Лекция 13

Время жестко заниматься миналом.

Напоминание.

$A \in Mat_{m\times n}(F) \rightsquigarrow rk\, A,\ rk\, A^T$

- Лемма. При Э(1,2,3) строк сохр-ся лин. зав-ть между столбцами
- Следствие. rk A не меняеться при Э(1,2,3) строк.

Лемма.

$A \to B \Rightarrow \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle = \langle B^{(1)}, \dots, B^{(n)} \rangle$

одно Э(1,2,3) столбцов → 1. (n_i, n_j, λ) 2. (n_i, n_j) (переставили) 3. (n_i, λ) (не скаляр.)

Док-во.

$\forall i = 1, \dots, n \quad B^{(i)} \in \langle A^{(i)}, \dots, A^{(j)} \rangle \longrightarrow$ Для всех 3 Э(1,2,3) он будет принадлежать линейной оболочки

1. Столбец либо совпадает, либо являеться линейной комбинацией
2. Переставили просто => можно принадлежить.
3. Либо будут совпадать либо равен неколь. $\cdot\ \lambda$.

$\Rightarrow \langle B^{(1)}, \dots, B^{(n)} \rangle \subseteq \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$

Т.к Э(1,2,3) обратимы, справедливо и включение ∎

Следствие:

Столбцовый ранг матрицы сохраняеться при Э(1,2,3) столбцов

Следствие.

Строковый ранг матриц. сохр. при Э(1,2,3) строк и столбц.

Следствие:

rk A сохраняеться при Э(1,2,3) строк и столбцов.

Предложение:

Если A имеет УСВ, то $rk\, A = rk\, A^T$, причём обе величины равны кол-ву ненулевых строк в A.

Док-во

Пусть r - кол-во ненул строк в A.

$$\begin{array}{c} \qquad\quad i_1 \quad\; i_2 \quad\; i_3 \qquad\quad i_r \\ \left(\begin{array}{cccccccc} 0\dots0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & 0 \\ & & & 1 & & 0 & * & 0 \\ & 0 & & & & 1 & & \vdots \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right)\Big\}\, r \end{array}$$

Тут есть куски стандартного базиса.

Имеем $\{A^1, \dots, A^n\} \ni e_1, \dots, e_r$ - первые r векторов станд. базиса в F^m

$\Rightarrow \langle A^1, \dots, A^n \rangle \supseteq \langle e_1, \dots, e_r \rangle$

С другой стороны, $A^1, \dots, A^n \in \langle e_1, \dots, e_r \rangle \Rightarrow \langle A^1, \dots, A^n \rangle \subseteq \langle e_1, \dots, e_r \rangle$

Итог: $\langle A^1, \dots, A^n \rangle = \langle e_1, \dots, e_r \rangle \Rightarrow \operatorname{rk} A = r$.

Теперь покажем, что $\operatorname{rk} A^{\top} = r$. Для этого достаточно показать, что строки $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$ линейно независимы (все остальные нулевые).

Пусть i_j - номер столбца, в котором стоит ведущий эл-т j-й строки ($j = 1, \dots, r$).

Пусть $\alpha_1 A_{(1)} + \dots + \alpha_r A_{(r)} = \vec{0}$

$\forall j = 1, \dots, r$ на i_j-й позиции в левой части стоит α_j. $\rightarrow$ Строку i_1 на α_1, на i_2 на α_2

$\Rightarrow \alpha_j = 0$

Итог: $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0 \Rightarrow$ OK. ■

Предложение

$\forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(F)$. $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^{\top}$, причём оба числа равны кол-ву не-нул строк в ступенчатом виде.

Док-во

$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^{\top}$ вытекает из сл-вий и рассуждений выше и теор. о приведении матр. к УСВ.

Последнее утверждение следует из того, что при переходе от ступ. вида к УСВ число ненул строк сохраняется

След.

$A \in M_n(F)$

$\Rightarrow$ 1) $\operatorname{rk} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

2) $\operatorname{rk} A < n \Leftrightarrow \det A = 0$.

Док-во

При Э(1,2,3) строк $\operatorname{rk} A$ сохр-ся, условие $\det A \neq 0$ и $\det = 0$ тоже сохраняются. В УСВ есть нулевая строка $\Rightarrow \operatorname{rk} < n$ и $\det = 0$

нет нулевой строки $\Rightarrow k = n$ и $\det \neq 0$ ■

Опр.:

Подматрицей Mat A называется всякая матрица, получаемая из A вычеркиванием нескольких строк и нескол. столбцов.

Лемма:

S – подматрица в $A \Rightarrow \operatorname{rk} S \le \operatorname{rk} A$.

Док-во.

Если $\operatorname{rk} S = r$ и какие-то r столбцов в S лин. нзв, то соотв. столбцы в A тоже линейно независимы

→ Утверж. если мы взяли n столбцов, кок-то их обрезали, и получили лин. нзв. систем. то и изходная система линейно независима.

Опр.

Минор Mat A — определитель всякой квадратной подматрицы в A.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Миноров порядка 1 – 6 шт.

——— 2 – 3 шт.

Теорема о ранге и матрице

$\forall$ $Mat_{n \times m}(F)$ A следующее 3 числа равны:

I: $\operatorname{rk} A$

II: $\operatorname{rk} A^T$

III: наибольший порядок ненулевого минора A.

Замечание:

Ненулевые миноры в A наибольшего порядка называются базисными минорами.

Док-во

I = II уже знаем.

Докажем I = III

Пусть S – квадратная (Mn) подматрица в A порядка r и $\det S \ne 0$. Тогда $\operatorname{rk} S = r \to \operatorname{rk} S \le \operatorname{rk} A \Rightarrow r \le \operatorname{rk} A$.

$\Rightarrow$ III $\le$ I.

Пу. теперь $\operatorname{rk} A = r$, найдем в A ненулевой минор порядка r. Выберем в A лин. нзв. систему из r столбцов $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)}$.

Пу. $\underset{m \times r}{B}$ подматрица в A, составленная из этих столбцов. Тогда, $\operatorname{rk} B = r \Rightarrow$ в Mat B можно выбрать систему из r лин. нзв. строк.

Пу. $\underset{r \times r}{C}$ – подматрица в B, сост. из этих строк, тогда $\operatorname{rk} C = r \to \det \ne 0$. ← Ненулевой минор порядка r. $\Rightarrow$ III $\ge$ I Итог: III = I ▨

Приложения ранга к анализу СЛУ

Пу. $\exists$ СЛУ $Ax=b$, $A \in Mat_{m\times n}(F)$, $x \in F^n$ - неизв.; $b \in F^m$

Теорема Кронера-Капели СЛУ (*).

Система совместна $\Leftrightarrow rk\, A = rk\,(A|b)$

Док-во.

При Э(1,2,3) строк матр $(A|b)$

- Мно-во решений СЛУ(*) сохр-ся
- Величины $rk\, A$ и $rk\,(A|b)$ сохр-ся

$\Rightarrow$ д-во к случаю, когда $(A|b)$ имеет СВ.

В ступенчатом виде: СЛУ (*) совместна $\Leftrightarrow$ нет строк $(0\ldots0\,|\,\underset{\neq 0}{\underline{0}})$ $\Leftrightarrow$ число строк в ступенчатом виде для A

и $(A|b)$ сов $\Leftrightarrow rk\, A = rk\,(A|b)$.

$\rightarrow$ Это значит что у расширенной матрицы одно кол. строк.

Теор: $\exists$ хотя бы одно решение.

Пу. СЛУ(*) совместна. $\Leftrightarrow rk\, A = n$ (неизв.)

Док-во

Все снова сводится к ситуации, когда A имеет ступенчатый вид. В этом случае единств. реш $\Leftrightarrow$ нет свободных $\Leftrightarrow$ равно n главных неизв.

$\Leftrightarrow A$ имеет n ненул строк $\Leftrightarrow rk\, A = n$

$\blacksquare$

Теор. Пу. $M_n\, A$

(*) имеет единств реш. $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Док-во.

Эдинственное решение $\Leftrightarrow rk\, A = rk\,(A|b) = n$

$\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

$\rightarrow$ Если у Mat A n строк, $rk\, A > n$ не может быть.

$\rightarrow$ Мы знаем что rk подматрицы $= n$

$rk\, A$ не меняется.

Замечание:

Единств. решение может быть найдено по формуле $x = A^{-1}b$ или по формулам Крамера.

Напоминание: Если $\det$ ОСЛУ $\neq 0$ и эта система имеет только одно решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Определитель матрицы

Δ_i - определитель матрицы с i-м столбцом замененным

Пу. $b = \vec{0}$ т.е СЛУ (*) однородна.

ОСЛУ $Ax = \vec{0}$

$S \subseteq F^n$ - мн-во её решений будет подпространство в F^n.

Предложение:

$\dim S = n - \operatorname{rk} A.$

Док-во.

$(A|0) \to (B|0) \leftarrow$ УСВ.

Пу. r - число ненул. строк в B. Тогда $r = \operatorname{rk} A$.

С другой стороны, $\overbrace{\text{ФСР}}^{\text{базис в } S}$ для ОСЛУ (*), состоящую из $n-r$ векторов $\Rightarrow \overbrace{\dim S = n-r}^{\text{число векторов в базисе}} = n - \operatorname{rk} A.$

∎