[1]Li Yinkui,Qin Xiaoxiao,Li Wen. The generalized burning number of graphs[J]. Applied Mathematics and Computation,2021,411

题目：图的广义燃烧数

名词、概念

discrete：[adj] 离散的，不连续的

generalized：[adj] 广义的，普遍的；无显著特点的

generalization：[n] 概括；普遍化；一般化；泛化

terminology：[n] 术语、用辞

bipartite：[adj] 二分的；双边的；由两部分构成的；一式两份的；双方的

proposition：[n] 命题；提议；主题；议题 [vt] 向……提议；向……求欢

theorem：[n] 定理；原理

parity：[n] 奇偶性；平价；同等；相等；胎次；分娩

eccentricity：[n] 偏心率；古怪；怪癖

`图燃烧（graph burning）`：这个概念是由Bonato等人引入的，作为社会传染（social contagion）的模型。规则：

1、在时间步骤 1 中，选择单个顶点进行燃烧。

2、在随后的每个时间步骤中，要么火蔓延到先前燃烧的顶点的所有邻居，并且这些顶点被燃烧，要么选择另一个顶点进行燃烧。这意味着如果一个顶点已经在步骤 t -1 被烧毁，那么它的未烧毁的邻居（如果有的话）在步骤 t 的（结束时）自动被烧毁。

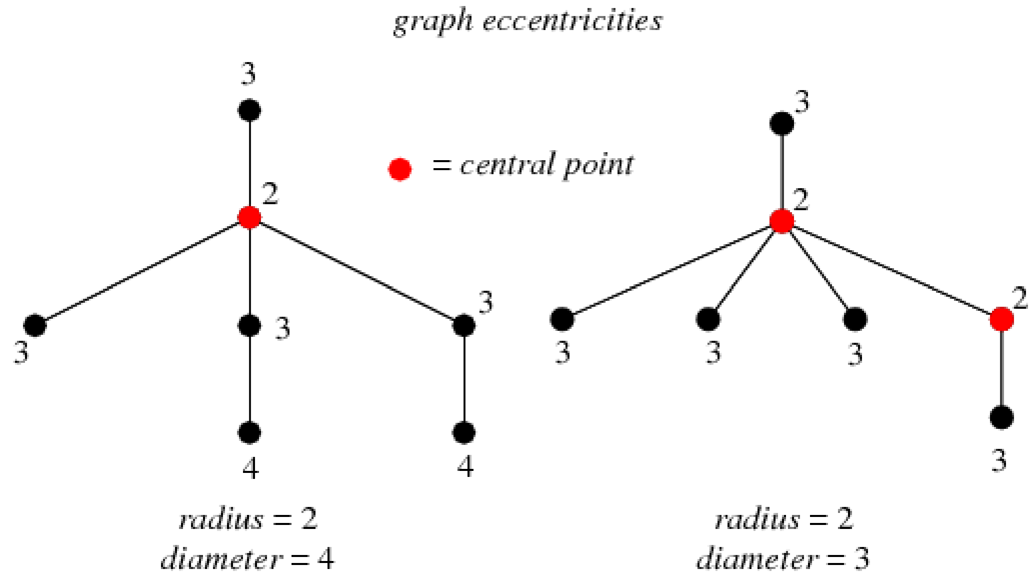
3、当图中所有的顶点都被烧毁后，也就结束了图燃烧的过程。

`燃烧数（burning number），b(G)：`指在图G中通过最少的步骤，燃烧完整个图。烧毁图 G 中的所有顶点所需的最小时间步数称为 G 的燃烧数，用 b(G) 表示。如$b(K_n)=2,n\geq 2$。

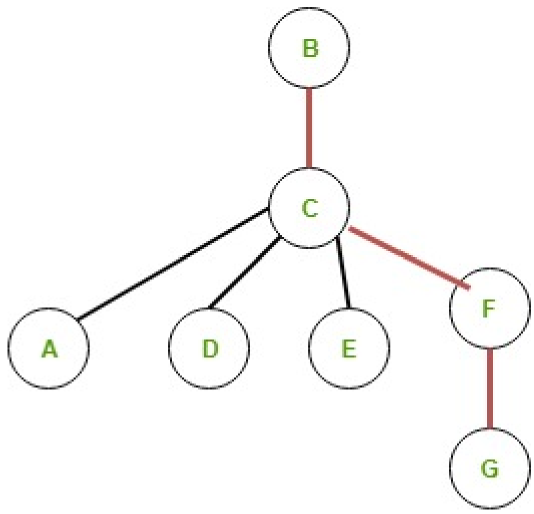
`广义燃烧数（generalized burning number）`$b_r(G)$：本文引入的一个图的参数，是$b(G)$和$b_1(G)=b(G)$的泛化，$b_r(G)$的 r 表示**它们与至少 *r* 个已燃烧的邻居相邻。**

图G的r-burning序列 $(x_1, x_2, ..., x_k)$：对于给定的图 G 和整数 $r \le \Delta(G)$，如果在 G 的 r-burning过程中的时间步 i 中选择了 x_i，我们称顶点 x_i 为火源。如果图的所有顶点通过k次步骤的 r-burning 过程后被烧毁，我们称序列$(x_1, x_2, ..., x_k)$为图 G 的 r-burning 序列。如果$b_r(G) = k$，那我们称$(x_1, x_2, .., x_k)$为G的最优燃烧序列。(是又燃烧，又点火吗？）答：是的。

偏心率eccentricity $\epsilon(v)$：连通图 G 中图顶点 v 的偏心率 $\epsilon(v)$ 是 v 与 G 的任何其他顶点 u 之间的最大图距离。对于不连通图，所有顶点都定义为具有无限偏心率。

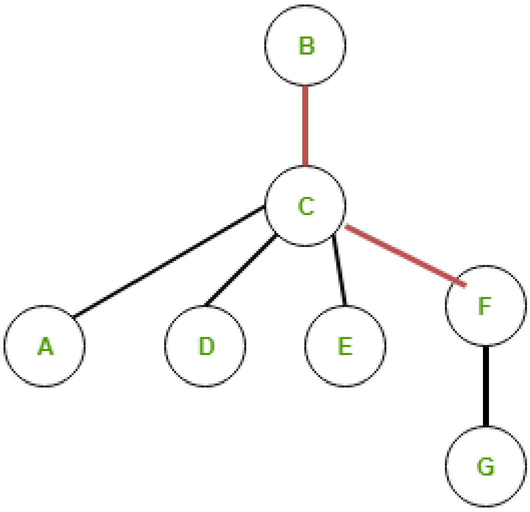


图的直径diam(G)：**最大**偏心率是图的直径。即图的直径是顶点对之间的最大距离。



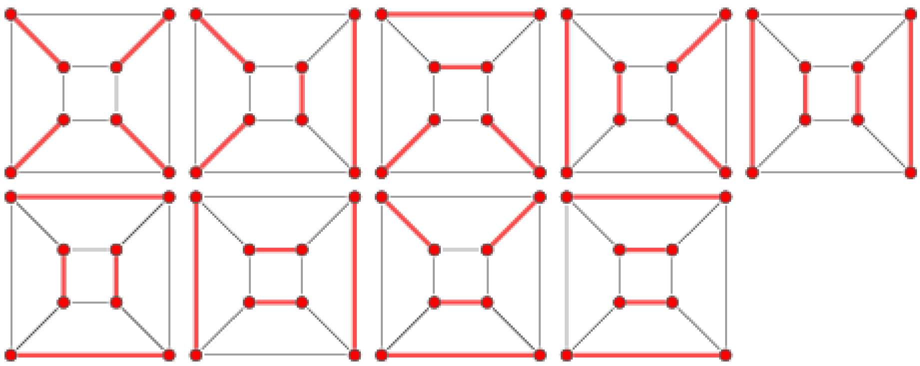

```
Diameter:3
BC -> CF -> FG
```

`图的半径rad(G)：` **最小**偏心率是图的半径。即一个顶点到所有其他顶点之间的**所有最大距离中的最小值** 被认为是图 G 的半径。它表示为 rad(G)。




```
Radius:2
All available minimum radius:
BC -> CF,
BC -> CE,
BC -> CD,
BC -> CA
```

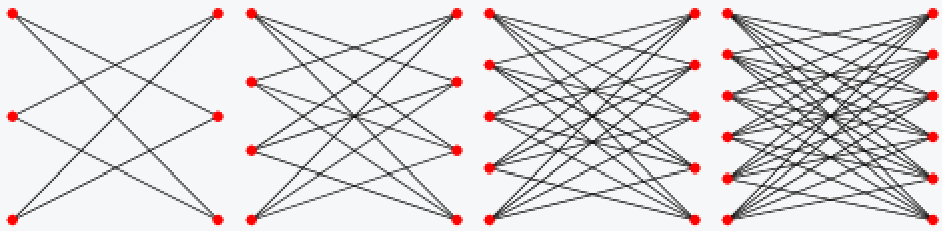
`Perfect Matching(完美匹配，或者叫完美对集)：` 图的完美匹配是一种匹配（即独立的边集），其中图的每个顶点都恰好与匹配的一条边相关。因此，完美匹配是包含 n/2 条边（可能的最大边）的匹配，这意味着仅在具有偶数个顶点的图上才可能进行完美匹配。



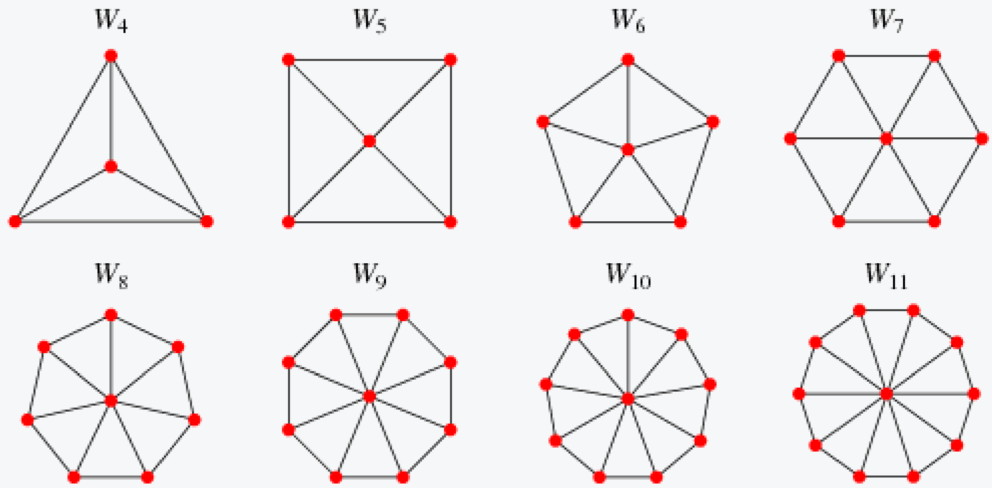
`operation graphs：` 例如n-crown graph(n皇冠图)、helm graph(舵轮图)、fan graph(扇图)

> crown graph：2n 个顶点上的皇冠图是一个无向图，具有两组顶点 $u_1, u_2, \ldots, u_n 和 v_1, v_2, \ldots, v_n$ 并且当 $i \neq j$ 时有一条从 $u_i 到 v_j$ 的边 。皇冠图可以看成是去除了完美匹配边的完全二部图。

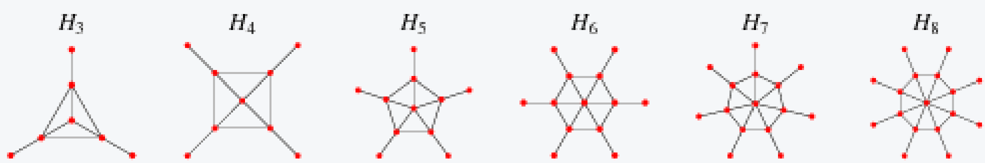
`n-crown graph：` 整数 $n \geq 3$ 的 n 冠图是具有顶点集$x_0, x_1, .., x_{n-1}, y_0, y_1, .., y_{n-1}$和边集$(x_i, y_j) : 0 \leq i, j \leq n-1, i \neq j$的图。因此，它等效于去除了水平边的完整二部图 $K_{n,n}$。



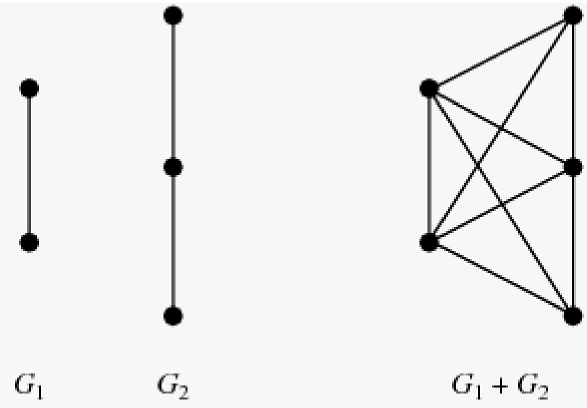
n-wheel graph：n 阶轮图W_n，有时简称为 n 轮，是一个包含一个$n-1$阶环的图，并且环上的每个顶点都连接到另一个称为中心（hub）的图顶点。



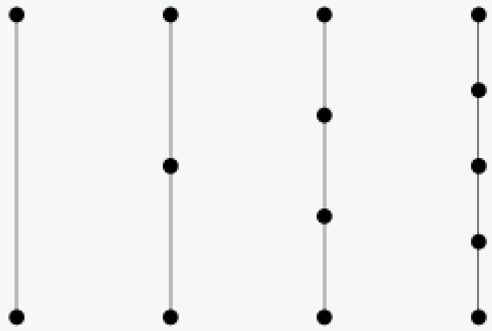
`helm graph：` 舵图 H_n 是从 $n-wheel\ graph$得来的图，通过在环上每个节点处邻接一个悬垂边。



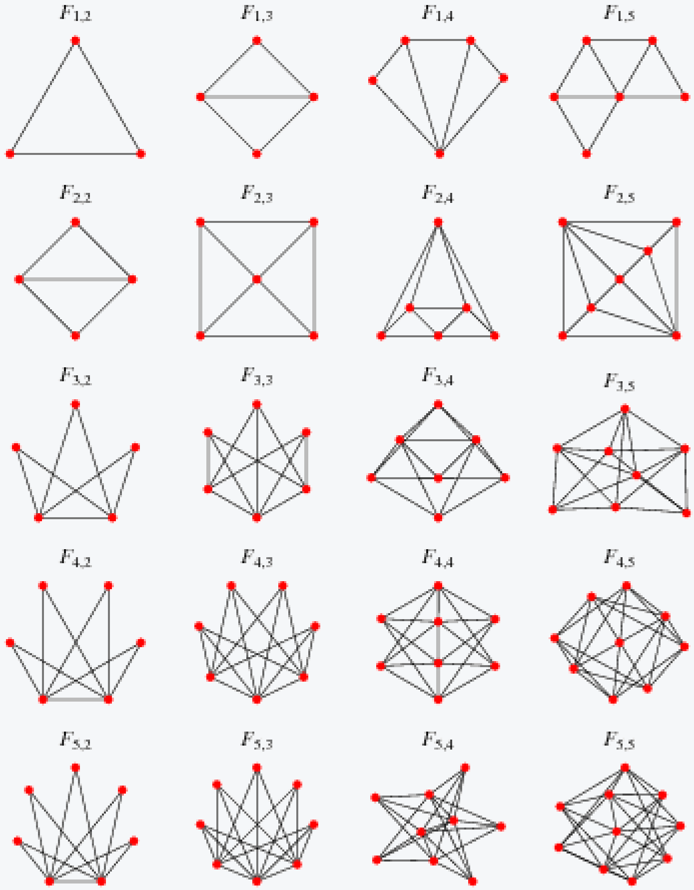
graph join：图 G_1 和 G_2 与不相交点集 V_1 和V_2 以及边集 X_1 和 X_2 的连接 $G = G_1 + G_2$ 是图联合 $G_1 \cup G_2$ 以及连接 V_1 和 V_2 的所有边



path graph：路径图 P_n 是一棵树，有两个顶点度为 1 的节点，其他 n-2 个节点的顶点度为 2。 因此，路径图是一种可以绘制成其所有顶点和边都位于一条直线上的图



`fan graph:` 扇形图 $F_{m,n}$定义为图连接(graph join) $\overline{K}_m + P_n$，其中 $\overline{K}_m$ 是 m 个节点上的空图，P_n 是 n 个节点上的路径图（path graph）。当 m=1 时对应于通常的扇形图，而 m=2 对应于双扇形等。



本文目的

在本篇文章中，所有图都只考虑有限图和简单图。

燃烧数 b(G) 只是考虑了一个通道的传播信息，使得 $b_1(G) = b(G)$。这意味着图G中的任何顶点，除非它的 r 个邻居在上一步被烧毁，否则是不会燃烧的。

G 的广义燃烧数 br (G)，是通过燃烧顶点来燃烧 G 的每个顶点所需的最小步骤数，前提是它们与至少 r 个已燃烧的邻居相邻，其中 r ≥ 1 。

在本文中，确定了几个特殊图和操作图的广义燃烧数，并讨论了该参数的一般界限。

实际应用：某人从一个渠道收到一条信息时，他可能因为不确定而不能一下子传播出去，但是当他从多个渠道收到这条信息时，由于相互证实，就会增加对该信息的认可度，然后他将信息传播给其他未被接受的邻居（在这里，通过网络传播的信息，对应于顶点被其一个燃烧着的邻居所传染或烧毁）。 可以用 G 的广义燃烧数来描述这种现象。

基本结果

- 一些命题

1. 如果一个图是n阶的路或圈，则$b(G) = \lceil \sqrt{n} \rceil$。
2. 如果 $K_{m,n}$是完全二分图，$1 \le m \le n$，则

$$b(K_{m,n}) = \begin{cases} 3, if\ m,n \ge 3 \\ 2, otherwise \end{cases}$$

3. 令 G 为阶数为 n 的图（即G有n个顶点），b(G)=2 当且仅当$\Delta(G)=n-1$或者$\Delta(G)=n-2$。
4. 设 G 是一个半径为 rad(G) 和直径为 diam (G) 的图，则$\lceil\sqrt{diam(G)+1}\rceil\leq b(G)\leq rad(G)+1$

- 一些定理

1. 令P_n为 n 阶路径，则$b_2(P_n)=\lceil\frac{n}{2}\rceil+1$。

> 证明：r = 2，分别考虑n是奇数和偶数的情况。
>
> > case 1：n是奇数。
> >
> > 假设$n=2k+1,P_n=v_1v_2\ldots v_n$,
> >
> > 选取$x_1=v_1,x_2=v_n,x_{k+2}=v_{n-1}$和$x_{i+2}=v_{2i+1}$,其中$i=1,2,\ldots,k-1$。($x_{i+2}=v_{2i+1}$，每隔2个点放一次火)
> >
> > 显然，$(x_1,x_2,\ldots,x_{k+2})$是一个P_n的2-burning序列。(为什么取k+2？取中间偏后的点？)
> >
> > 根据定义，可得$b_2(P_n)\leq k+2$。(最优燃烧序列小于等于k+2)
> >
> > 另一方面，由于 G 的广义燃烧数是图 G 的所有燃烧过程中最小燃烧序列的长度，因此 v_1 和 v_n 属于 P_n的任何 2-burning的任何最佳燃烧序列（x_1，$x_2\ldots,x_b$)。(为什么?是因为一开始就选了这两个点？)
> >
> > 因此得到$b_2(P_n)=b\geq 2+\frac{2k-1}{2}=\frac{2k+3}{2}$，意味着$b_2(P_n)\geq 2+k$。因此，$b_2(P_n)=k+2=\lceil\frac{n}{2}\rceil+1$。
>
> > case 2：n是偶数。
> >
> > 假设$n=2k,P_n=v_1v_2\ldots v_n$, 选取$x_1=v_1,x_{k+1}=v_n$和$x_{i+1}=v_{2i+1}$,其中$i=1,2,\ldots,k-1$。
> > 显然，$(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1})$是对应P_n的2-burning序列。
> >
> > 类似的，可得$b_2(P_n)\leq k+1$。
> >
> > 另一方面，可知v_1和v_n属于P_n中的任何最优的2-burning。
> >
> > 因此可以得到$b_2(P_n)=b\geq\frac{2k-2}{2}+2=k+1$。
> >
> > 所以$b_2(P_n)=k+1=\lceil\frac{n}{2}\rceil+1$。

2. 令C_n为n阶圈，则$b_2(C_n)=\lceil\frac{n}{2}\rceil+1$。

> 证明：假设$C_n=v_1v_2\ldots v_nv_1$。r = 2，我们同样将n分成奇数和偶数的情况。
>
> > case 1：n是奇数。
> >
> > 假设$n=2k+1$，令$x_1=v_1,x_{k+2}=v_{n-1}$和$x_{i+1}=v_{2i+1},i=1,2,\ldots,k$。
> >
> > 显然，$(x_1,x_2,..,x_{k+2})$是一个C_n的2-burning序列。根据定义，可得$b_2(P_n)\leq k+2$。

> 另一方面，假设$(x_1, x_2, .., x_b)$是C_n的一个最佳2-burning序列，我们将会得到$b \geq k+1$。($b \geq 2$)
>
> 实际上，假设$b \leq k+1$，考虑P_n的任何2-burning中的第一个火源x_1和最后一个火源x_b无法在下一步燃烧相邻的顶点(为什么要这么考虑？)，但是，对于 $2 \leq i \leq b-1$，另一源火 x_i 最多可以在步骤 i + 1 中燃烧一个顶点。(由$x_{i+1} = v_{2i+1}$可得，每隔一个顶点放一次火)
>
> 所以在b步之后，最多燃烧C_n中的$2+2(b-2) = 2b-2 \leq 2k$个顶点(按照上面的假设，x_1和x_b在下一步只能燃烧自己，所以是“2”；其余点在下一步时，自己已经在燃烧，同时还点燃了相邻点，所以是“$2(b-2)$”)，符合n=2k+1的事实。
>
> 因此我们得到$b_2(C_n) \geq k+2$，所以$b_2(C_n) = k+2 = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$。

> case 2：n是偶数。
>
> 假设 n=2k，并且令$x_1 = v_1, x_{k+1} = v_{n-1}, x_{i+1} = v_{2i+1}$，其中$i = 1, 2, .., k-1$。显然$(x_1, x_2, .., x_{k+1})$是$C_n$的一个2-burning序列。
>
> 由定义，得$b_2(C_n) \leq k+1$。类似之前的分析方法，在任何C_n的2-burning序列$(x_1, x_2, .., x_b)$中，可得$b \geq k+1$。
>
> 否则，如果$b \leq k$，考虑第一个火源x_1不能再下一步燃烧邻居顶点，而另一个火源x_i最多燃烧$i+1$中的一个顶点$(2 \leq i \leq b)$，所以在 b 步之后，在C_n中最多燃烧$1+2(b-1) = 2b-1 \leq 2k-1$个顶点，这将收缩为$n = 2k$。因此得到$b_2(C_n) = k+1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$。

3. 令$K_{1,n-1}$是n阶的星，和一个整数r，其中$2 \leq r \leq n-1$。则

$$b_r(K_{1,n-1}) = \begin{cases} n-1, if\ 2 \leq r \leq n-2; \\ n, if\ r = n-1. \end{cases}$$

(a star of order n，n阶星是什么？？)

4. 令Km, n为一个完全二分图，$2 \leq m \leq n$，整数r其中$2 \leq r \leq n$，则

$$b_r(K_{m,n}) = \begin{cases} r+2, if \quad r \leq m-2; \\ r+1, if \quad m-1 \leq r \leq m; \\ n, if \quad m+1 \leq r \leq n-1; \\ n+1, if \quad r = n. \end{cases}$$

operation graphs的广义燃烧数

1. 令G为n-crown图，$n \geq 3$并且$1 \leq r \leq n-1, n$为整数，则

$$b_r(G) = \begin{cases} r+3, & if \quad r+3 \leq n \leq 2r; \\ r+2, & \qquad Otherwise. \end{cases}$$

2. 令G为helm graph，$n \geq 3$并且$1 \leq r \leq n$，则

$$b_r(G) = \begin{cases} 3, & if \quad r=1; \\ n+1, & if \quad r=2; \\ n+2, & if \quad r=3; \\ n+\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, & if \quad r=4; \\ 2n, & if \quad 5 \leq r \leq n. \end{cases}$$

3. 令G为fan graph $K_1 + P_n$，$n \geq 3$。如果$1 \leq r \leq n$，则

$$b_r(G) = \begin{cases} 2, & if \quad r=1; \\ \lceil \sqrt{n} \rceil + 1, & if \quad r=2; \\ \begin{cases} 4, & if \quad n=3,4; \\ 5, & if \quad n=5,6; \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, & if \quad n \geq 7; \end{cases} & if \quad r=3; \\ n, & if \quad 4 \leq r \leq n-1; \\ n+1, & if \quad r=n. \end{cases}$$

图的广义燃烧数的边界

1. 令G为n阶连通图，$1 \leq r \leq \Delta((G))$，r为整数，则$r+1 \leq b_r(G) \leq n$。

2. 令G为n阶连通图并且其最大度数为$\Delta(G)$，则$b_r(G) = n$当且仅当 $r = n-1$。

3. 令G为n阶连通图。则$b_r(G) = r+1$，当且仅当G包含一个导出子图 $K_{k,n-k-1}, r = \min\{k, n-k-1\}$。
4. 令G为n阶连通图，度数序列$\pi = (d_1, d_2, .., d_n)$, 使得$d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$。若$d_i \leq r \leq d_{i+1}$，则 $b_r(G) \leq i + b_r(G')$，当$d(v_i) = d_i$且$G' = G - \{v_1, v_2, .., v_i\}$。

5. 令G为n阶连通图，则$b_r(G) \leq \gamma_k^l(G) + k$。

> k-step dominating set：图 G 的 k 步支配集 D 是节点的子集，使得对于每个节点 $u \in V(G)/D$，都存在一个节点 $v \in D$，其中 $d(u,v) \leq k$。

> l-way k-step dominating set：图 G 中顶点的 k 步支配集 D 被称为 l 路 k 步支配集，如果 G 中度数小于l的每个顶点都包含在 D 中，并且 $N^i(D)$ 中的每个顶点在 $N^{i-1}(D)$中至少有l个邻居，$i=1,2,...,k$,这里 $N^i(D)$ 是与集合 D距离正好为 i 的所有顶点的集合。
>
> $\gamma_k^l(G)$：G 的最小 l 路 k 步支配集中的节点数用 $\gamma_k^l(G)$表示，我们称其为 G 的 l 路 k 步支配数。

---

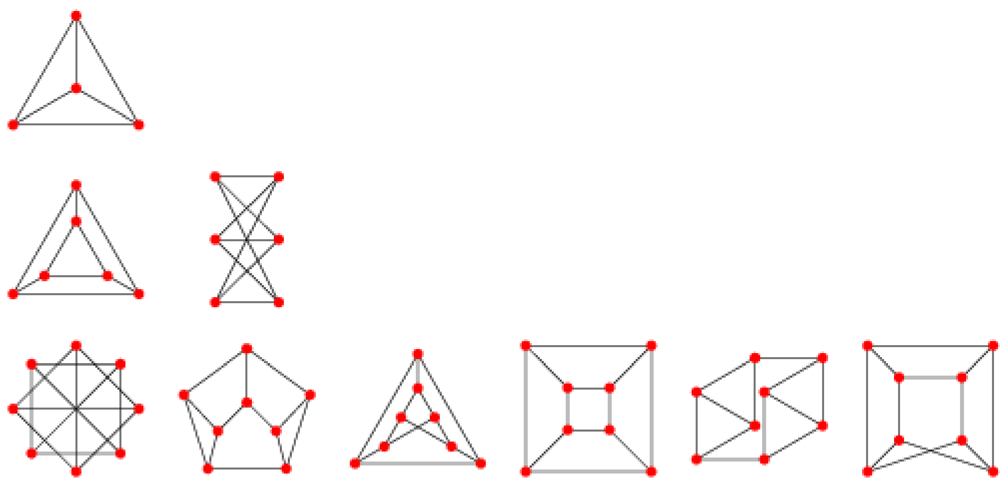
[2]孔将旭,郭文婷,祁佑民.广义皮特森图P(n,1)和P(n,2)的燃烧数[J].浙江师范大学学报(自然科学版),2021,44(02):121-125.

题目：广义皮特森图$P(n,1)$和$P(n,2)$的燃烧数

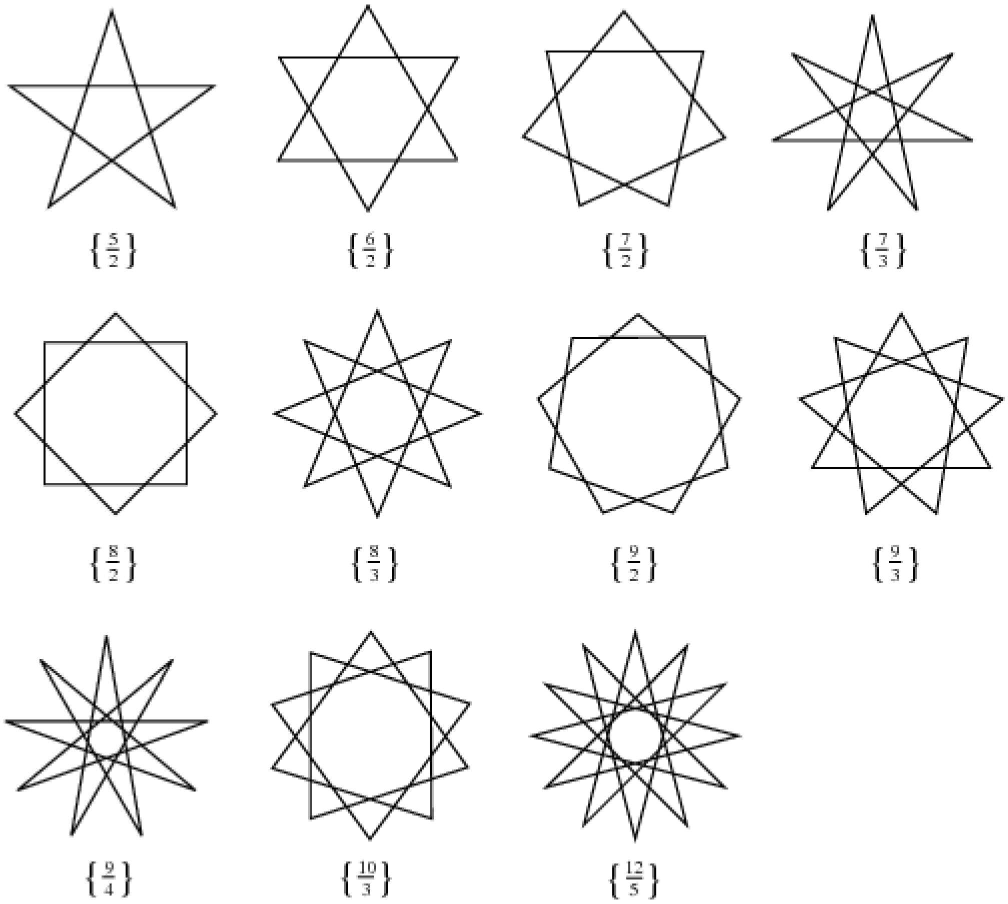
名词、概念

`polygon:` [n] 多边形；多角形物体

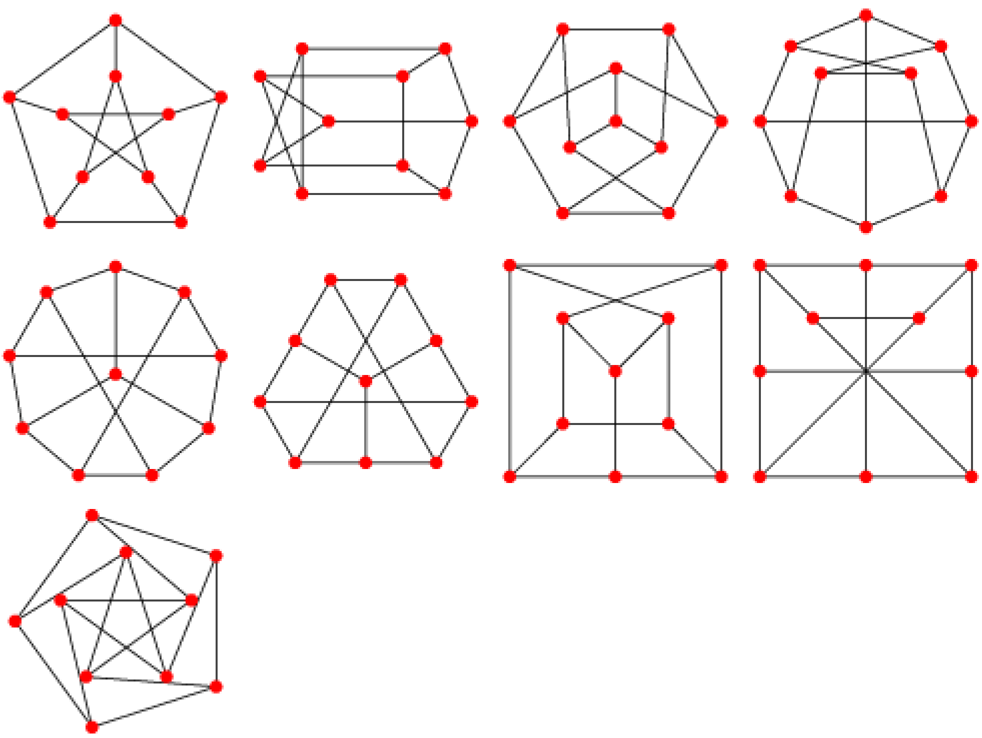
`cubic graph:`立方图，也称为三价图，是所有节点的度数为 3 的图(即 3-正则图，K_3)。n 个节点上的三次图，n只能为偶数 n。



`star polygon,星形多边形:` 星形多边形$\frac{p}{q}$，有p,q个正整数，是圆周上p个规则间隔的点中的每个第q个点用直线连接而成的图形。 数字 q 称为星形多边形的多边形密度。



`皮特森图Petersen graph:` 皮特森图是一个有 10 个顶点和 15 个边的无向图。

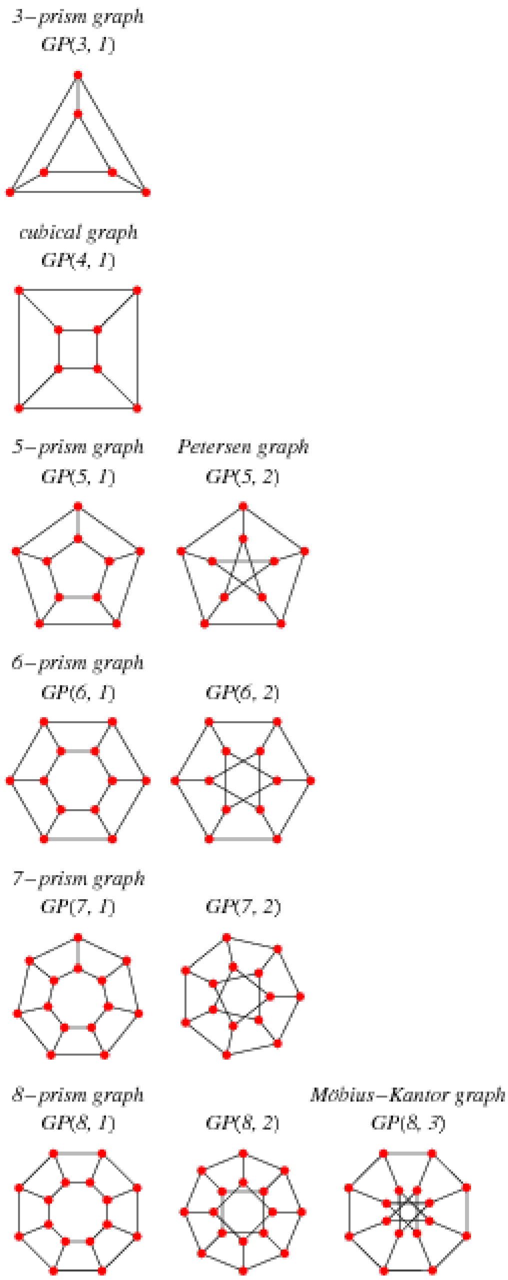


广义皮特森图：广义彼得森图 GP(n,k)，也表示为 P(n,k)，对于 $n \geq 3$ 和 $1 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ 是一个连通立方图(cubic graph)，由内部星形多边形(star polygon)$\{n,k\}$（循环图$Ci_n(k)$）和外部正多边形$\{n\}$（循环图C_n）组成，内、外多边形中的相应顶点与边相连。皮特森图对应于$GP(5,2)$。

GP(n,k)拥有顶点集$\{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$

和边集$\{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} \mid 0 \leq i \leq n-1\}$

(u是外部多边形的点，v是内部多边形的点)



v的第k个闭邻域$N_k[v]$：对任意点$v \in V(G)$，与v的距离至多为k(也就是小于等于)的点的集合。

燃烧序列的另一种描述：图G中，一个序列是$(x_1,x_2,...,x_k)$是一个燃烧序列，当且仅当对于满足$1\le i\le j\le k$且$d(x_i,x_j)\ge j-i$的每一对 i 和 j，下面的等式成立：$N_{k-1}[x_1]\cup N_{k-2}[x_2]\cup...\cup N_1[x_{k-1}]\cup N_0[x_k]=V(G)$。最短燃烧序列的长度为G的燃烧数，记为b(G)，也称为图G的最优燃烧序列。

本文的研究

得到了$9\le n\le 13$时广义皮特森图$P(n,k)$燃烧数的精确值；P(n,1)、P(n,2)的燃烧数达到上界的充分条件。

基于一些定理开展本文的研究

1. 设k为固定的正整数，则$\lceil\sqrt{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\rceil\le b(P(n,k))\le\lceil\sqrt{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\rceil+\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+2$。
2. 当$n\ge 3$,有$\lceil\sqrt{n}\rceil\le b(P(n,1))\le\lceil\sqrt{n}\rceil+1$。如果上下界是紧的，并且n是平方数，则$b(P(n,1))=\sqrt{n}+1$。
3. 当$n\ge 3$,有$\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\rceil+1\le b(P(n,2))\le\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\rceil+2$。如果上下界是紧的，并且$\frac{n}{2}$是平方数，则$b(P(n,2))=\sqrt{\frac{n}{2}}+2$。

研究结果

1. 当$9\le n\le 13$时 b(P(n,k)) 的精确值

   设$9\le n\le 13, 1\le k\le\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$，则

$$b(P(n,k))=\begin{cases}4, & 9\le n\le 12\text{或}n=13\text{且}k\ne 1;\\ 5, & n=13\text{且}k=1.\end{cases}$$

证明：（反证法，这类证明好像用反证法容易些？）

$\because\forall\ x\in V(P(n,k))$的**度都为3**

$\therefore\ |N_0[x]|=1,\ |N_1[x]|\le 4,\ |N_2[x]|\le 10\ |N_r[x]|\le 3\cdot 2^r-2(r\ge 3)$。(这怎么来的?感觉这个上界有点偏大？)

当$9\le n\le 13$时，假设$P(n.k)$有一个燃烧序列(x_i,x_2,x_3)，由 燃烧序列的另一种描述 ，可得如下矛盾：

$18\le 2n\le|N_2[x_1]+N_1[x_2]+N_0[x_3]|\le 10+4+1=15$，**因此** $b(P(n,k))\ge 4$。(假如这是最优燃烧序列，那么 b(G)=3。但是得出上面矛盾的结果，所以$b(G)\ne 3$，至少也是4，所以$b(G)\ge 4$)。

又$\because\ \forall x\in V(P(n,1))$, 有$|N_0[x]|=1, |N_r[x]|\le 4r(r\ge 1)$

$\therefore$ 假设$P(13,1)$有一个燃烧序列(x_1,x_2,x_3,x_4)，将得到以下矛盾：

$26=2n\le|N_3[x_1]|+|N_2[x_2]|+|N_1[x_3]|+|N_0[x_4]|\le 12+8+4+1=25$，**因此** $b(P(13,1))\ge 5$。

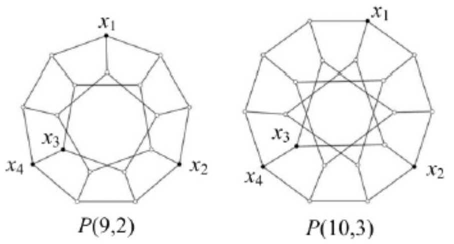


图 1　燃烧序列

表 1　具体情况燃烧序列表

燃烧序列	广义彼特森图
(u_0,u_3,v_6,u_6)	$P(9,1),P(9,2),P(9,3),P(9,4)$
(u_0,u_3,v_6,u_6)	$P(10,1),P(10,2),P(10,3),P(10,4),P(10,5)$
(u_0,u_4,v_7,u_7)	$P(11,1),P(11,2),P(11,3),P(11,4),P(11,5)$
(u_0,v_5,v_8,u_7)	$P(12,1),P(12,2),P(12,3),P(12,4),P(12,5),P(12,6)$
(u_0,v_6,u_8,v_9,v_{10})	$P(13,1)$
(u_0,u_5,u_8,v_8)	$P(13,2),P(13,3),P(13,4),P(13,5),P(13,6)$

2. b(P(n,1))达到上下界的充分条件
    - 设 q,r 为正整数，$n=q^2+r$,当$q+1\le r\le 2q+1$时，$b(P(n,1))=\lceil\sqrt{n}\rceil+1$。

> 证明：当$n=2q+1$时，$n=(q+1)^2$ (???这啥意思?),由之前的定理可知结论成立。下面假设$q+1\le r\le 2q$，则$q<\sqrt{q^2+q+1}\le\sqrt{n}<q+1$，因此$\lceil\sqrt{n}\rceil=q+1$。(向上取整，就能用等号了？)
>
> $\because \forall x,|N_0[x]|=1$，对$m\ge 1$有$|N_m[x]|\le 4m$
>
> $\therefore$ 如果$(x_1,x_2,..,x_i)$是 P(n,1) 的一个燃烧序列，那么
> $2q^2+2q+2\le 2n\le |N_0[x_l]|+\sum_{i=1}^{l-1}|N_{l-i}[x_i]|\le 1+\sum_{i=1}^{l-1}4(l-i)=2l^2-2l+1$ (为什么是大于等于 2n？)
>
> $\therefore\ l\ge q+2=\lceil\sqrt{n}\rceil+1$ (推不出来，我太菜了吗...)
>
> 再根据第二个定理，得$b(P(n,1))=\lceil\sqrt{n}\rceil+1$。

- 设 q,r 为正整数，$n=q^2+r$，当$1\le r\le q$时，$b(P(n,1))=\lceil\sqrt{n}\rceil$。

3. b(P(n,2))达到上下界的充分条件
    - 设 q,r 为正整数，$n=2q^2+r$，当$3q+3\le r\le 4q+2$时，$b(P(n,2))=\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\rceil+2$。
    - 设 q,r 为正整数，$n=2q^2+r$，当$1\le r\le 2q-1$时，$b(P(n,2))=\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\rceil+1$。

---

[3]Huiqing Liu,Xuejiao Hu,Xiaolan Hu. Burning number of caterpillars[J]. Discrete Applied Mathematics,2020,284:

题目：caterpillars(毛毛虫树)的燃烧数

名词、概念

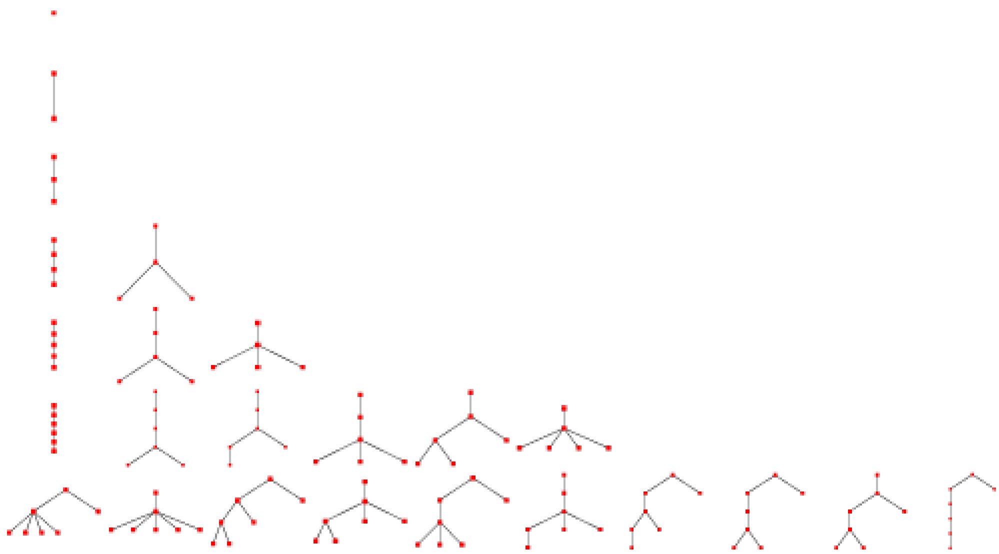
`conjecture:` [v] 推测；猜想；假设；揣摩

`iff:` if and only if.

`counterexample:` [n] 反例

`lemma:` [n] 引理；辅助定理；论点；膜

`caterpillar(毛毛虫树):` 毛毛虫图，毛毛虫树，或简称“毛毛虫”，是一种树，其中每个图的顶点都在中心茎上或离茎只有一个图边。换句话说，移除它的端点会留下一个路径图。一棵树是毛毛虫，当且仅当所有度数大于等于 3 的节点都被**至多两个**度数为 2 或更高的节点包围。



定理

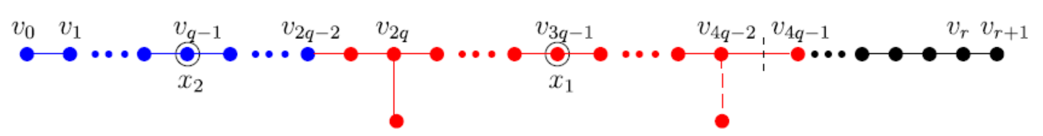
1. n 阶图 G 满足 b(G) = 2， 当且仅当 G 的阶至少为 2，并且具有最大度数 n - 1 或 n - 2。
2. 引理：令$G = P_{a1} \cup P_{a2}, a_1 \geq a_2 \geq 1$且$a_1 + a_2 \leq q^2$
   - 如果$a_1 + a_2 \leq q^2 - 1$,则$b(G) \leq q$。
   - 如果$a_1 + a_2 = q^2$且$a_2 \neq 2$, 则$b(G) \leq q$。

本文的研究成果

1. 在毛毛虫树中证实了Bonato等人的猜想($b(G) \leq \lceil \sqrt{n} \rceil$)。
2. 确定了最多具有两个茎，和所有脊椎（spine）顶点都是茎的毛毛虫树类的子类的毛毛虫树的燃烧数。

结果

1. 毛毛虫树的燃烧数的上边界的证明:
   令T为n阶毛毛虫树，则$b(T) \leq \lceil \sqrt{n} \rceil$。

> 证明:
>
> 假设存在矛盾，即 T 是最小阶的反例，其中 b(T) 是最大的。
>
> 令$ST = v_1 v_2 \dots v_r$为T的主干(spine)，并且令v_0为v_1的相邻叶节点，v_{r+1}为v_r的相邻叶节点。
>
> 假设$n = q^2 + p, 1 \leq p \leq 2q + 1$。 $(n \in [q^2 + 1, (q+1)^2])$
>
> 如果$r \leq 2q - 1,$ 则$V(T) = N_q[v_q]$，从而$b(T) \leq q + 1$，矛盾，所以$r \geq 2q$。 (不懂)
>
> 下面证明两个事实: (为什么要证明这两个事实(fact)?)
>
> > 事实1：$d(v_{2q}) \geq 3$。
> >
> > 证明:
> >
> > 假设$d(v_{2q}) = 2$。此时$|V(T^{(2q)})| \geq 2q + 1$，且$T' := T - V(T^{(2q)})$是毛毛虫树。注意$|V(T')| \leq q^2 + p - (2q + 1) \leq q^2$，$p \leq 2q + 1$。那么$b(T') \leq \lceil \sqrt{|V(T')|} \rceil \leq q$由 T 的最小值决定。
> >
> > 另一方面，我们注意到 $V(T^{(2q)}) \subseteq N_q[v_q]$，因此，根据**燃烧序列的另一种描述**，我们有$b(T) \leq 1 + b(T') \leq q + 1$，这是矛盾的。
>
> > 事实2：$T^{(2q-1)} \cong P_{2q}$。
> >
> > 证明:
> >
> > 假设$T^{2q-1} \ncong P_{2q}$，那么$|V(T^{2q-1})| \geq 2q + 1$。
> >
> > 此时$T' := T - V(T^{(2q-1)})$是一个毛毛虫树，且$|V(T')| \leq q^2 + p - (2q + 1) \leq q^2$，其中$p \leq 2q + 1$。那么 $b(T') \leq \lceil \sqrt{|V(T')|} \rceil \leq q$由 T 的最小值决定。
> >
> > 因而有$b(T) \leq 1 + b(T') \leq q + 1$，这是矛盾的。
>
> 
>
>
> **Fig. 2.** A caterpillar T with the spine $ST = v_1 v_2 \cdots v_r$.
>
> > 红色顶点表示$N_q[v_{3q-1}]$；蓝色顶点表示$N_{q-1}[v_{q-1}]$。

2. 对于$r \geq 2$，有$b(T^l_{r,s}) = \lceil \sqrt{r+2} \rceil$。

3. $b(T^{l_1,l_2}_{2,1,2}) = 3, b(T^{l_1,l_2}_{7,3,5}) = 4$。

4. 对于$r \geq 3$且$(r, s, t) \neq (7, 3, 5)$,有$b(T^{l_1,l_2}_{r,s,t}) = \lceil \sqrt{r+2} \rceil$。

5. CT_r的燃烧数

> CT_r：主干(spine)$P = v_1 v_2 \dots v_r$，使得$d(v_i) \geq 3, i \in \{1, 2, \dots, r-2, r\}$且$d(v_{r-1}) = 3$。
>
> $Comb_r$：梳子图(comb graph)。当$d(v_1) = d(v_2) = \dots = d(v_r) = 3$，此时$CT_r$是梳子图。

- 对于$r \geq 3$，有$b(CT_r) \leq \lceil \sqrt{r-1} \rceil + 1$。
- 对于$r \geq 3$，有$b(Comb_r) \geq \lceil \sqrt{r-1} \rceil + 1$。