỏi $\boldsymbol{x}_e$ và đưa đến điểm được $\boldsymbol{x}_0$ thuộc lân cận nào đó của $\boldsymbol{x}_e$ thì sau đó hệ có khả năng tự quay được về điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e$ ban đầu.

Chú ý: tính ổn định của hệ phi tuyến chỉ có nghĩa khi đi cùng với điểm cân bằng. Có thể hệ ổn định tại điểm cân bằng này nhưng không ổn định tại điểm cân bằng khác.

Điểm cân bằng ổn định



Điểm cân bằng không ổn định



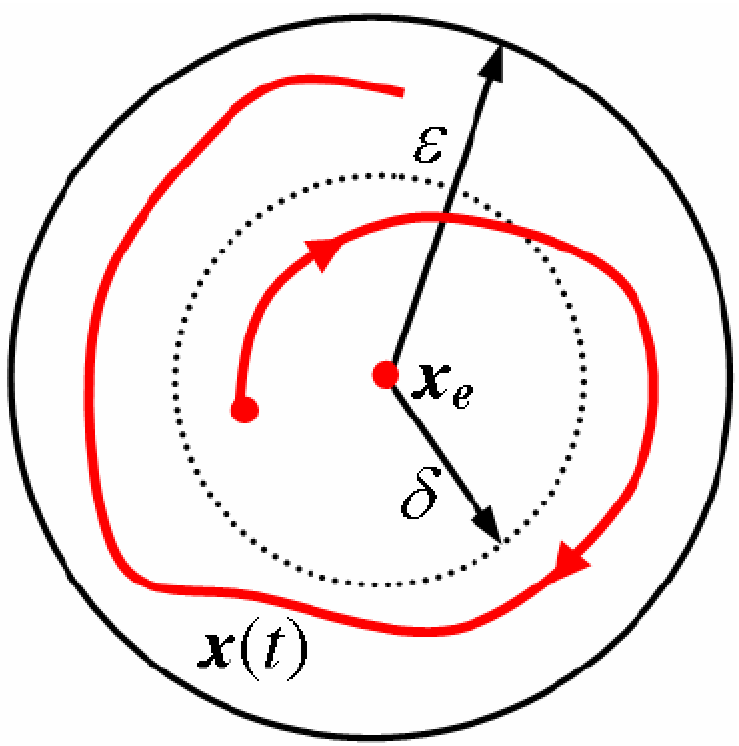
Phương pháp Lyapunov

Ổn định Lyapunov

Cho hệ phi tuyến không kích thích mô tả bởi PTTT: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)\big|_{u=0}$ (1)

Giả sử hệ thống có điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$.

Hệ thống được gọi là ổn định Lyapunov tại điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ nếu với $\varepsilon > 0$ bất kỳ bao giờ cũng tồn tại δ phụ thuộc ε sao cho nghiệm $\boldsymbol{x}(t)$ của phương trình (1) với điều kiện đầu $\boldsymbol{x}(0)$ thỏa mãn:



$$\|\boldsymbol{x}(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

Phương pháp Lyapunov

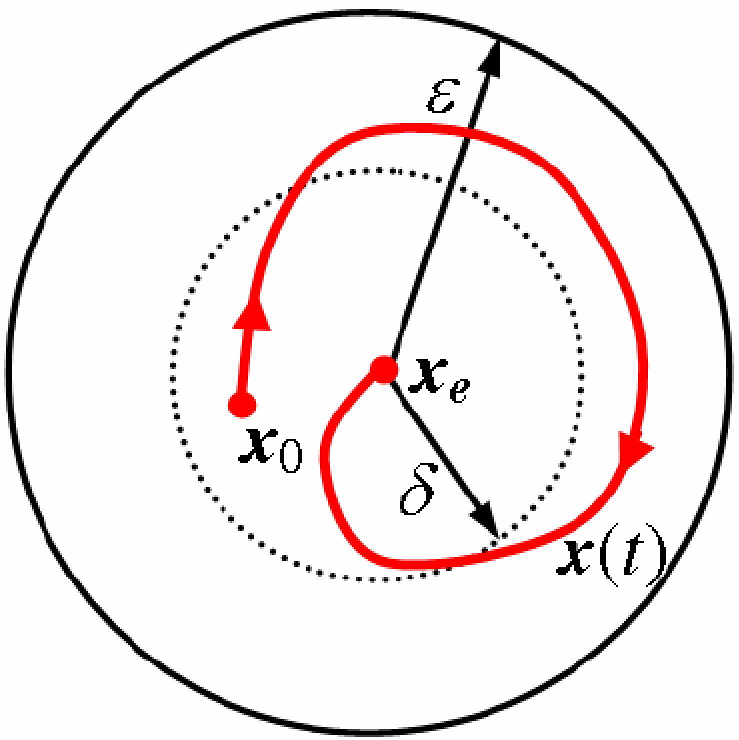
Ổn định tiệm cận Lyapunov

Cho hệ phi tuyến không kích thích mô tả bởi PTTT: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)\big|_{u=0}$ (1)

Giả sử hệ thống có điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$.

Hệ thống được gọi là ổn định tiệm cận Lyapunov tại điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ nếu với $\varepsilon > 0$ bất kỳ bao giờ cũng tồn tại δ phụ thuộc ε sao cho nghiệm $\boldsymbol{x}(t)$ của phương trình (1) với điều kiện đầu $\boldsymbol{x}(0)$ thỏa mãn:

$$\|\boldsymbol{x}(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = 0$$



Phương pháp Lyapunov

Phương pháp tuyến tính hóa Lyapunov

Cho hệ phi tuyến mô tả bởi PTTT: $\dot{x} = f(x,u)\big|_{u=0}$ (1)

Giả sử xung quanh điểm cân bằng x_e, hệ thống (1) có thể tuyến tính hóa về dạng: $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$ (2)

Định lý:

Nếu hệ thống tuyến tính hóa (2) ổn định thì hệ phi tuyến (1) ổn định tiệm cận tại điểm cân bằng x_e.

Nếu hệ thống tuyến tính hóa (2) không ổn định thì hệ phi tuyến (1) không ổn định tại điểm cân bằng x_e.

Nếu hệ thống tuyến tính hóa (2) ở biên giới ổn định thì không kết luận được gì về tính ổn định của hệ phi tuyến tại điểm cân bằng x_e.

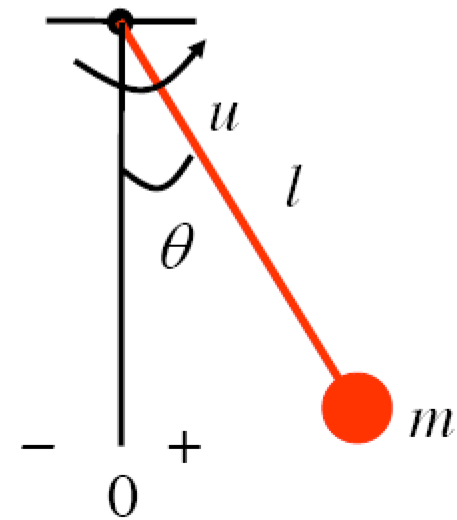
Phương pháp Lyapunov

Phương pháp tuyến tính hóa Lyapunov

Ví dụ: Xét hệ con lắc mô tả bởi PTTT: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t))$

trong đó:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\dfrac{g}{l}\sin x_1(t) - \dfrac{B}{ml^2}x_2(t) + \dfrac{1}{ml^2}u(t) \end{bmatrix}$$



Xét tính ổn định của hệ thống tại điểm cân bằng:

(a) $\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$

Mô hình tuyến tính quanh điểm cân bằng (a) $\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\tilde{u}$

$$a_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, u=0)} = 0 \qquad a_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}, \bar{u}=0)} = 1$$

$$a_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, u=0)} = -\frac{B}{ml^2} \qquad a_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, u=0)} = -\frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{B}{ml^2} \end{bmatrix}$$

Phương pháp Lyapunov

Phương pháp tuyến tính hóa Lyapunov – Ví dụ:

PTĐT $\det(sI - A) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{l} & s + \frac{B}{ml^2} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow s^2 + \frac{B}{ml^2}s + \frac{g}{l} = 0$

Kết luận: Hệ thống ổn định (theo hệ quả tiêu chuẩn Hurwitz)

Mô hình tuyến tính quanh điểm cân bằng (b) $\boldsymbol{x}_e = [\pi \quad 0]^T$

$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\tilde{u}$ $\quad a_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\left(\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\pi\\0\end{bmatrix}, u=0\right)} = 0$ $\quad a_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\left(\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\pi\\0\end{bmatrix}, u=0\right)} = 1$

$a_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\left(\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\pi\\0\end{bmatrix}, u=0\right)} = -\frac{g}{l}\cos x_1(t)\Big|_{\left(\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\pi\\0\end{bmatrix}, u=0\right)} = \frac{g}{l}$ $\quad a_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\left(\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\pi\\0\end{bmatrix}, u=0\right)} = -\frac{B}{ml^2}$

$\Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{B}{ml^2} \end{bmatrix} \Rightarrow$ PTĐT $\det(sI - A) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ -\frac{g}{l} & s + \frac{B}{ml^2} \end{bmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow s^2 + \frac{B}{ml^2}s - \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow$ Kết luận: Hệ thống <u>không</u> ổn định

Phương pháp Lyapunov

Phương pháp trực tiếp Lyapunov

Định lý ổn định Lyapunov: Cho hệ phi tuyến không kích thích mô tả bởi phương trình trạng thái: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)\big|_{u=0}$ (1)

Giả sử hệ thống có điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$. Nếu tồn tại hàm $V(\boldsymbol{x})$:

i) $V(\boldsymbol{x}) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{x}$

ii) $V(0) = 0$

iii) $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq 0$

Thì hệ thống (1) ổn định Lyapunov tại điểm 0.

Định lý không ổn định: Cho hệ phi tuyến không kích thích mô tả bởi phương trình trạng thái: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)\big|_{u=0}$ (1)

Giả sử hệ thống có điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$. Nếu tồn tại hàm $V(\boldsymbol{x})$:

i) $V(\boldsymbol{x}) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{x}$

ii) $V(0) = 0$

iii) $\dot{V}(\boldsymbol{x}) > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq 0$

Thì hệ thống (1) không ổn định tại điểm 0.

Phương pháp Lyapunov

Ví dụ: Cho hệ thống phi tuyến được mô tả bởi phương trình trạng thái sau:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

Trong đó:

$$f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} x_1\left(\sin\dfrac{\pi x_2}{5} - 1\right) \\ 5x_1 - x_2 + u \end{bmatrix}$$

$$h(x(t), u(t)) = x_1$$

Sử dụng phương pháp tuyến tính hóa Lyapunov, hãy cho biết tính ổn định của hệ thống tại các điểm cân bằng.

Phương pháp Lyapunov - Ví dụ

Giải: Để tìm điểm cân bằng ta cho u(t) = 0 và giải hệ phương trình sau:

$$\dot{x}_1 = x_1\left(\sin\frac{\pi x_2}{5} - 1\right) = 0$$

$$\dot{x}_2 = 5x_1 - x_2 = 0$$

Hệ phương trình có hai nghiệm, do vậy hệ phi tuyến có 2 điểm cân bằng a và b như sau:

$$x_{1a} = 0 \qquad x_{1b} = 0.5$$

$$x_{2a} = 0 \qquad x_{2b} = 2.5$$

Xác định mô hình toán học tuyến tính hóa của hệ thống tại điểm cân bằng sử dụng phương pháp tuyến tính hóa của Lyapunov.

Phương pháp Lyapunov - Ví dụ

Hệ tuyến tính hóa có dạng: $\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D}\tilde{u}(t) \end{cases}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} = \begin{bmatrix} \left(\sin\frac{\pi x_2}{5} - 1\right) & \frac{1}{5}\pi x_1 \cos\frac{\pi x_2}{5} \\ 5 & -1 \end{bmatrix}_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{\partial h_1}{\partial u_1}_{\,x=\bar{x}, u=\bar{u}} = 0$$

Hệ thống này có các hệ số B, C, D không phụ thuộc vào các điểm cân bằng

Phương pháp Lyapunov - Ví dụ

- Tại điểm cân bằng a$\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},0\right)$: ma trận A có dạng:

$$A==\begin{bmatrix}\left(\sin\frac{\pi x_2}{5}-1\right) & \frac{1}{5}\pi x_1\cos\frac{\pi x_2}{5}\\ 5 & -1\end{bmatrix}_{x=0,u=0}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 5 & -1\end{bmatrix}$$

Vậy mô tả toán học tuyến tính hóa tại điểm cân bằng a là:

$$\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 5 & -1\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\tilde{u}$$

$$\tilde{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\tilde{x}$$

Đa thức đặc trưng của hệ tuyến tính hóa:

$$\det(sI-A)=\det\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 5 & -1\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ -5 & s+1\end{bmatrix}=s^2+2s+1$$

Hệ tuyến tính hóa ổn định nên hệ phi tuyến ổn định tiệm cận tại điểm a

Phương pháp Lyapunov - Ví dụ

- Tại điểm cân bằng b$\left(\begin{bmatrix}0,5\\2,5\end{bmatrix},0\right)$: ma trận A có dạng:

$$A=\begin{bmatrix}\left(\sin\frac{\pi x_2}{5}-1\right) & \frac{1}{5}\pi x_1\cos\frac{\pi x_2}{5}\\ 5 & -1\end{bmatrix}_{x=\begin{bmatrix}0,5\\2,5\end{bmatrix},u=0}=\begin{bmatrix}0 & 0\\5 & -1\end{bmatrix}$$

Vậy mô tả toán học tuyến tính hóa tại điểm cân bằng a là:

$$\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\5 & -1\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\tilde{u}$$

$$\tilde{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\tilde{x}$$

Đa thức đặc trưng của hệ tuyến tính hóa:

$$\det(sI-A)=\det\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\5 & -1\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}s & 0\\-5 & s+1\end{bmatrix}=s^2+s \quad (*)$$

(*) có một nghiệm bằng 0 nên hệ tuyến tính hóa ở biên giới ổn định. Theo Lyapunov, không kết luận được tính ổn định của hệ phi tuyến.