# Matrices et Applications linéaires

## Matrices

**Exercice 1 :** Calculer

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2 :** Calculer tous les produits possibles de deux matrices (en prenant éventuellement deux fois la même) parmi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3 :** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer $AB$, $AC$ et $AD$. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 4 :** Soit $E = \mathbb{R}^2$, muni de la base canonique $\mathbb{B} = \{e_1, e_2\}$.
(a) Écrire la matrice $R(\theta)$ de la rotation d'angle $\theta$ autour de l'origine $(0,0)$ dans la base $\mathbb{B}$.
(b) Montrer que $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$.
(c) En déduire l'expression de $R(\theta)^{-1}$.
(d) Écrire la matrice $S_1$ de la réflexion par rapport à l'axe $Ox_1$ dans la base $\mathbb{B}$. Que vaut $S_1^{-1}$ ?
(e) Calculer $S(\theta) = R(\theta)S_1R(\theta)^{-1}$. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $S(\theta)x = x$. Quelle est l'interprétation géométrique de $S(\theta)$ ?

**Exercice 5 :** On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$ et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où $I_3$ est la matrice identité $3 \times 3$. En déduire que $A$ est inversible et calculer son inverse.
2. Combien le système suivant a-t-il de solutions ? Les déterminer s'il y en a:

$$(S) \begin{cases} \quad\;\; y + z = 1 \\ x \quad\;\; + z = 2 \\ x + y \quad\;\; = 3. \end{cases}$$

**Exercice 6 :** Calculer, s'il existe, l'inverse des matrices suivantes à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 7 :** Classement des pages web par Google
On appelle Page Rank (PR) de la page web A le nombre PR(A) vérifiant l'équation suivante:

$$PR(A) = \frac{1}{2P} + \frac{1}{2}\left(\frac{PR(P_1)}{N(P_1)} + \frac{PR(P_{k(A)})}{N(P_{k(A)})}\right)$$

où P est le nombre total de pages considéré, les $P_i$ sont les pages qui ont un lien sortant vers A et $N(P_i)$ est le nombre de liens sortants de la page $P_i$.
On considère le cas où la page A pointe vers la page B, la page B pointe vers A et C, la page C pointe vers B et D et la page D pointe vers C.

(a) Écrire le système linéaire 4x4 lié au cas ci-dessus.
(b) Le résoudre.

---

## Applications linéaires

---

**Exercice 8 :** Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires:
(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x - y + 1$,
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x + y, x - y)$,
(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (xy, x, y)$,
(d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$,
(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y) = (y, 0, x - 7y, x + y)$,
(f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.
Déterminer, pour chaque application linéaire, son noyau, son rang et son image.

**Exercice 9 :** On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 & -4 \\ -2 & -6 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer le noyau et l'image de $f$.
(b) Trouver des bases de ces sous-espaces.
(c) Vérifier le théorème du rang.

**Exercice 10 :** Soit $E$ un espace vectoriel et soient $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$. On définit l'application $f : E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.
(a) Montrer que $f$ est linéaire.
(b) Déterminer le noyau et l'image de $f$.
(c) Que donne le théorème du rang ?

**Exercice 11 :**
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = (y - z, -2x - y + z, -2x - y + z).$$

1. Écrire la matrice $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ de $f$ dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Résoudre le système
$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
En déduire le noyau de $f$. Donner une base de ce sous-espace vectoriel.
3. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les réels $b_1$, $b_2$ et $b_3$ pour que le système suivant ait au moins une solution:
$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$
En déduire l'image de $f$. Donner une base de ce sous-espace vectoriel.
4. L'application $f$ est-elle injective ? Surjective ?

**Exercice 12 :** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. On considère l'application linéaire $f$ de $E$ dans $E$ dont la matrice $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ dans la base $\mathcal{E}$ est :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'image par $f$ d'un vecteur $v$ de coordonnées $(x, y, z)$ dans la base $\mathcal{E}$.
2. Écrire la matrice $[f]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}'}$ de $f$ dans la base $\mathcal{E}' = (e_3, e_2, e_1)$.
3. Écrire la matrice $[f]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}$ de $f$ dans la base $\mathcal{F} = (e_1 + e_3, e_3, e_2 - e_3)$.

**Exercice 13 :** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3, $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $E$, et $t$ un paramètre réel. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : E \to E$ telle que
$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + e_2, \\ f(e_2) = e_1 - e_2, \\ f(e_3) = e_1 + te_3. \end{cases}$$
Donner l'image par $f$ du vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et la matrice de $f$ dans la base $\mathbb{B}$. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $t$ l'application $f$ est–elle injective, surjective, respectivement bijective ?

**Exercice 14 :** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $f$ une application linéaire de $E$ dans lui-même. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im}\, f$.
(ii) $f^2 = 0$ et $n = 2\,\mathrm{rg}(f)$.

---

## Exercices pour aller plus loin

---

**Exercice 15 :** (a) Comparer les produits matriciels $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$.

(b) Même question pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Exhiber des matrices $2\times 2$ telles que $AB = BA$, respectivement $AB \neq BA$.

**Exercice 16 :** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $f$ une application linéaire de $E$ dans lui-même. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m = 0$ et $f^{m-1} \neq 0$.

(a) Soit $x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\mathbb{F} = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{m-1}(x)\}$ est libre.
(b) En déduire que $m \leq n$. Quand $\mathbb{F}$ est–elle une base de $E$ ?

**Exercice 17 :** Montrer que la dérivée est une application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment dérivables dans l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues. Déterminer son noyau et son image.

**Exercice 18 :** Soient $E$, $F$ des espaces vectoriels de dimension finie et $f, g \in \mathbb{L}(E, F)$.
(a) Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
(b) En déduire que $|\,\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f+g)$.

---

## Exercices complémentaires

---

**Exercice 19 :** On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Parmi $AC$, $BA$, $BC$, $CA$, $AB$ et $CB$, quels sont les produits licites ? Calculer ces derniers.
2. Le produit matriciel est-il commutatif ? Justifier la réponse à l'aide de la question précédente.
3. Vérifier que $(AB)C = A(BC)$.

**Exercice 20 :** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$ puis $A^3$.
2. Calculer $A^3 - 3\,A^2 - 2\,A$, en déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.
3. Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ -x & - & 2y & - & z & = & 3. \end{array} \right.$

**Exercice 21 :** On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique

$$\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3) = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big),$$

et l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ de sa base canonique

$$\mathcal{F}_4 = (f_1, f_2, f_3, f_4) = \big((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\big).$$

On considère alors l'application linéaire $\phi$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ donnée par

$$\phi(x,y,z) = (y - z, x - z, 4\,y - 4\,z, x - z),$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Donner $[\phi]_{\mathcal{F}_4}^{\mathcal{E}_3}$, la matrice de $\phi$ dans les bases $\mathcal{E}_3$ et $\mathcal{F}_4$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\phi)$, le noyau de $\phi$, et en donner une base.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(\phi)$ et en donner une base.
4. Donner la matrice de $\phi$ dans les nouvelles bases

$$\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3) = \big((1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\big),$$

et

$$\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4) = \big((0,1,0,1), (1,0,4,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\big).$$