Лекция 21. 17.02.2025

V – в.п над $\mathbb{R}$.

$Q: V \to \mathbb{R}$ к.в. форма

> Б.ф на V – $\mathbb{B}: V \times V \to F$ линейное по каждому аргументу.
>
> Напоминание: кв. ф асс. с б.ф $\mathbb{B}$, – отображ $Q_{\mathbb{B}}: V \to F \mid Q_2(x) = \mathbb{B}(x,x)$
>
> Пусть e – б.с в V.
> $$\left.\begin{array}{l} x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \\ B = B(\mathbb{B}, e) \end{array}\right\} \Rightarrow Q_B(x) = (x_1 \ldots x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 = \sum_{1 \le i \le j \le n} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j$$

Теорема:

$\exists$ б.с e, т.что Q имеет в этом базисе норм. вид ($\text{Mat diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $d_1, \ldots d_n \in \{-1, 0, 1\}$).

В коорд. $Q(v) = x_1^2 + \ldots x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$.

$s := \#$ "+" в норм. виде

$t := \#$ "–" в норм виде

Теорема. Закон инерции.

Числа $i_+ = s$, $i_- = t$ не зависят от б.с в которой Q принимает нормал. вид.

Опр. Положительный и отрицательный индекс инерции.

Число i_+ – положительным индексом инерции кв.-ф. Q.

Число i_- – Отрицательный индексом инерции кв.-ф. Q.

Одинаковое кол. → Порядок не важен, т.к $\begin{array}{c} x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \\ \updownarrow \\ -x_2^2 + x_1^2 + x_3^2 \end{array}$ можно добиться путем подбора матриц.

Док. Т.

$s + t = \text{rk}\, Q$. – не зависит от выбора б.с $\Rightarrow$ достаточно инвариантность (→ не изменность) числа s.

Пусть e, e' – б.с в которых Q принимает норм вид

Тогда в коор.

- В базисе e: $Q(v) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots x_{s+t}^2$
- В б.с e': $Q(v) = x_1'^2 + \ldots x_{s'}'^2 - x_{s'+1}'^2 - \ldots - x_{s'+t}'^2$

Предположим, что $s > s'$ (м. счит. без огр. общности)

Пусть $L = \langle e_1, \ldots, e_s \rangle$, $\dim L = s$.

$L' = \langle e'_{s'+1}, \ldots, e'_n \rangle$, $\dim L' = k = n - s'$

$\dim(L + L') \le \dim V = n$

$\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \ge s + n - s' - n = s - s' > 0$.

$\exists$ ненулевой вектор $v \in L \cap L'$

Эти зануляется.

$v \in L$, то $Q(v) > 0$ $\to$ v лежит в L, а значит v это лин. комб. $e_1, \dots, e_s$. Подставляем в коорд. $\underbrace{x_1 + \dots x_s^2}_{\text{Только эта часть.}} - \overbrace{x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2}$. Очевидно $Q(v) > 0$.

с другой стороны:

Эти зануляются

$v \in L'$, то $Q(v) \leq 0$ $\to$ $\overbrace{x_1 + \dots x_s^2} - \underbrace{x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2}_{\text{Только тут.}}$, т.к $L' = \langle e'_{s+1}, \dots, e'_{s+t} \rangle$, подставляем

В итоге, противоречие. $\Rightarrow S = S'$

$\blacksquare$

Тh ©

Следствие метода Якоби.

Тh. $\delta_k \neq 0$ $\forall k = 1, \dots, n$. Тогда:

$\to$ Берем пару соседних элементов, если у них один знак то они образуют сохранения знака, и перемена знака иначе.

- Число i_+ ровно кол. сохранений знака послед. $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

  $\hookrightarrow$ Положительный индекс инерции

- Число i_- ровно кол. перемен знак послед. $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Иными словами.

$$i_+ = |\{ i \mid \operatorname{sgn} \delta_i = \operatorname{sgn} \delta_{i-1} \}|$$

$$i_- = |\{ i \mid \operatorname{sgn} \delta_i = -\operatorname{sgn} \delta_{i-1} \}| \quad (\delta_0 = 1)$$

Док-о

Метод Якоби $\Rightarrow$ существует базис e' в V, в котором Q принимает вид.

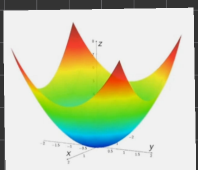
$$Q(v) = \delta_1 x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n^2 \to \text{Канонический вид.}$$

Переходя к нормальному виду, получаем требуемое.

$Q: V \to \mathbb{R}$ — кв. ф.

Термин	Обозн.	Условие	Нормальный вид	Индексы инерции
Положительно определённая	$Q > 0$	$Q(x) > 0$ $\forall x \neq \vec{0}$	$x_1^2 + \ldots + x_n^2$	$i_+ = n,\ i_- = 0$
Отрицательно определённая	$Q < 0$	$Q(x) < 0$ $\forall x \neq \vec{0}$	$-x_1^2 - \ldots - x_n^2$	$i_+ = 0,\ i_- = n$
Неотрицательно определённая	$Q \geqslant 0$	$Q(x) \geqslant 0$ $\forall x$	$x_1^2 + \ldots + x_k^2$ $k \leqslant n$	$i_+ = k,\ i_- = 0$
Неположительно определённая	$Q \leqslant 0$	$Q(x) \leqslant 0$ $\forall x$	$-x_1^2 - \ldots - x_k^2$ $k \leqslant n$	$i_+ = 0,\ i_- = k$
Неопределённая	—	$\exists x: Q(x)>0$ $\exists y: Q(y)<0$	$x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_{s+t}^2$ $s, t \geqslant 1$	$i_+ = s \geqslant 1$ $i_- = t \geqslant 1$

Пример 1.

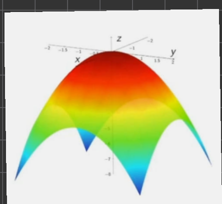


$V = \mathbb{R}^2$

$Q(x, y) = x^2 + y^2$

$Q > 0$ — Положительное.

Пример 2.



$V = \mathbb{R}^2$

$Q(x, y) = -x^2 - y^2$

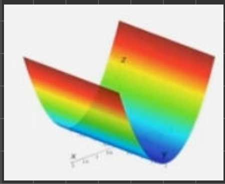
$Q < 0$

Пример 3.

$V = \mathbb{R}^2$

$Q(x,y) = x^2$

$Q \geq 0.$

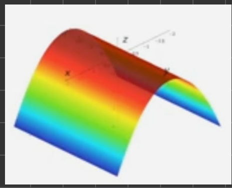


Пример 4.

$V = \mathbb{R}^2$

$Q(x,y) = -x^2$

$Q \leq 0.$

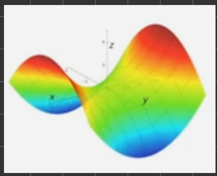


Пример 5.

$V = \mathbb{R}^2$

$Q(x,y) = x^2 - y^2$

Q неопределённа



Напоминание из матонализа - матанализа.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая функ.

$x_0 \in \mathbb{R}$ — некоторая точка

Если f дважды дифференцируема в точке x_0, то для малого приращение y имеем

$$f(x_0 + y) = f(x_0) + ay + by^2 + o(y^2), \text{ где } a = f'(x_0),\ b = f''(x)/2.$$

Предложение 1. (Необходимое условие локального экстремума).

Если f в точке x_0 имеет локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Предложение 2. (Достаточные условия локального экстремума)

Пу. $f'(x) = 0$. Тогда

- Если $f''(x_0) > 0$, то f в точке x_0 имеет локальный минимум;
- Если $f''(x_0) < 0$, то f в точке x_0 $\exists$ локальный максимум.

Применение квадратичных форм.

① $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – ф.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ – точка.

Если f дважды дифференцируема в точке x_0, то для малого приращения $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$f(x_0 + y) = f(x_0) + \underbrace{\overbrace{a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n}^{I(y)}}_{\text{линейная форма}} + \underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ii} y_i^2}_{\text{Диагональн.}} + \sum_{1 \leq i <} 2 b_{ij} y_i y_j}_{Q(y)} + o(|y|^2)$$

Предложение 1. (Необходимое условие локального экстремума).

Если f в точке x_0 локальный экстремум, то $I(y) \equiv 0$ $(a_1, \ldots, a_n = 0)$.

Предложение 2 (достаточное условие локального экстремума / его отсутствия).

Пу. $\mathcal{I}(y)=0$. Тогда:

- $Q(y)>0 \Rightarrow$ в x_0 $\exists$ лок. мин.
- $Q(y)<0 \Rightarrow$ в x_0 $\exists$ лок. макс.
- Если Q неопред. то f в x_0 не имеет лок. экстр.

Пу.

$Q: V \to \mathbb{R}$ кв.ф

$e=(e_1,\dots,e_n)$ – б.с V $\quad B=B(Q,e)$ → Матрица квадратичной формы $Q: V\to F$ в e. – Mat соответ. б.ф. в этом-же базисе → Линейное отображение, которое линейно по 2 аргументам.

δ_k – k-й минор B

Теорема. Критерий Сильвестра.

$Q>0 \iff \delta_k>0 \ \forall k=1,\dots,n.$

Док-о. $(\Leftarrow)$ Очевидно по следствию из метода Якоби.

$i_+=n,\ i_-=0 \Rightarrow Q>0.$

$(\Rightarrow)$ $Q>0$

Мы знаем что $d_1+\dots+d_n$ Её соот. D с положительными числами,

$\Rightarrow \exists C\in M_n^{\circ}(\mathbb{R})$, т.что $C^T D C=E \Rightarrow \det C^T \det D \det C=1. \Rightarrow \det D=\dfrac{1}{(\det C)^2}>0 \Rightarrow \delta_n>0$ Последний угловой минор.

Остается доказать для всех остальных миноры тоже.

$\forall k=1,\dots,n$ Mat B – Mat ограничения формы B на под.пр-а на $\langle e_1,\dots,e_k\rangle$. Теперь повторяем:

(Тогда ограничение кв.ф Q на под.пр. $B\langle e_1,\dots,e_k\rangle$ в б.с $(e_1,\dots,e_k)$ имеет Mat B_k, $\Rightarrow$ $\delta_k=\underbrace{\det B_k>0}_{\text{из пред.}}$.

∎

$$\boxed{B \text{ – Поляризация к.ф } Q \text{ – симм б.ф.}}$$

След. Критерий отриц. определенности. $Q<0 \iff \begin{cases} \delta_k<0 \ \forall k \text{ нечёт.} \\ \delta_k>0 \ \forall k \text{ чётн.}\end{cases}$

Док.

$Q<0 \iff -Q>0$; $B(-Q,e)=-B$; $-\delta_k(-B)=(-1)^k\cdot\delta_k(B)$.

∎

Опр.

Евклидово пространство:

Евклидово пв. – векторное пр. над $\mathbb{R}$ на к-ром задано скалярное произведение т.е. отображение $(\cdot,\cdot): E\times E\to \mathbb{R}$

условия:

1) $(\cdot,\cdot)$ – симм б.ф
2) Кв. ф $Q(x)=(x,x)$ является положительно опр.

Пример.

1). $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ станд. скал. произв.

$(x, x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

2). $\mathbb{E} = \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B)$.

$$(A, A) = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

3). $\mathbb{E} = C[a, b]$ → непрерывные функции на $[a, b]$.

$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$. → Если не 0, то полож. опр.

$(f, f) = \int_a^b f^2(x)\, dx$. → Он проинтегрируется в (+).

Замечание.

Всякое под. пр. в $\mathbb{E}$ п.в. само $\mathbb{E}$ п.р. с тем-же $(\cdot, \cdot)$

Опр. **Длина вектора в $\mathbb{E}$**

Длина вектора x в $\mathbb{E}$ – величина $|x| := \sqrt{(x, x)}$

Св-во 1. $\cdot\ |x| \geq 0$, причем $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (Из пол. определенности).

Св-во 2. $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$.

Пример. ① $\mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ со станд. $(\cdot, \cdot)$

$x := (x_1, \ldots, x_n)^T \Rightarrow |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

② $\mathbb{E} = \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow |A|$ – норма Фробениуса Mat A.