Лекция 4.

Повторение. Метод Гаусса решения СЛУ.

$(A \mid b) \to \text{Э} \to (A' \mid b')$ где A' имеет ступенчатый вид.

Случай 1. В $(A' \mid b')$ $\exists$ строка $(0 \dots 0 \mid *)$, где $* \neq 0$. СЛУ не совместна

Случай 2. В $(A' \mid b')$ нет $(0 \dots 0 \mid *)$, где $* \neq 0$. СЛУ совместна, делим неизвестные на главные и свободные.

Далее мы рассмотрим 2 подслучая.

2.1. Все неизвестные главные. $\Rightarrow$ СЛУ имеет 1 решение.

2.2. $\exists$ хотя одна свободная неизвестная. $\Rightarrow$ Общее решение - выражение главных неизвестных через свободные.

Следствие:

Всякая СЛУ с коэф $\in \mathbb{R}$ либо несовместна, либо имеет ровно одно решение, либо имеет бесконечно много решений.

Определение:

СЛУ называеться однородной (ОСЛУ) если все её правые части равны нулю.

$\to$ Наблюдение. Всегда имеет решение (нулевое решение) $\Rightarrow$ решение куда мы подставим 0, и все занулиться.

Следствие:

Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое реш.

Доказательство: В ступенчатом виде будет хотя-бы 1 свободная неизвестная

Лемма:

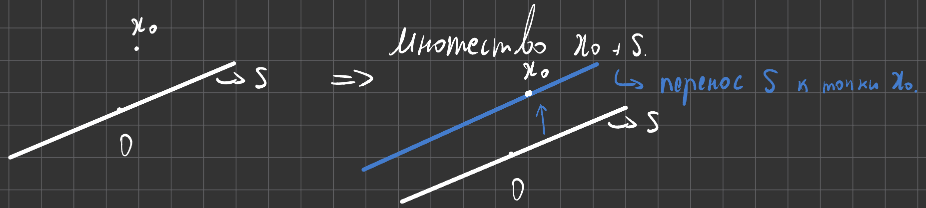
Пусть СЛУ (*) совместна, $L \subseteq \mathbb{R}^n$ её множество решений, $x_0 \in L$ - её частное решение.

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - множество решений ОСЛУ $Ax = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ (**)

Тогда $L = x_0 + S$, где $x_0 + S := \{x_0 + v \mid v \in S\}$

Подробнее:

Пусть R^2



Пример:

как-бы наше $x_0 \in L$

как бы наше S.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&1\\0&1&-2&4\\0&0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$$

мы хотим ввести свободную переменную из третий свободный строки

частное решение ($t = 0$)

Общее решение ОСЛУ $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

Доказательство:

Так как $x_0 \in L$, то имеем $Ax_0 = b$. → x_0 частное решение, а значит оно равно b. (оно решение системы).

В одну сторону:

1) $u \in L \Rightarrow Au = b$. Положим $v := u - x_0$, тогда $u = x_0 + v$.

and $Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow v \in S \Rightarrow L \subseteq x_0 + S$

2) $v \in S \Rightarrow Av = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = b \Rightarrow x_0 + v \in L \Rightarrow x_0 + S \subseteq L$.

→ Зачем? Система диофантовы уравнение.

Утверждение:

В-ся элемент. преобрз. строк $A \in Mat_{m\times n}$ реализуеться при помощи умножения на подходящую "элементарную" матрицу слева. А именно:

$Э_1(i,j,\lambda): A \to U_1(i,j,\lambda)$ где $U_1(i,j,\lambda)\cdot A$, $U_1(i,j,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \lambda \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

→ В этом случае допустим что мы умножаем эту матрицу на любую другую. Первая строка останется неизменной т.к $(1\ 0 \dots 0)$ занулит все кроме первого элемента каждого столбца

$Э_2(i,j): A \to U_2(i,j)$, где $U_2(i,j) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & 1 \ddots 1 & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & 1 \ddots 1 \end{pmatrix}$

тоже →

А это как раз заменяет их местами

↳ можно попробовать построить

$Э_3(i,\lambda): A_\lambda \to U_3(i,\lambda)$, где $U_3(i,\lambda) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ 0 & & & & \ddots 1 \end{pmatrix}$

Замечание: (про столбцы)

Всякое Э. преоб. столбцов для $A \in Mat_{m\times n}$ реализуется при помощи умнож. на подходящ. элементарную матрицу справа.

Элементарное преобр. столбцов в $A \Leftrightarrow$ Э. преобр. строк в A^T.

$\Leftrightarrow A^T \Leftrightarrow U\cdot A^T \Leftrightarrow A \longleftrightarrow A\cdot U^T$

$(U\cdot A^T)^T = (A^T)^T U^T$

Матричные уравнения

Тип I: $\underset{k\times m}{A}\cdot\underset{m\times n}{X} = \underset{k\times n}{B}$.

Тип II: $\underset{m\times n}{X}\cdot\underset{n\times p}{A} = \underset{m\times p}{B}$

A, B - известные

X - неизвестные.

II эквивалентно I : $XA = B \Leftrightarrow A^T\cdot X^T = B^T$

Как решать I?

Заметим что, $AX = B$ равносильно СЛУ $\begin{cases} AX^1 = B^1 \\ AX^2 = B^2 \\ \vdots \\ AX^n = B^n \end{cases}$

→ Будем решать эти СЛУ одновременно записав сразу все столбцы $B^1, \dots, B^n$ справа от черты, получив $(A\,|\,B)$. $\xrightarrow[\text{Э преоб. строк}]{\sim}$ $(A'\,|\,B')$ ступ. вид.

Если $\exists i$: $A' x^{(i)} = B^{(i)}$ несовместны, то решений нет.

Иначе $(A'|B') \underset{\text{э. преоб строк}}{\rightsquigarrow} (A''|B'')$ (уст в.) и исходный набор систем эквивалентен набору

$$\begin{cases} A'' x^{(1)} = B''^{(1)} \\ \vdots \\ A'' x^{(n)} = B''^{(n)} \end{cases}$$

← Остается для каждой СЛУ выписать общие решения.

Опр:

$A \in M_n$, $\Rightarrow B \in M_n$ называется обратной к A, если $A \cdot B = B \cdot E = E$. Обозначается: A^{-1}

Фактыс:

1. Если $A^{-1} \exists$, то она единств.

2. Если $AB = E$, то автоматически $BA = E$ для некой B. $\Rightarrow B = A^{-1}$

Вывод:

A^{-1} это решение матричного уравнения $AX = E$

Перестановки:

Опр:

Перестановка (подстановка) мн-ва (или на множестве) $\{1, 2, \dots, n\}$ - это биэктивное отображение мн-ва $\{1, 2, \dots, n\}$ в себя.

Т.е. есть коробка в которую мы вставляем цифры, и они что-то выплюнут.

$\boxed{1} \to x$ Среди x, y, z появятся

$\boxed{2} \to y$ (в любом порядке)

$\vdots$

$\boxed{n} \to z$ ровно 1 раз

Стандартная запись: $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}$ $i_1, i_2, \dots i_n$ - набор чисел от 1 до n выписанных в произвольном порядке.

S_n: мн-во всех перестановок на мн-ве $\{1, 2, \dots, n\}$

$|S_n| = n!$ → число перестановок

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$$

$$\begin{pmatrix} \overset{4}{4} & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Пу. $\sigma \in S_n$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$

Опр:

Говорят, что не упорядочная пара чисел $\{i, j\}$ образует инверсию в σ, если числа $i - j$ и $\sigma(i) - \sigma(j)$ имеют разный знак

(т.е либо $i < j$, $\sigma(i) > \sigma(j)$, либо $i > j$, $\sigma(i) < \sigma(j)$).

Опр:

Знак перестановки $\sigma \in S_n$ - это величина $\operatorname{sgn}(\sigma) := (-1)^{\langle \text{число инверсий в } \sigma \rangle}$

Замеч.

$\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{1, -1\}$.

Опр:

Перестановка σ называеться чётной, если $\operatorname{sgn} \sigma = 1$, и нечётной если $\operatorname{sgn} \sigma = -1$.

Примеры

Чтобы посмотреть ли он инверсия, смотрим на индексы, если $1_i < 2_i$ сменилась на $2_i < 1_i$, то

$n = 2$

	$1\ 2$	$\boxed{1\ 2}$
σ	$1\ 2$	$\boxed{2\ 1}$
# инверс.	0	1
знак	1	-1
чётные	чётн	нечётн.

Это не инверсия т.к $1_i < 3_i$, так и осталась $2_i < 3_i$.

$n = 3$

	$1\ 2\ 3$	$\boxed{1}\ 2\ \boxed{3}$	$1\ 2\ 3$	$1\ 2\ 3$	$1\ 2\ 3$	$1\ 2\ 3$
σ	$1\ 2\ 3$	$\boxed{2}\ 1\ \boxed{3}$	$2\ 3\ 1$	$3\ 2\ 1$	$3\ 1\ 2$	$1\ 3\ 2$
# инвер	0	1	2	3	2	1
знак	1	-1	1	-1	1	-1

четность по знаку.