Лекция 12.

Напоминание:

V - векторное пространство над F.

$\dim V < \infty$

Было: Предл. Всякую лин. незав. систему векторов в V можно дополнить до базиса всего V.

Следствие: $\dim V = n$, векторы $v_1, \dots, v_n \in V$.

лин. независ. $\Rightarrow$ они образуют базис в V.

$\rightarrow$ Если $\dim V = n$, и мы имеем лин. незав систему

Лемма:

Пусть векторы $v, v_1, \dots, v_m \in V$ лин незав. Тогда $\forall v \in V$ либо $v, v_1, \dots, v_m$ лин. незав. $>$ его можно выразить через другие вектора

либо $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Док-во

Пусть $v, v_1, \dots, v_m$ лин завис. Тогда $\alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0}$ для некого набора $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0)$.

Имеем, $\alpha \neq 0$. $\rightarrow$ Если $\alpha = 0$, то тривиальная комбинация $\Rightarrow$ вектора линейно зависимы.

т.к $v_1, \dots, v_k$. лин. незав.

Значит, $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ $\blacksquare$

Предложение.

$U \subseteq V$ - подпространство $\Rightarrow \dim U \leq \dim V$, причём $\rightarrow U$ конечномерно.

$$\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$$

Док-во Если $U = \{\vec{0}\}$, то $\dim U = 0$ и утверждение верно.

Если $U \neq \{\vec{0}\}$. Выберем произвольный вектор $v_1 \in U \setminus \{\vec{0}\}$.

Если $U = \langle v_1 \rangle$, то конец.

Иначе, выберем $v_2 \in U \setminus \langle v_1 \rangle$. Если $U = \langle v_1, v_2 \rangle$, то конец, и так далее.

→ Что можно утверждать про v_i:

- v_1 не нулевой ⇒ лин нзв.
- v_2 линейка независима. т.к $v_2 \in U \setminus \langle v_1 \rangle$

По лемме, $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы.

→ Этот процесс не продолжается бесконечно.

По осн. лемме о лин. зависимости данный процесс закончится на позднее шага $n = \dim V$

→ Не может быть больше n векторов в нашей системе.

Получается что набор векторов и будет базисом в U ⇒ $\dim U \leq \dim V$.

↳ U конечномерно.

Если, $\dim U = \dim V \ (= n)$, ⇒ то условию любой базис в U будет базисом в V ⇒ $U = V$

Рассмотрим ОСЛУ $Ax = \vec{0}$, $A \in Mat_{m \times n}(F)$, $x \in F^n$ — Набор неизвестных.

$S \subseteq F^n$ — множество решений, для (*)

Знаем, что S подпространство в $\boxed{F^n}$ → В нем ∃ конечный базис.

Опр.

Фундаментальная система решений (ФСР) для ОСЛУ называется всякий базис в S (системе решений).

Замечание:

У ОСЛУ может быть много разных ФСР. → В одном пространстве может быть много разных базисов.

Метод построения одной конкретной ФСР.

$$(A \mid \vec{0}) \underset{\substack{\text{элемен} \\ \text{преоб. строк}}}{\rightsquigarrow} (B \mid \vec{0}) \ : \text{УСВ}.$$

Пу. r — число ненулевых строк в матрице B.

Тогда получается r главных неизвестных и $n-r$ свободных. Для удобства переменуем неизвестные и будем считать, что $x_1, \dots, x_r$ это главные неизвестные, $x_{r+1}, \dots, x_n$ — свободные.

Тогда общее решение для (*) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = C_{11} x_{r+1} + C_{12} x_{r+2} + \ldots + C_{1,n-r} x_n \\ x_2 = C_{21} x_{r+1} + C_{22} x_{r+2} + \ldots + C_{2,n-r} x_n \\ \vdots \qquad \cdots \\ x_r = C_{r1} x_{r+1} + C_{r2} x_{r+2} + \ldots + C_{r,n-r} x_n. \end{cases}$$

Сейчас мы: В первую неизвестную мы ложим 1, а в остальные мы ложим 0. Получаем одну строку.

По построению $U_1, U_2, \ldots, U_{n-r} \in S$.

Положим $U_1 = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ \vdots \\ C_{r1} \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} C_{12} \\ C_{22} \\ \vdots \\ C_{r2} \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, U_{n-r} = \begin{pmatrix} C_{1,n-r} \\ C_{2,n-r} \\ \vdots \\ C_{r,n-r} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тут коэф. дадут нам E матрицу.

Предложения:

$U_1, U_2, \ldots, U_{n-r}$ – ФСР для ОСЛУ (*)

Д-во

→ Мы хотим показать что этот набор векторов это базис пространства решений.

→ Напоминание что для того чтобы что-то являлось базисом надо доказать её лин. нез. и её принадлежность линейной оболочки

1). Лин. незв. Пусть $\alpha_1 U_1 + \ldots + \alpha_{n-r} \cdot U_{n-r} = \vec{0}$. Тогда при $\forall$ фикс $k \in \{1, \ldots, n-r\}$ $(r+k)$-а координата в выражении слева равна $\alpha_k \Rightarrow \underbrace{\alpha_k = 0}$. $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-r} = 0 \Rightarrow U_1, \ldots, U_{n-r}$ лин. нзв.

2). $\langle U_1, \ldots, U_{n-r} \rangle = S$

(⇒) Очевидно. т.к эти вектора являются решениями. $\subseteq$ очевидно, т.к $U_1, \ldots, U_{n-r} \in S$.

(⇐) Пу. $u = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \hline \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in S$ – некое решение.

→ Solution

Пу. $v := u - \alpha_1 U_1 - \alpha_2 U_2 - \ldots - \alpha_{n-r} U_{n-r}$

⇒ $v \in S$ Он является решением т.к ↳ Это уже вектор из S. Мы создали линейную комбинацию из её элементов, а значит что она будет принадлежать S.

↳ (лин. комбинация из S).

Имеем $v = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ → Раз под чертой нули, мы знаем значения свободных неизвестных. ⇒ главные по ним считаются ⇒ получаем 0

свободные неизвестные ←

→ Тогда, из формул для общего решения получаем $v = \vec{0}$

$\Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-r} v_{n-r}$

$\Rightarrow v \in \langle u_1, \ldots, u_{n-r} \rangle$

$\Rightarrow S \subseteq \langle u_1, \ldots, u_{n-r} \rangle$

Итог: $S = \langle v_1, \ldots, v_{n-r} \rangle$.

Ранг (rk) систем векторов и матриц

$\dim V < \infty$.

Опр:

Рангом (rk) системы векторов $S \subseteq V$ называется наибольшее количество векторов в линейно независимой подсистеме в S.

Другими словами: $\exists$ система векторов. В ней можно рассматривать линейно независимые подсистемы. (Как в любом множестве рассматриваем подмножества).

Рассмотрим только те подмножества которые лнз.

Посмотрим сколько векторов в таком подмножестве?

→ По лемме линейной независимости

Напоминание: Пусть даны $v_1, \ldots, v_m$, и $w_1, \ldots, w_n$, причем $m < n$ и $\forall i = 1, \ldots, n$ $w_i \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. Тогда векторы $w_1, \ldots, w_n$ линейно зависимы.

В каком-то смысле понятие ранг это обобщение понятия размерности на произвольные системы векторов.

Обозн.

rk S.

$\mathrm{rk}\, S := \max \{ |S'| \mid S' \subseteq S,\ S' \text{ лин. нзв.} \}$.

Лемма: $\mathrm{rk}\, S = \dim \langle S \rangle$

Замечание: $0 \le \mathrm{rk}\, S \le \dim V$

Док-во.

Пусть $\mathrm{rk}\, S = r$ и $v_1, \ldots, v_r \in S \overset{\text{def}}{\Rightarrow}$ можно выбрать $\le$ из r векторов которое лин. нзв.

Тогда $S \subseteq \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$

↳ Все вектора S лежат в этой линейной оболочке.

$\overset{?}{\Rightarrow}$ Если он не лежит, то его можно добавить в систему и он будет линейно независим.

def. rk $\Rightarrow$ У нас уже должен быть максимальное количество векторов, т.е дополнение до $(\mathrm{rk}+1)$ → Противоречит определению ранга, так нельзя.

Напоминание: (Лемма)

Мы утверждали что когда мы добавляли вектор до линейно независимой системе у нас было два варианта; либо новая система линейно независима, либо новый вектор лежит в $\langle \, \rangle$ старых.

← По ней !?

$\Rightarrow \langle S \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$

Но, $v_1, \dots, v_s \in S \Rightarrow \langle v_1, \dots, v_r \rangle \in \langle S \rangle$

Итог: $\langle S \rangle = \langle v_1, \dots, v_r \rangle \Rightarrow \dim \langle S \rangle = r = rk\, S.$

Опр: Пусть $A \in Mat_{n \times m}(F)$

Столбцовым рангом (просто рангом) A называется величина $rk\, A$, равная рангу системы её столбцов.

($\text{т.е. } rk\, A = rk\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\} \subseteq F^n$

Опр:

Строчным рангом A назы величина $rk\, A^T$, т.е ранг системы её строк $\{A_{(1)}, \dots, A_{(m)}\} \subseteq F^n$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad rk\, A \leq 3$$

• $rk\, A = 3 \Rightarrow$ Система была бы лин. нзв.

$A^{(1)} - 2(A)^{(2)} + A^{(3)} = \vec{0}$

Тут видно что (2) полусумма (1) и (2) $\Rightarrow rk\, A \leq 2. \Rightarrow \forall$ две строки линейно независимы $\rightarrow rk\, A = 2.$

$\frac{1+7}{2} = 4 \quad \frac{2+8}{2} = 5 \quad \frac{3+9}{2} = 6$ $\Rightarrow$ Т.к мы нашли эту полусумму то можно утверждать что хотя бы одна строка занулиться при приведении к УСВ.

• Любые два столбца не пропорциональны $\Rightarrow$ лин. нез. $\Rightarrow rk\, A = 2.$

Важный факт который докажем потом: Строчный rk = Столбц rk.

Лемма.

При элементарных преобразованиях строк сохраняются все лин. зависимости между её столбцами.

$$A \rightsquigarrow B. \Rightarrow \alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = \vec{0}$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha_1 B^{(1)} + \dots + \alpha_n B^{(n)} = \vec{0}$$

В частности, $\forall i \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ столбцы $A^{(i_1)}, A^{(i_2)}, \dots, A^{(i_k)}$ лин. нзв $\Leftrightarrow$ столбцов $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \dots, B^{(i_k)}$ лин незав.

Почему?

Предположим что столбцы A линейно независимы, а столбцы B линейно зависимы.
$\nexists$ не тривиальная линейная комбинация. $\exists$ не тривиальная линейная комбинация $= \vec{0}$

$\Rightarrow$ Дополним B до линейной комб всех столбцов (добавим 0 коэф везде)

$\Rightarrow$ По утверждению A тоже равна $= \vec{0}$ (Получили не тривиальную линейную комбинацию $= \vec{0}$). $\Rightarrow$ A лин зависима.

Док-во.

$$\alpha_1 A^{(1)} + \alpha_2 A^{(2)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = \vec{0} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - \text{решение ОСЛУ } Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - \text{решение ОСЛУ } Bx = 0.$$

Факт: При Э(1,2,3) система S сохраняется.

$$\Leftrightarrow B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 B^{(1)} + \alpha_2 B^{(2)} + \ldots + \alpha_n B^{(n)} = \vec{0}$$

Следствие:

При Э(1,2,3) строк сохраняется столбцовый ранг.