Лекция 18.

Пред

Пусть $(e_1,\dots,e_n)$ - б.с V и $(e_1,\dots,e_k)$ - б.с $\ker\varphi$.

Тогда $\varphi(e_{k+1}),\dots,\varphi(e_n)$ – б.с в $\operatorname{Im}\varphi$.

Док-во

$$\operatorname{Im}\varphi = \langle \underbrace{\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_k)}_{0}, \varphi(e_{k+1}),\dots,\varphi(e_n)\rangle = \langle \varphi(e_{k+1}),\dots,\varphi(e_n)\rangle.$$

Осталось доказать что они ЛНЗ.

Пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1})+\dots+\alpha_n\varphi(e_n)=\vec 0 \Rightarrow \varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1}+\dots+\alpha_n e_n)=\vec 0 \Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1}+\dots+\alpha_n e_n\in\ker\varphi \Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1}+\dots+\alpha_n e_n=\beta_1e_1+\dots+\beta_ke_k$. $(\beta_j\in F)$.

$\Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1}+\dots+\alpha_ne_n-\beta_1e_1-\dots-\beta_ke_k=\vec 0 \Rightarrow$

Так как e - б.с V, $\beta_1=\dots=\beta_k=\alpha_{k+1}=\dots=\alpha_n=0$.

Теорема:

$\dim\ker\varphi+\dim\operatorname{Im}\varphi=\dim V$.

Док-во

Пусть $e_1,\dots,e_k$ б.с $\ker\varphi$ ($\dim\ker\varphi=k$). Дополним до б.с $e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n$ всего V ($\dim=n$). Тогда, $\varphi(e_{k+1}),\dots,\varphi(e_n)$ образуют б.с в $\operatorname{Im}\varphi$ / $\dim$ $n-k$.

Итого, $\dim\ker\varphi+\dim\operatorname{Im}\varphi=k+(n-k)=n=\dim V$. ∎

Пред

$\varphi: V\to W$ - лин. отображ., $\operatorname{rk}\varphi=r$. Тогда $\exists$ б.с e - V, f - W, т.что

$$A(\varphi,e,f)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & \end{array} \\ r & \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\end{array}$$

Док-во $\dim V=n$

$\operatorname{rk}\varphi=r=\dim\operatorname{Im}\varphi\Rightarrow\dim\ker=n-r$.

Пусть $e_{r+1},\dots,e_n$ - б.с $\ker\varphi$. Дополним их векторами $e_1,\dots,e_r$ до базиса e. Пусть $f_1=\varphi(e_1),\dots,f_r=\varphi(e_r)$

Тогда $(f_1,\dots,f_r)$ - б.с в $\operatorname{Im}\varphi$. Дополним его век. $(f_{r+1},\dots,f_m)$ - до б.с f, всего W.

Тогда $A(\varphi,e,f)$ имеет треб. вид по построению.

Следствие: Формула изменения Mat лин. отоб. при замене базисов

$A \in Mat_{m\times n}(F)$ - Mat. ранга $r \Rightarrow \exists C \in M_n^\circ(F)$ и $D_m^\circ(F)$ т.ч. $D^{-1}AC = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & \end{array} \\ r & \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$

Док-о.

Реализуем A как Mat лин. отобр. $\varphi: F^n \to F^m$ в какой-либо паре б-с. Тогда утв. вытекает из пред. и ф. $D^{-1}AC$.

Опр. **Линейные функции**

Линейная функция — лин. отоб. $\varphi: V \to F$. (в одномерное век. пространство).

Обозначение: V^*: $Hom(V, F)$ - множество всех линейных функций.

Пример:

① $\alpha: F^n \to F$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, $a_1, \ldots, a_n \in F$.

② $V = \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) := \{$все функции из X в $\mathbb{R}\}$.

$x_0 \in X$ (фиксиров.).

$\alpha: F(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\alpha(f) := f(x_0)$

③ $\alpha: C[a,b] \to \mathbb{R}$, $\alpha(f) := \int_a^b f(x)\,dx$.

④ $\alpha: M_n(F) \to F$, $\alpha(x) := tr(X)$.

Следствия общей теории линейных отображений ($\dim < \infty$)

1). V^* - в.п. (двойственное сопряженное).

2). Если e - б.с V, то есть изоморфизм $V^* \xrightarrow{\sim} Mat_{1\times n}(F)$ α:

Это отображение $\varphi: V \to W$ будет изоморфизмом если оно линейно и биективно. $\varphi: V \xrightarrow{\sim} W$. Как пример id. (тождественное отображение, или $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, говоря на угол).

$V = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \Longrightarrow \alpha(v) = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Следствие: $\dim V^* = \dim V$ ($\Rightarrow V^* \simeq V$)

V - в.п. над F, $\dim V = n$. e - фик б.с.

Рассмотрим лин. функц. $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in V^*$, определяемые условиями $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ Символ кронекера ✳

Тогда лин. функц. ε_i в б.с e, соотв. строка $(0 \ldots 010 \ldots 0)$.

Отсюда сразу следует что $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ образуют базис в пространстве V^*. $V^* \xrightarrow{\sim} Mat_{1\times n}(F)$.

Опр. **Собственный, или сопряженный базис.**

Этот базис называется собственный или сопряженный к базису $e_1, \dots, e_n$ пр-ва V.

$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow \varepsilon_i(v) = x_i \Rightarrow \varepsilon_i$ называется i-й координатной функцией в базисе e.

Другой способ представления условия *

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E.$$

Пред.

Всякий базис в V^* двойствен некоторому б.с. в V.

Док-о.

Пу. $\mathcal{E}$ - б.с. V^*. Возьмем произвольный $e' = (e_1', \dots, e_n')$ в V и пусть $(\varepsilon_1', \dots, \varepsilon_n')$ - двойственный к нему в V^*.

Тогда $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \varepsilon_1' \\ \vdots \\ \varepsilon_n' \end{pmatrix} : C \in M_n^0(F).$

Положим $(e_1, \dots, e_n) := (e_1', \dots, e_n') \cdot C^{-1}.$

Тогда: $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \cdot (e_1, \dots, e_n) = C \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1' \\ \vdots \\ \varepsilon_n' \end{pmatrix} \cdot (e_1', \dots, e_n')}_{E} \cdot C^{-1}$

Получаем $C \cdot C^{-1} = E. \Rightarrow (e_1, \dots, e_n)$ - искомый базис V. Он $\exists!$

Билинейные формы.

Опр. **Билинейные формы.**

Билинейная форма на V - отображение $\mathbb{B}: V \times V \to F$, линейное по каждому аргументу.

Линейность по первому аргументу:

$\mathbb{B}(x_1 + x_2, y) = \mathbb{B}(x_1, y) + \mathbb{B}(x_2, y) \ \forall x_1, x_2, y \in V.$

$\mathbb{B}(\lambda x, y) = \lambda \mathbb{B}(x, y) \ \forall x, y \in V, \lambda \in F.$

Линейность по второму аргументу:

$\mathbb{B}(x, y_1 + y_2) = \mathbb{B}(x, y_1) + \mathbb{B}(x, y_2) \ \forall x, y_1, y_2 \in V.$

$\mathbb{B}(x, \lambda y) = \lambda \mathbb{B}(x, y) \ \forall x, y \in V, \lambda \in F.$

Пример:

1) $V = F^n,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$ $\quad \mathbb{B}(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = (x_1 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T y$

② $V = F^2$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{B}(x, y) := \det \begin{pmatrix} x_1 & y_2 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

③ $V = C[a, b]$ Все непрерывные функции на $[a, b]$ $\mathbb{B}(f, g) := \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$.

Опр. ***Матрица билинейной формы.*** $\dim < \infty$. $\mathbb{B} : V \times V \to F$. б.ф. над F. e – б.с V.

$B = b_{ij}$, $b_{ij} = \mathbb{B}(e_i, e_j)$ называется матрицей билинейной формы $\mathbb{B}$ в базисе e.