



Cực tiểu hàm Bool

Môn học: Toán rời rạc
GV: Lê Mậu Long

Đặt vấn đề

- Mọi hàm Bool đều có thể biểu diễn dưới dạng tuyển các hội sơ cấp với nhiều phép toán \neg , \vee , \wedge , điều này gây tốn kém khi thiết kế mạch. Việc rút gọn đưa về một hàm Bool tương đương với ít phép toán hơn là một yêu cầu bức thiết.
- Một công cụ hỗ trợ việc rút gọn biểu thức hàm Bool một cách đơn giản là *biểu đồ Karnaugh*



Biểu đồ Karnaugh

Trường hợp 2 biến:

Sử dụng bảng 2×2 , mỗi ô tương ứng với một hội sơ cấp

	x	\bar{x}
y		
\bar{y}		

Với mỗi một hội sơ cấp ta đánh dấu vào ô tương ứng, 2 ô liên tiếp hủy bỏ một biến, mỗi một ô có thể được sử dụng nhiều lần

Biểu đồ Karnaugh

Ví dụ $F(x, y) = xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y$

Biểu đồ Karnaugh:

	x	\bar{x}
y	1	1
\bar{y}	1	

Ta có các tế bào

	x	\bar{x}
y	1	
\bar{y}	1	

x

	x	\bar{x}
y	1	1
\bar{y}		

y

$$\Rightarrow F(x, y) = x \vee y$$

Biểu đồ Karnaugh

Trường hợp 3 biến:

Sử dụng bảng 4×2 , mỗi ô tương ứng với một hội sơ cấp

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
z				
\bar{z}				

Với mỗi một hội sơ cấp ta đánh dấu vào ô tương ứng
4 ô liên tiếp (tế bào 1×4 , 2×2) hủy bỏ hai biến,
2 ô liên tiếp (tế bào 1×2 , 2×1) hủy bỏ một biến,
Lưu ý: 2 ô ở 2 biên được xem kề nhau

Biểu đồ Karnaugh

Ví dụ $F(x, y) = xyz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z$

Biểu đồ Karnaugh

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$
z	1	1	1	
\bar{z}	1	1		

Các tế bào

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$
z	1	1		
\bar{z}	1	1		

x

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$
z		1	1	
\bar{z}				

$\bar{y}z$

$$\Rightarrow F(x, y) = x \vee \bar{y}z$$

Ví dụ

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} z \vee x \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} z \vee x y z$$

Biểu đồ Karnaugh:

Hai tế bào

	$x y$	$x \bar{y}$	$\bar{x} \bar{y}$	$\bar{x} y$
z	1	1	1	
\bar{z}		1	1	

	$x y$	$x \bar{y}$	$\bar{x} \bar{y}$	$\bar{x} y$
z		1	1	
\bar{z}		1	1	

	$x y$	$x \bar{y}$	$\bar{x} \bar{y}$	$\bar{x} y$
z	1	1		
\bar{z}				

\bar{y}

xz

$$\Rightarrow F(x, y) = xz \vee \bar{y}$$

Biểu đồ Karnaugh

Trường hợp 4 biến:

Sử dụng bảng 4×4 , mỗi ô tương ứng với một hội sơ cấp

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
zt				
$z\bar{t}$				
$\bar{z}t$				
$\bar{z}\bar{t}$				

Các tế bào:

- 8 ô liên tiếp (2×4 , 4×2) hủy bỏ ba biến,
- 4 ô liên tiếp (1×4 , 2×2) hủy bỏ hai biến,
- 2 ô liên tiếp (1×2 , 2×1) hủy bỏ một biến

Lưu ý: 4 ô ở góc được xem là kề nhau

Biểu đồ Karnaugh

Ví dụ

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
zt	1			1
$z\bar{t}$				1
$\bar{z}t$	1	1		1
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		1

$$\Rightarrow F(x, y, z) = \bar{x}y \vee x\bar{z} \vee yt$$

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
zt				1
$z\bar{t}$				1
$\bar{z}t$				1
$\bar{z}\bar{t}$				1

$\bar{x}y$

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
zt				
$z\bar{t}$				
$\bar{z}t$	1	1		
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		

$x\bar{z}$

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
zt	1			1
$z\bar{t}$				
$\bar{z}t$				
$\bar{z}\bar{t}$	1			1

yt

Biểu đồ Karnaugh

- Việc sử dụng 1 ô (tương ứng hội sơ cấp) nhiều lần có thể dẫn đến việc sử dụng thừa tế bào, điều này dẫn đến công thức của hàm Bool phức tạp thêm.
- Để khắc phục được tình trạng này ta xét chọn các tế bào chứa ô ít xuất hiện trong biểu đồ Karnaugh nhất và ưu tiên các tế bào từ lớn. Thực hiện cho đến khi các tế bào phủ kín biểu đồ Karnaugh.

Biểu đồ Karnaugh

Ví dụ

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
zt				1
$z\bar{t}$	1	1		1
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		1
$\bar{z}t$	1	1		1

			1
			1
			1
			1

$\bar{x}y$

1	1		
1	1		

$x\bar{z}$

1	1		
1	1		

$x\bar{t}$

1			1
1			1

$y\bar{z}$

1			1
1			1

$y\bar{t}$

Do ô (1,4) chỉ xuất hiện trong $\bar{x}y$ nên phải chọn tế bào này

Biểu đồ Karnaugh

Ví dụ

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
zt				1
$z\bar{t}$	1	1		1
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		1
$\bar{z}t$	1	1		1

			1
			1
			1
			1

$\bar{x}y$

1	1		
1	1		

$x\bar{z}$

1	1		
1	1		

$x\bar{t}$

1			1
1			1

$y\bar{z}$

1			1
1			1

$y\bar{t}$

Do ô (2,2) chỉ xuất hiện trong $x\bar{t}$ nên phải chọn tế bào này

Biểu đồ Karnaugh

Ví dụ

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
zt				1
$z\bar{t}$	1	1		1
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		1
$\bar{z}t$	1	1		1

			1
			1
			1
			1

$\bar{x}y$

1	1		
1	1		

$x\bar{z}$

1	1		
1	1		

$x\bar{t}$

1			1
1			1

$y\bar{z}$

1			1
1			1

$y\bar{t}$

Còn lại 2 ô, do ô (4,2) chỉ xuất hiện trong $x\bar{z}$ nên phải chọn tế bào này

Biểu đồ Karnaugh

Ví dụ

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
zt				1
$z\bar{t}$	1	1		1
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		1
$\bar{z}t$	1	1		1

			1
			1
			1
			1

$\bar{x}y$

1	1		
1	1		

$x\bar{z}$

1	1		
1	1		

$x\bar{t}$

1			1
1			1

$y\bar{z}$

1			1
1			1

$y\bar{t}$

Còn lại 2 ô, do ô (4,2) chỉ xuất hiện trong $x\bar{z}$ nên phải chọn tế bào này. Lúc này biểu đồ Karnaugh đã được phủ nên 2 tế bào $y\bar{z}$ và $y\bar{t}$ không sử dụng.

Biểu đồ Karnaugh

Ví dụ

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
zt				1
$z\bar{t}$	1	1		1
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		1
$\bar{z}t$	1	1		1

			1
			1
			1
			1

$\bar{x}y$

1	1		
1	1		

$x\bar{z}$

1	1		
1	1		

$x\bar{t}$

1			1
1			1

$y\bar{z}$

1			1
1			1

$y\bar{t}$

Vậy hàm $F(x, y, z) = \bar{x}y \vee x\bar{z} \vee x\bar{t} = \bar{x}y \vee x(\bar{z} \vee \bar{t})$