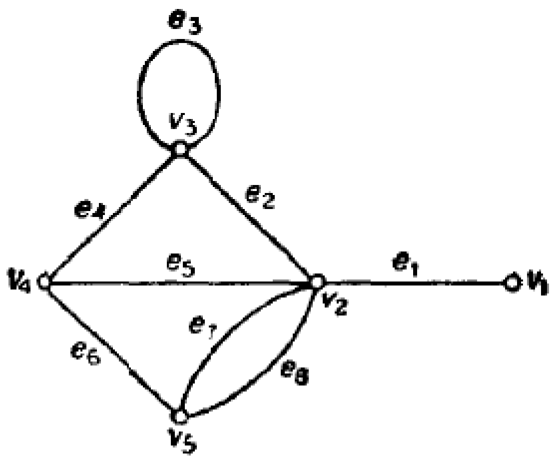
图论及其应用(J.A.邦迪__U.S.R)

第一章 图，子图

1.图，简单图

> - 图（graph），指一个三元组（ $V(G), E(G), \varphi_G$ ）。
>
> $V(G)$ 是非空的**顶点集**;
>
> $E(G)$ 是**不与** $V(G)$相交的**边集**;
>
> φ_G是关联函数。
>
> ***example:*** e是一条边，μ和ν是顶点。
>
> $\varphi_G(e) = \mu\nu$，表示e连接顶点μ和ν，μ和ν称为e的端点。

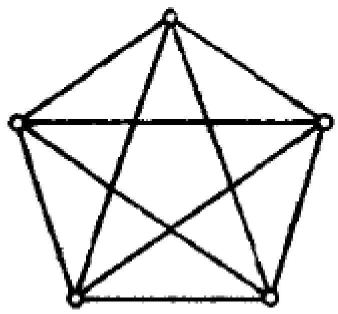
> - 关联：一条边的端点，称为与这条边关联。反之亦然。
> - 相邻：**同一条**边的两个顶点 or **同一顶点**关联的两条边。
>
> > - 环：端点重合为一点的边。
> > - 连杆：端点不相同的边。
>
> > **example：** e_3是环，其余都是连杆。
>
> > 
> >
>
> - 有限图：顶点集、边集都是有限的。
> - 平凡图：只有一个顶点。
> - 非平凡图：除了平凡图，就是非平凡图。
> - 简单图：1. 没有环。2.没有两条连杆连接**同一对**顶点。

2.图的同构

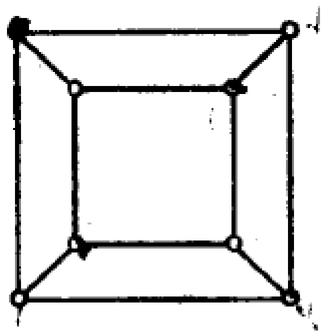
> - 恒等：完全一样。标号都一样。
> - 同构：图形一样（或者看起来一样），顶点和边的标号不一样
>
> > 图G和H同构，记为 $G \cong H$。

> 通过一个映射对 (θ, ϕ)来表示G和H同构。
>
> > $$(\theta, \phi)\text{：两个一一映射}$$
> > $$\theta: V(G) \to V(H), \phi: E(G) \to E(H),$$
> > $$\text{使得}\psi_G(e) = uv\text{当且仅当}\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$
> >
> > 简单理解：边对边，点对点。

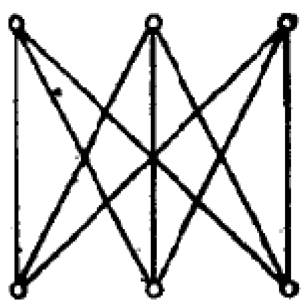
- 完全图：每一对不同的顶点都有一条边相连的简单图。

> n个顶点的完全图只有一个，记为K_n。
>
> 一个K_5的图
>
> 

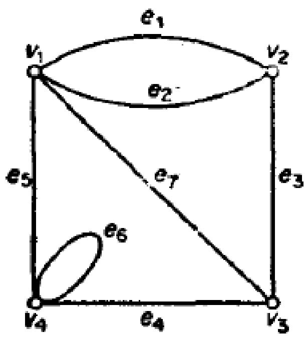
- 空图：没有任何边。
- 偶图：顶点集可以分成两个非空子集X和Y，使得每条边都有一个顶点在X中，另一个端点在Y中。这种分类（X,Y），称为二分类。



- 完全偶图：具有二分类的简单偶图，且X中的每个顶点，与Y中的每个顶点相连。



3.关联矩阵、邻接矩阵



G

> 关联矩阵：$M(G) = [m_{ij}]$

> $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$和$e_1, e_2, \ldots, e_\epsilon$分别表示G的顶点和边。$m_{ij}$是$v_i$和$e_j$相关联的次数（0，1 or 2）。

> | | e_1 | e_2 | e_3 | e_4 | e_5 | e_6 | e_7 |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|
> | v_1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
> | v_2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
> | v_3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
> | v_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 |
>
> M(G)

> 邻接矩阵：是一个$v * v$的矩阵$A(G) = [a_{ij}]$，其中a_{ij}是连接v_i和v_j的边的数目。

> | | v_1 | v_2 | v_3 | v_4 |
> |---|---|---|---|---|
> | v_1 | 0 | 2 | 1 | 1 |
> | v_2 | 2 | 0 | 1 | 0 |
> | v_3 | 1 | 1 | 0 | 1 |
> | v_4 | 1 | 0 | 1 | 1 |
>
> A(G)

4.子图

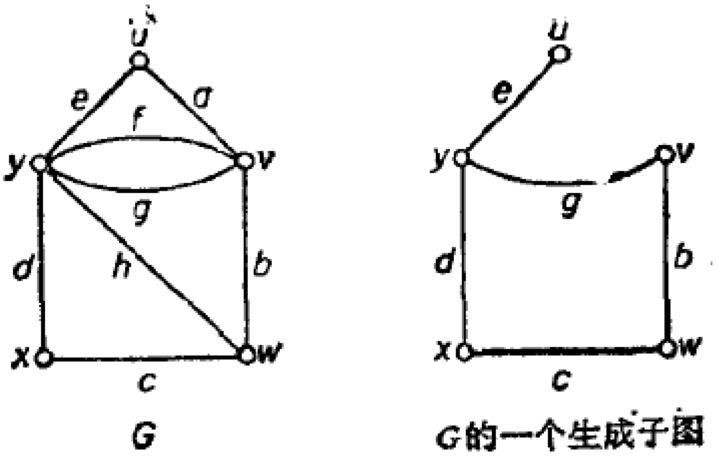
- 图H是G的**子图**：$H \subseteq G$。$V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G), \psi_H$是$\psi_G$在$E(H)$上的限制。（类似集合中子集的定义）

- H是G的**真子图**：$H \subset G$。

  $H \subseteq G$但$H \neq G$。（类似集合中真子集的定义）

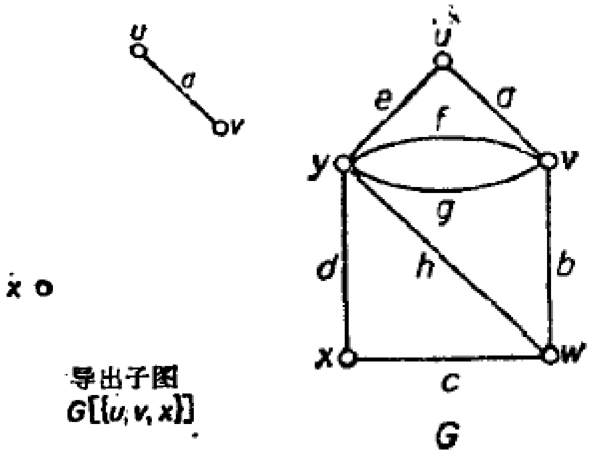
- H是G的子图，G是H的母图。

- 生成子图（或生成母图）：满足$V(H)=V(G)$的子图（或母图）H。

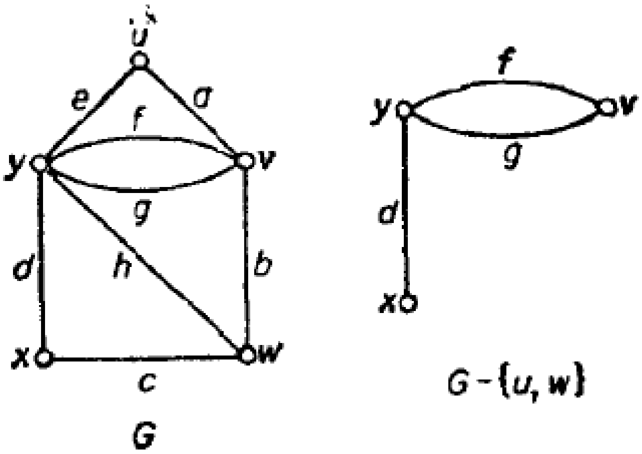


- 导出子图：V'是V的一个非空子集，以V'为顶点集，两端点均在V'中的边的全体为边集所组成的子图。

  记法：$G[V']$称为G的导出子图。

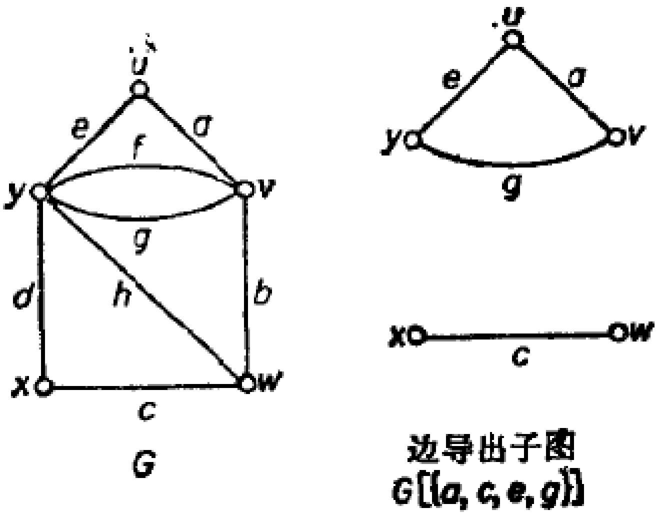


$G(V/V')$，记为$G-V'$。（从G中删除V'中的顶点、还有跟这些边相关的边得到的子图）

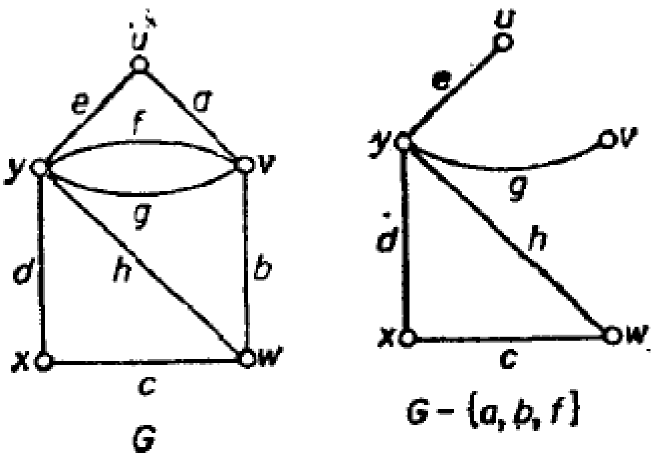


- 边导出子图：E'是E的一个非空子集，以E'为边集，E'中边的端点全体为顶点集所组成的子图。

记法：$G[E']$**称为G的边导出子图**。



$G-E'$：从G中删除E'中的边所得到的子图。



$G+E'$：在G上添加边集E'。

- 不相交：G_1, G_2是G的子图，G_1和G_2没有公共顶点。
- 边不重：G_1和G_2没有公共边。

5.顶点的度

图G的顶点 v 的度：$d_G(v)$，指G中与v关联的边的数目。

环算作两条边。

顶点的最小度：$\delta(G)$；最大度：$\Delta(G)$。

定理：$\sum\limits_{v\in V} d(v)=2\epsilon$。所有顶点的度数为边数的2倍。

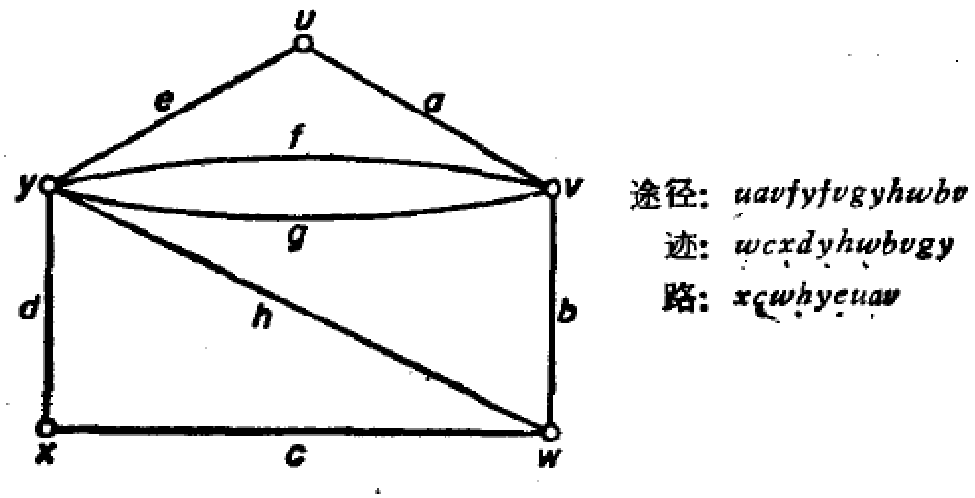
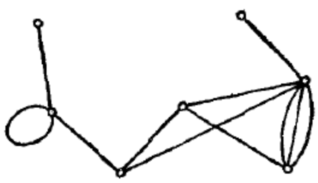
推论：任何图中，奇点个数为偶数。 （奇数度的点为奇点，偶数度的点为偶点）

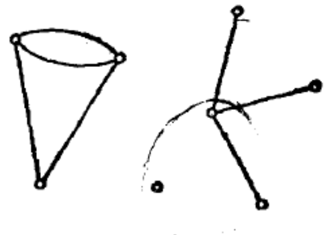
k正则：图G中，若$\forall v\in V$, 都有$d(v)=k$。

正则图是对某个k而言的k正则图。

> 完全图、完全偶图是正则的，k方体也是k正则的。

6.路和连通

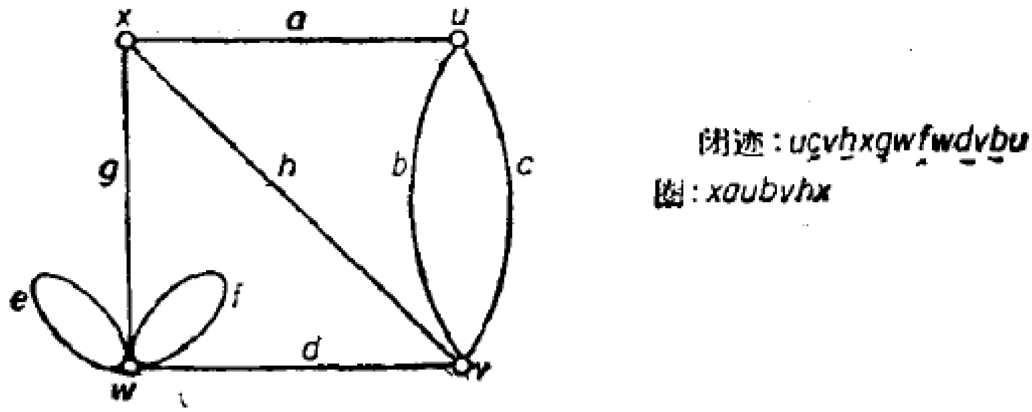
> G的一条途径（或通道）：指一个有限非空序列$W=v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_kv_k$。其中$e_i$的端点是$v_{i-1}$和$v_i(1\le i\le k)$，$v_0$、$v_k$分别为W的起点和终点，$v_1,v_2,\dots,v_{k-1}$为内部顶点。整数k为W的长。
>
> $W=v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_kv_k$逆转后，得到$W^{-1}=v_ke_kv_{k-1}\dots e_1v_0$。
>
> $W'=v_ke_{k+1}v_{k+1}\dots e_tv_t$，将W和$W'$连接起来，得到$v_0e_1\dots e_tv_t$，记为$WW'$。
>
> **节**：W的一段连续的子序列，也是一条途径，称为（v_i,v_j）节。
>
> **迹**：途径W的边$e_1,e_2,\dots,e_k$互不相同。
>
> **路**：途径W的顶点$v_0,v_2,\dots,v_k$互不相同。
>
> 
>
>
> **连通**：G中存在(u,v)路。
>
> **分支**：将V分成非空子集$V_1,V_2,\dots,V_\omega$，使得两个顶点u和v是连通的，当且仅当他们属于同一个子集V_i。
>
> 子图$G[V_1],G[V_2],\dots,G[V_\omega]$称为G的分支。
>
> G只有一个分支时，G是连通的；
>
> 
>
> (a)
>
> (a) 一个连通图；
>
> Otherwise，G不连通。



(b)

(b) 一个有三个分支的不连通图

7.圈

> 途径是闭的：1、起点终点相同。2、长度是正的。
>
> 圈：1、是一条闭迹。2、起点和内部顶点互不相同。
>
> k圈：长度是k的圈。
>
> 奇圈：k是奇数。
>
> 偶圈：k是偶数。
>
> 
>
>
> **定理：一个图是偶图，当且仅当它不包含奇圈。**

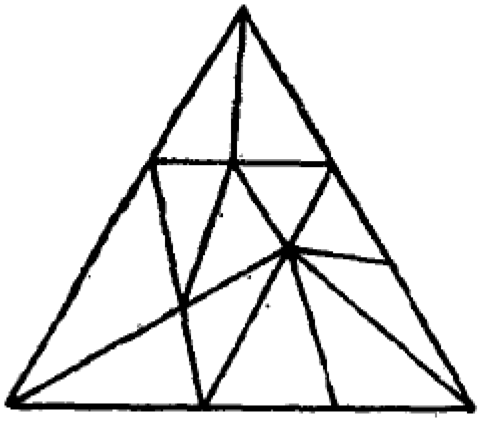
8.最短路径问题

Dijkstra迪杰斯特拉算法

9.Sperner引理

> 该引理涉及到把一个单纯形（线段，三角形，四面体等）分解为较小的单纯形的问题。

> 二维的情况：设T是平面上的一个闭三角形。
>
> **单纯剖分：**把T分解成有限个较小的三角形的剖分，任意两个相交的三角形，有一个顶点or整个一条边是公共的。



(a)

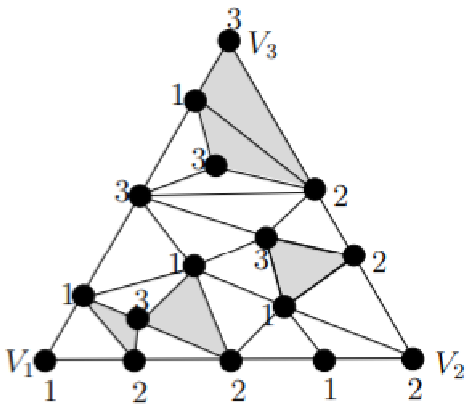
（a）三角形的一个单纯剖分

正常标号：一个“大”三角形$V_1V_2V_3$，对其进行剖分。

将各个顶点按以下规定进行标号：1.顶点V_i的标号为$i, i=1,2,3$;

2.在V_iV_j边上的顶点只可以用i,j作为标号；

3.不在“大”三角形边上的顶点可以随意以1、2、3作为标号。



异标三角形：剖分中的三角形，其三个顶点具有不同的标号。

***sperner*引理：三角形的每个正常标号的单纯剖分中都有奇数个异标三角形**（上图中阴影部分）