Лекция 6

Напоминание

Опр: Определитель.

$A \in M_n$ (и только для M_n) $\Rightarrow \det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ (I)

Еще обозначения: $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Свойство. $\det A = \det A^T$

Свойство 0

Если в A есть строка (или столбец) из нулей, то $\det A = 0$.

Док:

В силу свойства T достаточно доказать для строк.

Пусть $A_{(i)} = (0 \ldots 0)$.

Тогда $\forall \sigma \in S_n$ $a_{i,\sigma(i)} = 0 \Rightarrow$ в (I) каждое слагаемое равно $0 \Rightarrow$ (I) $= 0$.

Свойство 1

Если все элементы некоторой строки (столбца) в A умножить на один и тот же λ, то $\det A$ умножается на λ.

Док:

Свойство $\det A = \det A^T \Rightarrow$ достаточно доказать для строк.

Пусть $A_{(i)} \rightsquigarrow \lambda \cdot A_{(i)}$

Тогда $\forall \sigma \in S_n$ имеем $a_{i,\sigma(i)} \rightsquigarrow \lambda \cdot a_{i,\sigma(i)}$ → Один элемент умножен на λ, а остальные не меняются

$\Rightarrow$ каждое слагаемое в (*) умножается на λ

$\Rightarrow \det A$ умножился на λ ▨

Свойство 2:

Пу. $A_{(i)} = \underbrace{A^1_{(i)} + A^2_{(i)}}_{\text{сумма 2 строк}}$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} i + \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A''_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} i$$

Аналогично если $A^{(j)} = A_1^{(j)} + A_2^{(j)}$, то

$$\det A = \det\left(A^{(1)} \dots A_1^{(j)} \dots A^{n}\right) + \det\left(A^{1} \dots A_2^{j} \dots A^{n}\right)$$

Пример

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+d_1 & c_2+d_2 & c_3+d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Доказательство:

Свойство 7 $\Rightarrow$ достаточно доказать для строк

Имеем: $A_{(i)} = A'_{(i)} + A^2_{(i)}$, пусть

$A'_{(i)} = (a'_{i1}, \dots, a'_{in})$, $A''_{(i)} = (a''_{i1}, \dots, a''_{in})$.

Тогда $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij} \quad \forall j$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}) a_{1,\sigma(1)}, \dots, a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}) a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot \overbrace{(a'_{i,\sigma(i)} + a''_{i,\sigma(i)})}^{i} \cdot \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a'_{(i),\sigma(i)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} + \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a''_{i,\sigma(i)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}\right)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}\right) + \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a''_{i,\sigma(i)} \cdot \dots a_{n,\sigma(n)})$$

$$= \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A''_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Свойство 3.

Если в A $\exists$ две одинаковые строки (столбца) то $\det A = 0$.

Док: Свойство 7 $\Rightarrow$ доказать только для строк можно.

Пу. $A(i) = A(j)$, можно считать что $i<j$

Тогда $a_{ik} = a_{jk}$ $\quad \forall k = 1,\dots,n$

Рассмотрим $\tau = \tau_{ij}$ $\forall \sigma \in S_n$ $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = -\operatorname{sgn}\sigma$ — Этот момент не очен понятен.

→ транспозиция которая двигает элемент $i \to j$, $j \to i$.

$\Rightarrow \sigma\tau = \sigma$. Кроме того, $\tau^2 = id$ Тогда все множества S_n разбивается на не упорядочные пары $\{\sigma, \sigma\tau\}$.

→ тождественная перестановка $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

Покажем что слагаемые в (I), соот-щие σ и $\sigma\tau$, имеют разные знаки.

→ Для σ: $(\operatorname{sgn}\sigma)\cdot a_{1,\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{i,\sigma(i)}\cdot\ldots\cdot a_{j,\sigma(j)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)} = (\#)$

→ Для $\sigma\tau$ $(\operatorname{sgn}\sigma\tau)\cdot a_{1,\sigma\tau(1)}\cdot\ldots\cdot a_{i,\sigma\tau(i)}\cdot\ldots\cdot a_{j,\sigma\tau(j)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma\tau(n)}$

$\sigma(\tau(1)) = \sigma(1)$

$$= -1\cdot a_{1,\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot \underbrace{a_{i,\sigma(j)}}_{\substack{\shortparallel\\ a_{j,\sigma(j)}}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{a_{j,\sigma(i)}}_{\substack{\shortparallel\\ a_{i,\sigma(i)}}}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)} = -(\#).$$

→ Остается понять что происходит с i и j

→ т.к строки равны

Значит, $\det A = 0$ $\boxed{\#}$

Свойство 4: Что будет с элементарными преобразованиями

Если к i-й строке (столбцу) прибавить j-ю строку (столбец), умножить на λ, то $\det A$ не изменится.

Док:

Свойство 7 $\Rightarrow$ достаточно проверить только для строк.

Пу. $A(i) \rightsquigarrow A(i) + \lambda\cdot A(j)$.

Свойство 11 — Первое свойство, вынесем его. — одинаковые

$$\det\begin{pmatrix} A(1)\\ \vdots \\ A(i)+\lambda A(j) \\ \vdots \\ A(n)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A(1)\\ \vdots \\ A(i) \\ \vdots \\ A_n\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A(1)\\ \vdots \\ \lambda\cdot A(j) \\ \vdots \\ A(j) \\ \vdots \\ A(n)\end{pmatrix} = \det A + \lambda\det\begin{pmatrix} A(1)\\ \vdots \\ A(j) \\ \vdots \\ A(j) \\ \vdots \\ A(n)\end{pmatrix}$$

Пользуемся свойством 3

$= \det A + \lambda\cdot 0 = \det A$ $\boxed{\#}$

Умножение на скаляр мы уже раньше разобрали

Свойство 5:

При перестановки любых двух строк (столбцов) det меняет знак.

Док:

Свой-7 $\Rightarrow$ Необходимо доказать только для строк.

Пу. поменяли $A(i)$ и $A(j)$, т.к. $i<j$

Имеем, $\det \begin{pmatrix} \vdots \\ A(j) \\ \vdots \\ A(i) \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \end{matrix}$ позиция $\underset{\text{св-с 4}}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ A(j) \\ \vdots \\ A(i)+A(j) \\ \vdots \end{pmatrix} \underset{(4)}{\overset{a_i(A_j, A_i, -1)}{=}} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ -A(i) \\ \vdots \\ A(i)+A(j) \\ \vdots \end{pmatrix} \underset{4}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ -A(i) \\ \vdots \\ A(j) \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ A(i) \\ \vdots \\ A(j) \\ \vdots \end{pmatrix}$

Результат, $= -\det A$. ∎

Опр:

$A \in M_n$ называеться **верхнетреугольной**, если $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$,
нижнетреугольной, если $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$.

Свойство 6.

Если A верхнетреугольно, или нижнетреугольно то $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Док-во

Своб-7 $\Rightarrow$ достаточно доказать для верхнетреугольный (верхне треугольный$)^T$ = ниж. треуг.

Выесним какие слагаемые $\neq 0$ в (I)

Пу. $\operatorname{sgn}\sigma \, a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} \neq 0$.

Тогда $a_{n,\sigma(n)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(n) = n$ иначе будет ноль, строка n почти все нули.

$a_{n-1,\sigma(n-1)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(n-1) \in \{n-1, n\}$ Но n уже занято $\Rightarrow \sigma(n-1) = n-1$. $\Rightarrow \sigma = id$.

Продолжая в том-же духе $\sigma(k) = k \ \forall k = 1, \ldots, n$

Итог, в (I) ненулевым может быть только одно слагаемое, именно $\sigma = id$.

$$\det = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Замечание:

Если $A \in M_n$ имеет ступенчатый вид, то она верхнетреугольник

Алгоритм вычисления опр. при помощи

След. 1) $\det \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$

2) $\det E = 1$

Вычисление опр.-лей при помощи Э. преб.

$Э_1(i, j, \lambda) \rightsquigarrow \det$ не меняеться

$Э_2(i, j) \rightsquigarrow \det$ меняет знак

$Э_3(i, \lambda) \rightsquigarrow \det$ умножаеться на λ.

Алгоритм

A, используя Э. преб. строк $\rightsquigarrow$ ступенчатому виду, а затем $\det$ легко считается.

Определитель углов нулей

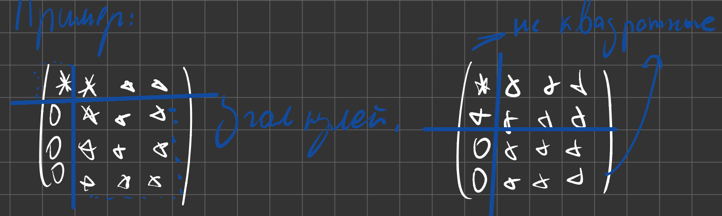
Предложение (определитель с углом нулей)

Пу. $A \in M_n$ имеет один из двух блочных видов. 1) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} k & e \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} P & Q \\ O & R \end{pmatrix} \end{array}$ 2) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} k & e \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} P & O \\ Q & R \end{pmatrix} \end{array}$ → R и R должны быть квадратными блоками

блок нулей.

Тогда $\det A = \det P \cdot \det R$

Пример:



Док:

Сб г ⇒ Доказать зам. для 1.