Prova intermedia di Analisi Matematica II
Corso di laurea in Informatica
Università di Verona

Verona, 9 dicembre 2016

Informazioni personali

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Si barri e firmi l'opzione desiderata.

1. Chiedo che venga corretta la prova.

   Firma: ______________________________

2. Intendo ritirarmi.

   Firma: ______________________________

In caso di consegna, si indichi il numero di fogli protocollo consegnati: ____________________.

ISTRUZIONI

- Il testo di questa prova consiste di 5 esercizi.
- Occorre rispondere alle domande sui fogli protocollo. Su tali fogli è necessario scrivere il proprio nome, cognome e matricola.
- È necessario motivare (brevemente) le risposte che vengono date.
- È vietato utilizzare calcolatrici e dispositivi elettronici e consultare libri o appunti durante lo svolgimento della prova pena l'annullamento della prova stessa.

Esercizio 1 (punti: .... /3)**.** Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = x^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

determinando l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2 (punti: .... /3)**.** Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' = e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3 (punti: .... /3)**.**

- (1.5 pt.) Si spieghi perché non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}.$$

- (1.5 pt.) Si mostri che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

Esercizio 4 (punti: .... /3)**.** Si consideri l'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 < 0\}.$$

- (1.5 pt.) Si rappresenti graficamente l'insieme A nel piano cartesiano.
- (1.5 pt.) Il punto $P = (1,1)$ è interno, esterno o di frontiera per A? Si motivi la risposta.

Esercizio 5 (punti: .... /4)**.**
Si consideri l'arco di curva

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,2] & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \mapsto & (\sqrt{t^3}, t). \end{array}$$

1. (2 pt.) Si calcoli la lunghezza di γ.
2. (2 pt.) Si trovi una parametrizzazione della retta r tangente a γ nel punto $P = (1,1)$.

Prova intermedia di Analisi Matematica II
Corso di laurea in Informatica
Università di Verona

Verona, 9 dicembre 2016

Informazioni personali

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Si barri e firmi l'opzione desiderata.

1. Chiedo che venga corretta la prova.

   Firma: ____________________

2. Intendo ritirarmi.

   Firma: ____________________

In caso di consegna, si indichi il numero di fogli protocollo consegnati: ____________________.

ISTRUZIONI

- Il testo di questa prova consiste di 5 esercizi.
- Occorre rispondere alle domande sui fogli protocollo. Su tali fogli è necessario scrivere il proprio nome, cognome e matricola.
- È necessario motivare (brevemente) le risposte che vengono date.
- È vietato utilizzare calcolatrici e dispositivi elettronici e consultare libri o appunti durante lo svolgimento della prova pena l'annullamento della prova stessa.

Esercizio 1 (punti: .... /3)**.** Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = x^3 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

determinando l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2 (punti: .... /3)**.** Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' = e^{5x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3 (punti: .... /3)**.**

- (1.5 pt.) Si spieghi perché non esiste
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}.$$
- (1.5 pt.) Si mostri che
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

Esercizio 4 (punti: .... /3)**.** Si consideri l'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 < 0\}.$$

- (1.5 pt.) Si rappresenti graficamente l'insieme A nel piano cartesiano.
- (1.5 pt.) Il punto $P = (1,1)$ è interno, esterno o di frontiera per A? Si motivi la risposta.

Esercizio 5 (punti: .... /4)**.**
Si consideri l'arco di curva

$$\begin{aligned} \gamma : \quad [0,2] &\to \mathbf{R}^2 \\ t &\mapsto (\sqrt{t^3}, t). \end{aligned}$$

1. (2 pt.) Si calcoli la lunghezza di γ.
2. (2 pt.) Si trovi una parametrizzazione della retta r tangente a γ nel punto $P = (1,1)$.

Soluzioni della prima versione

Soluzione 1. L'equazione differenziale è lineare del primo ordine.

Moltiplichiamo entrambi i membri per un fattore integrante:

$$y' e^{\ln(x)} + \frac{y}{x} e^{\ln(x)} = x^2 e^{\ln(x)}.$$

Ottengo

$$y'x + y = x^3,$$

ovvero

$$(xy)' = x^3.$$

Integrando si ottiene

$$xy = \frac{1}{4}x^4 + C,$$

dove C è una costante di integrazione, e quindi

$$y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x}.$$

Imponiamo la condizione iniziale:

$$0 = y(1) = \frac{1}{4} + C.$$

Quindi $C = -\frac{1}{4}$. La soluzione del problema è dunque

$$y(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4x}.$$

L'intervallo massimale di definizione della soluzione è $]0, +\infty[$.

Soluzione 2. L'integrale generale dell'omogenea associata è

$$c_1 + c_2 e^{4x}$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$. Una soluzione particolare dell'equazione differenziale è da cercare nella forma

$$Ae^{3x}.$$

Facendo i calcoli si trova che una soluzione particolare è

$$-\frac{1}{3}e^{3x}.$$

L'integrale generale dell'equazione data è quindi

$$c_1 + c_2 e^{4x} - \frac{1}{3}e^{3x}$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$. Per determinare c_1 e c_2 occorre imporre le condizioni iniziali.

La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{3}e^{3x}.$$

Soluzione 3.

- Sia $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$. Notiamo che
$$f(x,0) = 0$$
per ogni $x \neq 0$. Quindi $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$. D'altra parte
$$f(x,x) = \frac{\sin(x^2)}{2x^2},$$
che tende a $\frac{1}{2}$ quando x tende a 0. Quindi non può esistere il limite in $(0,0)$.

- Notiamo che
$$0 \leq \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{y^4}{x^2+y^2} \leq x^2+y^2.$$
Quest'ultima funzione tende a 0 quando (x,y) tende a $(0,0)$. Quindi, per il teorema del confronto
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

Soluzione 4.

- La rappresentazione grafica di A è omessa. In ogni caso, notiamo che la disequazione che definisce A è equivalente a
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 < 4.$$
I punti che soddisfano questa disequazione sono quelli che appartengono alla regione interna al cerchio di raggio 2 centrato in $(1,2)$.

- Il punto P è interno ad A. Infatti, P appartiene ad A e A è un insieme aperto, essendo descritto nella forma $f(x,y) < 0$, con f funzione continua su $\mathbf{R}^2$.

Soluzione 5.

1. Tenendo conto del fatto che
$$\gamma'(t) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{t}, 1\right),$$
la lunghezza può essere così calcolata:
$$\int_0^2 \sqrt{\frac{9}{4}t+1}\, dt = \frac{8}{27}\left[\left(\frac{9}{4}t+1\right)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{8}{27}\left[\left(\frac{22}{4}\right)^{3/2} - 1\right].$$

2. Notiamo che $P = \gamma(1)$ e $\gamma'(1) = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$. Una parametrizzazione di r è
$$r(t) = \left(1 + \frac{3}{2}t, 1+t\right)$$
per $t \in \mathbf{R}$.