

Лекция 15.

Напоминание.

V - линейное пр-во над телом F .

$U, W \subseteq V$ - подпр-ва V .

$$U \cap W, U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Теорема: $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$

$U_1, \dots, U_k \subseteq V$ - пр-ва. Их обр. подпр-ва b .

Одн:

Сумма подпр-в U_1, \dots, U_k - это обр. $U_1, \dots, U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}$.

Упрощение: $U_1 + \dots + U_k$

1. $\vec{0}$ принадлежит.

2. Сумма из k эл-в.

3. Трансг-жение на скаляр трансг-зии.

Задачи:

$$\underbrace{\dim(U_1 + \dots + U_k)}_{\leq} \dim U_1 + \dots + \dim U_k.$$

Если мы будем брать комб. U_i , то это будет порождать обобщение тех эл-в, которые

А какое получим?

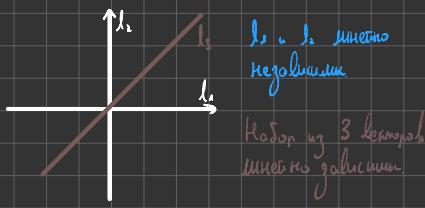
Одн.

Подпр-в U_1, \dots, U_k линейно независимы, если $\forall u_i \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ из $u_1 + \dots + u_k = \vec{0}$ следит $u_1 = \dots = u_k = \vec{0}$.

Пример:

Если $\dim U_i = 1$ $\forall i$ и $U_i = \langle u_i \rangle$, то U_1, \dots, U_k лин. независимы $\Leftrightarrow u_1, \dots, u_k$ лин. независимы.

Планар \mathbb{R}^2



Теорема.

Аның таралығынан жариялана:

- 1) U_1, \dots, U_k ми. изб.
- 2) $\forall u \in U_1 + \dots + U_k$ едисимд. способом преобразование в бүлде $u = u_1 + \dots + u_k$, згэ $u_i \in U_i \quad \forall i$.

3) Есеп e_1, \dots, e_n -дайыр $\mathbb{R}^{U_1, \dots, U_k}$ -даидык $\mathbb{R}^{U_1, \dots, U_k}$ -даидык $\mathbb{R}^{U_1, \dots, U_k}$.

4) $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ Объединение независимості \longrightarrow Пример:

$$5) \forall i=1, \dots, k \quad U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = \emptyset$$

$$e_1 = \{v_1, v_2\}$$

$$e_2 = \{v_2, v_3\}$$

$\rightarrow e_1 \cup e_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Доказо.

Доказам әмбеттегі:

① \Rightarrow ②

Тұ $U_1 + \dots + U_k = U'_1 + \dots + U'_k$ згэ $u_i, u'_i \in U_i$. Тогда $(u_1 - u'_1) + \dots + (u_k - u'_k) = \vec{0} \Rightarrow u_1 = u'_1 = \dots = u_k = u'_k = \vec{0} \Rightarrow u_i = u'_i \quad \forall i$.

② \Rightarrow ③

Тұ e_i -даидык \mathbb{R}^{U_i}

$\forall u \in U_1 + \dots + U_k$ едисимд. обраозы преобразование в бүлде $u = u_1 + \dots + u_k$, згэ $u_i \in U_i \quad \forall i$, U_i едисимд. обраозы преобразование в бүлде
мишениң көзбенекиң менород из e_i :

$\Rightarrow U$ едисимд. обраозы преобразование в бүлде ми. изб. менород из $e_1 \cup \dots \cup e_n$.

def

$\Rightarrow e_1 \cup \dots \cup e_n$ - даидык $\mathbb{R}^{U_1 + \dots + U_k}$.

У нас бар практика есептесе \exists менород из көзбенекиң менород преобразование едисимд. способом преобразование как мишиң көзбенекиң, то
этот менород дайыр даидык.

③ \Rightarrow ④

• Рекурренттесе это чиын менород \mathbb{R} даидык.

• Нам жағы қына мы менород даидык (e_1, \dots, e_n) , и их объединение $(e_1 \cup \dots \cup e_n)$ -а ғанаң чиын менород сүйишилгенде.

(4) \Rightarrow (5).

Одночлене: $\hat{U}_i = U_i + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_n$.

$$\dim(U_i \cap \hat{U}_i) = \dim U_i + \dim \hat{U}_i - \dim(U_i + \hat{U}_i) \Rightarrow \text{т.к. коммутативна операция сложн.}$$

Следовательно.

$$= \dim U_i + \dim(U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_n) - \dim(U_1 + \dots + U_n)$$

$$= \dim U_i + \dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_n - \dim U_1 - \dots - \dim U_n = 0.$$

$$\Rightarrow \dim(U_i \cap \hat{U}_i) = 0 \Rightarrow U_i \cap \hat{U}_i = \{\vec{0}\}. \Rightarrow \text{Т.к. независимо вибрана подпространство } 0 \subset \{\vec{0}\}.$$

(3) \Rightarrow (1)

Т.к. $u_1 + \dots + u_n = \vec{0}$ есть нек-ное $u_i \in U_1, \dots, u_n \in U_n$.

$$\forall i = 1, \dots, k \text{ имеем } u_i = \underbrace{-u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_n}_{\in U_i} \rightarrow u_i \in U_i \cap \hat{U}_i$$

$$\text{т.к. } U_i \cap \hat{U}_i = \{\vec{0}\} \rightarrow u_i = \vec{0}$$



Легенда:

Для т.к. $U, W \subseteq V$ мн. нез. $\Leftrightarrow U \cap W = \{\vec{0}\}$.

Оп. $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.

Задача: V представлена в виде прямой суммы k подпространств U_1, \dots, U_k , если

1). $V = U_1 + \dots + U_k$.

2). U_1, \dots, U_k мн. нез.

Пример:

$\dim U_i = 1 \forall i, U_i = \langle e_i \rangle$

$V = \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle \Leftrightarrow (e_1, \dots, e_n) - \text{базис } V$.

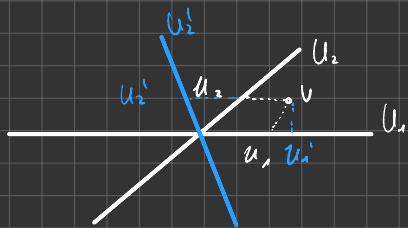
Задача: $\dim V = 2$

$$1) V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = U_1 + U_2 \\ U_1 \cap U_2 = \vec{0} \end{cases}$$

2) $V = U_1 \oplus U_2 \Rightarrow \forall v \in V$ единичн. орт из независим. б. базе $v = u_1 + u_2, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$.

U_1 называется прямой линией и её подпространством U_2 .

U_2 проецирует U_1 .



$$V = U_1 \oplus U_2$$

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$V = U_1 + U_2$$

$$V = U_1' + U_2'$$

Линейные отображения.

T, V, W - векторные пространства над полем F .

Def.

Онодропение: $g: V \rightarrow W$ называется линейным если:

- 1) $g(v_1 + v_2) = g(v_1) + g(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
- 2) $g(\lambda v) = \lambda \cdot g(v) \quad \forall v \in V, \lambda \in F$

Доказательство: $g(\lambda v_1 + \lambda v_2) = \lambda \cdot g(v_1 + v_2) = \lambda \cdot (g(v_1) + g(v_2)) = \lambda g(v_1) + \lambda g(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V, \lambda \in F$.

① Пример.

$g: V \rightarrow W$ - нулевое отображение.

$$g(v) = \vec{0} \quad \forall v$$

② $\eta: V \rightarrow V$ - тождественное отображение. (\exists это самое интересное отображение)

$\eta(v) = v \quad \forall v \in V$, однозначность как $\eta(v) = \text{id}$.

$$1) \quad g(v_1 + v_2) = g(v_1) + g(v_2)$$

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad \forall \lambda \in F$$

$$2) \quad g(\lambda v) = \lambda \cdot g(v)$$

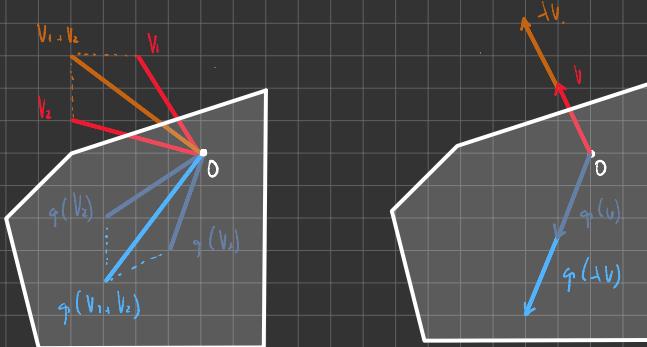
③ $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Тогда он же го вектора вектора начата координат.



$$1) \quad g(v_1 + v_2) = g(v_1) + g(v_2)$$

$$2) \quad g(\lambda v) = \lambda \cdot g(v).$$

(3) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 - O$ поморфизм проекции на плоскость Oxy .



Всегда ли можно сделать что данное отображение изоморфизмом и линейным? Или надо заняться доказательством о том что оно линейное и изоморфизмом?

(4) $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ - пространство многочленов от x степени $\leq n$ с коэф из \mathbb{R} .

$$\dim(\mathbb{R}[x]_{\leq n}) = n+1 \quad \text{т.к. надо учесть свободные члены}$$

$\Delta: f(x) \mapsto f'(x)$ - отображение дифференцирования.

$$1) (f + g)' = f' + g'$$

$$2) (\lambda f)' = \lambda \cdot f'. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

1) и 2) линейное отображение $\mathbb{R}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$

(5) V - линейное пространство над F , $\dim V = n$.

(e_1, \dots, e_n) - базис.

Напоминание: Базис $S \subseteq V$ если

1) $S \neq \emptyset$ (\exists непривидимый линейной комбинации кроме 0).

2) $\langle S \rangle = V$ (Линейное обобщение это линейеское линейное пространство V , предсматривающее в себе линейные комбинации любых элементов S)
 (т.е. есть есть она линейное)

$$V = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Идея:

Каждый вектор этого линейного пространства получается по формуле (x_1, \dots, x_n)

Поэтому линейный отображение это набор координат к этому вектору.

\Rightarrow Такое отображение называется формулой координат в данном векторе

Поморфизм отображение, которое дает взаимно однозначное соответствие между координатами в этом векторе.