Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

ESERCIZIO 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbb{C}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice dell'applicazione lineare $P_U : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ (proiezione ortogonale su U) rispetto alla base canonica.

(b) Dire qual è il rango di P_U.

(c) Si determini una base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ di $\mathbb{C}^4$ tale che $\langle \ w3 \quad w4 \ \rangle = U$.

Svolgimento.

Potremmo iniziare a svolgere le richieste in ordine, ma risulterebbe laborioso. Partiamo invece dall'ultimo punto.

(c) Per determinare una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$ dobbiamo prima trovare una base di $\mathbb{C}^4$ e dopo renderla ortogonale con l'algoritmo di Gram-Schmidt.

Mettiamo quinidi v_1, v_2, v_3, v_4 in una matrice e vediamo chi è linearmente indipendente applicando l'Eliminazione di Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi v_1 e v_3 sono linearmente indipendenti. Questo tra l'altro ci dice che $\dim U = 2$.

Dobbiamo completare una base di $\mathbb{C}^4$ dati v_1 e v_3. Il modo più semplice è quello di usare due vettori che formano una base di $U^\perp$, essendo $\mathbb{C}^4 = U \oplus U^\perp$.

La teoria ci insegna che:

PROPOSIZIONE 1. *Sia A una matrice complessa $m \times n$. Allora*

1. *$N(A)$ è il complemento ortogonale di $C(A^H)$ in $\mathbb{C}^n$.*
2. *$N(A^H)$ è il complemento ortogonale di $C(A)$ in $\mathbb{C}^m$.*

Noi abbiamo una matrice 4×4 e siamo nel caso 2 della proposizione perché abbiamo già calcolato una base dello spazio delle colonne di A, quindi per avere una base non ci resta che prendere i due vettori di base dello spazio nullo di A^H.

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss a A^H:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per trovare una base dello spazio nullo di A^H dobbiamo immaginare di risolvere il sistema $A^H x = 0$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Arrivando alla forma ridotta

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Otteniamo così il vettore soluzione

$$\begin{bmatrix} -\beta - \alpha \\ \beta - \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix}^T$$

Ora potremmo dare raccogliamo α e β

$$\begin{bmatrix} -\beta - \alpha \\ \beta - \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo così ottenuto una base di $\mathbb{C}^4$:

$$\left\{ u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Adesso dobbiamo trovare una base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ di $\mathbb{C}^4$ tale che $\langle\ w3 \quad w4\ \rangle = U$. Per fare questo dobbiamo applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt alla base appena trovata. Notare che ho messo come terzo e quarto vettore quelli che mi generano U così da ottenere la base che volevo, con i nomi dei vettori al posto giusto.

Ricordiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt: data la base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, la nuova base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ si ottiene in questo modo:

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1 \\ w_2 &= u_2 - \alpha_{12} w_1 \\ w_3 &= u_3 - \alpha_{13} w_1 - \alpha_{23} w_2 \\ w_4 &= u_4 - \alpha_{14} w_1 - \alpha_{24} w_2 - \alpha_{34} w_3 \end{aligned}$$

Con

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } w_i = 0 \\ \frac{(w_i|u_j)}{(w_i|w_i)} & \text{se } w_i \neq 0 \end{cases}$$

Applichiamo dunque Gram-Schmidt:

(GS1)

$$u_1 = w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(GS2)

$$w_2 = u_2 - \alpha_{12} w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(GS3)

$$
\begin{aligned}
w_3 &= u_3 - \alpha_{13} w_1 - \alpha_{23} w_2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\quad - \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(GS4)

$$
\begin{aligned}
w_4 &= u_4 - \alpha_{14} w_1 - \alpha_{24} w_2 - \alpha_{34} w_3 \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\quad - \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Quindi una base ortogonale $\mathscr{B}$ di $\mathbb{C}^4$ è data da

$$\mathscr{B} = \left\{ w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Per scrivere la matrice dell'applicazione P_U devo ricordarmi la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 2. *Sia U un sottospazio dello spazio vettoriale V, $\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ base ortogonale di U, allora per ogni elemento $v \in V$ si ha che la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U è*

$$P_U(v) = \frac{(u_1|v)}{(u_1|u_1)}u_1 + \frac{(u_2|v)}{(u_2|u_2)}u_2 + \ldots + \frac{(u_n|v)}{(u_n|u_n)}u_n \tag{1}$$

Inoltre se $\mathscr{A} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base ortonormale di U, allora la formula 1 diventa

$$\begin{aligned} P_U(v) &= (w_1|v)w_1 + (w_2|v)w_2 + \ldots + (w_n|v)w_n \\ &= w_1 w_1^H v + w_2 w_2^H v + \ldots + w_n w_n^H v \\ &= (w_1 w_1^H + w_2 w_2^H + \ldots + w_n w_n^H)v \end{aligned} \tag{2}$$

Dalla 2 si capisce che la matrice P dell'applicazione lineare della proiezione ortogonale è

$$P = w_1 w_1^H + w_2 w_2^H + \ldots + w_n w_n^H$$

Un altro modo per ottenere P è $P = QQ^H$ dove la matrice Q è una matrice che ha come colonne i vettori della base ortonormale.

Dalla formula (2) della proposizione possiamo calcolare la matrice di proiezione ortogonale. Prendiamo una base ortonormale di U: prendiamo il terzo e il quarto vettore di $\mathscr{B}$ e normalizziamoli, cioè dividiamo ogni componente per la norma del relativo vetore.

Calcoliamo le norme:

$$\|w_3\| = \sqrt{w_3^H w_3} = \sqrt{3}$$
$$\|w_4\| = \sqrt{w_4^H w_4} = \sqrt{3}$$

Quindi una base di U ortonormale che chiameremo $\mathscr{A}$ è:

$$\mathscr{A} = \left\{ h_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Adesso calcoliamo la matrice P di proiezione ortogonale :

$$\begin{aligned}
P &= h_1 h_1^H + h_2 h_2^H \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Dunque la matrice dell'applicazione lineare $P_U : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ (proiezione ortogonale su U) rispetto alla base canonica è:

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Per capire se abbiamo fatto giusto, possiamo provare a trovare qualche proiezione ortogonale nota attraverso la moltiplicazione con la matrice P. Per esempio, dalla definizione di P_U, sappiamo che $P(w_1) = 0$ e $P_U(w_2) = 0$ (per 0 si intende il vettore nullo) perché $w_1, w_2 \in U^{\perp}$; mentre $P_U(w_3) = w_3$ e $P_U(w_4) = w_4$ perché $w_3, w_4 \in U$. Verifichiamolo:

$$P_U(w_1) = Pw_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_U(w_2) = Pw_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_U(w_3) = Pw_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_U(w_4) = Pw_4 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

È proprio quello che ci aspettavamo.

(b) Il rango di P_U è uguale al rango della matrice P appena trovata. Quindi applichiamo l'Eliminazione di Gauss (lo scalare $\frac{1}{3}$ possiamo anche non considerarlo, tanto non è influente al calcolo del rango perché nell'Eliminazione di Gauss possiamo moltiplicare tutte le righe per 3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo risultate 2 colonne dominanti, concludiamo che il rango dell'applicazione lineare P_U è 2.