Семинар.

Решение задачи 9.

$L \subseteq V$, $\dim V < \infty$

подпростр.

1). Найти $\varphi: V \to W$ т.ч. $\ker \varphi = L$

2). Найти $\psi: V \to V$, т.ч. $\operatorname{Im} \psi = L$.

$$\exists C \subseteq V \Rightarrow V = L \oplus C \qquad v = l + c$$

$$\pi_1 \qquad \pi_2 \qquad \pi_1(v) = l$$

$$\pi_2(v) = c$$

$$V \supseteq L \qquad C$$

2) $\operatorname{Im} \pi_1 = L$

1) $\ker \pi_2 = L$

$\pi_2 = V \to V$

$\pi_1 = V \to V$.

Решение задачи 10.

Найти $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, т.ч. $\ker \varphi = \left\langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\operatorname{Im} \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Мы знаем что матрица перехода будет $Mat_{3\times 4}$.

$A \cdot v_1 = 0 \quad A \cdot v_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ФСР} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow A_{(i)} = \left\langle \begin{matrix} (-2, 1, 0, 1) \\ (-1, 1, 1, 0) \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} (1, 0, 1, -1) \\ (0, 1, 2, 1) \end{matrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Im} \varphi = \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \Rightarrow A^{(j)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow b \\ \leftarrow -2a \\ \leftarrow a + 2b \end{matrix}$$

$\operatorname{rk} A = 2$

$$A^{(i)} \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad A_{(j)} \in \langle a, b \rangle$$

Ответ: да. (Пример ↑).

Задача.

При каких условиях на $U \subseteq V$ и $\dim V = n$ $\exists$ такое л.о. $\varphi: V \to V$, что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi = U$

Решение:

Пусть такое φ: $\underbrace{\dim \ker\varphi}_{\dim U} + \underbrace{\dim \operatorname{Im}\varphi}_{\dim U} = \dim V$

$\Rightarrow \dim V \vdots 2$, $\dim U = \frac{\dim V}{2}$

Это необход. условие для $\exists$ φ.

Пусть $\dim V \vdots 2$. Теперь докажем что $\exists$ такое φ.

$\dim U = \frac{\dim V}{2} = \frac{n}{2}$

$e_1, \dots, e_{\frac{n}{2}}$ – базис в U. $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_{\frac{n}{2}}) = 0$

$e_{\frac{n}{2}+1}, \dots, e_{\frac{n}{2}+1}$ – дополнем его до базиса V $\varphi(e_{\frac{n}{2}+k}) = e_k$ для $k = 1, \dots, \frac{n}{2}$

$$A(\varphi, e, e') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_{\frac{n}{2}}) & \varphi(e_{\frac{n}{2}+1}) \dots & \varphi(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$\varphi(e_{\frac{n}{2}+1}) = e_1$

$\vdots$

$\varphi(e_n) = e_{\frac{n}{2}}$

$\ker\varphi = \langle e_1, \dots, e_{\frac{n}{2}} \rangle = U$

$\operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi(e_{\frac{n}{2}+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle e_1, \dots, e_{\frac{n}{2}} \rangle = U$

Задача

Как подобрать базисы $e \subseteq V$, $f \subseteq W$ т.ч. $A(\varphi, e, f) = \left(\begin{array}{c|c} E & D \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

$i_1, \dots, i_r$ – номера столбцов из максимальной ЛНЗ. подсистемы столбцов A.

Дано: $A'(\varphi, e', f')$.

1) $e_{r+1}, \dots, e_n$ – базис $\ker\varphi$. в координатах.

2). $e_1, \dots, e_r$ дополним его до базиса V $\left(e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i_1\right)$

3.) $\varphi(e_1), \dots, e(e_r)$ в коорд. – $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)}$

4.) $f_{r+1}, \dots, f_m$ дополнить $f_1, \dots, f_r$ до базиса W

кoорд. $\varphi(e_1)$ в f_1

Пример задачи.

$\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ в паре станд. базисов имеет $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Найти пару базисов, в которых $A(\varphi, e, f)$ имеет вид $\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ и вычисл. $A(\varphi, e, f)$.

$n = 4$
$m = 3$
$r = 3$
$i_1 = 1 \quad i_2 = 2$

1). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ФСР $= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \right\}$ — бз $\ker \varphi$.

2). $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → дополним e_3, e_4 до базиса V $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → Мы еще не знаем что получаем?

Зачем нам необходим этот шаг?

3). $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Почему столбцов.

4). Цель: Дополнить f_1, f_2 до базиса W → Путем преобразования столбцов мы приводим матрицу к нижне треугольному виду.

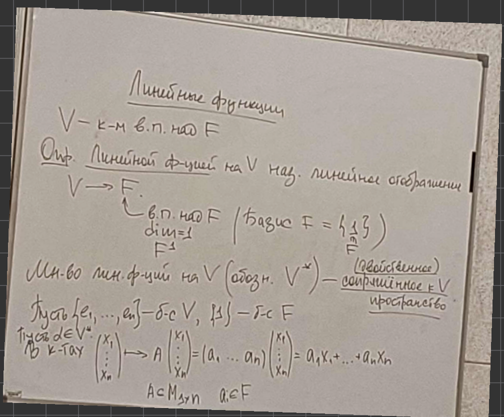
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$\quad f_1 \quad f_2$

Дополняющий вектор будет $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ → Почему? → Дальше нужно упростить столбцы? → Что если он зануляется?

Ответ: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e = (e_1, \ldots, e_4).$

$f = (f_1, \ldots, f_3) = f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$A(\varphi, e, f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Линейные функции

V — к-м в.п. над F

Опр. Линейной ф-цией на V наз. линейное отображение $V \to F$.

в.п. над F $\dim = 1$ F^1 (Базис $F = \{1\}$)

Мн-во лин. ф-ций на V (обозн. V^*) — сопряженное к V (двойственное) пространство

Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — б-с V, $\{1\}$ — б-с F

Пусть $\alpha \in V^*$. В к-тах $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1 \ldots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$

$A \in M_{1 \times n} \quad a_i \in F$

Очередная задача.

(e_1, e_2, e_3) – б-з V $\quad$ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ – двойств к нему б-з V^*

Найти б-з V, для кот. $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3)$ → Мы хотим восстановить некий базис по (ε_i), т.е по базису V^*

$$\underset{(e'_1, e'_2, e'_3)}{\uparrow}$$

→ Наш альтернативный б-з V^*

a) $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$
$\varepsilon'_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$
$\varepsilon'_3 = \varepsilon_3$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \end{pmatrix} (e'_1\ e'_2\ e'_3) = E$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} (e_1\ e_2\ e_3) \cdot C = E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} (e_1\ e_2\ e_3)\ C = E$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$e'_1 = e_1$

$e'_2 = -e_1 + e_2$

$e'_3 = e_3 - e_2$

б) Найти б-з V^* двойств к $(e_1 + e_2 + e_3,\ e_2 + e_3,\ e_4)$.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \end{pmatrix} (e_1 + e_2 + e_3,\ e_2 + e_3,\ e_3) = E$$

$$C \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} (e_1, e_2, e_3)}_{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

Ответ:

$\varepsilon'_1 = \varepsilon_1$
$\varepsilon'_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$
$\varepsilon'_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$