Лекция 2.

Напоминание: умножение матрицы

$$A \in Mat_{m\times n},\ B \in Mat_{n\times p},\ C = AB \Rightarrow C \in Mat_{m\times p},\ c_{ij} = A_{(i)} B^{(j)} \ \forall i,j \ \left(= \sum_{k=1} a_{ik}\cdot b_{kj}\right)$$

↳ получается что для того что-бы получить c_{ij} элемент нам необходимо умножить $A_{(i)}$ (A_i строку) на $B^{(j)}$ (B^j столбец)

Замечание

1) $\forall i = 1,\dots,m$ имеем $C_{(i)} = A_{(i)}B$. → Чтобы подсчитать i строку C необходимо умножить $A_{(i)}$ на B

2) $\forall j = 1,\dots,p$ имеем $C^{(j)} = AB^{(j)}$

В частности:

1) Если $A_{(i)} = (0 \dots 0)$, то $C_{(i)} = (0 \dots 0)$.

2) Если $B^{(j)} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, то $C^{(j)} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

Свойства суммирования

1) $\sum_{i=1}^{n} (\lambda s_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} s_i$

2) $\sum_{i=1}^{n} (s_i + f_i) = \sum_{i=1}^{n} s_i + \sum_{i=1}^{n} f_i$

3) $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} s_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} s_{ij} \right)$ → Двойная сумма: в ней не важно в каком порядке суммировать почему? →

Пусть у нас двухмерный массив, который мы можем просуммировать по i а потом по j, и наоборот

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \sum_{j=1}^{m} a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & \parallel \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i \dots\dots = \boxed{\text{равны одному и тоже}}$$

Свойства умножения матриц: (мы предположим что размерность этих матриц подходят)

1.1). Левая дистрибутивность: $\boxed{A(B+C) = AB + AC}$

1.2). Правая дистрибутивность: $\boxed{(B+A)C = AC + BC}$

Докажем эти свойства. (1 и 2)

1.1) $A(B+C) = X$, $AB + AC = Y$.

$$x_{ij} = A_{(i)}(B+C)^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik} \cdot b_{kj} + a_{ik} \cdot c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot c_{kj} = \underbrace{A_{(i)} B^{(j)}}_{y_{ij} \text{ от } AB} + \underbrace{A_{(i)} C^{(j)}}_{y_{ij} \text{ от } AC} = \boxed{y_{ij}}$$

1.2) Аналогично. $(A+B)C = X$, $AC + BC = Y$

$$x_{ij} = (A+B)_{(i)} \cdot C^{(j)} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + b_{ik}) \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik} \cdot c_{kj} + b_{ik} \cdot c_{kj}) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} \cdot c_{kj})}_{A_{(i)}C^{(j)}\ y_{ij} \text{ от } AC} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(b_{ik} \cdot c_{kj})}_{B_{(i)}C^{(j)}\ y_{ij} \text{ от } BC} \boxed{= y_{ij}}$$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$

3). $A(BC) = (AB)C$

Докажем:

$$\overbrace{(\underbrace{AB}_{u})C}^{\overset{m \times q}{m \times n \ \ n \times p \ \ p \times q}} = X, \quad A(\underbrace{BC}_{V}) = Y$$

потому AB и C соединены $p \times p$.

A и B соединены $n \times n$

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{p} U_{ik} \cdot C_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lk}\right) C_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lk} \cdot C_{kj}\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{il} \cdot b_{lk} \cdot c_{kj}\right) = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk} \cdot c_{kj}\right)$$

C_{kj} не зависит от l, а значит что по отношению к $(a \cdot b)$ она воспринимается как скаляр.

Замечаем двойную сумму

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{il}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk} \cdot c_{kj}\right) = \sum_{l=1}^{n} a_{il} V_{lj} = \boxed{y_{ij}}$$

4). $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

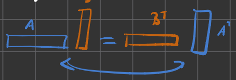
$m \times n \quad n \times p \qquad p \times n \quad n \times m$

$p \times m$

Доказать:

$(A\cdot B)^T = X \qquad B^T \cdot A^T = Y$

$x_{ij} = (A\cdot B)_{ji} = A_{(j)} B^{(i)} = (B^T)_{(i)} \cdot (A^T)^{(j)} = \boxed{y_{ij}}$



Замечание:

Умножение матриц некоммутативно: $AB \neq BA$.

Пример:

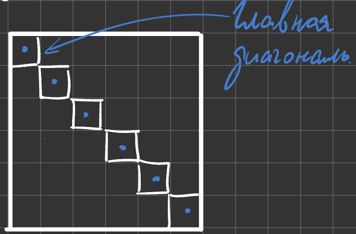
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

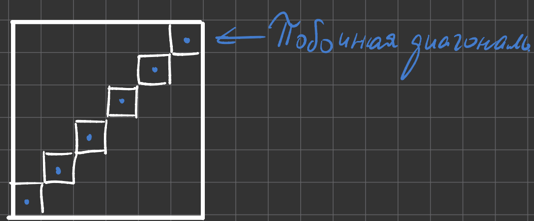
Определение:

$A \in Mat_{n\times n} \Rightarrow A$ называется матрицей порядка n.

Обозначение: $M_n := Mat_{n\times n}$

Пусть $A \in M_n$





Опр:

Матрица $A \in M_n$ называется диагональной если все её элементы вне главной диагонали равны 0. (т.е. $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$)

→ нулевая матрица тоже диагональна

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \iff A = diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Лемма:

Пусть у нас есть $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \in M_n$. Тогда:

1. $\forall B \in Mat_{n \times p}$ $\quad AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$

2. $\forall B \in Mat_{m \times n}$ $\quad BA = \left(a_1 B^{(1)} \; a_2 B^{(2)} \dots a_n B^{(n)}\right)$.

Доказательство:

1. $(AB)_{(i)} = A_{(i)} \cdot B = \overbrace{a_{(i)} \cdot B_{(i)}}$ → Так как $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \overset{i}{a_i} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i \cdot b_{ij}$

2. $(BA)^{(j)} = B \cdot A^{(j)} = \underbrace{a_j \cdot B^{(j)}}$ → Так как $(b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} j = a_j \cdot b_{ij}$

$\blacksquare$

Определение:

Матрица $E = E_n = \mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1)$, называется единичной матрицей порядка n.

Свойства единичной матрицы (Следствия из леммы)

1. $\forall A \in M_{n \times p}$ $\quad E \cdot A = A$ — Обладает тем же свойством, что и 1, от этого и терминология "единичная"

2. $\forall A \in M_{m \times n}$ $\quad A \cdot E = A$

3. $\forall A \in M_n$ $\quad A \cdot E = E \cdot A = A$

Определение:

Следом $A \in M_n$ называется сумма всех элементов на её главной диагонали

Обозначение: $\boxed{tr\, A}$ (или $Tr A$) $\iff tr\, A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$

Свойства Tr A.

1. $tr(A+B) = tr A + tr B$
2. $tr(\lambda A) = \lambda\, tr A$
3. $tr(A) = tr(A^T)$
4. $tr(A\cdot B) = tr(B\cdot A)$

$\underline{m\times n \quad n\times m}$ → обязательно

Докатем

4. $AB = X \qquad BA = Y$

$$tr\, X = \sum_{i=1}^{m} x_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ji}\cdot a_{ij}\right)}_{y_{jj}} = \sum_{j=1}^{n} y_{jj} = tr\, Y$$

Пример:

$$A = (1,2,3),\ B = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \quad AB = (32) \quad tr\, AB = tr\, BA$$

$$BA = \begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\5 & 10 & 15\\6 & 12 & 18\end{pmatrix}$$

Система линейных уравнений

Опр: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неизвестные.

Система линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1m}x_{1m} = b_1 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{2m}x_{2m} = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_{n1} + a_{n2}x_{n2} + \ldots + a_{nm}x_{nm} = b_n \end{cases}$$

- Решение линейного уравнения – набор значений неизвестных при которых уравнение обращается в тождество. → равенство двух выражений
- Решение СЛУ – набор значений неизвестных, являющийся решением каждого уравнения

→ Основная задача: Решить СЛУ, т.е найти все её решения, или доказать что решения не существует.