Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

ESERCIZIO 1. *Sia $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare indotta da una matrice A. Sia*

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice associata ad f_A, rispetto alle basi ordinate:

$$\mathscr{B}' = \{2e_1 + e_2 \ ; \ e_3 \ ; \ e_1 + e_3\} =$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

sul dominio e

$$\mathscr{D}' = \{e'_2 \ ; \ e'_1 - e'_2 \ ; \ e'_3 \ ; \ 2e'_4\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

sul codominio. (e_i e e'_i sono i vettori delle basi canoniche rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$).

1. *Si calcoli* $\dim(N(f_A))$.
2. *Si determini la matrice A che induce la trasformazione lineare.*

SVOLGIMENTO.

1.) Essendo l'applicazione indotta dalla matrice A, per calcolare lo spazio nullo di f_A, basta calcolare lo spazio nullo della matrice A. Non avendo tale matrice possiamo usare la matrice A' perché è sì riferita ad altre basi, ma sullo stesso dominio e codominio. Quindi:

$$\dim(N(f_A)) = \dim(N(A')).$$

Eseguiamo dunque l'algoritmo dell'eliminazione di Gauss sulla matrice A':

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_{12}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_{13}(-2),\ E_{14}(1)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$E_2\left(-\frac{1}{2}\right),\ E_{34}(-1)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{23}(-1)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'ultima matrice è la forma ridotta, notiamo che ha due colonne dominanti e pertanto ha rango 2. Per il teorema nullità più rango:

$$\dim(N(A')) = \dim(\mathbb{R}^3) - rk(A') = 3 - 2 = 1.$$

anche se l'esercizio non lo richiede, troviamo una base di $N(A')$. Ricordiamo che

$$N(A') = \{v \in \mathbb{R}^3 : A'v = 0\}.$$

Quindi dobbiamo immaginarci un sistema lineare omogeneo (termini noti nulli) $A'v = 0$. Dalla forma ridotta di A', si capisce che una delle componenti (che sono 3 e che chiameremo x, y, z) del vettore v è *libera*, cioè può essere qualsiasi numero, un parametro, mentre le altre due dipenderanno da essa. Dunque pensiamo di risolvere questo sistema lineare:

$$[A'|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

da cui troviamo che la terza componente è un parametro α, la seconda è $-\alpha$ e la terza è $-\alpha$: $\begin{bmatrix} -\alpha & -\alpha & \alpha \end{bmatrix}^T$. Questo vuol dire che ogni vettore di questa forma (dando ad α un valore), moltiplicato ad A', mi dà come risultato il vettore nullo.

Quindi una base di $N(A')$ è $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Possiamo allora scrivere:

$$N(A') = < \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} > .$$

2.) Prima di iniziare, ripassiamo le *applicazioni delle coordinate relative ad una base* che indicheremo con

$$C_{\mathscr{B}} \qquad C_{\mathscr{E}_n}$$

dove $\mathscr{B}$ è una base qualunque dello spazio vettoriale e $C_{\mathscr{E}_n}$ è la base canonica.

$C_{\mathscr{B}}(v)$ con $v \in \mathbb{R}^n$, è uguale al vettore di costanti da mettere nella combinazione lineare di vettori di $\mathscr{B}$ per ottenere v: se

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$$

e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sono i vettori della base $\mathscr{B}$, allora

$$C_{\mathscr{B}}(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Per comodità mettiamoci in $\mathbb{R}^3$ e prendiamo come $\mathscr{B}$ la base $\mathscr{B}'$ dell'esercizio. Vediamo come dato $b_1 \in \mathscr{B}$

$$C_{\mathscr{B}}(b_1) = e_1.$$

Innanzitutto scriviamo il vettore b_1 come combinazione lineare dei vettori della base:

$$b_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$$
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ma allora deve essere

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1$$

Così ovviamente anche per b_2 e b_3. quindi in generale

$$C_{\mathscr{B}}(b_i) = e_i.$$

Vediamo adesso un'altro fatto importante: *l'applicazione delle coordinate relative alla base canonica è l'identità.*

Sempre per comodità, mettiamoci in $\mathbb{R}^3$ e prendiamo come $\mathscr{B}$ la base $\mathscr{B}'$ dell'esercizio e vediamo che

$$C_{\mathscr{E}_3}(b_1) = b_1.$$

Innanzitutto scriviamo il vettore b_1 come combinazione lineare dei vettori della base canonica:

$$b_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ma allora deve essere

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b_1$$

Così ovviamente anche per b_2 e b_3. quindi in generale

$$C_{\mathscr{E}_n}(b_i) = b_i.$$

Questo vale ovviamente per tutti i vettori di $v \in \mathbb{R}^n$:

$$C_{\mathscr{E}_n}(v) = v.$$

Adesso possiamo procedere alla soluzione del secondo punto dell'esercizio.

Dobbiamo trovare una matrice A tale che

$$f_A(x) = Ax \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

In virtù di quello che abbiamo detto, essendo l'applicazione delle coordinate rispetto alla base canonica l'identità, possiamo scrivere anche

$$C_{\mathscr{E}_4}(f_A(x)) = AC_{\mathscr{E}_3}(x).$$

Notare che $f_A(x)$ è un vettore in $\mathbb{R}^4$, quindi scriverò $C_{\mathscr{E}_4}(f_A(x))$, mentre per x che sta in $\mathbb{R}^3$ scriverò $C_{\mathscr{E}_3}(x)$.

Trovare A vuol dire quindi trovare la matrice del cambio di coordinate associata alla base canonica su dominio e codominio. Per trovarla basta allora vedere come si comporta sui vettori di base:

$$f_A(e_i) = C_{\mathscr{E}_4}(f_A(e_i)) = AC_{\mathscr{E}_3}(e_i) = Ae_i = \ i - esima \text{ colonna di A.}$$

Questo vuol dire che la matrice A è fatta in questo modo:

$$A = [C_{\mathscr{E}_4}(f_A(e_1)) \quad C_{\mathscr{E}_4}(f_A(e_2)) \quad C_{\mathscr{E}_4}(f_A(e_3))]$$

Quindi per trovare A ci basta sapere quanto valgono $C_{\mathscr{E}_4}(f_A(e_1))$, $C_{\mathscr{E}_4}(f_A(e_2))$, $C_{\mathscr{E}_4}(f_A(e_3))$, ovvero $f_A(e_1)$, $f_A(e_2)$, $f_A(e_3)$.

Sfruttando il fatto che f_A è lineare e la forma dei vettori della base $\mathscr{B}'$, calcoliamo:

$$\begin{aligned}
f_A([2\ 1\ 0]^T) &= f_A(2e_1 + e_2) = 2f_A(e_1) + f_A(e_2) \\
f_A([0\ 0\ 1]^T) &= f_A(e_3) \\
f_A([1\ 0\ 1]^T) &= f_A(e_1 + e_3) = f_A(e_1) + f_A(e_3)
\end{aligned}$$

Adesso dobbiamo capire quanto vale la f_A calcolata sui vettori della base $\mathscr{B}'$. essendo il risultato un vettore in $\mathbb{R}^4$ sicuramente si scriverà come combinazione lineare degli elementi della base $\mathscr{D}'$:

$$\begin{aligned}
f_A([2\ 1\ 0]^T) &= f_A(2e_1 + e_2) \\
&= \alpha_1([0\ 1\ 0\ 0]^T) + \alpha_2([1\ -1\ 0\ 0]^T) + \alpha_3([0\ 0\ 1\ 0]^T) + \alpha_4([0\ 0\ 0\ 2]^T). \\
f_A([0\ 0\ 1]^T) &= f_A(e_3) \\
&= \beta_1([0\ 1\ 0\ 0]^T) + \beta_2([1\ -1\ 0\ 0]^T) + \beta_3([0\ 0\ 1\ 0]^T) + \beta_4([0\ 0\ 0\ 2]^T). \\
f_A([1\ 0\ 1]^T) &= f_A(e_1 + e_3) \\
&= \gamma_1([0\ 1\ 0\ 0]^T) + \gamma_2([1\ -1\ 0\ 0]^T) + \gamma_3([0\ 0\ 1\ 0]^T) + \gamma_4([0\ 0\ 0\ 2]^T).
\end{aligned}$$

Quindi adesso si tratta solo di trovare i coefficienti α_i, β_i e γ_i opportuni. Ma questi sono proprio le colonne della matrice A'! Essa è tale che:

$$C_{\mathscr{D}'}(f_A(x)) = A'C_{\mathscr{B}'}(x).$$

Applicando tale formula ai vettori della base $\mathscr{B}'$ (indichiamo con b_i l'$i-esimo$ vettore della base $\mathscr{B}'$) si ottiene

$$C_{\mathscr{D}'}(f_A(b_i)) = A'C_{\mathscr{B}'}(b_i) = A'e_i = \ i - esima \text{ colonna di A'.}$$

Riprendiamo allora le formule di prima e al posto degli α_i mettiamo la prima colonna di A', al posto dei β_i la seconda e al posto dei γ_i la terza:

$$\begin{aligned}
f_A([2\ 1\ 0]) &= f_A(2e_1+e_2)\\
&= \alpha_1([0\ 1\ 0\ 0]^T)+\alpha_2([1\ -1\ 0\ 0]^T)+\alpha_3([0\ 0\ 1\ 0]^T)+\alpha_4([0\ 0\ 0\ 2]^T)\\
&= 0\cdot([0\ 1\ 0\ 0]^T)+1\cdot([1\ -1\ 0\ 0]^T)+2\cdot([0\ 0\ 1\ 0]^T)-1\cdot([0\ 0\ 0\ 2]^T)\\
&= [1\quad -1\quad 2\quad -2]^T\\
f_A([0\ 0\ 1]) &= f_A(e_3)\\
&= \beta_1([0\ 1\ 0\ 0]^T)+\beta_2([1\ -1\ 0\ 0]^T)+\beta_3([0\ 0\ 1\ 0]^T)+\beta_4([0\ 0\ 0\ 2]^T)\\
&= 1\cdot([0\ 1\ 0\ 0]^T)-1\cdot([1\ -1\ 0\ 0]^T)-4\cdot([0\ 0\ 1\ 0]^T)+2\cdot([0\ 0\ 0\ 2]^T)\\
&= [-1\quad 2\quad -4\quad 4]^T\\
f_A([1\ 0\ 1]) &= f_A(e_1+e_3)\\
&= \gamma_1([0\ 1\ 0\ 0]^T)+\gamma_2([1\ -1\ 0\ 0]^T)+\gamma_3([0\ 0\ 1\ 0]^T)+\gamma_4([0\ 0\ 0\ 2]^T)\\
&= 1\cdot([0\ 1\ 0\ 0]^T)+0\cdot([1\ -1\ 0\ 0]^T)-2\cdot([0\ 0\ 1\ 0]^T)+1\cdot([0\ 0\ 0\ 2]^T)\\
&= [0\quad 1\quad -2\quad 2]^T
\end{aligned}$$

A questo punto sfruttando la linearità di f_A:

$$\begin{aligned}
f_A(e_1) &= f_A(e_1+e_3)-f_A(e_3)\\
&= [0\quad 1\quad -2\quad 2]^T-[-1\quad 2\quad -4\quad 4]^T\\
&= [1\quad -1\quad 2\quad -2]^T.\\
f_A(e_2) &= f_A(2e_1+e_2)-2f_A(e_1)\\
&= [1\quad -1\quad 2\quad -2]^T-[2\quad -2\quad 4\quad -4]^T\\
&= [-1\quad 1\quad -2\quad 2]^T.\\
f_A(e_3) &= [-1\quad 2\quad -4\quad 4]^T.
\end{aligned}$$

Abbiamo finalmente trovato A:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -4\\ -2 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

Tuttavia possiamo trovare A anche in un altro modo.
Sappiamo che:

1. $C_{\mathscr{D}'}(f_A(x)) = A'C_{\mathscr{B}'}(x)$.
2. $C_{\mathscr{E}_4}(f_A(x)) = M_{\mathscr{E}_4\leftarrow\mathscr{D}'}C_{\mathscr{D}'}(f_A(x))$.
3. $C_{\mathscr{E}_3}(x) = M_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}'}C_{\mathscr{B}'}(x)$.

e vogliamo A tale che $f_A(x) = Ax \; \forall x \in \mathbb{R}^3$ cioè $C_{\mathscr{E}_4}(f_A(x)) = AC_{\mathscr{E}_3}(x)$. Allora

$$\begin{aligned} f_A(x) = & \\ & = C_{\mathscr{E}_4}(f_A(x)) \\ & = [\text{per la 2}] = M_{\mathscr{E}_4 \leftarrow \mathscr{D}'} C_{\mathscr{D}'}(f_A(x)) \\ & = [\text{per la 1}] = M_{\mathscr{E}_4 \leftarrow \mathscr{D}'} A' C_{\mathscr{B}'}(x) \\ & = [\text{per la 3}] = M_{\mathscr{E}_4 \leftarrow \mathscr{D}'} A' M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}'} C_{\mathscr{E}_3}(x) \\ & = M_{\mathscr{E}_4 \leftarrow \mathscr{D}'} A' M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}'}(x) \end{aligned}$$

Quindi

$$A = M_{\mathscr{E}_4 \leftarrow \mathscr{D}'} A' M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}'}.$$

$M_{\mathscr{E}_4 \leftarrow \mathscr{D}'}$ è tale che $C_{\mathscr{E}_4}(f_A(x)) = M_{\mathscr{E}_4 \leftarrow \mathscr{D}'} C_{\mathscr{D}'}(f_A(x))$. Applichiamo questa formula ai vettori d_i della base $\mathscr{D}'$:

$C_{\mathscr{E}_4}(d_i) = M_{\mathscr{E}_4 \leftarrow \mathscr{D}'} C_{\mathscr{D}'}(d_i) = M_{\mathscr{E}_4 \leftarrow \mathscr{D}'} e_i = \; i - esima$ colonna di $M_{\mathscr{E}_4 \leftarrow \mathscr{D}'}$.

Da cui:

$$M_{\mathscr{E}_4 \leftarrow \mathscr{D}'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mentre $M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}'}$ è tale che $C_{\mathscr{E}_3}(x) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}'} C_{\mathscr{B}'}(x)$. Applichiamo questa formula ai vettori b_i della base $\mathscr{B}'$:

$C_{\mathscr{E}_3}(b_i) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}'} C_{\mathscr{B}'}(b_i) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}'} e_i = \; i - esima$ colonna di $M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}'}$.

Da cui:

$$M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calcoliamone l'inversa:

$$M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Troviamo finalmente A:

$$A = M_{\mathscr{E}_4 \leftarrow \mathscr{D}'} A' M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}'} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Che è proprio la matrice A che avevamo trovato anche prima.