Линейная Алгебра и Геометрия 20.02.2025.

Закон инерции

Для кв.ф. Q. над R кол-во "1", "-1", "0" в нор.в. не зависит от выбора б-са, в кот. Q принимает норм. вид.

→ Выводы кв.ф.

- $Q > 0$ (Q положит. опр.) если $\forall x \neq 0$ $Q(x) > 0$
- $Q < 0$ (Q отрицатель. опр.) если $\forall x \neq 0$ $Q(x) < 0$.
- $Q \geq 0$ (Q неположительно опр.) если $\forall x \neq 0$ $Q(x) \geq 0$.
- $Q \leq 0$ (Q неотрицательно опр.) если $\forall x \neq 0$ $Q(x) \leq 0$.
- Q неопр. $\exists x$ $Q(x) > 0$, $\exists y$ $Q(y) < 0$.

Задача:

Опр. норм. вид. (и тип.) кв.ф Q в зависимости от параметра λ.

$$Q = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\delta_1 = 5 \\ &\delta_2 = 1 \\ &\delta_3 = 5\lambda + 2 + 2 - 1 - 5 - 4\lambda = \lambda - 2 \end{aligned}$$

Канонический вид. $Q = 5y_1^2 + \frac{1}{5}y_2^2 + (\lambda - 2)y_3^2$

Нормальный вид. :=

1). $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ $(\lambda - 2 > 0)$. $\to Q > 0$

2) $z_1^2 + z_2^2$ $(\lambda - 2 = 0)$. $\to Q \geq 0$

3). $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ $(\lambda - 2 < 0)$. $\to Q$ неопр.

Задача дня.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\delta_1 = 4 \\ &\delta_2 = 0. \end{aligned}$$ → Метод Якоби применить нельзя.

Используя симм. преоб. соотв. замене координат $x_2 \leftrightarrow x_3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\delta_1 = 4 \\ &\delta_2 = 4\lambda - 1 \\ &\delta_3 = -1 \end{aligned}$$

Если $\lambda \neq \frac{1}{4}$, т. что канон. вид. $4y_1^2 + \frac{4\lambda - 1}{4}y_2^2 + \frac{-1}{4\lambda - 1}y_3^2$

1). $\lambda > \frac{1}{4}$ (тогда $4\lambda - 1 > 0$). 2). $\lambda < \frac{1}{4}$ (т.е $4\lambda - 1 < 0$)

Норм. в. $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ $\xrightarrow{\quad}$ $z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$

Один и тот же нор. в.

Если $\lambda = \frac{1}{4}$, то можно:

1). Использовать симм эл. преоб. $\Rightarrow \delta_1, \delta_2 \neq 0$ а дальше метод Якоби.

2). Симм. Гаусс.

3). метод Лагранжа.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\to Q(e_1)$, $\to Q(e_2)$, $\to Q(e_3)$

соотв. кв. ф. Q в б-с $(e_1, \dots, e_n)$.

$$\left.\begin{matrix} Q(e_1) > 0 \\ Q(e_3) < 0 \end{matrix}\right\} Q \text{ неопр.}$$

Критерий Сильвестра.

$Q > 0 \iff \delta_k > 0 \ \forall k = 1$, можно не проверять что $\delta_k \neq 0$!

Критерий отрицательной опр.

$$Q < 0 \iff -Q > 0 \iff \begin{cases} \delta_k > 0, & k \,\vdots\, 2 \\ \delta_k > 0, & k \not\vdots\, 2 \end{cases}$$

Задача:

При каких λ $Q < 0$?

$$Q(x) = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Исполь. крит. отр. опр.

$\delta_1 = -1 < 0$

$\delta_2 = -\lambda - 4 > 0$

$\delta_3 = \lambda + 16 + 4 = \lambda + 20 > 0.$

$$Q < 0 \iff \begin{cases} -\lambda - 4 > 0 \\ \lambda + 20 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda < -4 \\ \lambda < -20 \end{cases} \iff \lambda < -20.$$

Ответ. $Q > 0 \iff \lambda - 20.$

Задача

Определить норм. вид. $Q = Q_1 + a Q_2$, где

$$Q_1(x) = -x_1^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

$$Q_2(x) = (x_1 - x_2 - x_3)^2$$

Идея: Сделать невырожд. замену $\to Q_2(y) = y_3^2$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = y_3 \\ x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 - y_1 + y_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C_{e\to e'}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

B – Mat Q_1 в e_1

B' – Mat Q в e_1'

$$B' = C^T B C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -7 \\ -4 & 4 & 6 \\ -7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

В б-се e' Q имеет Mat $= \begin{pmatrix} 5 & -4 & -7 \\ -4 & 4 & 6 \\ -7 & 6 & 8+a \end{pmatrix} \to$ Якоби. $\delta_1 = 5 > 0$, $\delta_2 = 4 > 0$, $\delta_3 = -8 + 4a > 0 \to a > 2$.

$Q = Q_1 + a Q_2$

$Q_2(y) = y_3^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ:

$a > 2 \iff$ норм. в. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ $\quad Q > 0$

$a = 2 \iff$ — $z_1^2 + z_2^2$ $\quad Q \geq 0$

$a < 2 \iff$ — $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ $\quad Q$ неотр.

Эквивалентные кв. формы.

Опр. Кв. ф. Q_1 и Q_2 наз. экв., если их можно перевести б.ф в кв.ф невырожденной заменой. коорд.

$(\iff \exists C \in GL_n(F)$ т.ч. $B_2 = C^T B_1 C)$.

Это отношение эквивалентности т.к:

1. $Q \sim Q$, т.к $B = E^T B E$

2. $Q_1 \sim Q_2 \Rightarrow \exists C : B_2 = C^T B_1 C \Rightarrow \exists C \; B_1 \Rightarrow (C^{-1})^T B_2 C^T$

3. $\left.\begin{matrix} Q_1 \sim Q_2 \\ Q_2 \sim Q_3 \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \exists C_1 : B_2 = C_1^T B_1 C_1 \\ \exists C_2 : B_3 = C_2^T B_2 C_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B_3 = C_2^T C_1^T B_1 C_1 C_2 = (C_1 C_2)^T B_1 C_1 C_2$

Вопрос:

Сколько классов экв на n-мерном в.п. над $\mathbb{C}$?

"Число ненул коэф. в новом б-се?" = ранг кв. форм = rk B.

- Кв. ф разных ранга не экв.
- Кв. ф одного ранга экв.: $Q_1 \rightsquigarrow x_1^2 + \ldots + x_k^2$

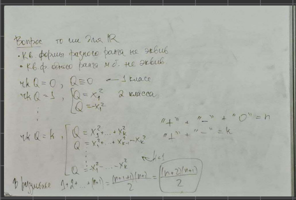
  rk $Q_1 = k$

  Q_2

Число классов экв. кв. ф. над $\mathbb{C}$ = число возможных рангов $0, 1, \ldots, n$

$= \boxed{n - 1}$

Вопрос



Вопрос то же для $\mathbb{R}$

- Кв. формы разного ранга не эквив.
- Кв. ф. одного ранга м.б. не эквив.

$rk\, Q = 0$, $Q \equiv 0$ ← 1 класс

$rk\, Q = 1$, $\begin{cases} Q = x_1^2 \\ Q = -x_1^2 \end{cases}$ 2 класса

⋮

$rk\, Q = k$, $\left[\begin{array}{l} Q = x_1^2 + \ldots + x_k^2 \\ Q = x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2 - x_k^2 \\ \vdots \\ Q = -x_1^2 - \ldots - x_k^2 \end{array}\right.$ $k+1$

"+" + "−" + "0" = n

"+" + "−" = k

В результате $1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1+1)(n+1)}{2} = \boxed{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$

Эвклидовы пр.-ства.

Опр.

$\mathbb{E}$ евклидово пространство – $\mathbb{E}$ – в.п над $\mathbb{R}$ со скалярн. произвед. (симм. пол. опр. б.ф.). Обознач.: $\beta(x,y) = (x,y)$

$(\cdot,\cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$.

Примеры:

1). $\mathbb{E} - \mathbb{R}^n$

$(x,y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ → станд. скаляр. произ.

2) $\mathbb{E} = \mathbb{R}[x]_{\le n}$ $\quad (f,g) = \int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx$

$f \ne 0.$ $\quad (f,f) = \int\limits_a^b \underbrace{f(x)^2}_{\ge 0} dx > 0$, $\int\limits_a^b f(x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f = 0.$

3). $\mathbb{E} = \mathbb{R}[x]_{\le n}$ $\quad (f,g) = f(0)g(0) + \ldots + f(n)g(n).$

$f \ne 0$ $\quad (f,f) = \underbrace{f(0)^2}_{\ge 0} + \ldots + \underbrace{f(n)^2}_{\ge} > 0.$ → Т.к. если $f(0) = \ldots = f(n) = 0$, то f имеет $n+1$ нуль

$\deg f \le n \Rightarrow f \equiv 0.$

$(f,f) = 0 \Leftrightarrow$

$\forall x, y \in \mathbb{E}$ $\quad$ Не дописали ☹ чекайте тг.