Es. 1

- Trovo la matrice $U\alpha$ eseguendo EG.
- Trovo la matrice $L\alpha$ moltiplicando la matrice identità per gli elementi individuati da EG. Ad esempio, $E_{32}(1)$ sta per valore 1 in posizione 3,2; se l'operazione avviene su una riga $E_3(1/2)$ devo moltiplicare la riga per 2.
- Moltiplicando la matrice $L\alpha$ per $U\alpha$ dovrei ottenere la matrice di partenza.
- Sostituisco alla matrice iniziale α ed eseguo EG +/- su quella matrice.
- Scrivo B composta da v_1, v_2... (matrice iniziale) che corrispondono ai numeri delle colonne dominanti della matrice precedente.
- Per trovare la base ortogonale applico GS: $u_1=v_1$ $(u_1|v_1)=...$ $\alpha_{1,2}=(u_1|v_2)/(u_1|u_1)=...$ $u_2=v_2- \alpha_{1,2}\cdot u_1=[]- \alpha[]=[]$ da cui $S=\{u_1=[];u_2=[]\}$.
- Per trovare la $N(A_2)$metto a sistema la matrice A_2 dopo EG e creo i vettori sostituendo alle variabili libere (valori nelle colonne non dominanti) h, k,... es: $\{x_1=3k; x_2=-2k; x_3=h; x_4=k$ da cui $\{k\cdot[3\ -2\ 0\ 1]^T ; h\cdot[0\ 0\ 1\ 0]^T\}$
- Per verificare se il sistema derivato da A_α ha soluzioni:
  - se l'ultima colonna è dominante <u>non ha soluzioni</u>
  - se tutte le colonne sono dominanti tranne l'ultima ho <u>1 soluzione</u>
  - se l'ultima e almeno un'altra colonna non sono dominanti il sistema ha <u>infinite soluzioni</u>

Es. 2

- Per verificare se β è una base di C^n eseguire EG +/- su β devo verificare: $\dim\beta = n = C^n$
- Per trovare B associata ad f eseguire EG su $\varepsilon\{e_1; e_2; e_3\}$ e si trovi il rango
- Scrivere: $C_\varepsilon(f_{(v)}) = Bc_\varepsilon(v) \rightarrow C_\beta(f(v)) = AC_\beta(v) \rightarrow C_\varepsilon(v) = M_{\varepsilon\leftarrow\beta} C_\beta(v) \rightarrow C_\varepsilon(f(v)) = M_{\varepsilon\leftarrow\beta} C_\beta(f(v))$ $\rightarrow M_{\varepsilon\leftarrow\beta}AC_\beta(v) \rightarrow M_{\varepsilon\leftarrow\beta}AM_{(\varepsilon\leftarrow\beta)\wedge-1} \rightarrow B$
- Per trovare la $M_{(\varepsilon\leftarrow\beta)\wedge-1}$ basta aggiungere a $M_{\varepsilon\leftarrow\beta}=\varepsilon$ l'identità a destra e portarla a sinistra con EG
- Per trovare B (matrice associata a f) moltiplico $M_{\varepsilon\leftarrow\beta}AM_{(\varepsilon\leftarrow\beta)\wedge-1}$ con B iniziale$=M_{\varepsilon\leftarrow\beta}$; A=A delle f e $M_{(\varepsilon\leftarrow\beta)\wedge-1}= M_{\varepsilon\leftarrow}\beta|I$ portando l'identità a sinistra
- Per trovare la base dell'immagine di f eseguo EG su B e per trovare i vettori di S prendo le colonne che corrispondono ai numeri delle colonne dominanti della matrice precedente.
- Per trovare la N(B)metto a sistema la matrice A_2 dopo EG e creo i vettori sostituendo alle variabili libere (valori nelle colonne non dominanti) h, k,... es: $\{x_1=k; x_2=-1/3k; x_3=k$ da cui $\{k\cdot[1\ -1/3\ 1]^T\}$
- Per verificare se un vettore $w=av_1+bv_2+cv_3$ aggiungo alla matrice B il vettore $[a\ b\ c]^T$ ed eseguo EG e:
  - se l'ultima colonna è dominante <u>non ha soluzioni</u>
  - se tutte le colonne sono dominanti tranne l'ultima ho <u>1 soluzione</u>
  - se l'ultima e almeno un'altra colonna non sono dominanti il sistema ha <u>infinite soluzioni</u>

Es. 3

- Per verificare per quali β B è diagonalizzabile calcolare $P_{b\beta}=\det[B_\beta-xI]$ definito polinomio caratteristico.
- Per identificare i casi, devo trovare quei valori di β che riconducono alcuni elementi del polinomio ad altri e l'ultimo caso viene prodotto ponendo i β trovati diversi dai valori precedentemente trovati.
- Per studiare i casi prendiamo i β trovati e li sostituiamo all'interno del $P_{b\beta}$ e definiamo la molteplicità algebrica (m) e la molteplicità geometrica (d), se $m=1 \rightarrow d=1$ altrimenti per calcolare d è necessario eseguire EG sulla matrice iniziale dopo aver sostituito β e aver tolto βI, $d=C^n$-rk(trovato).
- Per trovare una base per un autovalore di C^n scelgo un valore di β e dopo aver definito a che caso diagonalizzabile appartiene, sostituisco nella matrice iniziale a nel polinomio caratteristico β e per trovare l'autovettore faccio EG sulla matrice iniziale dopo aver sostituito i vari λ e faccio il sistema delle matrici risultanti ottenendo così gli autovettori, posso ora scrivere la matrice B composta dagli autovettori.

D1) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2x2 a coefficienti complessi. Esiste un sottospazio vettoriale di V di dimensione 6?
- No perché un sottospazio di uno spazio vettoriale V delle matrici 2x2 può avere dimensione massima pari alla dimensione dello spazio vettoriale.
D2) Sia A matrice 3x3 di rango 2. E' vero che 0 è un autovalore di A?
- Una matrice 3x3 di rango 2 non è invertibile (quindi singolare) e perciò det(A)=0. det(A-xI)=0; con x=0 si ha det(A)=0 e perciò 0 è un autovalore di A.
D3) Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{v_1;v_2\}$ un insieme linearmente indipendente. L'insieme $\{v_1;v_2;v_3\}$ è linearmente indipendente?
- Si perché v_1; $2v_1-v_2$ sono vettori a loro volta linearmente indipendenti $\alpha v_1 + \alpha(2v_1-v_2)$.
D4) Siano A=[1,1,-1; 0,2,-1; 1,0,0] e $v=[2,1,1]^T$ il vettore v è un autovettore di A? Se si per che autovalore?- - Fissato $Av=\lambda v$: $[1,1,-1; 0,2,-1; 1,0,0][2,1,1]^T=[2\lambda,1\lambda,1\lambda]^T$ da cui $[2,1,2]^T=[2\lambda,1\lambda,1\lambda]^T$ che è impossibile.
D5) Data f: $C^2\rightarrow C^3$, $[x,y]\rightarrow[x+y, x-y, y-1]$ verificare se f è applicazione lineare
- $[0, 0]\rightarrow[0, 0, 1]$ verifico se vale per un vettore nullo ma $f(0)\neq 0$ quindi non è una applicazione lineare,
Se avessi avuto $[0, 0]\rightarrow[0, 0, 0]$ e quindi $f(0)=0$ dovevo verificare che $F(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ e $f(\alpha v) = \alpha f(v)$.
D6) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3. Esistono $v_1;v_2;v_3;v_4$ di V tali che $\{v_1;v_2;v_3;v_4\}$ è un insieme di generatori di V?
- Si perché un insieme di generatori di V deve avere un numero di vettori ≥ 3.
D7) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2. Esistono $v_1;v_2;v_3$ appartenenti a V tali che $\{v_1;v_2;v_3\}$ è un insieme linearmente indipendente di V?
- No perché una base di V avrà dimensione 2, ma la dimensione di un insieme linearmente indipendente deve essere $\leq$ alla dim(V), ma in questo caso 3>2.
D8) Sia A una matrice 3x3 con $\det(A)\neq 0$. Si dica se 0 è un autovalore di A.
- det(A-xI)=0 con $\lambda=0$ (λ autovalore) quindi det(A)=0 ma abbiamo supposto $\det(A)\neq 0$ quindi 0 non è autovalore di A.
D9) Esistono applicazioni lineari biiettive f: $(V)C^3\rightarrow(W)C^3$?dimV=dimN(f)+dimIm(f)$\rightarrow$dimN(f)=dimV-dimIm(f)$\rightarrow$ dimN(f)=3-dimIm(f) e se:
- dimIm(f)=3 allora dimN(f)=0 perciò esiste una applicazione lineare iniettiva
- dimIm(f)=3=dimW perciò esiste una applicazione lineare suriettiva
detto questo ho perciò una applicazione lineare biiettiva.
D10) Esiste un'applicazione lineare suriettiva f: $(V)C^3\rightarrow(W)C^4$?
- dimV=dimN(f)+dimIm(f)$\rightarrow$dimIm(f)=dimV-dimN(f) $\leq$ dimV $<$ dimW
dato che non esistono applicazioni lineari suriettive che vadano da $C^3\rightarrow C^4$.
D11) Sia $\{v_1;v_2;v_3\}$ una base dello spazio vettoriale V. Esiste un vettore v_4 tale che $W=\{v_1;v_2;v_3;v_4\}$ sia linearmente indipendente?
- No perché data una base di dimensione 3 associata allo spazio vettoriale anch'esso di dim 3non può succedere che dimW > dimV.
D12) Esiste una applicazione lineare iniettiva f: $C^4\rightarrow C^2$?
- dimV=dimN(f)+dimIm(f)$\rightarrow$dimN(f)=dimV-dimIm(f)$\rightarrow$4-dimIm(f)$\rightarrow$4-2=dimN(f)$\neq$0 e non esiste perciò una f iniettiva da C^4 in C^2.
D13) Esiste una applicazione lineare f: $(V)C^4\rightarrow(W)C^3$ di rango 3?
- $V_{rx4} \rightarrow f_{4xk} \rightarrow W_{kx3}$ quindi avendo 4 colonne può avere rango 3.
D14) Esiste una matrice A 3x2 di rango 3?
- No perché una matrice con 2 colonne non può avere tre colonne dominanti.
D15) Sia $\{v_1;v_2\}$ un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V. L'insieme $\{v_1;2v_1-v_2;v_2\}$ è linearmente indipendente?
- No perché il vettore $2v_1-v_2$ è combinazione lineare dei vettori v_1 e v_2.
D16) Sia $\{v_1;v_2;v_3\}$un insieme di generatori di V. Esiste un vettore v_4 tale che $\{v_1;v_2;v_3;v_4\}$ sia linearmente indipendente?
- No perché tale insieme sarebbe linearmente indipendente se avesse un numero di vettori $\leq$ a quello dell'insieme di generatori di V.