Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

28 ottobre 2011

ESERCIZIO 1. *Determinare la scomposizione LU o $P^T LU$ della matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -11 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

Vogliamo trovare due matrici L e U, la prima diagonale inferiore invertibile e la seconda diagonale superiore, nonché forma ridotta della matrice A di partenza in seguito all'Eliminazione di Gauss. Esse sono tali che

$$A_{m\times n} = L_{m\times m} U_{m\times n}$$

O eventualmente, qualora si effetueranno scambi di righe, si dovrà determinare anche la matrice di permutazione P e la scomposizione sarà

$$A_{m\times n} = P^T_{m\times m} L_{m\times m} U_{m\times n}$$

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -11 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(-1) \\ E_{21}(-2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_2(-1/3) \\ E_{32}(1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E_3(1/2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Quindi avendo trovato la forma ridotta U, dobbiamo trovare la matrice invertibile L. Tale matrice è chiaro che dev'essere una matrice quadrata 3×3.

I vari elementi della matrice devono verificare la seguente definizione:

$$a_{ij_{i\neq j}} = \begin{cases} -\alpha & \text{se è stata applicata } E_{ij}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{se è stata applicata } E_{i}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si verifica, moltiplicando le matrici che

$$LU = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -11 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = A$$

ESERCIZIO 2. *Determinare la scomposizione LU o P^TLU della matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

SVOLGIMENTO.

Vogliamo trovare due matrici L e U, la prima diagonale inferiore invertibile e la seconda diagonale superiore, nonché forma ridotta della matrice A di partenza in seguito all'Eliminazione di Gauss. Esse sono tali che

$$A_{m\times n} = L_{m\times m} U_{m\times n}$$

O eventualmente, qualora si effetueranno scambi di righe, si dovrà determinare anche la matrice di permutazione P e la scomposizione sarà

$$A_{m\times n} = P^T_{m\times m} L_{m\times m} U_{m\times n}$$

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(1/2) \\ E_{21}(1) \\ E_{41}(-1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{32}(-4) \\ E_{42}(-2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_3(-1) \\ E_{43}(3) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Quindi avendo trovato la forma ridotta U, dobbiamo trovare la matrice invertibile L. Tale matrice è chiaro che dev'essere una matrice quadrata 4×4.

I vari elementi della matrice devono verificare la seguente definizione:

$$a_{ij_{i\neq j}} = \begin{cases} -\alpha & \text{se è stata applicata } E_{ij}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{se è stata applicata } E_{i}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si verifica, moltiplicando le matrici che

$$LU = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} = A$$

ESERCIZIO 3. *Determinare la scomposizione LU o $P^T LU$ della matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

Vogliamo trovare due matrici L e U, la prima diagonale inferiore invertibile e la seconda diagonale superiore, nonché forma ridotta della matrice A di partenza in seguito all'Eliminazione di Gauss. Esse sono tali che

$$A_{m\times n} = L_{m\times m} U_{m\times n}$$

O eventualmente, qualora si effetueranno scambi di righe, si dovrà determinare anche la matrice di permutazione P e la scomposizione sarà

$$A_{m\times n} = P^T_{m\times m} L_{m\times m} U_{m\times n}$$

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E_{12} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(1/2) \\ E_{31}(4) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$E_{32}(-4) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$E_3(1/17) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Notiamo che è stato fatto uno scambio di riga, quindi la scomposizione sarà del tipo $A = P^T LU$ con matrice di permutazione P, matrice quadrata di ordine 3 invertibile, che non è altro che l'identità in cui sono scambiate le righe secondo le matrici E_{ij}:

$$P = E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adesso calcoliamo la matrice PA:

$$PA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ed eseguiamo l'Eliminazione di Gauss che non necessiterà di alcuno scambio di righe, in questo modo otteniamo la U e L in modo che

$$PA = LU \qquad \text{da cui} \qquad A = P^{-1}LU = P^T LU$$

Notare che la U sarà quella già trovata, mentre la L si ottiene dalla seconda Eliminazione di Gauss, cioè quella svolta su PA.

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss a PA:

$$PA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(1/2) \\ E_{31}(4) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$E_{32}(-4) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$E_3(1/17) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Quindi avendo trovato la forma ridotta U, dobbiamo trovare la matrice invertibile L. Tale matrice è chiaro che dev'essere una matrice quadrata 3×3.

I vari elementi della matrice devono verificare la seguente definizione:

$$a_{ij_{i\neq j}} = \begin{cases} -\alpha & \text{se è stata applicata } E_{ij}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{se è stata applicata } E_{i}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 17 \end{bmatrix}$$

Si verifica, moltiplicando le matrici che

$$P^T LU = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

ESERCIZIO 4. *Determinare la scomposizione LU o $P^T LU$ della matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

Vogliamo trovare due matrici L e U, la prima diagonale inferiore invertibile e la seconda diagonale superiore, nonché forma ridotta della matrice A di partenza in seguito all'Eliminazione di Gauss. Esse sono tali che

$$A_{m\times n} = L_{m\times m} U_{m\times n}$$

O eventualmente, qualora si effetueranno scambi di righe, si dovrà determinare anche la matrice di permutazione P e la scomposizione sarà

$$A_{m\times n} = P^T_{m\times m} L_{m\times m} U_{m\times n}$$

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{21}(-2) \\ E_{31}(-3) \\ E_{41}(2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E_{24} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_2(1/7) \\ E_{34} \\ E_3(-1/3) \\ E_4(-1/4) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Notiamo che è stato fatto uno scambio di riga, quindi la scomposizione sarà del tipo $A = P^T LU$ con matrice di permutazione P, matrice quadrata di ordine 4 invertibile, che non è altro che l'identità in cui sono scambiate le righe secondo le matrici E_{ij}:

$$P = E_{34}E_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Adesso calcoliamo la matrice PA:

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

ed eseguiamo l'Eliminazione di Gauss che non necessiterà di alcuno scambio di righe, in questo modo otteniamo la U e L in modo che

$$PA = LU \qquad \text{da cui} \qquad A = P^{-1}LU = P^T LU$$

Notare che la U sarà quella già trovata, mentre la L si ottiene dalla seconda Eliminazione di Gauss, cioè quella svolta su PA.

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss a PA:

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} E_{21}(2) \\ E_{31}(-2) \\ E_{41}(-3) \\ E_{2}(1/7) \\ E_{3}(-1/3) \\ E_{4}(-1/4) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Quindi avendo trovato la forma ridotta U, dobbiamo trovare la matrice invertibile L. Tale matrice è chiaro che dev'essere una matrice quadrata 4×4.

I vari elementi della matrice devono verificare la seguente definizione:

$$a_{ij_{i \neq j}} = \begin{cases} -\alpha & \text{se è stata applicata } E_{ij}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{se è stata applicata } E_{i}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Si verifica, moltiplicando le matrici che

$$P^T LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$