Лекция 17.

Напоминание:

$\varphi: V \to W \Rightarrow \varphi$ однозначно определяется и задаётся образами векторов $e_1, \dots, e_n$; каждый из этих образов однозначно раскладывается по $\mathbb{f}$.

В j-м столбике Mat A записаны коорд. $\varphi(e_j)$ в $\mathbb{f}$.

Матрица A называется матрица линейного отображения φ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

Когда мы выбираем базис в наборе координат мы сопоставляем это V с F^n (строчки изоморфизм), где каждый вектор сопоставляет набор координат.

Предложение:

$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$ и $\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m \in W$

Тогда $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Докажем:

$$\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = \big(\overbrace{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)}^{\text{def} \text{ Матрица лин. отоб.}}\big) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

С другой стороны $\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

Напоминание:

Когда $\exists$ ЛНЗ набор v, и мы берем набор векторов и мы умножаем справо на некий столбец то если у нас второй набор (тех-же) но умножили на некий другой столбец но они равны, то в силу не ЛНЗ, они равны.

Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов.

Обозначение $M_n^0(F) := \{X \in M_n(F) \mid \det X \neq 0\}$

Пусть $\mathbb{e}', \mathbb{f}'$ другие базисы V, W.

$\Rightarrow \mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C \in M_n^0(F)$, $\mathbb{f}' = \mathbb{f} \cdot D \in M_m^0(F)$. Пусть $A' = A(\varphi, \mathbb{e}', \mathbb{f}')$.

Предложение:

$$A' = D^{-1} A C$$

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$$

$$\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n) = \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \cdot C = (f_1, \dots, f_m) \cdot A \cdot C$$

С другой стороны

$$(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) = (f'_1, \dots, f'_m) \cdot A' = (f_1, \dots, f_m) \cdot D \cdot A'.$$

По ЛНЗ $f_1, \dots, f_m \Rightarrow AC = DA' \Rightarrow A' = D^{-1} AC$

V, W - век. пр-ва над F.

$Hom(V, W)$

$\varphi, \psi \in Hom(V, W)$.

Опр

1) Сумма линейных отоб. φ и ψ – отображение $\varphi + \psi$ заданное ф-лой:

$$(\varphi + \psi) := \varphi(v) + \psi(v).$$

2) Произведение л.о φ на скаляр $\lambda \in F$ – отображ $\lambda\varphi$, заданное:

$$(\lambda\varphi)(v) := \lambda \cdot \varphi(v)$$

Упражнение:

$\varphi + \psi$, $\lambda \cdot \varphi$ – лин. отображения $V \to W$.

Через def лин отображения.

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + (y)$.
- $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$.

Упражнение. Проверка аксиом векторных пространств

$Hom(V, W)$ является вект. пространством отн. введенных выше операций.

→ В этом векторном пространстве нулевое отображение будет 0

Предложение:

e - базис V, f - базис W

$A_\varphi,\ A_\psi,\ A_{\varphi+\psi},\ A_{\lambda\cdot\varphi}$ – матрицы л.о. $\varphi, \psi, \varphi+\psi, \lambda\cdot\varphi$ в паре базисов e и f.

$\Rightarrow$ 1. $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$

2) $A_{\lambda\cdot\varphi} = \lambda\cdot A_\varphi$

Док.

$$\big((\varphi+\psi)(e_1),\dots,(\varphi+\psi)(e_n)\big) = \big(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)\big) + \big(\psi(e_1),\dots,\psi(e_n)\big) = (f_1,\dots,f_m)\cdot A_\varphi + (f_1,\dots,f_m)\cdot A_\psi = (f_1,\dots,f_m)(A_\varphi + A_\psi)$$

С другой стороны $\overset{def.}{\Rightarrow}$

$$\big((\varphi+\psi)(e_1),\dots,(\varphi+\psi)(e_n)\big) = (f_1,\dots,f_m)\cdot A_{\varphi+\psi}$$

Заново пользуемся утверждением что — когда $\exists$ ЛНЗ набор v, который мы умножаем на столбец, и он равен такому же набору (v) умноженному на другой столбец, то эти столбцы равны.

Т.к $f_1,\dots,f_m$ ЛНЗ $\to A_{\varphi+\psi} = (A_\varphi + A_\psi)$.

2). Аналогично.
В одну сторону:

$$\big((\varphi\lambda)(e_1),\dots,(\varphi\lambda)(e_n)\big) = \lambda\big(\varphi e_1,\dots,\varphi(e_n)\big) = \lambda\cdot(f_1,\dots,f_m)\cdot A_\varphi = (f_1,\dots,f_m)\cdot\lambda A_\varphi$$

В другую сторону:

$$\big((\varphi\lambda)(e_1),\dots,(\varphi\lambda)(e_n)\big) = \big((\lambda f_1),\dots,(\lambda f_m)\big)\cdot A_\varphi = \lambda\cdot(f_1,\dots,f_m)\cdot A_\varphi = (f_1,\dots,f_m)\cdot\lambda A_\varphi \quad \blacksquare$$

Следствие.

Отображение. $HOM(V,W) \to M_{m\times n}(F)$.

$\varphi \to A(\varphi, e, f)$ является изоморфизмом векторных пр.-в.

Док.

Уже знаем что это отображение биективно $\to$ Т.е. При заданных e, f, каждое отображение $\exists!$ определяеться матрицей, и каждая Mat относиться $\exists!$ лин.отб.

Предложение:

$\vdash A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$, $A_{\lambda\cdot\varphi} = \lambda\cdot A_\varphi$

Из предложения следует что отображение линейно $\blacksquare$

Следствие.

$\dim \operatorname{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W = m \cdot n$.

$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$ — цепочка линейных отображений.

$\varphi \circ \psi$

$g = (g_1, \dots, g_k)$ - базис U

$e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V

$f = (f_1, \dots, f_m)$ - базис W

$A_\varphi = A(\varphi, e, f)$.

$A_\psi = A(\psi, g, e)$.

$A_{\varphi \circ \psi} = A(\varphi \circ \psi, g, f)$.

Пред. $A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi \circ A_\psi$.

Док. $(\psi(g_1), \dots, \psi(g_k)) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A_\psi$

$((\varphi \circ \psi)(g_1), \dots, (\varphi \circ \psi)(g_k)) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \cdot A_\psi$

$= (f_1, \dots, f_m) \cdot A_\varphi \cdot A_\psi$

С другой стороны:

$((\varphi \circ \psi)(g_1), \dots, (\varphi \circ \psi)(g_k)) = (f_1, \dots, f_m) A_{\varphi \circ \psi}$

Заново. пользуемся тем что т.к $f_1, \dots, f_m$ ЛНЗ, $A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$. ■

Опр. Ядро линейного отображения.

Ядро линейного отображения φ — $\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = \vec{0}\} \subseteq V$

Опр. Образ линейного отображения

Образ линейного отображ. φ — $\operatorname{Im} \varphi := \varphi(V) = \{w \in W \mid \exists v \in V : w = \varphi(v)\} \subseteq W$

Пример:

Пусть $\Delta : \mathbb{R}[x]_{\le n} \to \mathbb{R}[x]_{\le n}$, $f \to f'$.

$\ker \Delta = \{f \mid f = const\}$.

$\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}[x]_{\le n-1}$

Простейшие свойства ядра и образа

Пред.

$\ker \varphi$ является подпространством в V.

Док.

1). $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W = \vec{0}_V \Rightarrow \vec{0}_V \in \operatorname{Ker}\varphi$.

2). $v_1, v_2 \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(v_1+v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \vec{0} + \vec{0} \to \vec{0}$

3) $v \in \ker\varphi,\ \lambda \in F \Rightarrow \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda\cdot\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda v \in \ker\varphi$.

Пред.

$\operatorname{Im}\varphi \subseteq W$.

Док

1). $\vec{0}_W = \varphi(\vec{0}_V) \in \operatorname{Im}\varphi$.

2). $w_1, w_2 \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V: w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow \varphi(w_1 + w_2) \in \operatorname{Im}\varphi$.

3) $w \in \operatorname{Im}\varphi,\ \lambda \in F. \Rightarrow \exists v \in V : w = \varphi(v) \Rightarrow \lambda w = \lambda\cdot\varphi(v) \Rightarrow \lambda w = \varphi(\lambda v) = \varphi(\lambda v) \in \operatorname{Im}\varphi$ ■

Предложение:

a) φ инъективно $\Leftrightarrow \ker\varphi = \{\vec{0}\}$.

b) φ сюръективно $\Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi = W$ → когда образ совпадает со всем вторым множеством

Док. a) $\Rightarrow$

Это правда, т.к $\vec{0}$ переходит в $\vec{0}$.

a) $\Leftarrow$

При φ переходит в 0, ⇒ ∈ ker φ.

$v_1, v_2 \in V$ и $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \Rightarrow \vec{0} = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = \varphi(v_1 - v_2) \Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker\varphi = \{\vec{0}\}$.

$\Rightarrow v_1 - v_2 = \vec{0} \Rightarrow v_1 = v_2$

2) Очев.

■

Следствие:

$$\varphi \text{ - изоморфизм} \Leftrightarrow \begin{cases} \ker\varphi = \{\vec{0}\} \\ \operatorname{Im}\varphi = W \end{cases}$$

Предл.

$\varphi: V \to W$

$U \subseteq V$, $(e_1, \dots, e_k)$ - базис U

$\Rightarrow \varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$ В частности, $\dim\varphi(U) \leq \dim U$ и $\dim(\operatorname{Im}\varphi) \leq \dim V$

Док.

$u \in U \Rightarrow u = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k \Rightarrow \varphi(u) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_k\varphi(e_k) \in \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle \Rightarrow \varphi(U) \subseteq \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle \supseteq$ верно т.к $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \in \varphi(U)$, и $\varphi(U)$ подпространство в W ■

Пусть теперь $(e_1, \dots, e_n)$ – базис V, $f = (f_1, \dots, f_m)$ – б.с W.

$A = A(\varphi, e, f)$

Теорема: $rk\, A = \dim Im\, \varphi$.

Док-во.

Образ порождается образом б.с векторов $Im\, \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle \Rightarrow \dim Im\, \varphi = rk\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$.

$\forall j$ коорд-ы вектора $\varphi(e_j)$ в б.с. f записаны в j-м столбце Mat A.

$\Rightarrow \alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 A^1 + \dots + \alpha_n A^n = 0 \Rightarrow rk\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\} = rk\, A$. ∎

Замечание:

$rk\, A$ не зависит от выборе б.с. e, f.

Опр Ранг линейного отображения φ.

Число $rk\, A = \dim Im\, \varphi$ называется рангом φ. Обоз: $rk\, \varphi$.

Следствие:

Ранг Mat, не меняется при умножении её слева и справа на невырожденную ($\det \neq 0$) Mat.

Док-во.

$A \in Mat_{m \times n}$, $C \in M_n^0(F)$, $D \in M_m^0(F) \Rightarrow A$ и $D^{-1}AC$ – матрицы лин. отобр. в разных б.с $\Rightarrow rk\, A = rk\,(D^{-1}AC)$.