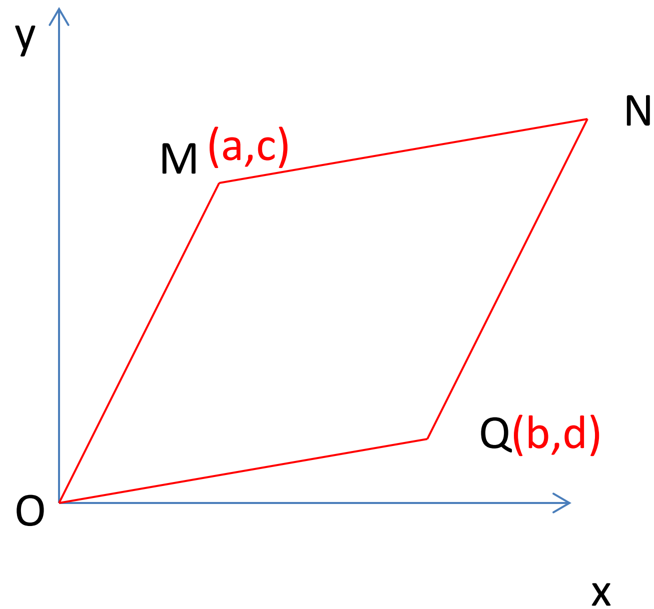
Phép quay trong không gian $\mathbb{R}^2$

+ ***Ánh xạ***

+ ***Phép quay quanh gốc tọa độ trong không gian***



Phép quay trong không gian $\mathbb{R}^2$

<u>*Ánh xạ (Hàm)*</u>

Vd: $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Tập xác định:

$D = \{x | f(x) \text{ có nghĩa}\} = \mathbb{R}$

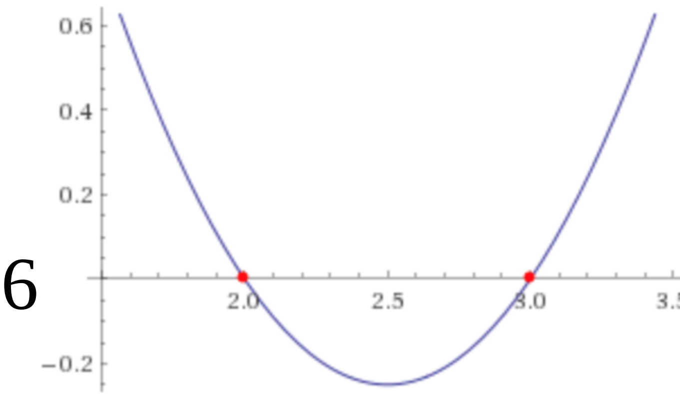
Tập giá trị: $T = \{ f(x) : x \in D \} = \mathbb{R}$

➔ *Ánh xạ*

$$\begin{array}{ccc} D & & T \\ ||| & & ||| \\ f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

Duy nhất

$$x_0 \mapsto f(x_0) = x_0^2 - 5x_0 + 6$$



Chẳng hạn: $x = 2$ ➔ $f(2) =$ 0

$x = -1$ ➔ $f(-1) =$ 12

$x = 3$ ➔ $f(3) =$ 0

Ảnh

Ánh xạ

Ví dụ 2. $g(x) = x - \sqrt{x-1}$

→ $g : [1;+\infty) \to [1;+\infty)$

$$x_0 \mapsto g\left(x_0\right) = x_0 = \sqrt{x-1}$$

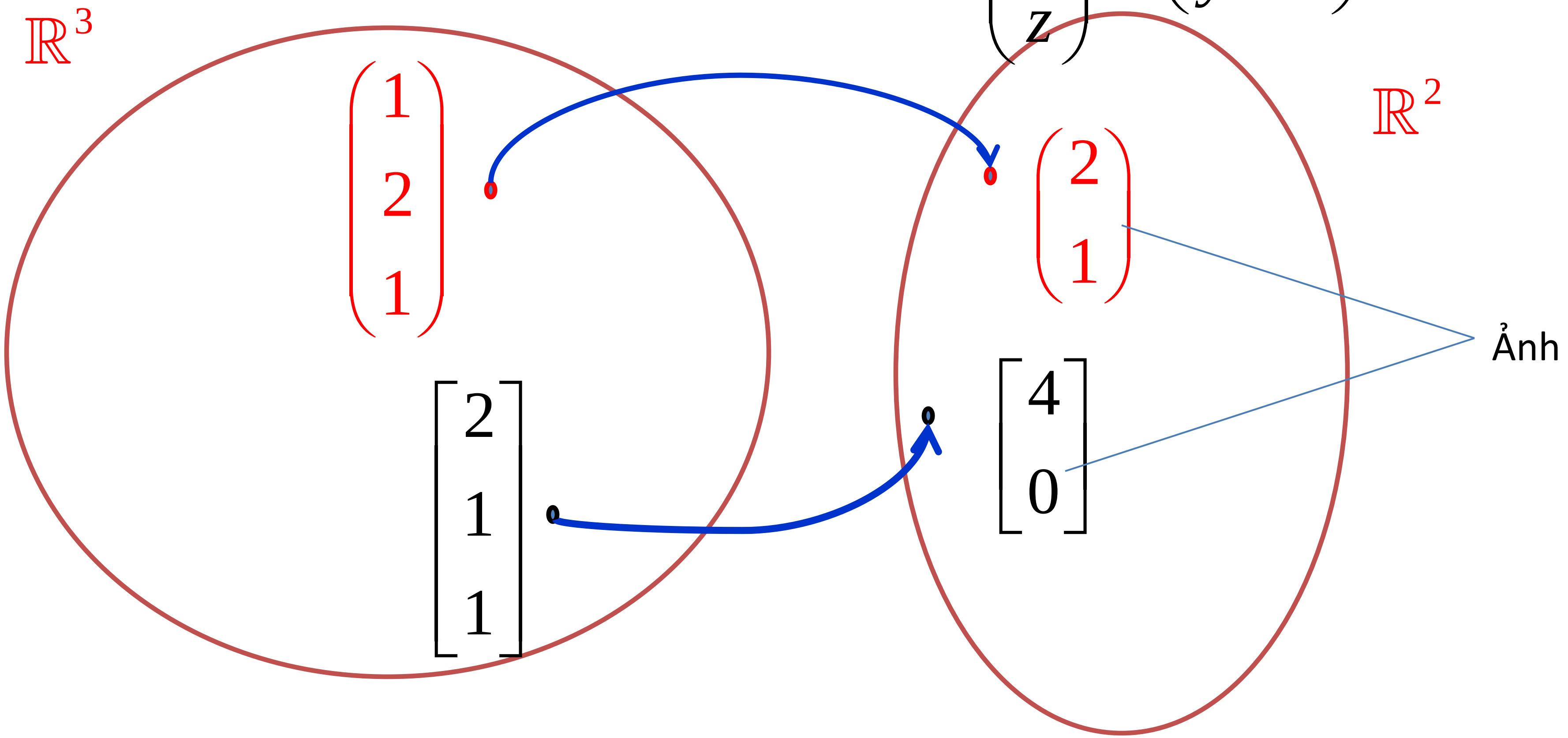
Ánh xạ ở vd 1, vd 2: Ko tuyến tính → Toán cc A2

→ **A1: Tìm *hiểu Ánh xạ tuyến tính, và mở rộng D,T là kgvt*** $\mathbb{R}^n$

Ánh xạ tuyến tính

Ví dụ: $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$

$$T(x,y,z) = (2x, y-z) \equiv T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y-z \end{pmatrix}$$



Ánh xạ tuyến tính

Ví dụ. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{2\times 1} \overset{A???}{=} A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$$\Rightarrow A_{2\times 3}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

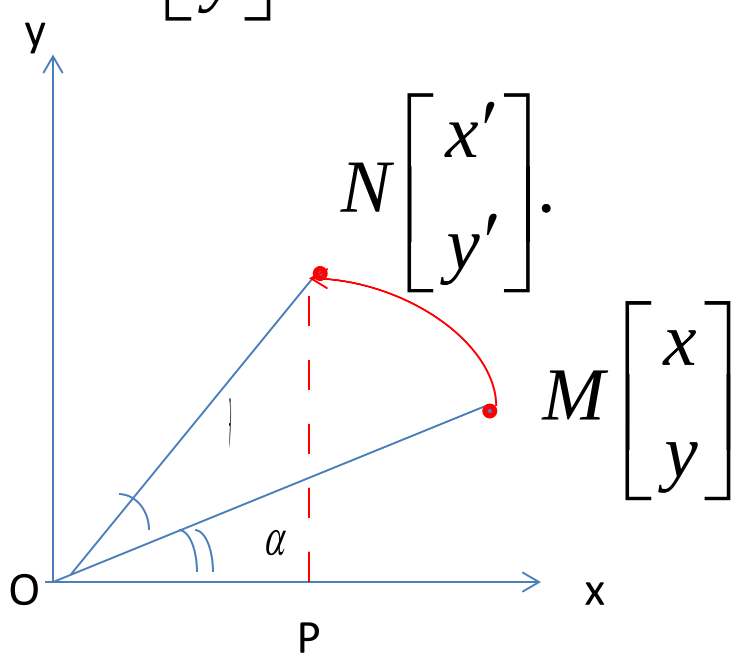
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ có ảnh là } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 + 0.2 + 0.2 \\ 0.1 + 1.2 - 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Phép quay trong không gian $\mathbb{R}^2$

Phép quay quanh gốc tọa độ

Xét phép quay *T* quanh gốc tọa độ O một góc θ.

Ánh xạ *T* biến điểm $M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ thành điểm $N\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.



Phép quay trong không gian $\mathbb{R}^2$

➔

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Phép quay trong không gian $\mathbb{R}^2$

Ví dụ 1. Cho phép quay quanh gốc tọa độ O với góc quay 90^0. Tìm ma trận biểu diễn phép quay trên và tìm ảnh của vec-to u $= \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ qua phép quay trên.

Giải. Ta có.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ảnh của vec-tơ u

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Phép quay trong không gian $\mathbb{R}^2$

Ví dụ 2. Cho phép quay quanh gốc tọa độ O với góc quay $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Tìm ma trận biểu diễn phép quay trên và tìm ảnh của vec-tơ $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ qua phép quay trên.

Giải. Ta có.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ảnh của vec-tơ u

$$u' = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$