

Università degli studi di Verona  
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica  
Prova scritta di Algebra lineare — 26 giugno 2008

matricola ..... nome ..... cognome .....

corso di laurea ..... anno accademico di immatricolazione .....

Votazione:	T1	E1
	T2	E2
		E3

Domande iniziali

- ☐ (1) Sia  $\mathbf{A}$  una matrice  $3 \times 3$  di rango 3. Si dica se 0 è un autovalore di  $\mathbf{A}$ .
- ☐ (2) Sia  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  una base di  $V$ . Esiste un vettore  $\mathbf{v}_4$  tale che  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  sia linearmente indipendente?
- ☐ (3) Esiste un'applicazione lineare  $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$  di rango 3?

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si discuta l'esistenza e l'unicità di soluzioni di sistemi lineari la cui matrice dei coefficienti abbia inversa destra o sinistra.

T2) Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia diagonalizzabile.

E1) Si consideri, al variare di  $\alpha \in \mathbb{C}$ , la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & -\alpha & 1 \\ -\alpha & 1 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$  la decomposizione  $LU$  oppure la  $P^T LU$ . Per  $\alpha = 2$  si trovi una base ortogonale di  $C(\mathbf{A}_2)$ . Per  $\alpha = 0$  si trovi una base ortogonale di  $N(\mathbf{A}_0)$ .

Interpretando  $\mathbf{A}_\alpha$  come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di  $\alpha$  il sistema ha soluzione?

E2) Sia  $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a  $f$  rispetto alla base ordinata  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$  su dominio e codominio ( $\mathbf{e}_i$  sono i vettori della base canonica di  $\mathbb{C}^4$ ) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determini la matrice  $\mathbf{B}$  associata a  $f$  rispetto alle basi canoniche.
- (b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di  $f$ .
- (c) Si dica se la matrice  $\mathbf{B}$  è diagonalizzabile.
- (d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare  $f$ .

E3) Si determini per quali valori del parametro  $\beta \in \mathbb{C}$  la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2 & \beta \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per  $\beta = 2$  si trovi una base di  $\mathbb{C}^4$  formata da autovettori di  $\mathbf{B}_2$ .