Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

ESERCIZIO 1. *Trovare gli autovalori della matrice A, dire qual è la loro molteplicità algebrica e geometrica; infine calcolare i relativi autovettori.*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

Troviamo gli autovalori ponendo il polinomio caratteristico di A uguale a zero, questo perchè noi cerchiamo λ e v tali che $Av = \lambda v$, quindi

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ Av - \lambda v &= 0 \\ (A - \lambda I)v &= 0 \end{aligned}$$

Stiamo cercando vettori non banali (cioè diversi da quello nullo) che soddisfino questa formula. Ma quello è un sistema omogeneo di matrice $A - \lambda I$ e se vogliamo che la soluzione non sia banale, dobbiamo porre il suo determinante diverso da zero.

Quindi calcoliamo il determinante di

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0-\lambda \end{bmatrix}$$

e poniamolo uguale a 0:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ (2-\lambda)(1-\lambda)(-3\lambda + \lambda^2 + 2) &= 0 \\ (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2) &= 0 \\ (\lambda-2)^2(\lambda-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori sono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

Le molteplicità algebriche sono $m_1 = 2$, $m_2 = 2$ (dove m_i si riferisce a λ_i).

Calcoliamo gli autovettori e quindi la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 2$. Vediamo come fare richiamando la formula $(A - \lambda I)v = 0$: stiamo cercando i v che rendono vero il sistema lineare $(A - \lambda I)v = 0$, quindi sostituiamo a λ l'autovalore che ci interessa e siccome il sistema è omogeneo, per trovare gli autovettori relativi a λ, e dunque l'autospazio, bisogna calcolare lo spazio nullo della matrice $A - \lambda I$ (che coinciderà con l'autospazio).

Applichiamo allora l'eliminazione di Gauss sulla matrice $A - \lambda I$ con $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui si ricava per il teorema nullità più rango che $\dim(N(A)) = 1$ (essendo che la matrice ha 3 colonne dominanti, dunque il rango è uguale a 3); per cui la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 2$ è 1.

Troviamo una base per lo spazio nullo di questa matrice che sarà anche una base dell'autospazio e quel vettore di base sarà l'autovettore cercato. Dalla forma ridotta della matrice si ricava il vettore soluzione:

$$\begin{bmatrix} -2\alpha \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Questo trovato è l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 2$. Non è importante che α mettere, tanto è in ogni caso un elemento dell'autospazio.

Verifichiamo che abbiamo fatto giusto: riprendiamo la definizione di autovalore e autovettore $Av = \lambda v$ e verifichiamo tale uguaglianza:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Passiamo adesso all'altro autovalore $\lambda = 1$.

Adesso non darò più tutte le spiegazioni teoriche, essendo ovviamente uguali a quelle date per l'autovalore precedente.

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice $A - \lambda I$ con $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui ricaviamo che la dimensione dello spazio nullo e quindi la molteplicità geometrica dell'autospazio è 2. Una base dello spazio nullo e quindi un autovettore, si ricava dalla forma ridotta:

$$\begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \to \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo l'uguaglianza $Av = \lambda v$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ricapitoliamo qui quello che abbiamo trovato:

$$\lambda_1 = 2 \qquad m = 2 \qquad d = 1 \qquad v = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad m = 2 \qquad d = 2 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$