Лекция 11.

Напоминание:

Пусть V. Векторное пространство над полем F^n.

Определение:

Векторы $v_1, \dots, v_m \in V$ называются **линейно зависимы** если $\exists$ их не тривиальная линейная комбинация, равна $\vec{0}$. (т.е $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0)$ со свойством $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0}$

- **линейно независимыми** иначе (то есть из $(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0)$)

Критерий линейной зависимости.

Предложение:

Пусть $v_1, \dots, v_m \in V$ и $i \in \{1, \dots, m\}$. Тогда следующие условия эквивалентны.

1) $\exists$ набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in F^m$, где $\alpha_i \neq 0$, со свойством $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0}$

2) $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle$

Доказательство: Замечание, когда есть 2 условия и мы хотим доказать равносильность, то мы должны доказать в обе стороны.

1 $\Rightarrow$ 2 Так как $\alpha_i \neq 0$, то из $(*)$ получаем:

$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1} \cdot v_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \cdot v_i - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \cdot v_{i+1} - \frac{\alpha_m}{\alpha_i} v_m \Rightarrow$$

$$v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle$$

2 $\Rightarrow$ 1 $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \rangle \Rightarrow$

$$v_i = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_m v_m$$

для некоторых $\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_m \in F$.

$$\underline{\beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} - 1 \cdot v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_m v_m} = \vec{0}$$

Не тривиальная линейная комбинация, т.к $-1 \neq 0$. Помним что линейная комбинация тривиальна если $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$.

Следствие: (критерий линейной зависимости).

Вектора $v_1, \dots, v_m \in V$ линейно зависимы $\Leftrightarrow \exists\ i \in \{1, \dots, m\}$, что v_i является линейной комбинацией остальных.

Лемма о линейной зависимости.

Пусть даны два набора векторов $v_1, \dots, v_m$, и $w_1, \dots, w_n$, причем $m < n$ и $\forall i = 1, \dots, n$ $w_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Тогда векторы $w_1, \dots, w_n$ линейно зависимы.

Напоминание: Множество всех векторов из V, представимых в виде линейной комбинации (конечного набора) из S – линейная оболочка множества S.

Док-во.

Имеем $w_1 = a_{11}v_1 + \dots + a_{m1}v_m = (v_1, \dots, v_m)\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

$w_2 = a_{12}v_1 + \dots + a_{m2}v_m = (v_1, \dots, v_m)\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$

$\vdots$

$w_n = a_{mn}v_1 + \dots + a_{mn}v_m = (v_1, \dots, v_m)\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

Тогда имеем $(w_1, \dots, w_n) = (v_1, \dots, v_m) \cdot A$ где $A = (a_{ij}) \in Mat_{m \times n}(F)$ (#)

Вспомним важный факт. Если в ОСЛУ число неизвестных больше числа уравнений, то всегда есть ненулевое решение.

Т.к. $m < n$, то ОСЛУ $Ax = 0$ имеет ненулевое решение, т.е. $\exists \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in F^n \setminus \{\vec{0}\}$ т.что $Az = \vec{0}$

Умножаем обе части равенства (#) на z

Справа, получим:

$$(w_1, \dots, w_n)\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = (v_1, \dots, v_m) \cdot \underbrace{A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ $\underbrace{z_1 w_1 + \dots + z_n w_n = \vec{0}}_{\text{не тривиальная линейная комбинация}}$ $\Rightarrow w_1, \dots, w_n$ линейно зависима.

$\Rightarrow z_1, \dots, z_n \neq 0$. (Не нулевое решение)

Пример 1:

При $k > n$ любые k векторов в F^n линейно зависимы, т.к $F^n = \underbrace{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}_{n \text{ штук}}$

Опр: Система векторов $S \subseteq V$ наз-ся базисом пр-ва V если

1). S лин. независима

2). $\langle S \rangle = V$ (и все порождает, т.е каждый вектор является линейной комбинацией векторов этого набора)

Примеры:

1). $(e_1, \dots, e_n)$ - базис пр-ва F^n

↳ стандартный базис в F^n

Замечание:

Всякий линейно независимый набор векторов является базисом своей линейной оболочки.

Опр.

Векторное пространство называется конечномерным если в нем есть конечный базис, и бесконечномерным иначе.

Замечание:

Далее будем считать, что V конечномерно.

Факт: В общем случае у $\forall$ векторного пространства есть базис.

Предложение:

V конечномерно $\Rightarrow$ Все базисы в V содержат одно и тоже число элементов.

Доказательство.

V конечномерно $\Rightarrow$ в V $\exists$ конечный базис $(e_1, \dots, e_n)$. Пусть $S \subseteq V$ - другой базис в V

Напоминание основной леммы зависимости: ОЛЛЗ

Пусть даны 2 вектора $v_1, \dots, v_m$ и $w_1, \dots, w_n$, $m < n$ и $\forall i = 1, \dots, n$ $w_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Тогда векторы линейно зависимы

Тогда $S \subseteq \underbrace{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}_{V}$ $\rightarrow$ По ОЛЛЗ любые $n+1$ векторов в S лин. зав

↳ $\exists$ не тривиальная линейная комбинация которая равна нулю.

Но S это базис $\Rightarrow$ S линейно независим $\Rightarrow$ $|S| \le n$. Пусть $|S| = m$, $m \le n$.

↳ нет тривиальной линейной комбинации $= \vec{0}$, т.е $\alpha_1, \dots, \alpha_m = \vec{0}$)

Тогда, $e_1, \dots, e_n \in \langle S \rangle$. Снова по ОЛЛЗ получаем $n \le m$.

Итог, $n = m$. ∎

Опр.

Размерностью конечномерного векторного пространства называется конечное число векторов в $\forall$ его базисе.

Примеры:

1) $\dim F^n = n$ (в её стандартном базисе есть n векторов.)

2) $V = \{\vec{0}\}$, $\dim V = 0$, т.к его базис это пустое множество. ($\varnothing$).

Соглашение:

"$\dim V < \infty$" значит что V конечномерно.

Пред:

$\dim V < \infty$; $e_1, \dots, e_n$ – произвольный набор векторов $\Rightarrow$ $e_1, \dots, e_n$ базис $\Leftrightarrow$ $\forall v \in V$ $\exists!$ единственное представление вида $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, где $\alpha_i \in F$.

Доказательство:

($\Rightarrow$) Пу. есть два представления $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \alpha_1' e_1 + \dots + \alpha_n' e_n$, тогда $(\alpha_1 - \alpha_1')e_1 + \dots + (\alpha_n - \alpha_n')e_n = \vec{0}$

Т.к $e_1, \dots, e_n$ – базис.

То они линейно независимы $\Rightarrow \alpha_1 - \alpha_1' = \dots = \alpha_n - \alpha_n' = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_1', \dots, \alpha_n = \alpha_n'$

def $\Rightarrow$ Базис линейно независимый и каждый вектор является линейной комбинацией этого набора.

■

($\Leftarrow$) $\forall v \in V$ $\exists!$ представление $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$\Rightarrow \langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$

При $v = \vec{0}$ получаем что $\exists$ единств. представление.

$\vec{0} = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Но мы знаем что;

$\vec{0} = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_n \underset{\text{(единственности)}}{\Longrightarrow} e_1, \dots, e_n$ линейно независимы.

$\Rightarrow e_1, \dots, e_n$ – базис V ■

Утверждение:

V - векторное пространство над F

Наблюдение:

Если $v, v_1, \dots, v_m \in V$ и $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, то $\langle v, v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

$\geq$ Очев.

$\leq$ Если представить $\alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$, и заменить v на $v_1, \dots, v_m$, то раскрыв скобки получим выражение через $v_1, \dots, v_m$

Предложение:

Из всякой конечной системы векторов, можно выбрать (конеч. подсистему) являющуюся базисом в $\langle S \rangle$.

Доказательство

Пусть $S = \{v_1, \dots, v_m\}$. Индукция по m.

$m = 0 \Rightarrow S = \varnothing \Rightarrow \langle S \rangle = \{\vec{0}\}$, $\varnothing$ - базис в $\langle \varnothing \rangle$.

Рассмотрим еще один случай.

$m = 1$. Если $v_1 \neq \vec{0}$, то v_1 линейно нзв. $\Rightarrow \{v_1\}$ - базис в $\langle v_1 \rangle$

Если $v_1 \neq \vec{0}$, то $\langle v_1 \rangle = \{\vec{0}\}$, в качестве базиса можно взять $\varnothing$.

Шаг индукции.

Пусть доказано для $< m$. Докажем для m.

Если S лин. нзв. $\Rightarrow S$ - базис в $\langle S \rangle$

Если S лин. зав. $\Rightarrow$ $\exists v \in S$, т.что $v \in \langle S \setminus \{v\} \rangle$. Положим, $S' = S \setminus \{v\}$, тогда $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$ и $|S'| < |S| = m$

по критерию линейной зависимости

$\Rightarrow$ в $\langle S' \rangle$ $(= \langle S \rangle)$ можно выбрать конечный базис по предположению индукции

∎

Вектора $v_1, \dots, v_m \in V$ линейно зависимы $\Leftrightarrow \exists$ $i \in \{1, \dots, m\}$, что v_i является линейной комбинацией остальных

Множество всех векторов из V, представимых в виде линейной комбинации (некого кон. набора) векторов из S. называется линейной оболочкой S

Предложение:

$\dim V < \infty$.

$\Rightarrow$ Всякую лин. нзв. систему векторов в V можно дополнить до базиса всего V.

Док-во.

Пусть $v_1,\dots,v_m \in V$ данная лин. нзв. система. Так как $\dim V < \infty \Rightarrow$ в V $\exists$ некий базис $e_1,\dots,e_n$

→ Напоминание, что базис векторного пространства определяется как: подмножество $S \subseteq V$ если
1) S линейно независимо
2) $\langle S \rangle = V$

С замечанием: $\forall$ линейно независимая система векторов базис своей линейной оболочки.

Рассмотрим систему векторов $v_1,\dots,v_m,e_1,\dots,e_n$. Пройдемся по этим векторами слева направо и выбросим из неё те векторы, которые принадлежат лин. оболочке невыброшенных.

→ Берем вектор, смотрим – принадлежит линейной оболочке предыдущих? Да – выкинем, нет – оставляем. ($v_1,\dots,v_m$ лин. незв., а значит откидывать будем то что находиться справа)

При этом: 1). Линейная оболочка всей системы сохраняется и равна $\langle v_1,\dots,v_m, e_1,\dots,e_n\rangle = \langle e_1,\dots,e_n\rangle = V$

равно линейной оболочки исходной системы, $e_1,\dots,e_n$ это базис, а значит что $v_1,\dots,v_m$ мы можем выразить через них (а значит откинуть).

2) $v_1,\dots,v_m$ останутся в системе, т.к они лин. незав.

→ Если мы выбросили некий вектор, то он выражается через предыдущий. Но! Критерий линейной зависимости – говорил что система линейно зависима $\Longleftrightarrow$ какой-то вектор выражается через предыдущий.

3). В новой системе никакой вектор не лежит в линей. оболочке пред.

→ Если бы он лежал то мы бы выкинули его на своем шагу.

Пусть $S = \{v_1,\dots,v_m,e_{i_1},\dots,e_{i_r}\}$ – новая система векторов.

Покажем, что S – искомый базис.

1) $\langle S \rangle = V$ хорошо.

Осталось показать что это система линейна независима.

Пусть $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta_1 e_{i_1} + \dots + \beta_r e_{i_r} = \vec{0}$ при чем $(\alpha_1,\dots,\alpha_m,\beta_1,\dots,\beta_r) \neq (0,\dots,0)$ не тривиальная.

Тогда $\exists$ k, т. что $\beta_k \neq 0$. (т.к иначе $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0}$, но, $v_1,\dots,v_m$ лин. незав.)

Выберем k максимальным с этим св-вом (т.е $\beta_k \neq 0$). Тогда вектор e_{i_k} выражается через предыдущее – противоречие.

☒

Итог: S – базис V

Следствие: Если $\dim V$ лин. нзв., то они автоматически образуют базис в V.