Copia per i rappresentanti degli studenti

Verona, 22 giugno 1999 **Algebra lineare** prova scritta

	T1	E1
Votazione:		E2
	T2	E3

T1) Si dia la definizione di matrice associata ad una applicazione lineare. Si dimostri che, se $f\colon V \to W$ è un'applicazione lineare, $\mathscr{B}$ è una base ordinata di V, $\mathscr{D}$ è una base ordinata di W e A è la matrice associata a f rispetto a queste basi, allora la dimensione dello spazio nullo $N(f)$ coincide con la nullità di A.

T2) Sia A una matrice hermitiana. Si provi che gli autovalori di A sono reali.

E1) Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$$

e si dica per quali valori del parametro complesso λ esso ammette soluzione. Detta A_λ la matrice dei coefficienti del sistema, per $\lambda = -1$ si determini una base ortogonale dello spazio delle righe di A_λ.

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata, rispetto alla base

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio,

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si determini la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica su dominio e codominio e si dica se la matrice A è diagonalizzabile. L'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?

E3) Si consideri la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} \beta & i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & i \end{bmatrix}$$

dove $\beta \in \mathbf{C}$. Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile e per quali valori è diagonalizzabile con una matrice unitaria.

Algebra lineare 22 giugno 1999

E1) La matrice completa del sistema è:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{21}(-1)]{E_{41}(-\lambda),\ E_{31}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{array}\right]$$

Per $\lambda \neq 1$ possiamo proseguire nell'eliminazione

$$\xrightarrow{E_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{array}\right] \xrightarrow[E_2((\lambda-1)^{-1})]{E_{42}(\lambda-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2-\lambda-\lambda^2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[E_3((\lambda-1)^{-1})]{E_{43}(\lambda-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2\lambda-\lambda^2 \end{array}\right]$$

Il sistema ha dunque soluzione (unica) se e solo se

$$3-2\lambda-\lambda^2=0$$

cioè $\lambda=-3$ (l'altra radice, 1, non va considerata!).

Nel caso $\lambda=1$, la forma ridotta è:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

e perciò il sistema ha infinite soluzioni, con due parametri.

L'eliminazione mostra che, per $\lambda=-1$, la matrice $A=A_{-1}$ ha rango 3.

Indichiamo con $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ le colonne di A e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt.

GS1) $\underline{u}_1 = \underline{v}_1$; $(\underline{u}_1 | \underline{u}_1) = 4$

GS2) $\alpha_{12} = \dfrac{(\underline{u}_1 | \underline{v}_2)}{(\underline{u}_1 | \underline{u}_1)} = 0$; $\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1 = \underline{v}_2$

GS3) $\alpha_{13} = \dfrac{(\underline{u}_1 | \underline{v}_3)}{(\underline{u}_1 | \underline{u}_1)} = 0$, $\alpha_{23} = \dfrac{(\underline{u}_2 | \underline{v}_3)}{(\underline{u}_1 | \underline{u}_1)} = 0$

I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono ortogonali fra loro.

E2) Poiché il rango di B è 2, l'applicazione f non è né iniettiva né suriettiva.

Sia S la matrice del cambio di base:

$$C_{\mathcal{E}}(\underline{v}) = S\, C_{\mathcal{B}}(\underline{v})$$

per ogni vettore $\underline{v} \in \mathbb{C}^3$, dove $\mathcal{E}$ denota la base canonica.

Si hanno allora le relazioni, per ogni $\underline{v} \in \mathbb{C}^3$:

$$C_{\mathcal{B}}(f(\underline{v})) = B\, C_{\mathcal{B}}(\underline{v})$$

$$C_{\mathcal{E}}(f(\underline{v})) = A\, C_{\mathcal{E}}(\underline{v})$$

Perciò

$$C_{\mathcal{E}}(f(\underline{v})) = S\, C_{\mathcal{B}}(f(\underline{v})) = S B\, C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = S B S^{-1} C_{\mathcal{E}}(\underline{v})$$

Dunque $A = SBS^{-1}$ e, in particolare, A è simile a

B che è diagonale, quindi A è diagonalizzabile

Calcolo di S^{-1}: poiché $S=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&2&-2\\1&0&-1\end{bmatrix}$, il calcolo di S^{-1} con la matrice pluriaumentata richiede scambi di righe.

$$S \xrightarrow{E_{12}} \begin{bmatrix}1&2&-2\\0&-1&1\\1&0&1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&2&-2\\0&-1&1\\0&-2&1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&2&-2\\0&1&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

L'unico scambio richiesto è E_{12}

$$\left[E_{12}S \mid I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&1&0&0\\0&-1&1&0&1&0\\1&0&-1&0&0&1\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&1&0&0\\0&-1&1&0&1&0\\0&-2&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&1&0&0\\0&1&-1&0&-1&0\\0&0&-1&-1&-2&1\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&3&4&-2\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&1&2&-1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&0\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&1&2&-1\end{array}\right]$$ Perciò $(E_{12}S)^{-1} = \begin{bmatrix}1&2&0\\1&1&-1\\1&2&-1\end{bmatrix}$

e quindi $S^{-1} = \begin{bmatrix}1&2&0\\1&1&-1\\1&2&-1\end{bmatrix} E_{12} = \begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&-1\\2&1&-1\end{bmatrix}$

E.3) Calcoliamo il polinomio caratteristico $p_\beta(t)$ di B_β:

$$p_\beta(t) = \det\begin{bmatrix} \beta - t & i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & i-t \end{bmatrix} = \beta i - t(\beta+i) + t^2 + 2$$

$$= t^2 - t(\beta+i) + 2 + \beta i$$

Il polinomio ha radici distinte per $(\beta+i)^2 - 4(2+\beta i) \neq 0$

$$\beta^2 + 2\beta i - 1 - 8 - 4\beta i = \beta^2 - 2\beta i - 9$$

si annulla per $\beta = i \pm 2\sqrt{2}$

Per ogni altro valore di β la matrice è diagonalizzabile.

- $\beta_1 = i + 2\sqrt{2}$; l'unico autovalore è $i + \sqrt{2}$

L'autospazio è $E_{B_\beta}(i+\sqrt{2}) = N(B_{i+2\sqrt{2}} - (i+\sqrt{2})I)$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$ che ha rango 1

- $\beta = i - 2\sqrt{2}$: in modo analogo.

Perciò per $\beta = i + 2\sqrt{2}$ o $\beta = i - 2\sqrt{2}$, la matrice non è diagonalizzabile

Vediamo quando B_β è normale.

$$B_\beta B_\beta^H = \begin{bmatrix} \beta & i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\beta} & -i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta\bar{\beta} + 2 & -\beta i\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ \bar{\beta} i\sqrt{2} + \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_\beta^H B_\beta = \begin{bmatrix} \bar{\beta} & -i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta & i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta\bar{\beta} + 2 & \bar{\beta} i\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ -\beta i\sqrt{2} + \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Quindi B_β è normale se e solo se

$-\beta i\sqrt{2} + \sqrt{2} = \bar{\beta} i\sqrt{2} + \sqrt{2}$ cioè se e solo se $\bar{\beta} = -\beta$

cioè se e solo se β ha parte reale nulla