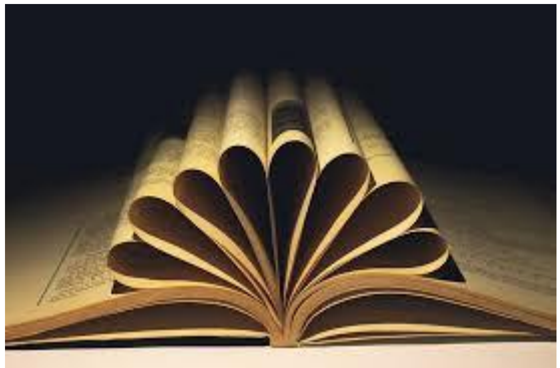
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VĂN LANG

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN



CÁC BÀI GIẢNG TOÁN RỜI RẠC

Biên soạn: PGS.TS. NGUYỄN VĂN LỘC- TS. TRẦN NGỌC VIỆT

TP.HỒ CHÍ MINH .THÁNG 2 NĂM 2020

Chương 1. CƠ SỞ LÔGIC

Bài 1. Mệnh đề- logic- vị từ và lượng từ

1. Mệnh đề

1.1. Định nghĩa

Mệnh đề là một khẳng định có giá trị đúng hoặc sai (nhưng không thể vừa đúng vừa sai).

Kí hiệu mệnh đề: *P*, *Q*, *R*,……

Chú ý: Các câu hỏi, câu cảm thán, câu mệnh lệnh không phải mệnh đề.

1.2. Các phép toán trên các mệnh đề

1.2.1. Phép phủ định

Phủ định của mện đề P là mệnh đề ký hiệu: $\overline{P}$ (đọc "không P") là mệnh đề có giá trị được xác định bằng bảng sau:

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

Ví dụ 1: Cho p: "5+2 = 9", thì $\overline{P}$ là mệnh đề "không phải 5 + 2 = 9". Nghĩa là $"5+2\neq 9"$. Ở đây, p là sai và $\overline{P}$ đúng.

Luyện tập 1. Cho mệnh đề P: 2+3 > 7. Tìm mệnh đề $\overline{P}$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề đó?

1.2.2.Phép hội

Hội của hai mệnh đề *P*, *Q* được ký hiệu bởi $P\wedge Q$ (đọc "*P* và *Q*" là một mệnh đề có giá trị được xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Vậy mệnh đề $P \wedge Q$ chỉ đúng khi cả *P* và *Q* đều đúng, còn sai trong các trường hợp còn lại.

Ví dụ 2: Cho mệnh đề:

P: "2 là số nguyên tố"

Q: "2 là số chẵn".

$P \wedge Q$: "2 là số nguên tố và 2 là số chẵn".

Ta có: $P = 1$ và $Q = 1$, do đó: $P \wedge Q = 1$.

Luyện tập 2. Cho mệnh đề *P*: "14 là số nguyên" và *Q*: "14 chia hết cho 5". Hãy lập mệnh đề $P \wedge Q$ và xác $\mathbb{R}$ định tính đúng sai của mệnh đề đó.

1.2.3. Phép tuyển (không loại)

Tuyển của hai mệnh đề *P, Q* được ký hiệu bởi $P \vee Q$ (đọc: "*P* hoặc *Q*" là một mệnh đề có giá trị được xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Vậy mệnh đề $P \vee Q$ chỉ sai khi cả *P* và *Q* đều sai, đúng trong các trường hợp còn lại.

Ví dụ 3. Cho mệnh đề *P*: "12 là số nguyên"và *Q*: "12 chia hết cho 5". Thì mệnh đề $P \vee Q$ là mệnh đề "12 là số nguyên và 12 chia hết cho 5" là mệnh đề đúng. Ở đây, mệnh đề p đúng nên $P \vee Q$ đúng.

Luyện tập 2. Cho mệnh đề *P*: “7 là số chẵn” và *Q*: “7 > 10”. Hãy lập mệnh đề $P \vee Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề đó.

Chú ý.

+ Phép tuyển nêu trên gọi là tuyển không loại: Với phép tuyển này từ “hoặc” được hiểu theo nghĩa: *P* hoặc *Q* hoặc cả *P* và *Q*.

+ Phép tuyển loại: *P* hoặc *Q* nhưng không thể cả *P* và *Q*. Kí hiệu: $\veebar$.

+ Trong giáo trình ta dùng phép tuyển không loại.

Phép tuyển loại, được xác định bởi bảng giá trị sau:

P	Q	$P \veebar Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ví dụ 4. Hoàng sinh ra ở Hà Nội hoặc ở TP. Hồ Chí Minh.

1.2.4. Phép kéo theo (còn gọi là mệnh đề có điều kiện hay phép suy diễn)

Mệnh đề *P* kéo theo mệnh đề *Q* được ký hiệu là $P \Rightarrow Q$ là một mệnh đề có giá trị được xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Vậy mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi *P* đúng và *Q* sai, còn đúng trong mọi trường hợp còn lại

Ví dụ 5. Cho mệnh đề p: “2 < 3” và mệnh đề q: “4 < 9” thì $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề “nếu 2 < 3 thì 4 < 9” . Do p đúng, q đúng nên $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng.

Luyện tập 5. Cho mệnh đề p: “3 + 2 = 6” và mệnh đề q: “4 x 2 = 8”. Hãy lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề đó.

1.2.5. Phép tương đương

Mệnh đề P tương đương với mệnh đề Q, được ký hiệu bởi $P \Leftrightarrow Q$ là một mệnh đề xác định bởi $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. Từ đó ta có bảng chân trị sau:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Như vậy, mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ chỉ đúng khi cả hai mệnh đề P và Q cùng đúng hoặc cùng sai và sai trong các trường hợp còn lại.

Chú ý

Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ còn được đọc là:”*P* khi và chỉ khi *Q”*; “*P* nếu và chỉ nếu *Q*” ;”*P* là cần và đủ đối với *Q*”; “Nếu *P* thì *Q* và ngược lại”.

Ví dụ 6. Cho mệnh đề p:” 5 +2 = 7” và mệnh đề “3 x 4 = 9” thì mệnh để $P \Leftrightarrow Q$: “5 +2 = 7 khi và chỉ khi 3 x 4 = 9” là mệnh đề sai vì p đúng , q sai.

Luyện tập 6. Cho mệnh đề p: “3 > 6” và mệnh đề q: “4 + 2 = 10”. Hãy lập mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề đó.

1.3. Công thức và tương đương lôgic

1.3.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1

Công thức (hay mệnh đề phức hợp) là các mệnh đề được xây dựng từ một số mệnh đề ban đầu nhờ liên kết chúng lại bằng các phép toán lôgic (hội, tuyển, phủ định, kéo theo, tương đương).

Các mệnh đề không được xây dựng từ các mệnh đề khác qua các phép toán lôgic gọi là mệnh đề sơ cấp.

Ví dụ 7. Giải thích tại sao công thức $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$ là mệnh đề phức hợp.

Định nghĩa 2

a) Một công thức luôn có giá trị đúng được gọi là một hằng đúng hay định lí (Hay còn gọi là luật).

b) Một công thức luôn có giá trị sai được gọi là hằng sai hay mâu thuẫn.

Ví dụ 8. Chứng tỏ rằng : Công thức $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$ là định lý.

Định nghĩa 3

a) Hai mệnh đề *A* và *B* gọi là tương đương logic nếu chúng có cùng chân trị. Khi đó ta viết: $A \equiv B$ hay A=B.

b) Mệnh đề *B* gọi là hệ quả logic của mệnh đề *A* nếu $A \Rightarrow B$ là một mệnh đề hằng đúng.

Ví dụ 9. Hai mệnh đề sau là tương đương lôgic: $P \vee (Q \Rightarrow R) \equiv P \vee (\overline{Q} \vee R)$

(Vì biểu thức con $Q \Rightarrow R$ tương đương lôgic với $\overline{Q} \vee R$).

Luyện tập 9. Chứng tỏ rằng: Hai mệnh đề E và F sau là tương đương lôgic.

$$E = \overline{P \Rightarrow Q},\ F = \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}.$$

Chú ý

Mệnh đề phức hợp *A* và *B* tương đương lô gic khi và chỉ khi $A \Leftrightarrow B$ là mệnh đề hằng đúng.

1.3.2. Độ ưu tiên của các thuật toán

Cấp ưu tiên	Thực hiện

1 2	Các phép toán trong ngoặc. Phép phủ định (-),phép hội $(\wedge)$
3 4 5	Phép tuyển $(\vee)$ Phép kéo theo $(\Rightarrow)$ Phép tương đương $(\Leftrightarrow)$

1.3.3. Các qui luật lôgic

1) Định lí

Với *P, Q, R* là các mệnh đề bất kỳ. Khi đó ta có:

1. Luật phủ định của phủ định: $\overline{\left(\overline{P}\right)} = P$
2. Các luật De Morgan: $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}; \overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}.$
3. Luật giao hoán: $P \wedge Q = Q \wedge P; P \vee Q = Q \vee P.$
4. Luật kết hợp: $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R; P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$.
5. Luật phân bố:

   $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R);$

   $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$
6. Luật lũy đẳng: $P \wedge P = P; P \vee P = P.$
7. Luật về phần tử bù: $P \wedge \overline{P} = 0; P \vee \overline{P} = 1.$
8. Luật thống trị: $P \wedge 0 = 0; P \vee 1 = 1.$
9. Luật hấp thụ: $P \wedge (P \vee Q) = P; P \vee (P \wedge Q) = P.$
10. Luật chứng minh phản chứng thứ nhất: $P \Rightarrow Q = \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
11. Luật chứng minh phản chứng thứ hai: $\overline{P \Rightarrow Q} = P \wedge \overline{Q}$

Chứng minh

11 luật trên có thể kiểm tra bằng cách lập bảng chân trị 2 vế của tương đương lôgic

Ví dụ 10. Chứng minh: $((P \wedge Q) \Rightarrow R) = (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$.

Giải.

$$\begin{aligned}
&(P \wedge Q) \Rightarrow R = \overline{P \wedge Q} \vee R \\
&= (\overline{P} \vee \overline{Q}) \vee R \\
&= \overline{P} \vee (\overline{Q} \vee R) \\
&= \overline{P} \vee (Q \Rightarrow R) \\
&= P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)
\end{aligned}$$

Luyện tập 10. Chứng minh mệnh đề sau là mệnh đề hằng đúng.

$$((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$$

2. Hàm mệnh đề

2.1.Định nghĩa

Hàm mệnh đề là một khẳng định *P(x, y, ...)* trong đó có chứa một số biến *x,y,...*lấy giá trị trong những tập hợp cho trước *A, B,...*sao cho:

+ Bản thân *P(x,y,..)* không phải là mệnh đề

+ Nếu thay *x,y,...*bởi các giá trị cụ thể $a \in A, b \in B$ ...ta sẽ được một mệnh đề.

Ví dụ 11.

P (n) = “n là một số nguyên tố” là một hàm mệnh đề theo biến $n \in \mathbb{N}$.

Với n = 2, n = 7 ta được các mệnh đề đúng P(2), P(7); còn n = 4, n = 6, n = 9 ta được các mệnh đề sai P(4), P(6), P(9).

Luyện tập 11. Cho Q(x, y) = “x = y + 3” là một hàm mệnh đề theo 2 biến $x, y \in \mathbb{R}$.

Xác định chân trị của các mệnh đề Q(1,2) và Q(3,0).

2.2. Vị từ và lượng tử

2.2.1.Định nghĩa

Giả sử *P(x)* là một mệnh đề theo biến $x \in A$.

- $\forall x \in A, P(x)$ là một mệnh đề, nó nhận giá trị đúng khi và chỉ khi với phần tử bất kỳ $a \in A$ ta có: *P(a) = 1*.
- $\exists x \in A, P(x)$ là một mệnh đề, nó nhận giá trị đúng khi và chỉ khi tồn tại $a \in A$ để *P(a) = 1*.

Các toán tử $\forall, \exists$ được gọi là các lượng tử, $\forall$ được gọi là lượng tử là lượng tử chung (hay lượng tử với mọi), $\exists$ được gọi là lượng tử riêng (hay lượng tử tồn tại).

Mệnh đề có chứa các lượng tử gọi là các vị từ.

Ví dụ 12. Mệnh đề" với mọi số nguyên n ta có 2n + 1 là một số lẻ" có thể viết: $\forall n \in \mathbb{Z},\ 2n+1$ lẻ. Và mệnh đề này có giá trị đúng.

Luyện tập 12. Sử dụng lượng từ $\exists$ để viết mệnh đề sau và xác định giá trị của mệnh đề này: "Tồn tại số thực x để $\ln(x^2-3)=0$."

2.2.2. Phủ định của vị từ

Định lí

Nếu P(x) là hàm mệnh đề xác định trên tập A, ta có:

a) $\overline{\forall x \in A,\ P(x)} = \exists x \in A,\ \overline{P(x)}$.

b) $\overline{\exists x \in A,\ P(x)} = \forall x \in A,\ \overline{P(x)}$.

Hệ quả

Nếu P(x) là hàm mệnh đề xác định trên tập A, ta có:

a) $\overline{\forall x,\ (P(x) \Rightarrow Q(x))} = \exists x,\ (P(x) \wedge \overline{Q(x)})$.

b) $\overline{\exists x,\ (P(x) \Rightarrow Q(x))} = \forall x,\ (P(x) \wedge \overline{Q(x)})$.

Ví dụ 13. Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$" là mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$".

Luyện tập 13. Lấy phủ định của định nghĩa một hàm thực liên tục tại $x_0 \in \mathbb{R}$ cho bởi công thức sau:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (\left|x - x_0\right| < \delta) \Rightarrow (\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon)$$

Bài 2. Các phương pháp chứng minh- tập hợp

3. Suy luận Toán học

3.1. Suy luận và quy tắc suy diễn

Suy luận là rút ra mệnh đề mới từ một hay nhiều mệnh đã có. Mệnh đề đã có được gọi là giả thiết hay tiền đề, mệnh đề mới được gọi là kết luận

Các quy tắc suy diễn thường dùng

1) Qui tắc Modus Ponens (Phương pháp khẳng định)

Công thức: $\left[(P \Rightarrow Q) \wedge P\right] \Rightarrow Q$

Dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \underline{P \qquad} \\ Q \end{array}$$

Ví dụ 1.

Nếu một số có tổng các chữ số chia hết cho 3 , thì số đó chia hết cho 3

Số 31257 có tổng các chữ số là 3 + 1+2 +5 +7 = 18 chia hết cho 3.

Số 31257 chia hết cho 3

Luyện tập 1.

Lập dưới dạng sơ đồ câu phát biểu sau: "Số 23418 chia hết cho 9 vì có tổng các chữ số chia hết cho 9".

2) Qui tắc Modus Tollens (phương pháp phủ định)

Công thức: $\left[(P \Rightarrow Q) \wedge \overline{Q}\right] \Rightarrow \overline{P}$

Dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \underline{\overline{Q} \qquad} \\ \overline{P} \end{array}$$

Ví dụ 2.

Nếu một số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì số đó chia hết cho 9

$$\frac{\text{Số 35687 không chia hết cho 9}}{\text{Số 35687 có tổng các chữ số không chia hết cho 9}}$$

Luyện tập 2.

Lập dưới dạng sơ đồ câu phát biểu sau: “Số 23417 không chia hết cho 3 vì có tổng các chữ số chia hết cho 3”

3) Tam đoạn luận (Syllogism)

Công thức: $\left[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\right] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \underline{Q \Rightarrow R} \\ P \Rightarrow R \end{array}$$

Ví dụ 3.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Nếu một số chia hết cho 2 thì số đó là số chẵn} \\ \text{Nếu một số là số chẵn thì số đó viết được dưới dạng 2k, với k là số tự nhiên.}\end{array}}{\text{Nếu một số chia hết cho 2 thì số đó viết được dưới dạng 2k, với k là số tự nhiên.}}$$

Luyện tập 3.

Lập dưới dạng sơ đồ liên kết để rút ra kết luận từ các câu phát biểu sau:” Nếu một số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì số đó chia hết cho 9”,” Nếu một số chia hết cho 9 thì số đó chia hết cho 3”.

4) Qui tắc mâu thuẫn (chứng minh bằng phản chứng)

Công thức: $P \Rightarrow Q = \left[\left(P \wedge \overline{Q}\right) \Rightarrow 0\right]$

Qui tắc này cho phép ta chứng minh $\left(P \Rightarrow \overline{Q}\right) \Rightarrow 0$ thay cho $P \Rightarrow Q$

Nói cách khác, nếu thêm giả thiết phụ $\overline{Q}$ vào giả thiết P cho trước mà dẫn đến một mâu thuẫn thì Q là hệ quả lôgic của P.

Ví dụ 4.

Nếu tam giác có hai phân giác bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Nếu tam giác không phải là tam giác cân thì tam giác không có hai phân giác bằng nhau.

Luyện tập 4.

Viết tương đương logic của mệnh đề sau:” Nếu một số chia hết cho 3 thì số đó có tổng các chữ số chia hết cho 3”.

Ví dụ minh họa áp dụng các quy tắc suy diễn

Ví dụ 5. Chứng minh công thức sau hằng đúng:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge ((x_1 \vee x_2) \Rightarrow \overline{x_3 \wedge x_4}) \Rightarrow \overline{(x_3 \wedge x_4)} \quad (1)$$

Giải. Mô hình suy diễn của công thức (1) là:

$$\frac{\begin{cases}(x_1 \vee x_2) \\ (x_1 \vee x_2) \Rightarrow \overline{(x_3 \vee x_4)}\end{cases}}{\therefore \overline{x_3 \vee x_4}} (Kđ) \equiv \frac{\overline{x_3 \vee x_4}}{\therefore x_3 \wedge x_4} \equiv 1$$

Vậy (1) là công thức hằng đúng.

Luyện tập 5.

Suy luận dưới đây là đúng hay sai:

“ Bình đi chơi thì Bình không học Toán rời rạc. Bình không học Toán rời rạc thì Bình thi trượt Toán rời rạc. Mà Bình thích đi chơi. Vậy Bình thi trượt Toán rời rạc”

3.2. Một số phương pháp chứng minh Toán học

1) Phương pháp chứng minh trực tiếp

Nội dung phương pháp

Để chứng minh mệnh đề đúng có dạng: $A \Rightarrow B$

Ta xây dựng một dãy các hệ quả lôgic sau:

$$A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \ldots A_{n-1} \Rightarrow A_n, A_n \Rightarrow B$$

Áp dụng qui tắc Modus Ponens, ta có:

$A, A \Rightarrow A_1$ đúng thì A_1 đúng.

$A_1, A_1 \Rightarrow A_2$ đúng thì A_2 đúng

……………………

$A_n, A_n \Rightarrow B$ đúng thì B đúng

Ví dụ 6.

Chứng minh rằng nếu n chia hết cho 3 thì n^2 chia hết cho 9.

Chứng minh

Giả sử n chia hết cho 3, suy ra $n = 3k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 = 9k^2$. Do đó n^2 chia hết cho 9.

Luyện tập 6.

Chứng minh rằng nếu n là số nguyên tố lớn hơn 5 thì $n^2 - 1$ chia hết cho 24.

2).Phương pháp chứng minh gián tiếp

Nội dung phương pháp

Để chứng minh mệnh đề đúng có dạng $P \Rightarrow Q$

Ta có thể chứng minh $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ đúng , vì: $P \Rightarrow Q = \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Phương pháp chứng minh này gọi là chứng minh gián tiếp.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng nếu $3n + 1$ $(n \in \mathbb{Z})$ là số chẵn thì n là số lẻ .

Chứng minh

Giả sử n là số chẵn, suy ra: $n = 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3n + 1 = 3(2k) + 1 = 6k + 1$ là số lẻ.

Luyện tập 7. Chứng minh rằng nếu p^2 là bội số của 3 thì p là bội số của 3.

3).Phương pháp chứng minh phản chứng

Nội dung phương pháp

Phương pháp phản chứng dựa trên qui tắc mâu thuẫn: $(P \Rightarrow Q) = \left(P \wedge \overline{Q} \Rightarrow 0\right)$.

Như vậy, để chứng minh mệnh đề đúng có dạng: $P \Rightarrow Q$, ta có thể chứng minh bằng phản chứng rằng: giả sử P đúng nhưng Q sai, khi đó ta sẽ nhận được mâu thuẫn.

Ví dụ 8.

Chứng minh rằng nếu n là số nguyên tố lớn hơn 5 thì $n^2 - 1$ chia hết cho 24.

Chứng minh

Các bước lập luận sẽ là:

1. Giả sử n là số nguyên tố lớn hơn 5 , n^2-1 không chia hết cho 24.

2. $n^2-1=(n-1)(n+1)$.

3. $n-1, n+1$ là 2 số chẵn liên tiếp nên tích $(n-1)(n+1)$ chia hết cho 4.

4. n^2-1 không chia hết cho 24 nên n^2-1 không chia hết cho 6.

5. Suy ra n^2-1 không chia hết cho 2 hoặc không chia hết cho 3.

6. Xét hai trường hợp:

+ Nếu n^2-1 không chia hết cho 2 thì n-1 và n+1 là hai số lẻ suy ra n là số chẵn. Vậy n không là số nguyên tố lớn hơn 5,

+ Nếu n^2-1 không chia hết cho 3 thì n phải chia hết cho 3, vì (n-1)(n+1) chia hết cho 3 (ba số tự nhiên liên tiếp). Vậy n không là số nguyên tố lớn hơn 5.

7. Từ (6) suy ra n không là số nguyên tố lớn hơn 5. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Luyện tập 8. Chứng minh rằng: Nếu 3n+2 là số lẻ thì n là số lẻ.

4. Lý thuyết tập hợp

4.1.Tập hợp

1) Khái niệm tập hợp

a) Khái niệm tập hợp**:** Tập hợp là một khái niệm cơ bản của Toán học, không được định nghĩa, mà làm cơ sở để định nghĩa các khái niệm khác.

Những yếu tố tạo thành tập hợp gọi là phần tử (hay điểm) của tập hợp.

Nếu *a* là một phần tử của tập hợp *A*, ta viết: $a \in A$ (đọc: "Phần tử *a* thuộc tập hợp *A*").

Trong trường hợp ngược lại, ta viết $a \notin A$ (đọc: "Phần tử *a* không thuộc tập hợp *A*").

b) Hai cách xác định tập hợp

Cách 1. Liệt kê các phần tử của tập hợp.

- Các phần tử của tập hợp được viết trong hai dấu ngoặc nhọn {}, cách nhau bởi dấu";" (nếu có phần tử là số) hoặc dấu",".
- Mỗi phần tử được liệt kê một lần, thứ tự liệt kê tùy ý.

Cách 2. Nêu ra tính chất đặc trưng của các phần tử thuộc tập hợp.

" Tính chất" ở đây thường được biểu hiện bởi một vị từ *p(x)* theo một biến $x \in U$. Khi ấy tập hợp tất cả các phần tử $x \in U$ sao cho *p(x)* đúng được kí hiệu bởi:

$A = \{x \in U \mid p(x)\}$ được gọi là tập hợp vũ trụ. Nếu *U* hiểu ngầm thì *A* có thể viết:

A={ x | p(x) }.

Ví dụ 9. Tập hợp A các phần tử có thể cho bằng 2 cách sau:

Cách 1. Liệt kê:

$$A = \{-1; 1\}.$$

Cách 2. Nêu ra tính chất đặc trưng của các phần tử tạo thành tập hợp.

$$A = \{x \in R \mid x^2 - 1 = 0\}$$

Luyện tập 9.

Cho ví dụ xác định tập hợp bằng 2 cách: Liệt kê và chỉ ra các thuộc tính đặc trưng.

2). Các loại tập hợp

a) Các tập hợp số

N = {0; 1; 2; 3; ….}: Tập hợp các số tự nhiên.

N* = {1; 2; 3; 4; …}: Tập hợp các số tự nhiên khác 0.

Z = {….; -2; -1; 0; 1; 2; ….}: Tập hợp các số nguyên.

$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z \,\&\, q \neq 0 \right\}$:Tập hợp các số hữu tỉ.

R: Tập hợp các số thực.

C: Tập hợp các số phức.

b) Tập hữu hạn và tập vô hạn

- Nếu tập hợp A có n phần tử thì ta nói A là tập hợp hữu hạn và viết |A|=n.
- Nếu tập hợp A có vô số phần tử thì ta nói A là tập hợp vô hạn và viết $|A| = +\infty$.

Tập rỗng: Tập hợp rỗng là tập hợp không có phần tử nào, kí hiệu $\varnothing$.

Tập con của một tập hợp: Nếu mọi phần tử của tập hợp *A* đều là phần tử của tập hợp *B* thì ta nói *A* là tập hợp con của tập hợp *B* (hay được bao hàm trong *B*, hay *B* bao hàm *A*, kí hiệu: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Định nghĩa trên có thể viết dưới dạng kí hiệu như sau: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$

c) Hai tập hợp bằng nhau

Hai tập hợp *A* và *B* được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi tập hợp *A* là tập hợp con của tập hợp *B* và tập hợp *B* là tập hợp con của tập hợp *A*.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \cap (B \subset A)$$

d) Biểu đồ Venn: Biểu đồ Venn là đường cong kín biểu diễn tập hợp, mà mỗi phần tử của tập hợp được đặc trưng bởi một điểm nằm trong đường cong ấy.

4.2.Các phép toán trên tập hợp.

1). Các phép toán

Giả sử A, B là hai tập hợp con của tập hợp vũ trụ U.

a) Phép giao:

$$A \cap B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói hai tập A và B rời nhau.

b) Phép hợp:

$$A \cup B = \{x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

c) Phép hiệu:

$$A \setminus B = \left\{ x \in U \mid \left(x \in A \right) \wedge \left(x \notin B \right) \right\}$$

Ví dụ 10.

Cho hai tập hợp A = {1, 2, 5, 7, 8, 12} và B = {2, 4, 7, 9, 13}.

Hãy xác định các tập hợp:

$$A \cap B; A \cup B; A \setminus B; B \setminus A.$$

Luyện tập 10.

Cho hai tập hợp A = {0 , 2, 8, 7, 11, 12} và B = {0, 4, 8, 11, 15}.

Hãy xác định các tập hợp:

$$A \cap B; A \cup B; A \setminus B; B \setminus A.$$

d) Phép lấy phần bù:

$$\overline{A} = C_B^A = B \setminus A = \left\{ x \in U \mid \left(x \in B \right) \wedge (x \notin A) \right\}$$

Ví dụ 11.

Cho hai tập hợp A = { 5, 9, 14, 17, 29} và B = { 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 29}.

Hãy xác định tập hợp: $\overline{A} = C_B^A$

Luyện tập 11.

Cho hai tập hợp:

A = {1, 5, 9, 12, 15, 27} và B = { 1, 2, 3, 4, 5,7, 9, 12, 14, 15,27, 29}.

Hãy xác định tập hợp: $\overline{A} = C_B^A$

2). Các tính chất của các phép toán

Với *A, B, C* là các tập con tùy ý của tập hợp vũ trụ U, ta có:

1. Tính giao hoán:

$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cup B = B \cup A.$$

2. Tính kết hợp:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

3. Tính phân phối:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4. Công thức De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

5. Phần tử trung hòa:

$$A \cup \varnothing = A,$$
$$A \cap U = A.$$

6. Phần bù:

$$A \cup \overline{A} = U,$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

7. Tính thống trị:

$$A \cup U = U,$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing.$$

3) Lực lượng của tập hợp

Kí hiệu lực lượng của tập hợp A là |A| định nghĩa:

|A| = Số phần tử của A

Khi đó ta có các công thức sau:

a) $\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right|$.

b) $\left|A \cup B \cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A \cap B\right| - \left|A \cap C\right| - \left|B \cap C\right| + \left|A \cap B \cap C\right|$.

Ví dụ 12.

Có 150 sinh viên ghi tên học môn Lôgic Toán; 120 sinh viên ghi tên học môn lý thuyết đồ thị và 200 sinh viên ghi tên học môn Văn phạm và ôtômat. Hỏi có bao nhiêu sinh viên ghi tên học một trong ba môn, biết rằng không có sinh viên nào ghi tên học đồng thời 2 môn hoặc cả 3 môn.

Giải

Gọi

A:=" Tập sinh viên học môn Lôgic Toán" , suy ra |A| = 150.

B:=" Tập sinh viên học môn lý thuyết đồ thị" , suy ra |B| = 120.

C:=" Tập sinh viên học môn Văn phạm và ôtômat", suy ra |C| = 200.

Ta có:

$$A \cap B = \phi, A \cap C = \phi, B \cap C = \phi, A \cap B \cap C = \phi.$$

Số sinh viên ghi tên học một trong ba môn là:

$$\left|A \cup B \cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| = 470.$$

Luyện tập 12.Mỗi sinh viên lớp Toán rời rạc hoặc là giỏi Toán , hoặc là giỏi tin, hoặc giỏi cả hai môn này. Trong lớp có bao nhiêu sinh viên nếu có 38 người giỏi Tin, 23 người giỏi Toán và 7 người giỏi cả hai môn?

4) Biểu diễn tập hợp trên máy tính

Giả sử X là một tập vũ trụ và $A \subseteq X$ (với giả thiết dung lượng bộ nhớ của máy tính không bé hơn lực lượng của X).

Giả sử |X| = n, khi đó ta sắp (đánh số) các phần tử của $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Ta có thể biểu diễn tập A trên máy tính bằng một xâu bít có chiều dài n, trong đó bit thứ i là 1 nếu $a_i \in A$, còn bít thứ i là 0 nếu $a_i \notin A (i = \overline{1,n})$.

Ví dụ 13.

Cho X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (sắp xếp các phần tử của X theo thứ tự tăng dần)

a) Xác định xâu bit của tập $A = \{1,3,5,7,9\} \subset X$.

b) Xác định xâu bit của tập $A = \{2,4,6,8\} \subset X$.

c) Xác định xâu bit của tập các phần tử không vượt quá 5 trong X, tức là tìm xâu bit của tập C = {1, 2, 3, 4, 5}.

Giải.

a) Xác định xâu bit của tập A là: 1010101010.

b) Xác định xâu bit của tập B là: 0101010101.

c) Xác định xâu bit của tập C là: 1111100000.

Luyện tập 13.

Cho X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (sắp xếp các phần tử của X theo thứ tự tăng dần) và các tập hợp sau: A ={1, 3, 5, 7, 9 }; B ={2, 4, 6, 8}; C ={ 1, 2, 3, 4, 5}.

a) Xác định xâu bit của tập $A \cup B$.

b) Xác định xâu bit của tập $A \cap B$.

c) Xác định xâu bit của tập $\overline{A}, \overline{B}$.

Chú ý.

+ Để nhận được các xâu bit cho hợp của hai tập hợp, ta thực hiện phép tuyển $(\vee)$ hai xâu bit đó.

+ Để nhận được các xâu bit cho giao của hai tập hợp, ta thực hiện phép hội $(\wedge)$ hai xâu bit đó.

+ Để nhận được các xâu bit của phần bù của tập hợp A, ta chỉ việc thay 0 bởi 1 và thay 1 bởi 0 trong xâu bit của A.

Bài 3. Ánh xạ - quy nạp Toán học

5. Ánh xạ

1) Tích Descartes của các tập hợp

Tích Descartes của hai tập hợp *A* và *B*, kí hiệu $A \times B$, là tập các cặp có thứ tự *(a,b)*, trong đó $a \in A \& b \in B$.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B\}$$

Định lý.

Cho các tập hữu hạn A, B, C. Thì:

a) $|A \times B| = |A| \times |B|$.

b) $|A \times B \times C| = |A| \times |B| \times |C|$.

Ví dụ 1.

Nếu *A* = *{a, b}*, *B* = *{c, d, e}* thì

$A \times B = \ (a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\ .$

Luyện tập 1. Cho các tập hợp *A* = *{1, 2}*, *B* = *{a, b, c}*.Tính:

a) $A \times B$.

b) $|A \times B|$.

2) Ánh xạ

Định nghĩa 1

a) Một ánh xạ *f* từ tập *X* vào tập *Y*, kí hiệu $f : X \to Y$, là phép tương ứng liên kết mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y \in Y$

Kí hiệu:

$$\begin{aligned} &f : X \to Y \\ &x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- *X* gọi là tập nguồn (hay miền xác định của hàm *f*), *Y* gọi là tập đích .

- Phần tử $y = f(x) \in Y$ gọi là ảnh của x.
- $f\left(x\right) = \left\{y \in Y \mid \exists x \in X, y = f\left(x\right)\right\}$ gọi là miền giá trị của *f*.

b) Hai ánh xạ *f*,*g* từ *X* vào *Y* được gọi là bằng nhau nếu:

$$\forall x \in X, f\left(x\right) = g\left(x\right)$$

Ví dụ 2.

Phép tương ứng

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = 2x + 1 \end{aligned}$$

Là một ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$, vì với mỗi $x \in \mathbb{R}$ có đúng một $y \in \mathbb{R}$ xác định bởi *y =2x +1*.

Luyện tập 2.

Phép tương ứng

$$\begin{aligned} f &: R \to R \\ x &\mapsto y = \frac{2}{x-5} \end{aligned}$$

Có phải là ánh xạ không vì sao?.

Chú ý: Trong Toán học, từ "ánh xạ" cũng thường được thay bằng từ "hàm" hoặc "toán tử".

Định nghĩa 2

a) Nếu *A* là một tập con của *X* thì ảnh của *A* bởi *f* là tập hợp:

$$f(A) = \left\{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f\left(x\right)\right\}$$

b) Nếu *B* là một tập con của *Y* thì nghịch ảnh (tạo ảnh) của *B* là tập hợp:

$$f^{-1}\left(B\right) = \left\{x \in X \mid f\left(x\right) \in B\right\}$$

Khi $B = \left\{b\right\}$ thì: $f^{-1}\left(b\right) = \left\{x \in X \mid f\left(x\right)\right\}$.

Định nghĩa 3 (các loại ánh xạ)

Xét ánh xạ $f : X \to Y$.

Định nghĩa 3.1

Ánh xạ *f* được gọi là đơn ánh (injunction) nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (tức là mỗi $y \in Y$ hoặc không có nghịch ảnh hoặc là ảnh của nhiều nhất một phần tử thuộc *X*).

Một đơn ánh còn được gọi là ánh xạ một đối một (one-to-one). Ngoài ra từ tính tương đương lô gic của các mệnh đề $p \Rightarrow q \,\&\, \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$, chúng ta có thể suy ra rằng $f : X \to Y$ là đơn ánh khi và chỉ khi $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Ví dụ 3.

Ánh xạ

$$f : \{a, b, c, d\} \to \{1,2,3,4,5\}$$
$$f(a) = 4,\ f(b) = 5,\ f(c) = 1,\ f(d) = 3$$

Là một đơn ánh.

Luyện tập 3.

Chứng tỏ rằng, ánh xạ:

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto f(x) = x^3$$

Là một đơn ánh.

Định nghĩa 3.2

Ánh xạ *f* được gọi là toàn ánh (surjection) nếu $f(X) = Y$ (tức là mỗi $y \in Y$ đều là ảnh của một hay nhiều phần tử $x \in X$).Một toàn ánh $f : X \to Y$ còn được gọi là ánh xạ từ X lên (on to) Y.

Ví dụ 4.

Ánh xạ:

$$f : \{a, b, c, d\} \to \{1,2,3\}$$
$$f(a) = 3,\ f(b) = 2,\ f(c) = 1,\ f(d) = 3$$

Là toàn ánh.

Luyện tập 4.

Ánh xạ:

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto f(x) = x^2$$

Có phải là ánh xạ toàn ánh không, vì sao?

Định nghĩa 3.3

Ánh xạ *f* được gọi là song ánh nếu nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh.

Ví dụ 5.

Ánh xạ

$$f : \{a, b, c, d\} \to \{1,2,3,4\}$$
$$f(a) = 3,\ f(b) = 2,\ f(c) = 4,\ f(d) = 1$$

Là một ánh xạ song ánh.

Luyện tập 5.

Chứng minh rằng, ánh xạ:

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto f(x) = x^3 + 1$$

Là một ánh xạ song ánh.

Chú ý:

Nếu ánh xạ f là một song ánh từ *X* vào *Y*, ta viết: $f : X \leftrightarrow Y$

Khi ấy: $\forall y \in Y, \exists! x \in X : f(x) = y$

Trong đó kí hiệu $\exists!$ để chỉ tồn tại duy nhất *x*.

Do đó tương ứng $y \mapsto x$ là một ánh xạ từ *Y* vào *X*, và gọi là **ánh xạ ngược** của *f*, kí hiệu: f^{-1}.

Vậy:

$$f^{-1}: Y \to X$$
$$y \mapsto f^{-1}(y) = x, f(x) = y.$$

Định nghĩa 4

Giả sử ta có ánh xạ song ánh $f : X \to Y$, ánh xạ ngược của f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi $y \in Y$ với một phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho *f(x) = y* . Ánh xạ ngược của ánh xạ f được kí hiệu là f^{-1}.

Ví dụ 6.

Xét song ánh

$$f: \{a, b, c\} \to \{1,2,3\}$$
$$f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 1$$

Tìm các ánh xạ ngược của ánh xạ f.

Giải.

Ánh xạ ngược của ánh xạ f là:

$$f^{-1}: \{1,2,3\} \to \{a, b, c\}$$
$$f^{-1}(1) = c, f^{-1}(2) = a, f^{-1}(3) = b$$

Luyện tập 6.

Tìm ánh xạ ngược của ánh xạ:

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto f(x) = x^3 + 1$$

Định nghĩa 4 (Tích các ánh xạ)

Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ & $g : Y \to Z$

Tích của hai ánh xạ *f* và *g* là ánh xạ *h* từ *X* vào *Z* xác định bởi:

$$
\begin{aligned}
&h : X \to Z \\
&x \mapsto h(x) = g\left(f(x)\right) \\
&\Rightarrow h = g_0 f : X \to Y \to Z \\
&x \mapsto f(x) \mapsto h(x) = g\left(f(x)\right)
\end{aligned}
$$

Ví dụ 7.

Cho hai ánh xạ:

$$
\begin{aligned}
&f : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\} \\
&f(a) = b,\ f(b) = c,\ f(c) = a; \\
&g : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\} \\
&g(a) = 3, g(b) = 2, g(c) = 1
\end{aligned}
$$

Giải

Ta có:

$$
\begin{aligned}
&f : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\} \\
&f(a) = b,\ f(b) = c,\ f(c) = a; \\
&g : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\} \\
&g(a) = 3, g(b) = 2, g(c) = 1
\end{aligned}
$$

Suy ra:

$$
\begin{aligned}
&(g_0 f)(a) = g\left(f(a)\right) = g(b) = 2 \\
&(g_0 f)(b) = g\left(f(b)\right) = g(c) = 1 \\
&(g_0 f)(c) = g\left(f(c)\right) = g(a) = 3
\end{aligned}
$$

Luyện tập 7.

Cho hai ánh xạ:

$$
\begin{aligned}
&f : R \to R \\
&x \mapsto f(x) = \cos x. \\
&g : R \to R \\
&x \mapsto g(x) = x^3 + 1
\end{aligned}
$$

Tìm tích $g \circ f$.

Định lí

Giả sử: $f : X \to Y$. A_1, A_2 là hai tập con của X, B_1, B_2 là hai tập con của Y. Ta có:

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

b) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

6. Phương pháp quy nạp

Nội dung phương pháp

Nguyên lý qui nạp

Mệnh đề $\forall n \in N, P(n)$ là hệ quả của mệnh đề: $P(0) \wedge [\forall n \in N, P(n) \Rightarrow P(n+1)]$

Phương pháp chứng minh bằng qui nạp

Để chứng minh *P(n)* đúng với mọi $n \in N$, tùy ý:

Bước 1.(cơ sở) Kiểm chứng để khẳng định *P(0)* đúng.

Bước 2. (qui nạp) Giả sử với $n \in N$ tùy ý, *P(n)* đúng. Ta chứng minh *P(n+1)* đúng.

Bước 3. (Kết luận) *P(n)* đúng với mọi số tự nhiên *n*.

Chú ý. Nguyên lý qui nạp có thể bắt đầu từ số $n_0 \in N$.

Nghĩa là: $\left[P(n_0) \wedge [\forall n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)]\right] \Rightarrow [\forall n \geq n_0, P(n)]$.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Chúng minh

Xét: P(n): "$0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$".

+ Bước cơ sở: Khi n=0 thì P(0) là mệnh đề: $0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

Vế phải của đẳng thức bằng 0. Nên P(0) đúng.

+ Bước quy nạp: Giả sử P(n) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}$ tùy ý:

$$0+1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Khi ấy $0+1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Nghĩa là P(n+1) đúng.

Do đó theo nguyên lý qui nạp, ta có điều phải chứng minh.

Luyện tập 8. Chứng minh rằng: Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 6.

7. Đệ quy và ứng dụng

Ta có thể sử dụng đệ quy để định nghĩa các dãy số, hàm số và tập hợp. Chẳng hạn, để định nghĩa một hàm xác định trên tập hợp các số nguyên không âm, chúng ta cho:

1) Giá trị của hàm tại *n = 0*.

2) Công thức tính giá trị của nó tại số nguyên n từ các giá trị của nó tại các số nguyên nhỏ hơn.

Định nghĩa như trên được gọi là **định nghĩa đệ quy.**

Ví dụ 9.

Giả sử hàm f được định nghĩa đệ quy như sau: $f(0)=3, f(n+1)=2f(n)+3$.

Hãy tìm f(1), f(2) và f(3).

Giải

Từ định nghĩa đệ quy ta có:

f(1) = 2f(0) +3 = 2.3 + 3 = 9.

f(2) = 2f(1) +3 = 2.9 +3 = 21.

f(3) = 2f(2) + 3 = 2.21 + 3 = 45.

Luyện tập 9.

Giả sử tập A được định nghĩa đệ quy như sau:

1. $3 \in A$.
2. $x \in A \,\&\, y \in A \Rightarrow x+y \in A$

Chứng minh rằng A là tập các số nguyên dương chia hết cho 3.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Xét chân trị các mệnh đề sau:

a) $\left(\sqrt{2}<1\right)\wedge(1<3)$; b) $(2+4=6)\vee(\log_2 1<0)$; c) $(1>5)\Rightarrow(5+4<6)$.

Bài 2. Lập bảng chân trị cho các mệnh đề phức hợp sau:

a) $\overline{P}\Rightarrow(P\vee Q)$; b) $\overline{P}\Rightarrow\left(\overline{Q}\vee R\right)$;

c) $P\vee(Q\wedge R)$; d) $(P\wedge Q)\Leftrightarrow(Q\wedge R)\wedge\overline{Q}$.

Bài 3. Hãy chỉ ra các hằng đúng trong các công thức sau:

a) $(P\vee Q)\Rightarrow(P\wedge Q)$; b) $(P\wedge Q)\Rightarrow(P\vee Q)$;

c) $P\Rightarrow\left(\overline{Q}\Rightarrow P\right)$; d) $(P\Rightarrow Q)\Rightarrow\left[(Q\Rightarrow R)\Rightarrow(P\Rightarrow R)\right]$.

Bài 4. Chứng minh các tương đương lôgic sau:

a) $\left(P\Rightarrow(Q\Rightarrow P)\right)=\left(R\vee\overline{R}\right)$; b) $(P\wedge Q)\vee\overline{Q}=P\vee\overline{Q}$;

c) $(P\Rightarrow Q)=\left(\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}\right)$; d) $\left((P\wedge Q)\Rightarrow R\right)=\left(P\Rightarrow(Q\Rightarrow R)\right)$.

Bài 5. Xét các hàm mệnh đề theo biến thực *x*:

$P(x): x^2-5x+6=0$

$Q(x): x^2-4x-5=0$

$R(x): x>0$

Hãy xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a) $\forall x, P(x)\Rightarrow R(x)$; b) $\forall x, Q(x)\Rightarrow\neg R(x)$;

c) $\exists x, Q(x)\Rightarrow R(x)$; d) $\exists x, P(x)\Rightarrow\neg R(x)$.

Bài 6. Các ánh xạ $f: A\to B$ sau là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Xác định ánh xạ ngược nếu có:

a) $A=\mathbb{R}, B=\mathbb{R}, f(x)=x+7$.

b) $A=\mathbb{R}, B=\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x-3$.

c) $A = [4,9], B = [21,96], f(x) = x^2 + 2x - 3$.

d) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2|x|$.

Bài 7. Cho ánh xạ $f : E \to F$. Chứng minh: F đơn ánh khi và chỉ khi $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$; với mọi $A, B \subseteq E$. Qui ước: $f(\varnothing) = \varnothing$.

Bài 8. Cho các ánh xạ $f : E \to F$ & $g : F \to G$. Đặt $h = g_o f$. Chứng minh:

a) Nếu *h* toàn ánh thì *g* toàn ánh.

b) Nếu *h* đơn ánh thì *f* đơn ánh.

Bài 9. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bài 10. Tính tổng $T = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$.