Лекция 20.

Напоминание:

V - в.п над полем F.

$\mathbb{B} : V \times V \to F$ - симм б.ф.

Теор. $\exists$ б.с e' в V, т.что $\mathrm{Mat}\ B(\mathbb{B}, e')$ диагональна.

· Симметричный алгоритм Гаусса.

Опр. **Верхняя унитреугольная Mat.**

Mat $C \in M_n(F)$ наз верхней унитреугольной (ВУТ), если она верхнетреугольна с единицами на гл диаг.

$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Нижняя унитреугольная матрица. (НУТ).

Аналогично

Упражнение.

Если C_1, C_2 - ВУТ(НУТ), то:

$C_1 C_2$ ВУТ(НУТ)

C^{-1} ВУТ(НУТ).

Пу

$G \in M_n(F) \rightsquigarrow G_k$ – левый верхний $k \times k$ блок.

$\delta_k(G) = \det G_k \leftarrow k$-й угловой минор Mat G.

$$\left|\begin{array}{cc|c|c} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdot \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdot \\ \hline g_{31} & g_{32} & g_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right|$$

Лемма.

Если C – ВУТ $\to \forall k = 1, \dots, n$

$\delta_k(C^T G) = \delta_k(GC) = \delta_k(G_n)$.

В частности, $\delta_k(C^T G C) = \delta_k(G)$

Док-во $[C^T \cdot G]_k$

$$\begin{array}{c} C^T \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ \hline * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c} G \\ \left[\begin{array}{c|c} (1) & \\ \hline (2) & \end{array}\right] \end{array} = C^T_k \cdot G_k \Rightarrow \delta_k [C^T \cdot G]_k = \det(C^T_k \cdot G_k) = \underbrace{\det C^T_k}_{1} \cdot \det G_k = 1 \cdot \det G_k.$$

→ Но в итоге мы умножаем блок $k \times k$ на блок (1), т.к (2) занулится

Аналогично доказывается $\delta_k(G \cdot C) = \delta_k(G)$. ∎

Пусть $B : V \times V \to F$ симметричная б.ф., e – б.с V, $B = (B, e)$, $\delta_k = \delta_k(B)$.

Теорема: Метод Якоби.

Пусть $\delta_k \neq 0 \ \forall k = 1, \dots, n$.

Тогда 1). $\exists!$ ВУТ $C \in M_n(F)$, т.что $\overbrace{C^T B C}^{B'}$ диагональна.

2) $B' = \operatorname{diag}\left(\delta_1, \dfrac{\delta_2}{\delta_1}, \dfrac{\delta_3}{\delta_2}, \dots, \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right)$

Док.

2) Пусть $B' = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) = C^T B \underset{\text{ВУТ.}}{C}$ $\Rightarrow \delta_k(B') = d_1 \dots d_k = \delta_k \ \forall k = 1, \dots, n.$ $\Rightarrow d_1 = \delta_1, \dots, d_k = \dfrac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \ \forall k = 2, \dots, n.$

По лемме что если C - ВУТ.
$\to \delta_k(C^T G) = \delta_k(GC) = \delta_k(G_n)$
G_n некая $M_n(F)$

1). <u>Существование.</u> Анализ Симметр. Алгоритма Гаусса.

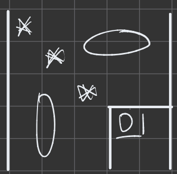
Если на каждой итерации алгоритма возникает только случай 1. То выполняются $\hat{E}_1(i, j, \lambda)$ | при $i > j$. Соот. элементарная Mat

равна
$$U = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} j$$

Преобр выглядит как:
$(B \to U^T B U)$.

Остается показать что будет возникать только случай 1.

Если на каком-то этапе не возник случай 1, то Mat имеет вид



У такой Mat $\exists$ нулевой минор $\delta_k = 0$.

Противоречие с леммой

По лемме что если C - ВУТ.
$\Rightarrow \delta_k(C^T G) = \delta_k(GC) = \delta_k(G_n)$
G_n некая $M_n(F)$

Единственность: (Из (2)).

Пусть $C_1^T B C_1 = C_2^T B C_2 = D$ (Мы привели к диагональному, а значит она определенна однозначно).

где $C_{1,2}$ - ВУТ

Тогда $B = (C_1^T)^{-1} D C_1^{-1} = (C_2^T)^{-1} D C_2^{-1} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{(C_2^T) \cdot (C_1^T)^{-1}}_{\text{НУТ.}} \cdot D}_{\text{НУТ.}} = \underbrace{D \cdot \underbrace{C_2^{-1} \cdot C_1}_{\text{ВУТ.}}}_{\text{ВУТ.}}$ $\longrightarrow$ Этой. Обе Mat диагональны, и $D \cdot C_2^{-1} \cdot C_1$ диаг.

$\Rightarrow C_2^{-1} \cdot C_1 = E \Rightarrow C_2 = C_1$.

∎

Замечание:

Теорема остается верным при $\delta_n = 0$ (но $\delta_k \neq 0$ $\forall k = 1, \dots, n-1$) Док-во то-же.

Замечание:

В этой теореме не используется требование $1+1 \neq 0$ в F.

Опр. **Квадратичная форма.**

Квадратичной формой, ассоциированной с б. ф $\mathbb{B}$, наз. отоб $Q_{\mathbb{B}} : V \to F$, т, что $Q_2(x) = \mathbb{B}(x, x)$

e - б.с V

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$B = B(\mathbb{B}, e)$

$$\Rightarrow Q_B(x) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=}^{n} b_{ii} x_i^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j$$

Примеры:

1) $V = F^n$

$$B(x, y) = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = Q_B(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

2) $V = F^2$

$B(x, y) = 2x_1 y_2 \Rightarrow B(x, x) = 2x_1 x_2$

$\underbrace{2}_{a_{12}}$

$\mathrm{Mat}\, B(\mathbb{B}, e) : \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $V = F^2$ $B(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow Q_B(x) = 2x_1 x_2$

Теорема.

Пу. в поле F $1+1 \neq 0$.

Тогда отображением $\mathbb{B} \to Q_{\mathbb{B}}$ является биекцией между множеством симм б.ф на V и мн-вом всех квадр. форм на V.

Док-во.

Мы доказываем биективность нужно доказать сюръективность и инъективность

Сюръективность: ($\forall Q_B$ получается из симм $\mathbb{B}$, $\mathcal{B}(\mathbb{B}, e)$).

Пу. Q - кв. ф на V и $Q = Q_B$ для некоторой б. ф B на V. ($Q_B = \mathbb{B}(x, x)$).

Симметризуем:

Положим $\delta(x,y) = \frac{1}{2}\left(B(x,y) + B(y,x)\right)$. — б.ф, и она симметрична.

Тогда $\delta(x,x) = \frac{1}{2}\left(B(x,x) + B(x,x)\right) = B(x,x) = Q(x) \Rightarrow Q = Q_\delta$

симм б.ф.

В итоге, на входе мы получили какая-то Q_B, и мы показали что оно обяз. происходит из симм б.ф.

Инъективность:

Покажем что если Q_B происходит из $\overset{\nearrow \text{симм}}{B(x,x)}$. То эта $B(x,x)$ восстанавливается по симметричной.

Пу. $Q: V \to F$ кв.ф. $Q = Q_B$ симм б.ф. B.

$Q(x+y) = B(x+y, x+y) = \underbrace{B(x,x)}_{Q(x)} + B(x,y) + B(y,x) + \underbrace{B(y,y)}_{Q(y)} \Rightarrow B(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right] \Rightarrow B$ однозначно восстановится по Q.

∎

Замечание

① $\delta(x,y) := \frac{1}{2}\left[B(x,y) + B(y,x)\right]$ называется симметризацией б.ф B.

Если S и B – матрицы б.ф δ и B в одном и том же базисе, то $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$.

② $\forall$ кв. ф $Q: V \to F$ соотв. симм б.ф. $B(x,y) := \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right]$ наз-ся поляризацией этой кв.ф Q.

Опр. **Mat квадратичной формы.**

Матрицей к.в.ф. $Q: V \to F$. в б.с e Mat соотв. ей симметр. б.ф (поляризации). в этом-же базисе.

Обозначение. $B(B, e)$

Пример.

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$

$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2$

Тогда $B(Q, e) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$

Опр. **Каноничный вид.**

Квад. ф $Q: V \to F$ имеет в e каноничный вид, если в этом e базисе её Mat диагональна. $B = \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n)$.

В к-мах: $Q(x) = b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2$.

След.

$\forall$ кв. ф $Q: V \to F$ $\exists$ базис, в котором Q принимает канон вид.

Опр. **Улучшенный канонический вид. (Нормальный вид.)**

Кв. ф Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ нормальный вид если в этом базисе $B(Q, \mathbb{e}) = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$.

(В коор $Q(x) = \varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2$)

Следствие.

$\forall$ кв. ф Q над $\mathbb{R}$ $\exists$ базис, в котором она прин. нормальный вид.

Док-во.

Знаем: $\exists$ базис $\mathbb{e}$, т.что $B := B(Q, \mathbb{e}) = \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n)$

Возьмем $C = \mathrm{diag}(c_1, \dots, c_n)$ где

$$c_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ 1, & b_i = 0 \end{cases}$$

Тогда $C^T B C = \mathrm{diag}(b_1 c_1^2, \dots, b_n c_n^2) = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ где: $\varepsilon_i = \mathrm{sgn}\, b_i = \begin{cases} 1, & b_i > 0 \\ 0, & b_i = 0 \\ -1, & b_i < 0. \end{cases}$

(это соответствует замене координат $x_i = c_i \cdot x_i$).