Линейная Алгебра и Геометрия. Лекция 22.

Пусть $x, y \in E \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ неравенство К-Б. даёт $-|x|\cdot|y| \le (x,y) \le |x|\cdot|y| \Rightarrow$

Пусть $x, y \in E \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ неравенство К-Б. даёт что $-|x|\cdot|y| \le (x,y) \le |x|\cdot|y| \Rightarrow -1 \le \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|} \le 1$

Это cos в $\mathbb{R}^3$ случае.

Предложение:
$\forall x, y \in E$, $|(x,y)| \le |x|\cdot|y|$, с пропорциональным равенством.

Пример: $|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \le \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$

Опр. Угол между ненулевыми векторами

Угол между двумя ненулевыми векторами $x, y \in E$ — такой $\alpha \in [0; \pi]$, что

$$\cos\alpha = \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}$$

Опр. Матрица Грама.

Матрицей Грама системы векторов $v_1, \dots, v_k$ называется:

$$G(v_1, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \dots & (v_2, v_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \dots & (v_k, v_k) \end{vmatrix}$$

Напоминание:
Вектора ЛНЗ если нет тривиальной линейной комбинации $= 0$.

Замечание.

Если $v_1, \dots, v_k$ — ЛНЗ, то они образуют базис в $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \Rightarrow G(v_1, \dots, v_k)$ — Mat бил. ф $(\cdot,\cdot)|_{\langle v_1, \dots, v_k \rangle}$ в базисе $(v_1, \dots, v_k)$.

Пример:

$E = \mathbb{R}^n$ со стандарт скал. произв.

$v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ запишем их в столбцы Mat $A \in Mat_{n \times k}(\mathbb{R})$, $v_i = A^{(i)}$

$$\Rightarrow \boxed{G(v_1, \dots, v_k) = A^T \cdot A.}$$

Предлож.

$\det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$, причём "$=0$" $\Leftrightarrow v_1, \dots, v_k$ лин. зависимы.

Док-во.

Если $v_1, \dots, v_k$ ЛНЗ, то они образуют базис в $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \Rightarrow G(v_1, \dots, v_k)$ – Mat кв. ф.

$Q(x) = (x, x)\Big|_{\langle v_1, \dots, v_k \rangle}$ в б.с $(v_1, \dots, v_k)$.

$\Rightarrow \det G(v_1, \dots, v_k) > 0$ по крит Сильвестра. $\to$ Т.к по Якоби мы знаем что миноры $G(v_1, \dots, v_k) > 0$

Если $v_1, \dots, v_k$ лин. зав, то $\alpha_1 v_1 + \alpha_k v_k = 0$ для некоторых $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{(0, 0)\}$.

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_k v_k = 0$

$\Rightarrow \forall j = i$ имеет

$\alpha_1 (v_1, v_j) + \dots + \alpha_k (v_k, v_j) = (\vec{0}, v_i) = 0 \qquad \Rightarrow G = G(v_i, v_k)$.

$\Rightarrow \alpha_1 G_{(1)} + \dots + \alpha_k G_{(k)} = 0 \Rightarrow$

строки в G лин. зав. $\Rightarrow \det G = 0$. ∎

Опр. Ортогональные вектора

Векторы $x, y \in \mathbb{E}$ называеться ортогональны если $(x, y) = 0$.

Опр. Ортогональна система нулевых векторов.

Система ненулевых векторов $(v_1, \dots, v_n)$ называеться:

1). Ортогональной если $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$ (т.е $G(v_1, \dots, v_k)$ diag).

2). Ортонормированной, если $(v_i, v_j) = 0\ \forall i \neq j$ и $(v_i, v_i) = 1\ \forall i$ (т.е. $(v_1, \ldots, v_k)$ ортогональна и длины всех векторов равны 1). ($\Leftrightarrow G(v_1, \ldots, v_k) = E$).

Замечание:
Всякая ортогональная и ортонорм система векторов являеться лин. нз:

$$\det G(v_1, \ldots, v_k) = |v_1|^2 \cdot \ldots \cdot |v_k|^2 \neq 0.$$
$$> 0.$$

Опр. Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{E}$ назв. ортогональным (ортонормированными) если он являеться ортогональной (ортонормированной) системой векторов.

Пример.

$\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со станд. скалярн произв $\Rightarrow$ станд. $e = (e_1, \ldots, e_n)$ является ортонормированный.

- Попарно ортогональны
- Ортонормированы (длины = 1)

Теорема.
Во всяком конечномерном $\mathbb{E}$ пространстве $\exists$ ортонормированный б.с.

До-во.
$\forall$ кв. ф $\rightarrow$ нормальному в., она (+) определенна $\rightarrow$ сумма квадратов. $\rightarrow$ её Mat E.

Формальнее: Следует из теор. о приведении кв. ф к норм вид. для $Q(x) = (x, x)$

положительно определенно

Замечание:
Если $e_1, \ldots, e_n$ - ортонормир б.с в $\mathbb{E}$ и $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$, то (x, y)

$$(x, y) = (x_1, \ldots, x_n) \underbrace{G(e_1, \ldots, e_n)}_{E} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

Пред. $(e_1, \ldots, e_n)$ - ортогональный б.с в $\mathbb{E} \Rightarrow \forall v = \frac{(v_1, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \ldots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$ $\rightarrow 1$

В частности, если $e_1, \ldots, e_n$ ортонормирован то, $\forall v \in \mathbb{E}$ $v = (v, e_1) e_1 + \ldots + (v, e_n) e_n$.

Док-во

$$V = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n \Rightarrow (V, e_i) = \lambda_1 \underbrace{(e_1, e_1)}_{0} + \underbrace{\ldots}_{0} + \lambda_i \underbrace{(e_i, e_i)}_{1} + \ldots + \lambda_n \underbrace{(e_n, e_n)}_{0}$$

Как построить ортонормированный б.с в $\mathbb{E}$?

Если e – ортогональный б.с, то

$$f_1 = \frac{e_1}{|e_1|}, \ldots, f_n = \frac{e_n}{|e_n|} \text{ – ортонормир. б.с}$$

$\Rightarrow$ достаточно научиться строить ортогональ базис

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ лнз. система в $\mathbb{E}$. $G = G(e_1, \ldots, e_k)$. G_i – левый верхний $i \times i$ блок.

$\det G_i > 0$ по крит. Сильвестра.

$\Rightarrow$ Применим метод Якоби. Применим его $\to (f_1, \ldots, f_k)$ – новая система векторов.

$$(e_1, \ldots, e_k) \cdot C, \text{ где } C = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Система $f_1, \ldots, f_k$ ортогональна.

$$f_1 = e_1$$

$$f_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle$$

$$f_3 \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle$$

$$\vdots$$

$$f_k \in e_k + \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$$

Пред.

1). $\forall i = 1, \ldots, k \quad \langle e_1, \ldots, e_i \rangle = \langle f_1, \ldots, f_i \rangle$

2) $\forall i = 1, \ldots, k \quad f_i = e_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j$ $(*)$.

3). $\det G(f_1, \ldots, f_k) = \det G(e_1, \ldots, e_k)$ (♡)

Док-во.

1) $(f_1, \dots, f_i) = (e_1, \dots, e_i) \cdot C_i$ – где C_i левый верхний $i \times i$ блок в C $\Rightarrow f_1, \dots, f_i$ другой б.с

где λ_i часть Mat C (переход)!

2) $f_i \in e_i + \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle = e_i + \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle \Rightarrow f_i = e_i + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{i-1} f_{i-1} = e_i =$

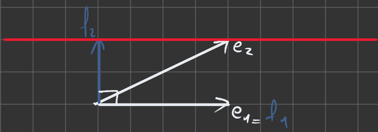
$- \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 - \dots - \lambda_{i-1} f_{i-1} + f_i$

По форме $\forall j = 1, \dots, i-1 \quad -\lambda_j = \dfrac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)}$

3). Было

Построение б.с $(f_1, \dots, f_n)$ по $(*)$ называется методом **ортогонализации Грама - Шмидта.**

Графически



Упражнение:
Модифицировать метод ортогонализации Г-Ш так чтобы он мог работать с произволь. (не обязт. ЛНЗ) системами векторов