Пример:

$n = m = 1$: $\quad ax = b$

1. $a \neq 0 \Rightarrow$ Одно решение $x = \frac{a}{b}$
2. $a = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = b$

   2.1 $b \neq 0 \Rightarrow$ нет решений

   2.2 $b = 0 \Rightarrow x$ - любое $\Rightarrow$ бесконечно много решений.

$*$ $Ax = b \leftarrow$ матричная форма записи СЛУ $(*)$

$(A \mid b) \leftarrow$ расширенная СЛУ.

Опр:

СЛУ называеться совместной если есть хотя-бы 1 решение (в противном случае она будет несовместной)

Опр:

Две СЛУ от одних и тех же неизвестных называются эквивалентными, если они имеют одинаковые множества решений.

Пример:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 1 \\ 2x_2 = 1 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \rightarrow \text{множества решений } \{(1/2), (1/2)\}$$

Лекция номер 3.

Напоминание:

- Мы ввели понятие СЛУ. $Ax = b$.
- Расширенная матрица СЛУ это $(A|B)$ где A это коэф от наших уравнений

Элементарные преобразования СЛУ.

1. К i-му уравнению прибавить j-е умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ | $Э_1(i, j, \lambda)$
2. Поменять местами i-е и j-е уравнения $(i \neq j)$ | $Э_2(i, j)$
3. i-е уравнение умножить на λ. $(\lambda \neq 0)$ | $Э_3(i, \lambda)$

$\longrightarrow$ Эти элементарные преобразования строк расширенной СЛУ.

Лемма о сохранении множества решений.

Элемен. преобразование СЛУ сохраняют множество её решений.

Док:

Достаточно доказать утверждение для одного элем. преобр.

Пусть СЛУ $(*)$ применим $Э_i$, получив СЛУ $(**)$

1. Всякое решение СЛУ $(*)$, тоже решение СЛУ $(**)$ $\rightarrow$ это утверждение.

Почему оно правда.

$(1) \rightarrow (2)$

$\rightarrow$ Необходимо вспомнить что решение СЛУ это такой набор неизвестных при подстановке которых получается тождество.

→ $Э_3$, тождество умножили на скаляр, оно все еще верное тождество.

→ $Э_2$, мы переставили 2 тождество. то они все еще тождества.

→ $Э_1$, из набор тождеств мы одно умножили на λ и прибавили то все еще будет тождества.

Напоминание

→ Два множества совпадают если все элементы первого множества лежит во втором и наоборот. (1) → (2)

2. СЛУ(*) тоже получается из СЛУ(**) одним элементарным преобраз.

СЛУ(*) → СЛУ(**)	СЛУ(**) → СЛУ(*)
$Э_1(i, j, \lambda)$	$Э_1(i, j, -\lambda)$
$Э_2(i, j)$	$Э_2(i, j)$
$Э_3(i, \lambda)$	$Э_3(i, 1/\lambda)$

Опр:

Ведущий элемент не нулевой строки, это её первый не нулевой элемент.

Опр:

Матрица M называется ступенчатой или имеет ступенчатый вид если:

1. Номера ведущих элементов не нулевых строк в M строго возрастают.
2. Все нулевые строки стоят в конце (= внизу).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \lozenge & * & & & & & & \\ 0 & 0 & \lozenge & * & * & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lozenge & * & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lozenge & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Опр:

Матрица M имеет УСВ если:

1. M. имеет ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы строк в M равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим эл-ом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 & & * & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & & * & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ В добавок к тому что мы заменили 0 на 1, вся строка сверху и снизу будут 0.

Теорема:

1) Всякую матрицу при помощи Эi (Элементарное преобразование строк) можно привести к ступенчатому виду

2) Всякую матрицу при помощи Эi (Элементарное преобразование строк) можно привести к УСВ.

Док:

1. Алгоритм: $C \in Mat_{m \times n}$. (Произвольную матрицу к ступенчатый вид)

Если $C = 0$, то уже требуемый вид.

Нулевая матрица ступенчатая и УСВ.

Иначе:

Шаг 1. Ищем первый ненулевой столбец в C, пусть он j.

Шаг 2. Меняя местами строки если нужно, добиться $C_{1j} \neq 0$

Шаг 3. Выполняем $Э_1\left(2, 1, -\frac{C_{2j}}{C_{1j}}\right), Э_2\left(3, 1, -\frac{C_{3j}}{C_{1j}}\right), \dots, Э_n\left(n, 1, -\frac{C_{nj}}{C_{1j}}\right)$

В результате получаем $C_{new} = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \\ 0 \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \hline \\ C' \\ \\ \end{matrix} \end{array}\right)$, а дальше повторяем для C'

→ Алгоритм закончиться → $C' = 0$
↳ C' больше не существует.

2. Алгоритм (Приведем ступенчатую матрицу к матрице УСВ).

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccccc} & j_1 & j_2 & & j_3 & & & j_r \\ \end{array}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \lozenge & * & & & & & * \\ 0 & 0 & \lozenge & * & * & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lozenge & * & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lozenge & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $C_{1,j_1}, C_{2,j_2}, \ldots, C_{r,j_r}$ – ведущие элементы строк матрицы C.

Шаг 1. Выполняем $Э_3(1, \frac{1}{C_{1,j_1}}), Э_3(2, \frac{1}{C_{2,j_2}}), \ldots, Э_3(n, \frac{1}{C_{n,j_n}})$ и получаем в новой матрице $C_{1,j_1} = C_{2,j_2} = \ldots = C_{n,j_n} = 1$

→ Когда мы обнуляем строк в Шаг 2. оптимально занулять с конца.

Шаг 2. Выполняем $Э_1(r-1, r, -C_{r-1,j_r}), Э_2(r-2, r, -C_{r-2,j_r}), \ldots, Э_1(1, r - C_{1,j_r})$, получаем нули в столбце над C_{r,j_r}.

Далее повторяем процесс для $C_{1,j_{r-1}}, C_{2,j_{r-1}}, \ldots, C_{r-1,j_{r-1}}$.

Метод Гаусса решения СЛУ (метод исключения переменных).

Дана СЛУ.

→ Помним что $Эi$ для $A \mid b$ сохраняет мн-во решений.

Алгоритм:

Приводим $A : (A \mid b)$, A к ступенчатому виду.

↳ прямой ход Метода Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \ldots & 0 & a_{1,j_1} & * & \ldots & * & & * \\ & & & & a_{2,j_2} & * & \ldots & * & \vdots \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & & a_{r,j_r} & & * \\ & & & & & & & & b_{r+1} \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & b_m \end{array}\right)$$

Получаем некие случаи.

1. $\exists i \geq r+1$, такой что $b_i \neq 0$.

   В новой СЛУ i-е уравнение $\mid 0x_1 \ldots 0x_n = b_i \rightarrow$ Решений нет.

2. $b_i = 0 \ \forall i > r+1$

   Применяя элем. преоброзование строк расш. матрицы, приводим A к УСВ.

   (обратный ход метода Гаусса)

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & * & \dots & * & & * \\
 & & & & a_{2j_2} & * & \dots & * & \vdots \\
 & & & & & \ddots & & & \\
 & 0 & & & & & a_{rj_r} & & * \\
 & & & & & & & & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & b_m
\end{array}\right)$$

→ столбцы с ведущими элементами главные, а остальные свободные.

2.1 $r = n$ (Все неизвестные главные <=> нет свободных неизвестных.

М в УСВ
$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & & & 0 & b_1 \\
 & 1 & & & b_2 \\
 & & \ddots & & \vdots \\
0 & & & 1 & b_r \\
0 & \dots & & 0 & 0
\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l}
x_1 = b_1 \\
x_2 = b_2 \\
\vdots \\
x_n = b_r
\end{array}\right)$$

2.2 $r < n$ (Есть хотя одна свободная неизвестная).

В каждом уравнение будет иметь и главные$^{(1)}$ и свободные, получается что придется выразить все главные неизвестные через свободные.