Лекция 19.

$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$

$y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$

→ зафиксируем, и далее раскрываем по линейности

$$B(x,y) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, B\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j \underbrace{B(e_i, e_j)}_{b_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i b_{ij} y_j = (x_1 \ldots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \end{pmatrix}$$

Итог: $\boxed{B(x,y) = (x_1 \ldots x_n)\, B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (*)}$ Формула вычисления билинейной формы в координатах

Предложение:

Пусть e - произвольный базис в V. Тогда

1). Всякая б.ф B на V однозначно определяется матрицей $B(B, e)$.

2). Отображ: $B \mapsto B(B, e)$. является биекцией между всеми б.ф. на V и квадр. Mat порядка n над F.

Доко:

1). Следует из формулы вычисления б.ф в коорд. (Если мы знаем значения на векторах базиса, мы знаем $\forall$ значения)

2). Пусть B произ $Mat_n(F)$. Зададим отображение $B: V \times V \to F$ по формуле $(x_1 \ldots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Тогда это б.ф. на V.

Остается проверить что матрицы B правильны. Проверим:

$$B(e_i, e_j) = (0 \ldots \underset{i}{1} \ldots 0)\, B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_j = b_{ij}$$

Остается доказать $\exists!$..., что следует из 1

Как матрица б.ф меняется при замене базиса?

Пу. $\mathbb{e}=(e_1,\dots,e_n)$, $\mathbb{e}'=(e_1',\dots,e_n')$ - два базиса в V, $\mathbb{e}'=\mathbb{e}\cdot C$, $C\in M_n^0(F)$.

$\mathbb{B}: V\times V\to F$. - б.ф.

$B=B(\mathbb{B},\mathbb{e})$, $B'=B(\mathbb{B},\mathbb{e}')$.

Предложение:

$$\boxed{B'=C^{T}BC.}$$

Док-во

$x=x_1e_1+\dots+x_ne_n=x_1'e_1'+\dots+x_n'e_n$

$y=y_1e_1+\dots+y_ne_n=y_1'e_1'+\dots+y_n'e_n'$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=C\cdot\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=C\cdot\begin{pmatrix}y_1'\\ \vdots\\ y_n'\end{pmatrix}.$$

$\forall x,y\in V$. Имеем:

$$\mathbb{B}(x,y)=(x_1\dots x_n)\,B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(x_1'\dots x_n')\,C^{T}BC\begin{pmatrix}y_1'\\ \vdots\\ y_n'\end{pmatrix}\to (1)$$

В другую сторону:

$$=(x_1'\dots x_n')\,B\begin{pmatrix}y_1'\\ \vdots\\ y_n'\end{pmatrix}\to (2)$$

(1) и (2) верно $\forall x_1',\dots,x_n',y_1',\dots,y_n'\in F$.

В силу $\mathbb{B}(e_i,e_j)=(0\dots \underset{i}{1}\dots 0)\,B\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_j=b_{ij}$. $\Rightarrow B'=C^{T}BC$ ∎

Чтобы подсчитать ij элемент достаточно подставить $(0\dots1\dots0)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ что даст нам ij элемент в (1) и (2).

След.

Величина $\operatorname{rk} B(\mathbb{B}, e)$ не зависит от выбора базиса e. При умножении на невырожд. Mat rk не меняется.

Опр. **Ранг б.ф $\mathbb{B}$.**

Величина $\operatorname{rk} \mathbb{B} := \operatorname{rk} B(\mathbb{B}, e)$.

Опр. **Симметричная б.ф.**

Бил. ф. $B: V \times V \to F$ называется симметричной, если $B(x,y) = B(y,x)$ $\forall x,y \in V$

Сформулируем как проверить по Mat если б.ф симметрична.

$\mathbb{T}$ e - б.с V.

Предложение

Б.ф. $\mathbb{B}$ симметрична $\iff$ $\mathbb{B} := B(\mathbb{B}, e)$ симметрична ($B^T = B$).

Док.

$(\Rightarrow)$ $b_{ji} = B(e_j, e_i) = B(e_i, e_j) = b_{ij}$

$(\Leftarrow)$ $\forall$ $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$.

$$B(y,x) = \underbrace{(y_1 \ldots y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Mat } 1\times 1} = \left[(y_1 \ldots y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^T = (x_1 \ldots x_n) \underset{\substack{\shortparallel \\ B}}{B^T} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \ldots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = B(x,y)$$

$\to$ её можно

T. без изменений

$\blacksquare$

Теорема:

Пу. в F выполнено $1+1 \neq 0$. $(2 \neq 0)$.

Пример $(1+1=0)$ 2 элем $(1,2)$ с операциями по модулю.

Тогда $\forall$ симметричной б.ф $B: V \times V \to F$ $\exists$ базис e' в V, т. что $\text{Mat } B(\mathbb{B}, e')$ диагональна.

Док.

Фиксируем какой б.с e - V, пусть $B = B(\mathbb{B}, e)$. Тогда достаточно показать что $\exists C \in M_n^{\circ}(F)$, т.что $\text{Mat } B' := C^T B C$ диагон.

Напоминание: Элемент Mat

$$B \mapsto A = UB \quad \Rightarrow \quad A^T = B^T \cdot U^T$$

одно эл.
преобраз строк.

Пу. $B \mapsto UBU^T \leftarrow$ симметричное эл. преоб.

Утверждается что если у нас $\exists$ Mat симметр. б.ф в e, и мы выполнили некое симм. эл. преоб. то она все еще будет Mat б.ф в e'.

Алгоритм Симметричного Гаусса.

Шаг 1. Если $B^{(1)} = 0$ $(\Rightarrow B_{(1)} = 0)$ то Mat $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B_1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Шаг 2.

Иначе.

$Э_i$ - элем. преоб. строк. $Э_i'$ - элем преоб столб. $\hat{Э}_i$ - симмитричное преоб.

Случай 1:

$b_{11} \neq 0$. Тогда выполняем

$$\hat{Э}_1\left(2, 1, -\frac{b_{21}}{b_{11}}\right), \ldots, \hat{Э}_1\left(n, 1, -\frac{b_{n1}}{b_{11}}\right).$$ и получаем $B_{new} = \left(\begin{array}{c|c} b_{11} & 0 \\ \hline 0 & B_1 \end{array}\right)$

Случай 2: $b_{11} = 0$ но $\exists i : b_{ii} \neq 0$.

Применяем $\hat{Э}_2(1, i)$, получаем $b_{11} \neq 0$. $\Rightarrow$ Случай 1.

Случай 3. $b_{ii} = 0$ $\forall i$, $\exists j \neq 1$ т.что $b_{ij} \neq 0$.

Применим $\hat{Э}_1(1, j, 1)$, Получим. $b_{11} = 2 \cdot b_{1j} \neq 0$. $\Rightarrow$ случай 1.

Шаг 2. B нов. $= \left(\begin{array}{c|c} b_{11} & 0 \\ \hline 0 & B_1 \end{array}\right)$ применяем Шаг 1 к B_1.

В итоге получаем цепочку эл. преоб. $U_1, \ldots, U_n$ т.что $U_k \ldots U_2 U_1 B U_1^T U_2^T \ldots U_k^T = B'$ - диаг.

Если. $C = U_1, \ldots, U_k$, $C^T = U_1^T, \ldots, U_k^T$.

Замечание: C можно вычислить C.

Запишем $(B \mid E)$ будем $Э_i$ $_k(B \mid E)$, $Э_i'$ $_k(B)$.

Замечание:

Б.с. e', в котором $B(\mathbb{B}, e')$ имеет диаг. опред. неоднозначно