Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

2 dicembre 2011

ESERCIZIO 1. *Date le basi*

$$\mathscr{B} = \left\{ b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix};\ b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$$
$$\mathscr{D} = \left\{ d_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix};\ d_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{C}^2$. *Trovare la matrice* $M_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{B}}$ *del cambiamento di base, dalla base* $\mathscr{B}$ *alla base* $\mathscr{D}$.

Svolgimento.

Dobbiamo trovare la matrice $M_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{B}}$ tale che

$$C_{\mathscr{D}}(x) = M_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(x)$$

Quindi applichiamo questa formula ai vettori di $\mathscr{B}$:

$$C_{\mathscr{D}}(b_i) = M_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(b_i) = M_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{B}} e_i = \ i - esima \text{ colonna di } M_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{B}}$$

Questo vuol dire che la matrice del cambiamento di base è fatta in questo modo:

$$M_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} C_{\mathscr{D}}(b_1) & C_{\mathscr{D}}(b_2) \end{bmatrix}$$

Non ci resta che trovare $C_{\mathscr{D}}(b_1)$ e $C_{\mathscr{D}}(b_2)$: cioè trovare le coordinate della combinazione lineare dei vettori di $\mathscr{D}$ per scrivere b_1 e b_2. Iniziamo a scrivere b_1 come combinazione lineare dei vettori di $\mathscr{D}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} = \alpha + \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ma questo non è altro che il sistema lineare:

$$\begin{cases} 0\alpha + 3\beta = 1 \\ i\alpha + 1\beta = 2i \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema come siamo abituati con le matrici, la matrice completa è

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 1 \\ i & 1 & 2i \end{array}\right]$$

Eliminazione di Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 1 \\ i & 1 & 2i \end{array}\right]$$

$$E_{21} \left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & 2i \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} E_1(-i) \\ E_3(1/3) \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 2 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right]$$

Da cui si trova che la soluzione è:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + i/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Che sarà la prima colonna di $M_{\mathscr{D} \leftarrow \mathscr{B}}$.

Cerchiamo adesso la seconda colonna, scrivendo b_2 come come combinazione lineare dei vettori di $\mathscr{D}$:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ma questo non è altro che il sistema lineare:

$$\begin{cases} 0\gamma + 3\delta = -1 \\ i\gamma + 1\delta = i \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema come siamo abituati con le matrici, la matrice completa è

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & -1 \\ i & 1 & i \end{array}\right]$$

Eliminazione di Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & -1 \\ i & 1 & i \end{array}\right]$$

$$E_{21} \left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & i \\ 0 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} E_1(-i) \\ E_3(1/3) \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$

Da cui si trova che la soluzione è:

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - i/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

Abbiamo così trovato la matrice del cambiamento di base:

$$M_{\mathscr{D} \leftarrow \mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 2 + i/3 & 1 - i/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2. *Sia $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare tale che :*

$$\begin{aligned} f(v_1) =& 5v_1; \\ f(v_2) =& v_1 + 5v_2; \\ f(e_3) =& v_1 + 2v_2 + 5v_3. \end{aligned}$$

Dove

$$\mathscr{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};\ v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{C}^3$.

(a) Si determini la matrice A associata ad f rispetto alla base $\mathscr{B}$ sul dominio e sul codominio.

(b) Si determini la matrice B associata ad f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.

Svolgimento.

(a) Dobbiamo trovare una matrice A tale che :

$$C_{\mathscr{B}}(f(x)) = AC_{\mathscr{B}}(x)$$

Applichiamo tale formula ai vettori della base $\mathscr{B}$:

$$C_{\mathscr{B}}(f(v_i)) = AC_{\mathscr{B}}(v_i) = Ae_i = \ i - esima \text{ colonna di } A;$$

Ma $C_{\mathscr{B}}(f(v_i))$ è il vettore delle coordinate della combinazione lineare dei vettori di $\mathscr{B}$ per scrivere $f(v_i)$, quindi

$$A = \begin{bmatrix} C_{\mathscr{B}}(f(v_1)) & C_{\mathscr{B}}(f(v_2)) & C_{\mathscr{B}}(f(v_3)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(b) Cerchiamo adesso la matrice B tale che

$$f(x) = B(x) \quad \text{ovvero} \quad C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) = BC_{\mathscr{E}_3}(x)$$

Sapendo che:

1. $C_{\mathscr{B}}(f(x)) = AC_{\mathscr{B}}(x)$;
2. $C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(f(x))$;
3. $C_{\mathscr{E}_3}(x) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(x)$.

Quindi

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) &= [\text{per la } 2] = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(f(x)) \\ &= [\text{per la } 1] = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} AC_{\mathscr{B}}(x) \\ &= [\text{per la } 3] = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} AM^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{E}_3}(x) \end{aligned}$$

Pertanto

$$B = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} AM^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}}$$

Adesso dobbiamo calcolare $M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}}$, la matrice del cambiamento di base tale che

$$C_{\mathscr{E}_3}(x) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(x)$$

Applichiamo questa formula ad un vettore della base $\mathscr{B}$:

$$C_{\mathscr{E}_3}(v_i) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(v_i) = M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} e_i = \ i - esima \text{ colonna di } M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}}$$

ed essendo $C_{\mathscr{E}_3}(v_i) = v_i$, troviamo che :

$$M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamone l'inversa:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} | I \end{bmatrix} = & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
E_{31}(-1) \quad & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
\begin{array}{l} E_{23} \\ E_2(-1/2) \end{array} \quad & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\
E_{12}(-1) \quad & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

L'inversa è dunque

$$M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo quindi B :

$$\begin{aligned}
B = & M_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} A M^{-1}_{\mathscr{E}_3 \leftarrow \mathscr{B}} \\
= & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\
= & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\
= & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 11 & 6 & -1 \\ 0 & 10 & 0 \\ 1 & -2 & 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$