Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

ESERCIZIO 1. *Si consideri al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice*

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Trovare per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure $P^T LU$.

(b) Per $\alpha = 1$ si trovi una base ortogonale di $C(A_1)$.

(c) Si interpreti A_1 come la matrice completa di un sistema lineare e si trovino tutte le soluzioni del sistema.

Svolgimento.

(a) Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A_α:

$$\begin{matrix} E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha-1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} E_2(\frac{1}{2}) \\ E_3(\frac{1}{\alpha-1}) \\ \downarrow \\ \alpha \neq 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{\alpha-1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $\alpha \neq 1$:

$$A_{\alpha \neq 1} = LU$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{\alpha-1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mentre se $\alpha = 1$, per la U basta fermarsi con l'eliminazione di Gauss a prima di eseguire $E_3(\frac{1}{\alpha-1})$ e sostituire ad ogni α il valore 1, per la L nel posto $(3,3)$ va messo 1 poichè non si è eseguita nessuna operazione del tipo $E_3(x)$. Dunque:

$$A_1 = LU$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo così dato la scomposizione LU per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) Prendiamo in considerazione A_1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per trovare una base ortogonale di $C(A_1)$ dobbiamo prima trovare una base di tale spazio; riprendiamo anche la forma ridotta U di A_1 (che abbiamo già calcolato):

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siccome le colonne dominanti sono le prime due, una base (che chiameremo $\mathscr{B}$) di $C(A_1)$ è data dalle prime due colonne di A_1:

$$\mathscr{B} = \left\{ \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \right\}$$

Per dare una base ortogonale (che chiameremo $\mathscr{D}$) applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt:

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{(u_1|v_2)}{(u_1|u_1)} u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Per comodità possiamo prendere $u_2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}^T$ tanto l'importante è che sia orogonale a u_1. Dunque la base ortogonale di $C(A_1)$ è:

$$\mathscr{D} = \left\{ \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \right\}$$

(c) Riprendiamo la forma ridotta di A_1 e pensiamola come matrice completa di un sistema lineare:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Si vede subito che sia la matrice dei coefficienti che la matrice completa hanno lo stesso rango che è 2 quindi per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

Il vettore soluzione è (con il parametro t):

$$\begin{bmatrix} 1-t \\ -\frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix}.$$