Лекция 5. 23.01.2025.

Опр.

Функция (индивидуального спроса) — UMP при $\exists!$ решении.

Опр.

Функции Кобба-Дугласа — принимают вид $U(\cdot)=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$, $\alpha,\beta>0$. (или ему аналогичные: $\ln(x_1^{\alpha}x_2^{\beta})$, $\alpha\ln x_1+\beta\ln x_2$)

Опр.

Предпочтения Кобба-Дугласа — предпочтениями описанными функцией Кобба-Дугласа. Стандартный пример рациональных предпочтений описывается именно ими.

Замечание:

Мы можем, всегда воспользоваться следующим преоб.

$U(\cdot)=x_1^{c}x_2^{d} \Rightarrow x_1^{\frac{c}{c+d}}\,x_2^{\frac{c}{c+d}} \Rightarrow$ П.у. $a=\frac{c}{c+d} \Rightarrow x_1^{a}x_2^{1-a}$ $\Rightarrow$ $\boxed{U(\cdot)=x_1^{c}x_2^{d}=x_1^{a}x_2^{1-a}\ \Big|\ a=\frac{c}{c+d}}$

Время ещё больше разных примеров. → Тут будем решать через Лагранж (Второй метод решения UMP который мы встречали)

Опр.

Лагранжиан (L) — $L=U(x_1,x_2)-\lambda(p_1x_1+p_2x_2-m)$

Связь L и оптимального решения.

Оптимальное решение должно следовать:

1. $\frac{\delta L}{\delta x_1}=0$ 2. $\frac{\delta L}{\delta x_2}=0$ 3. $\frac{\delta L}{\delta \lambda}=p_1x_1^*+p_2x_2^*-m=0$.

К этому необходимо добавить:

Утв

$$\boxed{\frac{\frac{\delta L}{\delta x_1}}{\frac{\delta L}{\delta x_2}}=\frac{p_1}{p_2}}$$

В общем мы вернулись к двум уравнениям которые нам необходимо решить подставлениями

→ Оно упоминается в лекции но на примерах не используется (пока) но лучше знать мне кажется.

Пример

Потребитель тратит денежный доход m на блага 1 и 2, которые покупает по ценам p_1 и p_2 за единицу. Выведите спрос на 1 и 2 благо, если его ф-ция полезности имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, $\alpha, \beta > 0$.

m, p_1, p_2 , $U(\cdot) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, $\alpha, \beta > 0$.

→ Предпочтения стандартные →

рациональные, монотонные, непрерывные, выпуклые (полные и транзитивные)

Это гипербола

1. → Ответ некая const! Т.е. ∃ и можем такое утверждать.

$const = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \iff x_2 = \left(\frac{const}{x_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

$\boxed{p_1 x_1 + p_2 x_2 = m}$

2. Находим MU_1, MU_2 для $\frac{MU_1}{MU_2} = MRS_{12}$.

$$\frac{\alpha x_1^{\cancel{\alpha-1}} \cancel{x_2^{\beta}}}{\beta \cancel{x_1^{\alpha}} x_2^{\cancel{\beta-1}}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{\alpha x_1^{-1}}{\beta x_2^{-1}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \alpha x_2 = \frac{p_1}{p_2} \cdot \beta x_1 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{p_1 \cdot \beta x_1}{\alpha p_2}}$$

3.

$$p_1 x_1 + \cancel{p_2}\left(\frac{p_1 \cdot x_1 \cdot \beta}{\alpha \cancel{p_2}}\right) = m \Rightarrow p_1 x_1 + \frac{x_1 p_1 \cdot \beta}{\alpha} = m \Rightarrow x_1 + \frac{x_1 \cancel{p_1} \cdot \beta}{\alpha \cancel{p_1}} = \frac{m}{p_1} \Rightarrow x_1 \Big(\underbrace{1 + \frac{\beta}{\alpha}}_{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}\Big) = \frac{m}{p_1} \Rightarrow \boxed{x_1^* = \frac{m}{p_1} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

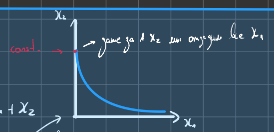
4.

$$x_2 = \frac{\cancel{p_1} \cdot \beta}{p_2 \cancel{\alpha}} \cdot \frac{m}{\cancel{p_1}} \cdot \frac{\cancel{\alpha}}{\alpha+\beta} \Rightarrow \boxed{x_2^* = \frac{\beta}{p_2} \cdot \frac{m}{\alpha+\beta}}$$

Можно заметить что угловых решений нет т.к $U\left(0; \frac{m}{p_2}\right) = U\left(\frac{m}{p_1}; 0\right) = 0$ а в предельном бюдж. множестве можно получить $U > 0$

→ Для дополнения, можно сравнить → Потом.

Важно →



Представим $const = 8\sqrt{x_1} + x_2$

Её график примет вот такой вид.

Почему? → $x_1 = 0$ → $8 = x_2$

Что это нам дает? → Мы можем забить хуй на MU_2.

Почему? → MU_1 формально становится MRS потому что мы наше соотношение становится $\frac{MU_1}{1}$ т.к за 1 x_2 мы готовы отдать все x_2.

Теперь идет пример с угловым решением. (Неколину блять)

$(*) \leftarrow$

Пример

Потребитель тратит денежный доход m на блага 1 и 2, которые покупает по ценам p_1 и p_2 за единицу. Выведите спрос на 1 и 2 благо, если его ф-ция полезности имеет вид $U(x_1, x_2) = 8\sqrt{x_1} + x_2$.

Почему оно говорит что угловое решение

m, p_1, p_2 $U(\cdot) = 8\sqrt{x_1} + x_2$. Ну это $8x_1^{1/2} + x_2$, а это стандартные предпочтения. $const = 8\sqrt{x_1} + x_2$

(квази-линейная функция).

1. $\boxed{p_1 x_1 + p_2 x_2 = m}$.

2. Стандартные предпочтения, а значит $\frac{MU_1}{MU_2} = |MRS_{12}|$ $MU_1 = 8 \cdot \frac{1}{2} x_1^{-1/2} + x_2 = \left(4x_1^{-1/2} + x_2\right)'_{x_1} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{x_1}}}$

3. Утверждаем что у нас угловое решение $(*)$. Посылаем нахуй MU_2. $\Rightarrow MRS = MU_1$

$$\frac{4}{\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow 4p_2 = \sqrt{x_1} p_1 \Rightarrow x_1 p_1^2 = 16 p_2^2 \Rightarrow \boxed{x_1^* = \frac{16 p_2^2}{p_1^2}}$$

4. Подставляем $\cancel{p_1} \cdot \frac{16 p_2^2}{\cancel{p_1^2}} + p_2 x_2 = m \Rightarrow \frac{16 p_2^2}{p_1} + p_2 x_2 = m \Rightarrow x_2^* = \left(m - \frac{16 p_2^2}{p_1}\right) \cdot \frac{1}{p_2} \Rightarrow \boxed{x_2^* = \frac{m}{p_2} - \frac{16 p_2}{p_1}}$

5. Анализ угловых решений.

- Набор $\left(0, \frac{m}{p_2}\right) \to x_1^* = 0 \to \frac{4}{\sqrt{0}} \leq \frac{x_1}{x_2}$ → Это невозможно!
- Набор $\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$. будет решением → Подставляем: $\frac{4}{\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2} \to \frac{4}{\sqrt{\frac{m}{p_1}}} \geq \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{4\sqrt{p_1}}{\sqrt{m}} \geq \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow 4\sqrt{p_1} \cdot p_2 \geq \sqrt{m} \cdot p_1 \Rightarrow 16 p_1 \cdot p_2^2 \geq m \cdot p_1^2$

$$\Rightarrow m \geq \frac{16 p_1 \cdot p_2^2}{p_1^2}$$

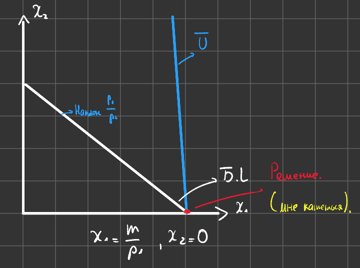
Пример

Потребитель тратит денежный доход m на блага 1 и 2, которые покупает по ценам p_1 и p_2 за единицу. Выведите спрос на 1 и 2 благо, если его ф-ция полезности имеет вид $U(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$, $\alpha, \beta > 0$.

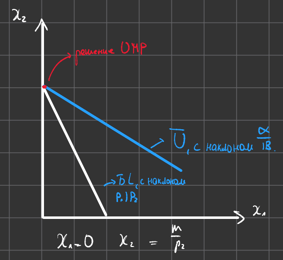
Зададим задачу: $\max\ \alpha x_1 + \beta x_2 \quad x_1; x_2 \geq 0 \quad s.t\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$

У этой задачи $\exists$ 3 возможных решений:

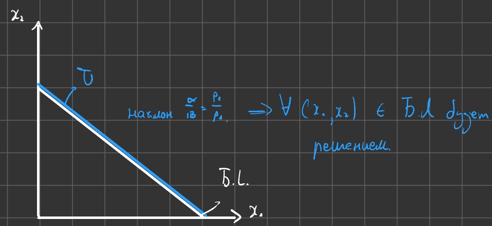
① При $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2}$



② При $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2}$



③ При $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2}$



Ответ:

$$X_1^*(p_1, p_2, m) = \begin{cases} m/p_1, & if\ \frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2} \\ a \in [0; \frac{m}{p_1}], & if\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2} \\ 0, & if\ \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

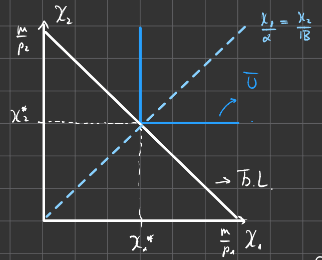
$$X_2^*(p_1, p_2, m) = \begin{cases} 0, & if\ \frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2} \\ \frac{m - p_1 a}{p_2}, & if\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2} \\ \frac{m}{p_2} & if\ \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

Пример

Потребитель тратит денежный доход m на блага 1 и 2, которые покупает по ценам p_1 и p_2 за единицу. Выведите спрос на 1 и 2 благо, если его ф-ция полезности имеет вид $U(x_1, x_2) = min\left\{\frac{x_1}{\alpha}; \frac{x_2}{\beta}\right\}$, $\alpha, \beta > 0$.

$\max\ U(\cdot) \quad s.t\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m.$

При $\forall$ положительных p_1, p_2, m решение этой задачи:



Следовательно (x_1^*, x_2^*) должно удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} \boxed{\frac{x_1}{\alpha} = \frac{x_2}{\beta}} & (1) \\ \boxed{p_1 x_1 + p_2 x_2 = m} & (2) \end{cases}$$

① $\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{x_1 \beta}{\alpha}}$ ③ а это мы подставим в ②

② $\Rightarrow p_1 x_1 + p_2\left(\frac{x_1 \beta}{\alpha}\right) = m \Rightarrow x_1\left(p_1 + p_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right) = m \Rightarrow x_1\left(\frac{p_1 \alpha + p_2 \beta}{\alpha}\right) = m \Rightarrow x_1 = \frac{m}{\left(\frac{p_1 \alpha + p_2 \beta}{\alpha}\right)} \Rightarrow \boxed{x_1^* = \frac{m \cdot \alpha}{p_1 \alpha + p_2 \beta}}$

③ Остается подставить, $x_2 = \frac{x_1^* \beta}{\alpha} \Rightarrow x_2 = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{m \cdot \alpha}{p_1 \alpha + p_2 \beta} \Rightarrow x_2^* = \frac{\beta m \cdot \cancel{\alpha}}{p_1 \alpha^2 + p_2 \beta \cancel{\alpha}} \Rightarrow \boxed{x_2^* = \frac{\beta m}{p_1 \alpha + p_2 \beta}}$