Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

16 dicembre 2011

ESERCIZIO 1. *Sia* $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *dove*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Si verifichi che $\mathscr{B}$ *è una base di* $\mathbb{C}^3$*. Sia* $\mathscr{E}_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *la base canonica di* $\mathbb{C}^4$ *e si consideri l'applicazione lineare* $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ *tale che:*

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 2e_1 + e_2 + e_4 \\ f(v_2) &= e_2 - e_3 \\ f(v_3) &= e_1 - 2e_3 + e_4 \end{aligned}$$

(a) Si trovi la matrice B associata ad f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.

(b) Si calcoli il rango di f.

(c) Il vettore $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ *appartiene all'immagine di f? Se sì si trovi un vettore v in $\mathbb{C}^3$ tale che* $f(v) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

(d) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.

Svolgimento.

(a) Stiamo cercando una matrice B tale che $f(x) = Bx$ con $x \in \mathbb{C}^3$; Notiamo che le immagini di f sono espresse come combinazione lineare dei vettori di $\mathscr{E}_4$ e come contro immagini vengono usati i vettori di $\mathscr{B}$, quindi sarà facile trovare la matrice A associata ad f rispetto alla base $\mathscr{B}$ sul dominio e alla base canonica $\mathscr{E}_4$ sul codominio. A è tale che:

$$C_{\mathscr{E}_4}(f(x)) = AC_{\mathscr{B}}(x)$$

Infatti applicando a questa formula i vettori di $\mathscr{B}$, si ottiene:

$$C_{\mathscr{E}_4}(f(v_i)) = AC_{\mathscr{B}}(v_i) = Ae_i = i\text{-esima colonna di } A$$

Essendo $C_{\mathscr{E}_4}(f(v_i)) = f(v_i)$, la matrice A sarà fatta in questo modo:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} C_{\mathscr{E}_4}(f(v_1)) & C_{\mathscr{E}_4}(f(v_2)) & C_{\mathscr{E}_4}(f(v_3)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se vogliamo avere la matrice associata alla base canonica anche sul dominio, dobbiamo trovare una matrice di cambio di base, cioè una matrice $M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}}$ tale che

$$C_{\mathscr{E}_3}(x) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(x)$$

Troviamo la matrice del cambio di base applicando questa formula ai vettori di $\mathscr{B}$:

$$C_{\mathscr{E}_3}(v_i) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(v_i) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} e_i = i\text{-esima colonna di } M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}}$$

Essendo $C_{\mathscr{E}_3}(v_i) = v_i$, la matrice $M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}}$ sarà fatta in questo modo:

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} &= \begin{bmatrix} C_{\mathscr{E}_e}(v_1) & C_{\mathscr{E}_3}(v_2) & C_{\mathscr{E}_3}(v_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Torniamo al nostro scopo: vogliamo una matrice B tale che $f(x) = Bx$ ovvero

$$C_{\mathscr{E}_4}(f(x)) = BC_{\mathscr{E}_3}(x)$$

e sappiamo che

$$C_{\mathscr{E}_4}(f(x)) = AC_{\mathscr{B}}(x)$$
$$C_{\mathscr{E}_3}(x) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(x) \Rightarrow C_{\mathscr{B}}(x) = M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{E}_3}(x)$$

Quindi

$$\begin{aligned}C_{\mathscr{E}_4}(f(x)) &= AC_{\mathscr{B}}(x)\\ C_{\mathscr{E}_4}(f(x)) &= AM^{-1}_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}}C_{\mathscr{E}_3}(x)\end{aligned}$$

Il che vuol dire

$$f(x) = AM^{-1}_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}}x$$

perciò

$$B = AM^{-1}_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}}$$

Calcoliamo $M^{-1}_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}}$:

$$\left[M_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}}|I\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$E_{21}(1) \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l}E_2(1/3)\\ E_{32}(1)\end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1/3 & 1/3 & 1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l}E_3(-1)\\ E_{12}(-2)\end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & -1\end{array}\right] = \left[I|M^{-1}_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}}\right]$$

Dunque

$$M^{-1}_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 0\\ -1/3 & -1/3 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

Calcoliamo dunque la matrice B associata ad f rispetto alla base canonica su dominio e codominio:

$$\begin{aligned}B &= AM^{-1}_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}}\\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -3\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 6\\ 0 & -3 & -3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(b) Per calcolare il rango di f basta calcolare il rango della matrice B, quindi applichiamo su di essa (possiamo anche non tener conto dell' $1/3$) l'Eliminazione di Gauss:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{21}(-2) \\ E_{31}(-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{2}(1/9) \\ E_{32}(-6) \\ E_{42}(3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{3}(1/5) \\ E_{43}(1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siccome ci sono 3 colonne dominanti, possiamo affermare che il rango di B e quindi di f è 3.

(c) Per sapere se il vettore $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ sta nell'immagine di f, devo vedere se è linearmente dipendente dai vettori di base dello spazio delle immagini di f; quindi innanzitutto cerco una base di $Im(f)$ che coincide con una base dello spazio delle colonne della matrice B. Dunque eseguo l'eliminazione di Gauss su B, trovo le colonne dominanti nella forma ridotta e le corrispondenti colonne in B mi daranno una base per $C(B)$ e ovvero per $Im(f)$. Questo conto l'abbiamo già fato al punto (b) ed essendo risultate tutte e tre colonne dominanti, una base $\mathscr{I}$ per $Im(f)$ è data dalle colonne di B (anche qui possiamo fare a meno dello scalare $1/3$):

$$\mathscr{I} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

Per controllare se $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ è linearmente dipendente con i vettori di $\mathscr{I}$ devo mettere questi quattro vettori in una matrice e fare l'eliminazione di Gauss. Se verrà rango massimo (tutte le colonne dominanti) vorrà dire che $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ è linearmente indipendente dai vettori di base di $\mathscr{I}$ e quindi non sta nell'immagine di f; viceversa se il rango viene 3, vuol dire che $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ è linearmente dipendente dai vettori di base di $\mathscr{I}$ e quindi sta nell'immagine di f.

Eseguiamo l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{21}(-2) \\ E_{31}(-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & 6 & -5 \\ 0 & 6 & 9 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_2(1/9) \\ E_{32}(-6) \\ E_{42}(3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & -5/9 \\ 0 & 0 & 5 & 4/3 \\ 0 & 0 & -1 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_3(1/5) \\ E_{43}(1) \\ E_4(-15/6) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & -5/9 \\ 0 & 0 & 1 & 4/15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Essendo tutte colonne dominanti, concludiamo che $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ non sta nell'immagine di f.

(d) Praticamente abbiamo già risolto: una base dello spazio delle immagini di f è data dalle colonne di B:

$$\mathscr{I} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

E siccome la matrice B aveva rango 3, per il teorema nullità più rango, $\dim N(B) = 0$ questo vuol dire che lo spazio nullo di f consta solo del vettore nullo, perciò

$$N(f) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

ESERCIZIO 2. *Sia*

$$\mathscr{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix};\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

una base di $\mathbb{C}^3$ *e sia* $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ *un'applicazione lineare tale che:*

$$\begin{aligned} f(v_1) =& v_2; \\ f(v_2) =& v_3; \\ f(v_3) =& v_2 + v_3. \end{aligned}$$

(a) Si trovi la matrice A *associata a* f *rispetto alla base canonica.*

(b) Si calcoli il rango di f*, una base di* $Im(f)$ *e una base di* $N(f)$*.*

(c) Si dica se i vettori $w = v_1 + v_3$ *e* $q = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -7 \end{bmatrix}^T$ *appartengono a* $Im(f)$*.*

Svolgimento.

(a) Dobbiamo calcolare la matrice A tale che:

$$f(x) = Ax.$$

Siccome l'applicazione delle coordinate rispetto alla base canonica $\mathscr{E}_3$ sui vettori è l'identità, la formula sopra può essere riscritta così:

$$C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) = AC_{\mathscr{E}_3}(x).$$

A questo punto ci sono due modi per risolvere l'esercizio: uno semplice, ma che dipende molto da com'è fatto l'esercizio, e uno più standard.

Iniziamo dal modo più semplice e probabilmente più veloce: alla formula

$$C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) = AC_{\mathscr{E}_3}(x).$$

al posto di x mettiamo i vettori della base canonica e_i:

$$C_{\mathscr{E}_3}(f(e_i)) = AC_{\mathscr{E}_3}(e_i) = Ae_i = i - esima\ colonna\ di\ A$$

quindi

$$A = \begin{bmatrix} C_{\mathscr{E}_3}(f(e_1)) & C_{\mathscr{E}_3}(f(e_2)) & C_{\mathscr{E}_3}(f(e_3)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{bmatrix}.$$

A questo punto allora basta calcolare quanto vale la f sui vettori della base canonica, ma noi sappiamo quanto vale sui vettori di $\mathscr{B}$, quindi , sfruttando la linearità di f ($f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$), riscriviamo quello che conosciamo:

$$\begin{aligned} f(v_1) =& f(e_1 + 2e_3) = f(e_1) + 2f(e_3) = v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T; \\ f(v_2) =& f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T; \\ f(v_3) =& f(e_3) = v_2 + v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Quindi $f(e_3)$ ce l'abbiamo già e sarà la terza colonna di A, calcoliamo $f(e_1)$ e $f(e_2)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) =& v_2 - 2f(e_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}; \\ f(e_2) =& v_3 - f(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque trovato la matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

L'altro modo, più standard, consiste nell'usare le matrici del cambio di base: ricordiamo che vogliamo trovare A affinché

$$C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) = AC_{\mathscr{E}_3}(x).$$

Per fare questo abbiamo bisogno di conoscere alcune matrici:

- La matrice B associata ad f rispetto alla base $\mathscr{B}$ su dominio e codominio tale che $C_{\mathscr{B}}(f(x)) = BC_{\mathscr{B}}(x)$.

- La matrice del cambio di base $M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}}$ dalla base $\mathscr{B}$ alla base canonica $\mathscr{E}_3$, tale che $C_{\mathscr{E}_3}(x) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(x)$. Questa è sia sul dominio che sul codominio.

La matrice B è facile da trovare infatti applicando la formula che la identifica

$$C_{\mathscr{B}}(f(x)) = BC_{\mathscr{B}}(x)$$

ai vettori della base $\mathscr{B}$, si ottiene:

$$C_{\mathscr{B}}(f(v_i)) = BC_{\mathscr{B}}(v_i) = Be_i = i - \text{esima colonna di } B$$

Qunindi $B = \begin{bmatrix} C_{\mathscr{B}}(f(v_1)) & C_{\mathscr{B}}(f(v_2)) & C_{\mathscr{B}}(f(v_3)) \end{bmatrix}$. $C_{\mathscr{B}}(f(v_i))$ per definizione non è altro che il vettore le cui componenti sono le costanti usate nella combinazione lineare dei vettori di $\mathscr{B}$ per scrivere $f(v_i)$, dunque

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Anche la matrice $M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}}$ si trova facilmente, sempre partendo dalla sua definizione, applichiamo la formula

$$C_{\mathscr{E}_3}(x) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(x)$$

ai vettori della base $\mathscr{B}$:

$$C_{\mathscr{E}_3}(v_i) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(v_i) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} e_i = i - \text{esima colonna di } M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}}$$

Ma $C_{\mathscr{E}_3}(v_i)$ non è altro che v_i, quindi le colonne di $M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}}$ sono proprio i vettori della base $\mathscr{B}$:

$$M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adesso possiamo cercare la matrice A tale che $C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) = AC_{\mathscr{E}_3}(x)$, sapendo che

1. $C_{\mathscr{B}}(f(x)) = BC_{\mathscr{B}}(x)$.
2. $C_{\mathscr{E}_3}(x) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(x)$.
3. $C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(f(x))$.

Quindi:

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) &= [\text{per la 3}] = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(f(x)) \\ &= [\text{per la 1}] = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} B C_{\mathscr{B}}(x) \\ &= [\text{per la 2}] = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} B M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{E}_3}(x) \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto

$$C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} B M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{E}_3}(x)$$

Da cui

$$A = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} B M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}}$$

Ci manca allora solo da trovare $M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}}$; calcoliamola con l'Eliminazione di Gauss :

$$\left[M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} | I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$E_{31}(-2) \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$E_{32}(2) \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$E_{12}(-1) \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] = \left[I | M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}}\right]$$

Possiamo finalmente calcolare la A:

$$\begin{aligned} A &= M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} B M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notare come la matrice A trovata in due modi sia ovviamente la stessa.
(b) Per calcolare il rango di f basta calcolare il rango della matrice A

trovata al punto (a). Eseguiamo quindi l'Eliminazione di Gauss su A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(-1) \\ E_{21}(1) \\ E_{31}(2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E_{23} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo le colonne dominanti due, il rango di f è 2.

Troviamo adesso una base di $Im(f)$. Una base di tale spazio è data dalle colonne di A che sono risultate dominanti nella forma ridotta in seguito all'Eliminazione di Gauss. Dunque:

$$Im(f) =< \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} >$$

Per trovare una base dello spazio nullo di f dobbiamo immaginarci di risolvere il sistema $Av = 0$ quindi in seguito all'Eliminazione di Gauss avremmo $[U|0]$ dove U sta ad indicare la forma ridotta di A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se chiamiamo x, y, z le coordinate di v allora dalla terza riga della matrice troviamo $0z = 0$ che è indeterminata, cioè va bene qualsiasi numero, quindi daremo a z il valore del generico parametro α: $z = \alpha$. Dalla seconda riga troviamo $y - z = 0$ da cui $y = z$ cioè $y = \alpha$. Dalla prima riga troviamo $x - y - z = 0$ da cui $x = y + z$ cioè $x = 2\alpha$.

Questo ci dice che un generico vettore dello spazio nullo è della forma $\begin{bmatrix} 2\alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix}^T$. Raccogliendo α troviamo $\alpha \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, quindi una base dello spazio nullo di f è data dal vettore $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$:

$$N(f) =< \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} >$$

Notare che le dimensioni di $Im(f)$ e di $N(f)$ rispettano il teorema nullità più rango.

Piccola parentesi: abbiamo a disposizione due matrici su cui lavorare: la A associata ad f rispetto alla base canonica, e la B associata ad f rispetto alla base $\mathscr{B}$. Per risolvere il quesito (b) avremmo potuto lavorare con la matrice B?

La matrice B ha lo stesso rango di A quindi se si cerca solo il rango o le dimensioni dei quattro sottospazi fondamentali della matrice, allora va bene anche ragionare sulla matrice B, ma se si cercano le basi, cioè proprio vogliamo vedere dei vettori, non possiamo usare la matrice B, ciò che ci verrebbe sarebbero spazi isomorfi a quelli che cerchiamo, ma non uguali.

(c) Adesso dobbiamo dire se il vettore $w = v_1 + v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$ appartiene all'immagine di f. Se così fosse allora sarebbe nello spazio $Im(f)$ e come tale sarebbe combinazione lineare dei vettori della base di $Im(f)$. Un modo per vedere la dipendenza lineare è mettere i tre vettori in una matrice e applicare l'Eliminazione di Gauss. Se il rango sarà 3 allora w non sarà nell' $Im(f)$ essendo linearmente indipendente ai vettori di base di tale spazio, al contrario, se il rango risulterà 2 allora vorrà dire che w sta in $Im(f)$.

Eseguiamo quindi l'Eliminazione di Gauss:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} E_1(-1) \\ E_{21}(1) \\ E_{31}(2) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} E_{23} \\ E_3(-1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avendo 3 colonne dominanti, il rango della matrice è 3, quindi w non appartiene all'immagine di f.

Vediamo se il vettore $q \in Im(f)$ allo stesso modo di come abbiamo fatto per w, quindi eseguiamo l'Eliminazione di Gauss sulla matrice che ha come colonne i vettori della base di $Im(f)$ e q per trovarne il rango:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(-1) \\ E_{21}(1) \\ E_{31}(2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E_{23} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avendo 2 colonne dominanti, il rango della matrice è 2, quindi q appartiene all'immagine di f.

Proviamo a trovare quel vettore $v \in \mathbb{C}^3$ (che in verità sarà più d'uno), tale che $f(v) = q$, cioè $Av = q$ (esso esiste perchè q appartiene all'immagine di f). Si tratta quindi di risolvere il sistema lineare $Av = q$:

$$[A|q] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & -7 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} E_1(-1) \\ E_{21}(1) \\ E_{31}(2) \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$E_{23} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se chiamiamo x, y, z le coordinate di v allora dalla terza riga della matrice troviamo $0z = 0$ che è indeterminata, cioè va bene qualsiasi numero, quindi daremo a z il valore del generico parametro α: $z = \alpha$. Dalla seconda riga troviamo $y - z = -1$ da cui $y = -1 + z$ cioè $y = -1 + \alpha$. Dalla prima riga troviamo $x - y - z = 3$ da cui $x = 3 + y + z$ cioè $x = 2 + 2\alpha$. Otteniamo così:

$$v = \begin{bmatrix} 2 + 2\alpha & -1 + \alpha & \alpha \end{bmatrix}^T$$

Non ci deve stupire che la soluzione non è unica, infatti il rango della matrice è 2.