Лекция 15.

Напоминание.

V - векторное пр-во над полем F.

$U, W \subseteq V$ - под. простр.-ва.

$U \cap W$, $U + W = \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$.

Теорема: $\dim(U \cap W) + \dim(U+W) = \dim U + \dim W$

$U_1, \dots, U_k \subseteq V$ - произв. набор подпрос-в.

Опр:

Сумма подпространств $U_1, \dots, U_k$ - мно-во $U_1, \dots, U_k := \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}$.

Упражнение. $U_1 + \dots + U_k$

1. $\vec{0}$ принадлежит.
2. Сумма двух элементов
3. Произведение на скаляр принадлежит.

Замечание:

$\dim(U_1 + \dots + U_k) \leq \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

Если мы взяли базис каждого U_i, то это сумма порождает объединения всех этих базисов

А когда достигается равенство?

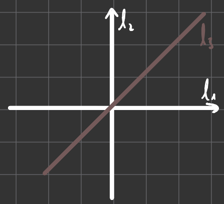
Опр.

Подпространства $U_1, \dots, U_k$ линейно независимы, если $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ из условия $u_1 + \dots + u_k = \vec{0}$ следует $u_1 = \dots = u_k = \vec{0}$.

Пример:

Если $\dim U_i = 1$ $\forall i$ и $U_i = \langle u_i \rangle$, то $U_1, \dots, U_k$ лин. независимы $\Leftrightarrow$ $u_1, \dots, u_k$ лин. независимы.

Пример в $\mathbb{R}^2$



l_1 и l_2 линейно независимы

Набор из 3 векторов линейно зависимы

Теорема.

След. условия эквивалентны:

1) $U_1,\dots,U_k$ лин. нез.

2). $\forall u \in U_1+\dots+U_k$ единств. способом представим в виде $u=u_1+\dots+u_k$, где $u_i \in U_i\ \forall i$.

3). Если e_1 - базис в U_1, ..., e_k - базис в U_k то $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k$ - базис в $U_1+\dots+U_k$.

Объединение мультимножеств → Пример:

$e_1=\{v_1,v_2\}$
$e_2=\{v_2,v_3\}$ $\Rightarrow e_1 \sqcup e_2=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

→ Он кстати линейно зависимым.

4). $\dim(U_1+\dots+U_k)=\dim U_1+\dots+\dim U_k$

5). $\forall i=1,\dots,k$ $U_i \cap (U_1+\dots+U_{i-1}+U_{i+1}+\dots+U_k)=\vec{0}$

Док-во.

Докажем это по циклу:

① ⇒ ②

Пусть $u_1+\dots+u_k=u_1'+\dots+u_k'$ где $u_i,u_i' \in U_i$. Тогда $\underbrace{(u_1-u_1')}_{\in U_i}+\dots+\underbrace{(u_k-u_k')}_{\in U_k}=\vec{0} \Rightarrow u_1-u_1'=\dots=u_k-u_k'=\vec{0} \Rightarrow u_i=u_i'\ \forall i$.

② ⇒ ③

Пусть e_i - базис в U_i $\forall i$

$\forall u \in U_1+\dots+U_k$ единств. образом представим в виде $u=u_1+\dots+u_k$, где $u_i \in U_i\ \forall i$, $\forall u_i$ единств. образом представим в виде линейной комбинации векторов из e_i

$\Rightarrow u$ единств. образом представим в виде лин. комб. векторов $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k$.

$\overset{def}{\Rightarrow} e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k$ — базис в $U_1+\dots+U_k$.

→ У нас был факт, что если ∃ набор векторов и каждый вектор пространства единственным способом представим как линейная комбинация, то этот набор будет базисом.

③ ⇒ ④

- Размерность это число векторов в базисе.
- Нам дано что мы выбрали базисы $(e_1,\dots,e_k)$, и их объединение $(e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k)$ - а значит число элементов суммируется.

④ $\Rightarrow$ ⑤.

Обозначение: $\hat{U}_i = U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_k$.

$\dim(U_i \cap \hat{U}_i) = \dim U_i + \dim \hat{U}_i - \dim(U_i + \hat{U}_i)$ → Это кстати мы по формуле сделали.

Сумма всех.

$= \dim U_i + \dim(U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_k) - \dim(U_1 + \ldots + U_k)$

$= \dim U_i + \dim U_1 + \ldots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \ldots + \dim U_k - \dim U_1 - \ldots - \dim U_k = 0.$

$\Rightarrow \dim(U_i \cap \hat{U}_i) = 0 \Rightarrow U_i \cap \hat{U}_i = \{\vec{0}\}$. → Подпространство имеет размерность $0 \Leftrightarrow \{\vec{0}\}$.

⑤ $\Rightarrow$ ①

Пусть $u_1 + \ldots + u_k = \vec{0}$ для нек-рых $u_1 \in U_1, \ldots, u_k \in U_k$.

$\forall i = 1, \ldots, k$ имеем $\underset{\in U_i}{u_i} = \underbrace{-u_1 - \ldots - u_{i-1} - u_{i+1} - \ldots - u_k}_{\in \hat{U}_i}$. $\Rightarrow u_i \in U_i \cap \hat{U}_i$

Но, $U_i \cap \hat{U}_i = \{\vec{0}\} \Rightarrow u_i = \vec{0}$

∎

Следствие:

Два подпространства $U, W \subseteq V$ лин. нез. $\Leftrightarrow U \cap W = \{\vec{0}\}$.

Опр. $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

Говорят, что V раскладывается в прямую сумму своих подпространств $U_1, \ldots, U_k$, если

1). $V = U_1 + \ldots + U_k$.

2). $U_1, \ldots, U_k$ лин. нез.

Пример:

$\dim U_i = 1 \ \forall i$, $U_i = \langle e_i \rangle$

$V = \langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_n \rangle \Leftrightarrow (e_1, \ldots, e_n)$ - базис V.

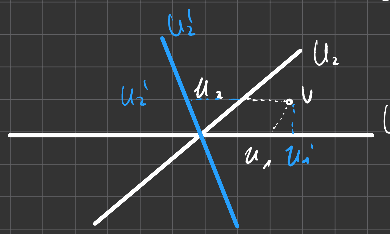
Замечание: При $k = 2$.

1) $V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = U_1 + U_2 \\ U_1 \cap U_2 = \vec{0} \end{cases}$

2) $V = U_1 \oplus U_2 \Rightarrow \forall v \in V$ единств. образ представ. в виде $v = u_1 + u_2$, $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$.

u_1 называеться проэкцией вектора u вдоль подпространства U_2.

u_2 ——————————— U_2 вдоль U_1.



для $\mathbb{R}^3$

$V = U_1 \oplus U_2$

$V = U_1 \oplus U_2'$

$v = u_1 + u_2$

$v = u_1' + u_2'$.

$V = \mathbb{R}^2$

Линейные отображения.

Пусть V, W — векторные пространства над полем F.

Опр.

Отображение: $\varphi: V \to W$ называеться линейным если

1). $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ $\quad \forall v_1, v_2 \in V$

2) $\varphi(\lambda v) = \lambda \cdot \varphi(v)$ $\quad \forall v \in V \quad \forall \lambda \in F$

Эквивалентное понятие: $\varphi(\lambda v_1 + \lambda v_2) = \lambda \cdot \varphi(v_1 + v_2) = \lambda \varphi(v_1) + \lambda \varphi(v_2)$. $\quad \forall v_1, v_2 \in V, \forall \lambda \in F$.

Примеры.

1 $\varphi: V \to W$ — нулевое отображение.

$\varphi(v) = \vec{0}$ $\quad \forall v$

2 $\varphi: V \to V$ — тожественное отображение. (Это кстати линейный оператор)

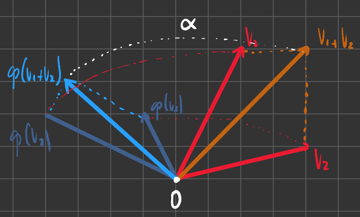
$\varphi(v) := v$ $\quad \forall v \in V$, обозначаеться как $\varphi(v) := id$.

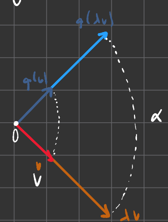
1) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$

2) $\varphi(\lambda v) = \lambda \cdot \varphi(v)$

$\forall v, v_1, v_2 \in V \quad \forall \lambda \in F$

3 $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Поворот на угол α вокруг начала координат.

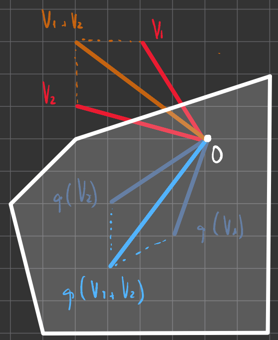


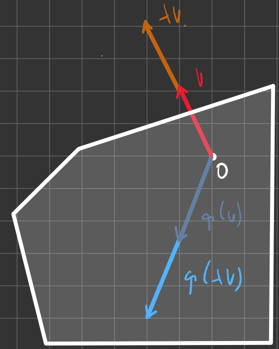


1.) $\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2)$

2). $\varphi(\lambda v) = \lambda \cdot \varphi(v)$.

③ $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – Ортогональная проекция на плоскость O_{xy}.





Вообщее можно заметить что можно сначала умножить на скаляр и потом проэктировать, или наоборот, проэктировать а потом умножить на скаляр !

④ $\mathbb{R}[x]_{\le n}$ – пространство многочленов от x степени $\le n$ с коэф из $\mathbb{R}$.

$\dim(\mathbb{R}[x]_{\le n}) = n+1$ т.к надо учесть свободные члены

$\Delta: f(x) \mapsto f'(x)$. – отображение дифференцирования

1) $(f+g)' = f' + g'$

2) $(\lambda g)' = \lambda \cdot g'$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

1) и 2) Линейное отображение: $\mathbb{R}[x]_{\le n} \to \mathbb{R}[x]_{\le n-1}$

⑤. V – векторное пространство над F, $\dim V = n$.

$(e_1, \dots, e_n)$ – базис

Напоминание: Базис $S \subseteq V$ если

1). S ЛНЗ ($\nexists$ нетривиальной линейной комбинации которая равна 0).

2). $\langle S \rangle = V$ (Линейная оболочка это множество всех векторов из V, представимых в виде линейной комбинации набора векторов из S). (Т.е тех кто его порождают)

$$V = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Мы знаем:

Каждый вектор единственным способом разлагается по базису ($x_1 =$ e

↓

По каждому вектору определяется его набор координат в этом базисе.

↓

=> Такое отображение зависит от базиса

Построем отображение которое будет сопоставлять каждому вектору свой набор координат в этом базисе.

(на вход вектор) ⟶ (на выход координат $\in F^n$)

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow \varphi(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$w = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \Rightarrow \varphi(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Теперь можно проверить линейность такого выражения.

⑥ $A \in M_{m\times n}(F)$ – фиксированная матрица.

$\varphi: F^n \longrightarrow F^m,\quad \varphi(x) := A \cdot x$

Взял вектор высоты n, умножил её на $Mat_{m\times n}$ и получил вектор высоты n.

Простейшие свойства линейных отображений.

1) $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}$

2) $\varphi(-v) = -\varphi(v)\ \ \forall v \in V$

Пу. V, W – векторные пространства над F

Опр:

Изоморфизм – $\varphi: V \to W$ тогда и только тогда:

1) Оно линейно.

1). Оно биективно.

$$V \cong W$$

В наших примерах.

⓪ Нулевое отображение будет изоморфизмом только если оба пространства нулевые.

① Тождественное отображение будет изоморфизмом всегда

(2) Поворот на α всегда изоморфизмом.

(3) Проекция на плоскость это не изоморфизм.

(4) Дифференцирование это не инъективно (все $c \to 0$), никогда не изоморфизм.

(5) Каждому вектору свои координаты, да. (т.к каждый координатный для вектора).

(6) Умножение на фиксированную матрицу биективно только когда $\det \neq 0$ и $M_n(F)$.