Лекция 14.

Напоминание:

Базис векторного пространства.

$S \subseteq V$ – базис V если:

1) S линейно независим.
2) $\langle S \rangle = V$

Линейная оболочка подмножества векторного пространства – множество всех векторов из V, представимых в виде линейной комбинации какого-то конечного набора из S.

Припомним конструкции подпространств в F^n

– S – множество решений ОСЛУ. → Оно всегда подпространство. ⟶ а работает обратно?

– $\langle V \rangle$ – подпространство

Пусть. $b_1, \dots, b_p \in F^n$

Замечание: Когда говориться что вектор порождает подпространство, мы говорим что если взять один вектор v в векторном пространстве, то подпространство порожденное этим вектором – множество всех его линейных комбинаций.

Геометрически: Если v в $\mathbb{R}^2$, то подпространство которое оно порождает это прямая, проходящая через начало координат.

$B := (b_1, \dots, b_p) \in Mat_{n \times p}(F)$.

Пусть $a_1, \dots, a_q$ – ФСР для ОСЛУ $B^T x = \bar{0}$.

ФСР – это базис подпространства решений ОСЛУ.

$A := (a_1, \dots, a_q) \in Mat_{n \times q}(F)$

Пред.

Подпростр. $\langle b_1, \dots, b_p \rangle$ является множеством решений $A^T x = \vec{0}$ (*)

→ Нам даны вектора, мы хотим задать её $\langle\rangle$ как S (решения ОСЛУ).

- Мы эти вектора кладем в строки матрицы.
- Находим ФСР.
- Сложим в строки новой матрицы → её S

Док-во. Пусть $S := \{x \in F^n \mid A^T x = \vec{0}\}$.

Имеем $\forall i = 1, \dots, q$ $B^T \cdot a_i = 0$ $\implies B^T \cdot A = \vec{0} \Rightarrow A^T \cdot B = 0 \Rightarrow A^T \cdot b_j = \vec{0}$ $\forall j = 1, \dots, p$.

$\overset{def}{\Rightarrow}$ a_i это ФСР, а ФСР это решение ОСЛУ.

$\Rightarrow b_1, \dots, b_p \in S \Rightarrow \underbrace{\langle b_1, \dots, b_p \rangle}_{rk = r} \subseteq S$

Пусть $r := rk\{b_1, \dots, b_p\} = \dim \langle b_1, \dots, b_p \rangle \Rightarrow rk\, B$.

Число элементов в V его базисе.

Наибольшее число векторов в линейно независимой подсистеме из S.

$\Rightarrow \dim S = n - rk\, A^T = n - rk\, A = n - \underset{= n - rk\, B^T}{q} = n - (n - rk\, B^T) = rk\, B^T = rk\, B = r$.

$\Rightarrow \dim \langle b_1, \dots, b_p \rangle = \dim S$.

Итог: $\langle b_1, \dots, b_p \rangle = S$ ■

- Если два подпространства:
  - Совпадают друг другу $\iff$ линейные оболочки совпадают
  - Размерности равны (Подпространства совпадают)

Следствие:

Всякое подпространство в F^n являются мн-вом решений нек-рой ОСЛУ

Факт: Если одно подпространство содержится в другом, то у их размерность $\leq$, и они равны только тогда они равны.

V - векторное пространство над полем F, $\dim V = n < \infty$

$e_1, \dots, e_n$ - базис в V.

Знаем:

$\forall v \in V\ \exists!\ x_1, \dots, x_n \in F$, т.что $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Если у нас зафиксирован некий базис, то всякий вектор по отношению к этому базису:

→ Представляется единственным способом линейной комбинации, где её коэф. будут координатами.

Опр.:

Скаляры из набора $(x_1, \dots, x_n)$ называются координатами вектора v в базисе $(e_1, \dots, e_n)$.

Напоминание: (Про базис, как некий упорядоченный набор векторов) → Зачем мы это делаем?

Когда мы работаем в плоскости, если мы по меняем оси не меняя координаты, мы в любом случае получаем другие координаты.

$S \subseteq V$ - базис векторного пространства V если:

- S линейно независим (т.е. $\nexists$ не тривиальной линейной комбинации $= 0$)
- $\langle S \rangle = V$ (т.е. множество всех векторов из V, представимых в виде линейной комбинации какого-то набора векторов из S).

Пример.

$$V = F^n, \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$$

$(x_1, \dots, x_n)$ – коорд. вектора v в стандартном базисе.

Факт: Количество векторов в базисе не зависит от выбора базиса.

В этом случае любой другой базис который мы рассмотрим будет иметь n базисов.

Рассмотрим произв набор из n векторов из $e_1', \dots, e_n' \in V$.

Так как $(e_1, \dots, e_n)$ – базис V, то: (можно выразить e_i' через линейную комбинацию)

$$e_1' = C_{11}e_1 + C_{21}e_2 + \dots + C_{n1}e_n$$

$$e_2' = C_{12}e_1 + C_{22}e_2 + \dots + C_{n2}e_n \qquad C_{ij} \in F \text{ (некий скаляр)}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$e_n' = C_{1n}e_1 + C_{2n}e_2 + \dots + C_{nn}e_n$$

$(e_1', \dots, e_n') = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$ где $C = (C_{ij}) \in M_n(F)$ → Это работает, т.к.:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & & \dots & \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{pmatrix}$$

Напоминание: **Про базовые операции с матрицами**

$$\underset{1\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}} = \underset{1\times 2}{\begin{pmatrix} \square & \square \end{pmatrix}}$$

Пред.

$(e_1', \dots, e_n')$ – базис в V $\iff$ C невырождена (т.е $\det C \neq 0$).

Док-во:

$\Rightarrow$

Мы можем выразить через него исходный базис. → $(e_1', \dots, e_n')$ базис, а значит мы его тоже можем выразить

$(e_1', \dots, e_n')$ – базис $\Rightarrow (e_1, \dots, e_n) = (e_1', \dots, e_n') \cdot C' \ (\in M_n(F)) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C \cdot C' \quad (C, C' \in M_n(F))$.

Вспомним что каждый вектор выражается через $(e_1, \dots, e_n)$, делает это единственным образом. (Благодаря линейной независимости).

Вектор e_1 это строка $(e_1, \dots, e_n)$ на первый столбец $C \cdot C'$. А какие координаты у e_1 в базисе $(e_1, \dots, e_n)$? $(1, 0, \dots, 0)$! (стандартный базис)

Из этого можно догадаться что мы получаем E.

Итог: Т.к $e_1, \dots, e_n$ лин. незав, то $C \cdot C' = E \to \det C \neq 0$.

$\Leftarrow$ $\det C \neq 0$

Достаточно показать, что $(e_1', \dots, e_n')$ линейно нез. (т.к их n векторов).

Пу. $\alpha_1 e_1' + \ldots + \alpha_n e_n' = \vec{0}$.

Тогда: $(e_1', \ldots, e_n') \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow (e_1, \ldots, e_n) \cdot \underbrace{C \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{\in F^n} = \vec{0}$

Т.к $e_1, \ldots, e_n$ лин независ, то $C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0}$

Т.е, если мы умножим на C^{-1}, то

будет $\underbrace{(e_1, \ldots, e_n)}_{\text{т.к это лин. незав.}} \cdot C \cdot C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0} \to E \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0}$. $\blacksquare$

Умножая слева на C^{-1} $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \blacksquare$$

Пу. $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(e_1', \ldots, e_n')$ – два базиса в V и $(e_1', \ldots, e_n') = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$

Опр.

C называется матрицей перехода от базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к базису $(e_1', \ldots, e_n')$.

В j-ом столбце стоят матрицы C стоят коорд. вектора e_j' в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$.

Замечание:

Матрица перехода от $\underset{(e_1', \ldots, e_n')}{e'}$ к $\underset{(e_1, \ldots, e_n)}{e}$ – C^{-1}.

Замечание: Матрица перехода к себе это E.

Замечание: Самый простой вектор в векторном пространстве это вектор.

Пу. $v \in V$, $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ - выражение в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$

$v = x_1' e_1' + \ldots + x_n' e_n'$ - ———— $(e_1', \ldots, e_n')$.

$(e_1', \ldots, e_n') = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$

Предложение:

Связь коорд. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \to$ Решение СЛУ.

$C \in M_n(F)$, и $\det \neq 0$ (не вырожденая $\Rightarrow$ будет иметь одно решение).

Док

$v = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$v = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

Т.к $(e_1, \ldots, e_n)$ линейно независ. $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ $\blacksquare$

Формула преобразования вектора при замене базиса

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

V - вектр. пр. над F, $\dim V < \infty$

$U, W \subseteq V$

$U \cap W$ - тоже подпр. в V → Все векторы которые лежат и там и там.

Док: Что да это подпространство

1. $\vec{0} \in U \cap W$.
2. $v, w \in U \cap W \Rightarrow v + w \in U \cap W$
3. $v \in U \cap W$, $\lambda \in F \Rightarrow \lambda v \in U \cap W$.

Важно отметить что объединение подпространств не будет подпространством.

Опр.

Сумма подпространств U, W, - мн. во $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$

Утв.

$U + W$ - подпространство в W

Док-во

1. $\vec{0} \in U, W \Rightarrow \vec{0} \in U + W$.
2. Пусть $u_i \in U$, $w_i \in W$, $u_1 + w_1 = a$, $u_2 + w_2 = b \Rightarrow a + b \in U + W$.

$$\downarrow$$
$$(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2). \ \blacksquare$$

3. Пусть $\lambda \in F$, $v \in U + W$. $\Rightarrow \lambda v \in U + W$

$v = (u_1 + w_1)$

$\lambda(u_1 + w_1) = \lambda u_1 + \lambda w_1 \in U + W$. $\blacksquare$

$$U \cap W \subseteq U + \vec{0} \subseteq U + W$$

↳ Расширим до W.

$\Rightarrow \dim(U \cap W) \le \dim U \le \dim(U + W)$.

$\le \dim W \le \dim(U + W)$.

Теорема.

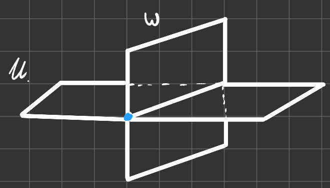
$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W.$

Пример:

Любые две плоскости в $\mathbb{R}^3$ имеют общую прямую.

$\dim U = \dim W = 2 \to \dim(U + W) \le 3.$

$V = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim(U \cap W) \ge 2 + 2 - 3 = 1.$



Док-во.

Пусть $\dim(U \cap W) = p$, $\dim U = q$, $\dim W = r$.

Пусть $a := \{a_1, \dots, a_p\}$ - базис в $U \cap W$.

Т.к. $U \cap W \subseteq U$, $U \cap W \subseteq W$, то a можно дополнить до базиса в U и до базиса в W, — Представлен алгоритм в семинаре 13.

$\exists\, b = \{b_1, \dots b_{q-p}\}$ т.что $a \cup b$ - базис U

$\exists\, c = \{c_1, \dots c_{r-p}\}$ т.что $a \cup c$ - базис W.

Докажем, что $a \cup b \cup c$ - базис $U + W$.

1.1). $\langle a \cup b \cup c \rangle = U + W$. ($\Rightarrow$)

$v \in U + W \Rightarrow v = u + w \; (u \in U, w \in W).$

$$\left.\begin{aligned} &u \in \langle a \cup b \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle \\ &v \in \langle a \cup c \rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = u + w \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle$$

$\Rightarrow U + W \subseteq \langle a \cup b \cup c \rangle.$

1.2). $\langle a \cup b \cup c \rangle \subseteq U + W$, т.к. ($\Leftarrow$)

$$\underbrace{\langle a \rangle + \langle b \rangle}_{\subseteq U} + \underbrace{\langle c \rangle}_{\subseteq W} \subseteq U + W.$$

2.) Проверим её линейно нзв.

Замечание: Для доказательства лин.нез. $\exists$ стандартные рассуждения.

Пусть $\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_{x} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p}}_{y} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{r-p} c_{r-p}}_{z} = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad x + y + z = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad z = -x - y \in U$, с другой стороны, $z \in W$

$\Rightarrow z \in U \cap W \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in F$, т.что $z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$.

$$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{r-p} c_{r-p} = \vec{0}$$

Это линейная базиса $a \cup c$ пространства W

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{r-p} = 0$ и $z = \vec{0}$.

Но тогда.

$x + y = \vec{0}$

Это линейная комбинация векторов базиса $a \cup b$ пространства U.

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{q-p} = 0$.

Под-итог: $a \cup b \cup c$ лин. нез.

Итог: $a \cup b \cup c$ – базис в $U + W$.

Тут можно найти как мы обосновали что размерности так вычитаются.

$$\dim(U+W) = |a| + |b| + |c| = p + (q-p) + (r-p) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

$\blacksquare$