Лекция 5

Опр:

Произведение (или композиция) двух перестановок $\sigma, \rho \in S_n$ — это перестановка $\sigma \cdot \rho$, действующая по правилу $(\sigma\rho)(x) = \sigma(\rho(x))$ $\forall\, x \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пример

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Замечание: Умножение перестановок не коммутативно $\hookrightarrow \sigma\rho \neq \rho\sigma$ (как и матрицы кстати.)

Утверждение: Умножение перестановок ассоциативно, то есть $(\sigma\rho)\pi = \sigma(\rho\pi)$ $\forall \sigma, \rho, \pi \in S_n$.

$(ab)c = a(bc)$

Доказательство:

Для всякого $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеем:

1. $((\sigma\rho)\pi)(x) = (\sigma\rho)\,\overbrace{\pi(x)}^{\to \text{какой 1 элем.}} = \sigma(\rho(\pi(x)))$

↳ по определению мы сначала должны применить π.

↳ должны сначала пройти по $\boxed{\rho}$ ↳ Эта буква называется ро.

2. $(\sigma(\rho\pi))(x) = \sigma((\rho\pi)(x)) = \sigma(\rho(\pi(x)))$

К элементу x сначала надо применить перестановку $\rho\pi$ → Опять по определению π идет первым.

Опр:

Перестановка $id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$ называется тождественной.

Свойства:

1. $id \cdot \sigma = \sigma \cdot id$ $\forall \sigma \in S_n$
2. число инверсий в id равно $0 \Rightarrow sgn(id) = 1$ (она четная)

Опр:

Для всякой перестановки $\sigma \in S_n$ перестановка $\sigma^{-1}: \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ называется обратной к σ.

Свойства:

1. $\sigma^{-1} \cdot \sigma = \sigma \cdot \sigma^{-1} = id$

Наблюдение:

Для всякой перестановки $\rho \in S_n$ верно: когда $\{i,j\}$ пробегает все неупорядоченные пары в множестве $\{1,\dots,n\}$, $\{\rho(i),\rho(j)\}$ тоже пробегает все неупорядоченные пары в $\{1,\dots,n\}$.

Пример:

$n = 4$, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\{i,j\}$	1 2	1 3	1 4	2 3	2 4	3 4
$\{\rho(i),\rho(j)\}$	3 1	3 4	3 2	1 4	1 2	4 2
=	1 3	3 4	2 3	1 4	1 2	2 4

это наш образ для пар $\{i,j\}$

меняем знак на правильный

Теорема:

$\forall\ \sigma,\rho \in S_n \quad sgn(\sigma\rho) = sgn(\sigma)\cdot sgn(\rho)$.

Док:

Для каждой пары $i<j$ рассмотрим величины $\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если пара } \{i,j\} \text{ образует инвер. в } \rho. \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если пара } \{\rho(i),\rho(j)\} \text{ образует. инв в } \sigma. \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если пара } \{i,j\} \text{ образует инв в } \sigma\rho. \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ & & \rho \downarrow & & \\ \rho(1) & \rho(2) & \rho(3) & \dots & \rho(n) \\ & & \sigma \downarrow & & \\ \sigma\rho(1) & \sigma\rho(2) & \sigma\rho(3) & \dots & \sigma\rho(3) \end{array}$$

Число инверсий в ρ равно $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij}$

—— // —— $\sigma\rho$ равно $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij}$

—— // —— σ равно $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} \beta_{ij}$ → Почему это именно β?

• Мы должны подсчитать все инверсии, а для β (где $\{i,j\}$ именно $\{\rho(i),\rho(j)\}$) это количество не отличается.

Переберем возможные варианты:

α_{ij}	0	0	1	1
β_{ij}	0	1	0	1
δ_{ij}	0	1	1	0

→ Это как раз показывает изменяется знак (1) или нет (0).

$$\begin{array}{ccccc} \ldots & i & < \ldots & j & \ldots \\ \ldots & p(i) & \ldots & p(j) & \ldots \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \ldots & \sigma p(i) & & \sigma p(j) & \ldots \end{array}$$

Итог: $\delta_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \pmod 2$.

В результате имеем $\operatorname{sgn}(\sigma p) = (-1)^{\sum \delta_{ij}} = (-1)^{\sum(\alpha_{ij}+\beta_{ij})} = (-1)^{\sum \alpha_{ij}} \cdot (-1)^{\sum \beta_{ij}} = \operatorname{sgn} p \cdot \operatorname{sgn} \sigma$ ■

Следствие:

$\forall \sigma \in S_n \ \operatorname{sgn}^{-1} = \operatorname{sgn} \sigma.$

Док:

$$1 = \operatorname{sgn} id = \operatorname{sgn}(\sigma \cdot \sigma^{-1}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \sigma^{-1} \Rightarrow \operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \sigma^{-1}$$ ■

Упр: Число инверсий в σ и в σ^{-1} одинаково.

Пусть $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$

Рассмотрим перестановку $\tau_{ij} \in S_n$, определенную так:

$\tau_{ij}(i) = j$, $\tau_{ij}(j) = i$, $\tau_{ij}(k) = k \ \ \forall k \neq i, j$.

Опр:

Перестановки вида τ_{ij} называются транспозицию. → Для каждой не упорядоченной пары есть транспозицию.

Замечания

$\tau \in S_n$ – транспозиция $\Rightarrow \tau^2 = id$, $\tau^{-1} = \tau$.

Лемма:

$\tau \in S_n$ – транспозиция $\Rightarrow \operatorname{sgn} \tau = -1$.

Док:

Пусть $\tau = \tau_{ij}$, м. считать $i<j$. Подсчитаем явно число инверсий в τ.

$1 \ldots i-1 \ \boxed{i} \ i+1 \ldots j-1 \ \boxed{j} \ j+1 \ldots n$ → в них происходят изменения

$1 \ldots i-1 \ \boxed{j} \ i+1 \ldots j-1 \ \boxed{i} \ j+1 \ldots n$ → Это наш образ

Подсчитаем кол. инверсий $\{i,k\}$. $i+1 \le k \le j \Rightarrow j-i$ пар

$\{k,j\}$ $i+1 \le k \le j-1 \Rightarrow j-i-1$ пар

$1 \dots i \to$ все элементы левее i не делают перестановки

$i \dots j \to$ Будут инверсии т.к в образе j стоит на позиции i, и будет больше всех до i.

$j \dots n \to$ Нет инверсий так как все после j все равно останутся больше j.

i

$1 \dots i \to$ Нет инверсий, оно будет меньше i

Всего инверсий $2(j-1)-1$ = не четное число $\Rightarrow \operatorname{sgn} \tau = -1$.

Следствие:

Чтобы покрыть как можно больше n перестановок.

При $n \ge 2$, отображение которое каждой перестановки сопоставляет результат произведения на транспозицию является биекцией между множеством всех четных перестановок и множество не четных перестановок.

это сюрекция и инъекция.

→ Важный факт, кол. четных и нечетных перестановок равно при $n \ge 2$.

Определители 2го и 3го порядка.

Опр:

Некая сумма

Рассматриваем что за слагаемое ей соот.

Пу. у нас есть $A \in M_n$. Определитель матрицы A называется $\det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)}$.

в i-й строке надо выбрать элемент $\sigma(i)$

Для каждой перестановки есть свое слагаемое → Всего перестановок $n!$, а значит и слагаемых $n!$

→ В матрице нет перестановок.

1. Вместе с матрицей поступило число n.
2. Для n мы знаем множество S_n перестановок на n элементов.
3. Для каждой перестановки в природе мы выписываем некое слагаемое, и потом эти слагаемые суммируем.

Стоит разобрать причину за $a_{1,\boxed{\sigma(1)}}$

что это означает?

Примеры:

тождественная

$n=2$

	1 2	1 2
σ	1 2	2 1
$\operatorname{sgn}\sigma$	1	-1

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n=3$

	1 2 3
σ	1 2 3
sgn	

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Как легко запомнить определители.

$n = 2$ $\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n = 3$

$$\overset{+}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} - \overset{-}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Замечание.

Каждое слагаемое в (*) содержит равно один эл-мент из каждой строки и равно один эл-т из каждого столбца.

Свойства определителей.

1. $\det A = \det A^T$

Док:

Положим $B = A^T$

Тогда $\det B = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot b_{1,\sigma(1)} \cdot b_{2,\sigma(2)} \dots, b_{n,\sigma(n)}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

$$a_{\sigma(i),i} = \underline{a_{\sigma(i)}}, {}_{\sigma^{-1}(\sigma(i))}.$$

↳ среди $\sigma(i)$ встретиться 1 один раз т.к это перестановка.

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2,\sigma^{-1}(2)}, \dots, a_{n,\sigma^{-1}(n)}.$$

$\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \sigma^{-1}$ (вспоминаем).

$$= \sum_{\boxed{\sigma \in S_n}} (\operatorname{sgn} \sigma^{-1})\, a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)}.$$

→ когда σ пробегает все возможные перестановки, то и σ^{-1} пробегает всех их

$\boxed{\text{Пу } \rho = \sigma^{-1}}$

$$= \sum_{\rho \in S_n} (\operatorname{sgn} \rho)\, a_{1,\rho(1)} \cdot a_{2,\rho(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\rho(n)} = \det A.$$