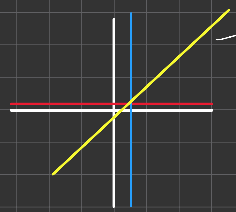
Семинар 23.01.2025.

Даниэль Фабиан Фретре Серёгина БЭАД-244

Задача: Верно ли, что если $U_1, U_2, U_3 \leq V$, $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$ то они линейно независимы?

Ответ: В общем случае неверно. Как контр-пример можно взять 3 различных прямых в $\mathbb{R}^2$.



Её можно выразить как комбинации векторов и

Линейные отображения векторных пространств.

Пусть V и W — в.п. над F, $\varphi: V \to W$ — отображение.

φ — линейно если $\forall \alpha, \beta \in F$, $a, b \in V$: $\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha \varphi(a) + \beta \varphi(b)$.

Отображение — изоморфизм если оно линейно и биективно.

Утв.

$\forall V$ над F размерности n изоморфно F^n. Именно, если $(e_1, \dots, e_n)$ — выбранный базис, то отображение

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ будет искомым изоморфизмом.

Утв.

Всякое $\varphi: V \to W$ однозначно определяется образами векторов фиксированного базиса в V, причем эти образы могут быть произвольными.

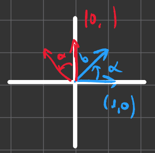
Матрица линейного отображения.

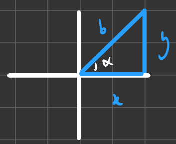
$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \Rightarrow (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m) \cdot A.$$

Получается что в её j-м столбце стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.

Задача: Пусть $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поворот на угол α, $\mathbb{e} = \mathbb{f} = (e_1, e_2)$ — стандартный базис. Найти $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

Решение: Образ вектора e_1 при таком повороте имеет в $f=e$ координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, т.е





$$\frac{x}{1} = \cos\alpha \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \leftarrow \text{Ответ.}$$

$$\frac{y}{1} = \sin\alpha$$

Задача:

Проумножить $A \cdot A$ и заметить что

Как связаны координаты вектора и его образа

$\varphi: V \to W$ линейно над F, $v \in V = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. $\qquad e_1, \ldots, e_n$ – бз. V

$W \ni \varphi(v) = y_1 f_1 + \ldots + y_m f_m$. $\qquad f_1, \ldots, f_m$ – бз. W.

$$\boxed{\underset{m\times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}} = \underset{m\times n}{A} \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}} \Rightarrow \text{В координатах } \varphi \text{ - это умножение на Mat (слева).}$$

Что происходит при замене базисов.

$\varphi: V \to$ линейно.

Матрица перехода e к e'

$e = (e_1, \ldots, e_n)$, e' - баз. V $\qquad e' = e \cdot C$

$f = (f_1, \ldots, f_m)$, f' - баз. W $\qquad f' = f \cdot D$. ——— f к f'

Задача.

$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\quad W = \mathbb{R}^2$

$\varphi: V \to W$ линейное отображения в базисах $e = \{x - x^2, x^2, 1+2x^2\}$ бз. V

$f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ - бз. W

задано матрицей $A = A(\varphi, e, f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Найти $\varphi(1 + 2x + 3x^2)$.

Решение

Способ ①

Работать с e и f найти коорд. $1+2x+3x^2$ в e.

$e = \{x - x^2, x^2, 1+2x^2\}$ $x - x^2$ имеет координат $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

C Mat - перехода от $(1, x, x^2)$ к e.

C: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to V = 2e_1 + 3e_2 + e_3.$

$\varphi(v) = y_1 f_1 + y_2 f_2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\text{Координ. } \varphi(v) \text{ в базисе } f} = A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{координ. } v \text{ в базисе } e} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ → Это координаты $\varphi(v)$ в f.

$2f_1 + f_2$

$\varphi(v) = (f_1 \ f_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Это ответ.

Способ ②.

Использовать "удобный" базис

Теперь $e = \{1, x, x^2\}$, $f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Переобозначим! $e' = \{x - x^2, x^2, 1+2x^2\}$, $f' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Ядро и образ линейного отображения

$\varphi: V \to W$ лин. отобр. век. простр. над F.

$\ker\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = \underset{W}{0}\} \subseteq V.$ $\longrightarrow$ Ядро φ.

Цель: Уметь находить базисы $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$.

① Базис $\ker\varphi$.

Важно отметить, что в координатах φ устроено как $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, тогда $\ker\varphi$ — это бз. из V с коорд. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, т.ч. $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$.

Тогда базис $\ker\varphi$ — базисы с координатами из ФСР для $Ax = 0$.

② Базиса $\operatorname{Im}\varphi$

Путь ① 1. Найти б-с $\ker\varphi$ $g_1, \dots, g_k$.

2. Дополнить $g_1, \dots,$

Важно отметить как условия проверки: $\boxed{\dim U = n - \operatorname{rk} A.}$

Задача: $V, W \leq \mathbb{R}^n$

$\dim V = 4$, $\dim W = 3$.

$\varphi: V \to W$

$e = (e_1, \dots, e_4)$ — бз в V $\quad f = (f_1, \dots, f_3)$ — бз в W

$A = A(\varphi, e, f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти бз в $\ker\varphi$ и бз $\operatorname{Im}\varphi$.

Альтернативные

$$\left[\begin{array}{l} \varphi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}(x)_{\leq 2} \\ e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}). \\ f = (1, x, x^2) \end{array}\right.$$

Решение:

$$\varphi(e_1) = (f_1, f_2, f_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f_1 + 2f_2 + f_3$$

j-й столбец A - это координаты $\varphi(e_j)$ в базисе f.

$\varphi(e_2) = 2f_1 + f_2 + f_3$; $\varphi(e_3) = 3f_2 + f_3$;

$\varphi(e_4) = f_1 - f_2$.