Esame di Analisi Matematica II per gli studenti del corso di laurea in Informatica dell'Università di Verona

Verona, 19 febbraio 2016

Informazioni personali

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: ______________________

Si barri e firmi l'opzione desiderata.

1. Ho svolto la prova intermedia il 23 novembre 2015, **non ero presente all'appello del 4 febbraio 2016** e chiedo che venga corretta solo la parte II dell'esame odierno.

   Firma: ______________________

2. Chiedo che venga corretto l'intero esame, consapevole che in tal caso il voto della prova intermedia (qualora svolta) decade.

   Firma: ______________________

3. Intendo ritirarmi.

   Firma: ______________________

In caso di consegna, si indichi il numero di fogli protocollo consegnati: __________.

ISTRUZIONI

- Il testo di questa prova è diviso in due parti, entrambe stampate sul retro di questo foglio.
- Occorre rispondere alle domande sui fogli protocollo. Su tali fogli è necessario scrivere il proprio nome, cognome e matricola.
- È vietato utilizzare dispositivi elettronici e consultare libri o appunti durante lo svolgimento della prova pena l'annullamento della prova stessa.
- Il tempo per lo svolgimento del compito completo è **3 ore**.
- Chi intende svolgere solo la seconda parte del compito ha a disposizione **1 ora e 30 minuti**. In caso di consegna dopo questo limite verrà corretto il compito intero e il voto della prova intermedia decadrà.
- Chi svolge solo la seconda parte del compito ottiene al più 16 punti che vanno a sommarsi al punteggio ottenuto nella prova intermedia. Per il superamento dell'esame è necessario che la somma dei punteggi sia almeno 18.
- Chi svolge il compito intero deve ottenere almeno 18 punti per il superamento dell'esame.

Parte I

Esercizio 1 (punti: .... /4)**.** Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(non è necessario determinare l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata).

Esercizio 2 (punti: .... /2)**.** Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(non è necessario determinare l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata).

Esercizio 3 (punti: .... /3)**.** Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = \sin(3x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 4 (punti: .... /5)**.**
Sia $f(x, y) = 4x^2 - y^2 - 8x - 2y$ una funzione definita per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

1. (3 pt.) Si rappresenti nel piano cartesiano l'insieme
$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) \leq 1\}.$$
2. (1 pt.) Il punto $P = (1, -1)$ è interno, esterno o di frontiera per A? Si motivi la risposta.
3. (1 pt.) Il punto $Q = (0, -1)$ è interno, esterno o di frontiera per A? Si motivi la risposta.

Esercizio 5 (punti: .... /2)**.**
Si spieghi perché non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}.$$

Parte II

Esercizio 6 (punti: .... /4)**.**
Sia $f(x, y) = \sqrt[5]{x^4 y}$ una funzione definita per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

1. (1 pt.) Si calcolino $f'_x(0, 0)$ e $f'_y(0, 0)$, utilizzando direttamente la definizione di derivata parziale.
2. (3 pt.) Si spieghi perché f non è differenziabile in $(0, 0)$.

Esercizio 7 (punti: ....../4)**.** Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

definite per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Sia inoltre

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : g(x, y) = 0\}.$$

Si trovino i punti di minimo e massimo locale vincolato della funzione f al variare di (x, y) in M usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esercizio 8 (punti: .... /4)**.** Si calcoli

$$\iiint_\Omega z \cdot e^{x^2+y^2}\, dxdydz,$$

dove $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z\}$.

Esercizio 9 (punti: .... /4)**.** Si calcoli l'area della superficie Σ così parametrizzata:

$$\begin{aligned} \sigma: \quad [1, 2] \times [0, 2\pi] &\to \mathbf{R}^3 \\ (\rho, \vartheta) &\mapsto (\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta), 2 + \rho^2). \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Soluzioni}}$

Soluzione 1. L'equazione differenziale può essere scritta nella forma

$$y' - \frac{y}{x} = x.$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Anche se non richiesto possiamo notare che una soluzione locale del problema di Cauchy sarà definita in un intervallo contenente 1 e contenuto in $]0, +\infty[$.

Moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per un fattore integrante ottenendo

$$y' \cdot e^{-\ln(x)} - y \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-\ln(x)} = x \cdot e^{-\ln(x)}.$$

Possiamo riscrivere l'equazione ottenuta anche in questa forma:

$$y' \cdot e^{\ln(x^{-1})} - y \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{\ln(x^{-1})} = x \cdot e^{\ln(x^{-1})}.$$

Quindi

$$(y \cdot e^{\ln(x^{-1})})' = x \cdot x^{-1} = 1,$$

ovvero

$$y \cdot x^{-1} = x + C$$

per una costante di integrazione C.

L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y = x^2 + Cx,$$

con $C \in \mathbf{R}$. Imponendo la condizione iniziale otteniamo $C = 0$. Dunque una soluzione locale del problema di Cauchy è

$$y(x) = x^2.$$

Soluzione 2. L'equazione differenziale è lineare del primo ordine ma anche a variabili separabili, in quanto può essere riscritta nella forma

$$y' = -xy.$$

In particolare notiamo che questa equazione ha una soluzione costante, ovvero $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Tale soluzione soddisfa il dato iniziale ed è dunque soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione 3. Le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

sono 1 e -1. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma $\overline{y}(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$. Svolgendo i calcoli si ricava che $A = 0$ e $B = -\frac{1}{10}$.

Quindi l'integrale generale dell'equazione completa è

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{10}\sin(3x)$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$.

Imponendo le condizioni iniziali troviamo la soluzione del problema, che è

$$y(x) = \frac{3}{20}e^x - \frac{3}{20}e^{-x} - \frac{1}{10}\sin(3x).$$

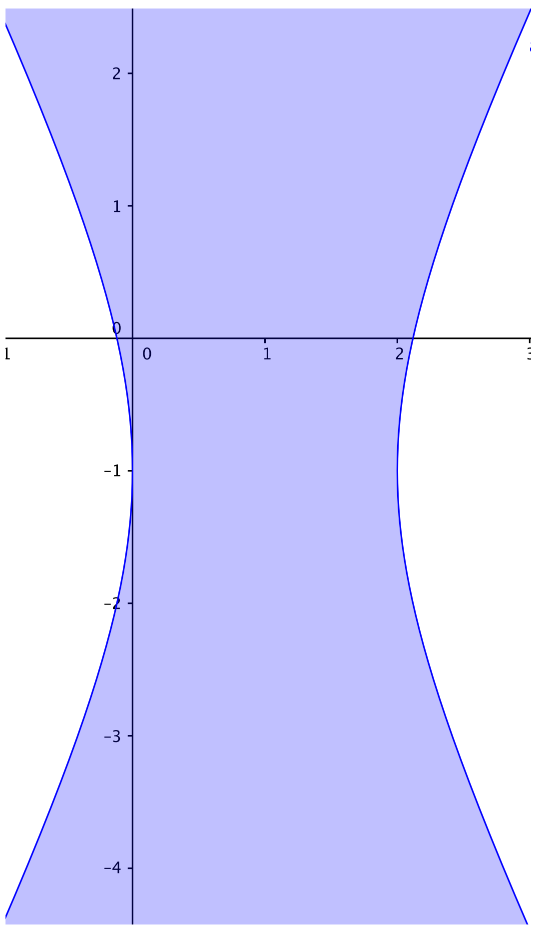
Soluzione 4.

1. Conviene rappresentare innanzitutto la curva avente equazione $f(x, y) = 1$. Dopo alcune manipolazioni algebriche otteniamo l'equazione

   $$(x-1)^2 - \frac{(y+1)^2}{4} = 1,$$

   che descrive un'iperbole con asse trasversale parallelo all'asse x, centro $(1, -1)$ e asintoti di equazione $y = 2x - 3$ e $y = -2x + 1$.

   La rappresentazione grafica di A corrisponde alla regione ombreggiata nella seguente figura.



2. Il punto P è interno. Infatti, consideriamo l'intorno sferico $U_1(P)$. Un punto (x, y) appartiene a $U_1(P)$ se e solo se

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 < 1.$$

In particolare $(x-1)^2 < 1$. Quindi

$$(x-1)^2 - \frac{(y+1)^2}{4} < 1,$$

ovvero $(x, y) \in A$.

3. Il punto Q è di frontiera. Infatti notiamo che $Q \in A$ e quindi non può essere un punto esterno. Prendiamo un qualunque intorno $U_r(Q)$. Si ha che $U_r(Q) \cap A \neq \emptyset$ visto che $U_r(Q)$ contiene Q. Inoltre in $U_r(Q)$ è contenuto il punto $\left(-\frac{r}{2}, -1\right)$ che tuttavia non appartiene ad A. Quindi $U_r(Q)$ contiene anche punti di $\mathbf{R}^2 \setminus A$, ovvero Q è un punto di frontiera.

Soluzione 5.

Sia $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2}$. Notiamo che $f(x, 0) = 0$ per ogni $x \neq 0$. Quindi, se il limite esistesse, dovrebbe essere uguale a 0. Tuttavia

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2 + x^2} = \frac{1}{3}$$

per ogni $x \neq 0$. Visto che $f(x, x)$ tende a $\frac{1}{3}$ quando x tende a 0 concludiamo che non esiste il limite.

$\boxed{\textbf{Parte II}}$

Soluzione 6.

1. Calcoliamo $f'_x(0,0)$:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$
Quindi $f'_x(0,0)=0$. Calcoli analoghi ci portano a concludere che $f'_y(0,0)=0$.

2. Secondo la definizione, f è differenziabile in $(0,0)$ solo se
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-T_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$
Notiamo che $T_1(x,y)=0$. Quindi si tratta di calcolare, se esiste,
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y),$$
dove
$$g(x,y)=\frac{\sqrt[5]{x^4y}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Notiamo che
$$g(x,x)=\frac{\sqrt[5]{x^4x}}{\sqrt{x^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{2}|x|}.$$
Se x tende a 0 da destra abbiamo che $g(x,x)$ tende a $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Visto che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ deve essere uguale a 0 affinché f sia differenziabile in $(0,0)$, concludiamo che f non è differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione 7. La funzione Lagrangiana è
$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=xy-\lambda\cdot(x^2+y^2-1).$$
Cerchiamo ora i punti stazionari di $\mathcal{L}$.
$$\begin{cases}\mathcal{L}'_x(x,y,\lambda)=y-2\lambda x=0\\ \mathcal{L}'_y(x,y,\lambda)=x-2\lambda y=0\\ \mathcal{L}'_\lambda(x,y,\lambda)=-x^2-y^2+1=0\end{cases}$$
Dalla prima equazione ricaviamo la relazione
$$y=2\lambda x.$$
Sostituendo nella seconda equazione si deduce che
$$x-4\lambda^2x=x\cdot(1-4\lambda^2)=0.$$
Quest'ultima equazione è verificata esattamente in 3 casi.

- *Caso 1:* $x = 0$.
- *Caso 2:* $\lambda = \frac{1}{2}$.
- *Caso 3:* $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Analizziamo separatamente i 3 casi.

- *Caso 1:* $x = 0$. In tal caso, dalla prima equazione ricaviamo che $y = 0$. Tuttavia, andando a sostituire i valori trovati per x e per y nella terza equazione, otteniamo un assurdo (1=0). Quindi $x = 0$ non è accettabile.
- *Caso 2:* $\lambda = \frac{1}{2}$. Dalla prima equazione ricaviamo $y = x$. Sostituendo nella terza equazione, otteniamo due valori possibili per x, ovvero $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. In definitiva, abbiamo ottenuto due punti stazionari, ovvero

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- *Caso 3:* $\lambda = -\frac{1}{2}$. Procedendo in maniera analoga al caso precedente troviamo altri due punti stazionari, ovvero

$$P_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Calcoliamo ora la matrice Hessiana orlata:

$$B_{\mathcal{L}}(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & -2\lambda \end{bmatrix}.$$

Valutando la matrice Hessiana orlata in ognuno dei 4 punti stazionari di $\mathcal{L}$ e calcolando i relativi determinanti otteniamo:

$$\det(B_{\mathcal{L}}(P_1)) = \det(B_{\mathcal{L}}(P_2)) = 8; \quad \det(B_{\mathcal{L}}(P_3)) = \det(B_{\mathcal{L}}(P_4)) = -8.$$

Quindi,

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

sono punti di massimo locale vincolato, mentre

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

sono punti di minimo locale vincolato.

Soluzione 8. Calcoliamo il seguente integrale per strati

$$\int_0^1 \left(\iint_{\Omega(z)} ze^{x^2+y^2}\ dxdy \right)\ dz,$$

dove

$$\Omega(z) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z\}.$$

Passando a coordinate polari, si tratta di calcolare

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} ze^{\rho^2}\rho\ d\rho d\vartheta\ dz.$$

Calcoliamo dunque l'integrale iterato:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} ze^{\rho^2}\right] \Big|_0^{\sqrt{z}} d\vartheta\ dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}(ze^z - z)\right)\ d\vartheta dz \\
&= \pi \cdot \int_0^1 (ze^z - z)\ dz \\
&= \pi \left[ze^z - \frac{1}{2}z^2 - e^z\right] \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Soluzione 9. L'area si può calcolare con l'integrale

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_0^{2\pi} \|\sigma_\rho \times \sigma_\vartheta\|\ d\vartheta\ d\rho &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{4\rho^4 + \rho^2}\ d\vartheta d\rho \\
&= \int_1^2 2\pi\rho\sqrt{4\rho^2 + 1}\ d\rho.
\end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene come risultato finale

$$\frac{\pi}{6}(\sqrt{17^3} - \sqrt{5^3}).$$