Лекция 10.

Напоминание:

- Векторное пространство над F.
  - Множество где задано 2 операции.
    1. Сумма
    2. Умножение на скаляр
  - Эти операции должны следовать 8 аксиомам.

Подпространства векторных пространств

Пусть V – векторное пространство над полем F.

Определение:

$U \subseteq V$ называется подпространством (или линейное подпространство) если выполняет:

1. $\vec{0} \in U$
2. $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$
3. $\alpha \in F,\ x \in U \Rightarrow \alpha x \in U$

Замечание:

Всякое $U \subseteq V$ само является векторным пространством относительно тех-же операций.

Замечание:

Вместо свойств $\{2\}$ и $\{3\}$ $\Longleftrightarrow \alpha x + \beta y \in U,\ \forall \alpha, \beta \in F,\ x, y \in U.$

Помним что, $\{2\}$: $(x + y) + z = x + (y + z)\ \forall x, y, z \in V$ – ассоциативность сложения

$\{3\}$ $\exists \vec{0} \in V : x + \vec{0} = x,\ \forall x \in V.$

Доказ-ем:

$\Rightarrow$

Если сумма и умножение принадлежит то, какое слагаемое по $\{3\}$, сумма по $\{2\}$

$\Leftarrow$

$\{2\}$ Возьмем $\alpha, \beta = 1$, и получаем свойство $1(x) + 1(y) = x + y$

$\{3\}$ Возьмем α или $\beta = 0$, и получаем свойство $0(x) + 0(y) = \vec{0}$

Замечание

Если $U \neq \emptyset$, то $\{3\} \Rightarrow \{1\}$

А почему оно не работает?

Альтернативное опр свойства 1 подпространства векторного пространства.

Получается что условие 1 можно заменить на условие не пустоты которое удволетворяет замечаниям.

Альтернативное опр. под.простр. вектр. пространства.

Подпространство это не пустое подмножество которое удлетворяет $\alpha x + \beta y \in U$, $\forall \alpha, \beta \in F$, $\forall x, y \in U$.

Примеры:

Являеться частью всех квадратных матриц.

1. $U = \{0\}$ и $U = V$ – всегда подпространство. (называем их несобственными подпространствами)
2. Множество всех диагональных (верхнетреугольных, нижнетреугольных) матриц в $M_n(F)$ – подпространство.

Это все многочлены одной переменной x над полем F

3. $F[x]_{\leq n} \leq F[x]$ – множество всех многочленов степени не выше n (включая нулевой многочлен) – подпространство.

Почему?

- Если есть 2 многочлена степени выше n, то их сумма выше n.
- Произведение скаляра на многочлен степени выше n будет иметь степень выше n.
- Мы включили нулевой многочлен.

Предложение:

$A \in Mat_{m\times n}(F)$ произвольная матрица.

СЛУ – $Ax = b$

ОСЛУ – $Ax = 0$

Разница между R^n и F^n?

Векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Векторное пространство над полем F.

$\Rightarrow$ Множество решений ОСЛУ $Ax = \vec{0}$ являеться подпространством в F^n.

Это просто векторное пространство.

Доказательство

Пу $S \subseteq F^n$ – множество решений ОСЛУ $Ax = \vec{0}$.

$\Rightarrow$

1. $\vec{0} = (0 \ldots 0)^T \in S$
2. $x, y \in S \Rightarrow Ax = \vec{0}$, $Ay = \vec{0} \Rightarrow A(x+y) = Ax + Ay = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow x + y \in S$.
3. $\alpha \in F, x \in S \Rightarrow A(\alpha x) = \alpha A(x) = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Линейные комбинации и линейные оболочки.

Не одинаковы

Пусть $v_1, \dots, v_m \in V$ - конечный набор векторов (не обязательно попарно различных).

Определение:

Эти коэф различны

Всякое выражение типа $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$, называется линейной комбинацией векторов $v_1, \dots, v_m$.

Пусть $S \subseteq V$ - произвольное подмножество (конечное или бесконечное)

Определение:

Множество всех векторов из V, представимых в виде линейной комбинации (некого конечного набора) векторов из S, называется линейной оболочкой множества S.

Пример.

Возьмем на плоскости некий не нулевой вектор, и пусть подмножество (S) состоит из одного вектора (один элемент в подмножестве).

Мы можем брать этот вектор в любом количестве, умножать на все возможные скаляры и получится множество

где прямая которая проходит через 0 и данный вектор.

Понятно что получится множество больше чем исходное.

Обозначение $\langle S \rangle$

Если S конечно и $S = \{v_1, \dots, v_m\}$, то вместо $\langle S \rangle$ ещё пишут $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$, и говорят линейная оболочка векторов $v_1, \dots, v_m$

$\to S = \{v_1, \dots, v_m\} \Rightarrow \langle S \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_m\} \rangle$, но мы будем писать $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ (убрали слово множество для удобства).

Соглашение $\langle \varnothing \rangle = \{\vec{0}\}$

Примеры.

1) $\langle \vec{0} \rangle = \{\vec{0}\}$. Если взять нулевой вектор, то как его не крутить и умножать на скаляр а потом суммировать, мы получим нулевой вектор.

2) $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{v\}$, $v \neq \vec{0}$. (Векторное пространство это плоскость, берем не нулевой вектор)

$\Rightarrow \langle S \rangle = \langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ – прямая натянутая на v.

Тоже можно отметить что эти мн. э $\vec{0}$. из которого их вектора выходят (геометрически).

Два вектора будут колинеарны если они находятся на одной или параллельных прямых. $\left(\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}\right)$

3) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{v_1, v_2\}$, v_1, v_2 не коллинеарны.

$\langle S \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$

④ $V = F^n$, $S = \{e_1, \dots, e_n\}$, где $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$\langle S \rangle = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = F^n$, так как $\forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$ имеем $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

V - векторное пространство над F.

$S \subseteq V$ - произв. множество.

Пред. $\langle S \rangle$ - подпространство в V.

Доказательство:

Случаи.

1). Если $S = \varnothing$, то $\langle S \rangle = \{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{0} \in \langle S \rangle$

Если $S \neq \varnothing$, то $\exists v \in S \Rightarrow$

$0 \cdot v = \vec{0} \in \langle S \rangle$

2). $x, y \in \langle S \rangle \Rightarrow$

$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

$\Rightarrow$ $y = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_l w_l$ $\quad \alpha_i, \beta_j \in F$, $x_i, y_j \in S$

Если взять одну линейную комбинацию, и прибавляем к ней другую линейную комбинацию, то у нас получиться еще одна линейная комбинация.

$\Rightarrow x + y = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_l w_l$

Если $v_i = w_j \Rightarrow \alpha_i v_i + \beta_j w_j = (\alpha_i + \beta_j) v_i$ → Вдруг есть совпадающее вектора?

3). $x \in \langle S \rangle$, $\alpha \in F \Rightarrow$

$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$. $v_i \in S$, $\alpha_i \in F$

$\Rightarrow \alpha x = (\alpha\alpha_1) v_1 + \dots + (\alpha\alpha_k) v_k \in \langle S \rangle$

Замечание:

Еще говорят, что $\langle S \rangle$ - подпростр-во, натянутое на S.

$\langle S \rangle$ - подпр-во, порожденное множеством S.

порождаемое

Определение.

Линейная комбинация $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ называется тривиальной если $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ и нетривиальной иначе.

Она равна $\vec{0}$

Evaluated expression → Альтернативная форма интерпретации линейной комбинации, где мы рассматриваем с некими значениями. (т.е найти значение этого выражения, что будет являться вектор.)

TLDR – С одной стороны линейная комбинация это выражение, а с другой это вектор.

Замечание.

Если $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ (принимает значение $\vec{0}$) то не значит что она была тривиальной.

Пример: $v + (-v) = \vec{0}$ Эта линейная комбинация не тривиальная.

Опр.

Векторы $v_1, \dots, v_k \in V$ называются линейно зависимыми если $\exists$ их нетривиальная линейная комбинация, равная $\vec{0}$ (т.е $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$, $\exists i$ $\alpha_i \neq 0$, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \vec{0}$)

И, линейно независимыми иначе (не существует нетривиальной линейной комбинации $= \vec{0}$)

$\Rightarrow$ (из условия $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \vec{0}$ следует $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$)

2) Подмножество $S \subseteq V$ (возможно бесконечное, с повторяющимися элементами) называется лин. зависимым если в нем $\exists$ лин. зав. конечное подмножество, и линейно независимо иначе. (т.е всякое кон. подмно-во в S лин. независ.)

Мультимножество → Понятие из дискретной математики, где иногда полезно рассматривать множества с повторяющимися элементами. Т.е., получается, учитывается сколько раз какое множество повторяется (кон и бесконечное).

Соглашение.

Система векторов – с которой возможны повторения.

Примеры:

1). Возьмем $\vec{0}$ (т.е система $S = \{\vec{0}\}$).

Линейно зависимы, т.к можно взять не тривиальную линейную комбинацию $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

2.) $S = \{v\}$, $v \neq \vec{0}$

Линейно независим,

Пу. $\underset{\alpha \neq 0}{\alpha} \cdot v = 0$, тогда $\vec{0} = \alpha^{-1} \vec{0} = \alpha^{-1} \cdot (\alpha v) = (\alpha \alpha^{-1}) v = 1 \cdot v = v$. Противоречие!

3). $S = \{v_1, v_2\}$, $v_1, v_2 \neq 0$.

$\Rightarrow$ v_1, v_2 линейно зависима $\Leftrightarrow$ v_1, v_2 пропорциональны ($v_1 = \lambda \cdot v_2$ либо $v_2 = \mu \cdot v_1$, $\lambda, \mu \in F$).

Докажем:

($\Rightarrow$) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 = \vec{0}$, причем либо $\alpha_1 \neq 0$, либо $\alpha_2 \neq 0$.

Если $\alpha_1 \neq 0$, то $v_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2$ $\leftarrow$ пропор.

($\Leftarrow$) Пусть $v_1 = \lambda \cdot v_2$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda \cdot v_1 + (-\lambda) v_2 = \vec{0}}_{\text{не трив. лин. комб.}}$$

(4) $V = F^n$, $S = \{e_1, \dots, e_n\}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Эта система линейно независимы.

→ Стандартная процедура это:

Берем векторы,

Записываем их линейную комбинацию.

Приравниваем к $\vec{0}$.

Доказываем что все коэф $= 0$.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ таковы, что:

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

q. e. d