Esame di Analisi Matematica II
Corso di laurea in Informatica
Università di Verona

Verona, 16 giugno 2016

Informazioni personali

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Si barri e firmi l'opzione desiderata.

1. Chiedo che venga corretto l'esame.

   Firma: ____________________

2. Intendo ritirarmi.

   Firma: ____________________

In caso di consegna, si indichi il numero di fogli protocollo consegnati: __________.

ISTRUZIONI

- Il testo di questa prova è diviso in due parti, entrambe stampate sul retro di questo foglio.
- Occorre rispondere alle domande sui fogli protocollo. Su tali fogli è necessario scrivere il proprio nome, cognome e matricola.
- È vietato utilizzare dispositivi elettronici e consultare libri o appunti durante lo svolgimento della prova pena l'annullamento della prova stessa.
- Il tempo per lo svolgimento del compito è **3 ore**.

Parte I

Esercizio 1 (punti: .... /4)**.** Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(non è necessario determinare l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata).

Esercizio 2 (punti: .... /4)**.** Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + 4y = e^{-x} \\ y(0) = \frac{1}{4} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3 (punti: .... /6)**.**
Sia $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$ una funzione di due variabili reali x e y.

1. (2 pt.) Si rappresenti nel piano cartesiano il dominio naturale D di f.
2. (2 pt.) Si rappresenti nel piano cartesiano la curva di livello 0 della funzione f.
3. (1 pt.) Il punto $P = (0, 1)$ è interno, esterno o di frontiera per D? Si motivi la risposta.
4. (1 pt.) Il punto $Q = (0, 0)$ è interno, esterno o di frontiera per D? Si motivi la risposta.

Esercizio 4 (punti: .... /2)**.** Si spieghi perché non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x + y)}{x^2 + y^2}.$$

Parte II

Esercizio 5 (punti: .... /4)**.**
Sia $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$ una funzione di due variabili reali x e y.

1. (1 pt.) Si rappresenti nel piano cartesiano il dominio naturale D di f.
2. (3 pt.) Si trovino e si classifichino i punti stazionari di f.

Esercizio 6 (punti: ....../5)**.** Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - y \\ g(x, y) &= x^2 + 4y^2 - 1 \end{aligned}$$

definite per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Sia inoltre

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : g(x, y) \leq 0\}.$$

1. (1 pt.) Si rappresenti nel piano cartesiano l'insieme dei punti di M.
2. (4 pt.) Si trovino i punti di minimo e massimo globale della funzione f su M.

Esercizio 7 (punti: .... /4)**.**
Si consideri la funzione $f(x, y) = xy$ definita su

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

1. (1 pt.) Si rappresenti nel piano cartesiano l'insieme dei punti di D.
2. (3 pt.) Si calcoli $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$.

Esercizio 8 (punti: .... /3)**.** Si consideri la curva γ così parametrizzata:

$$\begin{aligned} \gamma : \quad [0, \pi] &\to \mathbf{R}^2 \\ \vartheta &\mapsto (-\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)). \end{aligned}$$

1. (1 pt.) Si rappresenti nel piano cartesiano il sostegno della curva γ, ovvero l'insieme
$$\{\gamma(\vartheta) : \vartheta \in [0, \pi]\}.$$
2. (2 pt.) Si calcoli l'integrale di linea di seconda specie del campo vettoriale
$$\overrightarrow{F}(x, y) = (x, y)$$
lungo la curva γ.

$\boxed{\textbf{Soluzioni}}$

Soluzione 1. L'equazione differenziale è a variabili separabili. Separando le variabili e integrando

$$\int \frac{1}{y^2-1}\ dy = \int (x^2+1)\ dx$$

otteniamo

$$\frac{1}{2}\left[\ln|y-1| - \ln|y+1|\right] = \frac{1}{3}x^2 + x + C,$$

dove C + una costante di integrazione.

Proseguendo si ha che

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{2}{3}x^3 + 2x + 2C$$

e quindi

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{\frac{2}{3}x^3+2x+2C}.$$

Rimuovendo il valore assoluto e ponendo $K = \pm e^{2C}$ otteniamo

$$\frac{y-1}{y+1} = K \cdot e^{\frac{2}{3}x^3+2x}.$$

Con alcune manipolazione algebriche esplicitiamo la y ottenendo quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y(x) = \frac{1+Ke^{\frac{2}{3}x^3+2x}}{1-Ke^{\frac{2}{3}x^3+2x}}$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo la soluzione del problema di Cauchy, ovvero

$$y(x) = \frac{1-e^{\frac{2}{3}x^3+2x}}{1+e^{\frac{2}{3}x^3+2x}}.$$

Soluzione 2. Le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \lambda + 4\lambda = 0$$

sono

$$\frac{-1+i\sqrt{15}}{2}, \quad \frac{-1-i\sqrt{15}}{2}.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma $\overline{y}(x) = Ae^{-x}$. Svolgendo i calcoli si ricava che $A = \frac{1}{4}$.

Quindi l'integrale generale dell'equazione completa è

$$c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right) + \frac{1}{4}e^{-x}$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$.

Imponendo le condizioni iniziali troviamo la soluzione del problema, che è

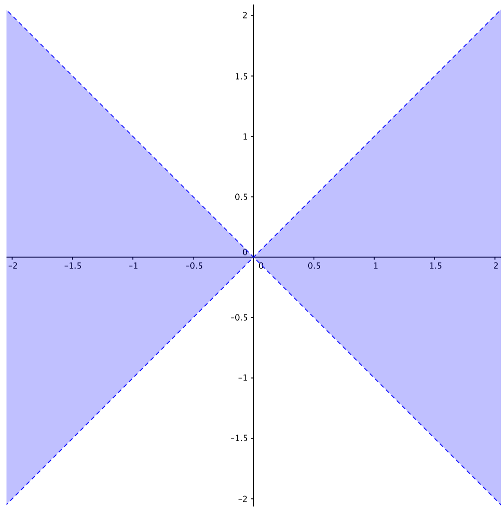
$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{15}} e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2} x\right) + \frac{1}{4} e^{-x}$$

Soluzione 3.

1. Il dominio D di f è dato da tutti i punti $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tali che

$$x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y < x \text{ e } y > -x, \text{ oppure} \\ y > x \text{ e } y < -x. \end{cases}$$

Il dominio D è rappresentato dalla regione ombreggiata nella seguente figura.



2. La curva di livello 0 della funzione f è data dai punti che soddisfano l'equazione

$$\ln(x^2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1.$$

Quest'ultima è l'equazione di un'iperbole che ha vertici in $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, centro in $(0, 0)$ e asintoti le rette $y = x$ e $y = -x$ (la rappresentazione grafica è omessa).

3. Il punto P è esterno a D. Per dimostrare ciò possiamo ad esempio considerare l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 - y^2 < 0\}.$$

Tale insieme è aperto, essendo della forma

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : g(x, y) < 0\},$$

dove g è una funzione continua su $\mathbf{R}^2$. Inoltre $P \in E$. Perciò P è un punto interno ad E, ovvero esiste $U_r(P) \subseteq E$. Visto che $D \cap E = \emptyset$, possiamo dire che $U_r(P) \subseteq \mathbf{R}^2 \setminus D$.

4. Il punto Q è di frontiera. Per mostrarlo, prendiamo un qualunque intorno $U_r(Q)$. Si ha che $U_r(Q) \cap D \neq \emptyset$. Infatti in $U_r(Q)$ è contenuto il punto $\left(\frac{r}{2}, 0\right)$ che appartiene a D. D'altra parte $U_r(Q) \cap (\mathbf{R}^2 \setminus D) \neq \emptyset$ visto che $Q \notin D$.

Soluzione 4.

Sia $f(x, y) = \dfrac{\sin(x+y)}{x^2+y^2}$. Notiamo che $f(x, -x) = 0$ per ogni $x \neq 0$. Quindi, se il limite esistesse, dovrebbe essere uguale a 0. Sia ora

$$g(x) = f(x, x) = \frac{\sin(2x)}{2x^2}.$$

Visto che, sfruttando anche un limite notevole,

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} = +\infty,$$

concludiamo che non esiste $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

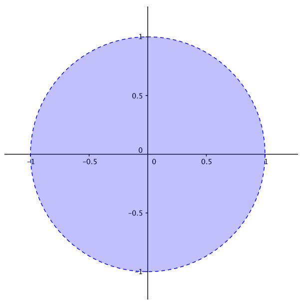
Parte II

Soluzione 5.

1. Il dominio D di f è formato dai punti (x, y) tali che

$$1 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1.$$

I punti di D sono quelli appartenenti alla regione ombreggiata nella seguente figura.



2. Cerchiamo i punti stazionari di f risolvendo il seguente sistema (non lineare):

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \dfrac{-2x}{1 - x^2 - y^2} = 0 \\ f'_y(x, y) = \dfrac{-2y}{1 - x^2 - y^2} = 0 \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è $P = (0, 0)$. Classifichiamolo, dopo aver calcolato le derivate parziali del secondo ordine:

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{-2(1 - x^2 - y^2) + 2x(-2x)}{(1 - x^2 - y^2)^2};$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{2x(-2y)}{(1 - x^2 - y^2)^2};$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{-2(1 - x^2 - y^2) + 2y(-2y)}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Valutiamo la matrice Hessiana in $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Visto che $f''_{xx}(0,0) < 0$ e $\det(H_f(0,0)) > 0$, concludiamo che $(0,0)$ è un punto di massimo locale.

Soluzione 6.

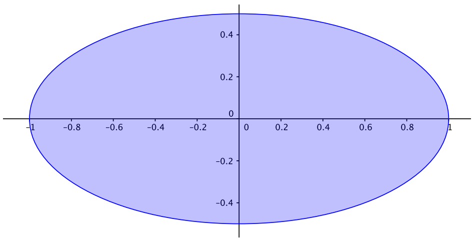
1. Innanzitutto notiamo che l'equazione

$$x^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

descrive un'ellisse centrata in $(0,0)$ e vertici in

$$(1,0), \quad (-1,0), \quad \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \left(0, -\frac{1}{2}\right).$$

Quindi i punti di M sono quelli appartenenti alla regione ombreggiata nella seguente figura.



2. Notiamo innanzitutto che la funzione f ha minimo e massimo globale su M, essendo quest'ultimo insieme compatto e f continua su M.

Tali punti possono trovarsi nella parte interna di M o sulla frontiera.

Per quel che riguarda la parte interna, un punto di minimo o massimo per f deve essere un punto stazionario per la funzione stessa. Tuttavia il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x = 0 \\ f'_y(x,y) = -1 = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni. Quindi non ci sono punti stazionari per f.

Analizziamo ora i punti di frontiera. Cerchiamo dunque i punti stazionari della funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 - y - \lambda \cdot (x^2 + 4y^2 - 1).$$

Cerchiamo ora i punti stazionari di $\mathcal{L}$.

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y,\lambda) = 2x - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y,\lambda) = -1 - 8\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x,y,\lambda) = 1 - x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases}$$

La prima equazione, che può essere scritta come

$$2x(1-\lambda) = 0$$

è soddisfatta solo se $x = 0$ o $\lambda = 1$.

Se $x = 0$, allora dalla terza equazione ricaviamo che $y = \frac{1}{2}$ o $y = -\frac{1}{2}$. Sostituendo nella seconda equazione ricaviamo i rispettivi valori per λ. In definitiva, per $x = 0$ vi sono due punti stazionari per $\mathcal{L}$, ovvero

$$P_1 = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), \quad P_2 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Se $\lambda = 1$, allora dalla seconda equazione si ricava che $y = -\frac{1}{8}$ e dalla terza equazione ricaviamo due valori possibili per x. In definitiva per $\lambda = 1$ vi sono due punti stazionari per $\mathcal{L}$, ovvero

$$P_3 = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{8}, 1\right), \quad P_4 = \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{8}, 1\right).$$

I punti candidati a risolvere il problema di ottimizzazione vincolata sono dunque

$$Q_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad Q_2 = \left(0, -\frac{1}{2}\right), \quad Q_3 = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{8}\right), \quad Q_4 = \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{8}\right).$$

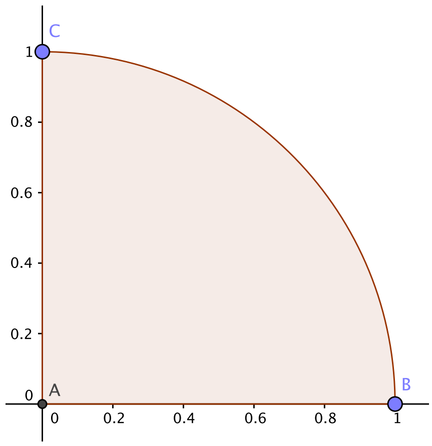
A questo punto valutiamo la funzione f nei potenziali punti candidati a risolvere il problema di ottimizzazione vincolata:

$$f(Q_1) = -\frac{1}{2};$$
$$f(Q_2) = \frac{1}{2};$$
$$f(Q_3) = \frac{17}{16};$$
$$f(Q_4) = \frac{17}{16}.$$

Quindi il massimo di f è $\frac{17}{16}$, mentre il minimo è $-\frac{1}{2}$.

Soluzione 7.

1. I punti di D sono i punti appartenenti al settore circolare qui rappresentato.



2. Calcoliamo l'integrale:

$$\iint_D xy\ dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \rho^2 \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\rho\ d\rho \right) d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}\rho^4 \cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \right]_0^1 d\vartheta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\ d\vartheta = \left[\frac{1}{8}(\sin(\vartheta))^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Soluzione 8.

1. La curva γ è una semicirconferenza che viene percorsa in senso orario, con punto iniziale $(-1,0)$ e punto finale $(1,0)$ (la rappresentazione è omessa).

2. L'integrale richiesto può essere così calcolato:

$$\int_0^{\pi} \langle (-\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)), (\sin(\vartheta), \cos(\vartheta)) \rangle\ d\vartheta = \int_0^{\pi} 0\ d\vartheta = 0.$$