Dipartimento di Informatica
Università di Verona
A.A. 2018-19

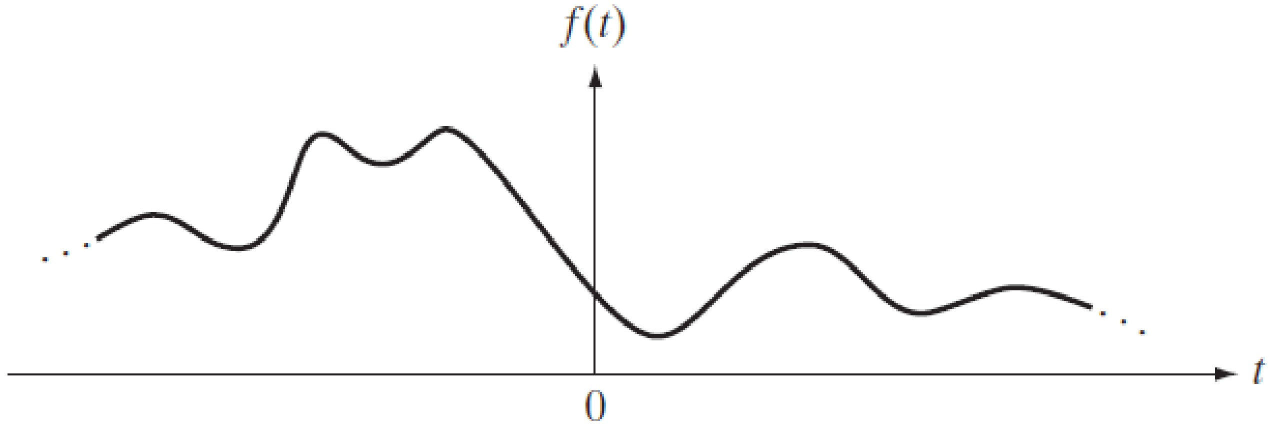
Elaborazione dei Segnali e Immagini

Analisi di Fourier
-
Trasformata di Fourier tempo-discreta

Gonzalez Cap.4.3

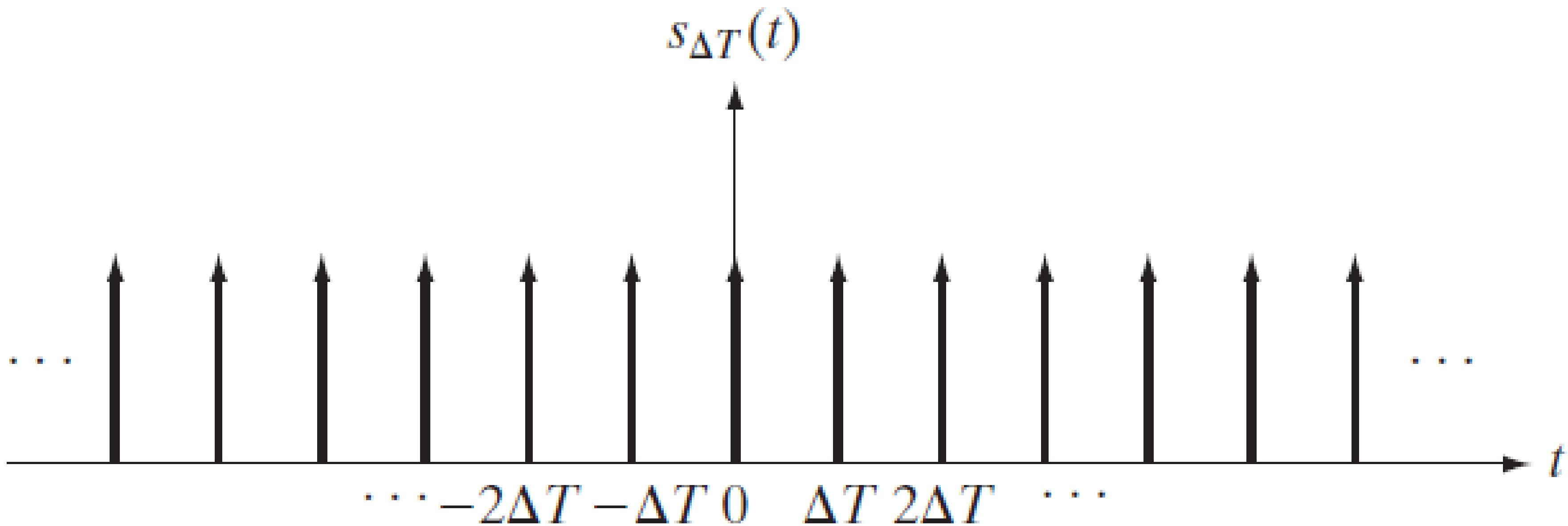
CAMPIONAMENTO

- Sia *f(t)* segnale reale continuo $f\colon]-\infty,+\infty[\in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (*attenzione al dominio non limitato*), *anche non periodico*



- per essere elaborato al computer deve essere innanzitutto *campionato* ad intervalli discreti

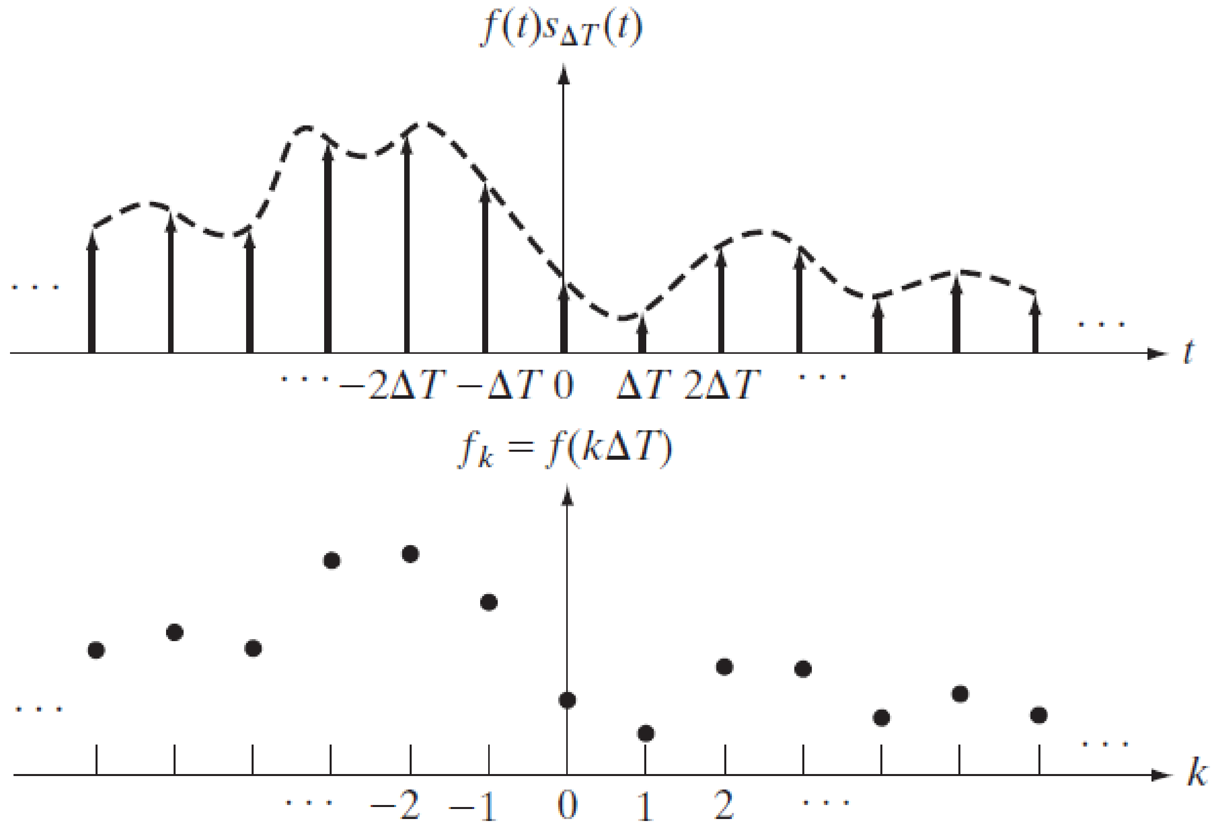
- Sia $s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$ il treno di impulsi di *periodo* ΔT, ossia con *frequenza di campionamento* $\mu_s = \frac{1}{\Delta T}$



discreto

- Matematicamente, campionare un segnale significa *moltiplicarlo per un treno di impulsi*

$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot s_{\Delta T}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

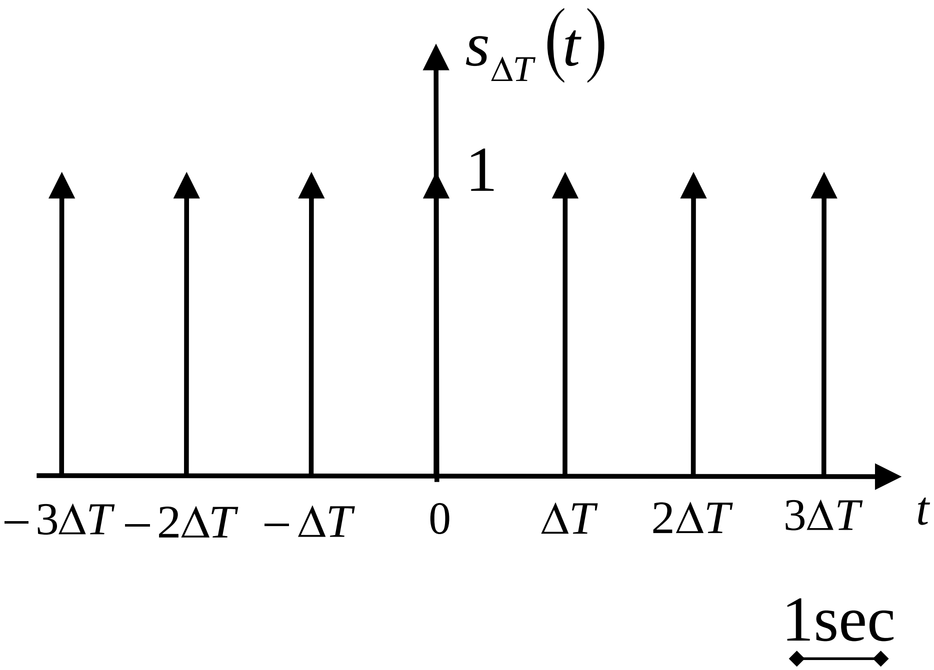


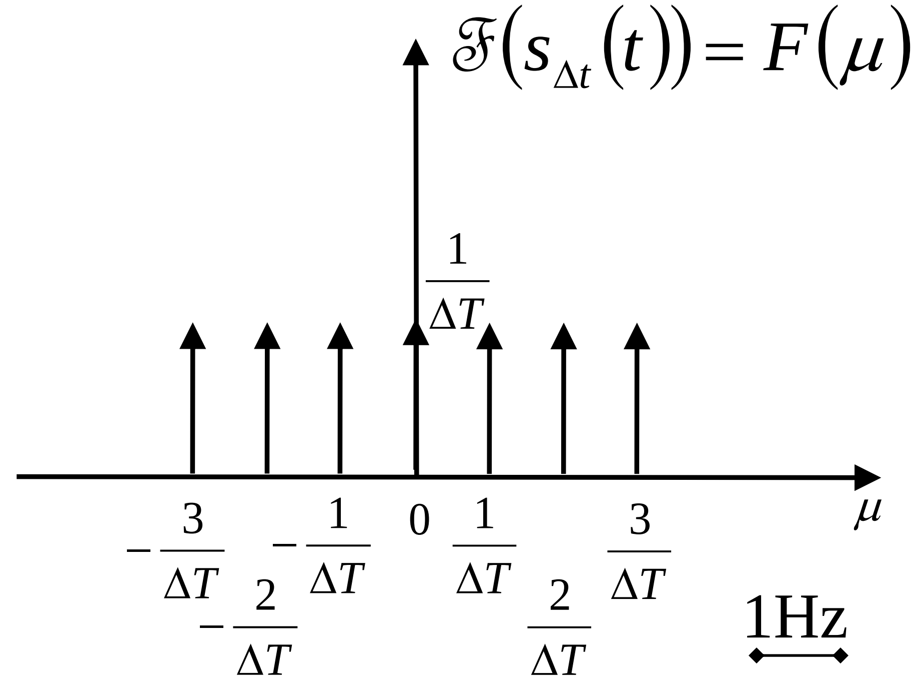
TRASFORMATA DI FOURIER A TEMPO-DISCRETO

- Sia $F(\mu)$ la trasformata di Fourier di un segnale $f(t):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$. Ora considero $\tilde{f}(t)$ e voglio calcolarne la trasformata di Fourier $\tilde{F}(\mu)$
- Attraverso il teorema della convoluzione so che:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\mu) &= \mathfrak{F}\left\{\tilde{f}(t)\right\} \\ &= \mathfrak{F}\left\{f(t)\cdot s_{\Delta t}(t)\right\} \\ &= F(\mu) * S_{\Delta t}(\mu)\end{aligned}$$

- dove so che $S_{\Delta t}(\mu)=\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\mu-\frac{n}{\Delta T}\right)$

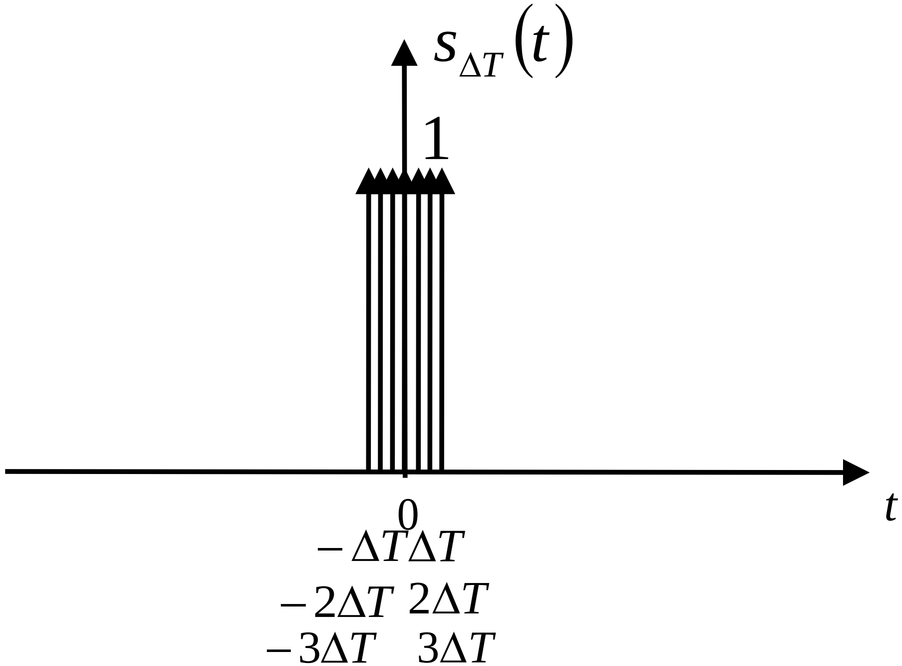


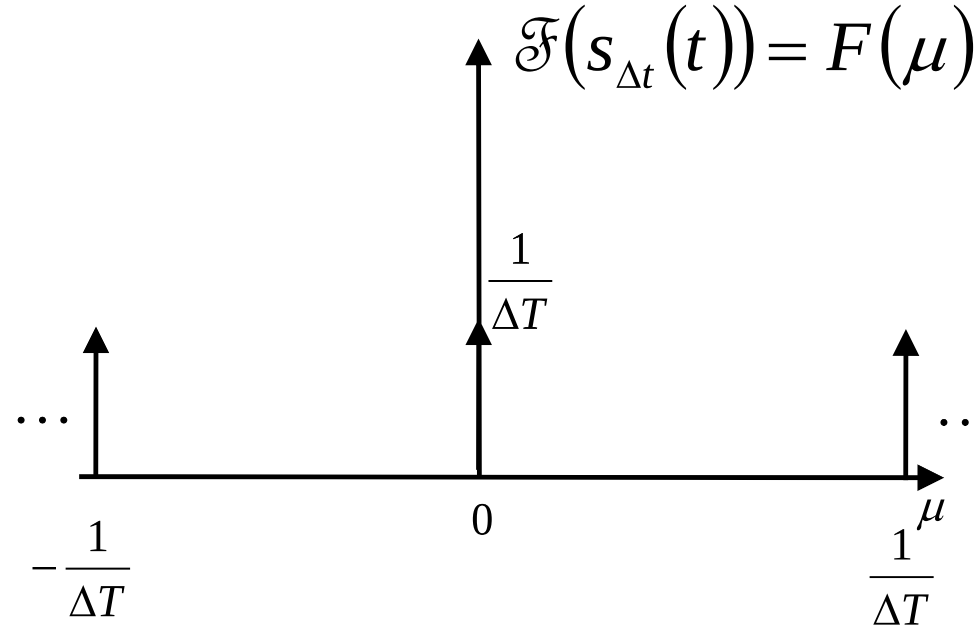


- Più lungo il periodo di campionamento ΔT nel dominio del tempo…

…più è fitto il periodo di campionamento nel dominio della frequenza e meno sono alti gli impulsi

…E VICEVERSA!





- Più corto il periodo di campionamento ΔT nel tempo…
- Più è alta la frequenza di campionamento $\frac{1}{\Delta T} = \mu_s$ …

…più è sparso il periodo di campionamento in frequenza e meno sono alti gli impulsi

- la convoluzione in frequenza si risolve come segue:

$$F(\mu) * S_{\Delta t}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \cdot S_{\Delta t}(\mu - \tau) d\tau$$

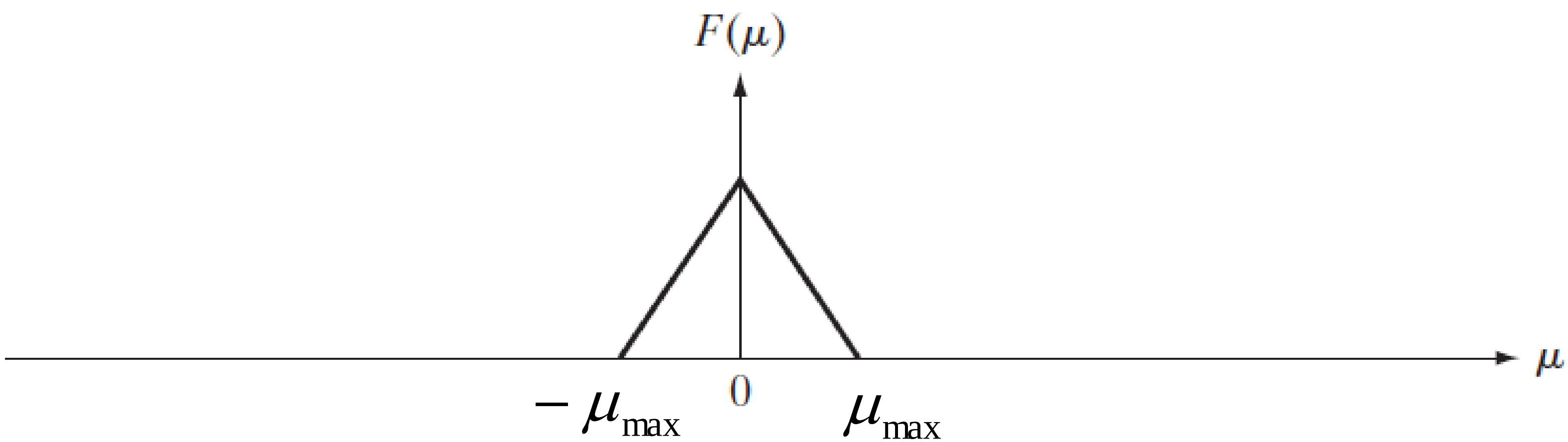
$$= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T} - \tau\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \cdot \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T} - \tau\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

- Capiamo cos'è $\tilde{F}(\mu) = F(\mu) * S_{\Delta t}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$

$F(\mu)$ = TdF della funzione originale *f(t)* (assumo abbia spettro finito, ipotesi più che ragionevole…)



Per esempio, μ_{max} = 2000Hz (max frequenza generabile da una voce umana)

- Capiamo cos'è $\tilde{F}(\mu) = F(\mu) * S_{\Delta t}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$

$F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right) =$ TdF della funzione originale *f(t)* shiftato a dx di una quantità pari a $\frac{n}{\Delta T}$

Per esempio, se:

μ_{max} = 2000 Hz = 2KHz (slide precedente, *max esprimibile da una voce*)

ΔT = 1/44000 sec → $\frac{1}{\Delta T} \overset{(\mu)}{=} 44000$ Hz = 44KHz

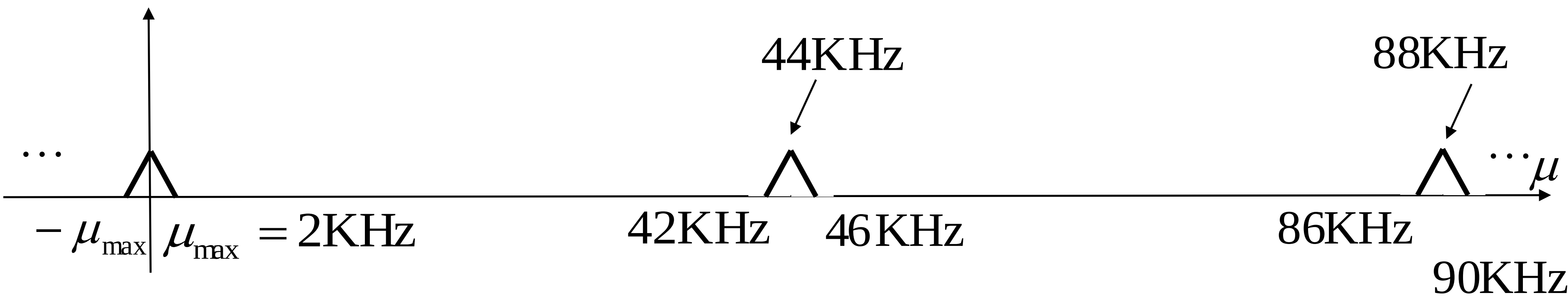
- Capiamo cos'è $F(\mu) * S_{\Delta t}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$

$\frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$ = infinite copie dello spettro $F(\mu)$, ripetute ogni $\frac{1}{\Delta T}$

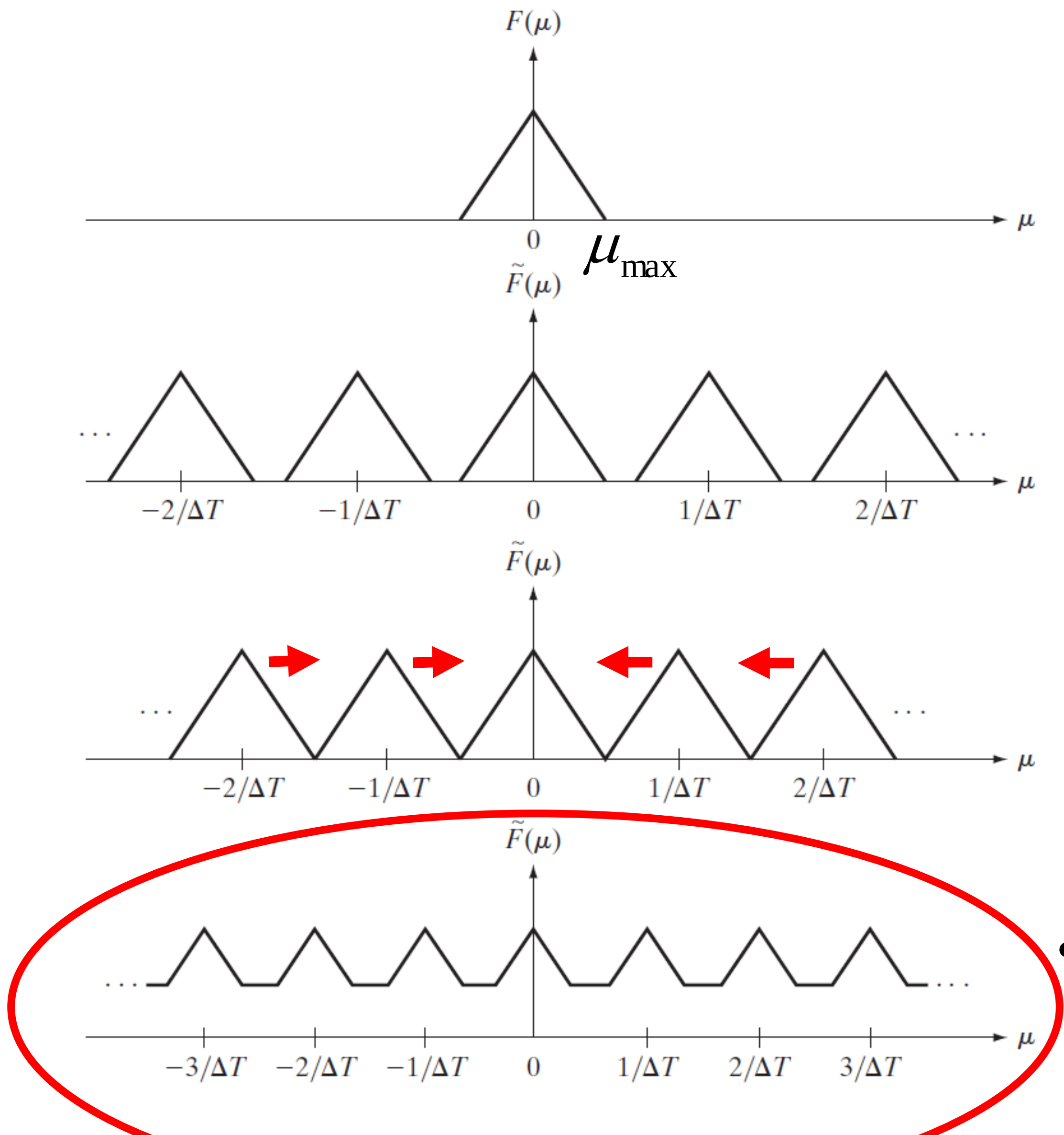
= è un **segnale periodico** (nelle frequenze!) di periodo $\frac{1}{\Delta T}$, ovvero di ripete ogni $\frac{1}{\Delta T}$ Hz

= ho una *scalatura* nell'ampiezza di un fattore $\frac{1}{\Delta T}$

= **Trasformata di Fourier a Tempo Discreto (DTFT)**



- Come cambia la DTFT in funzione del periodo di campionamento ΔT del segnale f(t)?

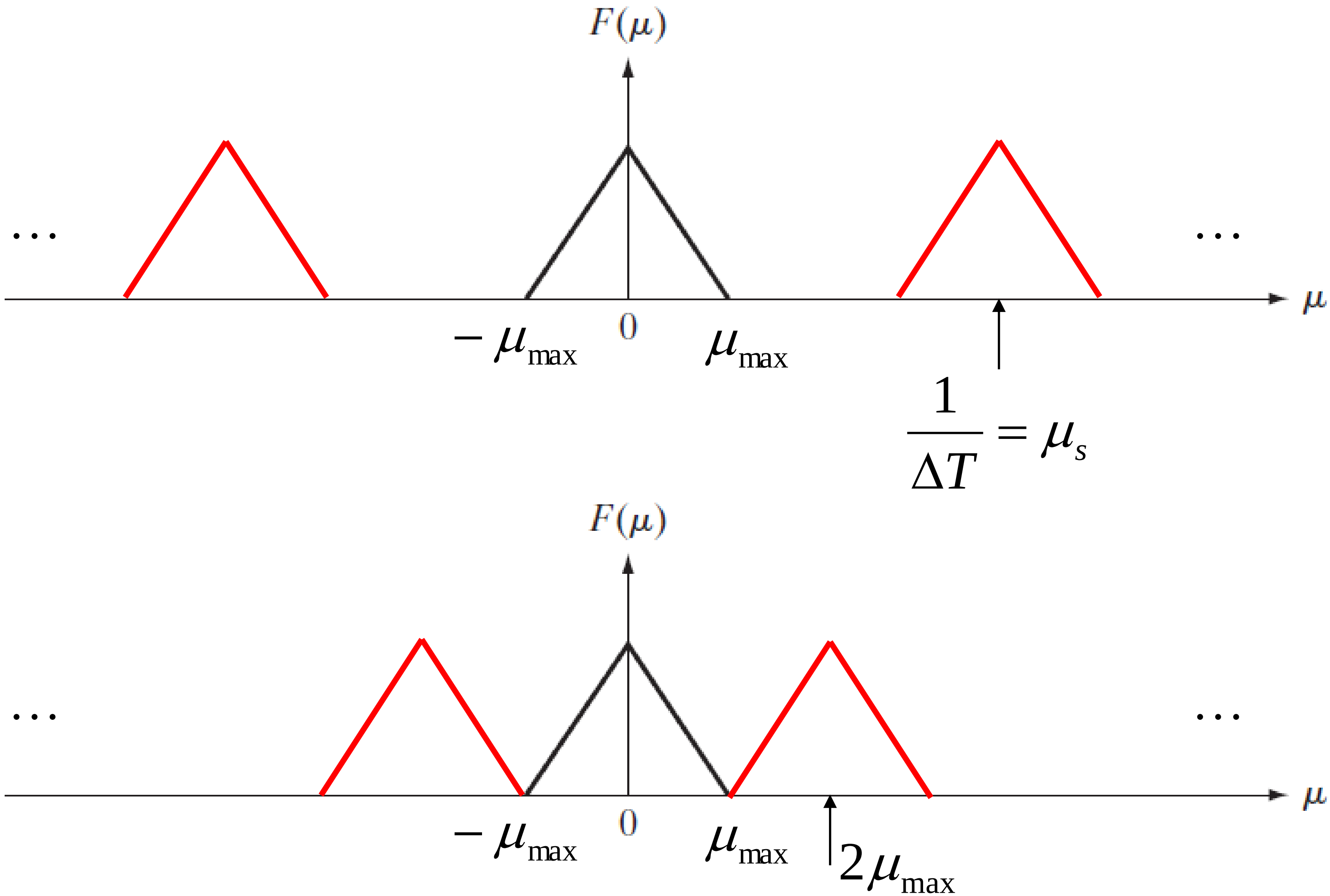


ΔT iniziale

- ΔT aumenta, $\dfrac{1}{\Delta T}$ diminuisce…

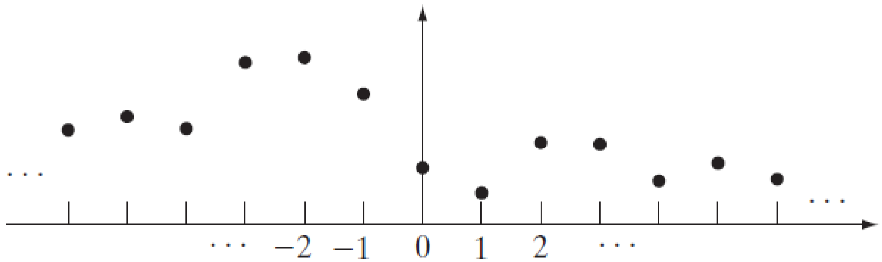
(p.e. 2→4) (p.e. 1/2→1/4)

- sovrapposizione delle repliche dello spettro→**ALIASING!!!**

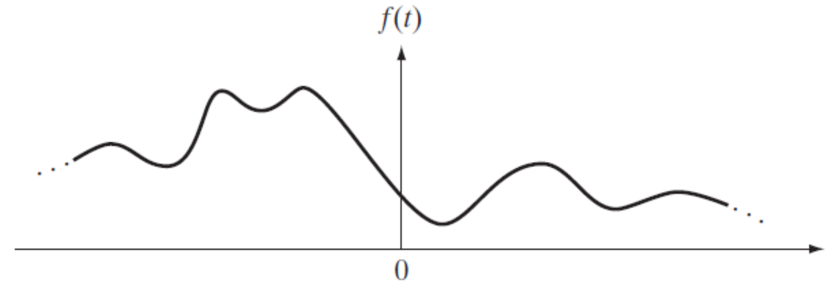

F(μ)
...
...
μ
−μmax
0
μmax
1/ΔT = μs
F(μ)
...
...
μ
−μmax
0
μmax
2μmax

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

- Un segnale reale continuo *f(t)*, limitato in banda, può essere ricostruito senza errori completamente da un set di suoi campioni…



$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot s_{\Delta T}(t)$$



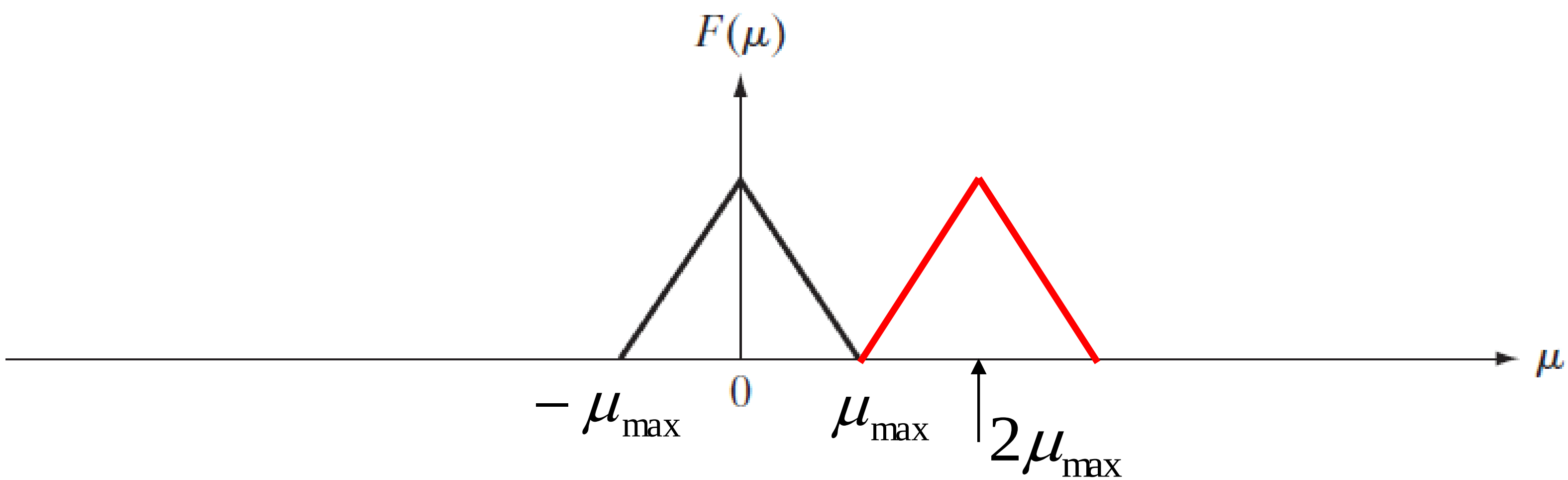
ricostruzione di f(t)

… se essi sono acquisiti con un tempo di campionamento ΔT tale per cui

$$\frac{1}{\Delta T} = \mu_s > 2\mu_{\text{MAX}}$$

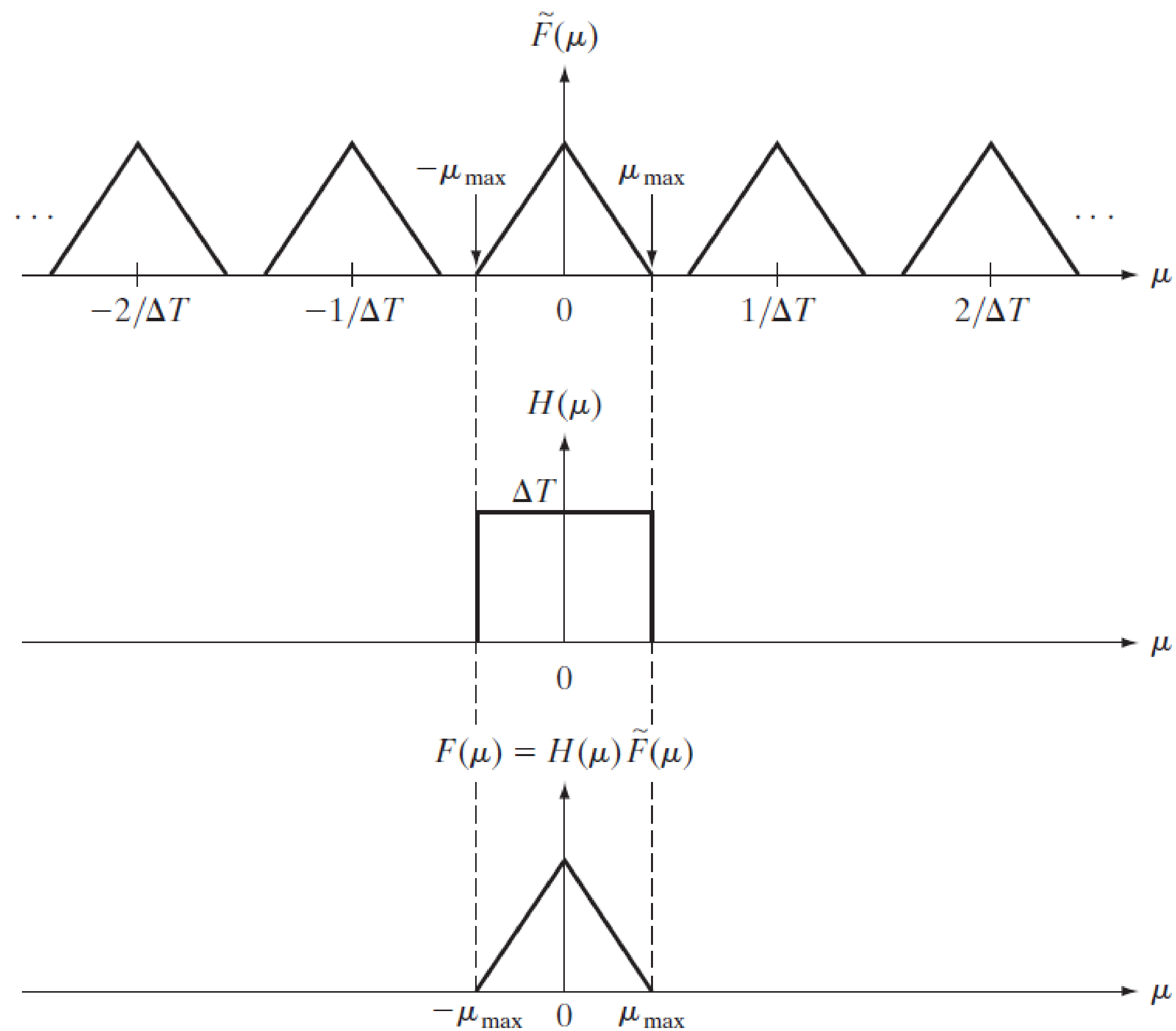
= se nel tempio adotto una frequenza di campionamento $1/\Delta T$ almeno doppia rispetto alla frequenza massima del segnale $\mu_{\max}$

- In pratica il teorema del campionamento mi dice che tutte le proprietà di un segnale possono essere espresse usando dei campioni.
- Posso dimenticarmi di porzioni del segnale (quelle che stanno tra coppie di campioni) e non sto perdendo nulla!
- E' un risultato teorico, non posso ancora vederlo nel PC!
- $1/\Delta T$ viene detta *frequenza di Nyquist*. Per frequenze minori, ho aliasing

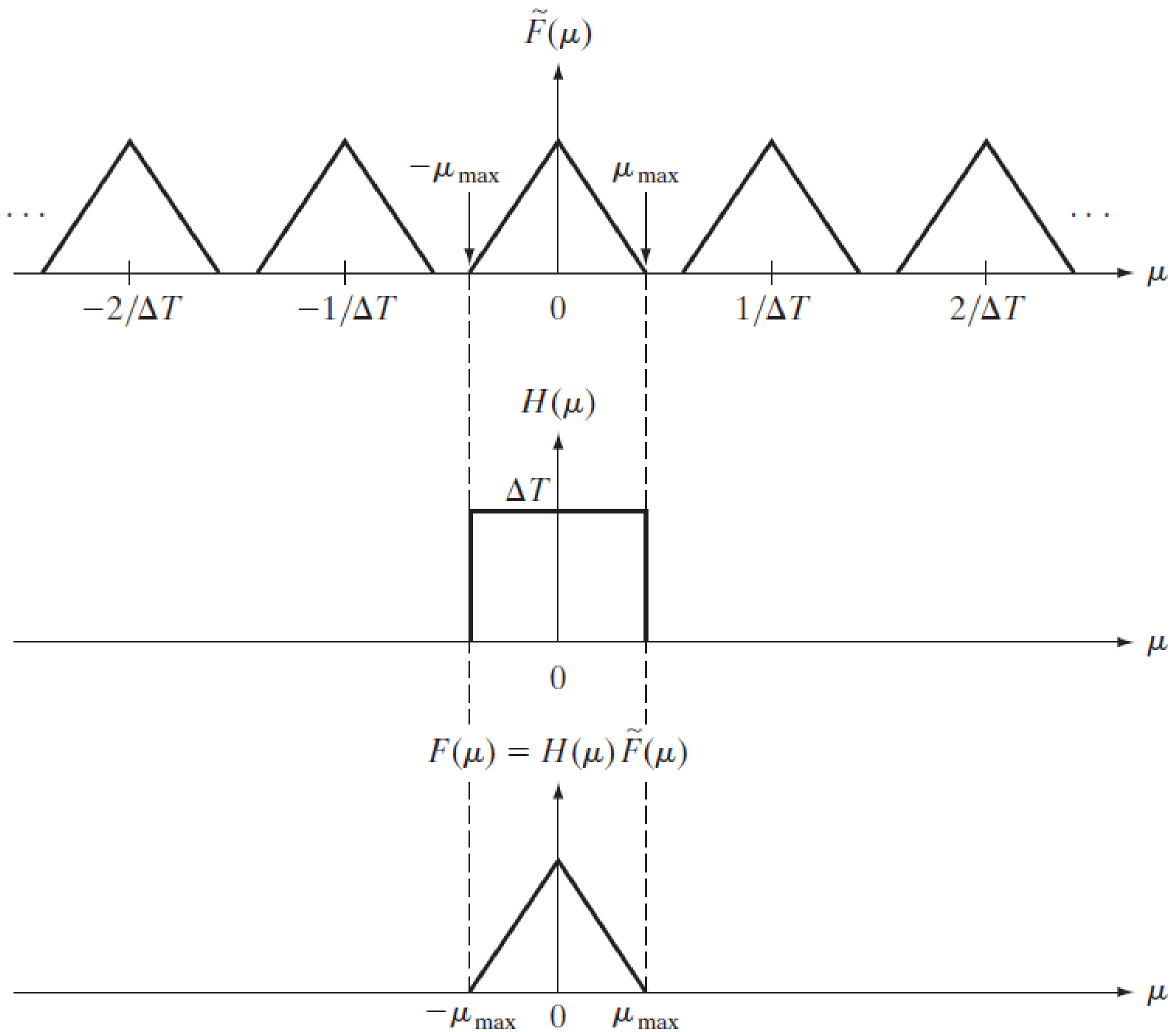


Come avviene la ricostruzione del segnale originale?

- Ho il segnale campionato, ne calcolo la trasformata di Fourier
- La Trasformata di Fourier di una funzione campionata è una funzione periodica, dove ogni periodo riporta una copia dello spettro della funzione continua
- Isolo un periodo della funzione periodica, lo antitrasformo con Fourier



- In formule:



$$H(\mu) = \begin{cases} \Delta T & \text{se } \mu \in [-\mu_{max}, \mu_{max}] \\ 0 & \text{alt.} \end{cases}$$

$$F(\mu) = \tilde{F}(\mu) \cdot H(\mu)$$

- A questo punto, devo antitrasformare la copia ritagliata per arrivare al segnale *f(t)*

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{F(\mu)\} \\
&= \mathfrak{F}^{-1}\{H(\mu)\cdot \tilde{F}(\mu)\} \\
&= h(t) * \tilde{f}(t)
\end{aligned}
$$

- si può dimostrare (lo faremo come esercizio)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\operatorname{sinc}\left[(t - n\Delta T)/n\Delta T\right]$$

- Osservo il comportamento di questa espressione
  - *Se* $t = m\Delta T$ $$f\left(t = m\Delta T\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\Delta T\right)\mathrm{sinc}\left[\left(t - n\Delta T\right)/\, n\Delta T\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\Delta T\right)\mathrm{sinc}\left[\left(m\Delta T - n\Delta T\right)/\, n\Delta T\right]$$

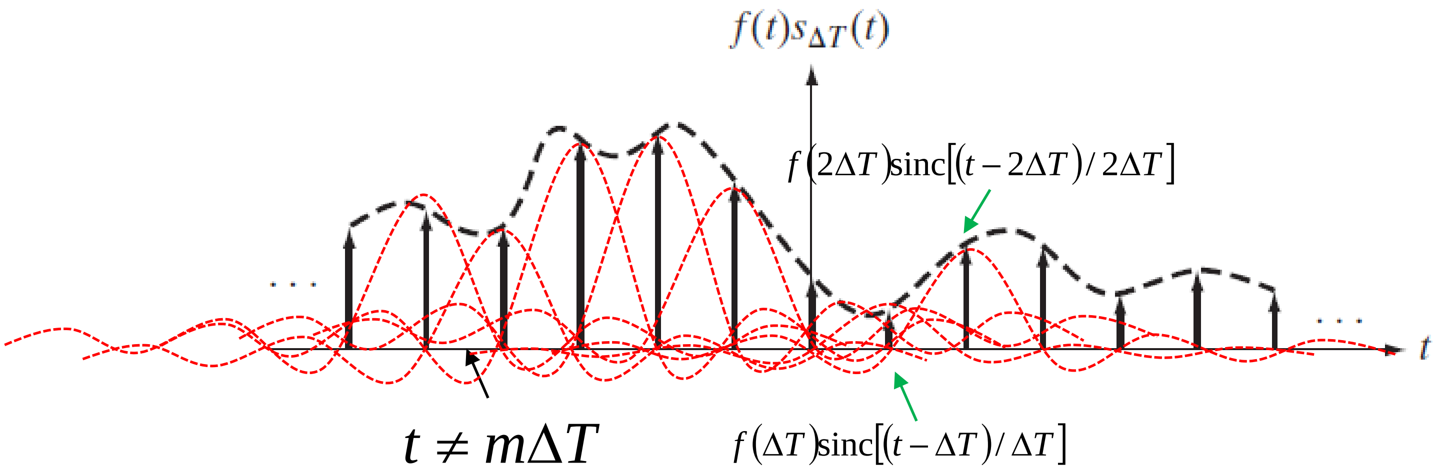
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\Delta T\right)\mathrm{sinc}\left[\left(m - n\right)/\, n\right]$$

$$= \begin{cases} f\left(n\Delta T\right)\cdot 1 & \text{se } m = n \\ f\left(n\Delta T\right)\cdot 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

- Se *t* corrisponde alla posizione di uno dei campioni $\left(t = m\Delta T\right)$ riesco ad avere una ricostruzione “semplice”

- Osservo il comportamento di questa espressione

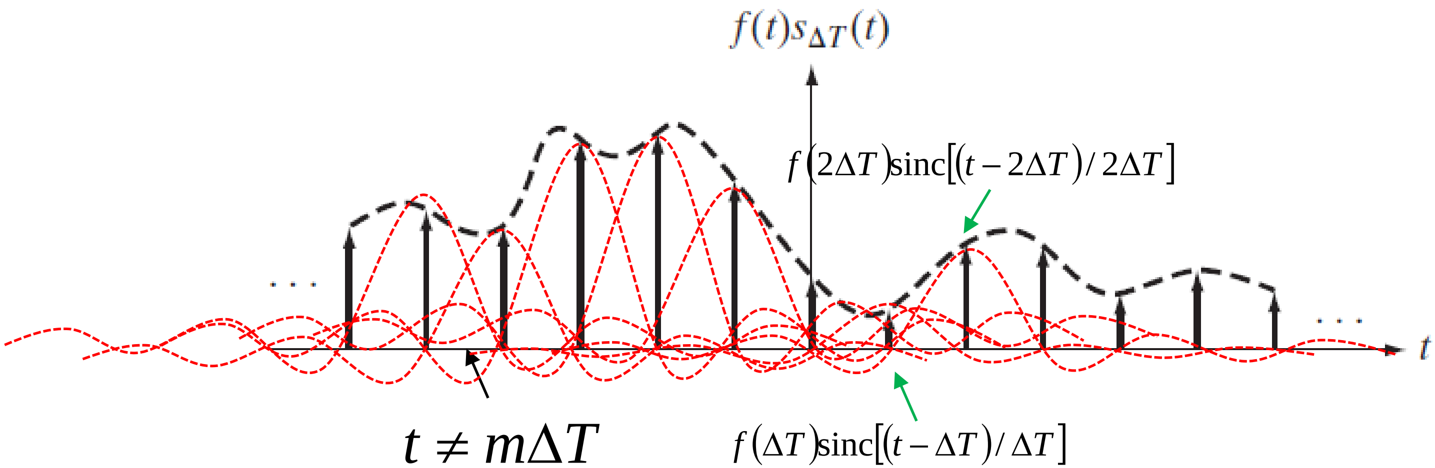
  – Se $t \neq m\Delta T$ $$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\,\mathrm{sinc}\left[(t - n\Delta T)/n\Delta T\right]$$



- f(t) è il risultato di una somma infinita di termini. Ognuno di questi è una sinc posizionata in un punto del tempo, pesata dal campione $f(n\Delta T)$
- è una interpolazione!

- PROBLEMA

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\,\mathrm{sinc}\left[(t - n\Delta T)/n\Delta T\right]$$



- L'interpolazione che, dal punto di vista teorico, mi permette di ricostruire esattamente il segnale non può essere implementata perché il segnale che sto trattando ha durata finita!