УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

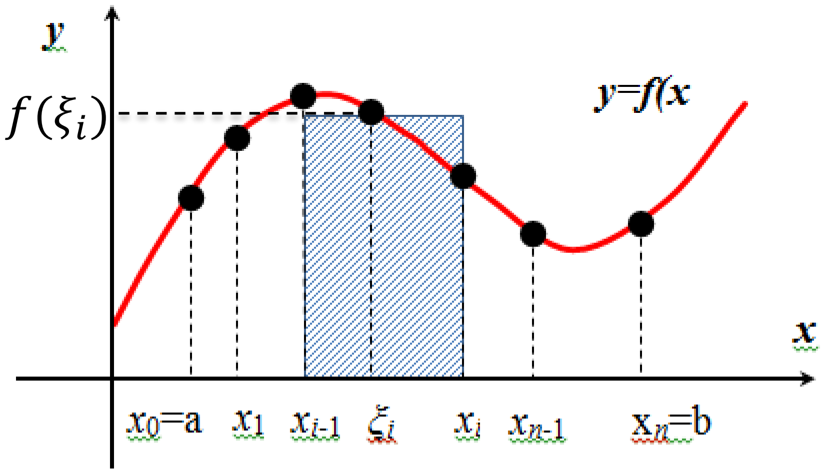
Малышева Татьяна Алексеевна, доцент, к.т.н.
tamalysheva@itmo.ru

Санкт-Петербург, 2024

Численное интегрирование
Постановка задачи

Пусть на отрезке [*a, b*] задана функция $y = f(x)$.

1. Разобьем отрезок [*a, b*] на *n* элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i], (i = 1, 2, \dots, n)$, причем $x_0 = a, x_n = b$.
2. На каждом их этих отрезков выберем произвольную точку ξ_i
3. Найдем : $s_i = f(\xi_i)\,\Delta x_i$ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



4. Составим сумму всех таких произведений:

$$S_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \text{ -}$$

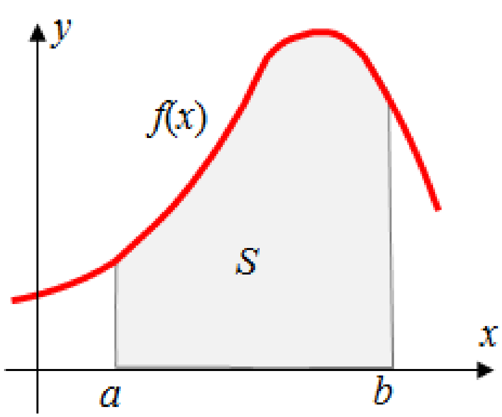
интегральная сумма

Постановка задачи

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке [*a*, *b*] называется предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа точек разбиения; при этом длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

<u>Теорема существования определенного интеграла</u>. Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a, b*], то предел интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка [*a, b*], ни от выбора точек ξ_i.



Геометрический смысл интеграла:

если f(x)≥0 на отрезке [a,b], то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции f(x), отрезком оси абсцисс, ординатами a и b.

Вычисление интеграла равносильно вычислению площади криволинейной трапеции.

Аналитическая функция

Если функция $f(x)$ задана аналитически (формулой) и ее первообразная $F(x)$ является элементарной функцией, то определенный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона –Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$F(x) \text{ – первообразная, } F'(x) = f(x)$$

Например, подынтегральная функция $f(x)$ задана аналитически, но интеграл н е б е р у щ и й с я , т. е. не выражается в конечном виде через элементарные функции. Тогда можно использовать разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора, а затем применить формулу Ньютона –Лейбница. Например, для вычисления интеграла:

$$I = \int_0^1 e^{x^{-2}} dx$$

Разложение в ряд: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ Заменим x на x^{-2}, получим:

$I = \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots)dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \cdots \approx$ $0{,}7468$

Численное интегрирование

Когда формулой Ньютона –Лейбница невозможно или затруднительно воспользоваться:

- подынтегральная функция представлена в виде таблицы значений или задана графически, тогда первообразная $F(x)$ не существует;
- подынтегральная функции имеет сложное аналитическое выражение или/и её первообразная не выражается через элементарные функции или слишком громоздка.

Тогда применяют численное (приближенное) интегрирование.

Численное интегрирование

Численные методы вычисления определенных интегралов основаны **на замене подынтегральной функции *f(x)* аппроксимирующей функцией**, которая может быть проинтегрирована в аналитическим виде.

Для аппроксимации может быть использован любой класс простых функций, таких как полиномы, тригонометрические, экспоненциальные или логарифмические функции.

В наиболее распространенном случае в качестве таких функций используются степенные полиномы *P(x)* с узлами интерполяции в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

В этих точках значения функции и интерполяционного полинома полностью совпадают $\boldsymbol{f(x_i) = P(x_i)}$.

Численное интегрирование

Формулы, используемые для приближенного вычисления интегралов, называются **квадратурными формулами.**

При этом определенный интеграл заменяется конечной (интегральной) суммой:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

где α_i – числовые (квадратурные) коэффициенты, выбор которых зависит от используемого метода численного интегрирования.

x_i – узлы интегрирования, $x_i \in [a, b], i = 1, \dots, n$.

Правая часть – квадратурная сумма. В зависимости от способа вычисления суммы получены разные методы интегрирования.

Погрешность квадратурной формулы определяется выражением:

$$R = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

и зависит от выбора коэффициентов и от расположения узлов x_i .

Формула Ньютона - Котеса

Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция $f(x)$ заменяется на отрезке $[a, b]$ **интерполяционным многочленом Лагранжа** $L_n(x)$, совпадающий с $f(x)$ в узлах интерполяции $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$

Полином Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_n^i(x), \qquad n = 0, 1, 2 \dots$$

где $L_n^i(x)$ - коэффициенты Лагранжа (полиномы степени n):

$$L_n^i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Если полином Лагранжа «близок» к $f(x)$, то интегралы от них тоже должны быть «близки»:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_n^i(x)dx$$

Ро́джер Котс (1682-1716) Английский математик, астроном и философ, помощник Исаака Ньютона. «По своим математическим способностям из его поколения в Англии он уступал только Ньютону».

Формула Ньютона - Котеса

Вводим коэффициенты Котеса: $c_n^i = \int_a^b L_n^i(x)dx$

Формула Ньютона-Котеса порядка n:

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \approx \int_a^b \boldsymbol{L_n(x)dx} = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{f(x_i)c_n^i}$$

Пример: Вычислить коэффициенты Котеса $c_1^0 = c_1^1$

Пусть значения функции $f(x)$ заданы в двух узлах: $x_0 = a$, $x_1 = b$

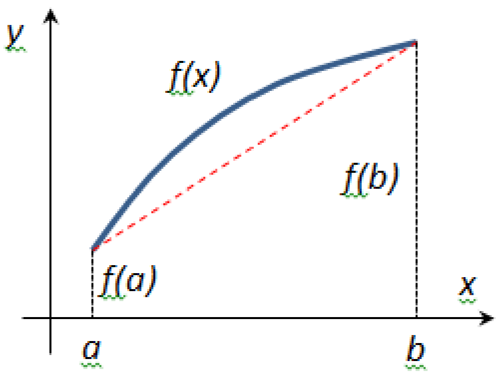
Аппроксимируем функцию полиномом Лагранжа первой степени:

$$f(x) \approx L_1(x) = f(x_0)L_1^0(x) + f(x_1)L_1^1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$= f(a)\frac{x - b}{a - b} + f(b)\frac{x - a}{b - a}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)}{a - b}\int_a^b (x - b)dx + \frac{f(b)}{b - a}\int_a^b (x - a)dx =$$

$$f(a)\frac{b - a}{2} + f(b)\frac{b - a}{2}$$



Тогда коэффициенты Котеса $c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$

Коэффициенты Котеса для равноотстоящих узлов

n	Коэффициенты Котеса c_i^n			
1	$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$			
2	$c_2^0 = c_2^2 = \frac{b-a}{6}$	$c_2^1 = \frac{4(b-a)}{6}$		
3	$c_3^0 = c_3^3 = \frac{b-a}{8}$	$c_3^1 = c_3^2 = \frac{3(b-a)}{8}$		
4	$c_4^0 = c_4^4 = \frac{7(b-a)}{90}$	$c_4^1 = c_4^3 = \frac{32(b-a)}{90}$	$c_4^2 = \frac{12(b-a)}{90}$	
5	$c_5^0 = c_5^5 = \frac{19(b-a)}{288}$	$c_5^1 = c_5^4 = \frac{75(b-a)}{288}$	$c_5^2 = c_5^3 = \frac{50(b-a)}{288}$	
6	$c_6^0 = c_6^6 = \frac{41(b-a)}{840}$	$c_6^1 = c_6^5 = \frac{216(b-a)}{840}$	$c_6^2 = c_6^4 = \frac{27(b-a)}{840}$	$c_6^3 = \frac{272(b-a)}{840}$

Коэффициенты Котеса для равноотстоящих узлов

n	Коэффициенты Котеса c_i^n			
7	$c_7^0 = c_7^7 = \frac{751(b-a)}{17280}$	$c_7^1 = c_7^6 = \frac{3577(b-a)}{17280}$	$c_7^2 = c_7^5 = \frac{1323(b-a)}{17280}$	$c_7^3 = c_7^4 = \frac{2989(b-a)}{17280}$
8	$c_8^0 = c_8^8 = \frac{989(b-a)}{28350}$ $c_8^4 = -\frac{4540(b-a)}{28350}$	$c_8^1 = c_8^7 = \frac{5888(b-a)}{28350}$	$c_8^2 = c_8^6 = -\frac{928(b-a)}{28350}$	$c_8^3 = c_8^5 = \frac{10496(b-a)}{28350}$
9	$c_9^0 = c_9^9 = \frac{2857(b-a)}{89600}$ $c_9^4 = c_9^5 = \frac{5778(b-a)}{89600}$	$c_9^1 = c_9^8 = \frac{15741(b-a)}{89600}$	$c_9^2 = c_9^7 = \frac{1080(b-a)}{89600}$	$c_9^3 = c_9^6 = \frac{19344(b-a)}{89600}$
10	$c_{10}^0 = c_{10}^{10} = \frac{16067(b-a)}{598752}$ $c_{10}^4 = c_{10}^6 = -\frac{260550(b-a)}{598752}$	$c_{10}^1 = c_{10}^9 = \frac{106300(b-a)}{598752}$ $c_{10}^5 = \frac{427368(b-a)}{598752}$	$c_{10}^2 = c_{10}^8 = -\frac{48525(b-a)}{598752}$	$c_{10}^3 = c_{10}^7 = \frac{272400(b-a)}{598752}$

Формула Ньютона - Котеса

Как пользоваться этой таблицей?

Пусть функция $\boldsymbol{f(x)}$ задана в трех точках: a, b и в точке $x = \frac{a+b}{2}$.

n – порядок формулы Ньютона-Котеса (количество частичных отрезков)

В таком случае, выбирая из строки n = 2 коэффициенты Котеса c_2^0, c_2^1, c_2^2, запишем определенный интеграл в виде:

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \approx= \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{f(x_i)c_n^i} = c_2^0\, f(a) + c_2^1 f(x) + c_2^2 f(b) =$$

$$\frac{b-a}{6} f(a) + \frac{4(b-a)}{6} f(x) + \frac{b-a}{6} f(b)$$

Частные случаи формулы Ньютона-Котеса

Степень полинома	**Нулевая**	**Формулы прямоугольников**
Степень полинома	**Первая**	**Формула трапеций**
Степень полинома	**Вторая**	**Формула парабол (Симпсона)**

Метод прямоугольников

На каждом шаге интегрирования функция аппроксимируется полиномом нулевой степени – отрезком, параллельным оси абсцисс. Площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из

n - прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы

n- элементарных прямоугольников.

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Различают метод левых, правых и средних прямоугольников.

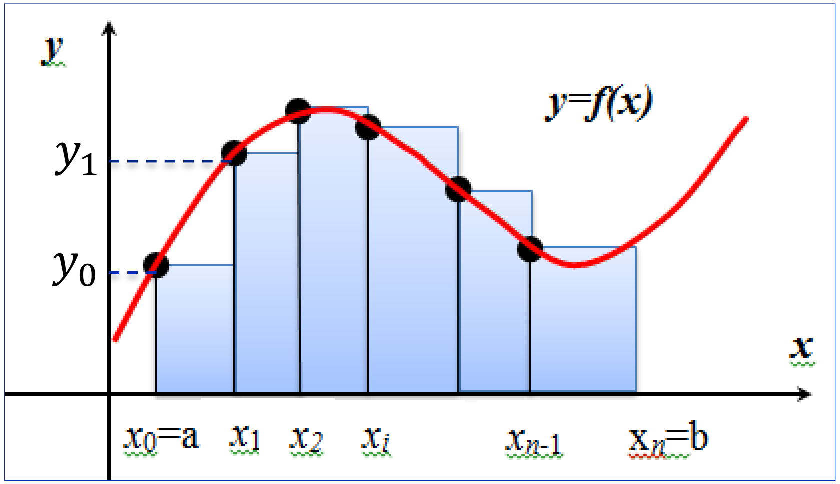
В качестве точек ξ_i могут выбираться левые ($\xi_i = x_{i-1}$) или правые ($\xi_i = x_i$) границы отрезков, получим формулы левых и правых прямоугольников.

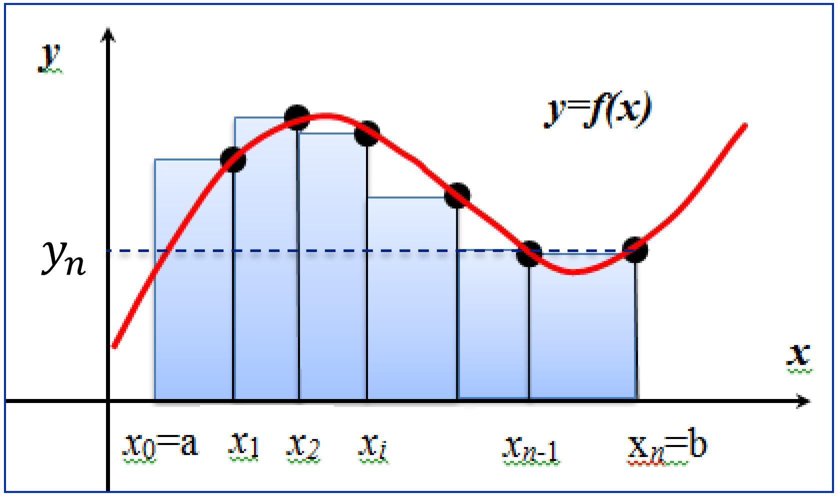
Метод прямоугольников

Обозначим:

$$f(x_i) = y_i \ , \ f(a) = y_0, \ \ f(b) = y_n$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = h_i$$





Метод прямоугольников

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_0 + h_2 y_1 + \cdots + h_n y_{n-1} = \sum_{i=1}^n h_i\, y_{i-1}$ - левые прямоугольники

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_1 + h_2 y_2 + \cdots + h_n y_n = \sum_{i=1}^n h_i y_i$ - правые прямоугольники

При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^n y_{i-1}$$

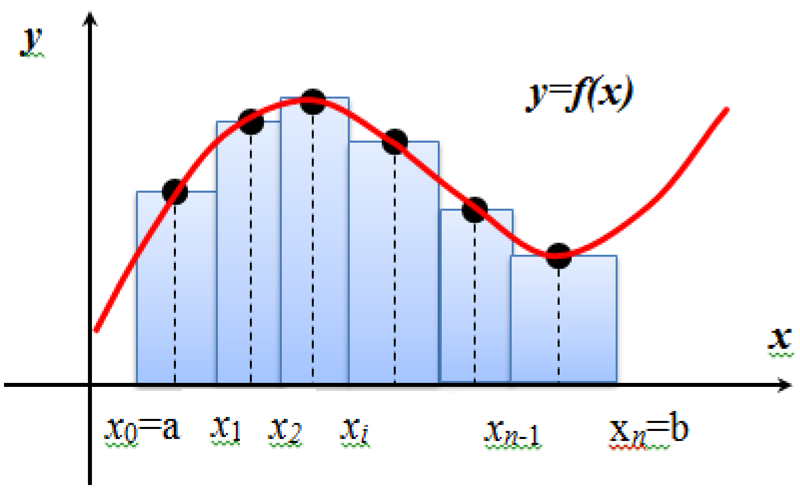
$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^n y_i$$

Метод прямоугольников. Метод средних

Для аналитически заданных функций более точным является использование значений в средних точках элементарных отрезков (полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h_i\, f(x_{i-1/2})$$

$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \dots n$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2})$$

Метод прямоугольников

Пример 1. Найти значение интеграла методами прямоугольников:

$$I = \int_1^2 x^2 dx = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \approx 2{,}33\ldots$$

Разобьем отрезок интегрирования на 5 равных частей: $n = 5,\ h = \frac{b-a}{n} = 0{,}2.$

По формулам левых, правых и средних прямоугольников получим:

$I_{\text{прав}} = h\sum_{i=1}^{n} y_i = 2{,}64$ $\quad I_{\text{лев}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} = 2{,}040$ $\quad I_{\text{сред}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2} = 2{,}3300$

Погрешность в вычислении интеграла составляет :

$$\Delta I_{\text{сред}} = I - I_{\text{сред}} = 2{,}3333 - 2{,}3300 = 0{,}0033\ (\approx 0{,}14\%)$$

$$\Delta I_{\text{лев}} = I - I_{\text{лев}} = 2{,}3333 - 2{,}040 = 0{,}2933\ (\approx 12{,}5\%)$$

$$\Delta I_{\text{прав}} = I - I_{\text{прав}} = 2{,}3333 - 2{,}64 = 0{,}3067 (\approx 13{,}1\%)$$

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	1	1,44	1,96	2,56	3,24	4
$x_{i-1/2}$		1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
$y_{i-1/2}$		1,21	1,69	2,25	2,89	3,61

Метод прямоугольников

Пример 2. Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей:

$\mathrm{n} = 10,\ h = \frac{b-a}{n} = 0{,}1.$

По формулам левых, правых и средних прямоугольников получим:

$I_{\text{прав}} = h\sum_{i=1}^{n} y_i = 2{,}485 \qquad I_{\text{лев}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} = 2{,}185$

$$I_{\text{сред}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2} = 2{,}3325$$

Погрешность в вычислении интеграла составляет :

$$\Delta I_{\text{сред}} = I - I_{\text{сред}} = 2{,}3333 - 2{,}3325 = 0{,}0008\ (\approx 0{,}034\%)$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_i	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4
$x_{i-1/2}$		1,05	1,15	1,25	1,35	1,45	1,55	1,65	1,75	1,85	1,95
$y_{i-1/2}$		1,1025	1,3225	1,5625	1,8225	2,1025	2,4025	2,7225	3,0625	3,4225	3,8025

Метод трапеций

Подынтегральную функцию на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ заменяют интерполяционным многочленом первой степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x + b$$

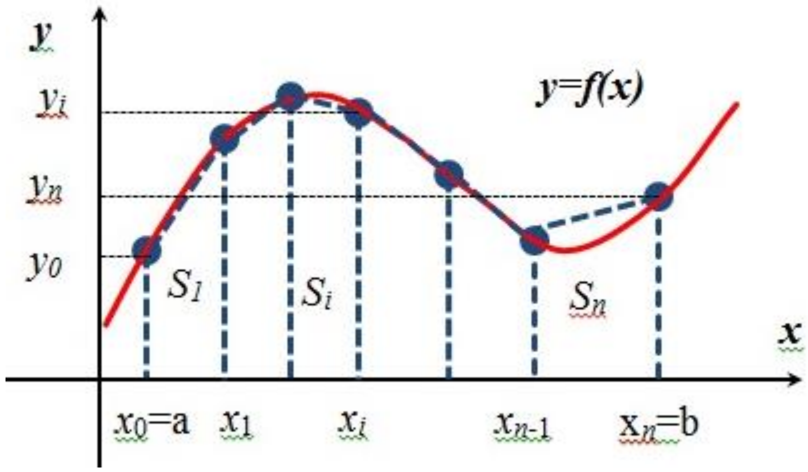
Используют линейную интерполяцию, т.е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющий точки (x_i, y_i) . Площадь всей фигуры (криволинейной трапеции):

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{y_0 + y_1}{2} h_1 + \frac{y_1 + y_2}{2} h_2 + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h_n$$

$$y_0 = f(a), \qquad y_n = f(b), \qquad y_i = f(x_i), \qquad h_i = x_i - x_{i-1}$$

Складывая все эти равенства, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i(y_{i-1} + y_i)$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$ формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

или $$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot \left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Метод трапеций

Пример 3. Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей: $\mathrm{n} = 10,\ h = \frac{b-a}{n} = 0{,}1.$

$$I_{\text{трап}} = \int_1^2 x^2 dx = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) = 0{,}1 \cdot \left(\frac{1+4}{2} + (1{,}21 + 1{,}44 + \dots + 3{,}61) \right) = 2{,}3350$$

Погрешность в вычислении интеграла составляет :

$$\Delta I = I - I_{\text{трап}} = 2{,}3333 - 2{,}3350 = 0{,}0017\ (\approx 0{,}073\%).$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_i	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4

Метод Симпсона (**Симпсон Томас**(20.08.1710–14.05.1751) – английский математик)

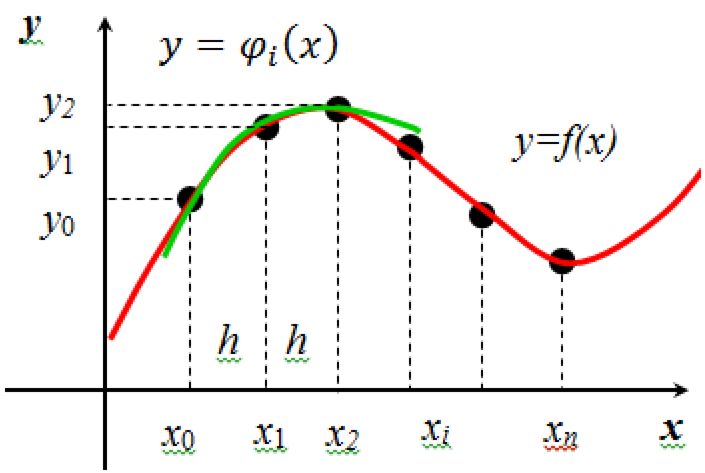
Разобьем отрезок интегрирования [*a, b*] на четное число *n* равных частей с шагом *h.*

На каждом отрезке $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, …, $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, … , $[x_{n-2}, x_n]$ подынтегральную функцию заменим интерполяционным многочленом второй степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x_{i-1} \le x \le x_{i+1}$$

Коэффициенты этих квадратных трехчленов могут быть найдены из условий равенства многочлена и подынтегральной функции в узловых точках.

В качестве $\varphi_i(x)$ можно принять интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, проходящий через точки $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$.



Метод Симпсона

Для точек x_0, x_1, x_2:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2.$$

При $x_0 = 0; x_1 = h;\ x_2 = 2h$, получим:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-h)(x-2h)}{h \cdot 2h} y_0 + \frac{x(x-2h)}{-h \cdot h} y_1 + \frac{x(x-h)}{2h \cdot h} y_2 = \frac{x^2 - x \cdot 3h + 2h^2}{2h^2} y_0 + \frac{x^2 - 2h \cdot x}{-h^2} y_1 + \frac{x^2 - h \cdot x}{2h^2} y_2$$

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_0+2h} \varphi_1(x) dx = \int_0^{2h} \left(\frac{x^2 - x \cdot 3h + 2h^2}{2h^2} y_0 + \frac{x^2 - 2h \cdot x}{-h^2} y_1 + \frac{x^2 - h \cdot x}{2h^2} y_2 \right) dx =$$

$$= \frac{y_0}{2h^2} \left(\frac{x^3}{3} - 3h \frac{x^2}{2} + 2h^2 x \right) \Big|_0^{2h} - \frac{y_1}{h^2} \left(\frac{x^3}{3} - 2h \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2h} + \frac{y_2}{2h^2} \left(\frac{x^3}{3} - h \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2h} = \frac{y_0 h}{3} + \frac{4y_1 h}{3} + \frac{y_2 h}{3}$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Для каждого элементарного отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$: $S_i = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$

$$S_{общ} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + 2y_n)$$

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left[(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n)\right]$$

Пример 4. Найти значение интеграла методом Симпсона: $I = \int_1^2 x^2 dx \approx 2{,}3333$
При $\mathrm{n} = 4$, $h = 0{,}25$.

i	0	1	2	3	4
x_i	1	1,25	1,5	1,75	2
y_i	1	1,5625	2,25	3,0625	4

$$I = \frac{0,25}{3}\left[(1 + 4(1,5625 + 3,0625) + 2 \cdot 2,25)) + 4)\right] = 2,3333$$

Методы Ньютона-Котеса

Для семейства методов Ньютона-Котеса можно записать общее выражение:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{n \cdot h}{C_n} \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{c_n^i} f(x_i) \qquad (*)$$

где n – порядок метода Ньютона-Котеса

$$C_n = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{c_n^i}$$

Из выражения (*) можно получить формулу прямоугольников для n=0, формулу трапеций для n=1, формулу Симпсона для n=2.

n	C_n	c_n^0	c_n^1	c_n^2	c_n^3	c_n^4	c_n^5
0	1	1					
1	2	1	1				
2	6	1	4	1			
3	8	1	3	3	1		
4	90	7	32	12	32	7	
5	288	19	75	50	50	75	19

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле Ньютона – Котеса при *n* = 4 , а также по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона ; сравнить результаты с точным значением интеграла.

Решение. Будем вести вычисления с пятью десятичными знаками.

По формуле Ньютона – Лейбница: $\int_1^2 \frac{dx}{x} = ln2 = 0{,}69315$

$h = \frac{2-1}{4} = 0{,}25$

i	0	1	2	3	4
x_i	1	1,25	1,5	1,75	2
y_i	1,00000	0,80000	0,66667	0,57143	0,50000

Приближенное значение интеграла по формуле Ньютона – Котеса при n=4:

$$I_{cotes} = \frac{n \cdot h}{C_n} \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{c_n^i} f(x_i) = \frac{4 \cdot 0{,}25}{90}(7 \cdot 1 + 32 \cdot 0{,}80000 + 12 \cdot 0{,}66667 + 32 \cdot 0{,}57143 + 7 \cdot 0{,}50000) = 0{,}69318$$

Сравнивая результат с точным, видим, что формула Ньютона – Котеса дает ч е т ы р е верных десятичных знака.

Приближенное значение интеграла по формуле левых прямоугольников:

$$I_{\text{прям}} = h \cdot (y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = 0{,}25 \cdot (1{,}00000 + 0{,}80000 + 0{,}66667 + 0{,}57143) = 0{,}75953$$

Ни одного верного десятичного знака!

Приближенное значение интеграла по формуле трапеций:

$$I_{\text{трап}} = \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4) = 0{,}69702$$

Два верных знака после запятой.

Приближенное значение интеграла по формуле Симпсона:

$$I_{simp} = \frac{h}{3}(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) = 0{,}69325$$

Три верных знака после запятой.

Точнее всех, как и можно было ожидать, оказалась формула Ньютона – Котеса.

Ее недостатки — громоздкость и необходимость привлечения специальных таблиц (коэффициентов Котеса). Частные случаи формулы Ньютона – Котеса дают не столь точные результаты. При этом формула Симпсона, будучи гораздо проще формулы Ньютона – Котеса, успешно с ней конкурирует по точности. Формула прямоугольников столь груба, что вряд ли применима на практике.

Формулы трапеций и Симпсона являются самыми ≪практичными≫, сочетая простоту и удовлетворительную точность.

Погрешность численного интегрирования

Погрешность квадратурной формулы определяется выражением:

$$R = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Или:

$$R = |I_{\text{точн}} - I_{\text{приб}}|$$

Для оценки погрешности R приближенного интегрирования:

1) Формулы средних прямоугольников: $|R| \le \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2}$:

   второй порядок точности $O(h^2)$

2) Формула трапеций: $|R| \le \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$: $O(h^2)$

3) Формула Симпсона: $|R| \le \max\limits_{x\in[a,b]} |f''''(x)| \cdot \frac{(b-a)^5}{180n^4}$: $O(h^4)$

   четвертый порядок точности $O(h^4)$

Примеры приближенного вычисления определенных интегралов

В основном встречаются две разновидности заданий:

- либо вычислить определенный интеграл численным методом для заданного числа разбиения отрезка *n* (см. примеры 1,2,3,4)
- либо найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью.

Пример 6. Вычислите определенный интеграл $\int_1^2 (\frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7)dx$ методом трапеций с точностью до *0.01*.

Решение: найдем количество точек разбиения отрезка интегрирования *n*, используя неравенство для оценки абсолютной погрешности $|R| \le \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$.

$$f'(x) = (\frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7)' = \frac{4}{10}x^3 + \frac{2}{5}x, \quad f''(x) = (\frac{4}{10}x^3 + \frac{2}{5}x)'' = 1{,}2x^2 + 0{,}4$$

$$\max_{x\in[a,b]} |f''(2)| = 1{,}2 \cdot 4 + 0{,}4 = 5{,}2$$

Подставим полученное значение в неравенство $\max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2} \ge 0{,}01 \rightarrow 5{,}2\frac{(2-1)^3}{12n^2} \ge 0{,}01$

Тогда $n^2 \ge \frac{520}{12} \rightarrow |n| \ge 6{,}58$. Возьмем *n=8*

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{8} = 0{,}125$$

Занесем в таблицу результаты расчетов:

Примеры приближенного вычисления определенных интегралов

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	1,125	1,25	1,375	1,5	1,625	1,75	1,875	2
$f(x_i)$	-6,7	-6,58669	-6,44336	-6,26443	-6,04375	-5,77458	-5,44961	-5,06091	-4,6

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7\right)dx \approx h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) =$$

$$= 0{,}125(-5{,}65 - 41{,}6233) = -5{,}9092$$

Найдем интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7\right)dx = \left(\frac{x^5}{50} + \frac{x^3}{15} - 7x\right)\Bigg|_1^2 = -12{,}8267 + 6{,}9133 = -5{,}9134$$

$|R| = |I - I_{\text{тр}}| = 0{,}0042 < 0{,}01$ - точность достигнута.

Погрешность численного интегрирования

Непосредственное использование оценки погрешности неудобно, т.к. требует вычисление производной функции $f(x)$, особенно для подынтегральных функций сложного вида. В вычислительной практике используется **правило Рунге**.

Правило Рунге - это эмпирический способ оценки погрешности, основанный на сравнении результатов вычислений, проводимых с разными шагами *h:*

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}$$

I – точное значение интеграла;

$I_{h/2}, I_h$ - приближенные значения интеграла, вычисленные с различными шагами *h;*

k - порядок точности квадратурной формулы,

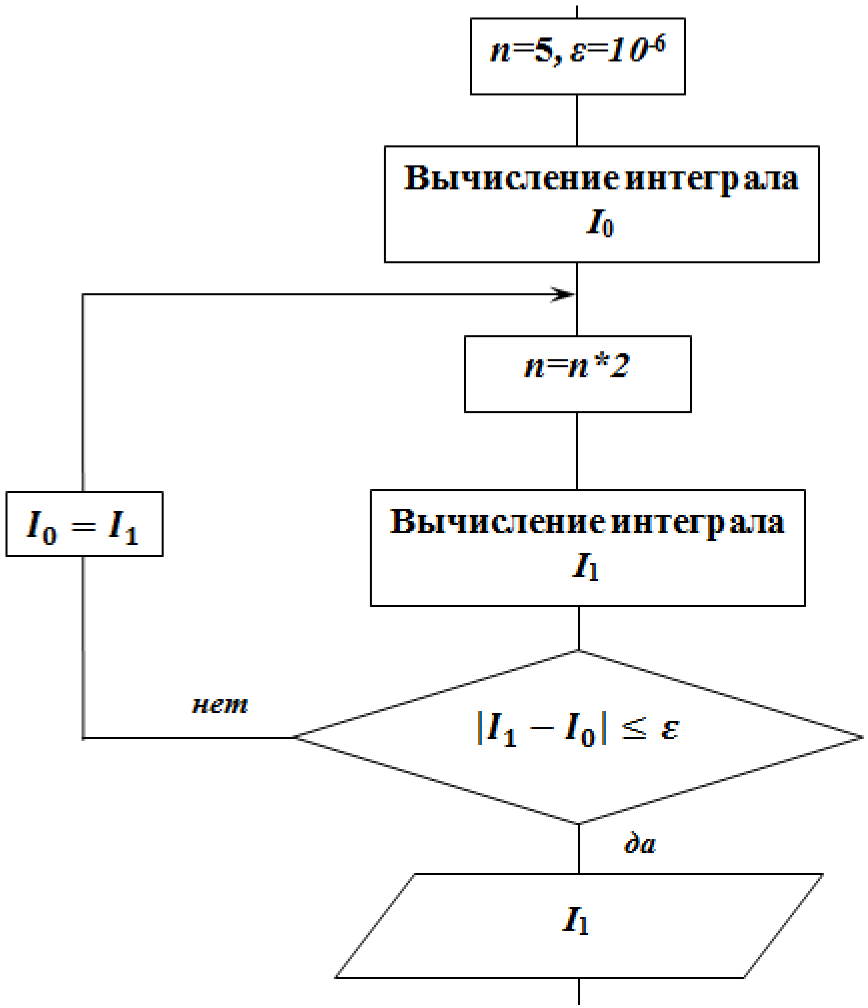
(k=2 - для формул средних прямоугольников и трапеций, k=4 - для формулы Симпсона).

Алгоритм приближенного вычисления определенных интегралов

Имеет смысл прибегнуть к следующему алгоритму:

1. Выбираем произвольно число *n*, например, *n = 5*.
2. Вычисляем по итерационной формуле интеграл для *n = 5* (I_0).
3. Вычисляем интеграл для удвоенного числа узлов *n = 10* (I_1).
4. Находим абсолютную величину разности двух полученных приближенных значений ($|R| = |I_1 - I_0|$).
5. Если она меньше требуемой точности , то прекращаем вычисления и в качестве приближенного значения определенного интеграла берем значение , предварительно округлив его до требуемого порядка точности. В противном случае удваиваем количество узлов (берем *n = 20*) и повторяем действия.

Алгоритм вычисления интеграла



Погрешность численного интегрирования

Какой же метод применять при численном интегрировании?

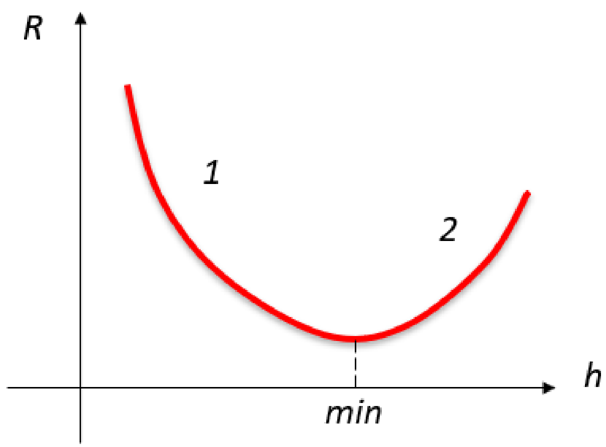
Точность метода Симпсона выше точности метода прямоугольников и трапеций для заданного *n* (это видно из оценки абсолютной погрешности), так что его использование предпочтительнее.

ВОПРОС: Зачем анализировать разные методы интегрирования,

если погрешность численного интегрирования

определяется шагом разбиения. Уменьшая этот

шаг, можно добиться большей точности.



На участке (1) погрешность уменьшается

в связи с уменьшением шага h.

На участке (2) при больших *n* начинает

доминировать вычислительная погрешность,

накапливающаяся в результате многочисленных в результате многочисленных арифметических действий.

Это может отдалить приближенное значение от точного.

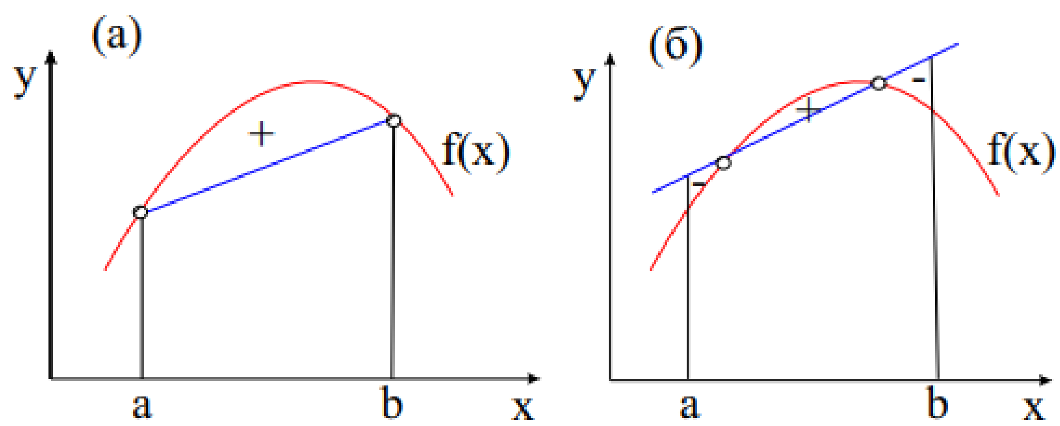
Квадратурная формула Гаусса

Метод Гаусса позволяет повысить порядок точности методов на основе интерполяционных формул путём специального выбора узлов интегрирования. Используется для неравномерной сетки.

Погрешности аппроксимации (отмечены + и -) могут быть скомпенсированы за счет выбора оптимальных узлов.

Рис.а – метод трапеций

Рис.б – метод Гаусса



Квадратурная формула Гаусса

Расчет интеграла в данном методе осуществляется в два этапа:

1. интеграл с пределами интегрирования [a,b] сводится к интегралу с пределами [-1,1]
2. полученный интеграл рассчитывается как сумма значений подынтегральной функции в специальных точках, умноженных на весовые коэффициенты.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \sum_{i=1}^{n} f(t_i)A_i$$

$$x_i \in [a, b]$$

A_i – квадратурные (или весовые) коэффициенты, t_i – специальные узлы функции $f(x)$, корни многочлена Лежандра.

Квадратурная формула Гаусса

Для изменения пределов интегрирования делается замена переменных:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t \qquad \boldsymbol{x_i} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \qquad \boldsymbol{t_i} \in [-\mathbf{1}, \mathbf{1}],$$

Получаем квадратуру Гаусса-Лежандра для произвольного интервала интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) A_i$$

где $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$

$\boldsymbol{t_i}$ и $\boldsymbol{A_i}$ уже вычислены и сведены в таблицу

Квадратурная формула Гаусса

n	i	t_i	A_i
1	1	0	2
2	1;2	±0.57735027	1
3	1;3	±0.77459667	0.55555556
	2	0	0.88888889
4	1;4	±0.86113631	0.34785484
	2;3	±0.33998104	0.65214516
5	1;5	±0.90617985	0.23692688
	2;4	±0.53846931	0.47862868
	3	0	0.56888889

6	1;6	±0.93246951	0.17132450
	2;5	±0.66120939	0.36076158
	3;4	±0.23861919	0.46791394
7	1;7	±0.94910791	0.12948496
	2;6	±0.74153119	0.27970540
	3;5	±0.40584515	0.38183006
	4	0	0.41795918
8	1;8	±0.96028986	0.10122854
	2;7	±0.79666648	0.22238104
	3;6	±0.52553242	0.31370664
	4;5	±0.183434464	0.36268378

Квадратурная формула Гаусса

Пример: вычислить интеграл по формуле Гаусса, применяя для оценки точности двойной пересчет (при n=3 и n=4)

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg| = 2,6666667$$

Замена переменной: $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$ $\qquad x_i = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} t = 1 + t_i$

$$\int_0^2 x^2 dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{3} f(x_i) A_i =$$

$= \frac{b-a}{2} [A_1(1+t_1)^2) + A_2(1+t_2)^2 + A_3(1+t_3)^2]$=0,55555556(1-0,77459667)^2+ 0,55555556(1+0,77459667)^2+0,88888889(1-0)^2=2,6666668

$$\int_0^2 x^2 dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{4} f(x_i) A_i =$$

$= \frac{b-a}{2} [A_1(1+t_1)^2) + A_2(1+t_2)^2 + A_3(1+t_3)^2 + A_4(1+t_4)^2]$=0,34785484(1-0,86113631)^2+ 0,34785484(1+0,86113631)^2+0,65214516(1-0,33998104)^2+0,65214516(1+0,33998104)^2=2,66666665

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Или *несобственные интегралами второго рода*.

В отличие от определенного интеграла, подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв (не существует):

1) в точке $x = a$, 2) или в точке $x = b$, 3) или в обеих точках сразу, 4) или на отрезке интегрирования

Если предел существует, то несобственный интеграл второго рода называется сходящимся. Если предел не существует, то несобственный интеграл второго рода называют расходящимся.

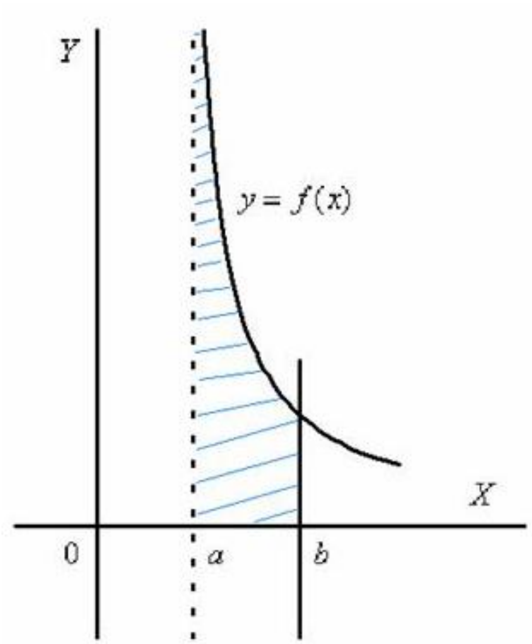
$\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx = ?$ $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx = ?$

1) Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$ (точка разрыва справа, особая точка, правосторонний предел):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\sigma \to +0} \int_{a+\sigma}^b f(x)dx = \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx$$

$0 < \sigma < b - a$

Добавка $+0$ обозначает, что мы стремимся к значению a справа

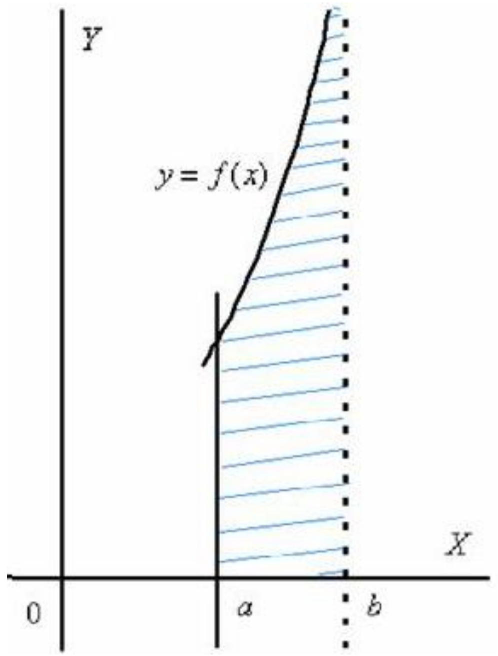


Несобственные интегралы от неограниченных функций

2) Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке $x = b$ (точка разрыва слева, особая точка, левосторонний предел):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\sigma\to+0}\int_a^{b-\sigma} f(x)dx = \lim_{c\to b-0}\int_a^{c} f(x)dx$$

Добавка -0 обозначает, что мы стремимся к значению b слева



3) Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точках a и b:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\sigma_1\to+0\\ \sigma_2\to+0}}\int_{a+\sigma_1}^{b-\sigma_2} f(x)dx$$

4) Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке $c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\sigma_1\to+0}\int_a^{c-\sigma_1} f(x)dx + \lim_{\sigma_2\to+0}\int_{c+\sigma_2}^{b} f(x)dx$$

Если оба предела существуют, то интеграл называют сходящимся, если хотя бы один из пределов не существует, то его называют расходящимся.

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пример 5. Доказать, что несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится и вычислить его.

Решение. Особой точкой подынтегральной функции является точка $x = a$. Согласно определению:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to a+0} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0+0} (2\sqrt{x}) \Big|_c^1 = \lim_{c\to 0+0} \left(2 - 2\sqrt{c}\right) = 2$$

Пример 6.

Особой точкой подынтегральной функции является точка $x = b$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{c\to b-0} \int_0^c \frac{dx}{1-x} = \lim_{c\to 1-0} (-ln(1-x)) \Big|_0^c = \lim_{c\to 1-0} (-ln(1-c))$$
$$= +\infty$$

Следовательно, интеграл расходится.