Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 25 settembre 2008

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Domande iniziali

☐ (1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice 3×3 con $\det A \neq 0$. Si dica se 0 è un autovalore di $\mathbf{A}$.

☐ (2) Esistono applicazioni lineari biiettive $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$?

☐ (3) Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V. Esiste uno scalare α in modo che l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \alpha\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\}$ sia linearmente indipendente?

T1) Data la definizione di molteplicità algebrica m e geometrica d per l'autovalore λ della matrice quadrata $\mathbf{A}$, si dimostri che $1 \leq d \leq m$.

T2) Dati due sottospazi X e Y dello spazio vettoriale finitamente generato V, si definisca il sottospazio somma $X + Y$ e si dia una condizione necessaria e sufficiente affinché $\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y$.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & \alpha^2 & \alpha \\ 2 & 4-\alpha & 2\alpha-1 & 2 \\ 1 & 2+\alpha & 3\alpha+1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_0)$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ -1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = -1$ si trovi una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_{-1}$.