Esame di Analisi Matematica II
Corso di laurea in Informatica
Università di Verona

Verona, 5 febbraio 2018

Informazioni personali

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: ______________________

Si barri e firmi l'opzione desiderata.

1. Ho svolto la prova intermedia il 27 novembre 2017 e chiedo che venga corretta solo la parte II del presente esame.

   Firma: ______________________

2. Chiedo che venga corretto l'intero esame, consapevole che in tal caso il voto della prova intermedia (qualora svolta) decade.

   Firma: ______________________

3. Intendo ritirarmi, consapevole che in tal caso il voto della prova intermedia (qualora svolta) decade.

   Firma: ______________________

In caso di consegna, si indichi il numero di fogli protocollo consegnati: ______________.

ISTRUZIONI

- Il testo di questa prova è diviso in due parti, entrambe stampate sul retro di questo foglio.
- Occorre rispondere alle domande sui fogli protocollo. Su tali fogli è necessario scrivere il proprio nome, cognome e matricola.
- **È necessario riportare sui fogli protocollo che si consegnano lo svolgimento completo degli esercizi e non solo i risultati finali.**
- È vietato utilizzare dispositivi elettronici e consultare libri o appunti durante lo svolgimento della prova pena l'annullamento della prova stessa.
- Il tempo per lo svolgimento del compito completo è **3 ore**.
- Chi intende svolgere solo la seconda parte del compito ha a disposizione **1 ora e 30 minuti**. In caso di consegna dopo questo limite verrà corretto il compito intero e il voto della prova intermedia decadrà.
- Chi svolge solo la seconda parte del compito ottiene al più 16 punti che vanno a sommarsi al punteggio ottenuto nella prova intermedia. Per il superamento dell'esame è necessario che la somma dei punteggi sia almeno 18.
- Chi svolge il compito intero deve ottenere almeno 18 punti per il superamento dell'esame.

Parte I

Esercizio 1 (punti: .... /3)**.** Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 + 2y + 1) \cdot x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

determinando l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2 (punti: .... /4)**.** Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3 (punti: .... /3)**.**

1. (1.5 pt.) Si spieghi perché non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
2. (1.5 pt.) Si mostri che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = 0$.

Esercizio 4 (punti: .... /3)**.** Sia $D \subseteq \mathbf{R}^2$ il dominio naturale della funzione $f(x, y) = \frac{\ln(x - y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

1. (1.5 pt.) Si rappresenti D nel piano cartesiano.
2. (1.5 pt.) Il punto $P = (1, 0)$ è interno, esterno o di frontiera per D? Si motivi la risposta.

Esercizio 5 (punti: .... /3)**.**
Si consideri l'arco di curva

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,2] & \to & \mathbf{R}^3 \\ & t & \mapsto & \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right). \end{array}$$

1. (2 pt.) Si calcoli la lunghezza di γ.
2. (1 pt.) Si trovi una parametrizzazione della retta r tangente a γ nel punto $P = \left(1, 1, \frac{2}{3}\right)$.

Parte II

Esercizio 6 (punti: .... /4)**.** Sia $f(x, y) = x + y^2$ una funzione definita su $\Omega = [0, 1] \times [-1, 1] \subseteq \mathbf{R}^2$. Si trovino il minimo e massimo globale di f.

Esercizio 7 (punti: .... /4)**.**
Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - y)^2 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

definite per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Sia inoltre

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : g(x, y) = 0\}.$$

Si trovino i punti di minimo e massimo locale vincolato della funzione f al variare di (x, y) in M usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esercizio 8 (punti: .... /4)**.**
Si calcoli $\int\int_\Omega (x + y)dxdy$, dove Ω è il parallelogramma di vertici

$$A = (0, 2);\ B = (2, 2);\ C = (4, 4);\ D = (2, 4).$$

Esercizio 9 (punti: .... /4)**.** Sia $\overrightarrow{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il campo vettoriale così definito:

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \left(x^2y + y^2 + 1, \frac{x^3}{3} + 2xy\right).$$

1. (1 pt.) Si dica se $\overrightarrow{F}$ è conservativo, giustificando la risposta.
2. (3 pt.) Nel caso in cui il campo $\overrightarrow{F}$ sia conservativo, si trovi un suo potenziale.

   Si calcoli l'integrale di linea di seconda specie di $\overrightarrow{F}$ lungo la curva

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,1] & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t^3, t^2) \end{array}$$

Esame di Analisi Matematica II
Corso di laurea in Informatica
Università di Verona

Verona, 5 febbraio 2018

Informazioni personali

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Si barri e firmi l'opzione desiderata.

1. Ho svolto la prova intermedia il 27 novembre 2017 e chiedo che venga corretta solo la parte II del presente esame.

   Firma: ____________________

2. Chiedo che venga corretto l'intero esame, consapevole che in tal caso il voto della prova intermedia (qualora svolta) decade.

   Firma: ____________________

3. Intendo ritirarmi, consapevole che in tal caso il voto della prova intermedia (qualora svolta) decade.

   Firma: ____________________

In caso di consegna, si indichi il numero di fogli protocollo consegnati: ____________.

ISTRUZIONI

- Il testo di questa prova è diviso in due parti, entrambe stampate sul retro di questo foglio.
- Occorre rispondere alle domande sui fogli protocollo. Su tali fogli è necessario scrivere il proprio nome, cognome e matricola.
- **È necessario riportare sui fogli protocollo che si consegnano lo svolgimento completo degli esercizi e non solo i risultati finali.**
- È vietato utilizzare dispositivi elettronici e consultare libri o appunti durante lo svolgimento della prova pena l'annullamento della prova stessa.
- Il tempo per lo svolgimento del compito completo è **3 ore**.
- Chi intende svolgere solo la seconda parte del compito ha a disposizione **1 ora e 30 minuti**. In caso di consegna dopo questo limite verrà corretto il compito intero e il voto della prova intermedia decadrà.
- Chi svolge solo la seconda parte del compito ottiene al più 16 punti che vanno a sommarsi al punteggio ottenuto nella prova intermedia. Per il superamento dell'esame è necessario che la somma dei punteggi sia almeno 18.
- Chi svolge il compito intero deve ottenere almeno 18 punti per il superamento dell'esame.

$\boxed{\textbf{Parte I}}$

Esercizio 1 (punti: .... /3)**.** Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 + 4y + 4) \cdot x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

determinando l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2 (punti: .... /4)**.** Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3 (punti: .... /3)**.**

1. (1.5 pt.) Si spieghi perché non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
2. (1.5 pt.) Si mostri che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = 0$.

Esercizio 4 (punti: .... /3)**.** Sia $D \subseteq \mathbf{R}^2$ il dominio naturale della funzione $f(x, y) = \dfrac{\ln(x - y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

1. (1.5 pt.) Si rappresenti D nel piano cartesiano.
2. (1.5 pt.) Il punto $P = (1, 0)$ è interno, esterno o di frontiera per D? Si motivi la risposta.

Esercizio 5 (punti: .... /3)**.**
Si consideri l'arco di curva

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0, 2] & \to & \mathbf{R}^3 \\ & t & \mapsto & \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right). \end{array}$$

1. (2 pt.) Si calcoli la lunghezza di γ.
2. (1 pt.) Si trovi una parametrizzazione della retta r tangente a γ nel punto $P = \left(1, 1, \frac{2}{3}\right)$.

$\boxed{\textbf{Parte II}}$

Esercizio 6 (punti: .... /4)**.** Sia $f(x, y) = x^2 + y$ una funzione definita su $\Omega = [-1, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbf{R}^2$. Si trovino il minimo e massimo globale di f.

Esercizio 7 (punti: .... /4)**.**
Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - y)^2 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

definite per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Sia inoltre

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : g(x, y) = 0\}.$$

Si trovino i punti di minimo e massimo locale vincolato della funzione f al variare di (x, y) in M usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esercizio 8 (punti: .... /4)**.**
Si calcoli $\int\int_\Omega (x + y)dxdy$, dove Ω è il parallelogramma di vertici

$$A = (0, 3);\ B = (3, 3);\ C = (6, 6);\ D = (3, 6).$$

Esercizio 9 (punti: .... /4)**.** Sia $\overrightarrow{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il campo vettoriale così definito:

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \left(x^2y + y^3 + 1, \frac{x^3}{3} + 3xy^2\right).$$

1. (1 pt.) Si dica se $\overrightarrow{F}$ è conservativo, giustificando la risposta.
2. (3 pt.) Nel caso in cui il campo $\overrightarrow{F}$ sia conservativo, si trovi un suo potenziale.

   Si calcoli l'integrale di linea di seconda specie di $\overrightarrow{F}$ lungo la curva

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0, 2] & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, t^2) \end{array}$$

Esame di Analisi Matematica II
Corso di laurea in Informatica
Università di Verona

Verona, 5 febbraio 2018

Informazioni personali

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Si barri e firmi l'opzione desiderata.

1. Ho svolto la prova intermedia il 27 novembre 2017 e chiedo che venga corretta solo la parte II del presente esame.

   Firma: ______________________________

2. Chiedo che venga corretto l'intero esame, consapevole che in tal caso il voto della prova intermedia (qualora svolta) decade.

   Firma: ______________________________

3. Intendo ritirarmi, consapevole che in tal caso il voto della prova intermedia (qualora svolta) decade.

   Firma: ______________________________

In caso di consegna, si indichi il numero di fogli protocollo consegnati: ______________.

ISTRUZIONI

- Il testo di questa prova è diviso in due parti, entrambe stampate sul retro di questo foglio.
- Occorre rispondere alle domande sui fogli protocollo. Su tali fogli è necessario scrivere il proprio nome, cognome e matricola.
- **È necessario riportare sui fogli protocollo che si consegnano lo svolgimento completo degli esercizi e non solo i risultati finali.**
- È vietato utilizzare dispositivi elettronici e consultare libri o appunti durante lo svolgimento della prova pena l'annullamento della prova stessa.
- Il tempo per lo svolgimento del compito completo è **3 ore**.
- Chi intende svolgere solo la seconda parte del compito ha a disposizione **1 ora e 30 minuti**. In caso di consegna dopo questo limite verrà corretto il compito intero e il voto della prova intermedia decadrà.
- Chi svolge solo la seconda parte del compito ottiene al più 16 punti che vanno a sommarsi al punteggio ottenuto nella prova intermedia. Per il superamento dell'esame è necessario che la somma dei punteggi sia almeno 18.
- Chi svolge il compito intero deve ottenere almeno 18 punti per il superamento dell'esame.

Parte I

Esercizio 1 (punti: .... /3)**.** Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 + 6y + 9) \cdot x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

determinando l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2 (punti: .... /4)**.** Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = e^{4x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3 (punti: .... /3)**.**

1. (1.5 pt.) Si spieghi perché non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
2. (1.5 pt.) Si mostri che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = 0$.

Esercizio 4 (punti: .... /3)**.** Sia $D \subseteq \mathbf{R}^2$ il dominio naturale della funzione $f(x,y) = \frac{\ln(x - y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

1. (1.5 pt.) Si rappresenti D nel piano cartesiano.
2. (1.5 pt.) Il punto $P = (1, 0)$ è interno, esterno o di frontiera per D? Si motivi la risposta.

Esercizio 5 (punti: .... /3)**.**
Si consideri l'arco di curva

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,2] & \to & \mathbf{R}^3 \\ & t & \mapsto & \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right). \end{array}$$

1. (2 pt.) Si calcoli la lunghezza di γ.
2. (1 pt.) Si trovi una parametrizzazione della retta r tangente a γ nel punto $P = \left(1, 1, \frac{2}{3}\right)$.

Parte II

Esercizio 6 (punti: .... /4)**.** Sia $f(x,y) = x^2 + y$ una funzione definita su $\Omega = [-1,1] \times [0,2] \subseteq \mathbf{R}^2$. Si trovino il minimo e massimo globale di f.

Esercizio 7 (punti: .... /4)**.**
Si considerino le funzioni

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & (x-y)^2 \\ g(x,y) & = & x^2 + y^2 - 1 \end{array}$$

definite per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Sia inoltre

$$M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : g(x,y) = 0\}.$$

Si trovino i punti di minimo e massimo locale vincolato della funzione f al variare di (x,y) in M usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esercizio 8 (punti: .... /4)**.**
Si calcoli $\int\int_\Omega (x - y)dxdy$, dove Ω è il parallelogramma di vertici

$$A = (0,3);\ B = (3,3);\ C = (6,6);\ D = (3,6).$$

Esercizio 9 (punti: .... /4)**.** Sia $\overrightarrow{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il campo vettoriale così definito:

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(x^2y + y^4 + 1, \frac{x^3}{3} + 4xy^3\right).$$

1. (1 pt.) Si dica se $\overrightarrow{F}$ è conservativo, giustificando la risposta.
2. (3 pt.) Nel caso in cui il campo $\overrightarrow{F}$ sia conservativo, si trovi un suo potenziale.

   Si calcoli l'integrale di linea di seconda specie di $\overrightarrow{F}$ lungo la curva

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,1] & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, t^2) \end{array}$$

Soluzioni della prima versione

Soluzione 1. L'equazione differenziale è a variabili separabili.

Separiamo le variabili e passiamo agli integrali indefiniti:

$$\int \frac{1}{(y+1)^2}\, dy = \int x\, dx.$$

Ottengo

$$-\frac{1}{y+1} = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

dove C è una costante di integrazione, e quindi

$$y = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C} - 1.$$

Imponiamo la condizione iniziale:

$$1 = y(0) = -\frac{1}{C} - 1.$$

Quindi $C = -\frac{1}{2}$. La soluzione del problema è dunque

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}} - 1 = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Visto che il denominatore $1 - x^2$ si annulla per $x = 1$ e $x = -1$, il più grande intervallo contenente $x_0 = 0$ su cui è definita la soluzione è $I =]-1, 1[$.

Soluzione 2. L'integrale generale dell'omogenea associata è

$$c_1 + c_2 e^{-x}$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$. Una soluzione particolare dell'equazione differenziale è da cercare nella forma

$$Ae^{2x}.$$

Svolgendo i calcoli si trova che una soluzione particolare è

$$y_P(x) = \frac{1}{6}e^{2x}.$$

L'integrale generale dell'equazione data è quindi

$$c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{e^{2x}}{6}$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$. Per determinare c_1 e c_2 occorre imporre le condizioni iniziali.

La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{e^{-x}}{3} + \frac{e^{2x}}{6}.$$

Soluzione 3.

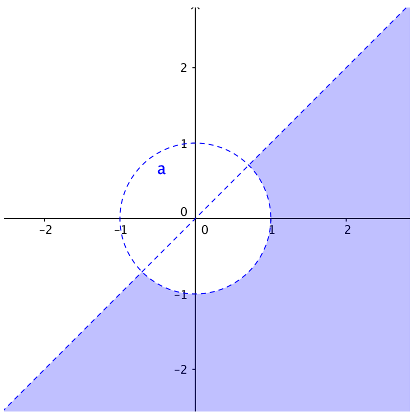
1. Sia $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Notiamo che
$$f(x,0) = 1$$
per ogni $x \neq 0$. Quindi $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 1$. D'altra parte
$$f(0,y) = -1$$
per ogni $y \neq 0$. Quindi $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = -1$. Perciò non può esistere il limite in $(0,0)$.

2. Sia $f(x,y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$. Passiamo a coordinate polari.
$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{\rho^3(\cos(\vartheta))^3 - \rho^3\cos(\vartheta)(\sin(\vartheta))^2}{\rho^2} \right| = \left|\rho\cos(\vartheta)[(\cos(\vartheta))^2 - (\sin(\vartheta))^2]\right| \\ &\leq \rho\,|\cos(\vartheta)|\,\left|(\cos(\vartheta))^2 - (\sin(\vartheta))^2\right| \leq \rho. \end{aligned}$$
Quest'ultima funzione tende a 0 quando $\rho \to 0^+$. Quindi
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Soluzione 4.

1. La funzione f è definita per tutti e soli i punti $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano le condizioni
   a) $x - y > 0$;
   b) $x^2 + y^2 - 1 > 0$.

   La regione D è qui rappresentata.



2. Il punto P è di frontiera per D. Infatti, in qualunque intorno
$$U_r(P) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < r^2\}$$
vi è almeno un punto non appartenente a D (ad esempio P) e un punto appartenente a D (ad esempio $\left(1 + \frac{r}{2}, 0\right)$).

Soluzione 5.

1. Innanzitutto notiamo che
$$\gamma'(t) = \left(1, 2t, 2t^2\right).$$
Quindi
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = \sqrt{(1 + 2t^2)^2} = 1 + 2t^2.$$
La lunghezza di γ può essere così calcolata:
$$\int_0^2 (1 + 2t^2)\ dt = \left[t + \frac{2}{3}t^3\right]_0^2 = \frac{22}{3}.$$

2. Notiamo che $P = \gamma(1)$ e $\gamma'(1) = (1, 2, 2)$. Una parametrizzazione di r è
$$r(t) = \left(1, 1, \frac{2}{3}\right) + t\,(1, 2, 2)$$
per $t \in \mathbf{R}$.

Soluzione 6. La funzione f è definita su un insieme compatto.

Cerchiamo innanzitutto eventuali punti stazionari nella parte interna di D.
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 1 = 0 \\ f'_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$
Notiamo che non vi possono essere punti stazionari.

Cerchiamo dunque il massimo e minimo globale sulla frontiera dell'insieme Ω, che è il rettangolo di vertici
$$A = (0, -1); B = (1, -1); C = (1, 1); D = (0, 1).$$

- Lato AB: $(x, y) \in AB \Leftrightarrow x \in [0, 1], y = -1$. La funzione $g(x) = f(x, -1) = x + 1$ non ha punti stazionari. Quindi gli unici punti candidati su AB sono A e B.
- Lato BC: $(x, y) \in BC \Leftrightarrow x = 1, y \in [-1, 1]$. La funzione $g(y) = f(1, y) = 1 + y^2$ ha come unico punto stazionario $y = 0$. Quindi i punti candidati su BC sono B, C e $P_1 = (1, 0)$.
- Lato CD: $(x, y) \in CD \Leftrightarrow x \in [0, 1], y = 1$. La funzione $g(x) = f(x, 1) = x + 1$ non ha punti stazionari. Quindi gli unici punti candidati su CD sono C e D.
- Lato AD: $(x, y) \in AD \Leftrightarrow x = 0, y \in [-1, 1]$. La funzione $g(x) = f(0, y) = y^2$ ha come unico punto stazionario $y = 0$. Quindi i punti candidati su AD sono A, D e $P_2 = (0, 0)$.

Valutiamo f nei punti candidati.
$$f(A) = 1; f(B) = 2; f(C) = 2; f(D) = 1; f(P_1) = 1; f(P_2) = 0.$$
Il minimo è dunque 0, mentre il massimo è 2.

Soluzione 7. Notiamo che il vincolo non ha punti singolari in quanto

$$\nabla g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x,2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

e $(0,0)$ non è un punto di M.

Cerchiamo ora i punti stazionari della funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x-y)^2 - \lambda(x^2+y^2-1)$$

risolvendo il seguente sistema (non lineare):

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y,\lambda) & = 2(x-y) - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y,\lambda) & = -2(x-y) - 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x,y,\lambda) & = -g(x,y) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è soddisfatta solo se $y = x(1-\lambda)$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$\lambda x(2-\lambda) = 0.$$

Quest'ultima equazione è verificata solo se $x = 0$, oppure $\lambda = 0$, oppure $\lambda = 2$. Studiamo separatamente i tre casi.

- Se $x = 0$, allora dalla prima equazione ricaviamo che $y = 0$. Poiché $(0,0) \notin M$, questo caso è da escludere.
- Se $\lambda = 0$, allora dalla prima equazione ricaviamo che $y = x$. Sostituendo nella terza equazione otteniamo i seguenti punti stazionari di $\mathcal{L}$:

$$P_1 = (x_1,y_1,0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \quad P_2 = (x_2,y_2,0) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

- Se $\lambda = 2$, allora dalla prima equazione ricaviamo che $y = -x$. Sostituendo nella terza equazione otteniamo i seguenti punti stazionari di $\mathcal{L}$:

$$P_3 = (x_3,y_3,2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right), \quad P_4 = (x_4,y_4,2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right).$$

La matrice hessiana orlata di $\mathcal{L}$ è

$$B_{\mathcal{L}}(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2-2\lambda & -2 \\ 2y & -2 & 2-2\lambda \end{bmatrix}.$$

Poiché

$$\det(B_{\mathcal{L}}(P_1)) = \det(B_{\mathcal{L}}(P_2)) = -16 < 0,$$

concludiamo che (x_1,y_1) e (x_2,y_2) sono punti di minimo locale vincolato per f.

Poiché

$$\det(B_{\mathcal{L}}(P_3)) = \det(B_{\mathcal{L}}(P_4)) = 16 > 0,$$

concludiamo che (x_3,y_3) e (x_4,y_4) sono punti di massimo locale vincolato per f.

Soluzione 8. Consideriamo la trasformazione

$$\begin{array}{rccl} T: & [0,1]\times[0,1] & \to & \mathbf{R}^2 \\ & (u,v) & \mapsto & (0,2)+u(2,0)+v(2,2). \end{array}$$

Notiamo che l'immagine di T è il parallelogramma $ABCD$. Inoltre

$$DT(u,v) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e $\det(DT(u,v)) = 4$.

Calcoliamo ora l'integrale:

$$\begin{aligned} \int\int_\Omega (x+y)\ dxdy &= \int_0^1 \int_0^1 (2u+2v+2+2v)\cdot 4\ dudv = 4\int_0^1 \left[u^2+4uv+2u\right]_{u=0}^1\ dv \\ &= 4\int_0^1 (3+4v)\ dv = 4[2v^2+3v]_0^1 = 20. \end{aligned}$$

Soluzione 9.

1. Il campo è conservativo in quanto è definito su tutto $\mathbf{R}^2$ e

$$(F_1)'_y = x^2+2y = (F_2)'_x.$$

2. Sia $U(x,y)$ un potenziale di $\overrightarrow{F}$. Allora

$$\begin{aligned} \int F_1(x,y)\ dx &= \frac{x^3}{3}y + xy^2 + x + C(y) = U(x,y); \\ \int F_2(x,y)\ dy &= \frac{x^3}{3}y + xy^2 + D(x) = U(x,y). \end{aligned}$$

Se pongo $C(y)=0$ e $D(x)=x$ trovo dunque un potenziale di $\overrightarrow{F}$.

Visto che il campo è conservativo per calcolare l'integrale di linea di seconda specie mi basta calcolare

$$U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = \frac{7}{3}.$$