Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Résolution de systèmes linéaires et Pivot de Gauss (Rappel)

Exercice 1 : Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & + & 3z & = & 2\\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & 4\\ x & + & y & - & 3z & = & -3\end{array}\right.\qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & 1\\ y & + & z & = & 0\\ x & + & y & = & 1\\ 2x & + & 3y & = & 0\end{array}\right.\qquad (S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 4\\ 2x & - & y & + & 3z & = & 5\\ x & + & 4y & - & 3z & = & 2\end{array}\right.$$

$$(S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & t & = & 4\\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & 2\\ x & - & y & + & z & - & t & = & 1\end{array}\right.\qquad (S_5)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & - & 8z & = & 8\\ 4x & + & 3y & - & 9z & = & 9\\ 2x & + & 3y & - & 5z & = & 7\\ x & + & 8y & - & 7z & = & 12\end{array}\right.$$

Exercice 2 : Discuter selon les valeurs du paramètre p le nombre de solutions du système suivant (on ne cherchera pas à expliciter les solutions) :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & py & + & (2+p)z & = & 1\\ & & y & + & (3p-1)z & = & 1\\ x & + & 2y & + & 5pz & = & 3\end{array}\right.$$

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Exercice 3 : Parmi les ensembles suivants, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, et en déterminer une base.

1. $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 5y\}$;
2. $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$;
3. $F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = -y^2\}$;
4. $F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y + z = 0\}$;
5. $F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sin x = z + y\}$;
6. $F_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\}$.

Exercice 4 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note 0_E l'élément neutre de l'addition dans E.
(a) Montrer que pour tout $u_1, u_2 \in E$ et tout $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, on a
$(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) + (\mu_1 \cdot u_1 + \mu_2 \cdot u_2) = (\lambda_1 + \mu_1) \cdot u_1 + (\lambda_2 + \mu_2) \cdot u_2$.
(b) Montrer que $\lambda \cdot u = 0_E \implies u = 0_E$ ou $\lambda = 0$.
(c) Montrer que $\lambda \cdot u = u$ et $u \neq 0_E \implies \lambda = 1$.

Exercice 5 : Les systèmes de vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont-ils libres ou liés ? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$? Quelle est la dimension du sous-espace qu'ils engendrent ?

1. dans $\mathbb{R}^2$:
   (a) $u = (1, 2)$
   (b) $u = (1, 3), \quad v = (3, 9)$
   (c) $u = (-1, 1), \quad v = (3, -2)$
   (d) $u(1, 3), \quad v = (-1, 3), \quad w = (3, 2)$
2. dans $\mathbb{R}^3$:
   (a) $u = (1, 1, 1), \quad v = (0, 2, -3)$
   (b) $u = (1, 0, 1), \quad v = (0, 0, 0), \quad w = (-2, 4, 3)$
   (c) $u = (1, 2, -1), \quad v = (-2, 3, -1), \quad w = (-4, 13, -5)$

Exercice 6 :
(a) Vérifier que les vecteurs $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (2, 1)$ constituent une base de $\mathbb{R}^2$ puis exprimer tout vecteur $x = (x_1, x_2)$ dans cette base.
(b) Mêmes questions pour les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 3, 1)$, $v_3 = (3, 1, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
(c) Mêmes questions pour les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (2, 3, 4, 1)$, $v3 = (3, 4, 1, 2)$, $v_4 = (4, 1, 2, 3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7 :
(a) Vérifier que les vecteurs $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (-1, 3, -2)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$, puis compléter cette famille libre en une base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Vérifier que les vecteurs $v_1 = (4, 3, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1)$, $v_3 = (-1, 1, -1, 1)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$, puis complé ter cette famille libre en une base de $\mathbb{R}^4$.
(c) Mêmes questions pour les vecteurs $v_1 = (2, -1, 1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0, -1, 1)$, $v_3 = (1, -2, 1, 1, -1)$ dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 8 :
(a) Vérifier que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 2)$, $v_2 = (3, 2, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$, et $v_4 = (2, -1, 2)$ engendrent $\mathbb{R}^3$, puis extraire de cette famille génératrice une base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Même question pour les vecteurs $v_1 = (2, 1, 1, 4)$, $v_2 = (-1, 1, -2, -2)$, $v_3 = (1, 0, 1, 2)$, $v_4 = (-1, -1, 1, -1)$, $v_5 = (0, 1, 2, 3), v6 = (2, -1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.
(c) Même question pour les vecteurs $v_1 = (2, -1, 1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0, -1, 1)$, $v_3 = (1, -2, 1, 1, -1)$, $v_4 = (4, -2, 2, -1, 1)$, $v_5 = (1, 2, 3, 4, 5)$, $v_6 = (2, 2, 1, 2, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 9 :
(a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel α les vecteurs $v_1 = (1 - \alpha, -\alpha)$ et $v_2 = (\alpha, 1 + \alpha)$ constituent–ils une famille libre, une famille génératrice, une base dans $\mathbb{R}^2$?
(b) Mêmes questions pour les vecteurs $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (1, 2, \alpha)$ et $v_3 = (-1, \alpha, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
(c) Mêmes questions pourles vecteurs $v_1 = (\alpha, 2, \alpha + 2)$, $v_2 = (2, \alpha, \alpha + 2)$ et $v_3 = (\alpha - 1, \alpha + 2, -3)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 :
Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$ $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ constituent une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 11 :

Soit (E) le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (E) forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F . **Exercice 12 :** Donner un description cartésienne des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

engendrés par :

1. $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; 2. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; 3. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 : Soient E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u_1 = (2, 3, -1)$ et $u_2 = (1, -1, -2)$, et F celui engendré par $v_1 = (3, 7, 0)$ et $v_2 = (5, 0, -7)$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercices pour aller plus loin

Exercice 14 : Soit E l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 3y = 0$.
(a) Définir une addition $\oplus$ et une multiplication $\odot$ sur E pour que E soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
(b) Déterminer l'élément neutre 0_E de l'addition.

Exercice 15 : Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer lesquels des ensembles $E_1, \ldots,$ E_7 sont des sous-espaces vectoriels de E.
(a) E_1 l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paires.
(b) $E_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$.
(c) $E_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$.
(d) E_4 l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
(e) E_5 l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(1) + f'(1) = 0$.
(f) E_6 l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(1) + f'(1) = 1$.
(g) $E_7 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 16 : Démontrer les assertions suivantes, pour des familles $v_1, \ldots, v_k$ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$.
(a) Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
(b) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
(c) Toute famille contenant une sous-famille lié e est liée.
(d) Toute famille contenant une sous-famille génératrice est génératrice.

Exercice 17 :
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
(a) L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?
(b) Si oui, en donner une base et calculer sa dimension.

Exercice 18 : Bouquet final
Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & my & + & m^2z & + & m^3t & = & 1 \\ mx & + & m^2y & + & m^3z & + & t & = & 1 \\ m^2x & + & m^3y & + & z & + & mt & = & 1 \\ m^3x & + & y & + & mz & + & m^2t & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercices complémentaires

Exercice 19 : Les coefficients des trois disciplines d'une unité d'enseignement ont é té perdus, mais on connaît les ré sultats de trois é tudiants.

Discipline	é tudiant A	é tudiant B	é tudiant C
Mathé matiques	10	5	12
Informatique	9	10	8
Physique	12	13	20
Note finale	10	8	12

Retrouver le coefficient qui affecte chaque matière dans le calcul de la note finale.

Exercice 20 : On dispose de deux alliages, l'un contenant 35% d'argent, l'autre 60%. Quelle quantité de chacun de ces deux alliages doit-on fondre et mélanger pour obtenir $100g$ d'un alliage contenant 50% d'argent ?

Exercice 21 : Donner une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre m pour que le système (S) d' inconnues x, y et z ait au moins une solution et résoudre dans ce cas.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ -2x & + & 4y & + & z & = & 5 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & -1 \\ 5x & - & 2y & - & z & = & m \end{array}\right.$$

Exercice 22 : Trouver toutes les solutions des systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ x+4y+z=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 3x+2z=0 \\ 3y+z+3t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z-t=0 \end{array}\right.$$

Exercice 23 : Déterminer, en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 24 : Donner une condition né cessaire et suffisante sur les paramètres ré els y_1, y_2, y_3 et y_4 pour que le système suivant admette au moins une solution :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} -\frac{3}{4}x_1 + x_2 & = & y_1 \\ \frac{1}{4}x_1 - x_2 + x_3 & = & y_2 \\ \frac{1}{4}x_1 - x_3 + x_4 & = & y_3 \\ \frac{1}{4}x_1 - x_4 & = & y_4 \end{array}\right.$$

Exercice 25 : Soit m un paramètre ré el. Ré soudre les systèmes suivants en discutant é ventuellement en fonction de la valeur du paramètre :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ mx & + & (m+4)y & = & 8 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcl} mx & + & (m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x & - & my & = & 5m+3 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{l} x+my+z=1 \\ (m+1)x+2y+(m-3)z=-1 \\ (m-1)x-3z=-1 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{l} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{array}\right.$$

Exercice 26 : Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
(a) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x-7y=z\}$.
(b) $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2-z^2=0\}$.
(c) $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=x+y+z=0\}$.
(d) $E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2+y^2)=0\}$.