# Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

**ESERCIZIO 1.** *Sia $V$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$*

$$V = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

*(a) Si determini una base $\mathscr{B}$ di $V$.*

*(b) Si costruisca una matrice $A$ tale che la trasformazione lineare associata $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ abbia $Im(f_A) = V$ e $N(f_A) = \langle\ e_1 \quad e_4\ \rangle$, dove $e_1, e_4$ sono rispettivamente il primo e l'ultimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$.*

Svolgimento.

(a) Per trovare una base di $V$ mettiamo innanzitutto i quattro vettori in una matrice e applichiamo l'Eliminazione di Gauss per capire quali sono linearmente indipendenti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo le prime due colonne dominanti, una base di $V$ è data dai primi due vettori:

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) Ricordando che la proposizione già citata nell'Esercizio7:

**PROPOSIZIONE 1.** *Se $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base dello spazio vettoriale $V$ e $\{w_1, \ldots, w_n\}$ un insieme di vettori nello spazio vettoriale $W$, allora esiste una e una sola applicazione lineare $f : V \to W$ tale che $f(v_i) = w_i$ con $i = 1, \ldots, n$.*

Basta trovare dei vettori che formino una base di $\mathbb{R}^4$ e dire quali sono le loro immagini rispetto ad $f_A$.

In questo modo definiamo l'applicazione; per costruire la matrice, che sarebbe quella associata alla base canonica su dominio e codominio, usiamo come base di $\mathbb{R}^4$ proprio quella canonica: $\mathscr{E}_4$.

A questo punto siamo obbligati a porre come immagine di $e_1$ e di $e_4$ il vettore nullo. Per $e_2$ e $e_3$ siamo un po' più liberi: possiamo assegnarli come immagini

2 vettori di $V$, per semplicità, useremo proprio i vettori di $\mathscr{B}$ che sono una base di $V$ nonché spazio delle immagini.

Notare che il teorema nullità più rango è rispettato:

$$\begin{gathered}
\dim \mathbb{R}^4 = \dim Im(f_A) + \dim N(f_A) \\
\dim \mathbb{R}^4 = \dim V + \dim\langle \; e_1 \quad e_4 \; \rangle \\
4 = 2 + 2
\end{gathered}$$

Definiamo dunque l'applicazione:

$$f_A\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_A\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$f_A\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_A\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Adesso possiamo anche trovare $A$ tale che $f_A(x) = Ax$. Usando l'applicazione delle coordinate associata alla base canonica (che ricordiamo essere l'identità quando la si applica ai vettori) si ha che:

$$\begin{gathered}
f_A(x) = Ax \\
C_{\mathscr{E}_4}(f_A(x)) = AC_{\mathscr{E}_4}(x) \\
f_A(x) = AC_{\mathscr{E}_4}(x)
\end{gathered}$$

Applichiamo tale formula ai vettori della base canonica:

$$f_A(e_i) = AC_{\mathscr{E}_4}(e_i) = Ae_i = i - \mathit{esima\ colonna\ di}\ A$$

Quindi la matrice $A$ è fatta in questo modo:

$$\begin{gathered}
A = \begin{bmatrix} f_A(e_1) & f_A(e_2) & f_A(e_3) & f_A(e_4) \end{bmatrix} \\
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{gathered}$$