Calcul matriciel et applications linéaires

Institut Denis Poisson

February 9, 2024

Définition (Matrices)

On note $M(m, n, \mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices à* m *lignes et* n *colonnes à coefficients réels :*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}.$$

Matrices

Définition (Matrices)

On note $M(m,n,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}.$$

Deux matrices $A, B \in M(m,n,\mathbb{R})$ sont égales si tous leur coefficients coïncident : $A_{ij} = B_{ij}\ \forall i, j$.

Matrices

Définition (Matrices)

On note $M(m, n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

Deux matrices $A, B \in M(m, n, \mathbb{R})$ sont égales si tous leur coefficients coïncident : $A_{ij} = B_{ij}\ \forall i, j$.
La matrice transposée de A notée A^T est la matrice $A^T \in M(n, m, \mathbb{R})$ définie par $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}\ \forall 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$.

Matrices

Définition (Matrices)

On note $M(m, n, \mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices à* m *lignes et* n *colonnes à coefficients réels :*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

Deux matrices $A, B \in M(m, n, \mathbb{R})$ *sont égales si tous leur coefficients coïncident :* $A_{ij} = B_{ij}\ \forall i, j$.
La matrice transposée de A *notée* A^T *est la matrice* $A^T \in M(n, m, \mathbb{R})$ *définie par* $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}\ \forall 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$. *Si* $m = n$ *on note aussi* $M(m, n, \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ *et on parle de "matrice carrée"* $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. *Si* $\underline{A \text{ est carrée et } A^T = A}$ *alors* A *est dite symétrique.*

Exemples

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in M(2, 3, \mathbb{R}) \implies A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \in M(3, 2, \mathbb{R}).$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \implies B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix};$$

donc B est carrée ($B \in M_2(\mathbb{R})$) mais elle n'est pas symétrique.

Opérations sur les matrices

Définition (Somme de matrices de même taille)

Soit $A, B \in M(m, n, \mathbb{R})$. *La somme de* A *et* B, *notée* $A + B$ *est la matrice de* $M(m, n, \mathbb{R})$ *définie par :*

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \qquad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

La *matrice nulle* *est la matrice* 0 *dont les entrées sont toutes* 0. *La* *matrice opposée* *de* A *notée* $-A$ *est la matrice de* $M(m, n, \mathbb{R})$ *dont les entrées sont les opposées de celles de* A *:*

$$(-A)_{ij} = -(A)_{ij} \qquad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Proposition (Propriétés de la somme de matrices)

Si $A, B, C \in M(m, n, \mathbb{R})$ *on a :*

1. $A + B = B + A \in M(m, n, \mathbb{R})$ *(commutativité de la somme),*
2. $A + 0 = A$ *et* $A + (-A) = 0 \in M(m, n, \mathbb{R})$ *(élément neutre),*
3. $(A + B) + C = A + (B + C) \in M(m, n, \mathbb{R})$ *(associativité).*

Exemples

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$A + B$$

Exemples

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$A + B$ *n'est pas défini !*

Exemples

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$A + B$ *n'est pas défini !*

$$A + C$$

Exemples

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$A + B$ *n'est pas défini !*

$$A + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Exemples

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$A + B$ *n'est pas défini !*

$$A + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$B + C$

Exemples

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$A + B$ *n'est pas défini !*

$$A + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$B + C$ *n'est pas défini !*

Exemples

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$A + B$ *n'est pas défini !*

$$A + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$B + C$ *n'est pas défini !*

$$A - C$$

Exemples

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$A + B$ *n'est pas défini !*

$$A + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$B + C$ *n'est pas défini !*

$$A - C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 8 & 17 \end{pmatrix}.$$

Test

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. *Alors* $A + B$ *est:*

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 11 \end{pmatrix}$,
3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$,
4. *n'est pas défini,*
5. *aucune des précédentes.*

Opérations sur les matrices

Définition (Produit d'une matrice par un scalaire)

Soit $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice $\lambda A \in M(m, n, \mathbb{R})$ est celle dont les entrées sont celles de A multipliées par λ:

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda (A)_{ij} \qquad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Proposition (Propriétés du produit par scalaire)

Si $A, B, C \in M(m, n, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a :

1. $1A = A$.
2. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \in M(m, n, \mathbb{R})$.
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \in M(m, n, \mathbb{R})$.
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Test

Exercice

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Alors* $A - 2B =$

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$,
3. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$,
4. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
5. *aucune des précédentes.*

$M(m, n, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel

Les propriétés de la somme de matrices et du produit par scalaire se résument par le résultat suivant :

Théorème

$M(m, n, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.

Remarque

Soit E_{ij} la matrice élémentaire dont les entrées sont 0 sauf l'entrée à la ligne i et colonne j qui est 1.
Alors on peut vérifier que la famille $\{E_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1, \leq j \leq n\}$ est libre et génératrice pour $M(m, n; \mathbb{R})$, donc une base.
On a alors $\underline{\dim(M(m, n, \mathbb{R})) = \qquad}$.

$M(m, n, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel

Les propriétés de la somme de matrices et du produit par scalaire se résument par le résultat suivant :

Théorème

$M(m, n, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.

Remarque

Soit E_{ij} la matrice élémentaire dont les entrées sont 0 sauf l'entrée à la ligne i et colonne j qui est 1.
Alors on peut vérifier que la famille $\{E_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1, \leq j \leq n\}$ est libre et génératrice pour $M(m, n; \mathbb{R})$, donc une base.
On a alors $\underline{\dim(M(m, n, \mathbb{R})) = mn}$.

Produit de matrices

Définition (Produit de matrices)

Soit $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ *et* $B \in M(n, \ell, \mathbb{R})$. *Alors on peut définir une matrice notée* $AB \in M(m, \ell, \mathbb{R})$ *dont le* $(ij)^{ème}$ *coefficient est :*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

Produit de matrices

Définition (Produit de matrices)

Soit $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ et $B \in M(n, \ell, \mathbb{R})$. Alors on peut définir une matrice notée $AB \in M(m, \ell, \mathbb{R})$ dont le $(ij)^{\text{ème}}$ coefficient est :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

ATTENTION: on ne peut pas multiplier deux matrices si le nombre de colonnes de la première n'est pas égal au nombre de lignes de la deuxième.

Produit de matrices

Définition (Produit de matrices)

Soit $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ *et* $B \in M(n, \ell, \mathbb{R})$*. Alors on peut définir une matrice notée* $AB \in M(m, \ell, \mathbb{R})$ *dont le* $(ij)^{\text{ème}}$ *coefficient est :*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

ATTENTION: on ne peut pas multiplier deux matrices si le nombre de colonnes de la première n'est pas égal au nombre de lignes de la deuxième.

Exemple

Si $A \in M(2, 3, \mathbb{R})$, $B \in M(4, 2, \mathbb{R})$ *et* $C \in M(3, 4, \mathbb{R})$*, alors:*

1. AB *n'est pas défini, mais* $BA \in M(4, 3, \mathbb{R})$*.*
2. $AC \in M(2, 4, \mathbb{R})$*, mais* CA *n'est pas défini.*
3. BC *n'est pas défini, mais* $CB \in M(3, 2, \mathbb{R})$*.*

Produit de matrices

Définition (Produit de matrices)

Soit $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ *et* $B \in M(n, \ell, \mathbb{R})$. *Alors on peut définir une matrice notée* $AB \in M(m, \ell, \mathbb{R})$ *dont le* $(ij)^{ème}$ *coefficient est :*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

ATTENTION: on ne peut pas multiplier deux matrices si le nombre de colonnes de la première n'est pas égal au nombre de lignes de la deuxième.

Remarque

Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *alors* $AB \in M_n(\mathbb{R})$ *et aussi* $BA \in M_n(\mathbb{R})$.

Un exemple

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(AB)_{12} = \sum_{k=1}^{3} A_{1k} B_{k2} =$$

Un exemple

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(AB)_{12} = \sum_{k=1}^{3} A_{1k} B_{k2} = A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} + A_{13} B_{32} = 0+2+2 = 4,$$

Un exemple

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(AB)_{12} = \sum_{k=1}^{3} A_{1k} B_{k2} = A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} + A_{13} B_{32} = 0 + 2 + 2 = 4,$$

$$(AB)_{11} = \sum_{k=1}^{3} A_{1k} B_{k1} =$$

Un exemple

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(AB)_{12} = \sum_{k=1}^{3} A_{1k} B_{k2} = A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} + A_{13} B_{32} = 0+2+2 = 4,$$

$$(AB)_{11} = \sum_{k=1}^{3} A_{1k} B_{k1} = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} + A_{13} B_{31} = 3+5+0 = 8,$$

Un exemple

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(AB)_{12} = \sum_{k=1}^{3} A_{1k} B_{k2} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} = 0+2+2 = 4,$$

$$(AB)_{11} = \sum_{k=1}^{3} A_{1k} B_{k1} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} = 3+5+0 = 8,$$

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Test

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $AB =$

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
5. *aucune des précédentes.*

Propriétés du produit de matrices

Proposition

Soit $A \in M(m, n, \mathbb{R})$, $B, B' \in M(n, \ell, \mathbb{R})$, $C \in M(\ell, p, \mathbb{R})$. *Alors :*

1. $A(BC) = (AB)C$ *(associativité).*
2. $A(B + B') = AB + AB'$ et $(B + B')C = BC + B'C$.

Propriétés du produit de matrices

Proposition

Soit $A \in M(m,n,\mathbb{R})$, $B, B' \in M(n,\ell,\mathbb{R})$, $C \in M(\ell,p,\mathbb{R})$. *Alors :*

1. $A(BC) = (AB)C$ *(associativité).*
2. $A(B+B') = AB + AB'$ et $(B+B')C = BC + B'C$.

Remarque

ATTENTION : le produit n'est pas commutatif. Même si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *on n'a pas en général que* $AB = BA$.

Le cas des matrices carrées

Définition (La matrice identité)

Soit $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ *la matrice qui est zéro hors de la diagonale et* 1 *sur la diagonale :*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Le cas des matrices carrées

Définition (La matrice identité)

Soit $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ *la matrice qui est zéro hors de la diagonale et* 1 *sur la diagonale :*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemme

Si $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ *alors* $I_m A = A$ *et* $A I_n = A$.

Test

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A-t-on $AB = BA$?

1. *Oui et vous savez le montrer.*
2. *Vous pensez que oui mais vous ne savez pas le montrer.*
3. *Non et vous savez le montrer.*
4. *Vous pensez que non mais vous ne savez pas le montrer.*
5. *Vous ne savez pas.*

Matrices inversibles

Définition (Matrices inversibles)

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ (donc carrée) est inversible s'il existe une autre matrice notée $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que l'on a:

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

L'ensemble des matrices inversibles dans $M_n(\mathbb{R})$ est noté $GL_n(\mathbb{R})$.

Lemme

Si l'inverse de A existe elle est unique. L'inverse de I_n est I_n.

Exemples

Exemple

$$Si\ A=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

En effet on a bien

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Exemples

Exemple

$$Si\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En effet on a bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Il y a des matrices non nulles qui ne sont pas inversibles. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

Applications linéaires

Définition

Soit E, F deux e.v. réels. Une application $f : E \to F$ est dite *application linéaire* *(AL) si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall u, v \in E$ on a :* $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$. *Cela se reformule aussi comme suit :*

1. $\forall u, v \in E$ *on a* $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$ *on a* $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Une AL $f : E \to E$ est aussi dite un *endomorphisme*.

Applications linéaires

Définition

Soit E, F deux e.v. réels. Une application $f : E \to F$ est dite application linéaire (AL) si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall u, v \in E$ on a : $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$. Cela se reformule aussi comme suit :

1. *$\forall u, v \in E$ on a $f(u + v) = f(u) + f(v)$.*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$ on a $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.*

Une AL $f : E \to E$ est aussi dite un endomorphisme.

Exemple

Soit $E = F = \mathbb{R}$.

1. *$f(x) = \cos(x)$ n'est pas linéaire car $\cos(u + v) \neq \cos(u) + \cos(v)$ (par exemple $\cos(0 + 0) = 1 \neq \cos(0) + \cos(0) = 2$).*
2. *$f(x) = x^2$ n'est pas linéaire car en général $f(u+v) = (u+v)^2 = u^2+v^2+2uv \neq u^2+v^2 = f(u)+f(v)$.*

Applications linéaires

Définition

Soit E, F deux e.v. réels. Une application $f : E \to F$ est dite ***application linéaire*** *(AL) si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall u, v \in E$ on a : $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$. Cela se reformule aussi comme suit :*

1. $\forall u, v \in E$ *on a* $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$ *on a* $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Une AL $f : E \to E$ est aussi dite un ***endomorphisme****.*

Exemple

Soit $E = F = \mathbb{R}$.

1. $f(x) = 2x + 1$ *n'est pas linéaire car* $f(u+v) = 2(u+v) + 1 \neq 2u + 1 + 2v + 1 = f(u) + f(v)$.
2. $f(x) = 2x$ ***est linéaire*** *car si $\lambda, u, v \in \mathbb{R}$, on a bien* $f(\lambda u + v) = 2(\lambda u + v) = 2\lambda u + 2v = \lambda f(u) + f(v)$.

Applications linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Lemme

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est linéaire, alors il existe des coefficients* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$f(x_1, \ldots x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_n x_n.$$

Plus généralement, si $f = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est linéaire en notant* $f(x_1, \ldots x_n) = (f_1(x_1, \ldots x_n), f_2(x_1, \ldots x_n), \cdots, f_m(x_1, \ldots x_n))$*, alors chacune des* $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est linéaire où* $1 \leq i \leq m$*.*

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *donnée par*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 + 3x_2, x_2 - \frac{x_3}{4}\right)$$

est linéaire car ses deux composantes $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2$ *et* $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 - \frac{x_3}{4}$ *le sont.*

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *donnée par*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 + 3x_2, x_2 - \frac{x_3}{4}\right)$$

est linéaire car ses deux composantes $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2$ *et* $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 - \frac{x_3}{4}$ *le sont. En effet:*

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *donnée par*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 + 3x_2, x_2 - \frac{x_3}{4}\right)$$

est linéaire car ses deux composantes $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2$ *et* $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 - \frac{x_3}{4}$ *le sont. En effet:*

- $f_1(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ *avec* $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ *et* $a_3 = 0$.

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *donnée par*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 + 3x_2, x_2 - \frac{x_3}{4}\right)$$

est linéaire car ses deux composantes $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2$ *et* $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 - \frac{x_3}{4}$ *le sont. En effet:*

- $f_1(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ *avec* $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ *et* $a_3 = 0$.
- $f_2(x_1, x_2, x_3) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$ *avec* $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ *et* $b_3 = -\frac{1}{4}$.

Exemples liés à la géométrie

1. Symétrie centrale $C : E \to E$, $u \mapsto -u$.

Exemples liés à la géométrie

1. Symétrie centrale $C : E \to E$, $u \mapsto -u$.
2. Homothétie $H_\lambda : E \to E$, $u \mapsto \lambda u$.

1. Symétrie centrale $C : E \to E$, $u \mapsto -u$.
2. Homothétie $H_\lambda : E \to E$, $u \mapsto \lambda u$.
3. Réflexion d'axe Oy: $S_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemples liés à la géométrie

1. Symétrie centrale $C : E \to E$, $u \mapsto -u$.
2. Homothétie $H_\lambda : E \to E$, $u \mapsto \lambda u$.
3. Réflexion d'axe Oy: $S_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$.
4. Réflexion d'axe Ox: $S_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

Exemples liés à la géométrie

1. Symétrie centrale $C : E \to E$, $u \mapsto -u$.
2. Homothétie $H_\lambda : E \to E$, $u \mapsto \lambda u$.
3. Réflexion d'axe Oy: $S_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$.
4. Réflexion d'axe Ox: $S_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.
5. Réflexion p.r. à la droite $y = x$: $S_{\pi/4} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

Exemples liés à la géométrie

1. Symétrie centrale $C : E \to E$, $u \mapsto -u$.
2. Homothétie $H_\lambda : E \to E$, $u \mapsto \lambda u$.
3. Réflexion d'axe Oy: $S_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$.
4. Réflexion d'axe Ox: $S_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.
5. Réflexion p.r. à la droite $y = x$: $S_{\pi/4} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.
6. Rotation d'angle θ $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\cos\theta)x - (\sin\theta)y \\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y \end{pmatrix}$.

Test

Exercice

Soit $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_3^2 - x_1, x_3 - 2x_1)$. *Alors :*

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *est linéaire,*
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *est linéaire,*
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *n'est pas linéaire,*
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *n'est pas linéaire,*
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *est linéaire,*
6. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *n'est pas linéaire,*
7. *aucune des précédentes.*

Noyau et image d'une application linéaire

Définition

Soit E, F deux e.v. réels et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :

1. *Le noyau de f est $Ker(f) := \{u \in E : f(u) = 0_F\} \subset E$.*
2. *L'image de f est $Im(f) := \{f(u) : u \in E\} \subset F$.*

Lemme

Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $Ker(f)$ est un ssev de E et $Im(f)$ un ssev de F.

Injectivité et surjectivité d'une application linéaire

Proposition

1. *Une AL* $f : E \to F$ *est injective ssi* $Ker(f) = \{0_E\}$.
2. f *est surjective ssi* $Im(f) = F$.
3. f *est bijective ssi* $Ker(f) = \{0_E\}$ *et* $\dim(E) = \dim(F)$.

Injectivité et surjectivité d'une application linéaire

Proposition

1. *Une AL* $f : E \to F$ *est injective ssi* $Ker(f) = \{0_E\}$.
2. f *est surjective ssi* $Im(f) = F$.
3. f *est bijective ssi* $Ker(f) = \{0_E\}$ *et* $\dim(E) = \dim(F)$.

Une application linéaire bijective est aussi appelée un isomorphisme.

Injectivité et surjectivité d'une application linéaire

Proposition

1. *Une AL* $f : E \to F$ *est injective ssi* $Ker(f) = \{0_E\}$.
2. f *est surjective ssi* $Im(f) = F$.
3. f *est bijective ssi* $Ker(f) = \{0_E\}$ *et* $\dim(E) = \dim(F)$.

Une application linéaire bijective est aussi appelée un isomorphisme.

Proposition

Si E *est de dimension finie, alors* $Im(f)$ *est de dimension finie.*

Injectivité et surjectivité d'une application linéaire

Proposition

Soit $f : E \to F$ *un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si* E *(resp.* F*) est de dimension finie, alors* F *(resp.* E*) l'est aussi, et* $\dim E = \dim F$.

Injectivité et surjectivité d'une application linéaire

Proposition

Soit $f : E \to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si E (resp. F) est de dimension finie, alors F (resp. E) l'est aussi, et $\dim E = \dim F$.

Théorème

Soit $f : E \to F$ une appli. linéaire, avec E et F de dim. finie. Supposons $\dim E = \dim F$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est bijective;*
2. *f est injective;*
3. *f est surjective.*

Composition et inverse

Proposition

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des appli. linéaires. Alors la composée $g \circ f : E \to G$ est une appli. linéaire.

Composition et inverse

Proposition

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des appli. linéaires. Alors la composée $g \circ f : E \to G$ est une appli. linéaire.

Proposition

Soit $f : E \to F$ un isomorphisme. Alors $f^{-1} : F \to E$ est un isomorphisme.

Rang d'une application linéaire

Définition (Rang d'une application linéaire)

Le ***rang*** *de f est la dimension de $\operatorname{Im} f$. On note $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f$.*

Rang d’une application linéaire

Définition (Rang d’une application linéaire)

Le rang de f est la dimension de $\operatorname{Im} f$. On note $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f$.

Proposition

Si E et F sont de dimension finie, alors
$\operatorname{rg}(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$.

Rang d'une application linéaire

Définition (Rang d'une application linéaire)

Le rang de f est la dimension de $\operatorname{Im} f$. *On note* $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f$.

Proposition

Si E et F sont de dimension finie, alors
$\operatorname{rg}(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$.

Théorème (Théorème du rang)

Si $\dim E < \infty$, *alors*
$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim(\operatorname{Im} f)$.

Applications linéaires et matrices

Lemme

Soit $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_m)$ une base de E et $f : E \to F$ une AL. Alors f est uniquement déterminée par les vecteurs $f(v_i), i = 1 \ldots m$.

Lemme

Soit $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_m)$ *une base de* E *et* $f : E \to F$ *une AL. Alors* f *est uniquement déterminée par les vecteurs* $f(v_i), i = 1 \ldots m$.

Démonstration

Si $v \in E$ *alors il existe des coordonnées uniques* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *telles que* $v = \sum_i \lambda_i v_i$. *Mais alors par linéarité on a*

$$f(v) = f\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = \sum_i f(\lambda_i v_i) = \sum_i \lambda_i f(v_i).$$

Donc pour calculer $f(v)$*, il suffit de connaitre les coordonnées* λ_i *de* v *dans la base* $\mathcal{B}$ *et les vecteurs* $f(v_i) \in F$.

Applications linéaires et matrices

Lemme

Soit $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_m)$ *une base de* E *et* $f : E \to F$ *une AL. Alors* f *est uniquement déterminée par les vecteurs* $f(v_i), i = 1 \ldots m$.

Définition (Matrice d'une AL dans des bases)

Soit E, $\mathcal{B}$ *et* f *comme avant et* $\mathcal{R} := (w_1, \ldots, w_n)$ *une base de* F. *Alors il existe des constantes uniques* $M_{ij}, 1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ *telles que l'on ait pour tout* $j = 1 \ldots m$ *:*

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} M_{ij} w_i.$$

On appelle la matrice $M \in M(n, m, \mathbb{R})$ *ayant* M_{ij} *comme entrées la* ***matrice de*** f ***dans les bases*** $\mathcal{B}$ ***et*** $\mathcal{R}$. *Elle est aussi notée*

$$M = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{R}}.$$

Exemple

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *l'application définie par* $f(x, y) = (x + y, y)$.

Soit aussi $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ *et can la base canonique.*

Alors :

$$[f]_{can}^{can} =$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{can} =$$

$$[f]_{can}^{\mathcal{B}} =$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *l'application définie par* $f(x, y) = (x + y, y)$.

Soit aussi $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ *et can la base canonique.*

Alors :

$$[f]_{can}^{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{can} =$$

$$[f]_{can}^{\mathcal{B}} =$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *l'application définie par* $f(x, y) = (x + y, y)$.

Soit aussi $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ *et* *can* *la base canonique.*

Alors :

$$[f]_{can}^{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{can} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[f]_{can}^{\mathcal{B}} =$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *l'application définie par* $f(x, y) = (x + y, y)$.

Soit aussi $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ *et* can *la base canonique.*

Alors :

$$[f]_{can}^{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{can} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[f]_{can}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les applications linéaires forment un espace vectoriel

Proposition

Soit $f, g : E \to F$ deux applications linéaires et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les applications qui à tout vecteur $v \in E$ associent :

- *le vecteur $f(v) + g(v) \in F$,*
- *le vecteur $\lambda f(v) \in F$,*

sont linéaires. Elles sont notées respectivement $f + g$ et λf. Cela munit l'espace des applications linéaires de E dans F (noté $\mathcal{L}(E, F)$) de la structure d'espace vectoriel.

Applications linéaires et matrices

Proposition

Soient $f, g : E \to F$ *des appli. linéaires,* $\mathcal{B}$ *base de* E*,* $\mathcal{B}'$ *base de* F*. Alors*

- $[f+g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} + [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$
- $[\lambda f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \lambda [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

Applications linéaires et matrices

Proposition

Soient $f, g : E \to F$ *des appli. linéaires,* $\mathcal{B}$ *base de* E, $\mathcal{B}'$ *base de* F. *Alors*

- $[f+g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} + [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$
- $[\lambda f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \lambda [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

Proposition

Soient $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *des appli. linéaires,* $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ *des bases resp. de* E, F *et* G. *Alors* $[g \circ f]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Applications linéaires et matrices

Si $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, on définit A^p pour $p \in \mathbb{N}$ par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p A$.

Si $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, on définit A^p pour $p \in \mathbb{N}$ par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p A$.

Proposition

Soient $f : E \to E$ une appli. linéaire et $\mathcal{B}$ une base de E. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ facteurs}}$, on a $[f^p]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = ([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^p$.

Théorème

Soient E, F des espaces vect. de même dimension finie, $f : E \to F$ une appli. linéaire, $\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{B}'$ base de F, et $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

- *f est bijective si et seulement si A est inversible.*
- *Dans ce cas, $[f^{-1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = A^{-1}$.*

Noyau et matrices

Soit $f : E \to F$ une AL, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{R}$ une base de F. Alors tout vecteur $u \in E$ (resp. $f(u) \in F$) est identifié par ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{R}$).
$u \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ (resp. $f(u) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$). Notons $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in M(m, 1, \mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées.

Lemme

$u \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ *et* $f(u) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \implies [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$

En particulier on a

$$u \in Ker(f) \iff [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Noyau et matrices

Définition

On appelle noyau d'une matrice $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ *(noté* $Ker(A)$*) l'ensemble des vecteurs* $X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *tels que* $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Proposition

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ *est inversible si et seulement si son noyau est*

$$Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Matrices et systèmes linéaires

Soit $A = (A_{ij}) \in GL(n)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Alors le système linéaire

$$AX = B$$

est dit système de Cramer et il admet exactement une solution :

$$\boxed{X = A^{-1}B.}$$

Rang d'une matrice

Définition

Soit $A \in M(n, m, \mathbb{R})$. On appelle $rang(A)$ la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les colonnes $C_1, \ldots, C_m$ de A.

Théorème

1. $rang(A) = \dim(\mathrm{Vect}(L_1, \ldots, L_n))$*, où* L_i *sont les lignes de* A*.*
2. $rang(A) \leq min(m, n)$*.*
3. $rang(A)$ *est le nombre de lignes non nulles quand on a fini l'algorithme de Gauss (on obtient une matrice triangulaire à la fin de l'algorithme !).*

Exemple: calcul du rang par l'algorithme de Gauss

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le rang de A par l'algorithme de Gauss:

Exemple: calcul du rang par l'algorithme de Gauss

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le rang de A par l'algorithme de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array}$$

Exemple: calcul du rang par l'algorithme de Gauss

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le rang de A par l'algorithme de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 + L_2 \end{array}.$$

Exemple: calcul du rang par l'algorithme de Gauss

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le rang de A par l'algorithme de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 + L_2 \end{matrix}.$$

La matrice obtenue à la fin est bien triangulaire et le nombre de lignes non nulles est égal à 3. D'où $rang(A) = 3$.

Proposition

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *A est inversible (i.e. $A \in GL(n)$),*
2. *$Ker(A) = \{0\}$,*
3. *$rang(A) = n$,*
4. *$\forall B \in \mathbb{R}^n$ le système $AX = B$ est de Cramer.*

Exemple: calcul de l'inverse par l'algorithme de Gauss

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons l'inverse de A par l'algorithme de Gauss:

Exemple: calcul de l'inverse par l'algorithme de Gauss

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons l'inverse de A par l'algorithme de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

Exemple: calcul de l'inverse par l'algorithme de Gauss

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons l'inverse de A par l'algorithme de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Maintenant on applique l'algorithme du bas vers le haut:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Calcul de l'inverse par l'algorithme de Gauss

Maintenant on applique l'algorithme du bas vers le haut:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Calcul de l'inverse par l'algorithme de Gauss

Maintenant on applique l'algorithme du bas vers le haut:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$