Espaces vectoriels

L’exemple principal : $\mathbb{R}^n$

1. L’ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels peut être représenté par une droite. C’est un espace de dimension 1.

L'exemple principal : $\mathbb{R}^n$

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels peut être représenté par une droite. C'est un espace de dimension 1.

2. Le plan $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 est l'ensemble des couples $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de nombres réels.

L'exemple principal : $\mathbb{R}^n$

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels peut être représenté par une droite. C'est un espace de dimension 1.

2. Le plan $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 est l'ensemble des couples $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de nombres réels.

3. L'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 est l'ensemble des triplets $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ de nombres réels.

L'exemple principal : $\mathbb{R}^n$

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels peut être représenté par une droite. C'est un espace de dimension 1.

2. Le plan $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 est l'ensemble des couples $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de nombres réels.

3. L'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 est l'ensemble des triplets $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ de nombres réels.

4. L'espace $\mathbb{R}^n$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est l'ensemble des n-uplets $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de nombres réels.

L'exemple principal : $\mathbb{R}^n$

Définition

On appelle $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de nombres réels :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

L'exemple principal : $\mathbb{R}^n$

Définition

On appelle $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de nombres réels :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

On peut noter les éléments de $\mathbb{R}^n$ soit en les écrivant

- horizontalement : $(1, 4, -7)$. On parle alors de vecteur ligne.

L'exemple principal : $\mathbb{R}^n$

Définition

On appelle $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de nombres réels :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

On peut noter les éléments de $\mathbb{R}^n$ soit en les écrivant

- horizontalement : $(1, 4, -7)$. On parle alors de vecteur ligne.
- verticalement : $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ on parle alors de vecteur colonne.

L'exemple principal : $\mathbb{R}^n$

Définition

On appelle $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de nombres réels :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

On peut noter les éléments de $\mathbb{R}^n$ soit en les écrivant

- horizontalement : $(1, 4, -7)$. On parle alors de vecteur ligne.
- verticalement : $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ on parle alors de vecteur colonne.

La transformation qui associe à un vecteur ligne un vecteur colonne s'appelle transposition:

$${}^t(1, 4, -7) = (1, 4, -7)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

La somme sur $\mathbb{R}^n$

Définition (Somme)

Si on a deux vecteurs $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ *et* $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$*, on* **définit** *leur "somme" :*

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

La somme sur $\mathbb{R}^n$

Définition (Somme)

Si on a deux vecteurs $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on **définit** *leur "somme" :*

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -27 \\ \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ -17 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Produit par scalaire

Définition (Produit par scalaire)

Si on a un vecteur $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *et un nombre réel* λ *de* $\mathbb{R}$, *on* **définit** *leur "produit" :*

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Produit par scalaire

Définition (Produit par scalaire)

Si on a un vecteur $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *et un nombre réel* λ *de* $\mathbb{R}$, *on* **définit** *leur "produit" :*

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Exemple

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -27 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -27\sqrt{2} \\ \pi\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Vecteur nul et opposé

- Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Vecteur nul et opposé

- Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- L'opposé de $\vec{u}$ est le vecteur $-\vec{u} = (-1) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$

Combinaison linéaire

Définition (Combinaison linéaire)

Si on a deux vecteurs $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et deux scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on **appelle** *"leur combinaison linéaire à poids λ_1, λ_2" le vecteur :*

$$\lambda_1 \vec{x} + \lambda_2 \vec{y} = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1, \lambda_1 x_2 + \lambda_2 y_2, \ldots, \lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n).$$

Combinaison linéaire

Définition (Combinaison linéaire)

Si on a deux vecteurs $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *et deux scalaires* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$*, on* **appelle** *"leur combinaison linéaire à poids* λ_1, λ_2*" le vecteur :*

$$\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1, \lambda_1 x_2 + \lambda_2 y_2, \ldots, \lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n).$$

Exemple

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Test

Exercice

La combinaison linéaire de $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *à poids* $\lambda_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = -1$ *est :*

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$,
3. $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Définition (Espace vectoriel)

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est un ensemble E dont les éléments sont dits vecteurs qui est muni de deux loi de composition :

Définition (Espace vectoriel)

*Un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$ est un ensemble E dont les éléments sont dits **vecteurs** qui est muni de deux loi de composition :*

- *La somme* $+ : E \times E \to E$ *qui associe à deux vecteurs* u, v *un vecteur noté* $u + v$ *et qui a les propriétés suivantes:*
  - $\forall u, v \in E$ *on a* $u + v = v + u$ *(commutativité),*
  - $\forall u, v, w \in E$ *on a* $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(associativité),*
  - *il existe un "élément neutre" noté* $\vec{0}$, *ou* 0_E, *ou* 0, *tel que* $\forall u \in E : \vec{0} + u = u$,
  - $\forall u \in E$ *il existe un vecteur noté* $-u$ *tel que* $u + (-u) = \vec{0}$.

Espaces vectoriels

Définition (Espace vectoriel)

Un *espace vectoriel* *sur $\mathbb{R}$ est un ensemble E dont les éléments sont dits* *vecteurs* *qui est muni de deux loi de composition :*

- *La somme* $+ : E \times E \to E$ *qui associe à deux vecteurs u, v un vecteur noté $u+v$ et qui a les propriétés suivantes:*
  - $\forall u, v \in E$ *on a* $u+v=v+u$ *(commutativité),*
  - $\forall u, v, w \in E$ *on a* $(u+v)+w=u+(v+w)$ *(associativité),*
  - *il existe un "élément neutre" noté $\vec{0}$, ou 0_E, ou 0, tel que* $\forall u \in E : \vec{0}+u=u$*,*
  - $\forall u \in E$ *il existe un vecteur noté $-u$ tel que* $u+(-u)=\vec{0}$*.*
- *Le produit par scalaire* $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$ *qui associe à $\lambda \in \mathbb{R}$ et à $u \in E$ un vecteur noté $\lambda \cdot u$ ou λu et tel que :*
  - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *on a* $\lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u$*,*
  - $\forall u \in E$ *on a* $1u=u$*.*

De plus, on a les propriétés suivantes de compatibilité entre $+$ et $\cdot$:

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E$ on a $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$,
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in E$ on a $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

Remarque

Toutes ces propriétés font que la somme et le produit par scalaire des vecteurs ont le comportement habituel.

Exemple

Sont des espaces vectoriels:

- $\mathbb{R}^n$ *avec la somme et le produit par scalaire donnés avant. Son vecteur neutre est* $\vec{0} =$

Exemple

Sont des espaces vectoriels:

- $\mathbb{R}^n$ *avec la somme et le produit par scalaire donnés avant. Son vecteur neutre est* $\vec{0} = (0, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ *(vecteur nul).*

Exemple

Sont des espaces vectoriels:

- $\mathbb{R}^n$ *avec la somme et le produit par scalaire donnés avant. Son vecteur neutre est* $\vec{0} = (0, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ *(vecteur nul).*
- *Les polynômes à coefficients réels.*
- *Les polynômes à coefficients réels de degré* $\leq n$.
- *Les fonctions de* $[0, 1]$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$.

Espaces vectoriels

Exemple

Sont des espaces vectoriels:

- $\mathbb{R}^n$ *avec la somme et le produit par scalaire donnés avant. Son vecteur neutre est* $\vec{0} = (0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ *(vecteur nul).*
- *Les polynômes à coefficients réels.*
- *Les polynômes à coefficients réels de degré* $\leq n$.
- *Les fonctions de* $[0, 1]$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$.

Exemple

Ne sont pas des espaces vectoriels : pourquoi ?

- *Les fonctions de* $[0, 1]$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *telles que* $f(0) = 3$.
- *Les polynômes à coefficients réels de degré exactement* 2.

Sous-espaces vectoriels

Dans la suite E désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition

Un sous ensemble F de E est un sous-espace vectoriel (ssev) s'il est non-vide et:

1. $\forall u, v \in F$ *on a* $u + v \in F$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in F$ *on a* $\lambda v \in F$.
   En particulier F est un espace vectoriel.
   On résume les propriétés 1 et 2 en une seule propriété :
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in F$, *on a* $u + \lambda v \in F$.

Exemple

$F = \{\vec{0}\}$ et $F = E$ sont des sous-espaces vectoriels de E. Ces deux exemples existent en tout espace vectoriel E, ils sont donc dits les sous-espaces vectoriels triviaux de E.

Exemple

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y + z = 0\}$ *est un ssev de* $\mathbb{R}^3$.

- *Il contient* $(0, 0, 0)$ *car* $3 \cdot 0 + 0 + 0 = 0$, *donc est non vide.*
- *Si* $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z') \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $3x + y + z = 0$ *et* $3x' + y' + z' = 0$.

Exemple

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y + z = 0\}$ *est un ssev de* $\mathbb{R}^3$.

- *Il contient* $(0, 0, 0)$ *car* $3 \cdot 0 + 0 + 0 = 0$, *donc est non vide.*
- *Si* $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z') \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $3x + y + z = 0$ *et* $3x' + y' + z' = 0$. *On a:* $u + \lambda v = (x, y, z) + \lambda(x', y', z') = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$ *et* $3(x + \lambda x') + (y + \lambda y') + (z + \lambda z')$ $= 3x + y + z + \lambda(3x' + y' + z') = 0$.

Test

Exemple

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y + z = 0\}$ *est un ssev de* $\mathbb{R}^3$*.*

- *Il contient* $(0, 0, 0)$ *car* $3 \cdot 0 + 0 + 0 = 0$*, donc est non vide.*
- *Si* $u = (x, y, z)$*,* $v = (x', y', z') \in F$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$*, alors*
  $3x + y + z = 0$ *et* $3x' + y' + z' = 0$*. On a:*
  $u + \lambda v = (x, y, z) + \lambda(x', y', z') = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$
  et $3(x + \lambda x') + (y + \lambda y') + (z + \lambda z')$
  $= 3x + y + z + \lambda(3x' + y' + z') = 0.$
  D'où $u + \lambda v \in F$*.*

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}^2$ *et* $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$. *Laquelle des assertions suivantes est vraie?*

1. F *est un ssev de* E,
2. F *n'est pas un ssev de* E,
3. *vous ne pouvez pas dire si* F *est ou pas un ssev de* E.

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}^2$ *et* $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\}$. *Laquelle des assertions suivantes est vraie?*

1. F *est un ssev de* E,
2. F *n'est pas un ssev de* E,
3. *vous ne pouvez pas dire si* F *est ou pas un ssev de* E.

Sous-espaces vectoriels et systèmes linéaires homogènes

Soit (S_H) un système homogène :

$$(S_H)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad + & + \quad \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Proposition

L'ensemble des solutions de (S_H) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Soit

$$(S)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Ses solutions sont :

Exemple

Soit

$$(S)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Ses solutions sont :

$$Sol(S) = \{(t, -t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exemple

Soit

$$(S)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Ses solutions sont :

$$Sol(S) = \{(t, -t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Oui, en effet il est non vide car contient $(0, 0, 0)$; de plus si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v, w \in Sol(S)$ alors $v = (t_1, -t_1, t_1)$ pour un certain $t_1 \in \mathbb{R}$ et $w = (t_2, -t_2, t_2)$ pour un certain $t_2 \in \mathbb{R}$. On a:

Exemple

Soit

$$(S)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Ses solutions sont :

$$Sol(S) = \{(t, -t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Oui, en effet il est non vide car contient $(0, 0, 0)$; de plus si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v, w \in Sol(S)$ alors $v = (t_1, -t_1, t_1)$ pour un certain $t_1 \in \mathbb{R}$ et $w = (t_2, -t_2, t_2)$ pour un certain $t_2 \in \mathbb{R}$. On a:

1. $v + w = (t_3, -t_3, t_3)$ avec $t_3 = t_1 + t_2$, donc $v + w \in Sol(S)$.

Exemple

Soit

$$(S)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Ses solutions sont :

$$Sol(S) = \{(t, -t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Oui, en effet il est non vide car contient $(0, 0, 0)$; de plus si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v, w \in Sol(S)$ alors $v = (t_1, -t_1, t_1)$ pour un certain $t_1 \in \mathbb{R}$ et $w = (t_2, -t_2, t_2)$ pour un certain $t_2 \in \mathbb{R}$. On a:

1. $v + w = (t_3, -t_3, t_3)$ avec $t_3 = t_1 + t_2$, donc $v + w \in Sol(S)$.
2. $\lambda v = (t_4, -t_4, t_4)$ avec $t_4 = \lambda t_1$ donc $\lambda v \in Sol(S)$.

Exemple

Soit

$$(S)\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ x_1-x_3=0. \end{cases}$$

Ses solutions sont :

$$Sol(S)=\{(t,-t,t)\in\mathbb{R}^3 : t\in\mathbb{R}\}.$$

Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Oui, en effet il est non vide car contient $(0,0,0)$; de plus si $\lambda\in\mathbb{R}$ et $v,w\in Sol(S)$ alors $v=(t_1,-t_1,t_1)$ pour un certain $t_1\in\mathbb{R}$ et $w=(t_2,-t_2,t_2)$ pour un certain $t_2\in\mathbb{R}$. On a:

1. $v+w=(t_3,-t_3,t_3)$ avec $t_3=t_1+t_2$, donc $v+w\in Sol(S)$.
2. $\lambda v=(t_4,-t_4,t_4)$ avec $t_4=\lambda t_1$ donc $\lambda v\in Sol(S)$.

Remarque

Si on dessine $Sol(S)$ dans $\mathbb{R}^3$, on obtient une droite qui passe par l'origine et par $(1,-1,1)$: c'est une droite vectorielle.

Intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection $F_1 \cap F_2$ de F_1 et F_2 est un sous-espace vectoriel de E.

Intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection $F_1 \cap F_2$ de F_1 et F_2 est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

$F_1 \cap F_2$ est non vide car $\vec{0} \in F_1 \cap F_2$.
Si $u, v \in F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $u + \lambda v \in F_1$ car F_1 est un ssev de E.
Si $u, v \in F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $u + \lambda v \in F_2$ car F_2 est un ssev de E.
Donc si $u, v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a bien $u + \lambda v \in F_1 \cap F_2$.

Test

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$ *et* $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$. *Laquelle des assertions suivantes est vraie?*

1. $F_1 \cup F_2 = E$.
2. $F_1 \cap F_2$ *est un ssev de* E.
3. $F_1 \cup F_2$ *est un ssev de* E.
4. *Vous ne pouvez pas dire si* $F_1 \cap F_2$ *est un ssev de* E.

Test

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$ *et* $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$. *Laquelle des assertions suivantes est vraie?*

1. $F_1 \cup F_2 = E$.
2. $F_1 \cap F_2$ *est un ssev de* E.
3. $F_1 \cup F_2$ *est un ssev de* E.
4. *Vous ne pouvez pas dire si* $F_1 \cap F_2$ *est un ssev de* E.

Réponse

$F_1 \cap F_2$ *est un ssev de* E. *En effet,* $F_1 \cap F_2 = \{(0,0)\}$ *est l'intersection des droites vectorielles d'équations* $x + 2y = 0$ *et* $2x + y = 0$.

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ *et* $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. *Alors* $F_1 \cup F_2$ *est :*

1. *tout* E,
2. *un ssev de* E,
3. *vous ne pouvez pas dire si* $F_1 \cap F_2$ *est un ssev de* E,
4. *aucune des précédentes.*

Somme de deux sous-espaces

Définition (Somme de deux sous-espaces)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
La somme de F et G est l'ensemble

$$F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}$$

Somme de deux sous-espaces

Définition (Somme de deux sous-espaces)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
La somme de F et G est l'ensemble

$$F + G = \left\{u + v \,\middle|\, u \in F, v \in G\right\}$$

Proposition

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant à la fois F et G.

Somme directe de deux sous-espaces

Définition (Somme directe de deux sous-espaces)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. F et G sont supplémentaires dans E si $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.
On note alors $E = F \oplus G$ et on dit que E est la somme directe de F et G.

Somme directe de deux sous-espaces

Définition (Somme directe de deux sous-espaces)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. F et G sont supplémentaires dans E si $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.
On note alors $E = F \oplus G$ et on dit que E est la somme directe de F et G.

Proposition

F et G sont supplémentaires dans E ssi tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Sous-espace engendré $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$

Théorème (Structure de l'ensemble des combinaisons linéaires)

Soient $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

- *L'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_n$ est un sous-espace vectoriel de E.*
- *C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $v_1, \ldots, v_n$.*

Sous-espace engendré $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$

Théorème (Structure de l'ensemble des combinaisons linéaires)

Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

- *L'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \dots, v_n$ est un sous-espace vectoriel de E.*
- *C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $v_1, \dots, v_n$.*

Cet ensemble est appelé sous-espace engendré par $v_1, \dots, v_n$.
Il est noté $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

Sous-espace engendré $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$

Théorème (Structure de l'ensemble des combinaisons linéaires)

Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

- *L'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \dots, v_n$ est un sous-espace vectoriel de E.*
- *C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $v_1, \dots, v_n$.*

Cet ensemble est appelé sous-espace engendré par $v_1, \dots, v_n$.
Il est noté $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

$$\boxed{u \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) \iff \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n}$$

Sous-espace vectoriel engendré

Définition

Soit $\{v_1, \ldots v_n\}$ *une famille de vecteurs de* E*. Alors* $Vect(v_1, \ldots v_n)$ *est l'ensemble des vecteurs de* E *qui sont combinaisons linéaires des* $v_1, \ldots v_n$ *:*

$$Vect(v_1, \ldots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \in E : \lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i\}.$$

Notation

Pour ne pas écrire des sommes avec des points de suspension comme ci dessus, on utilise le symbole de somme $\sum$*. Par exemple* $Vect(v_1, \ldots, v_n)$ *se ré-écrit aussi de façon équivalente*

$$Vect(v_1, \ldots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in E : \lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i \right\}.$$

Sous-espace vectoriel engendré

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ *soit* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *On a*

$$\begin{aligned} Vect(v_1, v_2, v_3) &= \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, 0) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\gamma, \mu, 0) \in \mathbb{R}^3 : \gamma, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

On a donc $Vect(v_1, v_2, v_3) = Vect(v_1, v_2)$ *!*

Remarque

L'exemple précédent montre que des vecteurs peuvent engendrer un ssev mais être "redondants" (dans l'exemple v_3 *ne servait pas à grand chose:* $v_3 = v_1 + v_2$*). Les notions de système générateur et/ou lié vont clarifier cela.*

Bases

Définition

Un système $v_1, \dots, v_n$ *de vecteurs de* E *est* ***générateur*** *si tout vecteur* u *de* E *est combinaison linéaire des* v_i*. C'est-à-dire qu'il existe des coefficients* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

De façon équivalente, il est générateur si $Vect(v_1, \dots, v_n) = E$*.*

Remarque

Dans l'exemple précédent v_1, v_2 *est un système générateur pour* $Vect(v_1, v_2, v_3)$*, tout comme* v_1, v_2, v_3*.*

Test

Exercice

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une famille génératrice pour* $\mathbb{R}^3$ *:*

1. *vrai,*
2. *faux,*
3. *vous ne savez pas.*

Exercice

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est une famille génératrice pour* $\mathbb{R}^3$ *:*

1. *vrai,*
2. *faux,*
3. *vous ne savez pas.*

Bases

Définition

Un système $v_1, \ldots, v_n$ de vecteurs de E est *libre* *si*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0} \implies \lambda_i = 0 \; \forall i.$$

C'est-à-dire, le seul moyen d'obtenir $\vec{0}$ comme combinaison linéaire des $v_1, \ldots, v_n$ est de prendre tous les poids $\lambda_i = 0$.
Dans ce cas les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont dits *linéairement indépendants*.
Un système qui n'est pas libre est *lié* *: les vecteurs sont alors dits* *linéairement dépendants*.

Test

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ *la famille* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *est liée:*

1. *vrai,*
2. *faux,*
3. *vous ne savez pas.*

Test

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ *la famille* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *est liée:*

1. *vrai,*
2. *faux,*
3. *vous ne savez pas.*

Réponse

S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ *non nul tel que* $v_1 = \lambda v_2$*, alors* $-2\lambda = 1$ *et* $4\lambda = 2$*, soit* $\lambda = -\frac{1}{2}$ *et* $\lambda = \frac{1}{2}$*. Ce qui est absurde, donc la famille* $\{v_1, v_2\}$ *n'est pas liée. Les vecteurs* v_1 *et* v_2 *ne sont donc pas colinéaires.*

Test

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ *la famille* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est liée :*

1. *vrai,*
2. *faux,*
3. *vous ne savez pas.*

Définition

Un système $v_1, \ldots, v_n$ de vecteurs de E est une base de E s'il est libre et générateur.

Exemple

- $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.
- $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
- *En général si e_i est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la seule composante non nulle est la $i^{\text{ème}}$ qui est 1, alors $e_1, \ldots, e_n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

Test

Exercice

Dans $\mathbb{R}^2$ *la famille* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est une base :*

1. *vrai,*
2. *faux,*
3. *vous ne savez pas.*

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ *la famille* $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une base :*

1. *vrai,*
2. *faux,*
3. *vous ne savez pas.*

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ *la famille* $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une base :*

1. *vrai,*
2. *faux,*
3. *vous ne savez pas.*

Coordonnées

Proposition

Soit $v_1, \ldots, v_n$ une base de E. Alors tout vecteur u de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i .$$

Les coefficients λ_i sont les coordonnées de u dans la base $v_1, \ldots, v_n$ et on note

$$u \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Coordonnées

Exemple

Les coordonnées de $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *dans la base* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sont :*

Coordonnées

Exemple

Les coordonnées de $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *dans la base* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sont :*

$$u \begin{pmatrix} y \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Les coordonnées de $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *dans la base* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sont :*

$$u \begin{pmatrix} y \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}.$$

En effet on a bien :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Coordonnées

Exemple

Les coordonnées de $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *dans la base canonique* $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sont :*

Coordonnées

Exemple

Les coordonnées de $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *dans la base canonique* $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sont :*

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Coordonnées

Exemple

Les coordonnées de $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *dans la base canonique* $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sont :*

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En effet on a bien :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Test

Exercice

Les coordonnées de $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *dans la base* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sont :*

1. $u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
2. $u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
3. $u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
4. $u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
5. *aucune des précédentes.*

Existence des bases

On a parlé des bases mais on ne s'est pas assuré qu'elles existent en général :

Théorème

Soit $v_1, \ldots, v_k$ une famille de vecteurs de E.

- *Si $v_1, \ldots, v_k$ est une famille libre, on peut la compléter en une base de E. C-à-d, on peut trouver d'autres vecteurs $v_{k+1}, \ldots, v_n$ tels que $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ soit une base de E. (Par conséquent il existe toujours une base de E !)*
- *Si $v_1, \ldots, v_k$ est une famille génératrice de E, on peut en extraire une base de E. C-à-d, on peut trouver un sous ensemble des vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ qui est une base de E.*
- *Deux bases de E ont le même nombre d'éléments (dans la notation précédente, c'est n). Ce nombre est dit la dimension de E et noté $\dim(E)$. (Il peut être infini parfois!)*

Existence des bases

Exemple

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Il s'agit d'une famille libre dans* $\mathbb{R}^3$ *mais pas génératrice. Elle peut donc être complétée en une base en prenant par exemple*

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En général le choix n'est pas unique !

Existence des bases

Exemple

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Il s'agit d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$*. Mais elle n'est pas libre. On peut en extraire une base en prenant par exemple*

$$v_1, v_2, v_3$$

ou bien

$$v_1, v_2, v_4.$$

En général le choix n'est pas unique !

Existence des bases

Exemple

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$. *Cette base a donc* 3 *vecteurs tout comme la base canonique :*
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
La dimension de $\mathbb{R}^3$ *est donc* 3.

Exemple

En général, puisque $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$, *on a* $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Dimension et sous-espaces vectoriels

La dimension $\dim(E)$ est une sorte de mesure de la “taille” d’un espace vectoriel. Du coup un sous-espace vectoriel de E doit avoir dimension moindre :

Proposition

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors on a

$$0 \leq \dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus on a $\dim(F) = 0$ si et seulement si $F = \{\vec{0}\}$ et $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$.

Résultats complémentaires

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ une famille libre de E, et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors $\operatorname{Card}\mathcal{L} \leq \operatorname{Card}\mathcal{G}$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ une famille libre de E, et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors $\mathrm{Card}\,\mathcal{L} \leq \mathrm{Card}\,\mathcal{G}$.

Corollaire

Soit E un espace vectoriel admettant une base avec n éléments. Alors

1. *Toute famille libre de E a au plus n éléments.*
2. *Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.*

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ une famille libre de E, et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors $\operatorname{Card}\mathcal{L} \leq \operatorname{Card}\mathcal{G}$.

Corollaire

Soit E un espace vectoriel admettant une base avec n éléments. Alors

1. *Toute famille libre de E a au plus n éléments.*
2. *Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.*

Résultats complémentaires

Théorème

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille de n vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est une *base* de E,
2. $\mathcal{F}$ est une *famille libre* de E,
3. $\mathcal{F}$ est une *famille génératrice* de E.

Résultats complémentaires

Théorème

Soient E un espace vectoriel de dim. finie et F un sous-espace de E. Alors

1. *F est de dimension finie.*
2. $\dim F \leq \dim E$.
3. $F = E \iff \dim F = \dim E$.

Résultats complémentaires

Théorème

Soient E un espace vectoriel de dim. finie et F un sous-espace de E. Alors

1. *F est de dimension finie.*
2. $\dim F \leq \dim E$.
3. $F = E \iff \dim F = \dim E$.

Corollaire

Soient E un espace vectoriel et $F \supset G$ deux sous-espaces de E de dimensions finies. Alors $F = G \Longleftrightarrow \dim F = \dim G$.

Résultats complémentaires

Théorème (Théorème des quatre dimensions.)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. Alors
$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Résultats complémentaires

Théorème (Théorème des quatre dimensions.)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. Alors
$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Corollaire

1. *Si $E = F \oplus G$, alors* $\dim E = \dim F + \dim G$.
2. *Tout sous-espace d'un espace de dim. finie admet un supplémentaire.*

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$

Alors les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont

- Ceux de dimension 0 : donc seulement $\{\vec{0}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- Ceux de dimension 1 : donc les *droites vectorielles*, i.e. les espaces engendrés par un vecteur non nul. Par exemple la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 2)$ est $D = \{\lambda(1, 2) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Ceux de dimension 2 : donc seulement le plan $\mathbb{R}^2$.

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

Les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont

- Ceux de dimension 0 : donc seulement $\{\vec{0}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- Ceux de dimension 1 : donc les *droites vectorielles*, i.e. les espaces engendrés par un vecteur non nul. Par exemple la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 2, 4)$ est $D = \{(\lambda, 2\lambda, 4\lambda) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(1, 2, 4) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Ceux de dimension 2 : donc les *plans vectoriels*, i.e. les espaces engendrés par deux vecteurs non liés. Par exemple le plan vectoriel engendré par le vecteur $(1, 2, 4)$ et $(0, 0, 2)$ est
$$\begin{aligned} P &= \{\lambda_1(1, 2, 4) + \lambda_2(0, 0, 2) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda_1, 2\lambda_1, 4\lambda_1 + 2\lambda_2) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$
- Ceux de dimension 3 : donc seulement l'espace $\mathbb{R}^3$.

Un exemple

Exemple

Soit $F \subset \mathbb{R}^3$ le sous-ensemble défini comme suit :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \;\&\; x + y + z = 0 \right\}.$$

1. *Montrons qu'il est bien un sous-espace vectoriel.*
2. *Trouvons une base de F.*
3. *Et puis sa dimension.*

Réponse

1. *F est un ssev comme intersection de deux ssev: les plans vectoriels d'équations* $x + y - z = 0$ *et* $x + y + z = 0$*.*

Réponse

1. *F est un ssev comme intersection de deux ssev: les plans vectoriels d'équations* $x+y-z=0$ *et* $x+y+z=0$.

2. $$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0 \,\&\, x+y+z=0\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=z \,\&\, x+y=-z\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0, x=-y\} \\ &= \{(-y,y,0)\in\mathbb{R}^3 : y\in\mathbb{R}\} \\ &= Vect\big((-1,1,0)\big). \end{aligned}$$

Réponse

1. *F est un ssev comme intersection de deux ssev: les plans vectoriels d'équations $x+y-z=0$ et $x+y+z=0$.*

2. $$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0 \,\&\, x+y+z=0\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=z \,\&\, x+y=-z\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0, x=-y\} \\ &= \{(-y,y,0)\in\mathbb{R}^3 : y\in\mathbb{R}\} \\ &= Vect\big((-1,1,0)\big). \end{aligned}$$

   F est donc la droite vectorielle de vecteur directeur $u=(-1,1,0)$ qui en est une base.

Réponse

1. *F est un ssev comme intersection de deux ssev: les plans vectoriels d'équations $x+y-z=0$ et $x+y+z=0$.*

2. $$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0 \,\&\, x+y+z=0\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=z \,\&\, x+y=-z\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0, x=-y\} \\ &= \{(-y,y,0)\in\mathbb{R}^3 : y\in\mathbb{R}\} \\ &= Vect\big((-1,1,0)\big). \end{aligned}$$

   F est donc la droite vectorielle de vecteur directeur $u=(-1,1,0)$ qui en est une base.

3. *$F = Vect(u)$ avec $u=(-1,1,0)\neq\vec{0}$. Donc $\dim(F)=1$.*

Droites et plans vectoriels

Proposition

- *D est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ ssi $\exists$ un vecteur $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ tel que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$.*
- *P est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ssi $\exists$ $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ tel que $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$.*
- *Les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ sont intersection de deux plans vectoriels.*

Ces équations sont appelées équations cartésiennes. Attention : elles ne sont pas uniques.

Le déterminant 2D

Définition

Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. *On définit*

$$\det(u, v) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Lemme

Deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^2$ *sont linéairement indépendants (libres) si et seulement si* $\det(u, v) \neq 0$.
Donc ils sont colinéaires si et seulement si $\det(u, v) = 0$.

Corollaire

La droite vectorielle D engendrée par $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *a pour équation cartésienne* $bx - ay = 0$.

Exercice

L'équation cartésienne de la droite vectorielle engendrée par $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *est :*

1. $3x + y = 0,$
2. $3x - y = 0,$
3. $-3x - y = 0,$
4. $\frac{1}{3}x + y = 0,$
5. *aucune des précédentes.*

Plans vectoriels dans $\mathbb{R}^3$

Proposition

Le plan vectoriel

$$P = Vect\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}\right)$$

a pour équation cartésienne :

$$\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} z = 0.$$

Test

Exercice

L'équation cartésienne du plan vectoriel engendré par

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *est :*

1. $2x + 2y + 2z = 0$,
2. $2x - 2y + 2z = 0$,
3. $-2x - 2y + 2z = 0$,
4. $x + y + z = 0$,
5. *aucune des précédentes.*

Produit scalaire

Définition

Produit scalaire Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. *Leur produit scalaire est défini par*

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Produit scalaire

Définition

Produit scalaire Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. *Leur produit scalaire est défini par*

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Autres notations : (u, v), $(u|v)$, $\langle u|v \rangle$

Produit scalaire

Définition

Produit scalaire Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. *Leur produit scalaire est défini par*

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Autres notations : (u, v), $(u|v)$, $\langle u|v \rangle$

Proposition

Pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

- $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$

Produit scalaire

Définition

Produit scalaire Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$*. Leur produit scalaire est défini par*

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Autres notations : (u, v), $(u|v)$, $\langle u|v \rangle$

Proposition

Pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

- $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$
- $\langle u, (\lambda v + \mu w) \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle$

Définition

Produit scalaire Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. *Leur produit scalaire est défini par*

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Autres notations : (u, v), $(u|v)$, $\langle u|v \rangle$

Proposition

Pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

- $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$
- $\langle u, (\lambda v + \mu w) \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle$
- $\langle \lambda u, \mu v \rangle = \lambda \mu \langle u, v \rangle$

Norme

Définition (Norme)

La *norme* *de* $u \in \mathbb{R}^n$ *est* $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ *où* $\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2$

Norme

Définition (Norme)

La norme de $u \in \mathbb{R}^n$ est $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ où $\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2$

Par le théorème de Pythagore, $\|u\|$ est la longueur de u.

Proposition

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$.

- *Inégalité de Cauchy–Schwarz :* $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$
- *Inégalité triangulaire :* $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
- *Pythagore :* $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle$

Produit scalaire, cosinus et orthogonalité

Théorème (Théorème du cosinus)

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos(\theta_{u,v})$$

Conséquence : $u \perp v \iff \langle u, v\rangle = 0$

Définition (Base orthonormée)

Une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée si

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas, la décomposition de $u \in \mathbb{R}^n$ dans la base s'écrit $u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n$ avec $u_i = \langle e_i, u\rangle$ et sa norme vérifie

$$\|u\|^2 = u_1^2 + \cdots + u_n^2$$

Comment construire une base orthonormée?

Définition (Projection orthogonale)

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. La projection orthogonale de u sur v, notée $proj_v(u)$ est définie par

$$proj_v(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\, v$$

Proposition

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$.

- $\langle proj_v(u), v\rangle = \langle u, v\rangle$
- $\langle u - proj_v(u)), v\rangle = 0$
- $\|u\|^2 = \|proj_v(u))\|^2 + \|u - proj_v(u))\|^2$

Comment construire une base orthonormée?

Définition (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ *une base de* $\mathbb{R}^n$.

1. *On peut construire de manière itérative une base de* $\mathbb{R}^n$ *composée de vecteurs* $(e_1, \ldots, e_n)$ *orthogonaux deux à deux par le procédé suivant :*

$$e_1 = v_1,\ e_2 = v_2 - proj_{e_1}(v_2), \ldots, e_n = v_n - \sum_{j=1}^{n-1} proj_{e_j}(v_n)$$

2. *On peut ensuite construire* $(u_1, \ldots, u_n)$*, une base orthonormée de* $\mathbb{R}^n$ *par le procédé suivant :*

$$u_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1,\ u_2 = \frac{1}{\|e_2\|} e_2, \ldots, u_n = \frac{1}{\|e_n\|} e_n$$

Produit vectoriel

Définition (Produit vectoriel)

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. *Leur produit vectoriel est défini par*

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Produit vectoriel

Proposition

Pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $v \wedge u = -u \wedge v$
- $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$
- $\lambda(u \wedge v) = (\lambda u) \wedge v = u \wedge (\lambda v)$

Produit vectoriel

Proposition

Pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $v \wedge u = -u \wedge v$
- $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$
- $\lambda(u \wedge v) = (\lambda u) \wedge v = u \wedge (\lambda v)$
- $(u \wedge v) \cdot u = 0$. *et* $(u \wedge v) \cdot v = 0$
  donc $u \wedge v$ *est orthogonal à* u *et* v

Produit vectoriel

Proposition

Pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*,*

- $v \wedge u = -u \wedge v$
- $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$
- $\lambda(u \wedge v) = (\lambda u) \wedge v = u \wedge (\lambda v)$
- $(u \wedge v) \cdot u = 0$. *et* $(u \wedge v) \cdot v = 0$
  donc $u \wedge v$ *est orthogonal à* u *et* v
- $\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\| \sin \theta = \mathcal{A}$*, où* $\mathcal{A}$ *est l'aire du parallélogramme engendré par* u *et* v*.*