Семинар 13.02.2025.

Замечание. "Форма" = "Функция". → кв. ф.

$V <\dim\infty$ в.п. над F, $1+1\neq 0$.

$B: V\times V$ – б.ф.

$\downarrow$

$Q_B: V\to F$

$x\to B(x,x)$.

Пусть $B=(b_{ij})$ – матрица B в б-се $e=(e_1,\dots,e_n)$

$$Q_B(x)=B(x,x)=(x_1\dots x_n)B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i\cdot x_j=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}(b_{ij}+b_{ji})x_ix_j \text{ в коорд.}$$

Пример:

① $B(x,y)=x_1y_2+x_2y_1-3x_2y_2+3x_2y_3-3x_3y_2$

$Q_B(x)=x_1x_2+x_2x_1-3x_2^2+3x_2x_3-3x_3x_2=2x_1x_2-3x_2^2$

② $B'(x,y)=-3x_2y_2+x_1x_2+x_2x_1$

$Q'_B(x)=-3x_2^2+2x_1x_2$.

Говорят что, мн-во симм б.ф на $V\xrightarrow{\text{биекция}}Q_B$ – их квадратичная форма на V (if $1+1\neq 0$).

Если б.ф симм $(x_i\leftrightarrow y_i)$, то $Q_B(x)=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}x^2+\sum_{1\le i<j\le n}2b_{ij}x_i\cdot x_j$

$\Leftrightarrow \forall x,y\ B(x,y)=B(x,y)$ | $B=B^T$ в б.с $b_{ij}=b_{ji}$

Задача. Найти симм. б.ф по Q_B, где $Q_B(x)=x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$

$$B=\begin{pmatrix}1&2\\2&-3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B(x,y)=x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1-3x_2y_2$ → По позиции (a_{22})

Задача. Найти симм б.ф., асс с кв.ф $g(x)=f(x,x)$ где

$f(x,y)=x_1y_1+2x_1y_2+3x_2y_1+4x_2y_2$

$g(x)=f(x,x)=x_1^2+5x_1x_2+4x_2^2$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix}1&\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}&4\end{pmatrix}\Rightarrow B(x,y)=x_1y_1+\tfrac{5}{2}x_1y_2+\tfrac{5}{2}x_2y_1+4x_2y_2$$

Общее формулы.

1). f - б.ф., B - симм б.ф. ассоц. с той же кв.ф. $B(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y)+f(y,x))$.

2). q - кв.ф. $\rightsquigarrow B$ - симм б.ф. Симметризация

$$B(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$$ Поляризация

Канонический вид.

V - в.п. над F. $(1+1 \neq 0)$.

$Q: V \to F$ кв.ф.

$\mathbb{e} := (e_1, \dots, e_n)$ - б.с V.

$B = B(Q, \mathbb{e})$

Опр. Q имеет в б.с канонический вид если $B(Q,\mathbb{e})$ диагональна т.е $Q(x) = b_{11}x_1^2 + \dots + b_{nn}x_n^2$

Лучше сразу с примеры

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$= x_1^2 + 2x_1(2x_2+x_3) + (2x_2+x_3)^2 - (2x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= \bar{x}_1^2 - 3\left(x^2 + 2\cdot\frac{1}{3}x_2x_3 + \frac{1}{9}x_3^2 - \frac{1}{9}x_3^2\right) + 2x_3^2$$

$$= \bar{x}_1^2 - 3\underbrace{\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2}_{\hookrightarrow \bar{x}_2^2} + \frac{1}{3}x_3^2 + 2x_3^2 = \bar{x}_1^2 - 3\bar{x}_2^2 + \frac{7}{3}\bar{x}_3^2$$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ \bar{x}_2 = x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \bar{x}_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 - \frac{1}{3}\bar{x}_3 \\ x_2 = \bar{x}_2 - \frac{1}{3}x_3 = \bar{x} - \frac{1}{3}\bar{x}_3 \\ x_3 = \bar{x}_3 \end{cases} \quad C_{e\to\bar{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{e}' = \left(e_1, -2e_1+e_2, -\frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + e_3\right)$$

Ответ.

Проверка: $B' = C^T_{e\to\bar{e}} B\, C_{e\to\bar{e}}$

$$2x_1x_2 + x_1x_3 = Q(\bar{x}_1 + \bar{x}_3)\bar{x}_2 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_3^2$$

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 + \bar{x}_3 \\ x_3 = \bar{x}_1 - \bar{x}_3 \\ x_2 = \bar{x}_2 \end{cases}$$

$$= \bar{x}_1 + 2\bar{x}_1\bar{x}_2 + 2\bar{x}_2\bar{x}_3 - \bar{x}_3^2$$

$$= \bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2^2 + 2\bar{x}_2\bar{x}_3 - \bar{x}_3^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$= (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^2 - (\bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_3^2).$$

$$= \underbrace{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^2}_{y_1} - \underbrace{(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)^2}_{y_2} = y_1^2 - y_2^2 + 0\cdot y_3^2$$

Симм Гаусса:

Пример: $B' = C^T B C$.

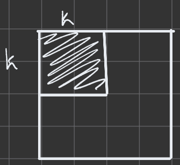
$U^T B U$.

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 & -1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right)$$

Метод Якоби

$B \in M_n$.



δ_k = k-ый угловой минор. $= \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix}$

Th. Если $\delta_k \neq 0$ $\forall k = 1, \dots, n$ $\exists!$ б.с e', что $C_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1 & & \ast & \\ & \ddots & \ast & \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (т.е $e_i' - e_i \in \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle$)

в котором кв. ф q примет канонический вид. Более того, этот вид такой:

$$Q(x) = \delta_1 x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n^2$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \delta_1 = 1 \\ \delta_2 = -3 \\ \delta_3 = -7 \end{array}$$

Канонич. вид

$$1 \cdot \bar{x}_1^2 - 3\bar{x}_2^2 + 7/3\, \bar{x}_3^2$$

(Якоби не работает, если на каком-то этапе до полез. ва

- $\delta_k \neq 0$ при $k = 1, \dots, n-1$

  $\delta_n = 0$. $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- Если $\delta_1 = 0$

$$\Downarrow$$

$\bar{x}_1 = x_3$ $\quad B' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$\bar{x}_2 = x_2$

$\bar{x}_3 = x_3$

$F = \mathbb{R}$

Нормальный вид.

$Q = b_{11} x_1^2 + \ldots + b_{nn} x_n^2 \qquad b_{ii} \in \{-1, 0, 1\}.$

Как привести к норм. виду?

1). Привести к канонич.

2) Перейти к нормал. виду.

$$Q = \bar{x}_1^2 - 3\bar{x}_2 + {}^7/_3\, \bar{x}_3 = \bar{x}_1^2 - (\sqrt{3}\,\bar{x}_2)^2 + (\sqrt{7/3}\,\bar{x}_3)^3$$

$$\begin{cases} \bar{\bar{x}}_1 = x'_1 \\ \bar{\bar{x}}_2 = \sqrt{3}\,\bar{x}_2 \\ \bar{\bar{x}}_3 = \sqrt{7/3}\,\bar{x}_3 \end{cases} \qquad = \bar{\bar{x}}_1^2 - \bar{\bar{x}}_2^2 + \bar{\bar{x}}_3^2$$

Ответ $C_{e \to e'}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$