Droites et plans de l'espace vectoriel, produit scalaire et produit vectoriel

Droites et plans de l'espace vectoriel

Exercice 1 : Déterminer une équation cartésienne et une paramétrisation

1. de la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$;
2. de la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ avec les points $A(1,1)$ et $B(-1,2)$;
3. du plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

1. Trouver une paramétrisation de la droite $D \subset \mathbb{R}^3$ définie par les équations:
$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$
2. Trouver une paramétrisation du plan P défini par l'équation $x + 2y + 3z = 0$.
3. La droite D est-elle incluse dans le plan P?
4. Existe-t-il un plan vectoriel P' parallèle à P qui contienne la droite D ?
5. Donner une équation d'un plan vectoriel P_1 qui contienne la droite D.
6. Déterminer l'intersection des plans P et P_1.

Exercice 3 :

1. Discuter suivant les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ l'intersection des plans $P \subset \mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$ et $P' \subset \mathbb{R}^3$ dont une paramétrisation est donnée par $\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -at - s. \end{cases}$
2. Déterminer selon la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ l'intersection de la droite $D \subset \mathbb{R}^3$ d'équations:
$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + az = 0 \end{cases}$$
avec le plan d'équation $x + 2y = 0$.

Produit scalaire et produit vectoriel

Exercice 4 : On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soient $v = (-3, 5, 8)$ et $w = (1, -4, 9)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer les longueurs de v et w.
2. Calculer l'angle non-orienté entre v et w.
3. Calculer le résultat de la projection orthogonale de v sur la droite engendrée par w.
4. Trouver une base orthonormée du plan engendré par les deux vecteurs v et w.
5. Trouver un vecteur orthogonal aux deux vecteurs v et w.

Exercice 5 : On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt la base constituée des vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_1 = (-1, 0, -1)$, et $u_3 = (-1, 2, 3)$.

Exercice 6 :

1. Donner l'équation (cartésienne) de la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ orthogonale au vecteur (1, 2).
2. Donner l'équation (cartésienne) du plan vectoriel P_1 de $\mathbb{R}^3$ orthogonal au vecteur $n_1 = (1, 2, 3)$.
3. Trouver un vecteur n_2 normal (= orthogonal) au plan vectoriel P_2 de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs (1, 1, -1) et (2, 0, 1).
4. Calculer $n_1 \wedge n_2$, et montrer que ce vecteur appartient à $P_1 \cap P_2$. En déduire une équation de $P_1 \cap P_2$. Quelle est l'interprétation géométrique de ce résultat ?

Exercice 7 : Soit K l'octaèdre centré en $O = (0, 0, 0)$, et de sommets $\mp A$, $\mp B$, $\mp C$, où $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ et $C = (0, 0, 1)$. On définit les vecteurs $v_1 = \overrightarrow{AB}$ et $v_2 = \overrightarrow{AC}$.

1. Calculer les longueurs des côtés et les angles aux sommets du triangle ABC.
2. Calculer $v_1 \wedge v_2$, et en déduire l'aire du triangle ABC. Quelle est l'aire de la surface de K ?

Exercices pour aller plus loin

Exercice 8 : On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace vectoriel

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Déterminer la projection orthogonale p_F sur F .

Exercice 9 : Soient $A = (1, 1, 1)$ et $B = (-1, -1, 1)$ deux sommets d'un tétraèdre régulier centré en $O = (0, 0, 0)$.

1. Calculer l'angle α entre les vecteurs $v_1 = \overrightarrow{OA}$ et $v_2 = \overrightarrow{OB}$.
2. Le tétraèdre peut être inscrit dans un cube, dont trois sommets sont A, B et $C = (-1, 1, 1)$. Montrer que l'angle entre $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AC}$ est égal à $\frac{alpha}{2}$.

Exercices complémentaires

Exercice 10 : Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les plans P et P' d'équations respectives $x-y+z=0$ et $x+2y+3z=0$.

1. Montrer que l'intersection de P et P' est une droite D dont on donnera une paramétrisation.
2. Donner une équation du plan vectoriel P'' perpendiculaire à D.
3. Calculer l'intersection de P, P' et P''.

Exercice 11 :

1. Déterminer une paramétrisation du plan P engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Soit Q le plan d'équation cartésienne:
$$x + 2y + z = 0.$$
Déterminer la droite L obtenue par l'intersection de P et Q. On en donnera des équations paramétriques et cartésiennes.