Esercizi per il corso di Analisi Matematica II
Corso di laurea in Informatica
Università di Verona
A. A. 2016/17
Docente: Simone Ugolini

Ultimo aggiornamento:

20 gennaio 2017

1

Premessa: adottiamo la convenzione di denotare con y una funzione incognita di una variabile x. In altre parole, y va inteso come $y(x)$ e y' come $y'(x)$ ovunque.

Negli esercizi si chiede di determinare l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata. Parleremo di ciò nella prossima lezione. Per il momento si faccia riferimento alle note del corso.

Esercizio 1.1. *Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = (y-1)\cdot x \\ y(1) = -2 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 1.2. *Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{1+x^3} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 1.3. *Si trovino almeno due soluzioni distinte del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

definite su un intervallo della forma $]-a, a[$ *per qualche* $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.4. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+2y+1}{e^{2x}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 1.5. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y^2+3y-4 \\ y(1) = -2 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 1.6. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = (3 + y^2) \cdot x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Suggerimento: *ad un certo punto occorre calcolare* $\displaystyle\int \frac{1}{3 + y^2}\, dy$*, che conviene scrivere così:*

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2}\, dy$$

2

Esercizio 2.1. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' - 7y = 2x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2.2. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \cos(x)y = \cos(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2.3. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{x^2 + 4} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2.4. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' - \tan(x) \cdot y = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2.5. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2xy}{x^2 + 1} = \dfrac{x}{x^2 + 1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2.6. *Si dimostri che, se x_0 è un numero reale positivo, allora la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ definita su $I =]x_0, +\infty[$ è una funzione lipschitziana.*

La funzione f è lipschitziana su $J =]0, +\infty[$?

Esercizio 2.7. *Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.8. *Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

3

Esercizio 3.1. *Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3.2. *Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' + y' = \sin(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.3. *Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \cos(x) + \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.4. *Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' + y = \cos(x) + \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.5. *Sia* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$. *Si dica se ognuna delle seguenti affermazioni è vera motivando la risposta.*

a) Il punto $P = (0, 0)$ *è interno all'insieme* S.

b) Il punto $P = (0, 0)$ *è di accumulazione per l'insieme* S.

c) Il punto $Q = (5, 0)$ *è esterno all'insieme* S.

Esercizio 3.6. *Si dica se l'insieme*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 = 0\}$$

è aperto, chiuso o né aperto né chiuso, motivando la risposta.

Esercizio 3.7. *Si dica se l'insieme*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

è aperto, chiuso o né aperto né chiuso.

4

Esercizio 4.1. *Si identifichino le curve descritte dalle seguenti equazioni e le si disegnino nel piano cartesiano:*

(a) $x^2 - 3y^2 = 1$*;*

(b) $2x^2 + 3y^2 - 4x - 12y + 13 = 0$*;*

(c) $x^2 - 3x + y^2 + 4y = 6$*;*

(d) $x^2 + x + 1 - y = 0$*;*

(e) $y^2 - \dfrac{x^2}{5} = 5$.

Esercizio 4.2. *Nel piano cartesiano si rappresentino le regioni corrispondenti ad ognuno dei seguenti insiemi di punti:*

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 3y^2 \le 1\right\} \\
B &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 - 4x - 12y + 13 < 0\right\} \\
C &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 3x + y^2 + 4y > 6\right\} \\
D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x + 1 - y < 0\right\} \\
E &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - \frac{x^2}{5} < 5\right\}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.3. *Si determini il dominio di ognuna delle seguenti funzioni e lo si rappresenti nel piano cartesiano:*

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sqrt{2 - (x^2 + y^2)}; \\
g(x,y) &= \sqrt{(4 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1)}; \\
h(x,y) &= \frac{1}{x^2 - y^2}; \\
l(x,y) &= \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\ln(x + y)}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.4. *Si disegnino le curve di livello 9 delle funzioni*

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2 + y^2 - 6x + 13; \\
g(x,y) &= y - x^2 + x.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.5. *Si dimostri che*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Esercizio 4.6. *Sia* $f(x,y) = xe^{-\frac{y}{x}}$ *una funzione definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tale che* $x \neq 0$. *Si mostri che non esiste* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

[Suggerimento: si considerino delle curve della forma $y = \pm x^\alpha$*]*

Esercizio 4.7. *Sia* $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ *una funzione definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Si mostri che non esiste* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Esercizio 4.8. *Si dimostri che la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2}, & \textit{se } x \neq 0 \\ 0, & \textit{se } x = 0 \end{cases}$$

è discontinua in $(0,0)$.

Esercizio 4.9. *Si dimostri che la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y-x)}{x^2+y^2}, & \textit{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \textit{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$.

[Suggerimento: si calcolino separatamente i limiti $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ *e* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$*]*

Esercizio 4.10. *Si dimostri che la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y-1)^2\sin(\pi x)}{(x-2)^2+(y-1)^2}, & \textit{se } (x,y) \neq (2,1) \\ 0, & \textit{se } (x,y) = (2,1) \end{cases}$$

è continua in $(2,1)$.

Esercizio 4.11. *Si consideri la funzione*

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

definita per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tale che* $x \neq -y$.

Si mostri che non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

[Suggerimento: si provino varie direzioni, ad esempio quelle della forma (x, mx), (x, x^α), $(x, -x + x^\alpha)$ *con* α *numero reale positivo].*

5

Esercizio 5.1. *Si trovi una parametrizzazione della retta r passante per i punti $P = (1,2,0)$ e $Q = (2,4,4)$.*

Si trovino quindi delle equazioni cartesiane della retta.

[Suggerimento: una volta trovata una parametrizzazione della retta r con parametro t, potrò scrivere un'equazione parametrica di r nella forma

$$(x, y, z) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)).$$

Rispetto al caso bidimensionale non riesco a trovare un'equazione lineare in x, y e z che descriva la retta in quanto un'equazione

$$ax + by + cz = d$$

descrive un piano nello spazio. Eliminando il parametro t troverò due equazioni lineari in x, y, z che messe a sistema mi determineranno l'insieme dei punti della retta. In altre parole troverò un sistema lineare di due equazioni lineari in 3 incognite con infinite soluzioni dipendenti da un parametro libero, cioè quel t che parametrizza la curva.]

Esercizio 5.2. *Si trovi una parametrizzazione della retta r tangente alla curva*

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\sin(4t)\cos(t), \sin(4t)\sin(t)) \end{aligned}$$

in $P = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Si può trovare "la" retta tangente alla curva γ in $Q = (0,0)$? Qual è il problema? Provate a visualizzare la curva γ con qualche programma di rappresentazione grafica.

Esercizio 5.3. *Si trovi una parametrizzazione della retta r tangente alla curva*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^2, t^3) \end{aligned}$$

in $P = (1,1)$.

Si può trovare la retta tangente alla curva γ in $Q = (0,0)$? Qual è il problema? Provate a visualizzare la curva γ con qualche programma di rappresentazione grafica.

6

Esercizio 6.1. *Si calcoli la lunghezza dell'arco di curva*

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, \sqrt{t^3}). \end{aligned}$$

Esercizio 6.2. *Si calcoli la lunghezza dell'arco di curva*

$$\begin{aligned} \gamma : [1,2] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, \ln(t)). \end{aligned}$$

[Suggerimento: può essere utile usare la sostituzione $u := \sqrt{1+t^2}$ all'interno dell'integrale che permette il calcolo della lunghezza della curva.]

Esercizio 6.3. *Si calcoli la lunghezza dell'arco della spirale archimedea*

$$\begin{aligned} \gamma : [0,2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t)). \end{aligned}$$

Esercizio 6.4. *Si trovino le derivate parziali delle seguenti funzioni:*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{x-y^3}; \\ g(x,y) &= \frac{x-y^2}{xy+y^3}; \\ h(x,y) &= \sin(x+y^2); \\ l(x,y) &= \ln(1+x+y^2). \end{aligned}$$

7

Esercizio 7.1. *Si trovi l'equazione del piano tangente al grafico di*

$$f(x,y) = e^{x\cdot y} + x^2 + \ln(y)$$

nel punto $(0,1,1)$.

Esercizio 7.2. *Si trovi l'equazione del piano tangente al grafico di*

$$f(x,y) = e^{x+y^2} + \sin(x+y)$$

nel punto $(0,0,1)$.

Esercizio 7.3. *Si consideri la funzione di due variabili così definita:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \textit{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si calcolino $f'_x(0,0)$ *e* $f'_y(0,0)$. *Quindi si verifichi che* f *è differenziabile in* $(0,0)$.

Esercizio 7.4. *Si consideri la funzione di una variabile* x *così definita:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x = 0, \\ x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Si verifichi che f *è derivabile in* 0 *e quindi differenziabile in* 0 *visto che per funzioni di una variabile i due concetti sono equivalenti. Si verifichi poi che* $f'(x)$ *non è continua in* 0. *Da ciò si può quindi concludere che la continuità della derivata non è necessaria per la differenziabilità.*

Esercizio 7.5. *Si consideri la seguente funzione definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & \textit{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si verifichi che le derivate direzionali di f *calcolate in* $(0,0)$ *sono tutte nulle. Si noti quindi che le ipotesi del teorema della formula del gradiente non sono soddisfatte per questa funzione (si provi a calcolare il limite per* (x,y) *che tende a* $(0,0)$ *di questa funzione lungo la direzione* $y = x^2$*). Nonostante ciò constatiamo che la formula del gradiente funziona comunque in questo esempio. Perciò la condizione espressa dalla formula del gradiente è solo sufficiente.*

Esercizio 7.6 (facoltativo). *Ricordiamo dall'algebra lineare il seguente*

Teorema.

Siano $\overrightarrow{x}$ *e* $\overrightarrow{y}$ *due vettori di* $\mathbb{R}^n$*. Allora:*

1. $|\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle| \leq \|\overrightarrow{x}\| \cdot \|\overrightarrow{y}\|$;
2. $|\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle| = \|\overrightarrow{x}\| \cdot \|\overrightarrow{y}\|$ *se e solo se* $\overrightarrow{x}$ *e* $\overrightarrow{y}$ *sono linearmente dipendenti.*

Si (ri)dimostri il teorema, in particolare il secondo punto.

8

Esercizio 8.1. *Si trovi l'equazione della retta* r *tangente alla curva di livello* 0 *della funzione* $f(x,y) = e^x \cdot y + \ln(x^2 + y^2)$ *nel punto* $(1,0)$.

Esercizio 8.2. *Si trovi l'equazione della retta* r *tangente alla curva di livello* 0 *della funzione* $f(x,y) = \sin(x+y) - x^3$ *nel punto* $(0,0)$.

9

Esercizio 9.1. *Si dica se ognuna delle seguenti forme quadratiche è definita positiva, definita negativa, semidefinita positiva, semidefinita negativa o indefinita.*

a) $f(x,y) = 4x^2 + 8xy + 5y^2$;

b) $f(x,y) = -x^2 + xy - 3y^2$;

c) $f(x,y) = x^2 - 6xy + 9y^2$;

d) $f(x,y) = 4x^2 - y^2$;

e) $f(x,y) = 6xy - 9y^2 - x^2$.

Esercizio 9.2. *Sia* $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ *una forma quadratica. Si supponga di sapere che tale forma quadratica è indefinita. Si mostri che è possibile trovare punti* (x,y) *arbitrariamente vicini a* $(0,0)$ *in cui* $f(x,y) < 0$ *e punti arbitrariamente vicini a* $(0,0)$ *in cui* $f(x,y) > 0$.

Esercizio 9.3. *Sia*

$$f(x,y) = \ln(xy) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

a) Si trovi il dominio D *della funzione* f.

b) Si trovino e si classifichino i punti stazionari della funzione f *all'interno del suo dominio di definizione.*

Esercizio 9.4. *Sia*

$$f(x,y) = x^4 + x^3y - xy$$

una funzione definita per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Si trovino e si classifichino i punti stazionari della funzione f *all'interno del suo dominio di definizione.*

Esercizio 9.5. *Sia*

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + x + 4).$$

a) Si trovi il dominio D *della funzione* f *(non è difficile, ma non è una conica...).*

b) Si trovino e si classifichino i punti stazionari della funzione f *all'interno del suo dominio di definizione.*

Esercizio 9.6. *Si consideri la funzione*

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + x - y + 3$$

definita per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Si studi la convessità di f.

b) Si trovino (se esistono) i punti di minimo e massimo globale di f su $\mathbb{R}^2$.

10

Esercizio 10.1. *Sia* $f(x,y) = x + y^2$ *una funzione di due variabili reali definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*. Si cerchino i punti di minimo e massimo locale della funzione* f *sull'insieme*

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 25 = 0\right\}.$$

Esercizio 10.2. *Sia* $f(x,y) = x + y$ *una funzione di due variabili reali definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*. Si cerchino i punti di minimo e massimo locale della funzione* f *sull'insieme*

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y - 1 = 0\right\}.$$

Esercizio 10.3. *Sia* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *una funzione di due variabili reali definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*. Si cerchino i punti di minimo e massimo locale della funzione* f *sull'insieme*

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - 1 = 0\right\}.$$

Esercizio 10.4. *Sia* $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ *una funzione di due variabili reali definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*. Si cerchino i punti di minimo e massimo locale della funzione* f *sull'insieme*

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^3 + y^2 = 0\right\}.$$

[Osservazione: in questo esercizio c'è un punto singolare per il vincolo.]

Esercizio 10.5. *Si trovino il minimo e il massimo globale della funzione*

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x$$

sull'insieme

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 10.6. *Si trovino il minimo e il massimo globale della funzione*

$$f(x,y) = e^{xy}$$

sull'insieme

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 3\}.$$

Esercizio 10.7. *Si trovino il minimo e il massimo globale della funzione*

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$$

sull'insieme

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Esercizio 10.8. *Il numero di beni prodotti da un'azienda è espresso da una funzione di produzione* $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$*, dove* x *e* y *sono le migliaia di Euro spese in manodopera e in macchinari.*

Se l'azienda spende 1000 Euro, come deve ripartire tale somma fra manodopera e macchinari in modo da massimizzare la produzione?

Esercizio 10.9. *Si determini l'equazione del piano* π *tangente alla superficie di livello* 14 *della funzione* $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ *in* $P = (1, 1, 1)$.

11

Esercizio 11.1. *Si trovi l'equazione del piano passante per i punti* $A = (1, 2, 3), B = (1, 0, 1), C = (0, 1, 0)$.

Esercizio 11.2. *Si trovi l'equazione del piano passante per i punti* $A = (1, 2, 3), B = (2, 3, 4), C = (4, 5, 6)$. *La domanda è ben posta? In altre parole c'è esattamente un piano passante per questi tre punti?*

Esercizio 11.3. *Si calcoli l'integrale di linea di prima specie* $\int_\gamma f\ ds$, *dove*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, \pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (e^t \cos(t), e^t \sin(t)) \end{array}$$

e $f(x, y) = x^2 + y^2$, *per ogni* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 11.4. *Si calcoli l'integrale di linea di prima specie* $\int_\gamma f\ ds$, *dove*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (3t, 4t - 1, t + 5) \end{array}$$

e $f(x, y, z) = 3x - y + z$, *per ogni* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 11.5. *Si calcoli* $\iint_D e^{x-y}\ dxdy$, *dove* $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Esercizio 11.6. *Si calcoli* $\iint_D (e^x y + y^2 x)\ dxdy$, *dove* $D = [-1, 1] \times [0, 2]$.

12

Esercizio 12.1. *Si calcoli* $\iint_D xy\ dxdy$, *dove* $D = D_1 \cup D_2$ *e*

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0, -x \le y \le x^2+1\}; \\ D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le x+1\}. \end{aligned}$$

Esercizio 12.2. *Si calcoli* $\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\ dxdy$ *sapendo che*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, \frac{x^2}{2} \le y \le x^2\right\}.$$

Esercizio 12.3. *Si calcoli*

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2-9}\ dxdy,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9 \le x^2+y^2 \le 25\}$.

Esercizio 12.4. *Si calcoli*

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdy,$$

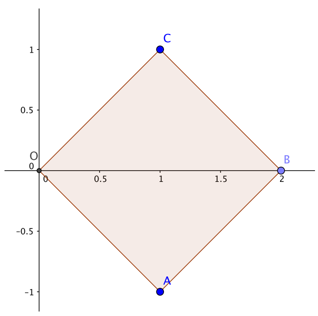
dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4, y \ge x\}.$$

Esercizio 12.5. *Si calcoli*

$$\iint_D (x-y)^2\ dxdy,$$

dove D *è il parallelogramma qui rappresentato:*



Esercizio 12.6. *Si calcoli il volume dei seguenti solidi usando degli opportuni integrali doppi.*

1. *Cilindro di altezza* $h > 0$ *a base circolare di raggio* $R > 0$.

2. *Semisfera di raggio $R > 0$.*

   [Suggerimento: l'equazione cartesiana della semisfera di raggio R centrata in $(0,0,0)$ è $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$]

3. *Cono circolare retto di raggio R e altezza $h > 0$.*

   [Suggerimento: si consideri la funzione $z = f(x,y) = \dfrac{h}{R} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ e la si integri su un opportuno dominio di $\mathbb{R}^2$. Il risultato che si ottiene non è il volume del cono, ma c'è una stretta relazione con il volume del cono. Per rendersene conto si provi a rappresentare il grafico della funzione f avvalendosi di qualche programma per la rappresentazione grafica.]

Esercizio 12.7. *Calcolare il volume della regione*

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

usando l'integrazione per fili (si tratta quindi di integrare la funzione 1 su Ω usando l'integrazione per fili).

Esercizio 12.8. *Si calcoli il volume dei seguenti solidi usando degli opportuni integrali* tripli *(si suggerisce di usare l'integrazione per strati).*

1. *Cilindro di altezza $h > 0$ a base circolare di raggio $R > 0$.*

2. *Semisfera di raggio $R > 0$.*

3. *Cono circolare retto di raggio R e altezza $h > 0$.*

13 (ultimo foglio di esercizi)

Esercizio 13.1. *Si calcoli il seguente integrale triplo usando delle coordinate sferiche:*

$$\iiint_D x^2 \; dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 13.2. *Si calcoli il seguente integrale triplo usando delle coordinate sferiche:*

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2} \; dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \leq \sqrt{x^2+y^2}, z \geq 0\}.$$

[Suggerimento: si cerchi di rappresentare il dominio di integrazione. In particolare, si presti attenzione agli estremi di integrazione rispetto alla variabile φ]

Esercizio 13.3. *Si calcoli il seguente integrale triplo:*

$$\iiint_D \frac{x^2 e^z}{1+z^2} \; dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 1, x^2+y^2 \leq z^2+1\}.$$

Esercizio 13.4. *Si calcoli il seguente integrale triplo:*

$$\iiint_D z^2 \; dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 3, \sqrt{x^2+y^2+1} \leq z \leq 2\}.$$

Esercizio 13.5. *Si calcoli il seguente integrale triplo:*

$$\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \; dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq 1\}.$$

Esercizio 13.6. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{F}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\dfrac{2xy}{(1+x^2)^2}, -\dfrac{1}{1+x^2} \right). \end{array}$$

Si dica se tale campo è conservativo e in caso affermativo si trovi un potenziale U di $\overrightarrow{F}$.

Esercizio 13.7. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{F}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2y+1, 2x-1, 2z). \end{array}$$

Si dica se tale campo è conservativo e in caso affermativo si trovi un potenziale U di $\overrightarrow{F}$.

Esercizio 13.8. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{F}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (2x+3y, 4x-5y)\,. \end{array}$$

Si dica se tale campo è conservativo e in caso affermativo si trovi un potenziale U di $\overrightarrow{F}$.

Esercizio 13.9. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{F}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (y^2+\sin(z), 2xy, x\cos(z))\,. \end{array}$$

1. *Si dica se tale campo è conservativo e in caso affermativo si trovi un potenziale U di $\overrightarrow{F}$.*
2. *Si calcoli l'integrale di linea di seconda specie del campo $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento che congiunge $P=(1,1,0)$ a $Q=(2,0,\pi)$.*

Esercizio 13.10. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{F}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x, (xz-2), xy)\,. \end{array}$$

1. *Si dica se tale campo è conservativo e in caso affermativo si trovi un potenziale U di $\overrightarrow{F}$.*
2. *Si calcoli l'integrale di linea di seconda specie del campo $\overrightarrow{F}$ lungo la curva*

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & [1,2] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (t-1, 1-t, 2t-2)\,. \end{array}$$

Esercizio 13.11. *Si calcoli l'integrale di linea di seconda specie del campo vettoriale*

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{F}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (-y, x) \end{array}$$

lungo la curva

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vartheta & \mapsto & (\vartheta\cos(\vartheta), \vartheta\sin(\vartheta))\,. \end{array}$$

Esercizio 13.12. *Si consideri la superficie Σ parametrizzata da*

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (u+1, u^2+v^2, v)\,. \end{array}$$

Si trovi l'equazione cartesiana del piano π tangente a Σ nel punto $P=(2,2,1)$.

Esercizio 13.13. *Si consideri la superficie* Σ *parametrizzata da*

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & \mathbb{R}\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (t,\varphi) & \mapsto & (-t\cos(\varphi), 2+t, 1-t\sin(\varphi))\,. \end{array}$$

Si trovi l'equazione cartesiana del piano π *tangente a* Σ *nel punto* $P=(\sqrt{2},0,1+\sqrt{2})$.

Esercizio 13.14. *Si calcoli l'area della superficie* Σ *parametrizzata da*

$$\begin{array}{rcl} \sigma:[0,\pi]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\varphi,\vartheta) & \mapsto & (\sin(\varphi)\cos(\vartheta), \sin(\varphi)\sin(\vartheta), \cos(\varphi)). \end{array}$$

Esercizio 13.15. *Si calcoli l'area della superficie* Σ *parametrizzata da*

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & [0,1]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (u\cos(v), u\sin(v), v). \end{array}$$