Семинар 06.02.2025

$V \to$ вп. над F.

Опр. **Билинейная форма (б.ф.)**

Отображение $V \times V \to F$, линейно по каждому из двух аргументов т.е.

$$\mathbb{B}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \mathbb{B}(x_1, y) + \alpha_2 \mathbb{B}(x_2, y).$$

$$\mathbb{B}(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 \mathbb{B}(x, y_1) + \beta_2 \mathbb{B}(x, y_2).$$

Пример.

1. $\mathbb{B}: F^n \times F^n \to F$

$$\mathbb{B}: (x, y) = x^T y = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

2. $\mathbb{B}: F^2 \times F^2 \to F$

$$\mathbb{B}(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

В координатах явно $\mathbb{B}: V \times V \to F$ б.ф.

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ - б.с V

Матрица б.ф $\mathbb{B}$ в б.с $-$ $B = (\mathbb{B}(e_i, e_j))_{ij} = B(\mathbb{B}, \mathbb{e})$.

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$

$$\mathbb{B}(x, y) = \mathbb{B}(x_1 e_1 + \dots, y_1 e_1 + \dots) = (x_1, \dots, x_n)\, B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \boxed{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j}$$

Примеры.

1. $B_{ij} = \mathbb{B}(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ← стандартные базисы.

$$(0 \dots 1 \dots 0)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j = \delta_{ij} \quad \to B(\mathbb{B}, \mathbb{e}) = E$$

2. $\mathbb{B}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ $\quad B(\mathbb{B}, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Позиция b_{12}, с коэф.

Позиция b_{21}, с коэф. -1

Задача

f - б.ф в некот б-се задана Mat F. Найти $f(x,y)$ где $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $x = (1,0,3)^T$, $y = (-1,2,-4)^T$

Решение: $f(x,y) = \underbrace{(1\ 0\ 3)}_{x^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}_{y} = -43$

Задача

Найти Mat б.ф. $B(f,g) = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$ на в.п $V = \mathbb{R}[x]_{\le 2}$ в б.с. $(\underset{e_1}{1}, \underset{e_2}{x}, \underset{e_3}{x^2})$

Решение:

B это $M_{3\times 3} \to \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$b_{ij} = B(e_i, e_j) = \int_0^1 e_i e_j\, dx = \int_0^1 x^{i-1} x^{j-1}\, dx = \int_0^1 x^{i+j-2} dx = \left.\frac{x^{i+j-1}}{i+j-1}\right|_0^1 = \frac{1}{i+j-1}$

$x^a x^b$

Как меняеться Mat б.ф. при замене базиса.

Утв. e, e' - б.с в V, $C = C_{e\to e'}$, т.е $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) C$

$B = B(\mathcal{B}, e)$, $\mathcal{B}' = B(\mathcal{B}, e')$

Тогда $\boxed{B' = C^T B C}$

Задача

Найти Mat б.ф f в б.с. e', если f задана Mat F в б.с e, где:

$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{aligned} e'_1 &= e_1 - e_2 \\ e'_2 &= e_1 + e_3 \\ e'_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$

Решение:

$F' = B(f, e') = C^T F C$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$C_{e\to e'}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix} = F' \leftarrow$ Ответ.

Утв. B симметрична $\iff$ $B = B(\mathbb{B}, \underset{\text{любой б.с } V}{e}) = B^T$
$\hookrightarrow B = B^T \to B$ — симметрическая

Задача.
Сущ. ли б.с, в которой Mat б.ф $x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_{22} + 3x_2y_3 - 3x_3y_2$ диагональна?

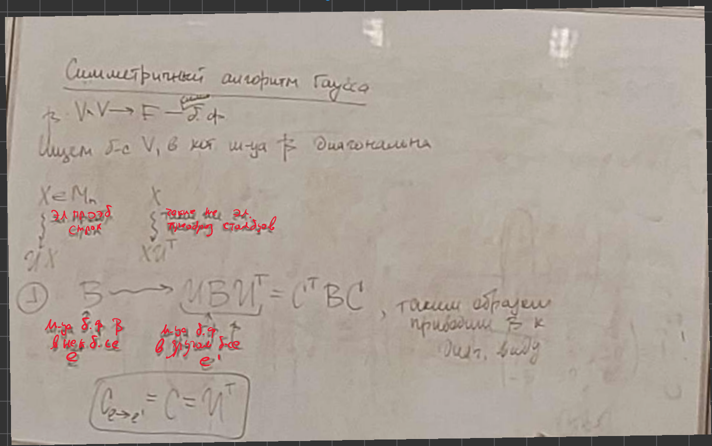
Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mat б.ф в исходном б.с.

Если $\exists$ б.с e', т.ч $B(\mathbb{B}, e')$ диагон., то $B(\mathbb{B}, e')$ - симметр. Mat, и тогда $\mathbb{B}$ — симм., но из этого следовало бы, что $B = B^T$ в любом б-се. Это неверно для исходного б-са.

Симметричный алгоритм Гаусса.



Пример:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(1) \\ \\ \end{matrix} \to \begin{matrix} -(1) & & \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(1) \end{matrix} \to \begin{matrix} & & -(1) \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2(2) \end{matrix} \to \begin{matrix} & & -2(2) \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

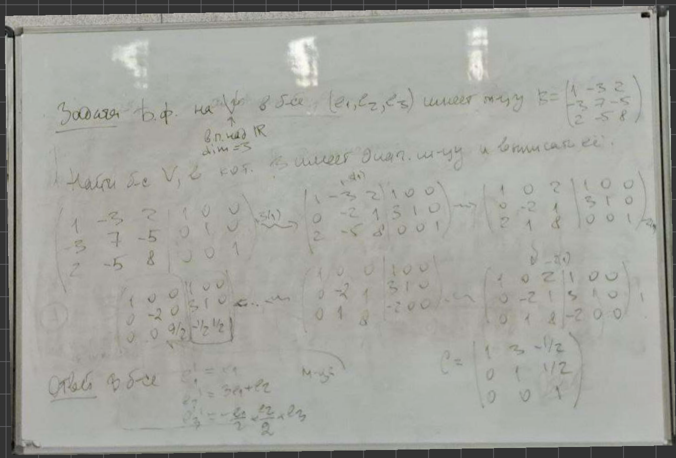
$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Можно находить матрицу перехода $(B \mid E) \xrightarrow[\text{Гаусса}]{\text{симм ал.}} (\underset{\text{диагон. матр}}{D} \mid P)$.

- Эл. пр. строк $\to$ ко всей матрице.
- Эл пр столбц $\to$ только к B.

Задача:


Задача б.ф. на V в б-се (e1, e2, e3) имеет м-цу B =
в.п. над R
dim = 3
Найти б-с V, в кот. B имеет диаг. м-цу и выписать её.
Ответ в б-се
e1' = e1
e2' = 3e1 + e2
C =