

# Transmon qubits 的设计和测控实验原理

Junzhe Chen

Today

# 前言

我希望能够把 transmon qubits 的结构、相关实验、背后的原理和物理图像拆解到一个量子力学学的还行和懂一点量子信息入门的本科生可以理解的程度。反过来，如果能让测试人员逐步理解量子计算的原理，那就更好了。出发点是，目前量子信息理论的资料，和量子计算实现或者说量子工程的资料 gap 挺大。

目前的综述已有很多，所以重点不应该把原理挖得深，因为不可能深过原作者。当然为了让初学者能好理解，基本的理论框架需要会用自认为让人好懂的方式重复一遍。会侧重于测控实验的原理说明，最好能包括纯理论里很少关注，但是实验中需要经常处理、能够被理论解释的现象。

注意在叙述时，砍去和当前小主题不相干的论述。注意当前用到的概念，是不是真的需要较少的知识基础。

# 目录

前言	i
<b>1 构建超导量子比特</b>	<b>1</b>
1.1 LC 振荡电路	1
1.2 超导比特的类型	1
1.3 Transmon qubit	2
1.4 dc-SQUID	3
1.4.1 频率控制	3
1.4.2 邻间耦合	3
1.5 二次量子化	4
1.6 Transmon 芯片简单参数设计流程	4
1.6.1 确定量子芯片的架构	4
<b>2 超导量子比特的控制原理</b>	<b>7</b>
2.1 量子系统演化与门操作	7
2.2 量子比特门的构造	7
2.3 单比特门实现	8
2.4 双比特门实现	8
2.4.1 SWAP 相互作用	8
2.4.2 CZ 门原理	9
2.4.3 CZ 门优化流程	10
<b>3 Transmon qubits 的 single-shot 读取方案原理</b>	<b>12</b>
3.1 读取系统简介	12
3.2 读取原理	13
3.2.1 JC 模型	14

3.2.2	考虑高能态影响的色散位移	14
3.3	读取模型构建及模拟	17
3.3.1	散射模型	18
3.4	single-shot 读取机制	18
3.5	联合读取	19
3.6	读取过程对比特的影响	19
3.6.1	腔内动力学	19
3.6.2	腔外场	19
<b>4</b>	<b>具体超导比特系统</b>	<b>20</b>
4.1	两比特耦合电路	20
4.2	可调耦合器	20
4.3		20
<b>5</b>	<b>超导比特测控流程</b>	<b>21</b>
5.1	超导比特测控基本思路	21
5.2	单比特校准和表征	23
5.2.1	读取谐振腔的表征	23
<b>6</b>	<b>超导比特系统优化问题总结</b>	<b>24</b>
6.1	Transmon 的标定流程	24
6.2	串扰 (crosstalk)	24
6.2.1	串扰表征	25
6.3	残余 ZZ 耦合 (Residual ZZ interaction)	25
6.4	可调耦合器	26
6.5		26
6.6	读取优化问题	26
6.7	Spectator error	26
6.8	线路校准	26
6.9	噪声	26
<b>附录 A</b>	<b>正则变换</b>	<b>27</b>
A.1	绘景变换	27
A.2	RWA	28
A.3	SW 变换	28

A.3.1	算符构造：待定系数法	28
A.3.2	SW 变换例子：JC 模型	29
A.3.3	SW 变换例子：残留 ZZ 耦合	29
<b>附录 B</b>	<b>cQED</b>	<b>30</b>
B.1	Jaynes-Cumming 模型	30
B.2	Dressed State 表象	32
B.3	Rabi Oscillation	32
B.4	Ramsey Fringe	32
<b>附录 C</b>	<b>量子门操作</b>	<b>33</b>
C.1	通用量子门	33
C.2	常见比特门	33
C.2.1	单比特门	33
C.2.2	单比特门的实现	35
C.2.3	双比特门	35
C.3	Bloch 球 & 比特门拆解技巧	35
<b>附录 D</b>	<b>开放量子系统</b>	<b>36</b>
D.1	混合态	36
D.2	环境 (Environment)	36
D.3	开放量子系统	36
<b>附录 E</b>	<b>量子门标定</b>	<b>37</b>
E.1	保真度	37
E.2	量子层析	38
E.2.1	量子态层析 (QST)	38
E.2.2	量子过程层析 (QPT)	38
E.2.3	$\chi_e$ 的修正	39
E.3	Randomized Benchmarking(RB)	39
<b>附录 F</b>	<b>信号与系统基础</b>	<b>40</b>
F.1	模拟信号和数字信号	40
F.2	微波	40

附录 G 常用参考资料	41
G.1 数字信号	41
G.2 微波	41
附录 H 专有名词	42
H.1 仪器	42
H.2 微波	42

# Chapter 1

## 构建超导量子比特

### 【概要】

约瑟夫森结的构造与基本原理，从 LC 振荡电路的量子化到非线性电感、引入 JC 振荡电路哈密顿量。重点从超导比特类型开始，主要关注  $E_J$ ,  $E_C$ , 相位等等物理量和比特类型的影响，以及 Transmon。推导关于 SQUID 的理论，要熟悉表达式中的控制项。

可用包：‘scqbits’

### 1.1 LC 振荡电路

### 1.2 超导比特的类型

在 LC 振荡电路中通过引入约瑟夫森结形成非均匀的能级结构有多种方式，一般的电路形式为约瑟夫森结、电容、电感并联的结构。根据具体的结构，一般分成三种类型，如下。这三种类型的超导量子比特的电路结构、参数以及  $E_J/E_C$  均有较大的差别，因此也用  $E_J/E_C$  取值范围划分。它们各有优缺点，实际中使用最多的是由电荷量子比特改造而来的 Transmon qubits。

- 磁通量子比特 (Flux qubits): 基本结构为电感加约瑟夫森结,  $E_J/E_C \approx 10 \sim 100$ , 磁场的能量占主导。量子比特的  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  对应这电路中两种不同方向的超导电流, 它们之间的跃迁通过降低中间势垒的高度, 形成量子隧穿来完成。
- 相位量子比特 (Phase qubits): 与磁通量子比特结构相似,  $E_J/E_C \sim 10^4$ 。相位量子比特存在明显的劣势, 如退相干时间短 (一般在百纳秒量级)、无法实现非破坏性测量等。
- 电荷量子比特 (Charge qubits): 电荷量子比特中无理想电感,  $E_J/E_C \ll 1$ , 通过外场调制的一个电压来调节比特。电容与约瑟夫森结的结构形成了一个孤岛, 称为 Cooper-Pair

Box (CPB)。电荷量子比特的哈密顿量为:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= 4E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\delta} \\ &= 4E_C(\hat{n} - n_g)^2 - \frac{E_J}{2}(e^{i\hat{\delta}} + e^{-i\hat{\delta}})\end{aligned}\quad (1.1)$$

当  $E_J/E_C$  较小时, CPB 的能级分布随  $n_g$  变化明显; 随着  $E_J/E_C$  增大, 能级对  $n_g$  的敏感性降低。基于此, 并联一个大电容, 减小总电容, 增大  $E_J/E_C$ , 形成最常用的 Transmon qubits。且哈密顿量的形式不变。实际制备时, 可以将电容做成 X 形, 形成 Xmon qubits(本质上还是 Transmon)。Xmon 有四个方向的外接口, 方便与控制系统、读取系统及其他比特耦合。可以用 Python 包 SCqubits 或 QuCat 来数值模拟超导比特的性质。

### 1.3 Transmon qubit

Transmon qubits 用近似方法易于分析。由于  $E_J/E_C \gg 1$ , 系统的能量本征态在  $\hat{\delta}$  上的分布相对较窄, 对势能项  $\cos \hat{\delta}$  进行展开, 近似到四阶, 则式 [1.1] 变为:

$$\hat{H} = 4E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_J(1 - \frac{1}{2}\hat{\delta}^2 + \frac{1}{24}\hat{\delta}^4) \quad (1.2)$$

引入升降算符, 可得:

$$\hat{H} = \hbar\omega_p(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) - E_J - \frac{E_C}{12}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^4 \quad (1.3)$$

最后舍掉微扰项 (由于  $E_J \gg E_C$ ), 可得本征能量的表达式:

$$E_n = E_J + \hbar\omega_p(n + \frac{1}{2}) - \frac{E_C}{4}(2n^2 + 2n + 1) \quad (1.4)$$

依次可得最低的三个能级之间的间隔:

$$E_{10} = \sqrt{8E_CE_J} - E_C, \quad E_{21} = \sqrt{8E_CE_J} - 2E_C \quad (1.5)$$

定义非谐  $\eta$  来研究高能级的影响:

$$\eta = \omega_{21} - \omega_{10} = \frac{E_{21} - E_{10}}{\hbar} = -E_C \quad (1.6)$$

注:

- 共振频率  $\omega_{10}/2\pi$  选择范围: 一般为 4 ~ 6 GHz
- 非谐  $\eta$  选择范围: 一般为 -200 ~ -300
-



## 1.4 dc-SQUID

将两个约瑟夫森结并联形成回路，称作 dc-SQUID，可以通过调节回路的磁通量  $\Phi$  来控制 SQUID 的电感能：

$$E_J = E_{J\Sigma} \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \sqrt{1 + d^2 \tan^2\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)} \quad (1.7)$$

其中  $E_{J\Sigma} = E_{J1} + E_{J2}$ ，为总电感能； $d = (E_{J1} - E_{J2})/E_{J\Sigma}$ ，为 SQUID 的不对称度。其中电容能（非谐）通常为固定值，因此电感能变化时，比特频率相应变化：

$$\omega_{10}(\Phi) = (\sqrt{8E_C E_J} - E_C)/\hbar \quad (1.8)$$

### 1.4.1 频率控制

Z 线输入电流，通过改变 SQUID 的磁通量控制比特频率变化。磁通量随电流的变化有经验公式：

由频率随磁通量变化的公式可以看出，频率随磁通量呈周期性变化。频率的极值点称为 sweet point 点，当不确定度  $d=0$  时，只有一个极大值；当  $d$  不为 0 时，有一个极大值，一个极小值。

### 1.4.2 邻间耦合

邻间耦合通过将两个元件靠近形成电容结构，如图 [3.1(b)] 中的叉型结构与量子比特靠近形成电容  $C_g$ ，传输线与读取谐振腔靠近，形成电容  $C_k$ 。这种耦合方式是最简单，在 Transmon 中十分常用，预计项目所需设计的芯片也采取邻间电容耦合。

若要分析超导比特间的耦合，可以通过分析 LC 振荡电路的耦合，写出哈密顿量并进行修改，将电感替换成 JJ 的等效电感即可。如图，[2.10] 两个 LC 振荡电路通过一个耦合电容  $C_c$  进行耦合。拉格朗日量中，两个 LC 振荡电路的各自的部分与单个 LC 振荡电路一致，但耦合项需要稍加考虑。回忆一下经典电路中，电容的能量为  $E = \frac{1}{2}CV^2$ 。而在量子化的 LC 振荡电路中，磁通量的导数  $\dot{\Phi}$  具有电势的量纲，再考虑一个电容的电压为两边电势差，可以得到耦合电容的能量表达式，即  $E = \frac{1}{2}C_c(\dot{\Phi}_1 - \dot{\Phi}_2)^2$ 。而整个体系的拉格朗日量为：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}C_1\dot{\Phi}_1^2 + \frac{1}{2}C_2\dot{\Phi}_2^2 + \frac{1}{2}C_c(\dot{\Phi}_1 - \dot{\Phi}_2)^2 - \frac{1}{2L_1}\Phi_1^2 - \frac{1}{2L_2}\Phi_2^2 \quad (1.9)$$

通过哈密顿正则方程可以求出两个广义坐标分别对应的广义动量，接下来则可以写出哈密顿量：

$$H = \frac{1}{2}C_1\dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2}C_2\dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2}C_c(\Phi_1 + \Phi_2)^2 + \frac{1}{2L_1}\Phi_1^2 + \frac{1}{2L_2}\Phi_2^2 \quad (1.10)$$

## 1.5 二次量子化

处理谐振子最简洁的方式是利用升降算符。Transmon 作为非线性谐振子，也可以沿用这套方法，只不过最终形式有所变化。

最后得到的总哈密顿量形式为：

$$H = \sum_j \omega_j a_j^\dagger a_j + \frac{\eta_j}{2} a_j^\dagger a_j^\dagger a_j a_j + \sum_{i>j} V_{ij} \quad (1.11)$$

接着，只要写出耦合项，以及各个耦合系数，就得到了完整的哈密顿量。更为普遍的，在 cQED 架构下的 Transmon 芯片，从比特到控制线、读取谐振腔、读取数据总线，所有的结构都能用多模谐振子描述，因此都可以利用上式的形式表示。

## 1.6 Transmon 芯片简单参数设计流程

量子芯片参数设计次序<sup>1</sup>

### 1.6.1 确定量子芯片的架构

1. 量子芯片体系目前，待设计的是由超导量子比特构成的 6 位超导量子芯片。2. 量子比特的结构超导量子比特为非线性的 LC 振荡电路，其工作频率由电感参数以及电容参数共同确定，其中电感参数由约瑟夫森结提供。为了两比特量子逻辑门的有效实施，我们要求超导量子比特的的工作频率大范围可调。鉴于目前我们尚不掌握高度精准的量子比特频率设计技术或者高度精准的量子比特频率修饰技术，我们进一步要求所有超导量子比特的的工作频率均可调。鉴于目前我们尚不掌握高度精准的约瑟夫森结常温电阻设计技术或者高度精准的约瑟夫森结常温电阻修饰技术，并且目前工艺可支持的约瑟夫森结常温电阻范围有限，我们进一步要求超导量子比特的电感部分是由近似相同的两个约瑟夫森结构成的 SQUID 结构，进而达到工作频率可调的目的。为了有效抑制电荷噪声，我们要求超导量子比特的约瑟夫森能远大于充电能，即要求超导量子比特为 transmon qubit 或者 Xmon qubit。鉴于已有的成熟设计方案以及量子芯片架构需要，我们进一步要求超导量子比特的电容部分是十字电容结构。3. 量子比特的控制每个超导量子比特具有独立的 XY 控制线与 Z 控制线。XY 控制线与目标超导量子比特的十字电容

---

<sup>1</sup> 杨振权

通过固定电容耦合，Z 控制线与目标超导量子比特的 SQUID 通过固定互感耦合。4. 量子比特的读取超导量子比特的读取通过超导共面波导传输线谐振腔（简称测量腔）实现。每个测量腔用于读取单个超导量子比特，测量腔与超导量子比特之间通过固定电容耦合。鉴于目前我们尚不掌握 Purcell 滤波器的设计原理、定量设计经验以及工艺制备经验，我们要求测量腔不附带 Purcell 滤波器结构。在测量腔的基础上，我们进一步要求引入传输线结构对超导量子芯片进行分组，每组内部具有 3 个超导量子比特，其测量腔共同连接到该组传输线上，一共 2 组。原本，每个超导量子比特的读取信号都需要独立的生成电路和传输线路。传输线的引入，不是我们把该组传输线上的所有超导量子比特的读取信号合并起来，通过同一根传输线路输入，而是更进一步地，使得我们可以利用频分复用技术直接合成读取每一个超导量子比特所需的读取信号，从源头处把生成电路和传输线路的需求降到了一组，极大地提升了系统集成上限，降低了整个系统的搭建成本。特别地，受到测量腔本身有限的带宽限制，读取信号中只有与指定测量腔对应的频率成分才会进入到该测量腔中，并完成对于该测量腔连接的唯一超导量子比特的读取。如果我们想知道某个指定超导量子比特的量子态信息，我们只需要采集传输线返回的读取信号，并找到与目标超导量子比特对应的指定频率成分，将其分离出来分析即可，从而天然地避免了测量串扰。当然，这必须要求读取信号中频率成分的间隔大于测量腔的带宽。传输线的引入对超导量子比特的耦合没有限制作用。

5. 量子比特的耦合我们要求超导量子比特的耦合方式为可调耦合。二、确定量子比特的参数

1. Charge dispersion 约束 Xmon qubit 依然有残留的电荷自由度，从而引发 charge dispersion。我们要求，在选定实施两比特量子逻辑门的工作频率时，由 charge dispersion 导致的 01 和 12 之间跃迁频率的波动，均不超过 10 kHz。由此推导的等价约束条件是约瑟夫森能与充电能的比值不低于 60 倍。
2. 有效残留耦合约束考虑到有可调耦合器，可忽略有效残留耦合约束。
3. 量子比特的充电能超导量子比特的充电能过大，会导致我们更不容易达到 charge dispersion 约束。充电能过小，会导致电容对电荷噪声抑制能力的下降，同时会降低 Xmon 的非谐，导致超导量子比特更容易跃迁到高阶激发态。我们要求充电能维持在 220 MHz 左右，对应地，超导量子比特的十字电容设计数值在 88 fF 附近。
4. 量子比特的工作频率考虑到有可调耦合器，我们要求所有的超导量子比特的工作频率同时设置在 5.88 GHz。
5. 约瑟夫森结的常温电阻由超导量子比特充电能设置数值、超导量子比特工作频率设置数值，很容易得到约瑟夫森能的数值，进而计算出约瑟夫森结的常温电阻数值。鉴于超导量子比特的 SQUID 由两个近似相同的约瑟夫森结构成，因此可以计算出 5.88 GHz 工作频率的超导量子比特所需的约瑟夫森结常温电阻数值。

三、确定测量腔的参数

1. IMPA 的工作频段当前，我们研制的 IMPA 量子参数放大器可以在 6.3-6.7 GHz 频段内维持 15 dB 增益带宽，足够 3 个超导量子比特的独立读取需要。但考虑到 IMPA 工作性能的浮动，我们按照更加保守的 6.4-6.6 GHz 频段来评估其对测量腔工作频段的约束。
2. 测量腔的工作频段每一组传输线上的 3 个测量腔的工作频段均需要处于以上 6.4-6.6 GHz 中，进一步地，我们还需要考虑到空间相邻的两个测量腔之间可能存

在的串扰,这意味着 3 个测量腔的工作频率是需要交错设计的。除此以外,考虑到 IMPA 的工作原理,在放大读取信号每一个频率成分的同时,也会产生镜像频率成分。为了避免某一个频率成分的镜像与其他频率成分在频谱上混叠,我们要求每组传输线上 3 个测量腔的工作频段进一步约束到 IMPA 工作频段的一半,即 6.4-6.5 GHz 中,这样镜像分量全部位于 6.5-6.6 GHz,便于在信号处理中集体过滤。需要注明的是,如果测量腔中引入了 Purcell 滤波器,导致测量腔的等效带宽大幅增加,以上工作频段范围也需要增加,附带地,还要求 IMPA 保守工作频段的提升。

3. 测量腔的阻抗鉴于目前我们所使用的薄膜工艺为铝膜,暂不用考虑动态电感应,因此测量腔的阻抗按照标准的  $50 \omega$  设计。需要注明的是,利用高动态电感的超导材料制备测量腔及相关结构,可以大幅缩短器件所需的尺寸要求。

四、确定耦合结构的参数

1. XY 控制线与量子比特的耦合鉴于 XY 控制线与超导量子比特的十字电容通过固定电容耦合,我们很容易建立耦合电容与 XY 控制线作用效率的关联。我们要求耦合电容按 60 aF 设计,对应单比特量子逻辑门所需的信号幅度在 40 V 附近。

2. Z 控制线与量子比特的耦合鉴于 Z 控制线与超导量子比特的 SQUID 通过固定互感耦合,我们很容易建立耦合互感与 SQUID 磁通调控效率的关联。我们要求耦合互感按 4 nH 设计,对应 SQUID 磁通调制周期约为 0.5 mA。

3. 量子比特之间的耦合鉴于可调耦合器的存在,我们要求最大 ZZ 耦合强度达到 25 MHz,波动低于 0.014。

量子比特与测量腔的耦合鉴于超导量子比特与测量腔通过固定电容耦合,我们很容易建立耦合电容与量子比特、测量腔之间的耦合强度的关联。鉴于 Purcell 效应约束以及色散耦合约束的存在,我们要求针对 5.88 GHz 工作频率的超导量子比特,耦合电容按 2 fF 设计。特别注意,量子比特与测量腔的耦合电容巨大,会对量子比特频率、测量腔频率产生影响,一定要注意修正!!!

5. 测量腔与传输线的耦合鉴于测量腔与传输线通过固定互感耦合,而互感耦合到测量腔的外部耗散率的关联难以定量建立,因此我们直接对测量腔的外部耗散率进行设计约束。鉴于 Purcell 效应约束的存在,我们要求测量腔的外部耗散率按 1 MHz 设计。需要注明的是,如果测量腔中引入了 Purcell 滤波器,则外部耗散率的设计条件需要重新计算。

# Chapter 2

## 超导量子比特的控制原理

### 2.1 量子系统演化与门操作

为了方便近似计算，我们通常采取相互作用绘景来研究控制问题，此时方程中的算符与态从薛定谔绘景通过么正变换而来 [见附录]。其中  $|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} |\psi_S(t)\rangle$ ， $\hat{H}_I = e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} V(t) e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}}$ 。变换后得到的这个类薛定谔方程等价于原始的薛定谔方程，结果如下：

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_I(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\psi_I(t)\rangle \quad (2.1)$$

### 2.2 量子比特门的构造

量子比特门的物理实现，本质上是用一个实际物理过程去构造一个理想的比特门。实际物理过程怎么描述？时间演化嘛，以超导中最常见的 Transmon 为例，写一个哈密顿量：

$$H = \sum_j \omega_j a_j^\dagger a_j + \frac{\eta_j}{2} a_j^\dagger a_j^\dagger a_j a_j + \sum_{i < j} V_{ij}$$

通常哈密顿量可以写成这样的形式： $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$  或  $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_d(t)$ 。其中  $H_0$  代表量子比特系统自身的哈密顿量，其自由演化时的性质。 $H_d$  或  $V$  代表驱动哈密顿量，表示控制系统和比特的耦合带来的演化性质。超导比特的量子态基于电磁相互作用，因此控制系统施加的是电磁场。

第一章已经讨论了超导比特有两种基本控制类型：

- 由 Z 控制线实现的‘频率控制’ i，改变比特的能级结构。通常通过施加电流、用以改变超导比特的磁通量来实现。

- XY 控制线实现的‘跃迁控制’，控制比特的量子态跃迁。通常通过施加微波 (或电压) 实现；两种控制类型在单比特子空间内分别对应  $R_z$  门，以及  $R_x$ 、 $R_y$  门。

多比特系统的控制相对要复杂一些，需要考虑其余比特的耦合的影响，但数学上分析的方法一致：写出系统的自哈密顿量，以及外加的控制哈密顿量。

一个量子系统的含时演化，既可以用动力学方程（薛定谔方程、主方程等）描述，也可以用含时演化算符（传播子）描述：

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H dt\right)$$

这就是实际的比特门。算出来的矩阵数值和理想门差距越小越好，达到一定精度时，就可以认为它对应数学上的一个幺正变换。

其他类型的系统，你把哈密顿量换一下就行，是一样的。

量子门本身，只是数学上的构造，和具体物理系统是没关系的，物理系统只是用来拟合理想门的手段。当然单比特门蕴含了比特自身的几何性质，双比特门蕴含了比特间的纠缠特性。

## 2.3 单比特门实现

单比特门的实现，因为其不涉及和其他比特的耦合，可以完全从 Bloch 球的角度考虑。

## 2.4 双比特门实现

双比特门的实现，与单比特门实现不存在本质上的差别，数学上来说，都是式子  $U$ ，只不过多比特系统的哈密顿量存在着耦合项，而多比特门的构造必须要利用比特间的相互作用。此时 Bloch 球看起来不是一个很好的工具，毕竟一个球不能表示两个比特。<sup>1</sup>

### 2.4.1 SWAP 相互作用

如 SWAP 其名，意为两个态之间的交换作用。所谓 SWAP 门通常指两比特系统发生  $|01\rangle - |10\rangle$  之间的交换。但广义上，SWAP 是任意两个态之间的交换。除了 SWAP、iSWAP 等 SWAP 类门，实验上的  $cZ$  门也常通过  $|20\rangle - |11\rangle$  的交换相互作用实现。

---

<sup>1</sup> 在标定比特间的相对相位时，Bloch 球仍然是一个利器，但考虑构造双比特门的出发点不在此

### 2.4.2 CZ 门原理

两比特能级如图，其中两比特被调整至频率一高一低。

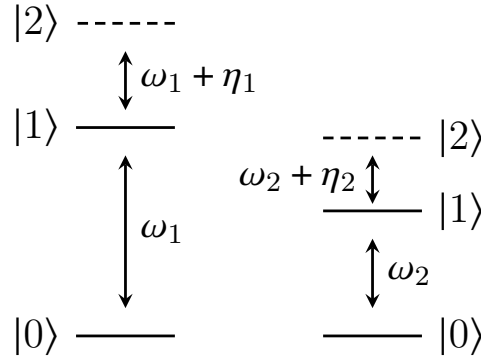


图 2.1: Transmon 实现比特门时的能级跃迁图

当  $|20\rangle$  和  $|11\rangle$  共振，即  $2\omega_1 + \eta_1 = \omega_1 + \omega_2$  时，这两个态之间的 SWAP 作用最强，与其他态的相互作用很弱。制备初态为  $|11\rangle$ ，经过一个周期的 SWAP 相互作用，期间态发生  $|11\rangle \rightarrow -i|20\rangle \rightarrow -|11\rangle$  的变化，多了一个  $\pi$  的相位。共振条件可以化简得到一个 CZ 门实现的常用条件：

$$\omega_1 + \eta_1 = \omega_2$$

如下图，基于此实现 CZ 门的大致过程为：制备初态  $|11\rangle$  后，给高频比特的 Z 线一个脉冲（例如一个平顶高斯波形），脉冲幅度对应于免交叉点处的磁通量  $\Phi_{\text{CPHASE}}$ 。图中的曲线  $I(\tau)$  对应的就是 Z 线脉冲，沿该曲线时间演化，系统的终态为  $e^{i\pi}|11\rangle$ 。

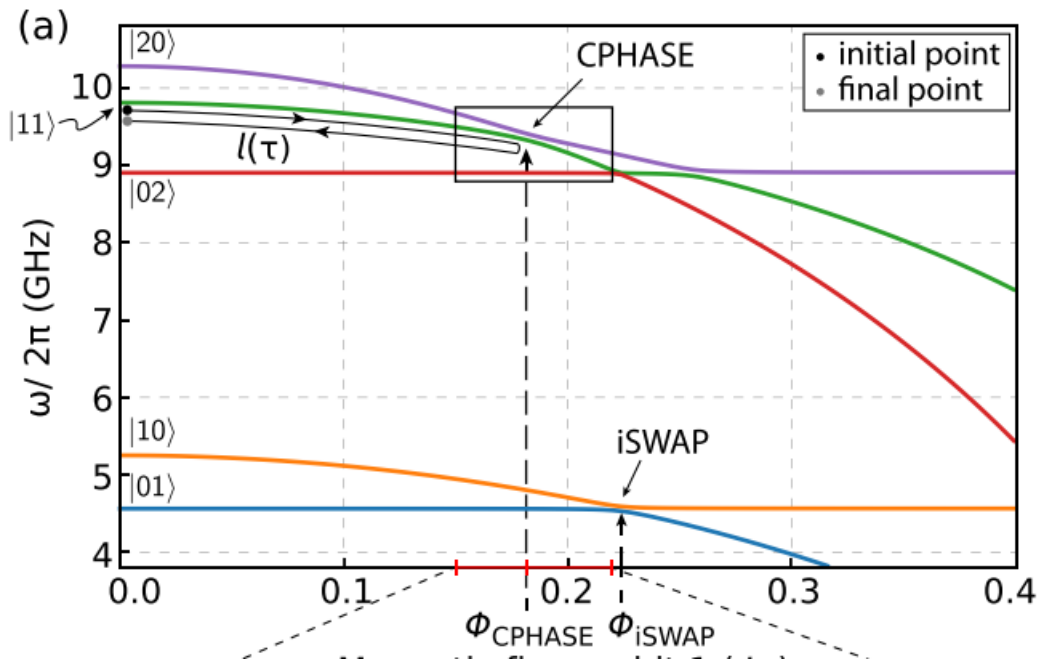


图 2.2: 两比特门实现方法用两比特耦合系统能级图表示。横、纵轴分别为高频比特的磁通量、频率。其中  $|11\rangle$  与  $|20\rangle$  两个能级组成光子数  $n=2$  的子空间。图中 CPHASE 箭头指向的免交叉点 (avoided level crossing) 代表了  $\omega_1 + \eta_1 = \omega_2$ , 且两个态之间的频率差  $\omega_{20} - \omega_{11} = 2g$ ,  $g$  为哈密顿量中  $|11\rangle$  与  $|20\rangle$  的耦合系数, 这可以通过解哈密顿量的特征值计算出来, 可以参照 JC 模型的解法。

注:

1. 在大规模、无可调耦合的芯片中, 为了利用 SWAP 作用实现双比特门, 需要令各个比特的频率以‘…高-低-高-低…’分布。通常设定低频比特的频率固定, 调整高频比特的频率来实现 CZ 门。此外, 注意上文未提及脉冲时长, 这是由于非共振驱动的存在, 即使  $\omega_1 + \eta_1$  与  $\omega_2$  精确相等时, 系统中也会发生少量的  $\{|11\rangle, |20\rangle\}$  子空间与其他态的交换, 保真度并不一定最高; 另外, 向高能级的态泄露、单比特相位等也需要考虑。在模拟和实际测试中, 在  $\omega_1 + \eta_1 \approx \omega_2$  附近寻找最优频点 (脉冲幅值), 同时确定脉冲时长, 这需要一系列的优化流程。

### 2.4.3 CZ 门优化流程

(1) 控制比特达到共振 (### 将来可以用程序画一下演化图 ###)



令两比特系统达到  $\omega_1 + \eta_1 = \omega_2$ ，并绘制  $|11\rangle - |20\rangle$  的 population 随时间变化图，第二个 SWAP 周期的极值点对应着  $|20\rangle$  态泄露<sup>2</sup> 最低的演化时间。这时需要考虑两个比特间的相对相位问题。

## (2) 确定相位为 $\pi$ 的点

让系统演化到该点，理论上系统终态为  $e^{i\phi_{11}}|11\rangle$ ， $\phi_{11}$  为  $|11\rangle$  在演化过程中积累的相位，但并不是  $\pi$ 。假设高能级泄露已经被降至最低，我们实现的门操作矩阵可以拆解为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_{01}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi_{11}} \end{pmatrix} = [P(\phi_{01}) \otimes P(\phi_{10})] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(\phi_{11}-\phi_{01}-\phi_{10})} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

确定  $\phi_{11} - \phi_{01} - \phi_{10} = \pi$  对应的脉冲，就可以构成 CZ 门。

## (3) 提取单比特相位

矩阵的前半部分为两个单比特相位门的张量积，可以用 virtual-Z 门 [见C.3] 来消除。

## (4) 计算保真度和态泄露

单比特相位校准后，脉冲有所变化，实际上的 CZ 门的保真度和泄露都会有所变化，此时要重新计算新的脉冲下，CZ 门的保真度和泄露，作为综合指标。[2] 中的 Ch.7 开头，讨论了 Tranmon 控制中的泄露问题。

## (5) 用局域优化算法优化控制参数

之前的流程已经把脉冲的参数空间缩小到一个很小的范围，可以利用 Nelder-Mead 等局域搜索算法重复以上步骤，快速找出保真度最高、泄露最低的脉冲。

---

<sup>2</sup>  $|20\rangle$  是主要的高能态泄露

## Chapter 3

# Transmon qubits 的 single-shot 读取方案原理

量子比特的读取，即探测比特的状态。从物理上来说，孤立系统的信息是不能被外界所知的。测量仪器必须与系统产生耦合，我们才可以通过研究‘仪器-系统相互作用’来确定待测系统的信息。这一点和比特控制是类似的。另外，量子比特的测量方式也讲究，自然的想法是，希望尽可能的不破坏比特本身的性质。

量子比特是一种极不稳定的系统，其与环境的耦合会造成比特退相干，而造成的退相干的因素统称作“噪声”。测量仪器当然是环境的一种，必然会给量子比特引入噪声。即使用“色散读取”的方式，并不直接测量比特本身，通过用一个谐振腔与量子比特耦合、测量该谐振腔的状态来反推比特的量子态，这个测量通道本身也让外界噪声进入比特，让比特的能量泄露。因此，伴随着测量过程，比特会经历退相干。这限制了完成一次读取操作的时间。虽然“色散读取”是一种量子非破坏性测量 (QND)，读取操作并不一定会破坏比特状态，所以必须赶在比特退相干之前完成读取操作。

读取的一个作用是，表征比特门实验的问题。

### 3.1 读取系统简介

超导量子比特是由约瑟夫森结为单元的，其本质上是量子化的电磁场。对超导比特的操作，无论控制或读取，都在利用电磁相互作用。读取系统的作用，本质上是电磁场的量子态信息转换为经典电路中的电信号。读取系统如图 [Fig.3.1]:

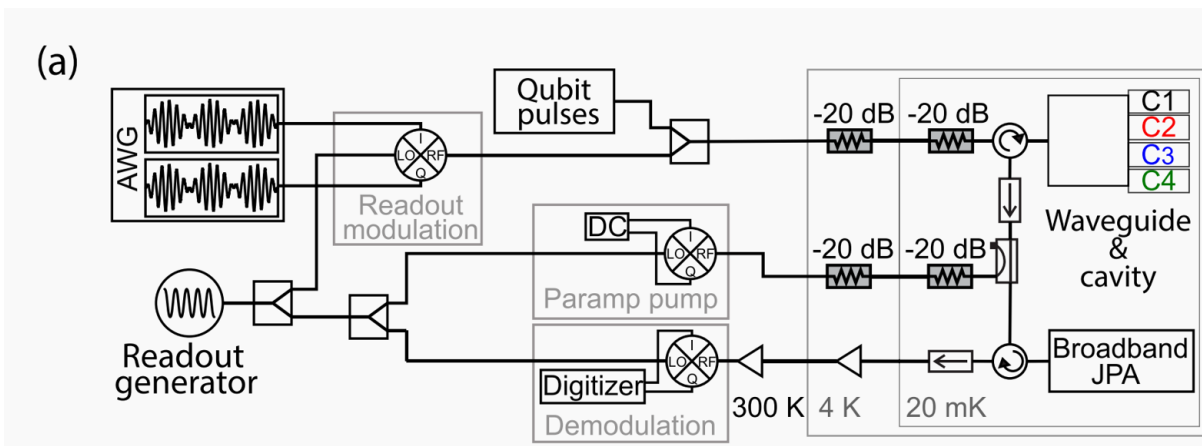


图 3.1: 读取系统

读取过程大致由以下几步组成:

- 读取信号输入：读取信号 (常称作 probe) 由左端的任意脉冲发生器，
- 数字化脉冲：读取信号在常温层进行 IQ 混频.
- 级联衰减：常温层的信号不能直接用于芯片，需要经过信号衰减才能输入低温层。
- 散射：信号到达量子芯片处，不直接影响比特，而是与比特上的读取谐振腔发生散射相互作用，信号的幅值和相位被改变。
- 级联放大：从量子芯片处返回的信号，经过量子参数放大器 (如果有) 和多级信号衰减器返回常温层。
- 解调：信号返回常温层后，经过数字采样，解析出信号的幅值和相位变化。

### 3.2 读取原理

上述步骤中除散射过程外，都是经典信号处理过程。而散射作用属于量子过程。谐振腔的散射模式会随量子比特的状态而改变，只要推算出比特是如何影响这个散射行为的，就可以分辨比特在不同的状态下的经典信号，从而反推比特的状态。

### 3.2.1 JC 模型

**JC 模型** [B.1] 描述二能级原子与多模谐振光场的相互作用，可以直接推广，拿来表示量子比特与读取谐振腔的耦合：

$$H/\hbar = \omega_r(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \frac{\omega_q}{2}\sigma_z + g(a^\dagger\sigma_- + a\sigma_+) \quad (3.1)$$

经过了 SW 变换 [A.3] 后的有效哈密顿量为：

$$H_{\text{eff}} = \frac{\hbar\omega'_{01}}{2}\sigma_z + (\hbar\omega'_r + \hbar\chi\sigma_z)a^\dagger a \quad (3.2)$$

上述哈密顿量仅考虑了二能级系统。其中对谐振腔造成的色散位移为

$$\chi = -\frac{g^2}{\Delta} = -\frac{g^2}{|\omega_q - \omega_r|} \quad (3.3)$$

对谐振腔进行读取操作，可以区分  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$ 。

**注：**实验中，我们开始其实不知道无耦合时的腔频  $\omega_r$  到底是多少。一种测量方法是，先让比特处于  $|0\rangle$  态，标定此时的腔频  $\omega_{r,|0\rangle} = \omega_r + \chi$ ；随后令比特处于  $|1\rangle$  态，再标定腔频  $\omega_{r,|1\rangle} = \omega_r - \chi$ ；最后计算得到真正的腔频  $\omega_r = (\omega_{r,|0\rangle} + \omega_{r,|1\rangle})/2$ ，以及色散位移  $\chi = (\omega_{r,|0\rangle} - \omega_{r,|1\rangle})/2$ 。也有直接测量的方式：“bare frequency 是可以测量的。实施方法是，向腔内注入巨量光子，这样腔光场和量子比特的量子相互作用就会解除，量子比特对腔的贡献消失，此时相当于仅有经典的腔存在。更简单的来说，上述测腔所使用的仪器，加大功率，就能测到 bare frequency 了。再进一步地，基于以上性质，如果测腔使用的仪器，在大功率下和低功率下，腔频理应有区别的，这是因为低功率下有来自比特的贡献。但如果大功率和低功率腔频一致，就可以判断，是比特坏了。”

### 3.2.2 考虑高能态影响的色散位移

一个粗糙的控制 Transmon 的想法是，尽量避免比特被激发到高能级，然后只处理子空间： $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  中的态。但如果拥有精确的控制技术，就可以将更高的能级当作  $|1\rangle$  来处理。比较常见的是，用高能级来辅助构造量子门操作，或是执行读取。

实际的 Transmon 型比特是多能级非线性谐振子，考虑更高能级的影响，要将 JC 模型拓展至多能级原子的情况。此时有一般的哈密顿量为 (在 RWA 下略去高频项)：

$$H/\hbar = \omega_r a^\dagger a + \sum_j \omega_j |j\rangle\langle j| + \sum_j g_{j,j+1}(|j+1\rangle\langle j| a + h.c.) \quad (3.4)$$

此时的 SW 变换变为多能级形式:

$$U = \exp \left[ \sum_j \frac{g_{j,j+1}}{\omega_{j,j+1} - \omega_r} (|j+1\rangle\langle j|a - h.c.) \right] \quad (3.5)$$

经过 SW 变换后的有效哈密顿量, 可以分辨出比特处于不同的态时, 对应的谐振腔能级偏移:

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}/\hbar = & \sum_j \omega_j |j\rangle\langle j| + \omega_r a^\dagger a + \sum_j \chi_{j,j+1} |j+1\rangle\langle j+1| - \chi_{01} a^\dagger a |0\rangle\langle 0| \\ & + \sum_{j=1} (\chi_{j-1,j} - \chi_{j,j+1}) a^\dagger a |j\rangle\langle j| + \left( \dots \sum_j \eta_i a a |j+2\rangle\langle j| + H.c. \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

上式最后一项代表的是双光子跃迁过程。在读取过程中, 如果读取功率不过高, 则只有单光子跃迁, 可以忽略该项。另外, 各能级造成的色散位移为:

$$\chi_{ij} = \frac{g_{ij}^2}{\omega_{ij} - \omega_r} \quad (3.7)$$

### 一般读取

按照通常思维, 比特的读取就是区分量子比特到底是  $|0\rangle$  还是  $|1\rangle$  态, 实际操作中也大多是这种思路。由于比特并没有激发到更高能级, 可以只考虑  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  的计算子空间。从有效哈密顿量的标记来看, 只有邻近能级造成的色散位移会对我们所考虑的子空间有影响, 对于最高为 1 能级, 只有 2 态会有影响, 其中  $|2\rangle$  对腔能级的影响为  $\chi_{12}$ 。因此, 截取上述哈密顿量中  $j=0,1$  的项:

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}/\hbar = & \omega_0 |0\rangle\langle 0| + \omega_1 |1\rangle\langle 1| + \chi_{01} |1\rangle\langle 1| \\ & + \omega_r a^\dagger a - \chi_{01} a^\dagger a |0\rangle\langle 0| + (\chi_{01} - \chi_{12}) a^\dagger a |1\rangle\langle 1| \end{aligned} \quad (3.8)$$

这里一般会根据二能级系统的习惯性写法将哈密顿量重新组合。

- 比特部分:  $\omega_0 |0\rangle\langle 0| + \omega_1 |1\rangle\langle 1| + \chi_{01} |1\rangle\langle 1| \longrightarrow -\frac{\omega_0 + \chi_{01}}{2} \sigma_z$

其中以二能级差形式来表示, 即令  $\omega_{01} = \omega_1 - \omega_0$

- 腔部分:  $[\omega_r - \chi_{01} |0\rangle\langle 0| + (\chi_{01} - \chi_{12}) |1\rangle\langle 1|] a^\dagger a$

$\omega_c$  为腔的特征频率, 即腔的各态间的能级差。上式说明, 在比特分别为  $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$  时, 可以观察到不同的能级差。 $|0\rangle$ :  $\omega_r - \chi_{01}$ , 而对应  $|1\rangle$ :  $\omega_r + \chi_{01} - \chi_{12}$ 。此处重新标定腔能级为  $\omega_r - \chi_{12}/2$ , 再定义有效色散位移为  $\chi = \chi_{01} - \chi_{12}/2$ 。对应比特各态的色散位移关系为:  $|0\rangle$ :  $\omega_r - \chi$ , 而对应  $|1\rangle$ :  $\omega_r + \chi$ 。

这样的能级移动，可以化简哈密顿量为二能级形式：

$$H_{\text{eff}}/\hbar = -\frac{\omega'_{01}}{2}\sigma_z + (\omega'_r + \chi\sigma_z)a^\dagger a \quad (3.9)$$

其中  $\omega'_{01} = \omega_{01} + \chi_{01}$ ,  $\omega'_r = \omega_r - \chi_{12}/2$ ,  $\chi = \chi_{01} - \chi_{12}/2$ 。另外，根据  $g_{ij}$  的表达式，可以推出不同能级下耦合强度的比例关系，比较简单。进而可以将色散位移  $\chi$  化简为如下形式

$$\chi = \chi_{01} - \frac{\chi_{12}}{2} = -\frac{g_{01}^2}{\Delta} \left( \frac{1}{1 + \Delta/\alpha} \right) \quad (3.10)$$

### 能谱分析

二能级的 JC 模型中的能级偏移比较好理解。而多能级 JC 模型中，腔和比特的能级偏移关系比较微妙，有必要专门讨论一下。二能级至多能级的色散位移对比图，见 [孔伟成毕业论文 p.32]。抓住两点特征即可：

- 裸腔频  $\omega_r$  不变：指的是腔不与任何其他系统耦合时的特征频率，是腔本身的特征，是个定值。
- 比特基态时的腔频  $\omega_{r,|0\rangle}$  不变：只有相邻能级的色散频移会互相影响，因此除了  $|1\rangle$  外，再高的能级都不会影响  $\omega_{r,|0\rangle}$ 。可以简单计算验证这一结论：

二能级：

$$\omega_{r,|0\rangle}^{(0,1)} = \omega_r - \chi_{01}$$

多能级：

$$\omega_{r,|0\rangle}^{(0,1,2)} = \omega'_r - \chi = \omega_r - \frac{\chi_{12}}{2} - (\chi_{01} - \frac{\chi_{12}}{2}) = \omega_r - \chi_{01} = \omega_{r,|0\rangle}^{(0,1)}$$

### $|2\rangle$ 态读取

如果实验条件所限，无法很好的区分  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  态。可以利用  $|2\rangle$  来提升读取精度：在读取操作之前，先将处于  $|1\rangle$  的比特激发到  $|2\rangle$ 。此时腔的色散位移有可能相比  $|1\rangle$  更大，实验仪器返回的结果的分辨率自然也相应变高。要实现上述过程，首先要设计好一个精确的脉冲波形进行激发。其次，要考虑处于  $|2\rangle$  时，腔的色散位移。此时除了  $|2\rangle$  本身造成的色散位移以外，还需要考虑  $|1\rangle$ 、 $|3\rangle$  造成的偏移，三者的效果之和，是为最终的有效色散位移。

考虑  $j=0,1,2$  的有效哈密顿量：

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}/\hbar = & \omega_0|0\rangle\langle 0| + \omega_1|1\rangle\langle 1| + \omega_2|2\rangle\langle 2| + \chi_{01}|1\rangle\langle 1| + \chi_{12}|2\rangle\langle 2| \\ & + \omega_r a^\dagger a - \chi_{01} a^\dagger a |0\rangle\langle 0| + (\chi_{01} - \chi_{12}) a^\dagger a |1\rangle\langle 1| + (\chi_{12} - \chi_{23}) a^\dagger a |2\rangle\langle 2| \end{aligned} \quad (3.11)$$

此时，如果以裸腔频  $\omega_r$  为基准，各态的系数就是对应的色散位移。即：

$$\chi^{(0)} = -\chi_{01}, \quad \chi^{(1)} = \chi_{01} - \chi_{12}, \quad \chi^{(2)} = \chi_{12} - \chi_{23}$$

也可以仿照二能级，仅考虑  $|0\rangle$  与  $|2\rangle$  的子空间。还可以仍然将腔频标定在  $\omega'_r = \omega_r - \chi_{12}/2$ 。上述哈密顿量改写为：

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}/\hbar = & \omega_0|0\rangle\langle 0| + \omega'_1|1\rangle\langle 1| + \omega'_2|2\rangle\langle 2| \\ & + \left( \omega'_r - \chi|0\rangle\langle 0| + \chi|1\rangle\langle 1| + \chi^{(2)}|2\rangle\langle 2| \right) a^\dagger a \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中各态对应的有效色散位移为：

$$\chi^{(0)} = -(\chi_{01} - \chi_{12}/2), \quad \chi^{(1)} = \chi_{01} - \chi_{12}/2, \quad \chi^{(2)} = \frac{3}{2}\chi_{12} - \chi_{23}$$

另外，参照之前对  $\chi$  的渐进表示，态  $|2\rangle$  对应的有效色散位移可以化简为：

$$\begin{aligned} \chi^{(2)} = & \frac{3g_{01}^2}{\omega_{01} - \omega_r} \left[ \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\omega_{01} - \omega_r}} - \frac{1}{1 + \frac{2\alpha}{\omega_{01} - \omega_r}} \right] \\ = & \frac{3}{2}\chi_{01} \left[ \frac{1}{1 + \alpha/\Delta} - \frac{1}{1 + 2\alpha/\Delta} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.3 读取模型构建及模拟

读取的简化模拟依照 (3.1 节) 中的读取流程，不过省略了级联衰减和放大的过程。于是从考虑一个读取脉冲入射到谐振腔开始。

#### 读取脉冲

读取脉冲是一个多频率合成的矩形波，理论包含了所有的频率成分。但实验上并不能合成完美的矩形波，只有近似的矩形波。其中只有一个频率成分会与腔发生相互作用，可以认为读取脉冲只包含一个频率，等效为正弦波： $\varepsilon_d(t) = A \cos(\omega_d t + \phi)$

#### 散射

随后腔与读取信号发生相互作用，返回一个信号： $\varepsilon'_d(t) = A' \cos(\omega_d t + \phi')$ 。随后的数字信号处理过程，参照 Engineer's guide [3] 的第 37~39 页有比较详细的数学推导。散射的具体物理模型如下述。

### 3.3.1 散射模型

散射模型的构建方式多样，可以用经验曲线拟合，也可以使用理论计算。此处采用输入输出理论构建一个简化的散射模型。

#### 输入输出理论

由输入输出理论<sup>1</sup>，计算单侧谐振腔的入射波和出射波的关系为：

$$a_{out}(\omega) = \frac{\frac{\gamma}{2} + i(\delta - \chi\sigma_z)}{\frac{\gamma}{2} - i(\delta - \chi\sigma_z)} a_{in}(\omega) \quad (3.14)$$

可探测到的腔外场为输入场及输出场的叠加：

$$a_{out} - a_{in} = \frac{2i(\delta - \chi\sigma_z)}{\frac{\gamma}{2} - i(\delta - \chi\sigma_z)} a_{in} \quad (3.15)$$

散射系数为

$$S_{21}(\omega) = \frac{2i(\delta - \chi\sigma_z)}{\frac{\gamma}{2} - i(\delta - \chi\sigma_z)} \quad (3.16)$$

#### 考虑 $|2\rangle$ 态的输入输出理论

参照哈密顿量，由于  $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$  几项都是线性的，所以色散位移也应该是线性的，再比较  $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$  几个的偏移位置、正负，可以得到，在 0-1 态读取的基础上，加入 2 态读取，对应的输入输出关系为：

$$a_{out}(\omega) = \frac{\gamma/2 + i(\delta + \chi^{(2)})}{\gamma/2 - i(\delta + \chi^{(2)})} a_{in}(\omega) \quad (3.17)$$

那么 2 态对应的  $S_{21}$  为：

$$S_{21}^{(2)}(\omega) = \frac{2i(\delta + \chi^{(2)})}{\frac{\gamma}{2} - i(\delta + \chi^{(2)})} \quad (3.18)$$

也可以将三个态合起来表示， $S_{21}$  为：

$$S_{21}(\omega) = \frac{2i(\delta - \chi|0\rangle\langle 0| + \chi|1\rangle\langle 1| + \chi^{(2)}|2\rangle\langle 2|)}{\frac{\gamma}{2} - i(\delta - \chi|0\rangle\langle 0| + \chi|1\rangle\langle 1| + \chi^{(2)}|2\rangle\langle 2|)} \quad (3.19)$$

## 3.4 single-shot 读取机制

### 脉冲序列参数优化方案

---

<sup>1</sup> 可以再参考这个的附录 A 修正一下 [4]



## 3.5 联合读取

## 3.6 读取过程对比特的影响

### 3.6.1 腔内动力学

动力学方程

### 3.6.2 腔外场

# Chapter 4

## 具体超导比特系统

### 4.1 两比特耦合电路

### 4.2 可调耦合器

### 4.3

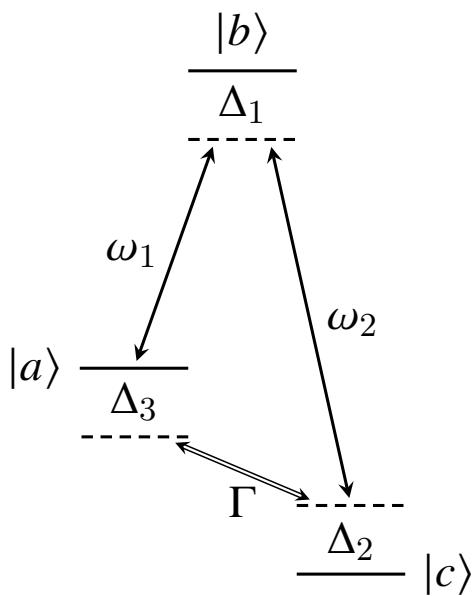


图 4.1: Transmon 实现比特门时的能级跃迁图

# Chapter 5

## 超导比特测控流程

【引子】如果以一个比较理想化的方式描述单比特操作：制备某个比特的初态为  $|1\rangle$ ，执行比特门操作  $X|1\rangle = |0\rangle$ 。这个理想过程很简单，但要保证它无误，就产生了一个复杂的单比特校准流程：

- 比特状态读取：无论初态还是末态，我们至少得有办法知道它的态，才可以谈别的
- 初态制备：要精确制备初态  $|1\rangle$ ，因此有了  $\pi$ -pulse 校准
- 比特门：能够实现比特门  $X$  (这和初态制备原理一致)
- 允许的操作时间：必须在比特退相干前完成门操作和读取

其实这就是 DiVincenzo 七大准则中的某几条。

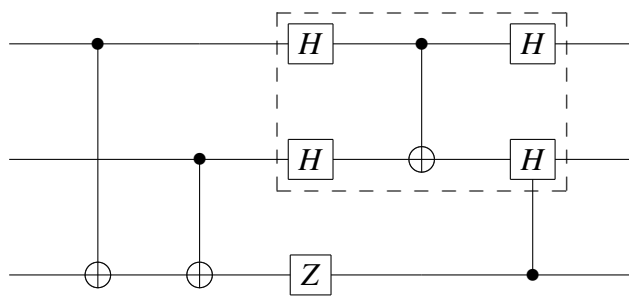
### 5.1 超导比特测控基本思路

现在有一个如图 [5.1] 的 transmon，我们有 XY 控制线，Z 控制线，读取腔 (都可以输入信号)。这三条线可以作为三个测控单元<sup>1</sup>，且宏观世界的我们只可以通过经典仪器操作这些东西。那么如何测量？我们具体要做的，就是合理设计脉冲时序图，用以实现不同的实验目的 (表征参数、实现比特门操作等)。对于一个超导比特芯片，需要表征的参数已经在第一章介绍完，这里再列一个表格总结一下：

#### 由需要表征的参数引出测控仪器 ####

---

<sup>1</sup> 抽象来说，只有这三种操作，则可在测控代码中都封装成类，作为所有实验的基本模块



这些参数是有递进关系的，所以不可能一次性表征完。因为量子比特的信息通过读取腔到达经典线路中，所以首先要表征出读取腔的参数。那么总思路是，从读取腔开始逐层往里测<sup>2</sup>。  
(#### 实验设计思路，如何操控结构之间互相测试 ####)

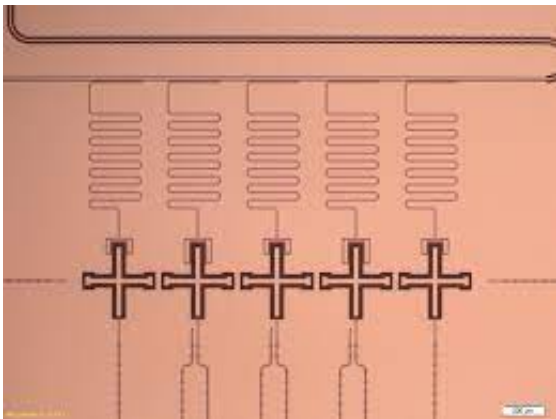


图 5.1: 六比特 Xmon 超导量子芯片结构图

结合超导比特测控系统以及超导芯片结构的图示：

<sup>2</sup> 明明只有读取腔和比特，为什么说逐层？在可调耦合结构中，耦合器比特没有读取腔，只能在其邻近比特被完全表征以后，通过串扰效应来表征参数

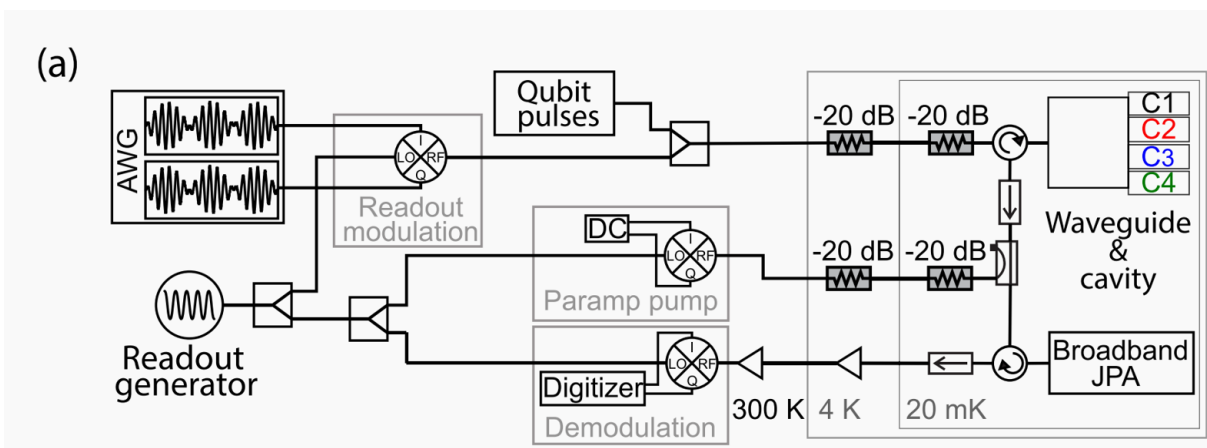


图 5.2: 读取系统

## 控制线介绍 DC Flux:

AC Flux:

## 5.2 单比特校准和表征

本节是在 Dr. Liangliang Guo & Dr. Peng Duan 的《超导比特测控与表征流程》的基础上修改而来。鄙人调整了原文的一些表述方式并且删改内容，意在分离原理阐述和操作阐述。

### 5.2.1 读取谐振腔的表征

首先需要测量读取腔的腔频  $\omega_r$ , 以及色散位移  $\chi$ , 这借助于矢量网络分析仪 (VNA), 它可以直接测到读取腔对于读取信号的响应, 即  $S_{21}(\omega)$  曲线。我们有两种方式测量腔的性质:

- 将比特分别置于  $|0\rangle, |1\rangle$  态，分别得到对应的响应，可以计算出有效色散位移  $\chi_{\text{eff}}$
- 先以极高功率的读取信号测量，此时腔可以认为是经典器件，这样腔对信号的响应就如同一个裸腔，则 VNA 可以直接得到裸腔频  $\omega_r$ 。随后再测量将比特置于  $|0\rangle$  下的  $S_{21}$  曲线。

# Chapter 6

## 超导比特系统优化问题总结

超导量子比特本身是一种缺陷很大的系统，除了可拓展性强、方便控制以外，和别的量子比特系统相比毫无优势。与经典测控仪器适配性强的这个特性，让我们可以比较方便地利用人类现存的仪器技术，直接应用于超导量子比特的控制系统，但这反过来给超导比特引入了巨量的噪声，也因此超导比特的相干性是最差的。而可拓展性强这个特性，并不能保证大规模超导芯片的质量。因为超导芯片与外界信息交换的通道，如控制线、读取线等，都同样是一种噪声引入通道，随着比特的增加，这些线也要增加，可以说稀释制冷机外面的一排排线就是很好的密集恐惧症治疗仪，当然最重要的是这么多噪声通道带来的退相干效应难以估计。此外，虽然大规模超导芯片易于制作，但比特间的耦合特征也极为复杂，这使得精确实现比特门很困难，原先一个简单哈密顿量可以构造出来的门，需要额外考虑诸多效应。

就在超导比特这些烦人特性的基础上，诞生了各种各样的超导比特测控方案。当然，超导比特是目前最接近工程化的量子信息处理器，在近几十年仍然有巨大的研究价值。以上的三类缺点，在世界上诸多顶级团队的努力面前，也不完全是洪水猛兽。那么怎样处理比特间的奇妙耦合？简而言之，或尝试消除多余的耦合，或反过来利用这些特性。

### 6.1 Transmon 的标定流程

粗略筛查，单比特及两比特门校准的流程见：[\[2\]](#)

根据这个步骤中的可能问题，套用理论分析

### 6.2 串扰 (crosstalk)

串扰的概念来自经典通信，通常指两条信号线之间的耦合现象。在超导量子比特中，通常指控制线之间的耦合，这会造成比特间交叉驱动，例如本应驱动比特 1 的 XY 控制线，在输入

控制电压时，也会驱动比特 2；但这个也是不可避免的。

须提一嘴，比特本身的相互耦合有时候也被称为 crosstalk，例如残余 ZZ 耦合在文献中通常也被称作 ZZ crosstalk，但它和控制线间的串扰的来源不同。

### 6.2.1 串扰表征

分别标定，同时标定，对比：simultaneous RB

## 6.3 残余 ZZ 耦合 (Residual ZZ interaction)

也常称作 ZZ 串扰。残余 leading to a very large static ZZ interaction of  $\nu_{ZZ} = 875$  kHz. Without any further mitigation of ZZ, this prevents high-fidelity simultaneous single qubit operation due to strongly state-dependent qubit frequencies.

## 6.4 可调耦合器

## 6.5

## 6.6 读取优化问题

## 6.7 Spectator error

## 6.8 线路校准

## 6.9 噪声

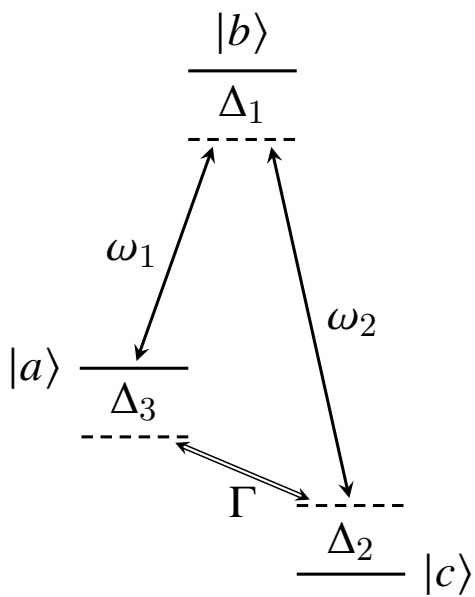


图 6.1: Transmon 实现比特门时的能级跃迁图



# 附录 A

## 正则变换

量子力学中，为了方便做近似，以及研究多体系统中某几个之间的有效相互作用，常常需要做正则变换，可以得出有效哈密顿量。如何理解变换前后的哈密顿量的等效性，这一点各种教科书里是几乎没有明确指出来。三大绘景之间的变换，系统含时演化，算符含时演化，给出三组同样简洁优美的表达式，只是分别以 S、H、I 标记而已。可是最后这些表达式能具体给我们什么？

哈密顿量等效具体是什么？作为时间平移算符的生成子，哈密顿量等效说明系统演化等效。那么系统演化的等效又可以给我们什么结论呢？在经典力学中，参考系的变换，并不改变物体间的相对速度，以及相对能量。量子力学中，我们处理的是原子级别的微观粒子，并不关心、也无法确定粒子的路径，我们更关心微观系统的量子态。所以，上面问题的答案是，能谱等效。不同频率参考系下，系统的能谱变化是相同的。

### A.1 绘景变换

封闭量子系统的演化遵照薛定谔方程，而薛定谔方程可以在三种不同绘景下表示出来（开放量子系统类似）。分别是：

- 薛定谔绘景：即原始薛定谔方程的绘景
- 海森堡绘景：令薛定谔方程中的含时项合并到算符中，让态保持不变，而让算符演化。
- 狄拉克绘景：也叫相互作用绘景，态和算符同时变化。

在实际问题中，哈密顿量常有这样的形式： $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$ 。为方便近似计算，通常采取相互作用绘景来描述这样的系统。薛定谔方程经过以下变换：

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} |\psi_S(t)\rangle, \quad \hat{H}_I = e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} V(t) e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}}$$

得到相互作用绘景下的类薛定谔方程：

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_I(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\psi_I(t)\rangle \quad (\text{A.1})$$

该式等价于用一个含时演化算符作用在系统的初态  $|\psi(0)\rangle$  上：

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle \quad (\text{A.2})$$

## A.2 RWA

当频率很高时，其总体效果远小于演化时间  $T$ ，即： $(\omega_q - \omega_r)^{-1} \ll T$ ，此时可以略去动力学方程中这样的高频项。做 RWA 之前，我们通常要先将  $H$  变换到在外部驱动的参考系，这有点类似于相互作用绘景。对于单比特，正则变换为： $U = \exp(-i\omega_d \sigma_z t / \hbar)$

考虑单比特受外部驱动的哈密顿量，其 Rotating frame 下的表达式为：

$$H = -\frac{\Delta_d}{2} + \frac{A}{2} \sigma_x \quad (\text{A.3})$$

## A.3 SW 变换

哈密顿量可以分成两部分： $H = H_0 + H_I$ 。其中  $H_0$  代表了各个子系统的自身哈密顿量，在矩阵表示中全为对角项； $H_I$  代表相互作用项，在矩阵表示中含有非对角项。SW 变换下保持  $H_0$  不变，而将  $H_I$  中的项分块处理，将子系统之间完全或部分解耦。如果是两体系统，相互作用项会消失，效果体现在各个子系统的项中，体现为能级/频率移动 (frequency shift)，频移后的子系统状态统称为 dressed state。在多体系统中，某个子系统的项会消失，但它与其它子系统的相互作用效果会留下来，体现在其余子系统的能级移动中。

### A.3.1 算符构造：待定系数法

待定系数法构造 SW 变换的算符生成子的方法，使用，被总结在 [5]。

- 求算符  $\eta$ ，其定义为： $\eta = [H_0, H_I]$
- 替换  $\eta$  的表达式中的系数，定义为  $S$ ，此时有一组待定系数  $A, B, \dots$
- 利用 SW 变换的条件： $[S, H_0] = -H_I$ ，解出上述系数

### A.3.2 SW 变换例子：JC 模型

经过 RWA 后的 JC 模型哈密顿量：

$$H = \omega_r a^\dagger a - \frac{\omega_q}{2} \sigma_z + g(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) \quad (\text{A.4})$$

计算  $\eta$  为：

$$\eta = \left[ \omega_r a^\dagger a - \frac{\omega_q}{2} \sigma_z, g(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) \right] = g(\omega_r - \omega_q) a^\dagger \sigma_- - g(\omega_r - \omega_q) a \sigma_+ \quad (\text{A.5})$$

随后定义： $S = A a^\dagger \sigma_- + B a \sigma_+$ 。再求解：

$$\left[ A a^\dagger \sigma_- + B a \sigma_+, \omega_r a^\dagger a - \frac{\omega_q}{2} \sigma_z \right] = -g(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+)$$

得到系数的解：

$$-A(\omega_r - \omega_q) = -g \quad (\text{A.6})$$

$$B(\omega_r - \omega_q) = -g \quad (\text{A.7})$$

所以最后  $S = \frac{g}{\Delta}(a^\dagger \sigma_- - a \sigma_+)$ 。则 JC 模型在 SW 变换下的一阶有效哈密顿量为：

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}^{(1)} &= H_0 + \frac{1}{2} [S, H_I] \\ &= \hbar(\omega_r - \chi \sigma_z) a^\dagger a - \frac{\hbar}{2} (\omega_q + \chi) \sigma_z \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

可以看出各个子系统能级移动。最后，要注意 SW 变换适用于系统间相互作用  $g$  不太强时。

### A.3.3 SW 变换例子：残留 ZZ 耦合

带有驱动的系统如何进行 SW 变换？只需要加上驱动哈密顿量经 SW 变换的项即可，见 ref

# 附录 B

## cQED

cQED 既指腔量子电动力学，也指电路量子电动力学。cavity-QED 描述了原子与谐振腔中光场的相互作用。由超导量子比特由电路构成，其与谐振腔的耦合，就类似于原子的电偶极矩与电磁场的耦合。因此，cavity-QED 的理论就可以被用于处理超导量子比特中的量子信息和量子光学问题。而 circuit-QED 就是这样一种基于 cavity-QED 原理的超导量子比特架构。

### B.1 Jaynes-Cumming 模型

完整的 JC 模型推导参考 [6] 的 Ch.6。Cavity-QED 中最简单的也是最有价值的是对单个二能级原子与单模光场相互作用的模型，称作 Jaynes-Cumming Model(JC model)。在 J-C 模型中，原子的两个能级分别记为基态  $|g\rangle$  与激发态  $|e\rangle$ ；相应地，单模光场也被量子化为 Fock 态  $|n\rangle$ ，其中  $n$  代表光子数， $\hat{a}^\dagger$  及  $\hat{a}$  为光子的创生及湮没算符。假定原子从基态  $|g\rangle$  到激发态  $|e\rangle$  的能级跃迁频率为  $\omega_A$ ，从激发态  $|e\rangle$  到基态  $|g\rangle$  的能量弛豫速率为  $\Gamma$ ；光场被束缚在光腔中，光场的能级频率为  $\omega_r$ ，光子离开光腔的逃逸速率（或者称光子的耗散速率）为  $\kappa$ ；原子与光子的耦合强度为  $g$ ，J-C 模型可以用图 [2.1.1] 形象地描述。

在理想情况下，忽略原子的能量弛豫速率、光子的退相干速率以及外加的作用，J-C 模型对应的哈密顿量形式为：

$$H = \hbar\omega_r(a^\dagger a + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z + \hbar g(a - a^\dagger)(\sigma_+ - \sigma_-) \quad (\text{B.1})$$

这三项分别代表光场、二能级原子系统以及相互作用的哈密顿量。单模光场是一个谐振子，而二能级系统由一个 Pauli-z 算符描述。相互作用哈密顿量描述的是，将原子当成一个电偶极矩计算与光场之间的相互作用，由式  $-\vec{d} \cdot \vec{E}$  推导得到。若将该项展开为 4 项，则有两项为能量保守项 ( $a\sigma_+$  与  $a^\dagger\sigma_-$ )，两项为能量非保守项 ( $a\sigma_-$  与  $a^\dagger\sigma_+$ )。能量保守项代表的物理过程是光子

在光场与原子之间的循环转化：只要原子的能级跃迁频率与光场频率相等，原子可以吸收一个微波光子并从低能态跃迁到更高能级的激发态；反过来，原子从高能态跃迁到低能态时恰好可以产生一个微波光子。这个循环转化的过程不需要借助外界作用即可自发完成。

而能量的非保守项，表示的则是原子与光场同时失去或获得能量，如果不引入外界作用项，这样的物理过程发生的概率极低，完全可以忽略。此外，在外界作用强度不大时，也可以忽略它们：

\*\*\*\*\* 哈密顿量和解不匹配，要修正注意

$$H = \hbar\omega_r(a^\dagger a + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z + \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) = H_0 + H_I \quad (\text{B.2})$$

RWA 适用的 J-C 模型有两个特点：

- $\hbar\omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z$  的本征态构成一个正交完备集合。以这个集合的元素为基底， $H$  的本征态均可以用  $H_0$  本征态的线性组合表示。
- RWA 下，光场与原子交换光子，但总激发数守恒。因此子空间  $\mathcal{N} = \{|n\rangle|e\rangle, |n+1\rangle|g\rangle\}$  构成封闭空间。将哈密顿量的矩阵形式，可以很直观的看出这个特征

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \begin{pmatrix} \omega_r & g \\ g & \omega_r + \Delta \end{pmatrix} & & & & \\ & & \begin{pmatrix} 2\omega_r & \sqrt{2}g \\ \sqrt{2}g & 2\omega_r + \Delta \end{pmatrix} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \begin{pmatrix} n\omega_r & \sqrt{n}g \\ \sqrt{n}g & n\omega_r + \Delta \end{pmatrix} & \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

每个子空间  $\mathcal{N}$  中，对应的哈密顿量为：

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} \omega_r & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & n\omega_r + \Delta \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

能量本征值为：

$$E_{\pm,n} = \frac{\hbar}{2}((n-1)\omega_n + \omega_A \pm \sqrt{4g^2n + \Delta^2}) \quad (\text{B.5})$$

## B.2 Dressed State 表象

## B.3 Rabi Oscillation

[7] Rabi 振荡指的是，一个比特 ( $\omega_q$ ) 在外部驱动 (幅值  $A$ ，频率  $\omega_d$ ) 下的振荡，其态演化的特征由这三个量共同决定。考虑一个简单的单比特驱动：

$$H = -\frac{\omega_q}{2}\sigma_z + A \cos(\omega_d t)\sigma_x \quad (\text{B.6})$$

其中  $A$  由外部磁场强度和其与比特的耦合决定。假设比特的初态  $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ ，则在  $t$  时处于  $|1\rangle$  的概率为：

$$P_1(t) = \frac{A^2}{\Omega_R^2} \sin^2(\Omega_R t) \quad (\text{B.7})$$

## B.4 Ramsey Fringe

## 附录 C

# 量子门操作

我以下写的都是废话和垃圾，请直接看燕飞的论文 [3] 18-22 页。

### C.1 通用量子门

[Def: 通用量子门] 一组能够以任意精度构造出任意幺正变换的量子门的集合。

通用量子门是通用量子计算的基础，其构造不止一种，相互之间等价，最经典的例子是：

$$\{\text{所有单比特门, CNOT 门}\}$$

此外，CNOT 门可以分解为两个 Hadmard 门和 cZ 门： $\text{CNOT} = (I \otimes H) \text{cZ} (I \otimes H)$ 。因此这一组也是通用量子门：

$$\{\text{所有单比特门, cZ 门}\}$$

再由 DiVincenzo 的七大量子计算准则，实现 ‘任意单比特门 + control-Phase 双比特门’，就有了通用量子计算的基本条件。

### C.2 常见比特门

量子门在数学上，是确定的矩阵形式。不过实验上要实现这些不容易。

#### C.2.1 单比特门

- 三个 Pauli 算符以及 Identity 操作，是最基本的单比特门：

$$\begin{aligned}
X &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
Y &= -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
Z &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{C.1}$$

- 基底变换门：Hadmard gate。量子线路中最重要的单比特门，H 让比特在  $\{|+z\rangle, |-z\rangle\}$  和  $\{|+x\rangle, |-x\rangle\}$  之间来回变换，可以配合纠缠门完成反直觉又可行的量子操作。

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

- 单比特相位门：调整比特之间的局部相位。

$$P(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

- 单比特旋转门：让比特的方向绕 Bloch 空间中的某个坐标轴旋转。记住一个方便的结论： $e^{i\theta A} = \cos(\theta)I + i\sin(\theta)A$ ，得到以下旋转门：

$$\begin{aligned}
R_x(\theta) &= e^{-i\frac{\theta}{2}X} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}X = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
R_y(\theta) &= e^{-i\frac{\theta}{2}Y} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}Y = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
R_z(\theta) &= e^{-i\frac{\theta}{2}Z} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}Z = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{C.4}$$

注：旋转门在单比特控制中十分重要，绕各个坐标轴的操作组成了 Clifford 群，基于此可以实现 RB。超导比特控制中常常提到的  $\pi$ -pulse、 $\pi/2$ -pulse 就是相对于旋转门操作说的。例如， $Y/2$  门就是利用  $\pi/2$ -pulse 实现的  $R_y(\frac{\pi}{2})$  门，且它对于  $|0\rangle$  的作用等效于 Hadmard 门。



### C.2.2 单比特门的实现

在超导量子计算中，最重要的就是  $\pi$ -pulse 和  $\frac{\pi}{2}$ -pulse 的实现。除此以外，调控中常常还要考虑比特间的相对相位影响，因此各个比特在自身演化过程中带来的相位累积也需要考虑到。

### C.2.3 双比特门

- controlled-Z 门：实验上注重实现的双比特门。

$$cZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (C.5)$$

- iSWAP 门：实验上注重实现的双比特门。

$$i\text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C.6)$$

## C.3 Bloch 球 & 比特门拆解技巧

量子门在数学上，是确定的矩阵形式。不过实验上要实现这些不容易，且常常不符合数学式的理想预期，通常只能使用一些等效方式。

任意单比特的纯态可以表示为：

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (C.7)$$

这样一个任意态可以在三维坐标系中表示出来： $|0\rangle$  代表  $z$  轴正半轴， $|1\rangle$  代表  $z$  轴正半轴， $|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  对应  $x$  轴正半轴， $|-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$  对应  $x$  轴负半轴。（图解参照 [1] 的 2.1）。

$(r = 1, \theta, \phi)$  也直接对应球坐标。

注：脉冲设置如何通过层层信号处理，到达比特，使得比特相位按我们的意思翻转，见 [8] 的 D.4.2。特定的旋转门操作可以构成 Clifford 群中的元素，是实现 RB 的基础。

# 附录 D

## 开放量子系统

### D.1 混合态

### D.2 环境 (Environment)

### D.3 开放量子系统

标注一些读取问题中需要用到的开放系统知识。

大多数超导系统的问题用最简单的 Lindblad-form Master Equation 描述即可，如果做超导比特研究且想要深入了解开放量子系统理论，建议参照以下顺序：

一个开放量子系统的简介：Quantum Decoherence

量子光学中也有部分篇幅介绍：Scully, Walls

cQED 架构的超导比特读取理论：Schoelkopf 组的几篇经典论文

比较详细的教学笔记：Lecture notes on open quantum system

量子测控的经典书籍：Quantum Measurement and Control

数学语言比较规范的开放量子系统理论：Open Quantum Systems: An Introduction

正经的开放量子系统教科书，从随机过程开始讲：The theory of open quantum system

最硬核的书：Quantum Dissipative System [9]

## 附录 E

# 量子门标定

### E.1 保真度

保真度衡量两个算符之间的相似度，既可以描述量子态，也可以描述量子过程。对于两个量子态：

$$\mathcal{F}(\rho, \sigma) = \text{Tr} \sqrt{\rho^{\frac{1}{2}} \sigma \rho^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{E.1})$$

考虑量子过程时，一般用  $\mathcal{E}$  指代实际量子过程，以  $\mathcal{U}$  指代理想的量子门操作，同样的初态下，两者之间的保真度为：

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{U}(\rho)) = \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\mathcal{E}(\rho)} \mathcal{U}(\rho) \sqrt{\mathcal{E}(\rho)}} \quad (\text{E.2})$$

一般制备的初态会是纯态， $\rho_{in} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ，上式化简为：

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{U}(\rho)) = \text{Tr}[\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) \mathcal{U}(|\psi\rangle\langle\psi|)] \quad (\text{E.3})$$

但仅研究一个初态不够，门保真度考虑其所属的  $\mathcal{H}$  内的所有可能的初态更合理，定义门保真度 ( $F_g$ ) 为：

$$F_g = \int d\psi \langle\psi| U^\dagger \mathcal{E}(\psi) U |\psi\rangle \quad (\text{E.4})$$

另外，如果只关注算符  $\mathcal{E}$  及  $\mathcal{U}$  本身，可以直接定义过程保真度  $F_p$ ：

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{U}) = \text{Tr}(\mathcal{E} \mathcal{U}) / (\text{Tr}(\mathcal{E}) \text{Tr}(\mathcal{U})) \quad (\text{E.5})$$

门保真度与过程保真度之间能够通过一个与希尔伯特空间维度  $d = N^2$  相关的公式联系起来：

$$F_g = \frac{1 + d F_p}{1 + d} \quad (\text{E.6})$$

## E.2 量子层析

### E.2.1 量子态层析 (QST)

任意单比特的密度矩阵, 都能以 Pauli 算符 ( $I, X, Y, Z$ ) 为基底展开, 其中  $I$  分量是定值, 只有三个未知系数。利用这个原理, 如果制备多个相同量子比特, 并分别以  $X, Y, Z$  各自的本征态为基底, 进行多次测量得到展开系数, 可以反向构建该比特的密度矩阵。此方法称作量子态层析 (QSP), 推广至多比特系统同样适用。不过 QSP 不是重点要研究的。

### E.2.2 量子过程层析 (QPT)

QPT 是基于 QST 的一套 protocol, 用于测量量子操作对应的算符。按照 Kraus 表示, 一个量子系统经过一个量子过程  $\mathcal{E}$  后, 系统状态由  $\rho_{in}$  变为:

$$\rho_{out} = \mathcal{E}(\rho_{in}) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger = \sum_{mn} \chi_{mn} \tilde{E}_m \rho \tilde{E}_n^\dagger \quad (\text{E.7})$$

其中  $\chi_{mn}$  是 Kraus 算符  $\{E_i\}$  到一组正交基底  $\{\tilde{E}_m\}$  的变换。这一步实际上是将结果展开至一个固定的正交基, 方便不同结果之间的比较, 其中  $\chi$  是利用 QPT 计算保真度的关键。只要计算出理想比特门与实际量子过程分别对应的  $\chi$ , 再通过公式 [E.5] 即可计算出  $F_p$ 。

假定 QSP 能够保证态测量的准确性<sup>1</sup>, 即初态  $\rho_{in}$  的制备与末态  $\rho_{out}$  的测量都足够精确, 在此基础上可以测量量子过程。双比特门的 QPT 步骤简单如下:

- 制备初态, 每个比特的初态都是如下一组线性无关态之一  $\{|0\rangle, |1\rangle, \frac{|0\rangle+i|1\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle-i|1\rangle}{\sqrt{2}}\}$ 。这是一组常用的, 选择不唯一。对于  $N$  比特系统, 至少需要制备  $4^N$  个初态, 对于双比特系统, 为 16 个初态。
- 量子过程  $\mathcal{E}$  作用在每个初态上。得到 16 个结果。
- 利用这 16 对初末态, 根据式 [E.7] 计算  $\chi$ 。此时实验得到的  $\chi_e$  不一定是厄米的, 也不一定是 positive and trace-preserving ( $\sum_{mn} \chi_{mn} \hat{A}_n^\dagger \hat{A}_m = I$ )。其并不具有物理意义。修正的方法为, 求一个它的一个有物理意义的近似矩阵  $\chi_p$ 。
- 对于理想量子门  $\mathcal{U}$ , 计算出对应的  $\chi_i$ , 无需修正。之后由两个  $\chi$  矩阵计算过程保真度, 得到结果:

$$F_p = \text{Tr}(\chi_i \chi_p) \quad (\text{E.8})$$

<sup>1</sup> 实验中, 我们首先用 QST 标定一种初态制备技术, 当这种技术制备的初态小于一定的错误率, 如 0.01%, 就认为这种制备技术足够精确, 以后的初态制备无需再一直用 QST 标定

### E.2.3 $\chi_e$ 的修正

一个选择是求  $\chi_e$  的最小二乘近似, 并加上约束条件:  $\sum_{mn} \chi_{mn} \hat{E}_n^\dagger \hat{E}_m = I$ 。这时可以定义一个函数:

$$f(\vec{t}) = \sum_{a,b=1}^{d^2} \left[ m_{ab} - \sum_{m,n=0}^{d^2-1} \tilde{\chi}_{mn} \text{Tr} [M_b E_m |\phi_a\rangle \langle \phi_a| E_n^\dagger] \right]^2 + \lambda \left[ \sum_{m,n,k=0}^{d^2-1} \tilde{\chi}_{mn} \text{Tr}(E_n E_k E_m) - \delta_{k,0} \right] \quad (\text{E.9})$$

第一项代表最小二乘的拟合, 第二项代表约束条件。求  $f(\vec{t})$  的最小值, 对应的  $\chi_{mn}$  即为期望的  $\chi_p$ , 既是  $\chi_e$  的最优近似也符合约束条件。

**注:** 对于双比特门情形,  $d=4$ 。向量  $\vec{t}$  表示  $\tilde{\chi}_{mn}$ 。Tr 是求迹运算, 在 qutip 里有内置函数实现。 $|\psi_a\rangle$  是上述那组线性无关态张量积组合。 $E_{mn}$  是 Pauli 算符的张量积组合。量子态与算符的运算 qutip 也有内置。

## E.3 Randomized Benchmarking(RB)

直接参考 [2] 的第六章即可。初步理解概念只看前几节也可以。

## 附录 F

# 信号与系统基础

### F.1 模拟信号和数字信号

### F.2 微波

如何入门微波工程？

如果物理基础好的话，例如电磁学 + 电动力学 + 量子力学学得还可以。入门微波工程不是很难的。

## 附录 G

### 常用参考资料

#### G.1 数字信号

IQ 混频: Fast, Accurate State Measurement in Superconducting Qubits, 附录 C [\[8\]](#)

#### G.2 微波

# 附录 H

## 专有名词

### H.1 仪器

bias: 原意为偏离，通常指偏置电流，也指磁通量的偏置 (flux bias)，在超导比特中，指 Z 控制线上的电压。

microwave drive: 微波驱动，通常指 XY 控制线的驱动项。

bit spectroscopy: 比特能谱或频谱。

repulsion

### H.2 微波



## 参考文献

- [1] Sergey Danilin. *Experiments with a transmon artificial atom - state manipulation and detection of magnetic fields*. Doctoral thesis, School of Science, 2018.
- [2] Zijun Chen. Metrology of quantum control and measurement in superconducting qubits. 2018.
- [3] P. Krantz, M. Kjaergaard, F. Yan, T. P. Orlando, S. Gustavsson, and W. D. Oliver. A quantum engineer's guide to superconducting qubits. *Applied Physics Reviews*, 6(2):021318, Jun 2019.
- [4] Adam P. Sears. Extending coherence in superconducting qubits: From microseconds to milliseconds. 2013.
- [5] Rukhsan Ul Haq and Keshav Singh. A systematic method for schrieffer-wolff transformation and its generalizations, 2020.
- [6] Youngkyu Sung, Leon Ding, Jochen Braumüller, Antti Vepsäläinen, Bharath Kannan, Morten Kjaergaard, Ami Greene, Gabriel O. Samach, Chris McNally, David Kim, Alexander Melville, Bethany M. Niedzielski, Mollie E. Schwartz, Jonilyn L. Yoder, Terry P. Orlando, Simon Gustavsson, and William D. Oliver. Realization of high-fidelity cz and zz-free iswap gates with a tunable coupler, 2020.
- [7] Mahdi Naghiloo. Introduction to experimental quantum measurement with superconducting qubits, 2019.
- [8] Daniel Thomas Sank. *Fast, Accurate State Measurement in Superconducting Qubits*. PhD thesis, University of California, Santa Barbara, January 2014.
- [9] G.J. Milburn. Quantum dissipative systems (fourth edition), by ulrich weiss. *Contemporary Physics vol. 55 iss. 1*, 55, jan 2014.