

# Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

2 dicembre 2011

**ESERCIZIO 1.** *Date le basi*

$$\mathcal{B} = \left\{ b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$$
$$\mathcal{D} = \left\{ d_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}; d_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

di  $\mathbb{C}^2$ . Trovare la matrice  $M_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}}$  del cambiamento di base, dalla base  $\mathcal{B}$  alla base  $\mathcal{D}$ .

SVOLGIMENTO.

Dobbiamo trovare la matrice  $M_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}}$  tale che

$$C_{\mathcal{D}}(x) = M_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} C_{\mathcal{B}}(x)$$

Quindi applichiamo questa formula ai vettori di  $\mathcal{B}$ :

$$C_{\mathcal{D}}(b_i) = M_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} C_{\mathcal{B}}(b_i) = M_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} e_i = i - \text{esima colonna di } M_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}}$$

Questo vuol dire che la matrice del cambiamento di base è fatta in questo modo:

$$M_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} C_{\mathcal{D}}(b_1) & C_{\mathcal{D}}(b_2) \end{bmatrix}$$

Non ci resta che trovare  $C_{\mathcal{D}}(b_1)$  e  $C_{\mathcal{D}}(b_2)$ : cioè trovare le coordinate della combinazione lineare dei vettori di  $\mathcal{D}$  per scrivere  $b_1$  e  $b_2$ . Iniziamo a scrivere  $b_1$  come combinazione lineare dei vettori di  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} = \alpha + \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ma questo non è altro che il sistema lineare:

$$\begin{cases} 0\alpha + 3\beta = 1 \\ i\alpha + 1\beta = 2i \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema come siamo abituati con le matrici, la matrice completa è

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 1 \\ i & 1 & 2i \end{array} \right]$$

Eliminazione di Gauss:

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 1 \\ i & 1 & 2i \end{array} \right] \\ E_{21} \left[ \begin{array}{cc|c} i & 1 & 2i \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \\ E_1(-i) \\ E_3(1/3) \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -i & 2 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right] \end{array}$$

Da cui si trova che la soluzione è:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + i/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Che sarà la prima colonna di  $M_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}}$ .

Cerchiamo adesso la seconda colonna, scrivendo  $b_2$  come combinazione lineare dei vettori di  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ma questo non è altro che il sistema lineare:

$$\begin{cases} 0\gamma + 3\delta = -1 \\ i\gamma + 1\delta = i \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema come siamo abituati con le matrici, la matrice completa è

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 3 & -1 \\ i & 1 & i \end{array} \right]$$

Eliminazione di Gauss:

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 3 & -1 \\ i & 1 & i \end{array} \right] \\ E_{21} \left[ \begin{array}{cc|c} i & 1 & i \\ 0 & 3 & -1 \end{array} \right] \\ E_1(-i) \\ E_3(1/3) \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array} \right] \end{array}$$

Da cui si trova che la soluzione è:

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - i/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

Abbiamo così trovato la matrice del cambiamento di base:

$$M_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 + i/3 & 1 - i/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

**ESERCIZIO 2.** Sia  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  l'applicazione lineare tale che :

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 5v_1; \\ f(v_2) &= v_1 + 5v_2; \\ f(e_3) &= v_1 + 2v_2 + 5v_3. \end{aligned}$$

Dove

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di  $\mathbb{C}^3$ .

- (a) Si determini la matrice  $A$  associata ad  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  sul dominio e sul codominio.
- (b) Si determini la matrice  $B$  associata ad  $f$  rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.

SVOLGIMENTO.

- (a) Dobbiamo trovare una matrice  $A$  tale che :

$$C_{\mathcal{B}}(f(x)) = AC_{\mathcal{B}}(x)$$

Applichiamo tale formula ai vettori della base  $\mathcal{B}$ :

$$C_{\mathcal{B}}(f(v_i)) = AC_{\mathcal{B}}(v_i) = Ae_i = i - \text{esima colonna di } A;$$

Ma  $C_{\mathcal{B}}(f(v_i))$  è il vettore delle coordinate della combinazione lineare dei vettori di  $\mathcal{B}$  per scrivere  $f(v_i)$ , quindi

$$A = [ C_{\mathcal{B}}(f(v_1)) \quad C_{\mathcal{B}}(f(v_2)) \quad C_{\mathcal{B}}(f(v_3)) ] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- (b) Cerchiamo adesso la matrice  $B$  tale che

$$f(x) = B(x) \quad \text{ovvero} \quad C_{\mathcal{E}_3}(f(x)) = BC_{\mathcal{E}_3}(x)$$

Sapendo che:

1.  $C_{\mathcal{B}}(f(x)) = AC_{\mathcal{B}}(x)$ ;
2.  $C_{\mathcal{E}_3}(f(x)) = M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}} C_{\mathcal{B}}(f(x))$ ;
3.  $C_{\mathcal{E}_3}(x) = M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}} C_{\mathcal{B}}(x)$ .

Quindi

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{E}_3}(f(x)) &= [\text{per la 2}] = M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}} C_{\mathcal{B}}(f(x)) \\ &= [\text{per la 1}] = M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}} AC_{\mathcal{B}}(x) \\ &= [\text{per la 3}] = M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}} AM_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}}^{-1} C_{\mathcal{E}_3}(x) \end{aligned}$$

Pertanto

$$B = M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}} AM_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}}^{-1}$$

Adesso dobbiamo calcolare  $M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}}$ , la matrice del cambiamento di base tale che

$$C_{\mathcal{E}_3}(x) = M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}} C_{\mathcal{B}}(x)$$

Applichiamo questa formula ad un vettore della base  $\mathcal{B}$ :

$$C_{\mathcal{E}_3}(v_i) = M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}} C_{\mathcal{B}}(v_i) = M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}} e_i = i - \text{esima colonna di } M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}}$$

ed essendo  $C_{\mathcal{E}_3}(v_i) = v_i$ , troviamo che :

$$M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamone l'inversa:

$$\begin{aligned} \left[ M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}} | I \right] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ E_{31}(-1) &\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ E_{23} &\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ E_2(-1/2) &\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ E_{12}(-1) &\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

L'inversa è dunque

$$M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo quindi  $B$  :

$$\begin{aligned} B &= M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}} A M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 11 & 6 & -1 \\ 0 & 10 & 0 \\ 1 & -2 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$