Hệ phương trình tuyến tính (tt)

Nhắc lại:

Hệ pttt tổng quát có 3 trường hợp nghiệm

TH1: $rank(A) < rank\ (A|B)$ → Hệ vô nghiệm

TH2: $r(A) = r(A|B) =$ ***số ẩn*** → Hệ có nghiệm duy nhất

TH3: $rank(A) = rank\ (A|B) <$ ***số ẩn*** → Hệ có VSN

Cramer ~ *1 nghiệm duy nhất* ~ $\boxed{\det A \neq 0}$

- *Thuần nhất* ~ $B = \theta$ ~ *1 ngo (0,0,…,0) hoặc VSN*
- *Thuần nhất*

→ *loại Vô nghiệm*

→ *loại nghiệm duy nhất* $\neq (0,0,\ldots,0)$

Hệ phương trình tuyến tính (tt)

TH1: ***rank(A) < rank (A|B)***→ Hệ vô nghiệm

Vd.

$$\cdots\cdots\cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/5 & 1 \\ 0 & 1 & -3/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ta thấy r(A)=2< r(A|B)=3→ Hệ vô nghiệm

Hệ phương trình tuyến tính (tt)

TH2: ***r(A) = r (A|B) = số ẩn*** → Hệ có nghiệm duy nhất

Vd.

$$\cdots\cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Ta thấy: r(A) = r(A|B) = 4 = số ẩn=4 → Hệ có nghiệm duy nhất

Tìm nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 1 \\ \qquad x_2 \qquad + x_4 = -2 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 = 5 \\ \qquad\qquad\qquad 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Hệ phương trình tuyến tính (tt)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 1 \\ \qquad x_2 \qquad + x_4 = -2 \\ \qquad\qquad x_3 \quad + 2x_4 = 5 \\ \qquad\qquad\qquad 2x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - x_4 = 6 \\ x_2 = -2 - x_4 = -3 \\ x_3 = 5 - 2x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(6, -3, 3, 1\right)$

Hệ phương trình tuyến tính (tt)

TH3: ***rank(A) = rank (A|B) < số ẩn***→Hệ có VSN

* Số ẩn tự do = số ẩn- r (A)

* Ẩn tự do: ứng với CỘT KO CHỨA…

Vd.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta thấy: r(A) = r(A|B) = 3 < số ẩn = 4

→ Hệ có vô số nghiệm

Hệ có 4-3=1 ẩn tự do là x_3

$$\begin{cases} x_3 = a, a \in \mathbb{R} \\ x_1 \quad - 2x_3 = 2 \\ \quad x_2 + x_3 = -3 \\ \quad\quad x_4 = 4 \end{cases}$$

Hệ phương trình tuyến tính (tt)

$$\begin{cases} x_3 = a, a \in \mathbb{R} \\ x_1 \quad - 2x_3 = 2 \\ \quad x_2 + x_3 = -3 \\ \qquad x_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = a, a \in \mathbb{R} \\ x_1 \quad = 2 + 2x_3 = 2 + 2a \\ x_2 = -3 - x_3 = -3 - a \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là

$$\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(2 + 2a, -3 - a, a, 4\right)$$

Hệ phương trình tuyến tính (tt)

Phương trình ma trận A.X=B.

Phương trình AX=B nếu thỏa đk A khả nghịch thì hệ luôn có 1 nghiệm duy nhất là $\boxed{X = A^{-1}B}$

Ví dụ.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 4 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases} \quad (1) \xrightarrow{Bam\ may\ Ch2} (x, y, z) = (3, -2, 2)$$

$$(1) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{B} \xrightarrow[X=A^{-1}B]{Bam\ may\ Ch1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ứng dụng hệ PTTT

Mô hình Leontief Input- Output mở

Giới thiệu bài toán thực tế

Giả sử chúng ta xét một nền kinh tế đơn giản dựa trên 3 mặt hàng: sản phẩm nông nghiệp, sản phẩm chế tạo và nhiên liệu. Giả sử để sản xuất 10 đơn vị của sản phẩm nông nghiệp cần 5 đơn vị của sản phẩm nông nghiệp, 2 đơn vị của sản phẩm chế tạo và 1 đơn vị của nhiên liệu; *để sản xuất 10 đơn vị của sản phẩm chế tạo cần 1 đơn vị của sản phẩm nông nghiệp, 5 đơn vị của sản phẩm chế tạo và 3 đơn vị của nhiên liệu;* để sản xuất 10 đơn vị của nhiên liệu cần 1 đơn vị của sản phẩm nông nghiệp, 3 đơn vị của sản phẩm chế tạo và 4 đơn vị của nhiên liệu.

Mô hình Leontief Input- Output

Giới thiệu bài toán thực tế

Bảng số liệu bên dưới tóm tắt các thông tin về các mặt hàng sản xuất của 1 đơn vị mặt hàng.

Đầu vào (Input)	Đầu ra(sản lượng or output)		
	Nông sản	Chế thành phẩm	Nhiên liệu
Nông sản	0.5	0.1	0.1
Chế thành phẩm	0.2	0.5	0.3
Nhiên liệu	0.1	0.3	0.4

Mô hình Leontief Input- Output

Giới thiệu bài toán thực tế

Từ bảng số liệu trên ta có thể lập thành ma trận dữ liệu *A* và được gọi là **ma trận hệ số đầu vào** hay còn gọi là **ma trận Leontief** như sau

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} NN & CT & NL \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ NN \\ CT \\ NL \end{array}$$

Mô hình Leontief Input- Output

Giới thiệu bài toán thực tế

Sử dụng số liệu của bảng ở trên để trả lời các câu hỏi sau đây

a. Để sản xuất 100 đơn vị sản phẩm chế tạo cần bao nhiêu đơn vị sản phẩm nông nghiệp và nhiêu liệu?

b. Sản xuất mặt hàng nào ít phụ thuộc nhất vào 2 mặt hàng còn lại?

c. Nếu chi phí nhiên liệu tăng thì 2 ngành công nghiệp nào bị ảnh hưởng nhiều nhất?

Mô hình Leontief Input- Output

Giới thiệu bài toán thực tế

a.Để sản xuất 100 đơn vị sản phẩm ***chế tạo*** cần bao nhiêu đơn vị sản phẩm ***nông nghiệp và nhiêu liệu***?

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} NN & CT & NL \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ NN \\ CT \\ NL \end{array}$$

Do đó, để sản xuất 100 đơn vị sản phẩm chế tạo ta cần 10 đơn vị sản phẩm nông nghiệp và 30 đơn vị nhiên liệu.

Mô hình Leontief Input- Output

Giới thiệu bài toán thực tế

b. Sản xuất mặt hàng nào ***ít phụ thuộc nhất*** vào 2 mặt hàng còn lại?

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} NN & CT & NL \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} NN \\ CT \\ NL \end{array} \end{array}$$

. Nhìn vào các cột, ta thấy

+ 1 đơn vị sản phẩm nông nghiệp cần 0.3 đơn vị của 2 mặt hàng còn lại;

+ 1 đơn vị sản phẩm chế tạo cần 0.4 đơn vị của 2 mặt hàng còn lại;

+ 1 đơn vị nhiên liệu cần 0.4 đơn vị của 2 mặt hàng còn lại.

Do đó, sản xuất các mặt hàng **nông nghiệp** sẽ ít phụ thuộc nhất vào 2 mặt hàng còn lại.

Mô hình Leontief Input- Output

Giới thiệu bài toán thực tế

c. Nếu chi phí nhiên liệu tăng thì 2 ngành công nghiệp nào bị ảnh hưởng nhiều nhất?

$$\begin{array}{cccc} & NN & CT & NL & \\ A= & \left(\begin{array}{ccc} 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{array}\right) & & & \begin{array}{c} NN \\ CT \\ NL \end{array} \end{array}$$

Do đó, ngành sản xuất chế tạo và ngành công nghiệp nhiên liệu sẽ bị ảnh hưởng nhất khi tăng giá nhiên liệu

Mô hình Leontief Input- Output mở

Giới thiệu bài toán thực tế

Trong một mô hình kinh tế đơn giản (như ***Ví dụ***.) ta đặt x_1, x_2, x_3 lần lượt là tổng sản lượng của ngành NN, CT, NL

* **Ma trận tổng sản lượng** là

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

*Lượng tổng sản lượng được sử dụng trong nền kinh tế của các ngành công nghiệp khác nhau được cho bởi AX.

* Những đơn vị của tổng sản lượng không được sử dụng bởi các ngành này được gọi là **nhu cầu cuối cùng** hay **thặng dư** và có thể được dùng cho người tiêu dùng, dịch vụ, chính phủ hoặc xuất khẩu

Mô hình Leontief Input- Output mở

Nếu ta đặt các khoản thặng dư này trong 1 ma trận cột *D*, thì chúng có thể biểu diễn bởi phương trình sau đây

Hay

$$\boxed{\left(I_n - A\right)X = D}$$

Vậy ta có định nghĩa mô hình Leontief mở như sau

Mô hình Leontief Input- Output mở

Định nghĩa (Mô hình Leontief mở)

Mô hình Leontief mở là mô hình có phương trình kỹ thuật như sau

$$\boxed{(I_n - A)X = D}$$

Trong đó: A là ma trận đầu vào, X là tổng đầu ra (tổng sản lượng) của các ngành kinh tế, D là ma trận thăng dư (ma trận cột cuối cùng) của các ngành kinh tế, I_n là ma trận đơn vị cùng cấp với A.

Mô hình Leontief Input- Output mở

Giải phương trình kỹ thuật tìm tổng đầu ra (tổng sản lượng)

bằng cách $X = \left(I_n - A\right)^{-1} D.$

Thặng dư

A: matrix Leontief

Tổng sản lượng

Mô hình Leontief Input- Output mở

Ví dụ 1. Ma trận hệ số đầu vào *A* đại diện cho nền kinh tế đơn giản gồm ngành công nghiệp nông nghiệp, ngành chế tạo, và ngành nhiên liệu

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} NN & CT & NL \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc} 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{array}\right) \begin{array}{c} NN \\ CT \\ NL \end{array} \end{array}$$

Nếu chúng ta muốn có thặng dư là 85 đơn vị nông sản, 65 đơn vị chế tạo và 0 đơn vị nhiên liệu. Tìm tổng sản lượng của mỗi ngành?

Mô hình Leontief Input- Output mở

Giải.

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là tổng sản lượng của ngành NN, CT, NL

→ Ma trận tổng sản lượng là

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ma trận thặng dư

$$D = \begin{pmatrix} 85 \\ 65 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mô hình Leontief Input- Output mở

→

$$\left[\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{A}-\underbrace{\begin{pmatrix}0.5 & 0.1 & 0.1\\0.2 & 0.5 & 0.3\\0.1 & 0.3 & 0.4\end{pmatrix}}_{B}\right]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}85\\65\\0\end{pmatrix}}_{C}$$

→

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\left(I_3-A\right)^{-1}D=\begin{pmatrix}300\\400\\250\end{pmatrix}$$

$$\left(matA-matB\right)^{-1}\times matC=$$

Mô hình Leontief Input- Output mở

Ví dụ 2. Một nền kinh tế nguyên thủy gồm ngành công nghiệp gỗ và công nghiệp năng lượng có ma trận hệ số đầu vào như sau.

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad G & \quad NL \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} G \\ NL \end{array} \end{array}$$

*a.*Nếu ta muốn có lượng thặng dư là 30 đơn vị gỗ và 70 đơn vị năng lượng, hãy tìm tổng sản lượng của mỗi ngành.

b. Nếu ta muốn có lượng thặng dư là 30 đơn vị gỗ và 75 đơn vị năng lượng, hãy tìm tổng sản lượng của ngành Gỗ.

Mô hình Leontief Input- Output mở

Giải.

a. Gọi x_1, x_2 lần lượt là tổng sản lượng của ngành Gỗ và năng lượng

→ Ma trận tổng sản lượng là $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Ma trận thặng dư $D = \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix}$

Mô hình Leontief Input- Output mở

→

$$\left[\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}}_{A}-\underbrace{\begin{pmatrix}0.1 & 0.2\\0.2 & 0.4\end{pmatrix}}_{B}\right]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}30\\70\end{pmatrix}}_{C}$$

→

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\left(I_2-A\right)^{-1}D=\begin{pmatrix}64\\138\end{pmatrix}$$

+ Nhập A(mode 6 1…)→shift 4 1 2 nhập B→ shift 4 1 3 nhập C→ thoát ma trận AC

+Tính (shift43 – shift 44)x^{-1} * shift 45=

Mô hình Leontief Input- Output mở

Giải.

b.Gọi x_1, x_2 lần lượt là tổng sản lượng của ngành Gỗ và năng lượng

→ Ma trận tổng sản lượng từng ngành là $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Ma trận thặng dư $D = \begin{pmatrix} 30 \\ 75 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} G & NL \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} G \\ NL \end{array} \end{array}$$

→ $X = \begin{pmatrix} 66 \\ 147 \end{pmatrix}$

→ *Tổng sản lượng của ngành Gỗ là:* $x_1 = 66$

Mô hình Leontief Input- Output mở

Bài tập 3.

Một lĩnh vực của nền kinh tế gồm 2 ngành: ngành công nghệ khai thác mỏ (Mining industry, viết tắt là M) và ngành công nghiệp chế tạo (Manufacturing industry, viết tắt là Mfg) có ma trận hệ số đầu vào là

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} M & Mfg \\ \left(\begin{array}{cc} 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.3 \end{array}\right) & \end{array}\begin{array}{c} \\ M \\ Mfg \end{array}$$

Nếu ta mong muốn lượng thặng dư là 36 đơn vị sản lượng ngành công nghệ khai thác mỏ và 278 đơn vị sản lượng ngành chế tạo, tìm tổng sản lượng của mỗi ngành.

Chương 3. Không gian vec-tơ

Tập hợp khác Rỗng V + Hai phép toán

Cộng các vec-tơ

Nhân 1 vec-tơ với 1 số

8 tiên đề

1. $u+v=v+u$

2. $(u+v)+w=u+(v+w)$

3. Tồn tại vec-tơ ***không*** $u+\theta=\theta+u$

4. Mọi vec-tơ u luôn tồn tại vec-tơ (-u) thỏa $u+(-u)=\theta$

5. Với mọi số a, b và mọi vec-tơ u ta có $(a+b)u=au+bu$

6. Với mọi số a, b và mọi vec-tơ u ta có $a(u+v)=au+av$

7. $(ab)u=a(bu)$

8. $1.u=u$

Chương 3. Không gian vec-tơ

Ví dụ 1. $V_1 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$

Ta định nghĩa phép cộng 2 vector như sau

$$u + v = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

và đn phép nhân 1 số với 1 vector như sau

$$a.u = a.(u_1, u_2, u_3) = (au_1, au_2, au_3)$$

…… $\theta = (0,0,0)$

V_1 là 1 KGVT $\mathbb{R}^3$ trên trường số thực

Chương 3. Không gian vec-tơ

Ví dụ 2.
$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Ta định nghĩa phép cộng 2 vector là: ***phép cộng 2 ma trận***

và đn phép nhân 1 số với 1 vector là: **phép nhân 1 số với 1 ma trận**

……
$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⇨ V_2 là 1 KGVT $M_2[\mathbb{R}]$

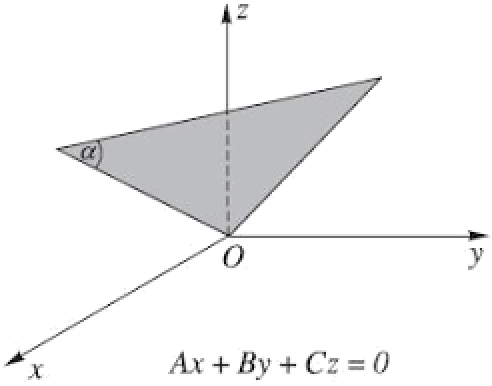
Chương 3. Không gian vec-tơ

Ví dụ 3.

$$V_3 = \left\{ u = \left(x, y, z \right) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \;\wedge\; Ax + By + Cz = 0 \right\}$$

Ta định nghĩa phép cộng và phép nhân như vd 1

……



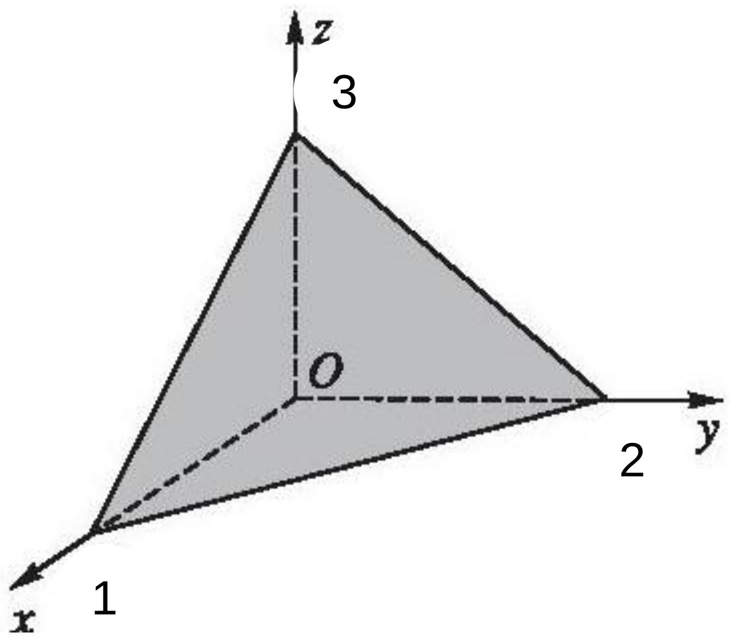
$\Rightarrow$ V_3 là 1 KGVT

Chương 3. Không gian vec-tơ

Ví dụ 4.

$$V_4 = \{u = (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \ \wedge \ 6x + 3y + 2z = 6\}$$

Ta định nghĩa phép cộng và phép nhân như vd 1



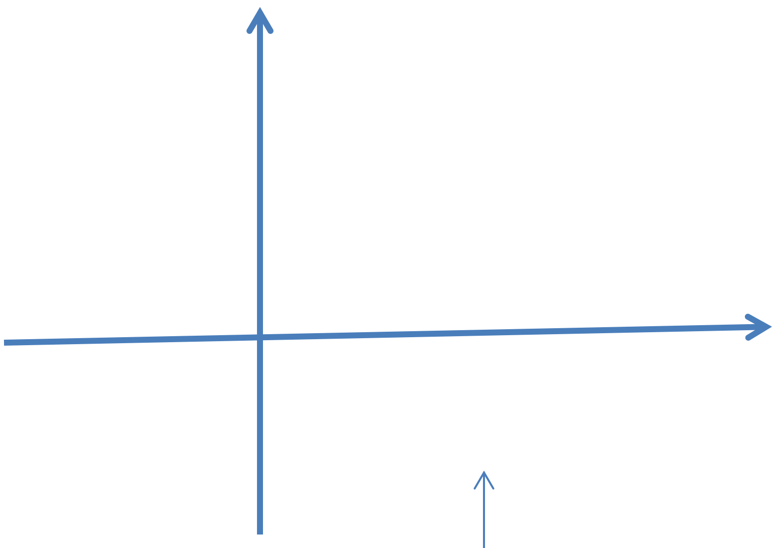
V$_4$ KHÔNG là 1 KGVT vì $\theta = (0,0,0) \notin v_4$

Chương 3. Không gian vec-tơ $\mathbb{R}^n$

Tìm hiểu và mở rộng 2 không gian

$$V_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

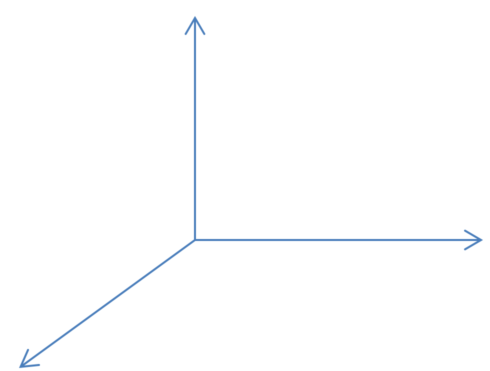
$$V_3 = \{u = (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \ \wedge \ Ax + By + Cz = 0\}$$

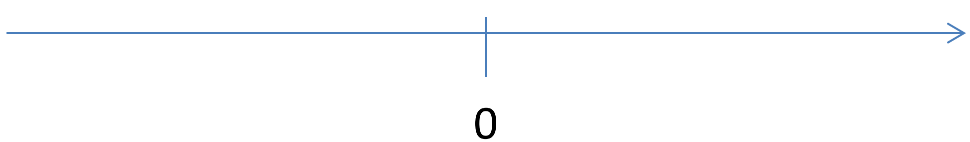


$$\mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Ví dụ. $u = (1, -2, 3, 0) \in \mathbb{R}^4$

$$v = (-1, 3) \in \mathbb{R}^2$$





Chương 3. Không gian vec-tơ $\mathbb{R}^n$

1. Tổ hợp tuyến tính, Độc lập tuyến tính, Phụ thuộc tuyến tính
2. Cơ sở, số chiều của không gian **Sinh**
3. Cơ sở, số chiều của không gian **Nghiệm**
4. **Tọa độ** của 1 vec-tơ theo 1 cơ sở
5. Ứng dụng: Phép quay

Cho Phương trình/ hệ PT ➔ mục 3

Cho vector ➔ mục 2

Tổ hợp, Độc lập, Phụ thuộc , Cơ sở, số chiều , **Tọa độ ,** Phép quay

1. THTT, ĐLTT, PTTT

Cho V là 1 KGVT

M là tập con của V gồm m vector

$M=\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$

Vector u thuộc V là 1 **TỔ HỢP TUYẾN TÍNH** của M, nếu

$$\exists x_1, x_2, \ldots, x_m \in R$$

$$\Rightarrow \quad u = x_1.u_1 + x_2.u_2 + \cdots + x_m.u_m$$

1. THTT, ĐLTT, PTTT

Cho V là 1 KGVT

M là KG con của V gồm m vector

$M=\{u_1, u_2,\ldots,u_m\}$

Xét PT $x_1.u_1 + x_2.u_2 + \cdots + x_m.u_m = \theta \quad (1)$

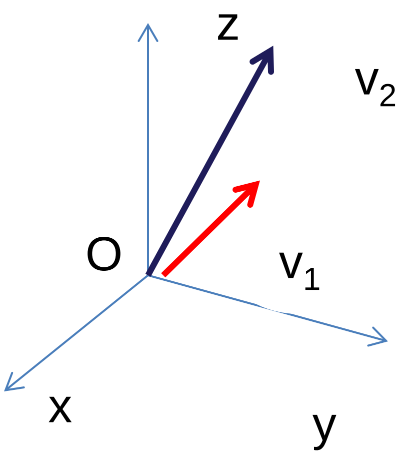
$\exists x_1, x_2, \ldots, x_m \in R$ ***không đồng thời bằng 0*** thỏa pt (1)

➡ M ***PTTT***

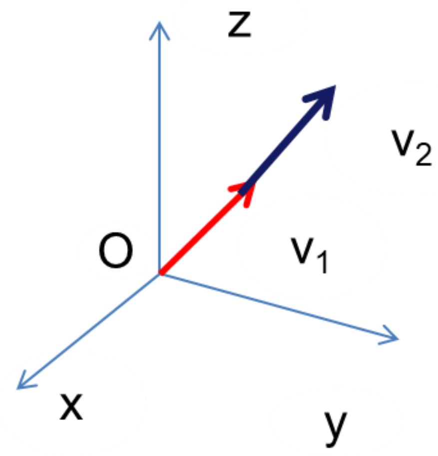
Nếu pt (1) chỉ có ***nghiệm tầm thường*** $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$

➡ M ***ĐLTT***

1. THTT, ĐLTT, PTTT



$\{v_1, v_2\}$ ĐLTT trong R^3



$\{v_1, v_2\}$ PTTT trong R^3

O

1. THTT, ĐLTT, PTTT

Ví dụ. Trong kgian $\mathbb{R}^3$ cho họ vec-tơ

$$M = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (2,1,3); u_3 = (1,2,0)\}$$

a. Hỏi M đltt hay pttt?

b. Vec-tơ $u = (2,-1,3)$ có là 1 THTT của họ M ko

Giải. a. Giả sử $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = \theta$

$$\Leftrightarrow x_1(1,1,1) + x_2(2,1,3) + x_3(1,2,0) = \theta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

➔ *Hệ vô số nghiệm*

➔ M ***PTTT***

1. THTT, ĐLTT, PTTT

Ví dụ. Trong kgian $\mathbb{R}^3$ cho họ vec-tơ

$$M = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (2,1,3); u_3 = (1,2,0)\}$$

a. Hỏi M đltt hay pttt?

b. Vec-tơ $u = (2,-1,3)$ có là 1 THTT của họ M ko

Giải. b. Giả sử $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = u$

$$\Leftrightarrow x_1(1,1,1) + x_2(2,1,3) + x_3(1,2,0) = (2,-1,3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

➔ *Hệ vô nghiệm*

➔ u KHÔNG là 1 THTT của họ M

1. THTT, ĐLTT, PTTT

Tóm tắt. ĐLTT,PTTT

M={u_1, u_2,...,u_m}

$$x_1.u_1 + x_2.u_2 + \cdots + x_m.u_m = \theta \quad (1)$$

Xếp vector thành ***CỘT*** đưa về hệ thuần nhất AX=0

$$\boxed{\left(u_1^T,\ u_2^T, \ldots, u_m^T \middle| \theta^T\right) \quad (*)}$$

(*) CÓ VNS ➔M ***PTTT***

(*) CÓ 1 NGHIỆM DUY NHẤT ➔M ***ĐLTT***

1. THTT, ĐLTT, PTTT

NOTE:

* Nếu tập M chứa ***vector KHÔNG*** ➔ M LUÔN PTTT
* Nếu tập M chứa ***2 vector TỶ LỆ*** ➔ M LUÔN PTTT

Vd. M= $\{u_1=(1,2),\ u_2 = (0,0)\}$ ➔ M pttt

M= $\{u_1=(1,2),\ u_2 = (-3,-6)\}$ ➔ M pttt

1. THTT, ĐLTT, PTTT

Tóm tắt.

THTT

$$M=\{u_1, u_2,\ldots,u_m\}$$

Xếp vector thành ***CỘT*** đưa về hệ AX=B

$$\left(u_1^t,\ u_2^t,\ldots,u_m^t \,\middle|\, u^t\right) \quad (**)$$

(**) CÓ nghiệm (r(A)=r(A|B)) ➔ u là 1 THTT của M

(**) vô nghiệm (r(A) < r(A|B)) ➔ u KHÔNG là 1 THTT của M

1. THTT, ĐLTT, PTTT

Câu 14. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ hệ nào sau đây độc lập tuyến tính

A. $\{u_1 = (1,-2,1),\ u_2 = (2,4,6), u_3 = (1,2,3)\}$

B. $\{u_1 = (0,0,0),\ u_2 = (2,4,6), u_3 = (1,2,3)\}$

C. $\{u_1 = (-1,-2,-3),\ u_2 = (2,4,6), u_3 = (1,2,3)\}$

D. $\{u_1 = (1,-2,1),\ u_2 = (2,4,5), u_3 = (1,2,3)\}$

Loại A,B,C ➔ Đáp án D

Kiểm D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

➔ $x = y = z = 0$ ➔ D ĐLTT ➔ Đáp án D

1. THTT, ĐLTT, PTTT

Vd 2. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ hệ nào sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$A.\{(0,1,3),\ (2,1,3),\ (0,0,3)\}$$

$$B.\{(1,1,2),\ (0,1,2),\ (0,0,2)\}$$

$$C.\{(0,0,2),\ (0,2,3),\ (1,2,3)\}$$

$$D.\{(0,2,5),\ (1,1,2),\ (-1,1,3)\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Kiểm A. $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$

➔ $x = y = z = 0$ ➔ A ĐLTT ➔ loại A

....

Vd

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & -2 & x_3 - x_1 - x_2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{x_3 - x_1 - x_2} \end{array}\right)$$

R(A)= 2, ...THTT, r(A|B)=2 → $\boxed{x_3 - x_1 - x_2 = 0}$

Cơ sở, số chiều của không gian Sinh

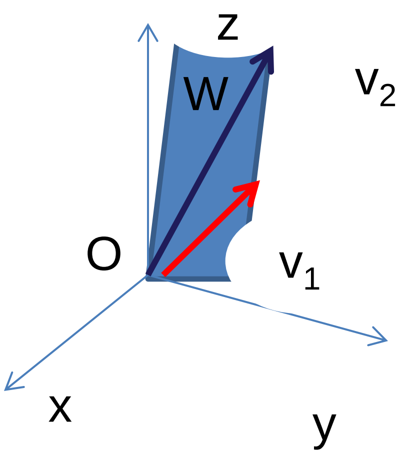
ĐN. Trong kgvt V, cho tập gồm m vector $A=\{u_1, u_2,...,u_m\}$.
Xét W ="Tập hợp tất cả các THTT của A"

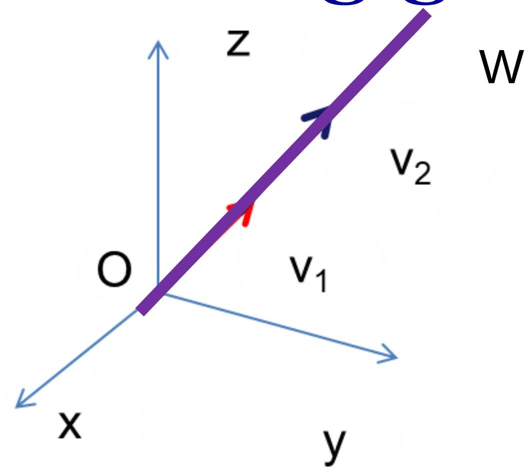
$$= \left\{ x_1.u_1 + x_2.u_2 + \cdots + x_m.u_m \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Khi đó, W được gọi là không gian Sinh bởi tập A và A được gọi là tập Sinh.

spanA=W

Cơ sở, số chiều của không gian Sinh

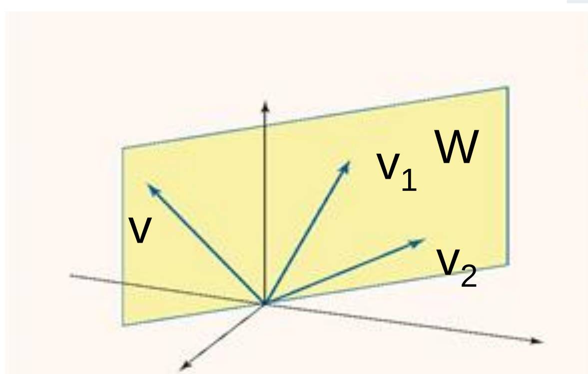




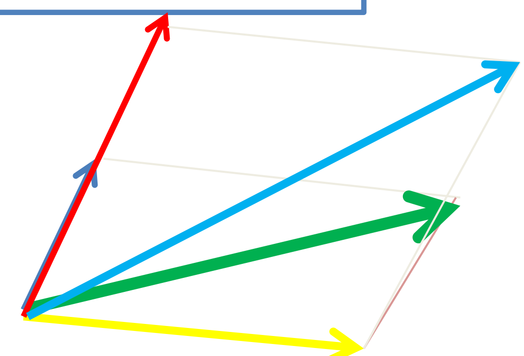
KG Sinh bởi v_1,v_2

KG Sinh bởi v_1,v_2

o



KG Sinh bởi v, v_1,v_2



Cơ sở, số chiều của không gian Sinh

ĐN 2. Trong kgvt V, cho tập gồm m vector

$$A=\{u_1, u_2,\ldots,u_m\}.$$

Nếu A là tập sinh của 1 không gian W nào đó trong V và A *ĐLTT* thì A được gọi là 1 cơ sở của không gian W.
Khi đó, số chiều của không gian W, ký hiệu là dimW, là số vector trong cơ sở A. Tức là dimW = m

Cơ sở, số chiều của không gian Sinh

Cách tìm cơ sở, số chiều của 1 không gian W sinh bởi tập gồm m vector $M=\{u_1, u_2,\ldots,u_m\}$.

Bc1: Lập ma trận A bằng cách xếp các vector u_1, $u_2,\ldots,u_m$ **THÀNH DÒNG**

Bc2: Xây dựng A thành ma trận bậc thang (MTBT).

Bc3: Kết luận.

+ dim W = rankA

+ 1 **cơ sở** của W là **tập** các vector là các **dòng khác dòng không trong MTBT của A**

Cơ sở, số chiều của không gian Sinh

- Ví dụ 1.

Câu 15. Tìm số chiều của không gian con của sinh bởi các vectơ sau

$$\{u_1 = (1,2,3,4),\ u_2 = (2,3,4,5), u_3 = (3,4,5,6), u_4 = (4,5,6,7)\}$$

A. n = 1 B. n = 2 C. n = 3 D. n = 4

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 \to d_4 - 4d_1]{\substack{d_2 \to d_2 - 2d_1 \\ d_3 \to d_3 - 3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

Cơ sở, số chiều của không gian Sinh

A. n = 1 B. n = 2 C. n = 3 D. n = 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rankA = 2

➔DimW =2

➔1 cơ sở của W là $\{u_1, u_2\}$

Cơ sở, số chiều của không gian Sinh

Ví dụ 2. Tìm số chiều của không gian con của sinh bởi các vectơ sau

$$\left\{\alpha_1 = (1,2,-1), \alpha_2 = (-2,-3,4), \alpha_3 = (1,3,2), \alpha_4 = (-1,-1,3)\right\}$$

A. n = 1 B. n = 2 C. n = 3 D. n = 4

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 \to d_4 + d_1]{\substack{d_2 \to d_2 + 2d_1 \\ d_3 \to d_3 - d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

➔ rankA = 3

➔ DimW = 3

➔ 1 cơ sở của W là $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

Cơ sở, số chiều của không gian Nghiệm

ĐN. Không gian nghiệm là tập nghiệm của hệ thuần nhất

Tức là

$$W = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \,\middle|\, \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \right\}$$

Cơ sở, số chiều của không gian Nghiệm

<u>PP tìm cơ sở, số chiều của kg nghiệm</u>

Bc1: Giải hệ tìm nghiệm

Bc2: Kết luận

+ Dim = Số ẩn tự do =số ẩn - r(A)

+ Tìm 1 cơ sở: .....

Cơ sở, số chiều của không gian Nghiệm

Vd1. **Câu 16.** Tìm một cơ sở của không gian nghiệm sau

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \end{cases} \right\}$$

A. $\{(-2,1,0);(-3,0,1)\}$

B $\{(2,1,0);(3,0,1)\}$

Giải. $(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

➔rankA=rank(A|B)= 1

➔dimW = 2

➔Loại C, D

Cơ sở, số chiều của không gian Nghiệm

A. $\{(-2,1,0);(-3,0,1)\}$ B. $\{(2,1,0);(3,0,1)\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ có 2 ẩn tự do là y và z

$$\begin{cases} y = a \\ z = b \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = a \\ z = b \\ x = -2y - 3z = -2a - 3b \end{cases}$$

➔Nghiệm của hệ là (x,y,z)=(-2a-3b,a,b)

=(-2a,a,0)+(-3b,0,b)

=a(-2,1,0)+b(-3,0,1)

Cơ sở, số chiều của không gian Nghiệm

Ví dụ 2.

Trong không gian véc-tơ $\mathbb{R}^3$ cho không gian nghiệm $W = \{(a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \mid -a + b - 2c = 0\}$.

Một cơ sở của *W* là

A. $\{(1;1;0)\}$

B. $\{(1;1;0), (-2;0;1), (1;-1;1)\}$

C. $\{(1;1;0), (-2;0;1)\}$

D. $\{(-2;0;1), (1,2,3)\}$

Giải. $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

Hệ có 3-1 = 2 ẩn tự do là b và c

$\Rightarrow dimW = 2$ ➔ loại A,B

Nghiệm của hệ là

$$(b-2c,b,c) = (b,b,0) + (-2c,0,c) = b(1,1,0) + c(-2,0,1)$$

Tọa độ của 1 vector theo 1 cơ sở

ĐN: Trong kgvt R^n, cho 1 cơ sở $A=\{u_1, u_2,\ldots,u_n\}$.

Khi đó, với mọi vector u trong R^n

PT $x_1.u_1 + x_2.u_2 + \cdots + x_n.u_n = u$ có 1 nghiệm duy nhất. Nghiệm đó được gọi là tọa độ của vector u theo cơ sở A.

Tóm lại. Tìm tọa độ của u theo cs $A =\{u_1, u_2,\ldots,u_n\}$

Xếp vector **thành cột** đưa về hệ AX=B

$$\boxed{\left(u_1^T,\ u_2^T,\ldots,u_m^T \middle| u^T\right) \quad (**)}$$

Giải (**) tìm nghiệm, nghiệm là tọa độ.

Tọa độ của 1 vector theo 1 cơ sở

Vd. Trong không gian R^3 tìm tọa độ của vectơ $u = (1, 2, 1)$ theo cơ sở

$$B = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)\}.$$

$A. x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$

$B. x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$

$C. x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 3$

$D. x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0$

Giải. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Chương 4. Trị riêng- vec-tơ riêng

+ *Tìm giá trị riêng (1 câu)*

+ Tìm vec-tơ riêng ứng với trị riêng (1 câu)

Chương 4. Trị riêng- vec-tơ riêng

Định nghĩa.

Cho A là ma trận vuông cấp n. Số λ ∈ ℝ được gọi là giá trị riêng ứng với vec-tơ riêng $u \in \mathbb{R}^n, u \neq \theta$

nếu $\boxed{Au = \lambda u}$

Ví dụ. Cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \lambda = 2$ *và* $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ta có

$$Au = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.(-1) + 1.1 \\ 1.(-1) + 3.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda u = 2.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Suy ra λ = 2 là 1 trị riêng ứng với vec-tơ riêng u=(-1, 1)

Chương 4. Trị riêng- vec-tơ riêng

Ta có $Au = \lambda u$

$$\Leftrightarrow Au - \lambda u = \theta \Leftrightarrow \left(A - \lambda I_n\right)u = \theta$$

→ *Giải hệ thuần nhất* $\left(A - \lambda I_n \middle| \theta\right)$

để tìm vec-tơ riêng u và LOẠI VEC-TƠ KHÔNG

Vì $u \neq \theta$

→ *hệ có VSN*

→ $\det\left(A - \lambda I_n\right) = 0$

→ *để tìm* λ

Chương 4. Trị riêng- vec-tơ riêng

Phương pháp tìm trị riêng- vec-tơ riêng.

Bc1: Tìm đa thức đặc trưng $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

Bc2: Giải phương trình đặc trưng

$$\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

tìm λ

Bc3: Giải hệ thuần nhất $\left(A - \lambda I_n \middle| \theta\right)$

tìm nghiệm. Nghiệm là vec-tơ riêng và loại ***vec-tơ không***

Chương 4. Trị riêng- vec-tơ riêng

Ví dụ 1. *Cho ma trận* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Tìm các trị riêng của A

Giải.

Ta có $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det\left(A - \lambda I_2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3-\lambda\right)^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = 4 \end{array}\right.$$

Chương 4. Trị riêng- vec-tơ riêng

Ví dụ 2. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tìm các trị riêng của A

Giải.

Ta có $\det\left(A - \lambda I_2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Chương 4. Trị riêng- vec-tơ riêng

Ví dụ 1. *Cho ma trận* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Tìm các vec-tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = 4$

Giải.

Ta có $\left(A - \lambda I_2 \middle| \theta\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3-4 & 1 & 0 \\ 1 & 3-4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{d_2 \to d_2 + d_1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Suy ra r(A) =r(A|B) =1< số ẩn =2

→ *Hệ có VSN, hệ có 2-1 = 1 ẩn tự do là* x_2

$$\begin{cases} x_2 = a, a \in \mathbb{R} \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = a, a \in \mathbb{R} \\ x_1 = x_2 = a \end{cases}$$

Vậy vec-tơ riêng $u = (a, a), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Chương 4. Trị riêng- vec-tơ riêng

Ví dụ 1. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 27 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Tìm các vec-tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = 2$

A. $u = (5\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

C. $u = (\alpha, 5\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Chương 4. Trị riêng- vec-tơ riêng

Ví dụ 1. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 27 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Tìm các vec-tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = 2$

Giải.

Ta có

$$\left(\begin{array}{cc|c} 27-2 & -5 & 0 \\ -5 & 3-2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 25 & -5 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 25 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

→ *R(A)=1=r(A|B) <số ẩn =2 → hệ có vsn, hệ có 2-1=1an63 tự do là* x_2

$$\begin{cases} x_2 = 5a, a \in \mathbb{R} \\ 25x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5a, a \in \mathbb{R} \\ x_1 = a \end{cases}$$

Vậy vec-tơ riêng

$$u = (a, 5a), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Chương 4. Trị riêng- vec-tơ riêng

Ví dụ 1. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 27 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Tìm các vec-tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = 2$

A. $u = (5\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

C. $u = (\alpha, 5\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Chương 4. Trị riêng- vec-tơ riêng

Bài tập.

1. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tìm các vec-tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = -1$

2. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tìm các trị riêng của A.