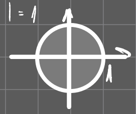
Лекция 9

Напоминание:

Геометрически она $|\cos\varphi + i\sin\varphi| = 1$ живет на единичной окружности с центром в начале координат.



$z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = \underbrace{|z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{\text{тригонометрическая}}$, где $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

Замечание:

Комплексный анализ — раздел матана который рассматривает и изучает функции комплексного аргумента.
↳ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

В комплексном анализе функция $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x \to e^x)$

Экспонента: Выпуклая функция. $\exp(x) = e^x$

доопределяется до функции $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ с сохранением всех её привычных свойств. Доказывается ф-ла $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \ \forall \varphi \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}$ имеем $z = |z|\cdot e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \operatorname{Arg} z$
↳ Показательная форма

Пу. вместо φ мы подставим π → $e^{i\pi} = -1$

Мы говорили про формулу Муавра, которая позволяет возводить $\mathbb{C}$ число в степень, а теперь поговорим про обратную операцию к возведению в степень: корень.

Пу. $z \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Опр:

Корнем степени n (n-й степени) из числа z. Называется всякое число $w \in \mathbb{C}$ т.ч. $w^n = z$.

Обозначение:

$\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$
↳ это множество не состоит из одного элемента

Опишем множество $\sqrt[n]{z}$

Если $z = 0$, то $|z| = 0$. Тогда:

$w^n = z \Rightarrow |w|^n = |z|$

$|z| = 0 \Rightarrow |w| = 0 \Rightarrow w = 0$

Вывод: $\sqrt[n]{0} = \{0\}$

Пусть $z \neq 0$; $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Пусть $\psi \in \operatorname{Arg} w$, т.ч. $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$

формула Муавра:

Теперь $w^n = z \Leftrightarrow |w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Замечание: Два $\mathbb{C}$ числа равны в триг. форме равны когда:

- их модули равны
- arg отличаются на целое кратное и 2π.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\psi = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \boxed{\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

Если взять $k = 0 \to \frac{\varphi}{n}$

Если взять $k = n \to \frac{\varphi}{n} + 2\pi$

Одни и те же числа по нашим критериям.

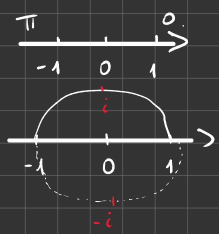
С точностью до $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, различные значения для ψ получаются при $k = 0, 1, \dots, n-1$.

В результате получаем $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$, где $w_k = \left(\sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

Замечание:

Все числа из $\sqrt[n]{z}$ лежат в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

у -1 Arg π, делим Arg на $2 \Rightarrow \frac{\pi}{2}$



Примеры: $\sqrt[2]{1} = \{\pm 1\}$, $\sqrt[2]{-1} = \pm i$

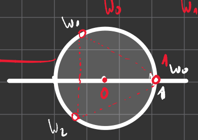
$$\sqrt[3]{1} = \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

w_0 w_1 w_2

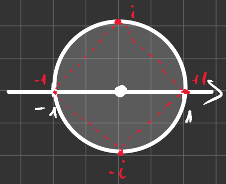
w_2: $\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

w_1: $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

Правильный треугольник.



$\sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\}$.



Основная теорема алгебры:

Всякий многочлен в степени как ≥ 1, с $\mathbb{C}$ коэф, имеет $\mathbb{C}$ корень.

$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} : f(c) = 0$.

"С учетом кратности"

Опр:

Поля с этим свойством называются $\boxed{\text{алгебраически замкнутый.}}$

Многочлены можно рассматривать над $\forall$ полем.

F - поле $\Rightarrow$ $F[x]$ - мно-во мно-ов от переменн. x с коэф. из F.

$F[x] = \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in F\}$

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in F[x] \setminus \{0\}$, $a_n \neq 0 \Rightarrow \underbrace{\deg f}_{\text{степень}} := n$

$\deg(f(x) \cdot g(x)) = \boxed{\deg f(x)} + \deg g(x) \quad \forall f, g \neq 0$.

$\boxed{\deg \text{ — степень}}$

Обычное деление:

$g(x) \neq 0$ (многочлен).

Тогда говорят, что мн. $f(x) \in F[x]$ делится на $g(x)$, если $\exists\, h(x) \in F[x]$, т. что $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

В общем случае: (деление с остатком)

Предложение: $\forall f(x) \in F[x]$ $\exists!$ $q(x), r(x) \in F[x]$, т. что

1). $f(x) = q(x) \cdot g(x) + \boxed{r(x)}$ $\to$ наш остаток.

2). либо $r(x) = 0$,
либо $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Пример:

На практике это выглядит как "деление в столбик"

$f(x) = x^3 - 2x$, $g(x) = x + 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x & x+1 \\ \cline{2-2} x^3 - x^2 & x^2 - x - 1 \\ \hline -x^2 - 2x & \\ -x^2 - x & \\ \hline -x & \\ -x - 1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 - 2x}_{f} = \underbrace{(x^2 - x - 1)}_{q}\underbrace{(x+1)}_{g} + \underbrace{1}_{r}$$

Важный частный случай

$g(x) = x - c$ многочлен $g(x)$ это линейный двучлен.

Операция деления с остатком становиться:

$\forall f(x): \; f(x) = \underset{\text{наше поле}}{q}(x) \cdot (x - c) + r(x)$ $\rightarrow$

> Тогда $r(x)$ будет константа, т.к он должен иметь степень либо 0 либо меньшую степень чем $(x-c)$, у которого степень 1.

$\rightarrow$ где $r(x) = 0$, либо $\deg r(x) = 0$.

$\Rightarrow r(x) = r = const \in F$.

Теорема Безу:

$r = f(c)$

Док-о:

Подставим $x = c$ в, получим $f(c) = r$ ▨

Следствие:

Если $f(x) \in F[x]$ и $c \in F$ - его корень, то $f(x) \vdots (x - c)$.

(многочлен; делиться нацело)

Опр:

Пу. $f \in F[x]$, c - его корень, тогда кратностью корня c в $f(x)$ называется наибольшее целое k, т. что $f(x) \vdots (x-c)^k$

> $\rightarrow$ Если поставить числовой пример. 75 делиться на 5, что дает нам 25. Оно то-же делиться на 5, что уже даст 5 тогда, для 75 самая большая степень на которую он делиться это 2. (т.е $75 \vdots 25 = 75 \vdots 5^2$). Это и есть кратность корня.

Следствие из основной теоремы алгебры комплексных чисел

Всякий многочлен с $\mathbb{C}$ коэф. степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом кратностей. Точнее, если $f \in F[x]$, $\deg f = n \geq 1$

$c_1, \dots, c_s$ – корни f $\boxed{f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}$

$k_1, \dots, k_s$ – их кратности

$\Rightarrow f(x) = a_n (x-a)^{k_1} (x-c_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-c_s)^{k_s} \longrightarrow$

> Взяли многочлен, возьмем у них корни, и у корней просуммируем кратности, и тогда мы получим n.

Векторные пространства: абстрактный объект – задаются некие аксиомы.

> А зачем нам абстракция?
>
> → Решили задачу 1
>
> → Решили задачу 2.
>
> → Заметили что решения получились похожие, у них есть какие-то свойства
>
> → Возникает теория.
>
> → Нужна для создания универсальных методов решения ряда проблем.

Опр:

Пусть F – поле ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

Множество V называется векторным (или линейным) пространством над полем F, если на V заданы две операции:

«Сложение» $V \times V \to F$, $(x, y) \to x + y$

и «умножение на скаляр»: $F \times V \to V$ $(\alpha, x) \to \alpha x$.

удовлетворяющие следующим условиям (Аксиомы векторного пространства)

1). $x + y = y + x$ $\forall x, y \in V$ – коммутативность сложения.

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\forall x, y, z \in V$ – ассоциативность сложения

3). $\exists \vec{0} \in V$: $x + \vec{0} = x$ $\forall x \in V$.

4). $\exists -x \in V$: $x + (-x) = \vec{0}$ $\forall x \in V$.

5). $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta x$. $\forall \alpha, \beta \in F$, $x \in V$.

6) $\alpha (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ $\forall \alpha \in F$, $x, y \in V$

7). $(\alpha\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x)$ $\forall \alpha,\beta \in F$, $x \in V$.

8) $1\cdot x = x$ $\forall x \in V$.

Элементы векторного пространства называются (абстрактными) векторами.

Пример:

$\boxed{\text{(любое поле можно рассмотреть как векторное пространство).}}$

① $\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$ (или F над F)

② $\mathbb{R}^n$ над $\mathbb{R}$ (или F^n над F), реализованное как пространство строк или пространство столбиков

③ $Mat_{m\times n}(F)$ над $\boxed{F}$

↳ Частный вариант.

④ $F[x]$ над F

⑤ Все функции $f: M \to F$, где M – произвольное множество, образуют векторное пространство над F с покомпонентными операциями сложения и умножения на λ.

$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$

$(\alpha\cdot f)(x) := \alpha\cdot f(x)$

(Например, все $\mathbb{R}$-значные функции на отрезке $[0,1]$)

Простейшие следствия из аксиом

Ту. V - векторное пространство над полем F. Тогда выполнены следующие свойства.

1). $\vec{0} \in V$ единственный.

2) $-x \in V$ единственен. $\forall x \in V$

3). $\alpha\cdot\vec{0} = \vec{0}$

4). $\alpha\cdot(-x) = -(\alpha\cdot x)$ $\forall \alpha \in F$, $x \in V$.

5). $\vec{0}\cdot x = \vec{0}$ $\forall x \in V$.

6) $(-1)\cdot x = -x$ $\forall x \in V$