Лекция 16.

Напоминания с предыдущей лекции.

Пусть V, W - векторные пространства над полем F.

Опр.

Отображение $\varphi: V \to W$ называется линейным, если

1). $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ $\forall v_1, v_2 \in V$

2) $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$ $\forall v \in V, \forall \lambda \in F$

Опр.

Отображение $\varphi: V \to W$ называется изоморфизмом, если φ линейно и биективно.

Предложение:

Если $\varphi: V \to W$ - изоморфизм векторных пространств, то $\varphi^{-1}: W \to V$ - тоже изоморфизм.

Док-во.

Так как φ^{-1} биективно, необходимо доказать что φ^{-1} линейна

Пусть $w_1, w_2 \in W$ $\to$ $w_1 = \varphi(\varphi^{-1}(w))$ $w_2 = \varphi(\varphi^{-1}(w))$.

1. $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(w_1)) + \varphi(\varphi^{-1}(w_2))) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(w) + \varphi^{-1}(w))) = \varphi^{-1}(w) + \varphi^{-1}(w)$

2. $\varphi^{-1}(\lambda w) = \varphi^{-1}(\lambda \varphi(\varphi^{-1}(w))) = \varphi^{-1}(\varphi(\lambda \varphi^{-1}(w))) = \lambda \varphi^{-1}(w)$.

$\blacksquare$

Пр. $\exists$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ \varphi"'] & V \arrow[r, "\varphi"] & W \end{tikzcd}$$

Важно зафиксировать порядок.

$\varphi \circ \psi : U \to W$

$\varphi \circ \psi : \varphi(\psi(u)) \quad \forall u \in U$

Предложение:

2). φ, ψ изоморфизмы, то $\varphi \circ \psi$ изоморфизмо.

1). φ, ψ линейны, то $\varphi \circ \psi$ тоже линейно.

Док-во.

1). $(\varphi \circ \psi)(v_1 + v_2) = \varphi(\psi(v_1 + v_2)) = \varphi(\psi(v_1)) + \varphi(\psi(v_2)) = \varphi \circ \psi(v_1) + \varphi \circ \psi(v_2)$.

$(\varphi \circ \psi)(\lambda v_1) = \varphi(\psi(\lambda v_1)) = \varphi(\lambda \psi(v_1)) = \lambda \varphi(\psi(v_1)) = \lambda \varphi \circ \psi(v_1)$.

2). Композиция двух биекций это биекция.

Итог: $\varphi \circ \psi$ — изоморфизм. ▨

Опр:

Два векторных пространства $V, W \leq F$ называют изоморфными, если $\exists \varphi : V \simeq W$.

Теорема:

Изоморфность — отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.

↳ Имеет три свойства.

1. Рефлексивность
2. Симметричность
3. Транзитивность.

Док-во.

1. Рефлексивность: $V \simeq V$ $(\exists \mathrm{id} : V \simeq V)$
2. Симметричность: $V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$ (предложение, что φ^{-1})
3. Транзитивность: $U \simeq V$, $V \simeq W \Rightarrow U \simeq W$ (предложение 2).

Опр.

Классы эквивалентности отношения изоморфности называются классами изоморфизма (векторных пространств над полем F).

Зачем нам надо это?

- Изоморфизм это одинаковость с точки зрения линейной алгебры.
- Пу. $V, W \leq \mathbb{R}^n$

Мы умеем работать с V, но у нас есть задачи в W. Что делать?

Если $V \simeq W$ то мы можем преобразовать её в знакомом векторном пространстве.

Пример такой проблемы: (Экзамен)

$AX = XA$ и надо найти все X которые являются

Пример:

$F^n \simeq F[x]_{\leq n-1}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow a_1 + a_2 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

Теорема:

Пу. V, W – два конечномерных векторных пространства над F. Тогда $V \simeq W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

Взаимозначное соответствие: Соответствие между множествами называется взаимозначным если каждому элементу множества A соот $\exists!$ элемент множ B.

- Соответствие между множествами X и Y называется подмножество декартового произведения этих множеств

Классы изоморфизмов в $(<\infty)$ параметризуются $\mathbb{Z}^+$.

Лемма:

$\dim V = n \Rightarrow V \simeq F^n$.

Док-во.

Линейное отображение $\exists$.

Фиксируем произвольный базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $V \Rightarrow \varphi: V \to F^n$

1. Линейность?

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n \qquad \varphi: \text{изоморфизм.}$$

2. Биективность ?

Берем базис в пространстве и разложение на координаты.

Лемма 2.

Если $\varphi: V \to W$ – изоморфизм и $(e_1, \dots, e_n)$ – базис V, то $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ – базис в W.

Док-во.

Характеризация базиса – базис это такой вектор что $\forall$ другой вектор разлагается единственным способом.

Пусть $w \in W$ – произв. вектор.

Тогда $\varphi^{-1}(w) \in V \Rightarrow \varphi^{-1}(w) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ для некоторых $x_1, \dots, x_n \in F$

Применим φ к обеим частям $\Rightarrow$ $\underset{W}{\underset{\parallel}{\varphi^{-1}(\varphi(w))}} = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$.

$\Rightarrow w \in \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$

Остается показать что такое выражение $\exists!$

Пусть теперь $w = y_1 \varphi(e_1) + \dots + y_n \varphi(e_n)$. Тогда применив e^{-1} к обеим частям, получим:

$$\varphi^{-1}(w) = \varphi^{-1}(y_1 \varphi(e_1) + \dots + y_n \varphi(e_n)) = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n.$$

$\Downarrow$

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n.$$

Т.к $(e_1, \dots, e_n)$ – базис в V, то $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.

Итог: $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ – базис в V ∎

Док-во. Теоремы

($\Rightarrow$) Следует из леммы 1

Если $V \simeq W$ то V и W изоморфизмы, и в этом изоморфизме базис переходит в базис, а размерность это # базисов.

($\Leftarrow$) $\dim V = \dim W = n \Rightarrow$ (По предложению 2).

$V \simeq F^n$, $W \simeq F^n$ $\underset{\text{по транзитивности}}{\Rightarrow}$ $V \simeq W$

Как задавать линейные отображения?

V, W — в.п. над F.

Важно отметить что выбор базиса превращает в.п. в F^n !

- $\forall$ векторное пространство $\dim = n \simeq F^n$.

Выбрать базис можно разными способами. ↳ Почему?

Задание.

> Пусть наше векторное пространство $\dim = n$. Можно установить изоморфизм с F^n, надо сделать это.
>
> Это делается путем нахождения базиса.

- Каждому базису соот. свой изоморфизм.

Фиксируем в V базис $(e_1, \dots, e_n)$.

Предложение.

1) Всякое линейное отображение $\varphi: V \to W$ $\exists!$ определяется вектор. $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$

2) $\forall w_1, \dots, w_n \in W$ $\exists!$ $\varphi: V \to W$ такое что $\varphi(e_1) = w_1, \dots, \varphi(e_n) = w_n$.

1). Если $\exists$ базис, и мы знаем все значения на базисе то мы знаем все линейное отображение.

2). Эти образы могут быть какими угодно.

Док-во.

1). $\forall v \in V$ имеем $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow \varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$.

2). Рассмотрим отобр. $\varphi: V \to W$, т. что $\forall v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ имеем $\varphi(v) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$. → Мы задали образы векторов.

Тогда φ линейно. (упр.)

1. $\varphi(v + w) = x_1(v_1 + w_1) + \dots + x_n(v_n + w_n)$.

$= x_1 v_1 + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n + x_n w_n$

$= x_1 v_1 + \dots + x_n v_n + \dots + x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$

2. $\varphi(\lambda v) = x_1(\lambda v_1) + \dots + x_n(\lambda v_n) = \lambda x_1 v_1 + \dots + \lambda x_n v_n = \lambda(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = \lambda \varphi(\lambda)$.

и, $\varphi(e_i) = w_i \ \forall i \Rightarrow$ Требуемое φ $\exists$. <= Единственность <= в 1). $\blacksquare$

Всякое линейное отображение однозначно определяется тем куда перешли базисные вектора
$\Downarrow$
Если мы задали задали куда они перешли то все, дальше или идти некуда

V, W – векторные пр-ва над F. ($\dim F < \infty$).

$\varphi: V \to W$ – линейное отображение

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ – базис в V, $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ – базис в W

$\forall j = 1, \dots, n$ имеем $\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + \dots + a_{mj} f_m = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot f_i = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

Образ каждого базисного вектора мы разложили по базису в простр. W

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m) \cdot A, \text{ где } A = (a_{ij}) \in Mat_{m \times n}(F).$$

Опр

Mat A называется матрица линейного отображения φ в паре базисов $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ (или по отношению к базисам $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$).

$$\boxed{A = (\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}).}$$

Важно отметить: В j-м столбце матрица A соят. координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.

Обозначение:

$Hom(V, W) :=$ мно-во всех лин. отобром. из V в W.

Следствие из пред.

При фикс. $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$, отобр. $\varphi \to A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является биекцией между $HOM(V, M)$ и $Mat_{m \times n}(F)$.

Пример

0) $\varphi: V \to W$, $e(v) = \vec{0} \ \forall v$.

$\forall \mathbb{e}, \mathbb{f}$ $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

0

③ $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – ортогональная проекция на плоскость O_{xy} → Мы получим $Mat_{2\times 3}$ → Это исходит из куда X откуда.

$\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{f} = (e_1, e_2)$ – ______ $\mathbb{R}^2$

$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Куда переход $\varphi(e_1)$ $\varphi(e_2)$ $\varphi(e_3)$

④ $\varphi : F[x]_{\leq n} \to F[x]_{\leq n-1}$ $\quad \varphi(f) := f'$

$\underbrace{\mathbb{e} = (1, x, x^2, \dots, x^n)}$ $\underbrace{\mathbb{f} = (1, x, \dots, x^{n-1})}$

При построение сначала тут, а потом тут

$$\underset{n \times (n+1)}{A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

⑥ $\varphi : F^n \to F^m$, $\varphi(x) = A \cdot x$

$\mathbb{e}$ – станд в F^n

$\mathbb{f}$ – станд в F^m

$$\underset{m \times n}{A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})} = \boxed{A}$$

Берем в качестве x ∀ базисный вектор, умножим, получим 1-й столбец матрицы A, и идем так далее.