基本等值式

双重否定	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	1
幂等律	$A\vee A \Leftrightarrow A$, $A\wedge A \Leftrightarrow A$	2
交换律	$A\vee B \Leftrightarrow B\vee A$, $A\wedge B \Leftrightarrow B\wedge A$	3
结合律	$(A\vee B)\vee C \Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$ $(A\wedge B)\wedge C \Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$	4
分配律	$A\vee(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(A\vee C)$ $A\wedge(B\vee C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$	5
吸收律	$A\vee(A\wedge B) \Leftrightarrow A$, $A\wedge(A\vee B) \Leftrightarrow A$	6

基本等值式

德·摩根律	$\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg A\wedge\neg B$, $\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$	7
零律	$A\wedge 0 \Leftrightarrow 0$, $A\vee 1 \Leftrightarrow 1$	8
同一律	$A\vee 0 \Leftrightarrow A$, $A\wedge 1 \Leftrightarrow A$	9
排中律	$A\vee\neg A \Leftrightarrow 1$,	10
矛盾律	$A\wedge\neg A \Leftrightarrow 0$	11
蕴涵等值式	$A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$	12

基本等值式

等价等值式	$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$ $\Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$ $\neg(A\leftrightarrow B)$ $\Leftrightarrow (A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$ $\Leftrightarrow A\leftrightarrow\neg B$	13
假言易位	$A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg B\rightarrow\neg A$	14
等价否定等值式	$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A\leftrightarrow\neg B$	15
归谬论	$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B) \Leftrightarrow \neg A$	16

注意：A,B,C是元语言符号，代表任意的命题公式.

牢记这些等值式是继续学习的基础

推理定律—重言蕴涵式

$(A\to B)\wedge A \Rightarrow B$	假言推理
$A \Rightarrow (A\vee B)$	附加律
$(A\wedge B) \Rightarrow A$	化简律
$(A\to B)\wedge\neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
$(A\to B)\wedge(B\to C) \Rightarrow (A\to C)$	假言三段论
$(A\vee B)\wedge\neg B \Rightarrow A$	析取三段论
$(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C) \Rightarrow (A\leftrightarrow C)$	等价三段论
$(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(A\vee C) \Rightarrow (B\vee D)$	构造性二难
$(A\to B)\wedge(\neg A\to B) \Rightarrow B$	构造性二难（特殊形式）
$(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(\neg B\vee\neg D) \Rightarrow (\neg A\vee\neg C)$	破坏性二难

消去量词等值式

- 设个体域为有限集$D=\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$, 则

  （1）$\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\ldots\wedge A(a_n)$

  （2）$\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n)$

- 例: 个体域$D=\{a,b,c\}$, 则

$$\begin{aligned}\exists x \forall y F(x,y) &\Leftrightarrow \exists x\,(F(x,a)\wedge F(x,b)\wedge F(x,c))\\ &\Leftrightarrow (F(a,a)\wedge F(a,b)\wedge F(a,c))\\ &\quad\vee(F(b,a)\wedge F(b,b)\wedge F(b,c))\\ &\quad\vee(F(c,a)\wedge F(c,b)\wedge F(c,c))\end{aligned}$$

量词否定等值式

- 设$A(x)$是含x自由出现的公式

  $\neg\forall x A(x)\Leftrightarrow \exists x\,\neg A(x)$

  $\neg\,\exists x A(x)\Leftrightarrow\forall x\,\neg A(x)$

- 直观解释：
  - “并不是所有的x都有性质A” 与“存在x没有性质A”是一回事。
  - “不存在x有性质A”与“所有x都没有性质A”是一回事。

量词辖域收缩与扩张等值式

- 设$A(x)$是含个体变项x自由出现的公式，B中不含x的自由出现

关于全称量词的：

$\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$

$\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$

$\forall x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\rightarrow B$

$\forall x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

关于存在量词的:

$\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$

$\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$

$\exists x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow B$

$\exists x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

量词分配等值式

- 设公式$A(x),B(x)$含自由出现的个体变项x，则

  $\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

  $\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

- 注意：$\forall$对$\vee$无分配律，$\exists$对$\wedge$无分配律, 即

  $\forall x(A(x)\vee B(x))\nLeftrightarrow\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$（$\Leftarrow$成立）

  $\exists x(A(x)\wedge B(x))\nLeftrightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$（$\Rightarrow$成立）

换名规则

- A为一公式，把A中某个指导变元和其量词辖域中所有同名的约束出现, 都换成某个新的个体变元符号，其余部分不变，所得公式记为B, 则$B\Leftrightarrow A$。
- 例如:
  - $\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall yB(y)$
  - $H(x,y)\vee\exists xF(x)\vee\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y))$

    $\Leftrightarrow H(x,y)\vee\exists zF(z)\vee\forall u(G(u)\rightarrow H(x,u))$

推理定律

- 第三组：一些常用的重要推理定律。

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow\forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

$(P(0)\ \&\ \forall m\in\omega.\,P(m)\Rightarrow P(m+1))\Rightarrow\forall n\in\omega.\,P(n)$

- $P(0)$：归纳基础
- $P(m)$：归纳假设
- $\forall m\in\omega.\,P(m)\Rightarrow P(m+1)$：归纳步骤

串值归纳法

$\forall m\in\omega.\,(\forall k<m.\,Q(k))\Rightarrow Q(m)\Rightarrow\forall n\in\omega.\,Q(n)$

结构归纳法

以算术表达式为例：所有原子表达式性质 $P(a)$ 为真，并且对所有算术表达式的各种构成方法该性质也保持为真。

$\forall a\in\mathrm{Aexp}.\,P(a)$ 当且仅当

$$\begin{aligned}
&\forall m\in\mathbb{N}. && P(m)\backslash\mathrm{mamp}\\
&\forall X\in\mathrm{Loc}. && P(X)\backslash\mathrm{mamp}\\
&\forall a_0,a_1\in\mathrm{Aexp}. && P(a_0)\backslash\mathrm{mamp}P(a_1)\ \Rightarrow P(a_0+a_1)\backslash\mathrm{mamp}\\
&\forall a_0,a_1\in\mathrm{Aexp}. && P(a_0)\backslash\mathrm{mamp}P(a_1)\ \Rightarrow P(a_0-a_1)\backslash\mathrm{mamp}\\
&\forall a_0,a_1\in\mathrm{Aexp}. && P(a_0)\backslash\mathrm{mamp}P(a_1)\ \Rightarrow P(a_0\times a_1)
\end{aligned}\tag{1}$$

良基归纳法

本质：避免无穷下降链

定义：设 $\prec$ 是集合 A 上的二元关系，如果不存在由 A 中元素构成的无穷下降链 $\cdots\prec a_i\prec\cdots\prec a_1\prec a_0$，则称 $\prec$ 为良基关系。若 $a\prec b$ 则称 a 是 b 的前趋。

特点：

- 不一定有传递性
- 一定是非自反的
- 用 $\preceq$ 表示 $\prec$ 的自反闭包

原理：设 $\prec$ 是集合 A 上的良基关系，P 是某一性质，则 $\forall a\in A.\,P(a)$ 当且仅当 $\forall a\in A.\,((\forall b\prec a.\,P(b))\Rightarrow P(a))$

对推导的归纳

一个规则实例的集合 R 由一组序偶 (X/y) 所组成，其中，X 是一个有限集合，y 是一个元素。称序偶 (X/y) 是以 X 为前提，y 为结论的一个规则实例。

假设 R 是一组规则实例，y 的 R 推导要么是规则实例 (Φ/y)，要么是序偶 $(\{d_1,\ldots,d_n\}/y)$，其中 $(\{x_1,\ldots,x_n\}/y)$ 是一个规则实例，且 d_1 是 x_1 的 R 推导，…，d_n 是 x_n 的 R 推导。我们用 $d\Vdash_R y$ 表示 d 是 y 的一个 R 推导。

- $(\Phi/y)\Vdash_R y$ 如果 $(\Phi/y)\in R$
- $(\{d_1,\ldots,d_n\}/y)$ 如果 $(\{x_1,\ldots,x_n\}/y)\ \&\ d_1\Vdash_R x_1\ \&\ \ldots\ \&\ d_n\Vdash_R x_n$

令 d，d' 都是推导，称 d' 是 d 的直接子推导（记作 $d'\prec_1 d$），当且仅当 d 形为 (D/y) 且 $d'\in D$。

用 $\prec$ 表示 $\prec_1$ 的传递闭包，即 $\prec=\prec_1^+$ 。

称 d' 是 d 的真子推导当且仅当 $d'\prec d$。

因为推导是有限的，所以直接子推导和真子推导都是良基的。

通过归纳进行定义

$\mathrm{Loc}(a)$ 定义：

$$\begin{gathered}
\mathrm{Loc}(n)=\Phi\\
\mathrm{Loc}(X)=\{X\}\\
\mathrm{Loc}(a_0+a_1)=\mathrm{Loc}(a_0-a_1)=\mathrm{Loc}(a_0\times a_1)=\mathrm{Loc}(a_0)\cup\mathrm{Loc}(a_1)
\end{gathered}\tag{2}$$

$\mathrm{Loc}(b)$ 定义：

$$\begin{gathered}
\mathrm{Loc}(\mathrm{true})=\mathrm{Loc}(\mathrm{false})=\Phi\\
\mathrm{Loc}(a_0=a_1)=\mathrm{Loc}(a_0\le a_1)=\mathrm{Loc}(a_0)\cup\mathrm{Loc}(a_1)\\
\mathrm{Loc}(\neg b)=\mathrm{Loc}(b)\mathrm{Loc}(b_0\wedge b_1)=\mathrm{Loc}(b_0\vee b_1)=\mathrm{Loc}(b_0)\cup\mathrm{Loc}(b_1)
\end{gathered}\tag{3}$$

$\mathrm{Loc}_{\mathrm{L}}(c)$ 定义：

$$\begin{aligned}\mathrm{Loc_L}(\mathrm{skip}) &= \Phi \\ \mathrm{Loc_L}(X := a) &= \{X\} \\ \mathrm{Loc_L}(c_0; c_1) = \mathrm{Loc_L}(\text{if } b \text{ then } c_0 \text{ else } c_1) &= \mathrm{Loc_L}(c_0) \cup \mathrm{Loc_L}(c_1) \\ \mathrm{Loc_L}(\text{while } b \text{ do } c) &= \mathrm{Loc_L}(c)\end{aligned} \tag{4}$$

$\mathrm{Loc_R}(c)$ 定义：

$$\begin{aligned}\mathrm{Loc_R}(\mathrm{skip}) &= \Phi \\ \mathrm{Loc_R}(X := a) &= \mathrm{Loc}(a) \\ \mathrm{Loc_R}(c_0; c_1) = \mathrm{Loc_R}(\text{if } b \text{ then } c_0 \text{ else } c_1) &= \mathrm{Loc_R}(c_0) \cup \mathrm{Loc_R}(c_1) \\ \mathrm{Loc_R}(\text{while } b \text{ do } c) &= \mathrm{Loc_R}(c)\end{aligned} \tag{5}$$

定理

1. 算术表达式的确定性：$\langle a, \sigma\rangle \to m \ \&\ \langle a, \sigma\rangle \to m' \Rightarrow m = m'$
2. 极小元：设 $\prec$ 是集合 A 上的二元关系，称关系 $\prec$ 是良基的，当且仅当 A 的所有非空子集 Q 都含有一个极小元 m，即 $m \in Q \ \&\ \forall b \prec m.\, b \notin Q$
3. 程序执行的确定性：令 c 是一条命令，σ_0 是一个状态，对于所有状态 σ ，σ_1，如果 $\langle c, \sigma_0\rangle \to \sigma$ 且 $\langle c, \sigma_0\rangle \to \sigma_1$，则 $\sigma = \sigma_1$

第六章 归纳定义

规则归纳法

规则定义集合：规则实例形如：(Φ/x) 或 $(\{x_1, \ldots, x_n\}/x)$。给定一组规则实例 R，由 R 定义的集合记为 I_R，I_R 恰好由存在 R 推导的那些元素 x 组成，即：$I_R = \{x \mid \vdash_R x\}$

封闭：称集合 Q 对一组规则实例 R 是封闭的（简称 R 封闭）当且仅当对于 R 中所有规则实例 (X/y) 有 $X \subseteq Q \Rightarrow y \in Q$。如果 R 中任何规则实例的前提属于该集合时，它的结论也属于该集合，则该集合对这组规则实例 R 是封闭的。

一般原理：设 I_R 是由一组规则实例 R 定义的集合，P 是某个性质，则 $\forall x \in I_R.\, P(x)$ 当且仅当对于 R 中所有的规则实例 (X/y)，其中 $X \subseteq I_R$，有 $(\forall x \in X.\, P(x)) \Rightarrow P(y)$

特殊原理：设 I_R 是由一组规则实例 R 定义的集合，$A \subseteq I_R$，Q 是某个性质，则 $\forall a \in A.\, Q(a)$ 当且仅当对于 R 中所有的规则实例 (X/y)，其中 $X \subseteq I_R$，$y \in A$，有 $(\forall x \in (X \cap A).\, Q(x)) \Rightarrow Q(y)$

操作语义证明规则

算术表达式的规则归纳法

$\forall a \in \mathrm{Aexp}, \sigma \in \Sigma, n \in \mathbb{N}.\, \langle a, \sigma\rangle \to n \Rightarrow P(a, \sigma, n)$ 当且仅当

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}, \sigma \in \Sigma. && && P(n, \sigma, n)\backslash \\
&\forall X \in \mathrm{Loc}, \sigma \in \Sigma. && && P(X, \sigma, \sigma(\\
&\forall a_0, a_1 \in \mathrm{Aexp}, \sigma \in \Sigma, n_0, n_1 \in \mathbb{N}. && \langle a_0, \sigma\rangle \to n_0 \backslash \mathrm{mapm} P(a_0, \sigma, n_0) \backslash \mathrm{mapm} \langle a_1, \sigma\rangle \to n_1 \backslash \mathrm{mapm} P(a_1, \sigma, n_1) && \Rightarrow P(a_0 + \\
&\forall a_0, a_1 \in \mathrm{Aexp}, \sigma \in \Sigma, n_0, n_1 \in \mathbb{N}. && \langle a_0, \sigma\rangle \to n_0 \backslash \mathrm{mapm} P(a_0, \sigma, n_0) \backslash \mathrm{mapm} \langle a_1, \sigma\rangle \to n_1 \backslash \mathrm{mapm} P(a_1, \sigma, n_1) && \Rightarrow P(a_0 - \\
&\forall a_0, a_1 \in \mathrm{Aexp}, \sigma \in \Sigma, n_0, n_1 \in \mathbb{N}. && \langle a_0, \sigma\rangle \to n_0 \backslash \mathrm{mapm} P(a_0, \sigma, n_0) \backslash \mathrm{mapm} \langle a_1, \sigma\rangle \to n_1 \backslash \mathrm{mapm} P(a_1, \sigma, n_1) && \Rightarrow P(a_0 \times
\end{aligned}$$

布尔表达式的规则归纳法

$\forall b \in \mathrm{Bexp}, \sigma \in \Sigma, t \in \mathbb{T}.\, \langle b, \sigma\rangle \to t \Rightarrow P(b, \sigma, t)$ 当且仅当

$$\begin{aligned}
&\forall \sigma \in \Sigma. && && P(\mathrm{false}, \sigma, \mathrm{false}) \\
&\forall \sigma \in \Sigma. && && P(\mathrm{true}, \sigma, \mathrm{true}) \\
&\forall a_0, a_1 \in \mathrm{Aexp}, \sigma \in \Sigma, m, n \in \mathbb{N}. && \langle a_0, \sigma\rangle \to m \backslash \mathrm{mapm} \langle a_1, \sigma\rangle \to n \backslash \mathrm{mapm} m = n && \Rightarrow P(a_0 = a_1, \sigma \\
&\forall a_0, a_1 \in \mathrm{Aexp}, \sigma \in \Sigma, m, n \in \mathbb{N}. && \langle a_0, \sigma\rangle \to m \backslash \mathrm{mapm} \langle a_1, \sigma\rangle \to n \backslash \mathrm{mapm} m \neq n && \Rightarrow P(a_0 = a_1, \sigma \\
&\forall a_0, a_1 \in \mathrm{Aexp}, \sigma \in \Sigma, m, n \in \mathbb{N}. && \langle a_0, \sigma\rangle \to m \backslash \mathrm{mapm} \langle a_1, \sigma\rangle \to n \backslash \mathrm{mapm} m \leq n && \Rightarrow P(a_0 \leq a_1, \sigma \\
&\forall a_0, a_1 \in \mathrm{Aexp}, \sigma \in \Sigma, m, n \in \mathbb{N}. && \langle a_0, \sigma\rangle \to m \backslash \mathrm{mapm} \langle a_1, \sigma\rangle \to n \backslash \mathrm{mapm} m > n && \Rightarrow P(a_0 \leq a_1, \sigma \\
&\forall b \in \mathrm{Bexp}, \sigma \in \Sigma, t \in \mathbb{T}. && \langle b, \sigma\rangle \to t \backslash \mathrm{mapm} P(b, \sigma, t) && \Rightarrow P(\neg b, \sigma, \neg t)\backslash \\
&\forall b_0, b_1 \in \mathrm{Bexp}, \sigma \in \Sigma, t_0, t_1 \in \mathbb{T}. && \langle b_0, \sigma\rangle \to t_0 \backslash \mathrm{mapm} P(b_0, \sigma, t_0) \backslash \mathrm{mapm} \langle b_1, \sigma\rangle \to t_1 \backslash \mathrm{mapm} P(b_1, \sigma, t_1) && \Rightarrow P(b_0 \wedge b_1, \sigma, \\
&\forall b_0, b_1 \in \mathrm{Bexp}, \sigma \in \Sigma, t_0, t_1 \in \mathbb{T}. && \langle b_0, \sigma\rangle \to t_0 \backslash \mathrm{mapm} P(b_0, \sigma, t_0) \backslash \mathrm{mapm} \langle b_1, \sigma\rangle \to t_1 \backslash \mathrm{mapm} P(b_1, \sigma, t_1) && \Rightarrow P(b_0 \vee b_1, \sigma,
\end{aligned}$$

命令的规则归纳法

$\forall c \in \mathrm{Com}, \sigma, \sigma' \in \Sigma.\, \langle c, \sigma\rangle \to \sigma' \Rightarrow P(c, \sigma, \sigma')$ 当且仅当

$$
\begin{aligned}
&\forall \sigma \in \Sigma. && && P(\text{skip}, \sigma \\
&\forall X \in \text{Loc}, a \in \text{Aexp}, \sigma \in \Sigma, m \in \mathbb{N}. && \langle a, \sigma \rangle \to m && \Rightarrow P(X := \\
&\forall c_0, c_1 \in \text{Com}, \sigma, \sigma', \sigma'' \in \Sigma. && \langle c_0, \sigma \rangle \to \sigma'' \backslash \text{mamp} P(c_0, \sigma, \sigma'') \backslash \text{mamp} \langle c_1, \sigma'' \rangle \to \sigma' \backslash \text{mamp} P(c_0, \sigma'', \sigma') && \Rightarrow P(c_0; \\
&\forall c_0, c_1 \in \text{Com}, b \in \text{Bexp}, \sigma, \sigma' \in \Sigma. && \langle b, \sigma \rangle \to \text{true} \backslash \text{mamp} \langle c_0, \sigma \rangle \to \sigma' \backslash \text{mamp} P(c_0, \sigma, \sigma') \backslash \text{mamp} && \Rightarrow P(\text{if } b \\
&\forall c_0, c_1 \in \text{Com}, b \in \text{Bexp}, \sigma, \sigma' \in \Sigma. && \langle b, \sigma \rangle \to \text{false} \backslash \text{mamp} \langle c_0, \sigma \rangle \to \sigma' \backslash \text{mamp} P(c_1, \sigma, \sigma') \backslash \text{mamp} && \Rightarrow P(\text{if } b \\
&\forall c \in \text{Com}, b \in \text{Bexp}, \sigma \in \Sigma. && \langle b, \sigma \rangle \to \text{flase} && \Rightarrow P(\text{whi} \\
&\forall c \in \text{Com}, b \in \text{Bexp}, \sigma, \sigma', \sigma'' \in \Sigma. && \langle b, \sigma \rangle \to \text{true} \backslash \text{mamp} \langle c, \sigma \rangle \to \sigma'' \backslash \text{mamp} P(c, \sigma, \sigma'') \backslash \text{mamp} \\
& && \langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \to \sigma'' \backslash \text{mamp} P(\text{while } b \text{ do } c, \sigma'', \sigma') && \Rightarrow P(\text{whi}
\end{aligned}
$$

算子及其最小不动点

一组规则实例 R 确定了集合上的算子 $\widehat{R}$, $\widehat{R}$ 作用于给定集合 B 得到另一个集合 $\widehat{R}(B) = \{y | \exists X \subseteq B. (X/y) \in R\}$

定理

1. 一个 R 封闭的集合必须包含所有公理示例（的结论）
2. 对于一组规则示例 R
   - I_R 是 R 封闭的
   - I_R 是最小的 R 封闭的（如果 Q 是对 R 封闭的集合，则 $I_R \subseteq Q$）
3. 一个集合 B 是 R 封闭的，当且仅当 $\widehat{R}(B) \subseteq B$
4. 设 $A = \bigcup_{n \in \omega} \widehat{R}^n(\Phi)$，则：
   - A 是 R 封闭的
   - $\widehat{R}(A) = A$
   - A 是最小的 R 封闭集

   (1) + (3) : $A = I_R$, (2) + (3) : A 是 $\widehat{R}$ 的最小不动点

课上习题

下面那一组小步语义规则正确描述了算术表达式求值中，右结合的乘法运算语义：

A

$$
\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to_1 \langle a_1', \sigma \rangle}{\langle a_0 \times a_1, \sigma \rangle \to_1 \langle a_0 \times a_1', \sigma \rangle} \quad \frac{\langle a_0, \sigma \rangle \to_1 \langle a_0', \sigma \rangle}{\langle n \times a_0, \sigma \rangle \to_1 \langle n \times a_0', \sigma \rangle} \quad \langle n \times m, \sigma \rangle \to_1 \langle p, \sigma \rangle \tag{9}
$$

其中 p 是 n 与 m 的积

B

$$
\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to_1 \langle a_1', \sigma \rangle}{\langle a_0 \times a_1, \sigma \rangle \to_1 \langle a_0 \times a_1', \sigma \rangle} \quad \frac{\langle a_0, \sigma \rangle \to_1 \langle a_0', \sigma \rangle}{\langle a_0 \times m, \sigma \rangle \to_1 \langle a_0' \times m, \sigma \rangle} \quad \langle n \times m, \sigma \rangle \to_1 \langle p, \sigma \rangle \tag{10}
$$

其中 p 是 n 与 m 的积

格局变换 $\langle X := 5; Y := 1, \sigma \rangle \to_1 \langle Y := 1, \sigma[5/X] \rangle$，运用了下面哪几条规则

A

$$
\frac{\langle a, \sigma \rangle \to_1 \langle a', \sigma \rangle}{\langle X := a, \sigma \rangle \to_1 \langle X := a', \sigma \rangle} \tag{11}
$$

B

$$
\frac{}{\langle X := m, \sigma \rangle \to_1 \sigma[m/X]} \tag{12}
$$

C

$$
\frac{\langle c_0, \sigma \rangle \to_1 \langle c_0', \sigma' \rangle}{\langle c_0; c_1, \sigma \rangle \to_1 \langle c_0'; c_1, \sigma' \rangle} \tag{13}
$$

D

$$\frac{\langle c_0, \sigma\rangle \to_1 \sigma'}{\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \to_1 \langle c_1, \sigma'\rangle} \tag{14}$$

一组命令语句序列根据命令执行语义规则进行格局变换，如果最终结果不是发散的（即命令会终止），则会在什么格局下停止?

A: $\langle \text{skip}, \sigma\rangle$

B: σ

C: $\langle n, \sigma\rangle$，n 为常数

D: $\langle t, \sigma\rangle$，t 为真值

下列说法正确的是:

$\dfrac{\langle 2,\sigma\rangle \to 2 \quad \langle 3,\sigma\rangle \to 3}{\langle 2\times 3,\sigma\rangle \to 6}$ 是规则实例，$\dfrac{\langle b_0,\sigma\rangle \to \text{true}}{\langle b_0 \vee b_1,\sigma\rangle \to \text{true}}$ 是推导

$\dfrac{\langle a_0,\sigma\rangle \to n_0 \quad \langle a_1,\sigma\rangle \to n_1}{\langle a_0+a_1,\sigma\rangle \to n}$ 是规则实例，$\overline{\langle 3,\sigma[5/X]\rangle \to 3}$ 是推导

$\dfrac{}{\langle 3,\sigma[5/X]\rangle \to 3}$ 是规则实例，$\dfrac{\overline{\langle 7,\sigma_0\rangle \to 7} \quad \overline{\langle 9,\sigma_0\rangle \to 9}}{\langle 7+9,\sigma_0\rangle \to 16}$ 是推导

$\dfrac{\langle b,\sigma\rangle \to_1 \langle b',\sigma\rangle}{\langle \neg b,\sigma\rangle \to_1 \langle \neg b',\sigma\rangle}$ 是规则实例，$\dfrac{\langle (X-3),\sigma\rangle \to 1 \quad \overline{\langle 5,\sigma\rangle \to 5}}{\langle (X-3)\times 5,\sigma\rangle \to 5}$ 是推导

如果要用规则归纳法的特殊原理证明命题 4.7 成立，即 $P(c,\sigma,\sigma')$ 对所有 c，σ，σ' 成立（也就是说对所有命令执行关系 $(c,\sigma)\to\sigma'$，性质 P 成立），其中 $P(c,\sigma,\sigma') \Leftrightarrow Y \notin Loc_L(c) \Rightarrow \sigma(Y) = \sigma'(Y)$ 针对下面这条 if 规则，应该如何证明?

$$\frac{\langle b,\sigma\rangle \to \text{true} \quad \langle c_0,\sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \text{if b then } c_0 \text{ else } c_1,\sigma\rangle \to \sigma'} \tag{15}$$

假设 $\langle b,\sigma\rangle \to \text{true}$ 成立，且 $Y \notin \text{Loc}_L(\text{if } b \text{ then } c_0 \text{ else } c_1)$，证明 $\sigma(Y) = \sigma'(Y)$

假设 $\langle b,\sigma\rangle \to \text{true}$，$\langle c_0,\sigma\rangle \to \sigma'$ 成立，且 $Y \notin \text{Loc}_L(\text{if } b \text{ then } c_0 \text{ else } c_1)$，证明 $\sigma(Y) = \sigma'(Y)$

假设 $\langle b,\sigma\rangle \to \text{true}$，$\langle c_0,\sigma\rangle \to \sigma'$，$P(c_0,\sigma,\sigma')$ 成立，且 $Y \notin \text{Loc}_L(\text{if } b \text{ then } c_0 \text{ else } c_1)$，证明 $\sigma(Y) = \sigma'(Y)$

假设 $\langle b,\sigma\rangle \to \text{true}$，$P(c_0,\sigma,\sigma')$ 成立，且 $Y \notin \text{Loc}_L(\text{if } b \text{ then } c_0 \text{ else } c_1)$，证明 $\sigma(Y) = \sigma'(Y)$

完成下列填空

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[\![\text{true}]\!]\sigma &= \underline{\quad\text{true}\quad} \\ \mathcal{B}[\![\neg(8=2)]\!]\sigma &= \underline{\quad\text{true}\quad} \\ \mathcal{C}[\![X := 2]\!]\sigma &= \underline{\quad\sigma[2/X]\quad} \end{aligned} \tag{16}$$

下列部分（或完全）正确性断言是否有效?

$$\begin{array}{ccccc} \{x>3\} & x := x-1 & \{x>2\} & \checkmark \\ \{x\geq 8\} & \text{while } x\neq 8 \text{ do } x := x-1 & \{x=8\} & \checkmark \\ \{\text{true}\} & \text{while } x\neq 8 \text{ do } x := x-1 & \{x=8\} & \checkmark \\ [\text{true}] & \text{while } x\neq 8 \text{ do } x := x-1 & [x=8] & \times \end{array} \tag{17}$$

下列部分正确性断言有效的是:

A

$$\{X\leq 3\} \quad X := X+Y \quad \{X+Y\leq 3\} \tag{18}$$

B

$$\{Y\leq 3\} \quad X := X+Y \quad \{X+Y\leq 3\} \tag{19}$$

C

$$\{X+Y\leq 3\} \quad X := X+Y \quad \{X\leq 3\} \tag{20}$$

D

$$\{X+X\leq 3\} \quad X := X+Y \quad \{X+Y\leq 3\} \tag{21}$$

下列最弱前条件正确的是:

$$\begin{array}{lll} \{\quad\} & \text{while } (X = 1) \text{ do } Y := Y + 1 & \{\text{false}\} \\ \{\quad\} & Z := X; X := Y; Y := Z & \{Z = X\} \end{array} \tag{22}$$

$X \neq 1,\ X = Y$
$X = 1,\ X = Y$
$X = 1,\ X = Z$
$X \neq 1,\ Z = Y$

(23)