Esame di Analisi Matematica II per gli studenti del corso di laurea in Informatica dell'Università di Verona

Verona, 4 febbraio 2016

Informazioni personali

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Si barri e firmi l'opzione desiderata.

1. Ho svolto la prova intermedia il 23 novembre 2015 e chiedo che venga corretta solo la parte II del presente esame.

   Firma: ____________________

2. Chiedo che venga corretto l'intero esame, consapevole che in tal caso il voto della prova intermedia (qualora svolta) decade.

   Firma: ____________________

3. Intendo ritirarmi, consapevole che in tal caso il voto della prova intermedia (qualora svolta) decade.

   Firma: ____________________

In caso di consegna, si indichi il numero di fogli protocollo consegnati: ____________.

ISTRUZIONI

- Il testo di questa prova è diviso in due parti, entrambe stampate sul retro di questo foglio.
- Occorre rispondere alle domande sui fogli protocollo. Su tali fogli è necessario scrivere il proprio nome, cognome e matricola.
- È vietato utilizzare dispositivi elettronici e consultare libri o appunti durante lo svolgimento della prova pena l'annullamento della prova stessa.
- Il tempo per lo svolgimento del compito completo è **3 ore**.
- Chi intende svolgere solo la seconda parte del compito ha a disposizione **1 ora e 30 minuti**. In caso di consegna dopo questo limite verrà corretto il compito intero e il voto della prova intermedia decadrà.
- Chi svolge solo la seconda parte del compito ottiene al più 16 punti che vanno a sommarsi al punteggio ottenuto nella prova intermedia. Per il superamento dell'esame è necessario che la somma dei punteggi sia almeno 18.
- Chi svolge il compito intero deve ottenere almeno 18 punti per il superamento dell'esame.

$\boxed{\textbf{Parte I}}$

Esercizio 1 (punti: .... /4)**.** Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+2y+1}{x^2+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(non è necessario determinare l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata).

Esercizio 2 (punti: .... /3)**.** Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3 (punti: .... /5)**.**
Sia $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 2x + 6y - 9}$ una funzione di due variabili reali x e y.

1. (2 pt.) Si determini e si rappresenti nel piano cartesiano il dominio naturale D di f.
2. (1 pt.) Si dica se D è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso motivando la risposta.
3. (2 pt.) Si dica se ognuno dei punti

$$P = (1,0), \quad Q = (0,3)$$

   è interno, esterno o di frontiera per D motivando la risposta.

Esercizio 4 (punti: .... /4)**.**

1. (2 pt.) Si spieghi perché non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}.$$

2. (2 pt.) Si mostri che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

$\boxed{\textbf{Parte II}}$

Esercizio 5 (punti: .... /2)**.**
Sia $f(x,y) = x^2 + 1 - 2x - y^4$ una funzione definita per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Siano

$$P = (0,1), \quad Q = (1,0)$$

due punti di $\mathbf{R}^2$.
Si dica in quale dei due punti precedenti la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema delle funzioni implicite, detto anche teorema del Dini, dopo aver citato le ipotesi del teorema.

Esercizio 6 (punti: .... /5)**.** Si trovino il minimo e il massimo globale della funzione

$$f(x,y) = 4x^2y^2 - x(y-1)$$

definita sull'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}.$$

Esercizio 7 (punti: .... /4)**.** Si calcoli il volume della regione

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 1 \le z \le 2,\ x^2 + y^2 \le z^2\}.$$

Esercizio 8 (punti: .... /5). Sia $\overrightarrow{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il campo vettoriale così definito:

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(2x\sin(y), x^2\cos(y) - 3y^2\right).$$

1. (2 pt.) Si dica se $\overrightarrow{F}$ è conservativo, giustificando la risposta.
2. (3 pt.) Nel caso in cui il campo $\overrightarrow{F}$ sia conservativo, si trovi un suo potenziale.

   Si calcoli l'integrale di linea di seconda specie di $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento che congiunge il punto $(-1,0)$ al punto $(5,1)$.

   [Osservazione: se il campo è conservativo ci si può servire del potenziale trovato per calcolare l'integrale di linea di seconda specie.]

$\boxed{\textbf{Soluzioni}}$

Soluzione 1. Dopo aver notato che l'unica soluzione costante dell'equazione differenziale è $y(x) = -1$ e che tale soluzione non soddisfa la condizione iniziale, separiamo le variabili ottenendo
$$\int \frac{1}{(y+1)^2}\,dy = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$
Integrando si ha che
$$-\frac{1}{y+1} = \arctan(x) + C,$$
dove C è una costante di integrazione. Con alcune manipolazioni algebriche si ottiene
$$y = -\frac{1}{\arctan(x)+C} - 1.$$
Imponendo la condizione iniziale ricaviamo $C = -\frac{1}{2}$.

La soluzione locale del problema di Cauchy è dunque
$$y(x) = \frac{1+2\arctan(x)}{1-2\arctan(x)}.$$

Soluzione 2. Le soluzioni dell'equazione caratteristica
$$\lambda^2 - 4 = 0$$
sono 2 e -2. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è
$$c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$$
al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$.

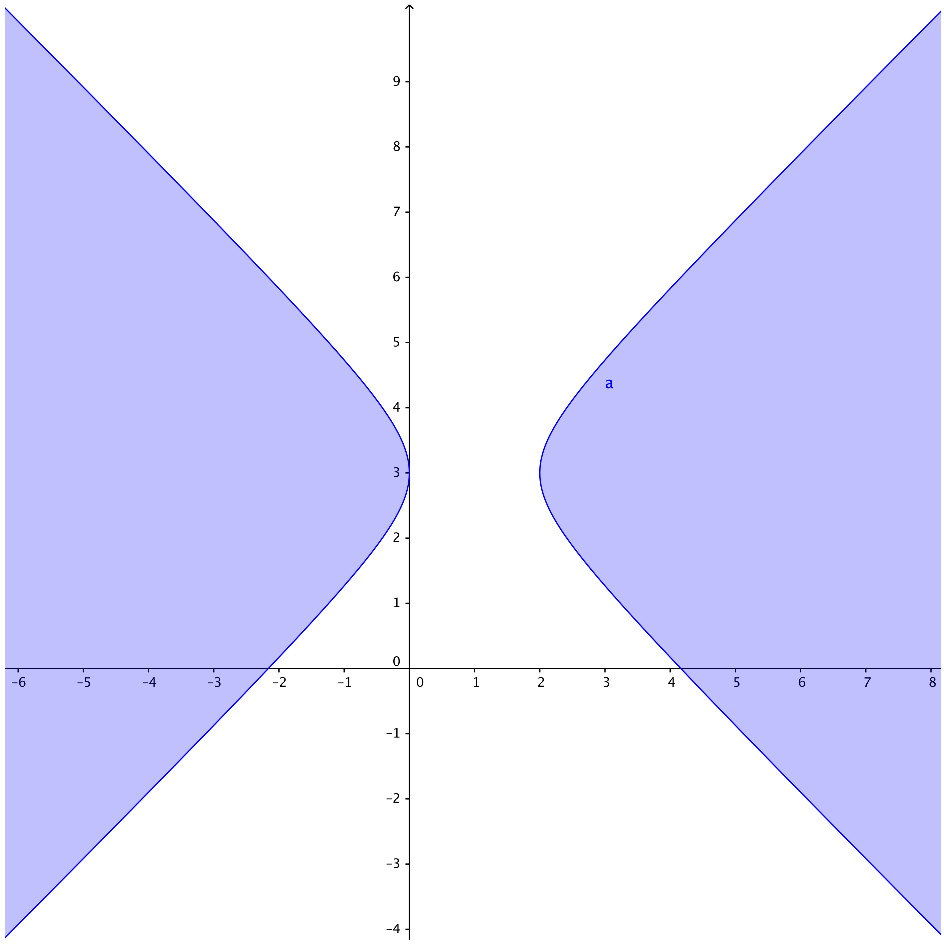
Visto che 2 è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma $\overline{y}(x) = Axe^{2x}$. Svolgendo i calcoli si ricava che $A = \frac{1}{4}$.

Quindi l'integrale generale dell'equazione completa è
$$c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}$$
al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$.

Imponendo le condizioni iniziali troviamo la soluzione del problema, che è
$$y(x) = -\frac{1}{16}e^{2x} + \frac{1}{16}e^{-2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}.$$

Soluzione 3.

1. Il dominio D è formato da tutti i punti $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tali che
$$x^2 - y^2 - 2x + 6y - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - (y-3)^2 \geq 1.$$
Per rappresentare il dominio conviene dapprima rappresentare l'iperbole di equazione
$$(x-1)^2 - (y-3)^2 = 1$$
e poi ombreggiare le regioni che soddisfano la disequazione.



2. D è un insieme chiuso in quanto è della forma

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : g(x, y) \geq 0\}$$

con g funzione continua (nel nostro caso $g(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 6y - 9$).

3. Notiamo che $P \notin D$. Quindi P potrebbe essere un punto esterno o di frontiera per D. Consideriamo ora l'intorno sferico aperto

$$U_{1/2}(1, 0).$$

Se prendo $(x, y) \in U_{1/2}(1, 0)$ ho che

$$(x-1)^2 - (y-3)^2 \leq (x-1)^2 \leq \frac{1}{4} < 1.$$

Quindi $(x, y) \notin D$. In altre parole $U_{1/2}(1, 0) \subseteq \mathbf{R}^2 \backslash D$, ovvero P è un punto esterno a D.

Per quel che riguarda Q, notiamo che $Q \in D$. Quindi Q non può essere un punto esterno a D. Prendiamo un qualunque intorno sferico aperto $U_r(Q)$. A tale intorno appartiene Q. Consideriamo ora il punto

$$S = \left(0, 3 + \frac{r}{2}\right).$$

Notiamo che $S \in U_r(Q)$ e inoltre $S \notin D$. In definitiva in ogni intorno sferico aperto di Q possiamo trovare punti che appartengono a D e punti che non appartengono a D. Ciò implica che Q è un punto di frontiera.

Soluzione 4.

1. Innanzitutto notiamo che $f(x,0) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}^*$. Quindi, se il limite esistesse, dovrebbe essere 0. Tuttavia
$$f(x,x^3) = \frac{1}{2}$$
per ogni $x \neq 0$. Quindi il limite non può esistere, perché avvicinandosi a $(0,0)$ lungo direzioni diverse la funzione tende a valori diversi.

2. Sia $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Passando a coordinate polari si ha quanto segue:
$$0 \leq \frac{\rho^2 \cdot |\cos(\vartheta)||\sin(\vartheta)|}{\rho} = \rho \cdot |\cos(\vartheta)||\sin(\vartheta)| \leq \rho.$$
Visto che $\lim_{\rho \to 0^+} \rho = 0$, concludiamo che il limite esiste ed è uguale a 0.

$\boxed{\textbf{Parte II}}$

Soluzione 5. La funzione f è continua e derivabile parzialmente con derivate parziali continue su tutto $\mathbf{R}^2$. Notiamo inoltre che

$$f(0,1) = f(1,0) = 0,$$

ovvero $(1,0)$ e $(0,1)$ appartengono alla curva di livello 0 della funzione f.

Calcoliamo le derivate parziali della funzione f:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x - 2; \\ f'_y(x,y) &= -4y^3. \end{aligned}$$

Notiamo che in P le derivate parziali sono entrambe diverse da 0, mentre in Q sono entrambe uguali a 0. Quindi le ipotesi del teorema delle funzioni implicite sono soddisfatte solo in P.

Soluzione 6. Notiamo che f è continua su D, che è un insieme compatto, quindi il massimo e minimo globale dovranno esistere in virtù del teorema di Weierstrass.

Cerchiamo eventuali punti stazionari di f.

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 8xy^2 - (y-1) = 0 \\ f'_y(x,y) = 8x^2y - x = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione può essere riscritta come

$$f'_y(x,y) = x(8xy - 1) = 0.$$

Analizziamo dunque due casi.

- $x = 0$. In tal caso la prima equazione è soddisfatta solo se $y = 1$.
- $8xy = 1$. In tal caso la prima equazione diventa $1 = 0$, che è assurdo.

In definitiva c'è solo un punto stazionario di f, ovvero $(0,1)$. Tale punto è pure candidato a risolvere il problema di ottimizzazione e lo indichiamo con P_1.

Analizziamo ora i punti della frontiera del dominio, che si trovano su un quadrato, distinguendo 4 casi.

- $x = -1$. Poniamo $g(y) = f(-1,y) = 4y^2 + y - 1$. L'unico punto stazionario di $g(y)$ è $y = -\frac{1}{8}$. Poiché $\left(-1, -\frac{1}{8}\right) \notin D$, concludiamo che gli unici punti candidati a risolvere il problema di ottimizzazione con $x = -1$ sono

  $$P_2 = (-1,0)\,, \quad P_3 = (-1,2)\,.$$

- $x = 1$. Poniamo $g(y) = f(1,y) = 4y^2 - y + 1$. L'unico punto stazionario di $g(y)$ è $y = \frac{1}{8}$. Quindi

  $$P_4 = \left(1, \frac{1}{8}\right)$$

  è un punto candidato a risolvere il problema di ottimizzazione. Inoltre andranno studiati pure i punti

  $$P_5 = (1,0)\,, \quad P_6 = (1,2).$$

- $y = 0$. Poniamo $g(x) = x$. Tale funzione non ha punti stazionari. Inoltre i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ sono già stati considerati precedentemente.
- $y = 2$. Poniamo $g(x) = f(x, 2) = 16x^2 - x$. L'unico punto stazionario di questa funzione è $x = \frac{1}{32}$. Quindi un altro punto candidato a risolvere il problema di ottimizzazione è
$$P_7 = \left(\frac{1}{32}, 2 \right).$$
Valutando la funzione nei 7 punti trovati si verifica che il massimo e minimo globale vengono assunti rispettivamente in P_3 e in P_2.

Soluzione 7. Calcoliamo il seguente integrale per strati
$$\int_1^2 \left(\iint_{\Omega(z)} 1 \; dxdy \right) \; dz,$$
dove
$$\Omega(z) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z^2\}.$$
Passando a coordinate polari, si tratta di calcolare
$$\int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^z \rho \; d\rho d\vartheta \; dz.$$
Svolgendo i calcoli si ottiene come risultato finale $\dfrac{7\pi}{3}$.

Soluzione 8.

1. Il campo vettoriale $\overrightarrow{F}$ è definito su $\mathbf{R}^2$, che è un insieme semplicemente connesso (in $\mathbf{R}^2$). Inoltre
$$(F_1)'_y(x, y) = (F_2)'_x(x, y) = 2x \cos(y)$$
per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Quindi $\overrightarrow{F}$ è un campo vettoriale conservativo.
2. Si ha che
$$\begin{aligned} \int 2x \sin(y) \; dx &= x^2 \sin(y) + C(y), \\ \int (x^2 \cos(y) - 3y^2) \; dy &= x^2 \sin(y) - y^3 + D(x). \end{aligned}$$
Se $U(x, y)$ è un potenziale di $\overrightarrow{F}$ si deve avere che
$$U(x, y) = x^2 \sin(y) + C(y) = x^2 \sin(y) - y^3 + D(x).$$
In particolare dev'essere
$$x^2 \sin(y) + C(y) = x^2 \sin(y) - y^3 + D(x).$$
Quest'ultima uguaglianza è soddisfatta se prendiamo ad esempio $C(y) = -y^3$ e $D(x) = 0$. Quindi un potenziale per il campo vettoriale $\overrightarrow{F}$ è
$$U(x, y) = x^2 \sin(y) - y^3.$$
L'integrale di linea richiesto vale
$$U(5, 1) - U(-1, 0) = 25 \sin(1) - 1.$$