Лекция 8 — Поля.

Опр.
Поле — это некое множество (F), на котором заданы две операции.

- $(a,b) \to a+b$ ("сложение")
- $(a,b) \to a \cdot b$ ("умножение").

Аксиомы поля.

1. коммутативность суммы $a+b=b+a \quad \forall a,b \in F$
2. ассоциативность сложения $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in F$
3. нулевой элемент $\exists 0 \in F : a+0 = a \quad \forall a \in F$
4. противоположный элем. $\forall a \ \exists -a : a+(-a)=0$.
5. дистрибутивность $c(a+b) = ac+bc \quad \forall a,b,c \in F$.
6. коммутативность умножения. $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a,b \in F$.
7. ассоциативность умножения $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,b,c \in F$.
8. единичный элем. $\forall a \in F \ \exists 1 \neq 0 : a \cdot 1 = a$.
9. обратный элем. $\forall a \neq 0 \in F \ \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$

* множество $\{0\}$ не является полем.

Примеры полей:

- $\mathbb{Q}$ — рациональные числа.
- $\mathbb{R}$ — действительные числа.
- $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ — поле вычетов по модулю 2.

Цель. Построить поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Неформ. $\mathbb{C}$ – это "наименьшее" поле с свойствами:

1. $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}$
2. уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет решение, т.е. $\exists i \in \mathbb{C} : i^2 = -1$.

Формальная конструкция поля $\mathbb{C}$

Положим $\mathbb{C} := \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ и определим операции сложения и умножения следующим образом:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

Поясним откуда это берёться? Неформально.

можно представить i как дополнительная переменная с условием

$$(a, b) \longleftrightarrow a + bi \mid i^2 = -1$$

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \longleftrightarrow a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$i^2 = -1$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) \longleftrightarrow (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 \boxed{i^2}$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$$

Формула умножения.

Док-о

1. коммутативность $a + b = b + a$.
   $(a_1, b_1) + (a_2, b_2)$
2. ассоциативность $(a + b) + c = a + (b + c)$
   $((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) + (a_3, b_3))$
3. нулевой элемент – это $(0,0)$.
4. $-(a,b) = (-a, -b)$;
5. $(a_1, b_1)((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) =$

Док-о очевидны. через преобразования.

6. $(a_1, b_1)(a_2, b_2)$
7. $(a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3)) =$
8. единичный элемент $(1, 0)$
   $(a, b)(1, 0)$
9. обратный элемент к $(a, b) \neq (0,0)$ –
   $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$.

$\Rightarrow$ Можно как упражнение.

Проверим свойства.

1. Отождествим $a \in \mathbb{R}$ с $(a,0) \in \mathbb{C}$, тогда:

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0)$$

$$(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 a_2, 0)$$

$\Longrightarrow \mathbb{R}$ отождествляется с подмножеством $\{(a,0)\} \subseteq \mathbb{C}$

2. Положим $i = (0,1)$ тогда:

$$i^2 = (0,1)(0,1) = \underline{(0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)} = (-1, 0) = -1$$

Комплексные числа в алгебраической форме

Опр:

Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ называется его <u>алгебраической формой</u>.

a: $\operatorname{Re} z$ — <u>действительная часть</u>

b: $\operatorname{Im} z$ — <u>мнимая часть</u>.

Числа bi $(b \in \mathbb{R})$ называются <u>чисто мнимыми</u>. $\longrightarrow$ Все корни из отрицательных чисел и 0.

Опр.

Число $\bar{z} := a - bi$ называется <u>комплексно сопряженный</u> к числу $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

Отображение $z \to \bar{z}$ называется комплексным сопряжением.

Замечание. $\bar{\bar{z}} = z$ для всех $z \in \mathbb{C}$

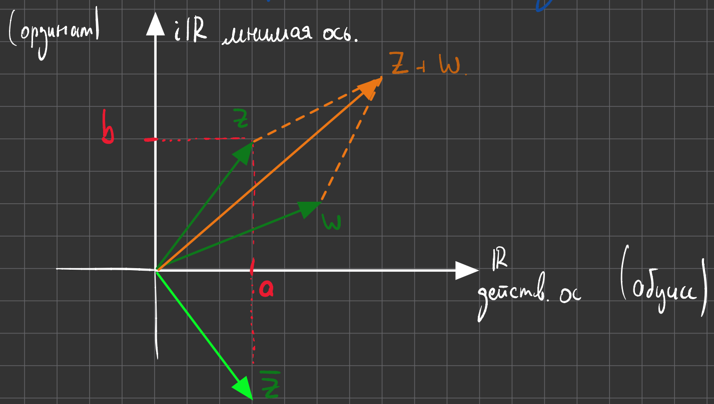
Лемма: $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

Док-о.

$$\overline{z + w} = \overline{(a+bi) + (c+di)} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a+c) - (b+d)i = (a-bi) + (c-di) = \bar{z} + \bar{w};$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(a+bi)\ a+bi)} = \overline{ac - bd + (ad+cd)i} = (ac - bd) - (ad + cd)i = (a-bi)(c-di) = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Геометрическая модель поля $\mathbb{C}$.



$\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ → точка либо вектор.

$a + bi \leftrightarrow (a, b)$

$z + w \leftrightarrow$ обычное сложение векторов

комплекс сопр $\leftrightarrow$ отражение относительно оси абсцисс (Ox)

Опр:

Модуль комплексного числа $z = a + bi$ называеться величина $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$. (Геом. это длина вектора).

Свойства → $|z| \in \mathbb{R}$

1. $|z| \geq 0$, причем $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|z + w| \leq |z| + |w|$ → Можно доказать алгебраически как упражнение.
3. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
4. $|zw| = |z| \cdot |w|$ $\quad \left(|z \cdot w|^2 = (z \cdot w)(\overline{zw}) = z\,w \cdot \bar{z}\,\bar{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 \right)$

Замечание.

Из 3) следует, что $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

т.е $(a + bi)^{-1} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$

! На $\mathbb{C}$ неопред. > или <. Мы не можем сказать что одно $\mathbb{C}$ число больше другого.

Пусть $z = a + bi \neq 0 \Rightarrow$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, i \right)}$$

Эти компоненты имеют важное свойство. Их сумма квадратов равна 1. ⇒ 2 данных числа sin и cos одного некого угла.

$= |z| \cdot \left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|} i \right)$, причем $\left(\frac{a}{|z|} \right)^2 + \left(\frac{b}{|z|} \right)^2 = 1$

Опр

Аргументом $z = a + bi \neq 0$ наз-ся такое $\varphi \in \mathbb{R}$, что $\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$, $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$.

↳ является углом между осью абцисс (x) и соотв. вектором.

Замечание

1. Если $z = 0$, то в качестве аргумента можно взять любое число.
2. Если $z \neq 0$, то аргумент определен однозначно с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ → Тригонометрической форма $\mathbb{C}$ числа.

Опр.

$\operatorname{Arg} z$ - мно-во всех аргументов данного $z \in \mathbb{C}$

$\arg z$ - единственное значение арг.-та, который лежит в $[0; 2\pi)$

$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi\mathbb{Z}$

Итог: $\forall z \in \mathbb{C} \quad z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) \mid \varphi \in \operatorname{Arg} z$.

Опр: Если $z \in \mathbb{C}$ и $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, то представление $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называеться тригонометрической формы z.

Предложение:

Если $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = \underbrace{|z_1| \cdot |z_2|}_{|z_1 \cdot z_2|} \cdot (\underbrace{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Школьная триг.

Док-о $z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + \underbrace{(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) i}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2) i} \right]$

$$= |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos\varphi(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right)$$

Следствие 1:

Пу. z_1, z_2 таковы, как в предложении, и $z_1 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Следствие 2: (формула Муавра).

Пу. $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} \quad z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$

Док. $n > 0$ - очев.

$n = 0 \quad z^0 = 1 = |z|^0 (\underset{1}{\cos(0\varphi)} + i\underset{0}{\sin(0\varphi)})$

$n < 0 \quad z^n = \left(\frac{1}{|z|}\right)^n = \left[\frac{1}{|z|} \cdot \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) \right]^{[n]}$