Семинар 16.01.2025.

Сегодня

· линейно независимые подпространства.

·

Пусть V - кон. век. простр. над F

Опр.

$U_1,\dots,U_k \le V$ - линейно независимы если $\forall u_i \in U_i$ из $u_1+\dots+u_k=0$ следует $u_1=\dots=u_k=0$

Утв.

1). $U_1,\dots,U_k \le V$ линейно нзв

2). $\forall u \in U_1+\dots+U_k = \{u_1+\dots+u_k \mid u_i \in U_i\}$ $\exists!\ u_i \in U_i$ т.ч. $u=\sum u_i$

3). e_i - базис $U_i \Rightarrow \bigcup e_i$ - базис $U_1+\dots+U_k$

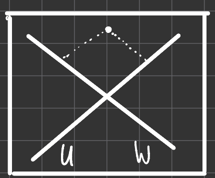
Учитывая повторения

4). $\dim(U_1+\dots+U_k)=\sum \dim U_i$

5). $\forall i$ $U_i \cap (U_1+\dots+\hat{U_i}+\dots+U_k)=\{0\}$

Пример.

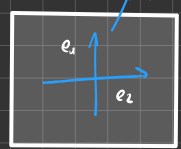
① $\mathbb{R}^2$



U, W линейно незв.

$\mathbb{R}^2 \supseteq U=\langle e_1\rangle$
$W=\langle e_2\rangle$

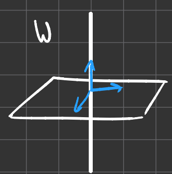
разложено в прямую сумму.



$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ae_1+be_2$

Оно выполняет те свойства которые мы выписали

②



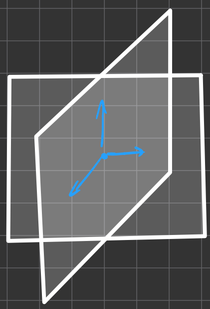
Это линейно независимо. $\mathbb{R}^3=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$

$U=\langle e_1,e_2\rangle$ $W=\langle e_3\rangle$

③ $\mathbb{R}^3 \supseteq U = \langle e_1, e_2 \rangle$

$W = \langle e_1, e_3 \rangle$

$\{e_1, e_2\} \cap \{e_1, e_3\}$



линейно зависимы

Опр:

Подпространства

V раскладывается в прямую сумму $U_1, \dots, U_k$ ($V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$), если:

1). $V = U_1 + \dots + U_k$

2). $U_1, \dots, U_k$ линейно нез.

Решаем случай $k = 2$

$U, W \le V$

Сейчас мы выписываем много разных эквивалентных условий

Тогда $U \oplus W = V \iff \begin{cases} V = U + W \\ U, W \text{ линейно незав.} \end{cases} \iff \begin{cases} V = U + W \\ U \cap W = \{0\} \end{cases}$

Доказательство

$$\iff \begin{cases} \dim V = \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{0} = \dim U + \dim W \\ U \cap W = \{0\} \end{cases}$$

Напоминание утверждения.

$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U+W) - \dim(U \cap W)$.

Можно проверить, что если U задано ОСЛУ, $A \in M_{m \times n}$, W задано ОСЛУ $B \in M_{k \times m}$

$$\iff \begin{cases} \dim V = \dim U + \dim W \\ \dim V = \dim(U+V) \end{cases}$$

Получается удобно проверить, $\le F^n$

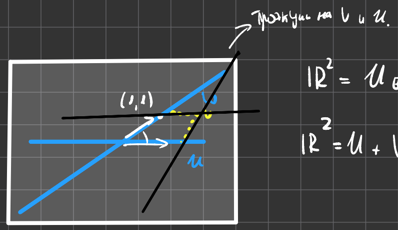
$\iff \forall v \in V \ \exists! \, u \in U, w \in W$ т.ч. $v = u + w$

u — проэкция v на U параллельно (вдоль) W

w — проэкция v на W вдоль U.

Пример:

$$\mathbb{R}^2 \supseteq \underset{O_x}{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W \overset{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$$



$\mathbb{R}^2 = U \oplus W$, т.к. $\begin{cases} \underset{2}{\dim \mathbb{R}^2} \overset{?}{=} \dim U + \underset{1+1}{\dim} \\ \dim \mathbb{R}^2 \overset{?}{=} \dim (U + W) \\ \quad \uparrow \\ \text{т.к. } \mathbb{R}^2 = U + W \end{cases}$

$\mathbb{R}^2 = U + W$

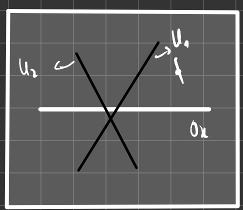
Ищем проекции $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = \beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a-b \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}}_{\in W}$$

проекция V на U вдоль W | проекция V на W вдоль U.

Пример:

$\mathbb{R}^2 \supseteq O_x$, $U_1 = \langle u_1 \rangle$, $u_1 \neq 0$. $U_2 = \langle u_2 \rangle$, $u_2 \neq 0$.



Замечание: проекция одного и того же вектора на O_x вдоль разных прямых могут отличаться.

Задача:

Доказать, что $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim U + \dim W = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 1 = 3. \checkmark$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim U + \dim W = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

• $\underset{3}{\dim V} = \dim U + \dim U = 1 + 2$

$$\dim U = 3 - rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\dim W = 3 - rk\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

• $U \cap W = \{0\}.$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

• решение $\exists!$

• $\exists$ нулевое решение $\Big\}$ $\Rightarrow$ Решение нулевое.

Опр: $rk = 3 \rightarrow \det \neq 0$

Если $U \subseteq V$, то $\forall W \subseteq V$ т.ч. $V = U \oplus W$ называется дополнительным к U. (оно опред. неоднозначно).

Как находить какое-то дополнительное подпространство к $U \subseteq F^n$.

$e_1, \dots, e_k$ - базис U дополним до базиса F^n

$\langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ подойдет как дополнительное подпространство.

$$\underbrace{\langle e_1, \dots, e_k \rangle}_{U} \oplus \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle = F^n$$

Задача:

Найти (какое-нибудь) дополн. пространство к $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

1. Найти базис U: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ подойдут

2. Найти дополнение его до базиса $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ — дополнение до базиса } \mathbb{R}^3$$

Утв: Элементарные преоб. столб сохр. лин. оболочку столбцов.

Ответ: $U \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$

Как искать проэкции некого подпространства $U \subseteq F^n$

Дано:

$U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, $W = \langle w_1, \dots, w_m \rangle \subseteq F^n$ (m необязательно $= k$)

$x \in F^n$

Цель найти v, w т.ч. $x = v + w$, где $v \in U$, $w \in W$.

Для этого найдем $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m \in F$

$$x = \underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k}_{U \ni \text{ проэкция } x \text{ на } U \text{ вдоль } W} + \underbrace{\beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m}_{W \ni \text{ проэкция } x \text{ на } W \text{ вдоль } U}.$$

СЛУ относительно неизвестных $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m$.

Пример:

Дано: $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Найти проэкцию $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ на U вдоль W и на W вдоль U.

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta w$$

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \ \alpha_2 \ \beta \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[\text{УСВ}]{} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right|$$

Решение $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$x = 3u_1 - w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: проэкция x на U вдоль W — $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

проэкция x на W вдоль U — $\beta w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Задача:

$U, U \subseteq \mathbb{R}^n$ заданы как

$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\}$

$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}$.

Доказать, $U \oplus W = \mathbb{R}^n$

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = x_3 \\ \vdots \\ x_1 = x_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = x_2 - x_1 \\ \vdots \\ 0 = x_n - x_1 \end{cases}$$

$\leftarrow$ Это СЛУ матрис.

- $\dim \mathbb{R}^n \overset{?}{=} \dim U + \dim V$, $\dim \mathbb{R}^n = n$

Proof: $\dim U = n - rk(1 \ldots 1) = n - 1$

$\dim W = n - rk(A) = n - (n-1) = 1$.

- $U \cap W = \{0\}$

$$U \cap W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 = \ldots = x_n \\ \sum x_i = 0 \end{array} \right\} = \{0\}$$

$\forall i \; x_i \cdot n = 0 \Rightarrow x_i = 0$.