Если блоки P и R верхнетреугольны, то A тоже верхнетреугольна, ; утверждение верно.

Лекция 7

Пред.

$A, B \in M_n \Rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B.$

Док-во.

Одно Эi строк с A, тогда:

$A \to U \ A := A'$

Такое-же Эi строк с AB: $AB \Rightarrow U(AB) = (UA)B = A' \cdot B.$

умножение матриц ассоциативно

Пр. $A \rightsquigarrow C$

цепочка Эi строк — УСВ

Тогда, то-же цепочка Эi строк: $AB \rightsquigarrow CB$. При этом $\det C = \alpha \cdot \det A$, $\det CB = \alpha \cdot \det(AB) \mid \alpha \neq 0.$ (*)

- Случай 1. $C_{(n)} = (0 \dots 0) \Rightarrow (CB)_{(n)} = C_{(n)} \cdot B = (0 \dots 0)$. Имеем $\det C = 0$, $\det(CB) = 0$.

Последняя строка

$$\det(CB) = 0 = 0 \cdot \det(B) = \det C \cdot \det B. \ \blacksquare$$

- Случай 2. $C_{(n)} \neq (0 \dots 0) \Rightarrow C = E$:

$$\det(CB) = \det B = 1 \cdot \det B = \det C \cdot \det B \ \blacksquare$$

Итог: случай 1 и случай 2 $\Rightarrow \det(CB) = \det C \cdot \det B$.

Подставляем сюда формулы (*) и сокращая на α $(\neq 0)$ получаем $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Замечание:

$A \in M_n$, $A_{ус}$ – УСВ A: $\det A \neq 0 \iff A_{ус} = E$

Опр

Дополнительный минор к элементу a_{ij} — это det матрицы размера $(n-1)\times(n-1)$, получающийся из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Обозначение: $\overline{M}_{ij}$

Опр:

Алгебраическое дополнение — это величина $A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$

↳ у элемента на глав. диагонали алгебр. дополнение совпадает с минором.

Лемма:

Пусть $a_{ik} = 0 \ \forall k \neq j$. Тогда $\det A = a_{ij} \cdot A_{ij}$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} P & u & Q \\ \hline 0 \ \dots \ 0 \ \dots & a_{ij} & \dots \ 0 \\ \hline R & v & S \end{array}\right)$$

→ Если у нас матрица такого вида, то можно подсчитать

Док-о.

Переставляем соседние строки $i+1$ раз, "вытолкнем" i-ю строку наверх:

↳ Взять и переставить нельзя т.к P и Q разрушатся.

$$A' = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 \ \dots \ 0 \ \dots & a_{ij} & \dots \ 0 \\ \hline P & u & Q \\ \hline R & v & S \end{array}\right)$$

Переставляя соседние столбцы $j-1$ раз, сдвигаем j-й столбец влево.

$$A'' = \left(\begin{array}{c|cc} a_{ij} & 0 \ \dots \ 0 & \dots \ 0 \\ \hline u & P & Q \\ v & R & S \end{array}\right)$$

→ видим угол нулей. $\Rightarrow \det \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$

$= a_{ij} \cdot \overline{M}_{ij}$. Далее, $\det A = (-1)^{i-1+j-1} \cdot \det A'' = (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det \overline{M}_{ij} = a_{ij} \cdot A_{ij}$

Теорема

(Разложение det по строке / столбцу).

1. $\forall i = \{1,\dots,n\} \mid \det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$ — разложение по i-й строке.

2. $\forall j = \{1,\dots,n\} \mid \det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$ — разложение по j-му столбцу.

Док-о.

Свойство-τ $\Rightarrow$ достаточно доказать для строк.

$\forall$ фикс. $i = \{1,\dots,n\}$ имеем $A_{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = (a_{i1}\ 0 \dots 0) + (0\ a_{i2} \dots 0) + \dots + (0 \dots 0\ a_{in})$

Свойство 2 опред $\Rightarrow \det A = \det\begin{pmatrix} a_{i1}\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0\ a_{i2} \dots 0 \end{pmatrix} \dots + \det\begin{pmatrix} 0 \dots 0\ a_{in} \end{pmatrix}$

По лемме $= a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$ ■

Лемма о фальшивом разложении det

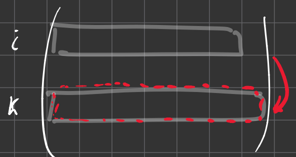
$\forall_{\text{фикс.}}\ i,k = \{1\dots n\} \mid i \neq k \qquad \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj} = 0.$

$\forall\ j,m = \{1,\dots,n\} \mid j \neq m \qquad \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{im} = 0.$

Док-о

Свой τ $\Rightarrow$ достаточно доказать для строк.

Пусть i,k фикс., $i \neq k$. Обозначим через B матрицу получающуюся из A заменой k-й строки на i-ю.



$\Rightarrow$ Тогда $B_{(k)} = B_{(i)} \Rightarrow \det B = 0$. С другой стороны, разложим $\det B$ по k-й строке: $0 = \det B = \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{b_{kj}}_{= a_{ij}} \cdot \underbrace{B_{kj}}_{= A_{kj}} = \sum\limits_{j=1} a_{ij} \cdot A_{kj}$

$A \in M_n$

$B \in M_n$ называется обратной к A, если $AB = BA = E$. Обоз A^{-1}.

Лемма 1. Если A^{-1} $\exists$ то оно единств.

Док-о.

Пу. $B, B' \in M_n$ обе обратны к A

Тогда $B = E \cdot B = (B' \cdot A) B = B'(AB) = B' \cdot E = B'$

Лемма 2.

Если A^{-1} $\exists$, то $\det A \neq 0$ и $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Док-о.

$A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \det (A \cdot A)^{-1} = \det (E) \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$

Отсюда оба утверждения.

Опр.

$A \in M_n$ называется вырожденной если $\det = 0$, и не вырожденной иначе.

Опр:

$A \in M_n \Rightarrow$ присоединённая к A матрица – это $\hat{A} := (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & \dots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

Теорема. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

При этом $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$.

Док-о. $(\Rightarrow)$ Следует из леммы 2.

$(\Leftarrow)$ Пу. $\det A \neq 0$.

$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}.}$ $\Rightarrow$ умножим с обеих сторон на A, и мы должны получить E.

Это у нас скаляр, избавимся от него умножив на $\det A$.

$A \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot A = \det A \cdot E$.

Проверяем:

Во всех случаях кроме $i=j$ получаем 0.

Для $X = A \cdot \hat{A}$: $x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \begin{cases} \det A, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Аналогично.

Для $Y = \hat{A} \cdot A$: $y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} \cdot a_{kj} = \begin{cases} \det A, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$\boxtimes$

Следствие 1.

Если $A, B \in M_n$, $AB = E \Rightarrow BA = E$ (и тогда $A^{-1} = B$ и $B^{-1} = A$)

Док-во

$AB = E \Rightarrow \det A \cdot \det B = 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$:

$BA = E \cdot BA = (A^{-1} \cdot A) BA = A^{-1} \underbrace{(AB)}_{E} \cdot A = A^{-1} \cdot E \cdot A = A^{-1} A = E$ $\boxtimes$

Следствие 2.

$A, B \in M_n \rightarrow AB$ обратима т. и т.т. A обратима и B обратима. Более того, при $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Док-во

$\det A \neq 0$, $\det B \neq 0 \Leftrightarrow A$ обратима, B обратима.

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$\Leftrightarrow$ По теореме AB обратима когда $\det AB \neq 0$.

$(AB)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = E.$

Формулы Крамера ♡

Рассмотрим СЛУ $Ax = b \mid A \in M_n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$

Пу. $A_{(i)}$ – матрица, полученная из A заменой i-го столбца на b.

$A_{(i)} = (A^{(1)} \ldots \underbrace{b}_{i} \ldots A^{(n)})$.

Теорема (Формулы Крамера).

Если $\det A \neq 0$, то СЛУ (*) имеет единственное решение. Более того, решение можно найти по формулам $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$.

Док-о.

$\det \neq 0 \Leftrightarrow \exists\ A^{-1}$

$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$ ← это единственное решение

Теперь для $\forall$ фикс $i = \{1, \dots, n\}$

$\det A_i = \det(A^{(1)} \dots \underset{i}{b} \dots A^{(n)})$.

$\boxed{b = Ax = A^{(1)} \cdot x_1 + A^{(2)} x_2 + \dots + A^{(n)} x_n}$

$= \det(A^{(1)} \dots \underbrace{x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)}}_{i} \dots A^{(n)})$

$= \underbrace{x_1 \det(A^{(1)} \dots \underset{i}{A^{(1)}} \dots A^{(n)})}_{0 \text{ при } i \neq 1} + \underbrace{x_2 \det(A^{(1)} \dots \underset{i}{A^{(2)}} \dots A^{(n)})}_{0 \text{ при } i \neq 2} + \dots + \underbrace{x_n \det(A^{(1)} \dots \underset{i}{A^{(n)}} \dots A^{(n)})}_{0 \text{ при } i \neq n} =$

$= x_i \det(A^{(1)} \dots \underset{i}{A^{(i)}} \dots A^{(n)}) = x_i \cdot \det A \Rightarrow x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ ∎