

Note per il corso di Analisi Matematica II  
Corso di laurea in Informatica  
Università di Verona  
A. A. 2017/18  
Docente: Simone Ugolini

Ultimo aggiornamento:

17 gennaio 2018



# Indice

<b>1</b>	<b>Equazioni differenziali</b>	<b>9</b>
1.1	Equazioni differenziali ordinarie: introduzione . . . . .	9
1.1.1	Il modello di Malthus per l'evoluzione di una popolazione isolata . . . . .	9
1.2	Equazioni a variabili separabili . . . . .	10
1.3	Problema di Cauchy (equazioni a variabili separabili) . . . . .	11
1.4	Equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine . . . . .	13
1.5	EDO lineari del secondo ordine . . . . .	14
1.5.1	EDO lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti . . . . .	15
1.5.2	Metodo di somiglianza . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Lo spazio vettoriale ed euclideo <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>19</b>
2.1	L'insieme $\mathbb{R}^n$ . . . . .	19
2.1.1	$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale . . . . .	19
2.1.2	Rappresentazione geometrica dei vettori di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ . . . . .	20
2.1.3	$\mathbb{R}^n$ è uno spazio euclideo . . . . .	20
2.2	Topologia in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Curve in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>25</b>
3.1	Archi di curva continui . . . . .	25
3.2	Lunghezza di una curva in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Funzioni di più variabili</b>	<b>29</b>
4.1	Introduzione . . . . .	29
4.1.1	Dominio di una funzione di più variabili . . . . .	29
4.1.2	Curve di livello . . . . .	30
4.1.3	Coniche . . . . .	31
4.1.4	Parabole con asse di simmetria parallelo all'asse delle $x$ . . . . .	32
4.1.5	Circonferenze . . . . .	32
4.1.6	Ellissi . . . . .	33
4.1.7	Iperboli . . . . .	33
4.1.8	Classificazione delle coniche . . . . .	35

4.2	Limiti per funzioni di più variabili . . . . .	36
4.2.1	Funzioni continue . . . . .	38
4.2.2	Calcolo dei limiti in 2 variabili attraverso coordinate polari . . . .	39
4.2.3	Alcuni teoremi sulle funzioni continue . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Derivate parziali, direzionali e differenziabilità</b>	<b>43</b>
5.1	Derivate parziali . . . . .	43
5.2	Interpretazione geometrica delle derivate parziali (in 2 variabili) . . . .	44
5.3	Differenziabilità . . . . .	45
5.3.1	Iperpiano tangente . . . . .	46
5.4	Derivate direzionali . . . . .	46
5.5	Ortogonalità fra gradiente e curve di livello . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Ottimizzazione libera e vincolata</b>	<b>49</b>
6.1	Ottimizzazione libera . . . . .	49
6.2	Derivate parziali del secondo ordine . . . . .	49
6.3	Forme quadratiche . . . . .	51
6.3.1	Segno delle forme quadratiche . . . . .	52
6.3.2	Grafico di una forma quadratica in due variabili . . . . .	54
6.4	Classificazione dei punti stazionari di una funzione di due variabili . . . .	58
6.4.1	Ottimizzazione libera per funzioni di $n$ variabili . . . . .	61
6.5	Ottimizzazione vincolata . . . . .	62
6.6	Moltiplicatori di Lagrange (2 variabili-1 vincolo) . . . . .	63
6.7	Punti di minimo e massimo globale vincolato . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Integrazione in più variabili</b>	<b>67</b>
7.1	Integrali di linea di prima specie . . . . .	67
7.2	Integrali doppi . . . . .	67
7.2.1	Integrali doppi su domini semplici e regolari . . . . .	68
7.2.2	Alcune possibili interpretazioni degli integrali doppi . . . . .	69
7.2.3	Cambiamento di variabili negli integrali doppi . . . . .	69
7.2.4	Coordinate polari nel piano . . . . .	70
7.3	Integrali tripli . . . . .	70
7.3.1	Integrali tripli su parallelepipedi rettangolari . . . . .	70
7.3.2	Integrazione per fili . . . . .	71
7.3.3	Integrazione per strati . . . . .	71
7.3.4	Cambiamento di variabili negli integrali tripli . . . . .	71
7.3.5	Integrali tripli in coordinate sferiche . . . . .	72
7.3.6	Integrali tripli in coordinate cilindriche . . . . .	73
7.3.7	Alcune interpretazioni degli integrali tripli . . . . .	73
7.4	Superfici regolari . . . . .	73

7.4.1	Area di una superficie . . . . .	74
7.5	Campi vettoriali . . . . .	74
7.5.1	Integrali di linea di seconda specie . . . . .	74
7.5.2	Campi conservativi . . . . .	75
7.5.3	Condizione necessaria affinché un campo sia conservativo . . . . .	75
7.5.4	Condizione sufficiente affinché un campo sia conservativo . . . . .	75





## Introduzione

Nelle pagine che seguono troverete delle note per il corso di Analisi Matematica II per gli studenti del corso di laurea in Informatica dell'Università di Verona dell'anno accademico 2017-2018.

Le note sono in costruzione e potranno essere considerate definitive entro la fine del corso. Il contenuto sarà comunque simile a quello delle note dello scorso anno accademico, che potete trovare nelle pagine dell'e-learning.

Chiunque notasse delle inesattezze è pregato di scrivermi all'indirizzo e-mail [simone.ugolini@univr.it](mailto:simone.ugolini@univr.it). Allo stesso indirizzo gli studenti possono scrivermi in qualunque momento per chiedere delucidazioni sia su queste note che su tutto ciò che riguarda il corso.



# Capitolo 1

## Equazioni differenziali

### 1.1 Equazioni differenziali ordinarie: introduzione

Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione che mette in relazione una funzione incognita con le sue derivate. Le equazioni differenziali descrivono fenomeni di varia natura, ad esempio in fisica e biologia.

Nella sezione successiva vedremo la descrizione di uno dei primi modelli di dinamica delle popolazioni, il cosiddetto modello di Malthus. L'equazione differenziale che ricaveremo si può in realtà utilizzare per descrivere altri fenomeni. Ad esempio, la stessa equazione descrive la crescita di un capitale investito nel tempo, una volta fissato un tasso annuo nominale  $r$  e un capitale iniziale investito  $K(0)$ , supponendo che la liquidazione e capitalizzazione degli interessi avvengano con continuità. L'equazione differenziale è

$$K'(t) = r \cdot K(t),$$

dove  $K(t)$  è l'ammontare del capitale rivalutatosi all'istante di tempo  $t$ , supponendo che l'istante iniziale sia  $t = 0$  (si confronti l'equazione appena scritta con 1.1).

#### 1.1.1 Il modello di Malthus per l'evoluzione di una popolazione isolata

Il modello di Malthus descrive l'evoluzione del numero di individui di una popolazione, ipotizzando che tale popolazione sia isolata, che non ci siano limitazioni nelle risorse, né che ci siano predatori o antagonisti per l'utilizzo delle risorse. In definitiva si tratta di un modello piuttosto semplificato, ma che descrive abbastanza bene l'evoluzione di una popolazione di individui in archi temporali limitati oppure in situazioni di laboratorio.

Denotiamo con  $N(t)$  il numero di individui della popolazione in un certo istante  $t$ .

Nel modello malthusiano si suppone che il numero di individui nati e morti nell'intervallo di tempo di lunghezza  $h$  con istante iniziale  $t$  e istante finale  $t + h$ , per un

arbitrario valore  $h > 0$ , sia proporzionale al numero di individui presenti all'istante  $t$  e a  $h$ . Quindi, l'equazione che descrive l'evoluzione nell'intervallo  $h$  è

$$N(t+h) - N(t) = \lambda h N(t) - \mu h N(t),$$

dove  $\lambda$  e  $\mu$  sono costanti non-negative fissate. Dividendo entrambi i membri per  $h$  abbiamo che

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = (\lambda - \mu)N(t).$$

Passando al limite per  $h$  che tende a 0 in entrambi i membri otteniamo

$$N'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = (\lambda - \mu)N(t).$$

Quella che abbiamo appena trovato è un'equazione differenziale. La funzione incognita è il numero di individui  $N(t)$ , che dipende dalla variabile tempo  $t$ . Tale funzione che non conosciamo deve soddisfare l'equazione differenziale ordinaria del primo ordine

$$N'(t) = (\lambda - \mu)N(t).$$

Per semplicità, possiamo indicare con  $\varepsilon = \lambda - \mu$ . Tale numero  $\varepsilon$  viene detto il potenziale biologico della popolazione.

Supponendo che a un istante iniziale  $t_0$  il numero di individui di una popolazione sia  $N(t_0)$ , si può verificare che l'equazione differenziale

$$N'(t) = \varepsilon N(t) \tag{1.1}$$

ha come soluzione la funzione

$$N(t) = N(t_0) \cdot e^{\varepsilon(t-t_0)}.$$

Vediamo dunque come si fa a ricavare la soluzione di un'equazione differenziale come (1.1).

## 1.2 Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine a variabili separabili

L'equazione differenziale (1.1) è un esempio di equazione differenziale ordinaria (EDO) del primo ordine a variabili separabili. In generale tali equazioni sono della forma

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)), \tag{1.2}$$

dove  $y(x)$  è la funzione incognita, che dipende dalla variabile indipendente  $x$ , mentre  $f$  è una funzione nella variabile  $x$  e  $g$  una funzione nella variabile  $y$ . Supponiamo poi che  $f$

sia continua per ogni  $x \in I$  e  $g$  sia continua per ogni  $y \in J$ , dove  $I$  e  $J$  sono due intervalli aperti di  $\mathbb{R}$ . Con le ipotesi fatte, una soluzione  $y(x)$  definita su un sottointervallo  $I'$  di  $I$  dell'equazione differenziale appena scritta dovrà essere almeno derivabile e quindi continua su  $I'$ .

Un'equazione come (1.2) si dice a variabili separabili perché le variabili  $x$  e  $y$  si possono appunto separare, nel senso che cercheremo di mostrare ora.

Innanzitutto scriviamo l'equazione (1.2) come

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

dove abbiamo rimpiazzato  $y(x)$  con  $y$ . Dobbiamo comunque ricordarci sempre che  $y$  è una funzione di  $x$ .

Cerchiamo dapprima eventuali soluzioni costanti dell'EDO risolvendo l'equazione  $g(y) = 0$  e trovando tutti i valori di  $y$  (se esistono) che annullano  $g(y)$ .

Cerchiamo poi eventuali soluzioni non costanti. Per farlo denotiamo  $y'$  con la notazione di Leibniz, scrivendo

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y).$$

Ora si trattano  $dy$  e  $dx$  come numeri, anche se ciò non sarebbe matematicamente corretto. In ogni caso, ottengo

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx,$$

ovvero ho separato le variabili (a sinistra vedo solo  $y$ , a destra vedo solo  $x$ ). Per finire, passo agli integrali

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

che, se risolti, mi permettono di trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

L'insieme di tutte le soluzioni dell'EDO, costanti e non costanti, formano il cosiddetto integrale generale dell'EDO.

### 1.3 Problema di Cauchy per un'equazione differenziale a variabili separabili

Sebbene in generale ci siano infinite soluzioni di un'equazione differenziale, se imponiamo una condizione iniziale la soluzione di un'equazione differenziale a variabili separabili è unica (almeno localmente) quando sono soddisfatte certe ipotesi (il Teorema 1.3.2 fornisce delle condizioni sufficienti per l'unicità). Imporre una condizione iniziale significa dire quanto deve valere la funzione incognita  $y(x)$  per un certo  $x = x_0$ . In un caso come

questo si ha che fare con un cosiddetto problema di Cauchy, ovvero un problema della forma

$$\begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

dove  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  è una funzione della variabile  $x$  definita in un intervallo aperto  $I$  contenente  $x_0$ , mentre  $g(y)$  è una funzione di  $y$  definita in un intervallo aperto  $J$  contenente  $y_0$ .

Risolvere (1.3) significa trovare una funzione  $y(x)$ , definita in un intervallo aperto  $I' \subseteq I$  che contenga  $x_0$ , che sia soluzione dell'equazione differenziale data e tale che  $y(x_0) = y_0$ . L'intervallo  $I'$  più grande contenente  $x_0$ , tale che  $I' \subseteq I$  e che  $g(y(x))$  sia definita per ogni  $x \in I'$ , è detto l'*intervallo massimale di definizione della soluzione*.

Enunciamo intanto un teorema di esistenza locale di una soluzione.

**Teorema 1.3.1** (T. di Peano per l'esistenza di una soluzione locale di un problema di Cauchy in cui l'equazione differenziale è a variabili separabili).

*Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

dove  $f$  è una funzione continua su un intervallo aperto  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $g$  è una funzione continua su un intervallo aperto  $J \subseteq \mathbb{R}$  e  $(x_0, y_0) \in I \times J$ . Allora il problema di Cauchy assegnato ha almeno una soluzione  $y \in \mathcal{C}^1(I')$  definita su un intervallo aperto  $I' \subseteq I$  contenente  $x_0$ .

**Osservazione.** La scrittura  $y \in \mathcal{C}^1(I)$ , dove  $I$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$ , significa che  $y$  è continua e derivabile con derivata continua per ogni  $x \in I$ . Più in generale, se  $k$  è un intero non negativo, la notazione  $\mathcal{C}^k(I)$  dove  $I$  è un intervallo (con o senza gli estremi) denota l'insieme delle funzioni continue e con derivate fino all'ordine  $k$  continue su tutto  $I$ . Per essere ancora più precisi, agli estremi dell'intervallo (se questi sono compresi) si può parlare solo di derivate destra o sinistra. Notiamo inoltre che quando  $k = 0$  l'insieme  $\mathcal{C}^0(I)$  è quello delle funzioni continue su  $I$ .

Il teorema di Peano ci garantisce dunque l'esistenza di una soluzione locale quando opportune ipotesi sono soddisfatte. Tuttavia l'unicità locale della soluzione in generale non è garantita (si veda l'Esempio 1.3.3).

Nel prossimo teorema vediamo due condizioni sufficienti che garantiscono l'unicità locale della soluzione di un problema di Cauchy.

**Teorema 1.3.2** (T. di unicità locale della soluzione di un problema di Cauchy in cui l'equazione differenziale è a variabili separabili).

Supponiamo che tutte le ipotesi del Teorema 1.3.1 siano soddisfatte.

Sia  $\bar{y}(x)$  una soluzione del problema di Cauchy (1.3) definita su  $I' \subseteq I$ .

Tale soluzione è unica su  $I'$  se vale almeno una delle seguenti due condizioni:

- $g(\bar{y}(x)) \neq 0$  per ogni  $x \in I'$ .
- $g(y) \in C^1(J)$ .

**Esempio 1.3.3.** Si può mostrare che il seguente problema di Cauchy ha più soluzioni distinte in un qualunque intervallo  $] -a, a[$  contenente 0:

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

In effetti per questo problema di Cauchy non valgono le ipotesi sufficienti per l'unicità della soluzione del teorema 1.3.2.

## 1.4 Equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine

Si tratta delle equazioni differenziali della forma

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x),$$

dove  $a(x)$  e  $b(x)$  sono funzioni continue definite su un certo intervallo aperto  $I$ . Una soluzione di questa equazione differenziale è una funzione di classe  $C^1(I)$ .

Abbiamo visto che la linearità di tali equazioni è legata alla linearità dell'applicazione

$$\begin{aligned} L : C^1(I) &\rightarrow C^0(I) \\ y(x) &\mapsto y'(x) + a(x) \cdot y(x), \end{aligned}$$

definita dallo spazio vettoriale  $C^1(I)$  allo spazio vettoriale  $C^0(I)$  su  $\mathbb{R}$ .

Per risolvere un'equazione differenziale lineare del primo ordine si moltiplicano entrambi i membri per un fattore integrante, ovvero per

$$e^{A(x)},$$

dove  $A(x)$  è una qualunque primitiva di  $a(x)$ . Così facendo si ha

$$e^{A(x)} \cdot y'(x) + e^{A(x)} a(x) \cdot y(x) = e^{A(x)} b(x),$$

equazione che può essere riscritta come

$$(e^{A(x)} \cdot y(x))' = e^{A(x)} b(x).$$

Integrando si ottiene

$$e^{A(x)} \cdot y(x) = \int e^{A(x)} b(x) dx + C,$$

dove  $C$  è una costante di integrazione.

Enunciamo un teorema di esistenza e unicità per un problema di Cauchy in cui l'equazione differenziale è lineare del primo ordine.

**Teorema 1.4.1** (T. di esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy in cui l'equazione differenziale è lineare del primo ordine).

*Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

dove  $a(x), b(x) \in \mathcal{C}^0(I)$  e  $I$  è un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  che contiene  $x_0$ , mentre  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

*Allora, esiste ed è unica una soluzione  $y(x) \in \mathcal{C}^1(I)$  del problema di Cauchy.*

## 1.5 EDO lineari del secondo ordine

Sono le equazioni differenziali della forma

$$y''(x) + a(x) \cdot y'(x) + b(x) \cdot y(x) = f(x), \quad (1.4)$$

dove  $a(x), b(x), f(x) \in \mathcal{C}^0(I)$ , per qualche intervallo aperto  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Si dicono equazioni lineari perché l'applicazione

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}^2(I) &\rightarrow \mathcal{C}^0(I), \\ y(x) &\mapsto y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) \end{aligned}$$

è lineare.

Anche per queste equazioni vale un teorema di esistenza e unicità, una volta che abbiamo imposto opportune condizioni iniziali.

**Teorema 1.5.1** (T. di esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy in cui l'equazione differenziale è lineare del secondo ordine). *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y''(x) + a(x) \cdot y'(x) + b(x) \cdot y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

dove  $a(x), b(x), f(x) \in \mathcal{C}^0(I)$ , per qualche intervallo aperto  $I \subseteq \mathbb{R}$  con  $x_0 \in I$ , mentre  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ . Allora, esiste ed è unica la soluzione  $y(x) \in \mathcal{C}^2(I)$  del problema di Cauchy.

L'equazione (1.4) può essere scritta in maniera più compatta nella forma  $L(y(x)) = f(x)$ . A tale equazione è associata l'equazione omogenea  $L(y(x)) = 0$ . Le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzione  $y(x) \in \text{Ker}(L)$ , dove  $\text{Ker}(L)$  denota il nucleo dell'applicazione lineare  $L$ . Poiché il nucleo di un'applicazione lineare è sempre uno spazio vettoriale, possiamo concludere che  $\text{Ker}(L)$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{C}^2(I)$ .

Il seguente teorema descrive la struttura generale dell'insieme delle soluzioni dell'equazione  $L(y(x)) = f(x)$ .

**Teorema 1.5.2** (struttura dell'integrale generale di un'EDO lineare del secondo ordine).  
*Vale quanto segue.*

1. Le soluzioni di  $L(y(x)) = 0$  formano uno spazio vettoriale  $V \subseteq \mathcal{C}^2(I)$ . Inoltre  $\dim(V) = 2$ .
2. Le soluzioni di  $L(y(x)) = f(x)$  sono tutte e sole le funzioni della forma

$$y_V(x) + y_P(x),$$

dove  $y_V(x)$  è una soluzione di  $L(y(x)) = 0$ , mentre  $y_P(x)$  è una qualunque soluzione particolare di  $L(y(x)) = f(x)$ .

Non vi sono dei metodi generali per trovare le soluzioni di un'equazione  $L(y(x)) = 0$ , se  $a(x)$  e  $b(x)$  sono funzioni continue qualunque. Tuttavia, se  $a(x)$  e  $b(x)$  sono funzioni costanti, c'è un metodo generale che permette di trovare tutte le soluzioni dell'omogenea. Ricordiamo che per fare ciò è sufficiente trovare due soluzioni linearmente indipendenti di  $L(y(x)) = 0$ , visto che lo spazio delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2.

Come visto a lezione, si possono trovare delle soluzioni di un'equazione omogenea a coefficienti costanti

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$$

nella forma  $y(x) = e^{rx}$ , dove  $r \in \mathbb{C}$ .

### 1.5.1 EDO lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti

Per trovare le soluzioni di

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0,$$

dove  $a, b \in \mathbb{R}$  sono costanti, ci si appoggia all'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Distinguiamo 3 casi, in base al discriminante  $\Delta = a^2 - 4b$ .

- *Caso 1:*  $\Delta > 0$ . In tal caso, vi sono due soluzioni reali distinte  $r_1, r_2$  dell'equazione caratteristica. Lo spazio  $V$  delle soluzioni è

$$V = \{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, \quad y_2(x) = e^{r_2 x}.$$

- *Caso 2:*  $\Delta = 0$ . In tal caso, vi è una soluzione reale di molteplicità algebrica due dell'equazione caratteristica, che denotiamo con  $r$ . Lo spazio  $V$  delle soluzioni è

$$V = \{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$y_1(x) = e^{rx}, \quad y_2(x) = x \cdot y_1(x).$$

- *Caso 3:*  $\Delta < 0$ . In tal caso, vi sono due radici complesse coniugate dell'equazione caratteristica. In particolare, se  $\alpha \pm i\beta$  sono le due radici, allora

$$V = \{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x), \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x).$$

### 1.5.2 Metodo di somiglianza

Ricordiamo che l'integrale generale di un'EDO non necessariamente omogenea della forma

$$L(y(x)) = f(x)$$

si esprime come

$$c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + y_P(x),$$

dove  $y_1(x), y_2(x)$  sono due soluzioni linearmente indipendenti di

$$L(y(x)) = 0,$$

mentre  $y_P(x)$  è una qualunque soluzione particolare di

$$L(y(x)) = f(x).$$

Per trovare  $y_P(x)$  è possibile usare in alcuni casi il cosiddetto metodo di somiglianza, che consiste nel cercare una soluzione particolare somigliante a  $f(x)$ .

Ricordiamo che

$$L(y(x)) = y''(x) + ay'(x) + by(x),$$

dove  $a$  e  $b$  sono due costanti.

Vediamo tre casi.



- *Caso 1:*  $f(x) = p(x)$ , dove  $p(x)$  è un polinomio di grado  $n$ . Allora, cerco una soluzione particolare  $y_P(x)$  in questa forma:

$$y_P(x) = \begin{cases} q(x), & \text{se } b \neq 0, \\ x \cdot q(x), & \text{se } b = 0 \text{ e } a \neq 0, \\ x^2 \cdot q(x), & \text{se } b = a = 0, \end{cases}$$

dove  $q(x)$  è un polinomio di grado  $n$ .

- *Caso 2:*  $f(x) = Ae^{\lambda x}$ , dove  $A, \lambda \in \mathbb{R}$ . Allora, cerco una soluzione particolare  $y_P(x)$  nella forma  $y_P(x) = Ce^{\lambda x}$ , a meno che  $\lambda$  non sia radice dell'equazione caratteristica, ovvero  $Ce^{\lambda x}$  sia soluzione di  $L(y(x)) = 0$ . In questo caso posso riprovare con  $Cxe^{\lambda x}$  o  $Cx^2e^{\lambda x}$ .
- *Caso 3:*  $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ , dove  $A, B, \omega$  sono delle costanti reali. Allora, cerco una soluzione particolare  $y_P(x)$  nella forma

$$y_P(x) = C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x),$$

dove  $C, D$  sono costanti da determinare, mentre  $\omega$  è lo stesso di prima. Ciò funziona a meno che  $a = 0$  e  $i\omega$  non sia soluzione di  $\lambda^2 + b = 0$ , che è l'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale omogenea. In tal caso cerco una soluzione particolare nella forma

$$y_P(x) = Cx\cos(\omega x) + Dx\sin(\omega x).$$



# Capitolo 2

## Lo spazio vettoriale ed euclideo $\mathbb{R}^n$

### 2.1 L'insieme $\mathbb{R}^n$

Fissato un numero intero positivo  $n$ , definiamo  $\mathbb{R}^n$  come l'insieme delle successioni finite e ordinate di  $n$  numeri reali, dette *ennuple*. In altre parole,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ per } 1 \leq i \leq n\}.$$

Gli elementi dell'insieme  $\mathbb{R}^n$  sono detti punti e li denoteremo in genere con delle lettere maiuscole, ad esempio

$$X = (x_1, \dots, x_n).$$

#### 2.1.1 $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale

Sull'insieme  $\mathbb{R}^n$  è possibile definire una struttura di spazio vettoriale. Vediamo cos'è in generale uno spazio vettoriale.

**Spazio vettoriale** Sia  $V$  un insieme contenente almeno un elemento, che denotiamo con  $0$ , e  $\mathbb{K}$  un campo (ad esempio,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{Q}$ ). Supponiamo che sia definita un'operazione di somma su  $V$ , che associa a due elementi  $v, w \in V$  un altro elemento di  $V$  definito come  $v + w$ . Infine supponiamo che sia definita un'operazione di prodotto di elementi del campo per elementi di  $V$ , che associa ad un elemento  $k \in \mathbb{K}$  e ad un elemento  $v \in V$  un elemento di  $V$  definito come  $kv$ . Diciamo che  $V$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  se le seguenti proprietà sono soddisfatte:

- $x + y = y + x$ , per ogni  $x, y \in V$ ;
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ , per ogni  $x, y, z \in V$ ;

- $x + 0 = x$  per ogni  $x \in V$ ;
- $(hk)x = h(kx)$ , per ogni  $h, k \in \mathbb{K}$  e  $x \in V$ ;
- $k(x + y) = kx + ky$ , per ogni  $k \in \mathbb{K}$  e  $x, y \in V$ ;
- $(h + k)x = hx + kx$ , per ogni  $h, k \in \mathbb{K}$  e  $x \in V$ .

Gli elementi di  $V$  sono detti vettori.

$\mathbb{R}^n$ , cioè l'insieme delle ennuple di numeri reali, diventa uno spazio vettoriale se definiamo la somma fra due ennuple qualunque di  $\mathbb{R}^n$  e il prodotto di un numero reale per una ennupla. Quando pensiamo alle ennuple come a dei vettori, si tende a denotarle con una lettera con una freccia sopra.

Per quel che riguarda la somma, se

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (v_1, \dots, v_n), \\ \vec{w} &= (w_1, \dots, w_n)\end{aligned}$$

sono vettori di  $\mathbb{R}^n$ , allora definiamo

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n),$$

mentre il prodotto di un numero reale  $k$  per  $\vec{v}$  come

$$k\vec{v} = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n).$$

### 2.1.2 Rappresentazione geometrica dei vettori di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Un generico vettore  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  in  $\mathbb{R}^2$ , o  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  in  $\mathbb{R}^3$ , si può rappresentare con una freccia orientata che connette l'origine degli assi nel piano cartesiano o nello spazio euclideo tridimensionale con il punto di coordinate  $(v_1, v_2)$  (rispettivamente  $(v_1, v_2, v_3)$ ). La somma di due vettori graficamente si ottiene con la cosiddetta regola del parallelogramma.

Per quel che riguarda la moltiplicazione di un vettore per un numero, ciò corrisponde a costruire un nuovo vettore giacente sulla stessa retta passante per l'origine su cui giaceva il precedente e avente uguale direzione o opposta ed eventualmente diversa lunghezza.

### 2.1.3 $\mathbb{R}^n$ è uno spazio euclideo

In  $\mathbb{R}^n$  è possibile definire le nozioni di ortogonalità e di distanza, rendendo in questo modo  $\mathbb{R}^n$  uno spazio euclideo.

Innanzitutto si introduce un *prodotto scalare* standard fra due vettori nel modo seguente: se

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (v_1, v_2, \dots, v_n), \\ \vec{w} &= (w_1, w_2, \dots, w_n),\end{aligned}$$

allora il prodotto scalare standard fra  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  è

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

Come si può notare dalla definizione, tale prodotto scalare di due vettori è un numero.

Il prodotto scalare fra vettori gode di alcune proprietà:

1. *positività*: se  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , allora  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ;
2. *simmetria*: se  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ , allora  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ ;
3. *bilinearità*: se  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  e  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ , allora

$$\begin{aligned}\langle k_1 \vec{v} + k_2 \vec{w}, \vec{z} \rangle &= k_1 \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle + k_2 \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle; \\ \langle \vec{v}, k_1 \vec{w} + k_2 \vec{z} \rangle &= k_1 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + k_2 \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle.\end{aligned}$$

Il prodotto scalare è legato alla nozione di distanza euclidea. Tutto si basa sulla nozione di norma euclidea.

Se  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ , allora la norma euclidea di  $\vec{v}$  è

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

La notazione  $\|\vec{v}\|$  si legge “norma di  $\vec{v}$ ”.

Se pensiamo al caso  $n = 2$ , ovvero  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ , allora  $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ . Geometricamente,  $\|\vec{v}\|$  misura la distanza del punto di coordinate  $(v_1, v_2)$  da  $O$ .

La norma, come il valore assoluto di un numero reale, gode di alcune proprietà:

1. *positività*:  $\|\vec{v}\| \geq 0$  per ogni  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . Inoltre,  $\|\vec{v}\| = 0$  se e solo se  $\vec{v} = \vec{0}$ ;
2. *omogeneità*:  $\|k \cdot \vec{v}\| = |k| \cdot \|\vec{v}\|$ , per ogni  $k \in \mathbb{R}$  e  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ;
3. *disuguaglianza triangolare*:  $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ , per ogni  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ .

Quest'ultima disuguaglianza si dimostra a partire da un'altra disuguaglianza, la cosiddetta disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Se,  $\vec{v}, \vec{w}$  sono due vettori di  $\mathbb{R}^n$ , allora

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

Il prodotto scalare permette di misurare gli angoli nel piano o nello spazio. Infatti, tramite il teorema del coseno, si può dimostrare che, se  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  sono due vettori bidimensionali o tridimensionali, allora

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\vartheta),$$

dove  $\vartheta$  è l'ampiezza dell'angolo (convesso) compreso fra i due vettori.

In particolare, due vettori sono perpendicolari se e solo se

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0.$$

Se ora prendiamo due punti  $X, Y$  in  $\mathbb{R}^n$ , la distanza euclidea fra di essi è definita come

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\langle X - Y, X - Y \rangle}.$$

Nel caso speciale in cui  $n = 2$ ,

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

ovvero l'usuale distanza fra due punti nel piano.

## 2.2 Topologia in $\mathbb{R}^n$

Su  $\mathbb{R}$  si può definire una topologia, detta topologia euclidea. Tale topologia può essere estesa in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 2.2.1** (Intorno sferico aperto). *Sia  $P$  un punto di  $\mathbb{R}^n$  e  $r$  un numero reale positivo. Definiamo intorno sferico aperto centrato in  $P$  di raggio  $r$  l'insieme*

$$U_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - P\| < r\}.$$

**Definizione 2.2.2** (Intorno). *Un sottoinsieme  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  è un intorno di un punto  $P \in \mathbb{R}^n$  se  $U$  contiene un intorno sferico aperto centrato in  $P$ .*

**Definizione 2.2.3** (Punto interno, esterno, di frontiera). *Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $P$  un punto di  $\mathbb{R}^n$ .*

- *Il punto  $P$  è interno a  $S$  se esiste un intorno  $U_r(P)$  contenuto in  $S$ .*
- *Il punto  $P$  è esterno a  $S$  se esiste un intorno  $U_r(P)$  contenuto in  $\mathbb{R}^n \setminus S$ .*
- *Il punto  $P$  è di frontiera per  $S$  se in qualunque intorno  $U_r(P)$  sono contenuti punti di  $S$  e di  $\mathbb{R}^n \setminus S$ .*

Indichiamo l'insieme dei punti interni, dei punti esterni e dei punti di frontiera di  $S$  rispettivamente con  $\text{Int}(S)$ ,  $\text{Est}(S)$ ,  $\text{Fr}(S)$ .

**Definizione 2.2.4** (Insieme aperto). *Un sottoinsieme  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  è aperto se tutti i suoi punti sono interni.*

**Definizione 2.2.5** (Insieme chiuso). *Un sottoinsieme  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  è chiuso se contiene la sua frontiera. Equivalentemente, un insieme  $S$  è chiuso se  $\mathbb{R}^n \setminus S$  è aperto.*

**Definizione 2.2.6** (Punto di accumulazione). *Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sia poi  $P \in \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $P$  è un punto di accumulazione per l'insieme  $S$  se, per ogni  $U_r(P)$ , si ha che  $U_r(P) \cap (S \setminus \{P\}) \neq \emptyset$ .*

**Definizione 2.2.7** (Punto isolato). *Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sia poi  $P \in S$ . Diciamo che  $P$  è un punto isolato di  $S$  se esiste un intorno  $U_r(P)$  tale che  $U_r(P) \cap S = \{P\}$ .*

Vale il seguente teorema riguardante le unioni e intersezioni di insiemi aperti e chiusi.

**Teorema 2.2.8.**

- *L'unione di una famiglia finita o infinita di insiemi aperti è ancora un insieme aperto.*
- *L'intersezione di una famiglia finita di insiemi aperti è ancora un insieme aperto.*
- *L'unione di una famiglia finita di insiemi chiusi è ancora un insieme chiuso.*
- *L'intersezione di una famiglia finita o infinita di insiemi chiusi è ancora un insieme chiuso.*

**Osservazione.** Si presti attenzione al differente comportamento delle unioni e intersezioni di famiglie di infiniti insiemi aperti/chiusi.

Per finire, diamo le definizioni di insieme limitato e compatto.

**Definizione 2.2.9** (Insieme limitato). *Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $S$  è limitato se esiste un numero  $r > 0$  tale che  $\|X\| \leq r$  per ogni  $X \in S$ .*

**Definizione 2.2.10** (Insieme compatto). *Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $S$  è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*





# Capitolo 3

## Curve in $\mathbb{R}^n$

### 3.1 Archi di curva continui

Definiamo arco di curva continuo una qualunque funzione

$$\begin{aligned}\gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))\end{aligned}$$

in cui le componenti  $\gamma_i(t)$  sono funzioni continue da  $I$ , intervallo di  $\mathbb{R}$ , in  $\mathbb{R}$  per ogni  $1 \leq i \leq n$ .

Più propriamente si dice che l'immagine  $\gamma(I)$  della funzione  $\gamma$  è il sostegno della curva. La funzione  $\gamma$  definita come sopra è anche detta parametrizzazione della curva. La coppia data dalla funzione  $\gamma$  e dalla sua immagine è un arco di curva continuo.

**Definizione 3.1.1** (Curva semplice).

*Una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è semplice se, per ogni scelta di  $t_1, t_2$  in  $I$  con  $t_1 \neq t_2$  e almeno uno fra  $t_1$  e  $t_2$  interno a  $I$ , si ha che  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ .*

**Definizione 3.1.2** (Curva chiusa).

*Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è chiusa se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .*

Se le componenti  $\gamma_i(t)$  della parametrizzazione  $\gamma$  sono derivabili in un certo  $t_0 \in I$ , possiamo definire il vettore derivato

$$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0)).$$

Il vettore  $\gamma'(t_0)$  è un vettore tangente alla curva nel punto  $\gamma(t_0)$ . Tale vettore ci permette di definire una parametrizzazione della retta tangente alla curva  $\gamma$  in  $\gamma(t_0)$ , ovvero la retta data dalla parametrizzazione

$$\begin{aligned}r : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto r(t) = \gamma(t_0) + t\gamma'(t_0).\end{aligned}$$

In realtà il ragionamento sopra funziona purché il vettore derivato non sia nullo. Se  $\gamma'(t_0) = (0, 0, \dots, 0)$ , allora siamo in presenza di un punto singolare per la curva.

## 3.2 Lunghezza di una curva in $\mathbb{R}^n$

Consideriamo un arco di curva continuo definito come

$$\begin{aligned}\gamma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)),\end{aligned}$$

dove le funzioni  $\gamma_i$  sono continue su  $[a, b]$ . Vorremmo calcolare la lunghezza di tale curva. Possiamo approssimare tale curva tramite curve poligonali. Per farlo, consideriamo una partizione

$$\sigma = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$$

dell'intervallo  $[a, b]$  tale che

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b.$$

Uniamo quindi ogni punto  $\gamma(t_i)$  con il successivo  $\gamma(t_{i+1})$  e chiamiamo la curva poligonale ottenuta  $\mathcal{P}_\sigma$ . La lunghezza  $l(\mathcal{P}_\sigma)$  si ottiene sommando le lunghezze degli  $m$  segmenti, ovvero

$$l(\mathcal{P}_\sigma) = \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|.$$

Ovviamente, al variare della partizione  $\sigma$  la lunghezza  $l(\mathcal{P}_\sigma)$  varierà. Possiamo definire la lunghezza di  $\gamma$  come il

$$\sup_{\sigma} \{l(\mathcal{P}_\sigma)\},$$

ovvero l'estremo superiore delle lunghezze di tutte le poligonali che possiamo ottenere al variare della partizione  $\sigma$  di  $[a, b]$ . Esistono esempi di archi di curva continui di lunghezza finita, ma anche esempi di archi di curva continui di lunghezza infinita, pur assumendo che  $\gamma$  sia un arco di curva continuo parametrizzato su un intervallo chiuso e limitato.

Una famiglia di curve per le quali la lunghezza è finita è quella delle curve regolari.

**Definizione 3.2.1.** *Sia  $\gamma$  una funzione definita su un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ , ovvero*

$$\begin{aligned}\gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)).\end{aligned}$$

Supponiamo che ogni  $\gamma_i(t)$  sia continua su  $I$  e derivabile su  $I$  con derivata continua, cioè  $\gamma_i \in \mathcal{C}^1(I)$ , per ogni  $i$  tale che  $1 \leq i \leq n$ . Supponiamo inoltre che  $\gamma'(t) \neq \vec{0}$  per ogni  $t \in I$ , dove

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)).$$

Diciamo che una tale  $\gamma$  è un arco di curva regolare definito su  $I$ .

Vale il seguente teorema.

**Teorema 3.2.2.** *Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regolare. Allora, la lunghezza  $l(\gamma)$  di  $\gamma$  è finita e vale*

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$



# Capitolo 4

## Funzioni di più variabili

### 4.1 Introduzione

Diamo la definizione di funzione di più variabili.

**Definizione 4.1.1.** *Una funzione  $f : A \rightarrow B$  dove  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $B \subseteq \mathbb{R}$  è una legge che associa ad ogni punto  $(x_1, \dots, x_n) \in A$  esattamente un valore  $f(x_1, \dots, x_n) \in B$ . L'insieme  $A$  è detto dominio di  $f$ , mentre  $B$  è il codominio di  $f$ .*

#### 4.1.1 Dominio di una funzione di più variabili

Usualmente di una funzione  $f$  qualunque, in una o più variabili, si conosce il dominio. Se una funzione di  $n$  variabili viene descritta tramite un'espressione analitica senza specificarne il dominio, allora si assume che il dominio di  $f$  sia il più grande sottoinsieme  $D$  di  $\mathbb{R}^n$  tale che l'espressione  $f(x_1, \dots, x_n)$  abbia senso per ogni  $(x_1, \dots, x_n) \in D$ .

Le regole che dobbiamo seguire per determinare il dominio di una funzione sono le solite che si seguivano con funzioni in una variabile. Possiamo sintetizzarle così:

- se nella definizione analitica di  $f$  compare un denominatore, allora bisogna accertarsi che questo non si annulli;
- se compare una funzione logaritmica, allora dobbiamo controllare che l'argomento del logaritmo sia positivo;
- se compare una radice quadrata (o comunque di indice pari), allora dobbiamo controllare che l'argomento della radice non sia negativo.

### 4.1.2 Curve di livello

Disegnare il grafico di una funzione di due variabili non è molto agevole. Per questo motivo, spesso non si rappresenta tanto il grafico di una funzione di due variabili, quanto le sue curve di livello.

**Definizione 4.1.2** (Curva di livello). *Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f$  una funzione definita su  $D$ . Sia  $c \in \mathbb{R}$ . Allora chiamiamo curva di livello  $c$  della funzione  $f$  l'insieme*

$$L_c(f) = \{(x, y) \in D : f(x, y) = c\}.$$

Geometricamente, la curva di livello  $c$  di una funzione  $f$  è la curva che si ottiene proiettando ortogonalmente sul piano  $xy$  la sezione del grafico di  $f$  con il piano di equazione  $z = c$ .

**Esempio 4.1.3.** Sia  $f(x, y) = x^2 + y^2$  una funzione di due variabili definita per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . La curva di livello 1 di tale funzione corrisponde all'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tali che

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Quest'ultima equazione descrive i punti che si trovano su una circonferenza di raggio 1 centrata in  $(0, 0)$ .

Il grafico della funzione dell'esempio precedente è un paraboloide ellittico. Allargando un po' il discorso si ottiene un paraboloide ellittico ogni volta che si prende il grafico di una funzione

$$f(x, y) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + c,$$

dove  $a, b$  sono due numeri reali (positivi), mentre  $c$  è un qualunque numero reale. Tale paraboloide ellittico ha vertice in  $(x_0, y_0, c)$  e ha concavità rivolta verso l'alto.

Analogamente, il grafico di

$$f(x, y) = -\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + c,$$

dove  $a, b$  sono due numeri reali (positivi) e  $c$  è un qualunque numero reale è un paraboloide ellittico con vertice in  $(x_0, y_0, c)$  e concavità rivolta verso il basso.

La sezione di un paraboloide ellittico con un piano parallelo al piano  $xy$  è un'ellisse (o l'insieme vuoto), mentre la sezione di un tale paraboloide con un piano perpendicolare al piano  $xy$  è una parabola.

Di una certa importanza per il nostro corso sono anche i paraboloidi iperbolici. Si ottiene un paraboloide iperbolico ogni volta che si prende il grafico di una funzione

$$f(x, y) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + c,$$

o il grafico di

$$f(x, y) = -\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + c,$$

dove  $a, b$  sono due numeri reali (positivi), mentre  $c$  è un qualunque numero reale. Il punto  $(x_0, y_0, c)$  è il punto di sella del paraboloide iperbolico. Questo punto avrà un certo interesse quando parleremo di ottimizzazione per funzioni di più variabili.

La sezione di un paraboloide iperbolico con un piano parallelo al piano  $xy$  è un'iperbole o una coppia di rette, mentre la sezione di un tale paraboloide con un piano perpendicolare al piano  $xy$  è una parabola o una retta.

Prima di proseguire facciamo un breve ripasso sulla teoria analitica delle coniche che può tornarci utile nella rappresentazione di alcune curve di livello.

### 4.1.3 Coniche

Una conica, o sezione conica, è la curva che si ottiene intersecando un cono circolare retto con un piano. Come si vede nella figura qui sotto (fonte: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Conic\\_sections\\_with\\_plane.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Conic_sections_with_plane.svg)), la posizione del piano rispetto al cono determina il tipo di conica. Le coniche non degeneri sono:

1. la parabola;
2. l'ellisse (che come caso particolare include la circonferenza);
3. l'iperbole.

Vi sono poi le coniche degeneri:

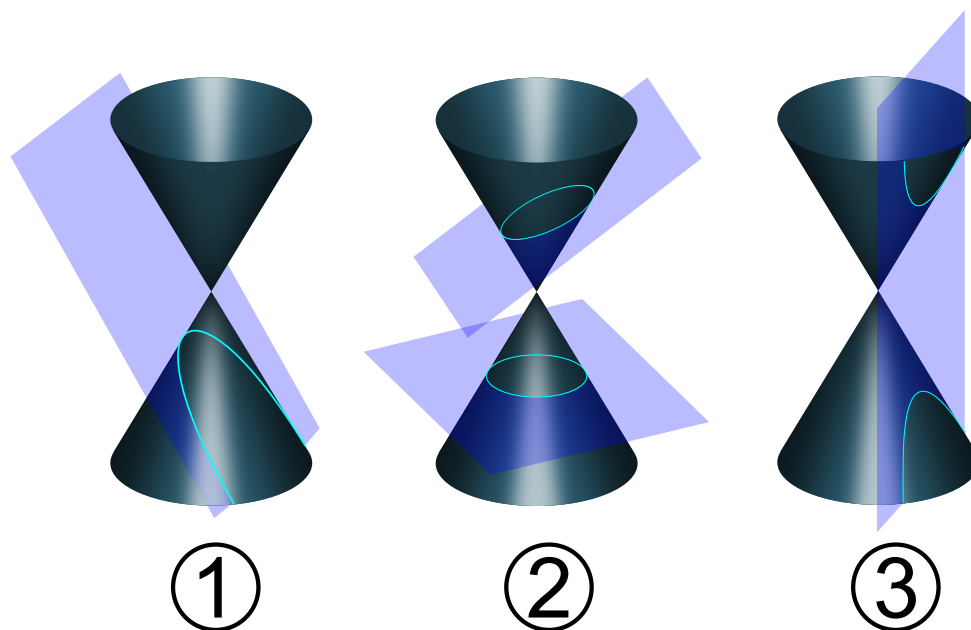
1. una coppia di rette;
2. una retta;
3. un punto.

Dal punto di vista analitico le coniche sono i luoghi geometrici dei punti del piano che soddisfano un'equazione quadratica nelle variabili  $x$  e  $y$  della forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Nel seguito vedremo nel dettaglio come classificare una conica la cui equazione è della forma appena scritta.

Figura 4.1: Sezioni coniche.



#### 4.1.4 Parabole con asse di simmetria parallelo all'asse delle $x$

Conosciamo da tempo le parabole con asse di simmetria parallelo all'asse delle  $y$ . Una facile variazione è data dalle parabole con asse di simmetria parallelo all'asse delle  $x$ . Tali curve sono descrivibili da un'equazione della forma

$$x = ay^2 + by + c.$$

In tal caso il vertice è il punto  $V = (x_V, y_V)$  tale che  $y_V = -\frac{b}{2a}$  e  $x_V$  ricavabile dall'equazione della parabola.

#### 4.1.5 Circonferenze

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da uno stesso punto, detto centro. Sia dunque  $C = (x_C, y_C)$  il centro della nostra circonferenza. Sia poi  $r$  un numero reale positivo.

Se  $(x, y)$  è il generico punto della circonferenza, tale punto deve essere a distanza  $r$  dal centro, ovvero

$$r = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2}.$$

Quella che abbiamo scritto è proprio l'equazione della circonferenza centrata in  $C$  di raggio  $r$ . In realtà, si preferisce di solito scrivere l'equazione della circonferenza senza radice quadrata. In effetti l'equazione appena scritta è del tutto equivalente alla seguente:



$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2.$$

### 4.1.6 Ellissi

Intuitivamente possiamo dire che un'ellisse è una circonferenza dilatata. L'equazione generale di un'ellisse con centro di simmetria nel punto  $C = (x_C, y_C)$  e assi paralleli agli assi cartesiani è

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1,$$

dove  $a, b$  sono due numeri reali positivi che rappresentano rispettivamente la lunghezza del semiasse parallelo all'asse delle  $x$  e del semiasse parallelo all'asse delle  $y$ .

I vertici dell'ellisse sono i 4 punti di coordinate

$$(x_C + a, y_C); \quad (x_C - a, y_C); \quad (x_C, y_C + b); \quad (x_C, y_C - b).$$

Notiamo che tali punti si ottengono intersecando l'ellisse prima con la retta orizzontale e poi con la retta verticale passanti per il centro  $C$ , ovvero intersecando l'ellisse con le rette di equazione  $y = y_C$  e  $x = x_C$ .

### 4.1.7 Iperboli

#### Iperbole con asse trasversale parallelo all'asse delle $x$

L'equazione generale di un'iperbole centrata in un punto  $C = (x_C, y_C)$  e con asse trasversale parallelo all'asse  $x$  è

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

- I vertici sono i punti

$$(x_C + a, y_C), \quad (x_C - a, y_C),$$

ovvero i punti che si ottengono intersecando l'iperbole con la retta orizzontale di equazione  $y = y_C$ .

- Gli asintoti dell'iperbole sono le rette di equazione

$$y = \pm \frac{b}{a}(x - x_C) + y_C.$$

- Se  $a = b$  l'iperbole si dice equilatera.

### **Iperbole con asse trasversale parallelo all'asse delle $y$**

L'equazione generale di un'iperbole centrata in un punto  $C = (x_C, y_C)$  e con asse trasversale parallelo all'asse  $y$  è

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = -1.$$

- I vertici sono i punti

$$(x_C, y_C + b), \quad (x_C, y_C - b),$$

ovvero i punti che si ottengono intersecando l'iperbole con la retta verticale di equazione  $x = x_C$ .

- Gli asintoti dell'iperbole sono le rette di equazione

$$y = \pm \frac{b}{a}(x - x_C) + y_C.$$

- Se  $a = b$  l'iperbole si dice equilatera.

### **Iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi cartesiani**

L'equazione di un'iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi cartesiani e centrata nel punto  $C = (x_C, y_C)$  è

$$(x - x_C)(y - y_C) = k, \quad \text{per } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Gli asintoti di una tale iperbole sono le rette di equazione

$$x = x_C, \quad y = y_C.$$

Anche il grafico di una funzione omografica

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

è rappresentato da un'iperbole equilatera traslata, qualora  $ad - bc \neq 0$  e  $c \neq 0$ . In particolare il centro di questa iperbole è

$$C = \left( -\frac{d}{c}, \frac{a}{c} \right)$$

e gli asintoti sono le rette

$$x = -\frac{d}{c}, \quad y = \frac{a}{c}.$$

### 4.1.8 Classificazione delle coniche

Il problema che vogliamo affrontare è quello di riconoscere una conica la cui equazione viene data nella forma

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0, \quad (4.1)$$

dove  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ .

Il nostro obiettivo è quello di ricondurre l'equazione data a una di quelle viste in precedenza. Per fare questo il metodo che usiamo è quello del completamento del quadrato. Inoltre possiamo usare alcuni accorgimenti che scriviamo qui sotto.

- Condizione necessaria affinché una curva di equazione (4.1) sia una circonferenza è che  $a = b$ . Attenzione: quello che sto dicendo è che se  $a \neq b$  l'equazione data non può rappresentare una circonferenza. Se invece  $a = b$  allora l'equazione *potrebbe* rappresentare una circonferenza. Quindi  $2x^2 + 3y^2 = 1$  non può essere l'equazione di una circonferenza. Invece  $2x^2 + 2y^2 + 1 = 0$  potrebbe essere l'equazione di una circonferenza. Ma lo è veramente? No! Infatti,  $2x^2 + 2y^2 + 1 > 0$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$ . Quindi non vi è alcun punto  $(x, y)$  che soddisfa l'equazione data.
- Se in (4.1)  $a = 0$  oppure  $b = 0$ , allora l'equazione data non può rappresentare un'ellisse o un'iperbole, perché nell'equazione di un'ellisse e di un'iperbole compaiono sempre entrambi i termini quadratici, ovvero compaiono sia  $x^2$  che  $y^2$ .

**Esempio 4.1.4.** Si classifichi e si disegni la curva di equazione:

$$y^2 + 3x - x^2 + 4 = 0.$$

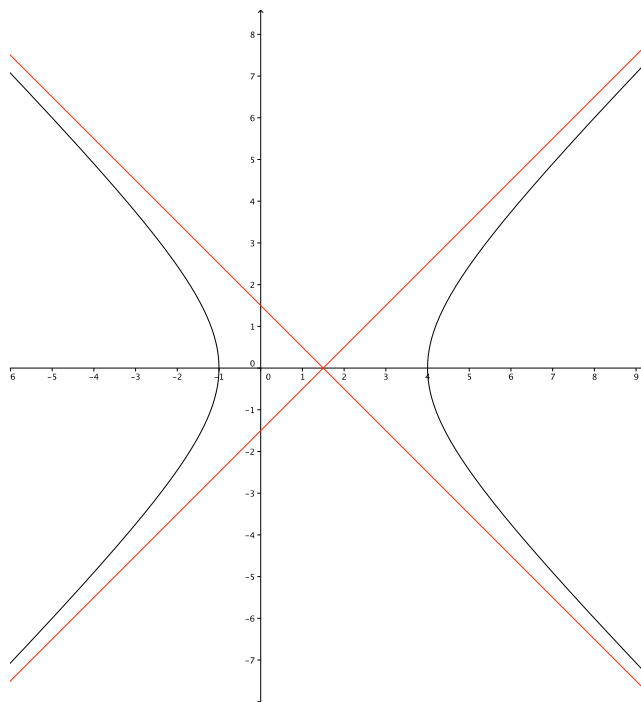
Cerchiamo di ricondurre l'equazione data a qualcosa di più familiare. Per fare ciò, completiamo il quadrato in  $3x - x^2$ .

$$y^2 + 3 \cdot x - x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 3x) + y^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} + y^2 = -4.$$

Quindi l'equazione è equivalente a

$$\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}} - \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1.$$

I punti  $(x, y)$  di  $\mathbb{R}^2$  che verificano l'equazione sopra sono i punti di un'iperbole centrata in  $C = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ , con asse trasversale parallelo all'asse delle  $x$  e vertici nei punti  $(4, 0)$  e  $(-1, 0)$  e avente come asintoti le rette  $y = \pm \left(x - \frac{3}{2}\right)$ . Iperbole e asintoti sono qui rappresentati, rispettivamente in nero e rosso.



## 4.2 Limiti per funzioni di più variabili

In questa sezione vogliamo definire il concetto di limite (finito al finito) per una funzione di più variabili reali. Come vedremo tale definizione ricalca quella per le funzioni in una variabile.

**Definizione 4.2.1** (Limite).

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e sia  $P$  un punto di accumulazione per  $D$ . Sia  $f$  una funzione definita su  $D$ . Allora

$$\lim_{X \rightarrow P} f(X) = l \in \mathbb{R}$$

se, per ogni  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$ , esiste un  $U_\delta(P)$  tale che  $|f(X) - l| < \varepsilon$  per ogni  $X \in U_\delta(P) \setminus \{P\}$  tale che  $X \in D$ .

Il limite di una funzione in un punto di accumulazione per il suo dominio non sempre esiste. Se però esiste, tale limite è unico.

**Teorema 4.2.2** (T. di unicità del limite).

Sia  $f(X)$  una funzione in  $X = (x_1, \dots, x_n)$  definita per ogni  $X \in U \setminus \{P\}$ , dove  $P \in \mathbb{R}^n$ , mentre  $U$  è un intorno di  $P$ . Se esiste  $\lim_{X \rightarrow P} f(X) \in \mathbb{R}$ , allora tale limite è unico.

Valgono inoltre i teoremi seguenti, che generalizzano i corrispondenti teoremi validi per le funzioni di una variabile.

**Teorema 4.2.3** (Algebra dei limiti).

Siano  $f(X)$  e  $g(X)$  due funzioni in  $X = (x_1, \dots, x_n)$  definite per ogni  $X \in U \setminus \{P\}$ , dove  $P \in \mathbb{R}^n$ , mentre  $U$  è un intorno di  $P$ . Se

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow P} f(X) &= l \in \mathbb{R}, \\ \lim_{X \rightarrow P} g(X) &= m \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

allora

- $\lim_{X \rightarrow P} (f(X) + g(X)) = l + m;$
- $\lim_{X \rightarrow P} (f(X) \cdot g(X)) = l \cdot m;$
- $\lim_{X \rightarrow P} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{l}{m},$  purché  $m \neq 0$ .

**Teorema 4.2.4** (T. della permanenza del segno).

Sia  $f(X)$  una funzione in  $X = (x_1, \dots, x_n)$  definita per ogni  $X \in U \setminus \{P\}$ , dove  $P \in \mathbb{R}^n$ , mentre  $U$  è un intorno di  $P$ . Se

$$\lim_{X \rightarrow P} f(X) = l \in \mathbb{R}^*,$$

allora esiste un intorno  $U' \subseteq U$  di  $P$  tale che  $f(X)$  abbia lo stesso segno di  $l$  per ogni  $X \in U' \setminus \{P\}$ .

**Teorema 4.2.5** (T. del confronto).

Siano  $f(X)$ ,  $g(X)$  e  $h(X)$  tre funzioni in  $X = (x_1, \dots, x_n)$  definite per ogni  $X \in U \setminus \{P\}$ , dove  $P \in \mathbb{R}^n$ , mentre  $U$  è un intorno di  $P$ . Se

$$f(X) \leq g(X) \leq h(X)$$

per ogni  $X \in U \setminus \{P\}$  e se

$$\lim_{X \rightarrow P} f(X) = \lim_{X \rightarrow P} h(X) = l \in \mathbb{R},$$

allora  $\lim_{X \rightarrow P} g(X) = l$ .

Per dimostrare l'esistenza del limite dobbiamo basarci sulla definizione di limite e quindi trovare quegli  $\varepsilon$ ,  $\delta$  citati nella definizione. A volte ci viene in aiuto il teorema del confronto.

Per dimostrare la non-esistenza del limite di una funzione  $f(X)$  in un punto  $P$  invece ci basta studiare il comportamento della funzione all'avvicinarsi al punto  $P$  lungo direzioni diverse. Se avvicinandosi lungo due direzioni diverse i valori della funzione tendono a due valori diversi siamo sicuri che il limite non esiste.

### 4.2.1 Funzioni continue

Diamo la definizione di continuità in più variabili.

**Definizione 4.2.6** (Continuità in un punto).

Sia  $f(X)$  una funzione in  $X = (x_1, \dots, x_n)$  definita su  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sia  $P \in D$ . Allora,  $f$  è continua in  $P$  se vale una delle seguenti condizioni:

- $P$  è un punto isolato di  $D$ ;
- $P$  è un punto di accumulazione di  $D$  e  $\lim_{X \rightarrow P} f(X) = f(P)$ .

Grazie a quanto detto sull'algebra dei limiti, la somma, differenza, prodotto e quoziente di due funzioni  $f(X)$  e  $g(X)$  continue in punto di accumulazione per il dominio di entrambe è ancora una funzione continua. Inoltre, se  $f(X)$  è continua in  $P \in \mathbb{R}^n$  e  $g(y)$  è continua in  $f(P)$ , allora è continua in  $P$  pure la funzione composta  $g \circ f$ .

Le funzioni continue in una variabile rimangono continue viste come funzioni di più variabili. Ad esempio, la funzione  $\sin(x)$  è continua per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Se pongo

$$f(x, y) = \sin(x)$$

per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  sto definendo una funzione di due variabili, il cui grafico è una superficie nello spazio tridimensionale (si provi a visualizzarne il grafico usando un qualunque programma che rappresenti grafici di funzioni di due variabili). Ebbene, tale

funzione è continua vista come funzione di due variabili. Ovviamente è continua anche la funzione

$$f(x, y) = \sin(y)$$

per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ( $\sin(y)$  è sempre una funzione di una variabile, in questo caso  $y$ ). Ma allora è continua anche

$$h(x, y) = \sin(x) + \sin(y).$$

Per ragioni analoghe, la funzione

$$l(x, y) = \ln(x)$$

è continua in ogni  $(x, y) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ .

Le funzioni continue sono dunque funzioni il cui calcolo del limite è immediato. Restano ovviamente dei problemi in casi in cui si voglia ad esempio studiare la continuità di funzioni come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mentre la continuità in tutti i punti di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  è immediata, trattandosi di una funzione definita tramite il quoziente di funzioni polinomiali, in  $(0, 0)$  la continuità va verificata con la definizione. Per inciso, la funzione  $f$  non è continua in  $(0, 0)$ .

### 4.2.2 Calcolo dei limiti in 2 variabili attraverso coordinate polari

Talvolta risulta più semplice calcolare il limite di una funzione di 2 variabili reali passando dalle coordinate cartesiane (dette anche rettangolari) a quelle polari.

Se  $P_0 = (x_0, y_0)$  è un qualunque punto del piano e  $P = (x, y)$  è un qualunque altro punto (notate che qui stiamo usando coordinate cartesiane), allora possiamo esprimere  $x$  e  $y$  in funzione della distanza  $\rho \geq 0$  di  $P$  da  $P_0$  e dell'ampiezza  $\vartheta$  dell'angolo formato dal segmento  $\overline{P_0 P}$  con la semiretta orizzontale  $y = y_0$  formata da tutti i punti  $(x, y_0)$  con  $x > x_0$ . In formule,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \rho \cos(\vartheta); \\ y &= y_0 + \rho \sin(\vartheta). \end{aligned}$$

La definizione di limite vista, nel caso specifico di una funzione  $f(x, y)$  di due variabili reali, è: il limite di  $f(x, y)$  per  $(x, y)$  che tende a  $(x_0, y_0)$  è  $l \in \mathbb{R}$  se, preso un qualunque  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $|f(x, y) - l| < \varepsilon$  per  $(x, y)$  tale che  $0 < \|(x - x_0, y - y_0)\| < \delta$  (a voler essere precisi dovremmo anche specificare che ogni  $(x, y)$  deve appartenere al

dominio di  $f$ ). Traducendo il tutto in coordinate polari, la definizione diventa: il limite di  $f(x, y)$  per  $(x, y)$  che tende a  $(x_0, y_0)$  è  $l \in \mathbb{R}$  se, preso un qualunque  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $|f(\rho, \vartheta) - l| < \varepsilon$  per ogni  $\rho$  tale che  $0 < \rho < \delta$ . Detto in altre parole, vogliamo che  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(\rho, \vartheta) = l$ , indipendentemente dal valore di  $\vartheta$ .

Nel calcolo di limiti tramite coordinate polari è molto utile il seguente teorema.

**Teorema 4.2.7.** *Sia  $f(x, y)$  una funzione definita in un intorno di un punto  $(x_0, y_0)$  eccetto al più in  $(x_0, y_0)$ .*

*Supponiamo che esista una funzione  $g(\rho)$  definita per ogni  $\rho \in ]0, \bar{\rho}_0[$ , dove  $\bar{\rho}_0 \in ]0, +\infty[$ . Supponiamo che  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho) = 0$ .*

*Se*

$$|f(\rho, \vartheta) - l| \leq g(\rho),$$

*dove  $l \in \mathbb{R}$ , per ogni  $(\rho, \vartheta)$  con  $\rho < \rho_0$  per il quale  $f(\rho, \vartheta)$  sia definita, allora il*

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l.$$

### 4.2.3 Alcuni teoremi sulle funzioni continue

Il seguente teorema ci permette di classificare facilmente alcuni sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  come aperti o chiusi.

**Teorema 4.2.8** (Insiemi aperti e chiusi definiti tramite funzioni continue).

- *Sia  $f(X)$  una funzione continua su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Allora sono aperti gli insiemi*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{X \in A : f(X) > 0\}; \\ A_2 &= \{X \in A : f(X) < 0\}; \\ A_3 &= \{X \in A : f(X) \neq 0\}. \end{aligned}$$

- *Sia  $f(X)$  una funzione continua su un chiuso  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Allora sono chiusi gli insiemi*

$$\begin{aligned} C_1 &= \{X \in C : f(X) \geq 0\}; \\ C_2 &= \{X \in C : f(X) \leq 0\}; \\ C_3 &= \{X \in C : f(X) = 0\}. \end{aligned}$$

Vediamo ora una definizione che estende quanto già fatto sulla topologia.



**Definizione 4.2.9** (Insieme connesso per archi). *Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $E$  è connesso per archi se, presa una qualunque coppia di punti  $P$  e  $Q$  in  $E$ , esiste un arco di curva continuo  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\gamma(a) = P$ ,  $\gamma(b) = Q$  e  $\gamma(t) \in E$  per ogni  $t \in [a, b]$ .*

Alcuni esempi di insiemi connessi che ci capiterà di incontrare sono i seguenti:

- $\mathbb{R}^n$ ;
- ogni arco di curva continuo;
- le 2 regioni in cui è suddiviso il piano da una parabola, ellisse, circonferenza o retta;
- le 3 regioni in cui è suddiviso il piano dai 2 rami di un'iperbole.

Con le nozioni fin qui esposte possiamo enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per funzioni di più variabili.

**Teorema 4.2.10** (T. degli zeri). *Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme connesso per archi. Sia  $f$  una funzione definita su  $E$  a valori reali. Supponiamo che  $f$  sia continua su  $E$ . Siano  $P$  e  $Q$  due punti di  $E$  tali che  $f(P) < 0$  e  $f(Q) > 0$ . Allora lungo ogni arco di curva continuo che congiunge  $P$  con  $Q$  in  $E$  c'è almeno un punto  $R$  tale che  $f(R) = 0$ .*



# Capitolo 5

## Derivate parziali, direzionali e differenziabilità

### 5.1 Derivate parziali

Se  $f(x_1, \dots, x_n)$  è una funzione di  $n$  variabili, allora la derivata parziale  $f'_{x_i}$  del primo ordine di  $f$  rispetto alla variabile  $x_i$ , per un fissato indice  $i$  fra 1 e  $n$ , è la derivata ordinaria di  $f$  rispetto alla variabile  $x_i$ , considerando le rimanenti  $n - 1$  variabili come costanti.

Ad esempio, se considero la funzione  $f(x, y) = e^{x+y^2}$ , ho due derivate parziali del primo ordine, ovvero

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= e^{x+y^2}; \\f'_y(x, y) &= e^{x+y^2} \cdot 2y.\end{aligned}$$

Vediamo ora la definizione formale.

**Definizione 5.1.1** (Derivate parziali). *Sia  $f(X)$  una funzione definita in un intorno di un punto  $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ . La derivata parziale  $i$ -esima di  $f$  in  $P$  rispetto alla variabile  $x_i$ , dove  $1 \leq i \leq n$ , è il*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\vec{e}_i) - f(P)}{h},$$

*purché questo limite esista e sia finito ( $h$  è un numero reale, mentre  $\vec{e}_i$  è l' $i$ -esimo vettore della base canonica).*

*Denotiamo tale derivata con  $f'_{x_i}(P)$  o con  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$ .*

## 5.2 Interpretazione geometrica delle derivate parziali (in 2 variabili)

Consideriamo una funzione  $f(x, y)$  derivabile parzialmente in un punto  $(x_0, y_0)$  interno al suo dominio.

La derivata parziale  $f'_x(x_0, y_0)$  rappresenta il coefficiente angolare della retta  $r_1$  tangente alla curva ottenuta sezionando il grafico di  $f$  rispetto al piano  $y = y_0$  nel punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , dove  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . In particolare le equazioni cartesiane di tale retta sono

$$\begin{cases} z = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + z_0 \\ y = y_0. \end{cases}$$

Analogamente, la derivata parziale  $f'_y(x_0, y_0)$  rappresenta il coefficiente angolare della retta  $r_2$  tangente alla curva ottenuta sezionando il grafico di  $f$  rispetto al piano  $x = x_0$  nel punto  $(x_0, y_0, z_0)$ . In particolare le equazioni cartesiane di tale retta sono

$$\begin{cases} z = f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + z_0 \\ x = x_0. \end{cases}$$

La derivata di una funzione  $f$  di una variabile reale in un punto  $x_0$  definiva il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ . Con le funzioni di più variabili le cose sono simili, anche se dobbiamo fare delle precisazioni.

Se  $f(x, y)$  è una funzione di due variabili reali definita nell'intorno di un punto  $P = (x_0, y_0)$  ed esistono le due derivate parziali di  $f$  rispetto a  $x$  e a  $y$ , allora possiamo definire il polinomio di Taylor del primo ordine  $T_{1,P}(x, y)$  relativo a  $f$  centrato in  $P$  come il polinomio

$$T_{1,P}(x, y) = z_0 + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Notiamo che tale polinomio, visto come funzione polinomiale nelle variabili  $x$  e  $y$ , è definito per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Quello che possiamo chiederci è se tale polinomio approssimi bene la funzione di partenza  $f$  vicino al punto  $(x_0, y_0)$ , visto che in una variabile la cosa era vera. Purtroppo in più variabili la sola esistenza delle derivate parziali non assicura che il polinomio  $T_{1,P}(x, y)$  sia una buona approssimazione. Abbiamo visto ad esempio che la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ha entrambe le derivate parziali del primo ordine in  $(0, 0)$ , pur non essendo continua in  $(0, 0)$ . Quindi, l'esistenza delle sole derivate parziali non assicura la continuità. Del resto, il polinomio di Taylor di ordine 1 centrato in  $(0, 0)$  sarebbe

$$T_{1,P}(x, y) = 0.$$

Tale polinomio non approssima bene la funzione  $f$  in alcun intorno di  $(0,0)$  in quanto se mi avvicino a  $(0,0)$  lungo la retta  $x = y$  nel piano  $xy$  noto che la funzione vale costantemente  $\frac{1}{2}$ .

## 5.3 Differenziabilità

Se una funzione  $f(x_1, \dots, x_n)$  è derivabile in un punto  $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  possiamo definirne il suo gradiente in  $P$  come il vettore

$$\nabla f(P) = (f'_{x_1}(P), \dots, f'_{x_n}(P)).$$

Possiamo quindi definire il polinomio di Taylor di ordine 1 centrato in  $P$  relativo alla funzione  $f$ :

$$T_{1,P}(x_1, \dots, x_n) = f(P) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(P) \cdot (x_i - p_i) = f(P) + \langle \nabla f(P), X - P \rangle.$$

Diamo la seguente

**Definizione 5.3.1.** *Una funzione  $f$  è differenziabile in un punto  $P \in \mathbb{R}^n$  interno al suo dominio se esistono le  $n$  derivate parziali di  $f$  in  $P$  e*

$$\lim_{X \rightarrow P} \frac{f(X) - T_{1,P}(X)}{\|X - P\|} = 0.$$

Una funzione differenziabile è necessariamente continua. Infatti vale il seguente

**Teorema 5.3.2.** *Sia  $f$  differenziabile in un punto  $P \in \mathbb{R}^n$ . Allora  $f$  è continua in  $P$ .*

Valgono le seguenti relazioni fra differenziabilità, continuità ed esistenza delle derivate parziali:

- se una funzione  $f$  è differenziabile in  $P \in \mathbb{R}^n$ , allora è necessariamente continua in  $P$  e sono definite le derivate parziali del primo ordine in  $P$ ;
- la sola continuità o l'esistenza delle derivate parziali non garantiscono la differenziabilità;
- la sola esistenza delle derivate parziali non garantisce la differenziabilità, né la continuità.

Vale inoltre il seguente teorema.

**Teorema 5.3.3** (Condizione sufficiente di differenziabilità).

*Sia  $f$  una funzione di  $n$  variabili definita in un intorno di un punto  $P \in \mathbb{R}^n$  e avente le derivate parziali in tale intorno. Se le  $n$  derivate parziali di  $f$  sono continue in  $P$ , allora  $f$  è differenziabile in  $P$ .*

**Osservazione.** La condizione del teorema precedente è solo sufficiente.

### 5.3.1 Iperpiano tangente

Se una funzione  $f$  è differenziabile in  $P \in \mathbb{R}^n$ , allora l'equazione

$$x_{n+1} = T_{1,P}(x_1, \dots, x_n),$$

dove  $T_{1,P}(x_1, \dots, x_n)$  è il polinomio di Taylor di ordine 1 relativo a  $f$  centrato in  $P$ , definisce l'iperpiano tangente al grafico di  $f$  in  $(P, f(P))$ . Nel caso di funzioni di 2 variabili diremo semplicemente che quella scritta è l'equazione del piano tangente.

## 5.4 Derivate direzionali

Diamo la seguente definizione.

**Definizione 5.4.1** (Derivate direzionali).

*Sia  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  un vettore di norma 1, cioè un versore. Se  $f$  è una funzione di  $n$  variabili definita in un intorno di un punto  $P \in \mathbb{R}^n$ , allora la derivata direzionale di  $f$  in  $P$  lungo la direzione  $\vec{v}$  è*

$$D_{\vec{v}}f(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h \cdot \vec{v}) - f(P)}{h},$$

*purché questo limite esista e sia finito.*

In particolare, osserviamo che le  $n$  derivate parziali di  $f$  sono derivate direzionali, ovvero sono le  $n$  derivate direzionali nelle  $n$  direzioni date dai vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

È possibile calcolare le derivate direzionali agevolmente attraverso la seguente formula, che si basa sulla sola conoscenza delle derivate parziali.

**Teorema 5.4.2** (Formula del gradiente).

*Sia  $f$  una funzione differenziabile in  $P \in \mathbb{R}^n$ . Sia  $\vec{v}$  un versore di  $\mathbb{R}^n$ . Allora,*

$$D_{\vec{v}}f(P) = \langle \nabla f(P), \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(P) \cdot v_i,$$

*essendo  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ .*

**Osservazione.** Notiamo che se una funzione  $f$  non è differenziabile in un punto  $P$ , allora la formula del gradiente potrebbe valere ma anche non valere.

Ricordiamo quindi la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

**Teorema 5.4.3.** *Siano  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  due vettori di  $\mathbb{R}^n$ . Allora*

- $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|;$
- $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$  se e solo se  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  sono linearmente dipendenti.

Grazie alla formula del gradiente e alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si può mostrare il seguente risultato.

**Teorema 5.4.4.** *Sia  $f$  una funzione definita in un intorno di  $P \in \mathbb{R}^n$ . Supponiamo che  $f$  sia differenziabile in  $P$ . Allora  $\nabla f(P)$  esprime la direzione (e il verso) lungo la quale la funzione  $f$  cresce più rapidamente, mentre  $-\nabla f(P)$  esprime la direzione (e il verso) lungo la quale la funzione  $f$  decresce più rapidamente, purché  $\nabla f(P) \neq \vec{0}$ .*

## 5.5 Ortogonalità fra gradiente e curve di livello

Sia  $f(x, y)$  una funzione differenziabile in  $P = (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$ . Supponiamo che  $\nabla f(P) \neq \vec{0}$ . Sia  $z_P = f(P)$ .

Intersecando il piano tangente al grafico di  $f$  in  $(P, f(P))$  con il piano  $z = z_P$

$$\begin{cases} z = T_{1,P}(x, y) \\ z = z_P \end{cases}$$

otteniamo la retta avente equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 0 = f'_x(P)(x - x_P) + f'_y(P)(y - y_P) \\ z = z_P \end{cases}$$

La proiezione ortogonale di tale retta sul piano  $xy$  è la retta di equazione cartesiana

$$f'_x(P)(x - x_P) + f'_y(P)(y - y_P) = 0 \Leftrightarrow \langle \nabla f(P), (x - x_P, y - y_P) \rangle = 0.$$

Tale retta è tangente alla curva di livello  $z_P$  di  $f$  in  $P$  ed è perpendicolare al gradiente  $\nabla f(P)$ .





# Capitolo 6

## Ottimizzazione libera e vincolata

### 6.1 Ottimizzazione libera

In questa sezione ci poniamo il problema di trovare i punti di minimo e massimo locale (e se possibile globale) di una funzione  $f$  definita su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  a valori in  $\mathbb{R}$ .

Vediamo innanzitutto le definizioni di punto di minimo globale e locale (quelle per i massimi sono simili).

**Definizione 6.1.1** (Punto di minimo globale). *Data una funzione  $f(X)$  definita su un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , diciamo che un punto  $P \in S$  è di minimo globale per  $f$  se  $f(P) \leq f(X)$  qualunque sia  $X \in S$ .*

**Definizione 6.1.2** (Punto di minimo locale). *Data una funzione  $f(X)$  definita su un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , diciamo che un punto  $P \in S$  è di minimo locale per  $f$  se  $f(P) \leq f(X)$  per tutti i punti  $X \in S \cap U$ , dove  $U$  è un intorno di  $P$ .*

In analogia al caso delle funzioni di 1 variabile, se un punto  $P \in A$  è di minimo/massimo locale, allora si verifica una delle seguenti condizioni:

- $P$  è un punto stazionario per  $f$ , cioè  $\nabla f(P) = \vec{0}$ ;
- in  $P$  la funzione  $f$  non è derivabile, cioè non esiste qualche derivata parziale.

Ci serve dunque un criterio per la classificazione dei punti stazionari. Tale criterio si basa sulle derivate parziali del secondo ordine.

### 6.2 Derivate parziali del secondo ordine

Sia  $f(X)$  una funzione di  $n$  variabili definita in un intorno di un punto  $P \in \mathbb{R}^n$ .

Supponiamo che in tale intorno esistano le  $n$  derivate parziali del primo ordine di  $f$ .

Fissati due interi  $i, j$  tali che  $1 \leq i, j \leq n$ , definiamo la derivata parziale del secondo ordine di  $f$  in  $P$  calcolata prima rispetto alla variabile  $x_i$  e poi rispetto alla variabile  $x_j$  come

$$f''_{x_i x_j}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_{x_i}(P + h \vec{e}_j) - f'_{x_i}(P)}{h}$$

purché questo limita esista e sia finito.

Sebbene in generale ci siano  $n^2$  derivate parziali del secondo ordine distinte, tale numero in realtà si riduce se sono soddisfatte le ipotesi del seguente teorema.

**Teorema 6.2.1** (T. di Schwarz). *Sia  $f$  una funzione definita in un intorno  $U$  di un punto  $P \in \mathbb{R}^n$ . Supponiamo che esistano le derivate parziali del primo e secondo ordine di  $f$  in ogni punto di  $U$ . Se tutte le derivate parziali del primo e secondo ordine sono continue in  $P$  allora*

$$f''_{x_i x_j}(P) = f''_{x_j x_i}(P)$$

per ogni scelta di  $i, j$  tali che  $1 \leq i, j \leq n$ .

Una volta che sappiamo che una funzione  $f$  è derivabile almeno due volte in un punto  $P \in \mathbb{R}^n$  possiamo definire il polinomio di Taylor di ordine due in  $P = (p_1, \dots, p_n)$  come

$$T_{2,P}(X) = T_{1,P}(X) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f''_{x_i x_j}(P) \cdot (x_i - p_i) \cdot (x_j - p_j).$$

Introduciamo inoltre la matrice Hessiana di  $f$  calcolata in  $P$ :

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} f''_{x_1 x_1}(P) & f''_{x_1 x_2}(P) & \dots & f''_{x_1 x_n}(P) \\ f''_{x_2 x_1}(P) & f''_{x_2 x_2}(P) & \dots & f''_{x_2 x_n}(P) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_n x_1}(P) & f''_{x_n x_2}(P) & \dots & f''_{x_n x_n}(P) \end{bmatrix}$$

Notiamo che tale matrice è simmetrica se sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Schwarz.

Tornando al polinomio  $T_{2,P}$ , possiamo notare che definendo

$$h_i := x_i - p_i$$

per ogni  $i$ , la doppia sommatoria che compare all'interno del polinomio di Taylor può essere scritta come

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f''_{x_i x_j}(P) \cdot h_i \cdot h_j.$$

In pratica questa doppia sommatoria, se non è identicamente nulla, è la somma di un numero finito di monomi di grado due nelle variabili  $h_i$ . In altre parole è una forma quadratica nelle variabili  $h_i$ .

## 6.3 Forme quadratiche

Una forma quadratica in  $n$  variabili  $x_1, \dots, x_n$  è una funzione polinomiale in  $n$  variabili in cui ogni termine ha grado due. Con ciò intendo dire che una forma quadratica si scrive analiticamente come la somma di un numero finito di termini della forma  $kx_ix_j$ , dove  $k \in \mathbb{R}$ , al variare di  $i$  e  $j$  fra 1 e  $n$ .

Le forme quadratiche in 1 variabile sono dunque tutte e sole le funzioni della forma

$$q(x) = ax^2,$$

dove  $a$  è un numero reale diverso da 0.

Il caso che tratteremo più frequentemente è quello delle forme quadratiche in due variabili. Una forma quadratica in due variabili è una funzione della forma

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad (6.1)$$

dove almeno uno dei coefficienti  $a, b, c$  non è nullo. Può essere naturale chiedersi il perché del coefficiente  $2b$ . In effetti avrei potuto scrivere più semplicemente  $b$ , ma ogni numero reale può comunque essere espresso nella forma  $2b$ , al variare di  $b \in \mathbb{R}$ , e quindi non sto perdendo di generalità scrivendo  $2b$  al posto di  $b$ . In realtà il  $2b$  ci permette una notazione più semplice in quello che sto per scrivere.

Ad ogni forma quadratica come  $q$  è possibile associare una matrice, ovvero la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Ora, usando le operazioni fra matrici, è possibile verificare la seguente identità:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [q(x, y)].$$

La scrittura di una forma quadratica in forma matriciale ci è utile, perché come vedremo a breve le proprietà che ci interessano studiare della forma quadratica  $q$  possono in realtà essere studiate guardando semplicemente la matrice  $Q$ .

Notiamo che ad una forma quadratica in un numero arbitrario di variabili è sempre possibile associare una matrice simmetrica  $Q$ . Vediamo ad esempio il caso di una forma quadratica in 3 variabili

$$q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

a cui è possibile associare la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}.$$

### 6.3.1 Segno delle forme quadratiche

Una questione che ci interessa particolarmente quando ci troviamo di fronte ad una forma quadratica è lo studio del suo segno. Diamo dunque un po' di definizioni.

**Definizione 6.3.1.** Sia  $q(X) = q(x_1, \dots, x_n)$  una forma quadratica.

- Se  $q(X) > 0$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^n, X \neq \vec{0}$ , allora diciamo che  $q$  è definita positiva.
- Se  $q(X) < 0$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^n, X \neq \vec{0}$ , allora diciamo che  $q$  è definita negativa.
- Se  $q(X) \geq 0$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^n$ , allora diciamo che  $q$  è semidefinita positiva.
- Se  $q(X) \leq 0$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^n$ , allora diciamo che  $q$  è semidefinita negativa.
- Se nessuno dei casi precedenti si verifica, allora diciamo che  $q$  è indefinita.

**Esempio 6.3.2.** Applicando direttamente la definizione si può verificare quanto segue:

- $q(x, y) = x^2 + y^2$  è definita positiva.
- $q(x, y) = -x^2 - y^2$  è definita negativa.
- $q(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$  è semidefinita positiva.
- $q(x, y) = -x^2 - 2xy - y^2$  è semidefinita negativa.
- $q(x, y) = x^2 - y^2$  è indefinita.

Il seguente teorema ci permette di studiare il segno di una forma quadratica con delle semplici verifiche sulla sua matrice associata.

**Teorema 6.3.3** (Criterio dei minori per una f.q. in due variabili).

Sia  $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  una forma quadratica in due variabili e  $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$  la sua matrice associata. Allora:

1.  $q$  è definita positiva se e solo se  $a > 0$  e  $\det(Q) > 0$ ;

2.  $q$  è semidefinita positiva se e solo se  $a \geq 0, c \geq 0$  e  $\det(Q) \geq 0$ ;
3.  $q$  è definita negativa se e solo se  $a < 0$  e  $\det(Q) > 0$ ;
4.  $q$  è semidefinita negativa se e solo se  $a \leq 0, c \leq 0$  e  $\det(Q) \geq 0$ ;
5.  $q$  è indefinita se e solo se  $\det(Q) < 0$ .

*Dimostrazione.* Innanzitutto notiamo che quando  $a \neq 0$  possiamo riscrivere la forma quadratica come segue:

$$q(x, y) = a \cdot \left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{\det(Q)}{a}y^2. \quad (6.2)$$

1. Se  $q$  è definita positiva, allora in particolare  $q(1, 0) = a > 0$ . Inoltre,  $q(1, y) = a + 2by + cy^2 > 0$  per ogni  $y$ . Ma questo significa che il discriminante  $\Delta = 4b^2 - 4ac < 0$ , ovvero  $b^2 - ac < 0$ , ovvero  $\det(Q) = ac - b^2 > 0$ .

Viceversa, supponiamo  $a > 0$  e  $\det(Q) > 0$  e consideriamo un qualunque  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Se  $y \neq 0$ , allora

$$q(x, y) \geq \frac{\det(Q)}{a}y^2 > 0.$$

Se invece  $y = 0$ , allora  $x \neq 0$  e  $q(x, 0) = ax^2 > 0$ . In definitiva,  $q$  è definita positiva.

2. Se  $q$  è semidefinita positiva, allora in particolare  $q(1, 0) = a \geq 0$  e  $q(0, 1) = c \geq 0$ . Inoltre,  $q(1, y) = a + 2by + cy^2 \geq 0$  per ogni  $y$ . Ma questo significa che il discriminante  $\Delta = 4b^2 - 4ac \leq 0$ , ovvero  $b^2 - ac \leq 0$ , ovvero  $\det(Q) = ac - b^2 \geq 0$ .

Viceversa, supponiamo  $a \geq 0, c \geq 0$  e  $\det(Q) \geq 0$ . Se  $a = 0$ , allora  $\det(Q) = ac - b^2 = -b^2 \geq 0$  solo se  $b = 0$ . Quindi,  $q(x, y) = cy^2 \geq 0$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Se invece  $a > 0$ , allora ogni termine in (6.2) è non-negativo, perciò  $q(x, y) \geq 0$  qualunque sia  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

3. Se  $q$  è definita negativa, allora in particolare  $q(1, 0) = a < 0$ . Inoltre,  $q(1, y) = a + 2by + cy^2 < 0$  per ogni  $y$ . Ma questo significa che il discriminante  $\Delta = 4b^2 - 4ac < 0$ , ovvero  $b^2 - ac < 0$ , ovvero  $\det(Q) = ac - b^2 > 0$ .

Viceversa, supponiamo  $a < 0$  e  $\det(Q) > 0$  e consideriamo un qualunque  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Se  $y \neq 0$ , allora

$$q(x, y) \leq \frac{\det(Q)}{a}y^2 < 0.$$

Se invece  $y = 0$ , allora  $x \neq 0$  e  $q(x, 0) = ax^2 < 0$ . In definitiva,  $q$  è definita negativa.

4. Se  $q$  è semidefinita negativa, allora in particolare  $q(1, 0) = a \leq 0$  e  $q(0, 1) = c \leq 0$ . Inoltre,  $q(1, y) = a + 2by + cy^2 \leq 0$  per ogni  $y$ . Ma questo significa che il discriminante  $\Delta = 4b^2 - 4ac \leq 0$ , ovvero  $b^2 - ac \leq 0$ , ovvero  $\det(Q) = ac - b^2 \geq 0$ .

Viceversa, supponiamo  $a \leq 0$ ,  $c \leq 0$  e  $\det(Q) \geq 0$ . Se  $a = 0$ , allora  $\det(Q) = ac - b^2 = -b^2 \geq 0$  solo se  $b = 0$ . Quindi,  $q(x, y) = cy^2 \leq 0$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Se invece  $a < 0$ , allora ogni termine in (6.2) è non-positivo, perciò  $q(x, y) \leq 0$  qualunque sia  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

5. Supponiamo che  $q$  sia indefinita. Se  $\det(Q) \geq 0$ , allora  $ac \geq b^2 \geq 0$ . Quest'ultima disuguaglianza è vera se e solo se  $a \geq 0$  e  $c \geq 0$ , oppure se e solo se  $a \leq 0$  e  $c \leq 0$ . Nel primo caso  $q$  sarebbe semidefinita positiva, mentre nel secondo  $q$  sarebbe semidefinita negativa. In entrambi i casi avremmo una contraddizione con il fatto che  $q$  è indefinita. Quindi,  $\det(Q) < 0$ .

Viceversa, se  $\det(Q) < 0$ , per quanto dimostrato nei punti precedenti  $q$  non può essere definita positiva/negativa, semidefinita positiva/negativa. Quindi,  $q$  deve essere indefinita.

□

Più in generale, se voglio studiare il segno di una forma quadratica in  $n$  variabili posso ricorrere al criterio degli autovalori della sua matrice associata  $Q$ , che è simmetrica a coefficienti reali e che quindi ha tutti autovalori reali in virtù del teorema spettrale.

**Teorema 6.3.4** (Criterio degli autovalori per il segno di una f.q.). *Sia  $Q$  la matrice simmetrica associata ad una forma quadratica  $q(X)$  in  $n$  variabili.*

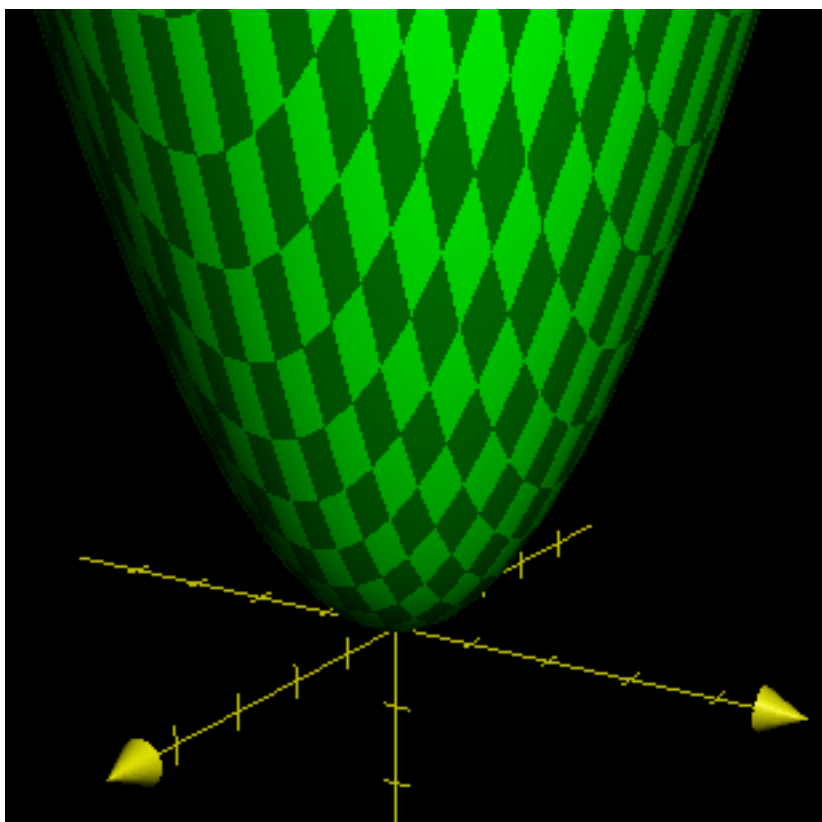
1. *Se tutti gli autovalori di  $Q$  sono positivi, allora  $q$  è definita positiva.*
2. *Se tutti gli autovalori di  $Q$  sono negativi, allora  $q$  è definita negativa.*
3. *Se tutti gli autovalori di  $Q$  sono maggiori o uguali a 0, allora  $q$  è semidefinita positiva.*
4. *Se tutti gli autovalori di  $Q$  sono minori o uguali a 0, allora  $q$  è semidefinita negativa.*
5. *Se nessuno dei casi precedenti si verifica, allora  $q$  è indefinita.*

### 6.3.2 Grafico di una forma quadratica in due variabili

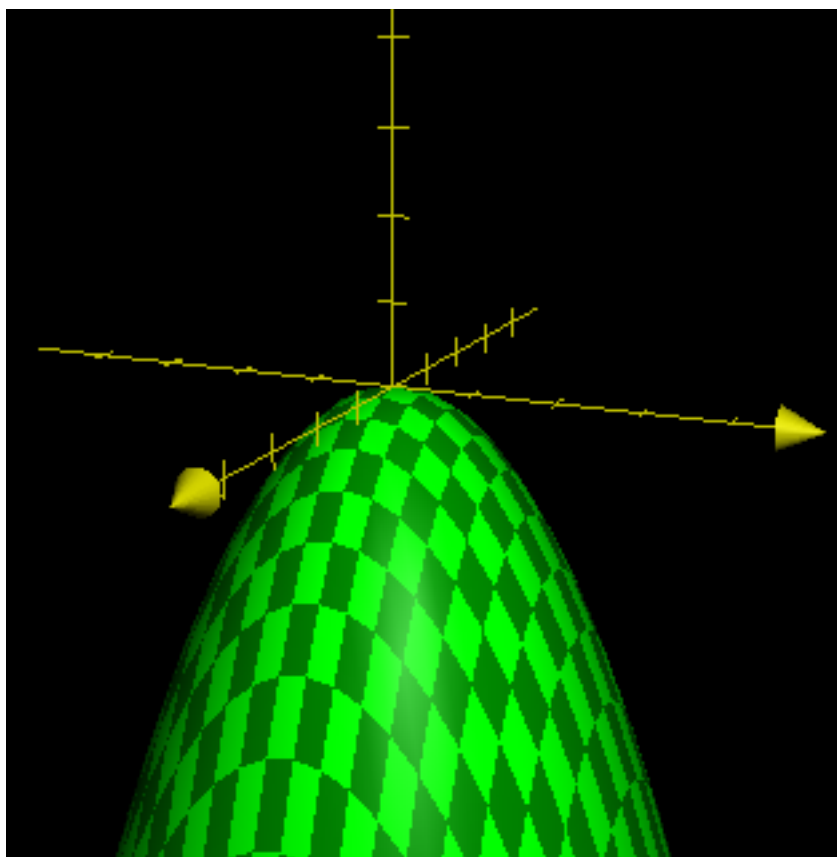
Vediamo come si presenta il grafico di una forma quadratica  $f$  in due variabili.

Se una forma quadratica è definita positiva, allora il suo grafico è un paraboloide ellittico passante per il punto  $(0, 0, 0)$  con la concavità rivolta verso l'alto. Inoltre il

punto  $(0,0)$  è un punto di minimo globale stretto per la forma quadratica  $f$ , ovvero  $f(x, y) > f(0,0)$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Quello che segue è il grafico di  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , una forma quadratica definita positiva.

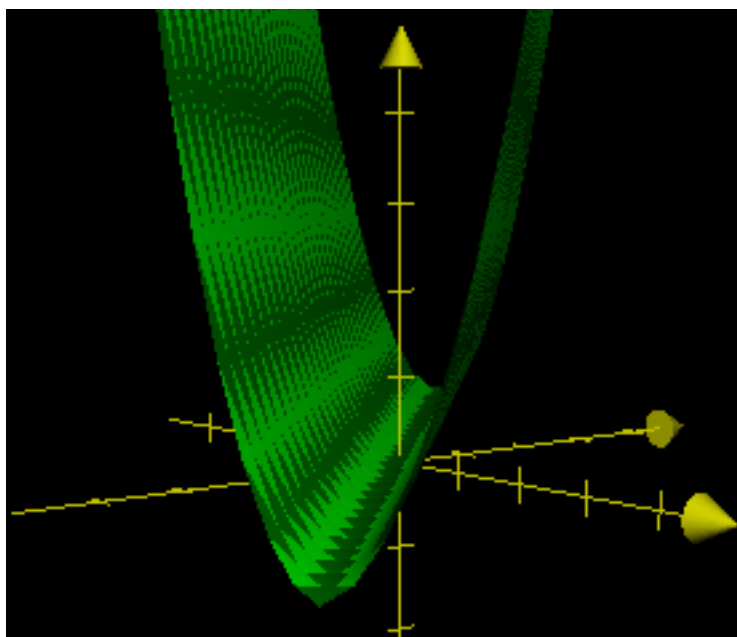


Se una forma quadratica è definita negativa, allora il suo grafico è un paraboloide ellittico passante per il punto  $(0,0,0)$  con la concavità rivolta verso il basso. Inoltre il punto  $(0,0)$  è un punto di massimo globale stretto per la forma quadratica  $f$ , ovvero  $f(x, y) < f(0,0)$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Quello che segue è il grafico di  $f(x, y) = -x^2 - y^2$ , una forma quadratica definita negativa.

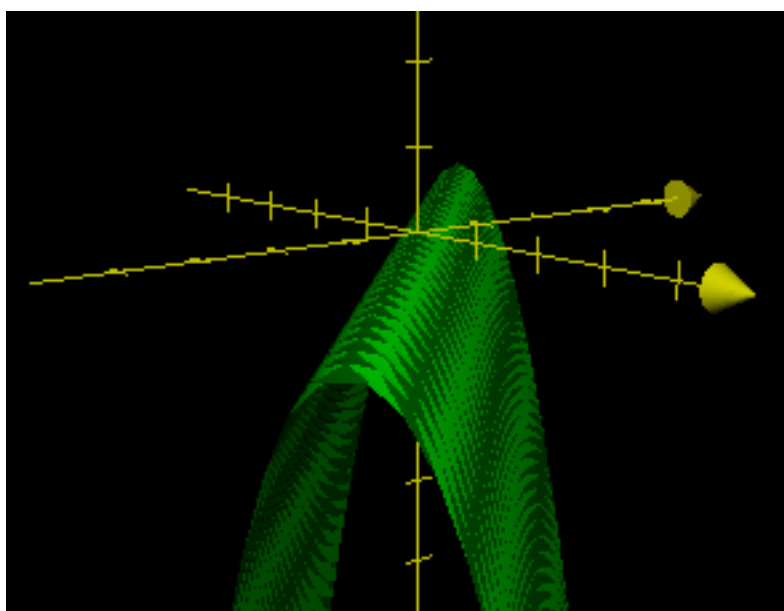


Se una forma quadratica è semidefinita positiva (ma non definita positiva), allora il suo grafico è un cilindro parabolico passante per il punto  $(0, 0, 0)$ . Inoltre il punto  $(0, 0)$  è un punto di minimo globale per la forma quadratica  $f$ , ovvero  $f(x, y) \geq f(0, 0) = 0$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Tuttavia  $f(x, y) = 0$  in tutti i punti  $(x, y)$  appartenenti ad una retta del piano  $xy$ . Quello che segue è il grafico di  $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ , una forma quadratica semidefinita positiva. Per tale forma quadratica si ha che  $f(x, y) = 0$  per tutti i punti  $(x, y)$  tali che  $y = -x$ . Ciò segue dal fatto che  $f(x, y) = (x + y)^2$ .



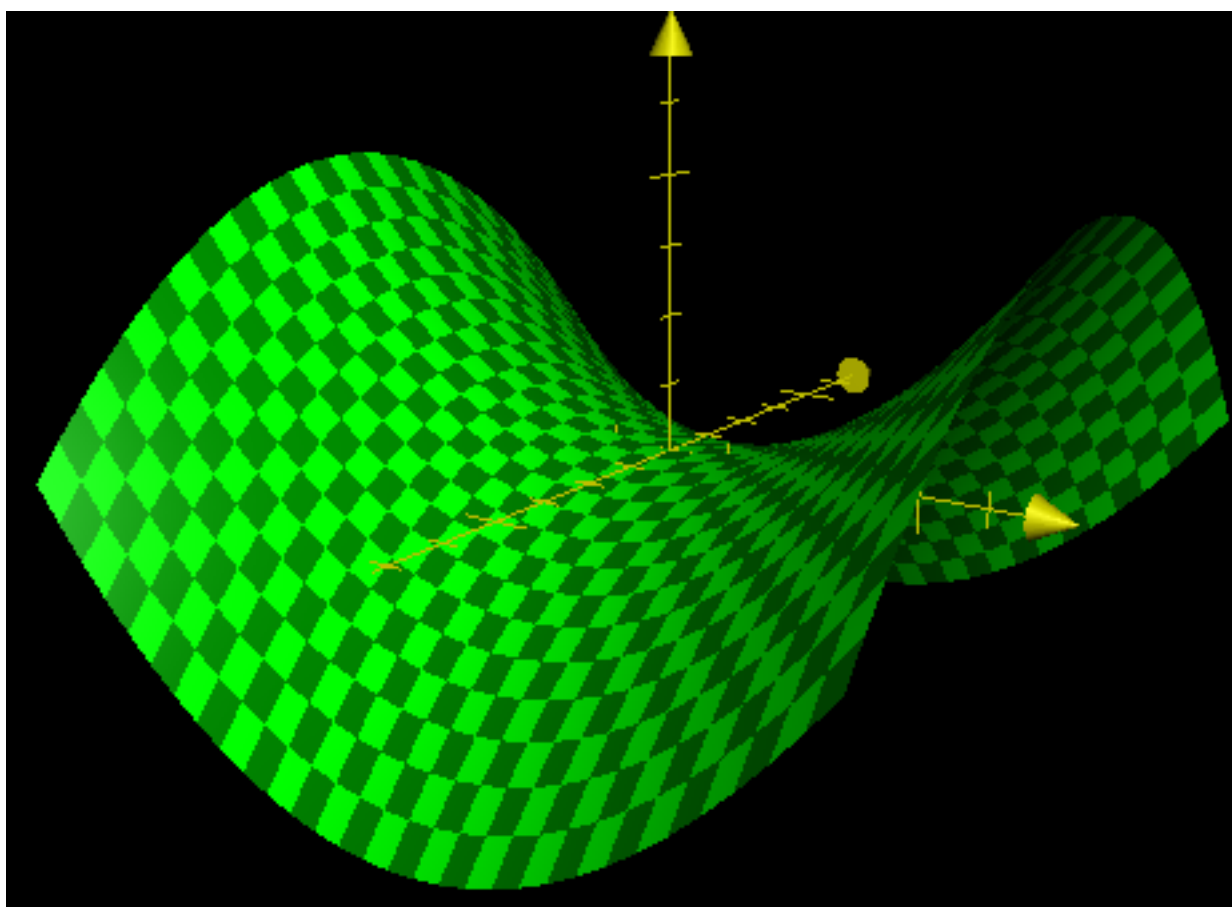


Se una forma quadratica è semidefinita negativa (ma non definita negativa), allora il suo grafico è un cilindro parabolico passante per il punto  $(0, 0, 0)$ . Inoltre il punto  $(0, 0)$  è un punto di massimo globale per la forma quadratica  $f$ , ovvero  $f(x, y) \leq f(0, 0) = 0$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Tuttavia  $f(x, y) = 0$  in tutti i punti  $(x, y)$  appartenenti ad una retta del piano  $xy$ . Quello che segue è il grafico di  $f(x, y) = -x^2 - 2xy - y^2$ , una forma quadratica semidefinita negativa. Per tale forma quadratica si ha che  $f(x, y) = 0$  per tutti i punti  $(x, y)$  tali che  $y = -x$ . Ciò segue dal fatto che  $f(x, y) = -(x + y)^2$ .



Se una forma quadratica è indefinita, allora il suo grafico è un paraboloide iperbolico passante per il punto  $(0, 0, 0)$ . Inoltre il punto  $(0, 0)$  non è un punto di massimo né di minimo per la forma quadratica  $f$ .

Quello che segue è il grafico di  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , una forma quadratica indefinita. Notiamo la forma di sella di tale superficie. In effetti il punto  $(0, 0)$  è proprio un punto di sella per tale funzione di due variabili (chiariremo meglio questo concetto quando parleremo di ottimizzazione libera).



## 6.4 Classificazione dei punti stazionari di una funzione di due variabili

Consideriamo la seguente forma quadratica:

$$q(h, k) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot h^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot h \cdot k + f''_{yy}(x_0, y_0) \cdot k^2.$$

#### 6.4. CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI STAZIONARI DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI 59

Notiamo che, usando tale forma quadratica, il polinomio di Taylor del secondo ordine può essere scritto in forma ancora più compatta come:

$$T_{2,P}(x, y) = T_{1,P}(x, y) + \frac{1}{2} \cdot q(x - x_0, y - y_0).$$

Se  $(x_0, y_0)$  è un punto stazionario di  $f$ , allora

$$T_{2,P}(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \cdot q(x - x_0, y - y_0).$$

Non ci occupiamo di dimostrare la bontà dell'approssimazione del polinomio di Taylor del secondo ordine. Tuttavia, tale approssimazione è “buona” nel senso che se considero dei punti  $(x, y)$  vicini a  $(x_0, y_0)$ , allora

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx \frac{1}{2} \cdot q(x - x_0, y - y_0).$$

Ciò significa in particolare che, se  $q(x - x_0, y - y_0) > 0$ , allora è positiva pure  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  e analogamente se  $q(x - x_0, y - y_0) < 0$ , allora è negativa pure  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ . Questi fatti permetterebbero la dimostrazione del seguente teorema che ci limitiamo ad enunciare.

**Teorema 6.4.1** (Criterio delle derivate parziali del secondo ordine).

*Sia  $f(x, y)$  una funzione di due variabili, continua in un punto  $(x_0, y_0)$  interno al suo dominio e con derivate parziali del primo e secondo ordine continue in tale punto. Supponiamo che  $(x_0, y_0)$  sia un punto stazionario per  $f$ , ovvero che*

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

*Allora, il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in  $(x_0, y_0)$  è*

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}q(x - x_0, y - y_0),$$

*dove  $q(h, k)$  è la forma quadratica*

$$q(h, k) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot h^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot h \cdot k + f''_{yy}(x_0, y_0) \cdot k^2$$

*avente matrice associata*

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

*Si ha quanto segue:*

- se  $q$  è definita positiva, allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo locale per la funzione  $f$ ;
- se  $q$  è definita negativa, allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo locale per la funzione  $f$ ;
- se  $q$  è indefinita, allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di sella per la funzione  $f$ .

Usando il Teorema 6.3.3 possiamo riformulare il Teorema 6.4.1 in una maniera più maneggevole per le applicazioni pratiche.

**Teorema 6.4.2** (Criterio delle derivate parziali del secondo ordine - 2<sup>a</sup> formulazione). *Sia  $f(x, y)$  una funzione di due variabili, continua in un punto  $(x_0, y_0)$  interno al suo dominio e con derivate parziali del primo e secondo ordine continue in tale punto. Supponiamo che  $(x_0, y_0)$  sia un punto stazionario per  $f$ . Vale quanto segue:*

- se  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$  e  $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ , allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo locale per la funzione  $f$ ;
- se  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$  e  $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ , allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo locale per la funzione  $f$ ;
- se  $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0$ , allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di sella.

**Esempio 6.4.3.** Studiamo i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2y^2.$$

Le derivate parziali del primo ordine sono

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x + 2y^2 \\ f'_y(x, y) &= 4xy + 4y \end{aligned}$$

I punti stazionari sono i punti  $(x, y)$  che annullano entrambe le derivate parziali del primo ordine. Quindi devo trovare i punti che soddisfano il seguente sistema (non lineare):

$$\begin{cases} 2x + 2y^2 = 0 \\ 4xy + 4y = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione è equivalente a  $y(x + 1) = 0$ . Tale equazione è verificata se  $y = 0$  oppure  $x = -1$ .

Se  $y = 0$ , allora dalla prima equazione ricavo  $x = 0$ . Quindi ho trovato un primo punto stazionario  $P_1 = (0, 0)$ .

Se  $x = -1$ , allora la prima equazione diventa  $y^2 = 1$ . Quindi gli altri due punti stazionari sono  $P_2 = (-1, 1)$  e  $P_3 = (-1, -1)$ .

Studiamo la natura dei 3 punti stazionari basandoci sul criterio delle derivate parziali seconde. Prima dobbiamo calcolarci le derivate del secondo ordine.

$$\begin{aligned}f''_{xx}(x, y) &= 2 \\f''_{xy}(x, y) &= 4y \\f''_{yy}(x, y) &= 4x + 4\end{aligned}$$

Ora calcoliamola matrice hessiana nei 3 punti stazionari:

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad H_f(-1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad H_f(-1, -1) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Applicando il criterio delle derivate parziali del secondo ordine deduciamo che  $P_1$  è un punto di minimo locale, mentre  $P_2, P_3$  sono punti di sella.

### 6.4.1 Ottimizzazione libera per funzioni di $n$ variabili

In questa sezione vorrei dare dei cenni all'ottimizzazione libera in  $n$  variabili, con  $n \geq 2$ . Il tutto generalizza quanto detto per le funzioni di due variabili.

Se  $f(x_1, \dots, x_n)$  è una funzione di  $n$  variabili e  $P = (p_1, \dots, p_n)$  è un punto stazionario per  $f$ , allora possiamo classificarlo usando il seguente criterio delle derivate parziali del secondo ordine.

**Teorema 6.4.4** (Criterio delle derivate parziali del secondo ordine). *Sia  $f$  una funzione di  $n$  variabili derivabile due volte con continuità in un intorno di  $P$  e  $H_f(P)$  la matrice hessiana di  $f$  calcolata in  $P$ .*

*Denotiamo con  $D_k$  il determinante della matrice ottenuta da  $H_f(P)$  eliminando le ultime  $n - k$  righe e  $n - k$  colonne.*

- Se  $D_k > 0$  per ogni  $k = 1, \dots, n$ , allora  $P$  è un punto di minimo locale.
- Se  $(-1)^k D_k > 0$  per ogni  $k = 1, \dots, n$ , allora  $P$  è un punto di massimo locale.
- Se  $D_n \neq 0$ , ma non si verifica alcuno dei due casi precedenti, allora  $P$  è un punto di sella.

**Esempio 6.4.5.** Si classifichino i punti stazionari della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 + \ln(1 + z^2).$$

Le derivate parziali del primo ordine sono

$$\begin{aligned}f'_x(x, y, z) &= 2x - 2 \\f'_y(x, y, z) &= 2y \\f'_z(x, y, z) &= \frac{2z}{1 + z^2}\end{aligned}$$

Poiché un punto stazionario è un punto che annulla tutte le derivate parziali del primo ordine, dobbiamo trovare i punti che soddisfano il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y = 0 \\ \frac{2z}{1 + z^2} = 0 \end{cases}$$

L'unico punto che soddisfa le 3 equazioni è  $(1, 0, 0)$ .

Calcoliamo ora le derivate parziali del secondo ordine.

$$\begin{aligned}f''_{xx}(x, y, z) &= 2 \\f''_{yy}(x, y, z) &= 2 \\f''_{zz}(x, y, z) &= \frac{-2z^2 + 2}{1 + z^2}\end{aligned}$$

Tutte le altre derivate parziali del secondo ordine sono nulle.

La matrice hessiana di  $f$  in  $(1, 0, 0)$  è

$$H_f(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

In base al criterio delle derivate parziali del secondo ordine il punto  $(1, 0, 0)$  è di minimo locale.

## 6.5 Ottimizzazione vincolata

Il problema che ci poniamo è quello di determinare i punti di minimo e massimo locale di una funzione di due variabili

$$f(x, y)$$

definita su un certo insieme aperto  $A$  soggetta al vincolo

$$g(x, y) = 0.$$

In altre parole vogliamo determinare i punti di minimo e massimo della funzione  $f$ , definita su un insieme aperto  $A$ , restringendoci ai punti dell'insieme

$$M = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}.$$

I punti di minimo e massimo locale che stiamo andando a cercare sono detti punti di massimo e minimo locale vincolato. Ovvero, la funzione  $f$  è definita su un insieme  $A$  che magari in generale sarà più grande di  $M$ , ma a noi interessa cercare i punti di minimo e massimo locale di  $f$  fra i punti dell'insieme  $M$ .

**Definizione 6.5.1.** *Siano  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  due funzioni di due variabili reali definite su un insieme  $A$ . Consideriamo quindi l'insieme*

$$M = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}.$$

*Diciamo che un punto  $(x_0, y_0) \in M$  è un punto di minimo locale per  $f$  vincolato a  $M$  se esiste un intorno  $U_r((x_0, y_0))$  tale che  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$  per ogni  $(x, y) \in U_r((x_0, y_0)) \cap M$ .*

*Diciamo che un punto  $(x_0, y_0) \in M$  è un punto di massimo locale per  $f$  vincolato a  $M$  se esiste un intorno  $U_r((x_0, y_0))$  tale che  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  per ogni  $(x, y) \in U_r((x_0, y_0)) \cap M$ .*

## 6.6 Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (2 variabili-1 vincolo)

Usando la notazione e le ipotesi precedentemente introdotte, definiamo la funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

La funzione  $\mathcal{L}$  dipende da tre variabili, ovvero le variabili della funzione  $f$  ( $x$  e  $y$ ) e una nuova variabile  $\lambda$ . Il metodo che introduciamo per risolvere i problemi di ottimo vincolato è il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*.

Vale il seguente teorema.

**Teorema 6.6.1** (T. dei moltiplicatori di Lagrange).

*Supponiamo che  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  siano due funzioni definite su un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  con derivate parziali del primo ordine continue in tutti i punti interni di  $A$ . Supponiamo che  $(x_0, y_0)$  sia un punto interno di  $A$  e che tale punto sia pure un punto di minimo o*

massimo locale per  $f$  soggetta al vincolo  $g(x, y) = 0$ . Supponiamo poi che  $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . Allora esiste un numero  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tale che la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

abbia un punto stazionario in  $(x_0, y_0, \lambda_0)$ .

Il primo passo da fare per risolvere il problema di ottimizzazione vincolata è quello di cercare i punti stazionari della Lagrangiana, ovvero i punti  $(x, y, \lambda)$  tali che

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x, y, \lambda) &= 0 \\ \mathcal{L}'_y(x, y, \lambda) &= 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x, y, \lambda) &= 0. \end{cases}$$

Notiamo che  $\mathcal{L}'_\lambda(x, y, \lambda) = -g(x, y)$ , quindi il sistema precedente è equivalente a

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x, y, \lambda) &= 0 \\ \mathcal{L}'_y(x, y, \lambda) &= 0 \\ g(x, y) &= 0. \end{cases}$$

Una volta trovato un punto stazionario  $P = (x_0, y_0, \lambda_0)$ , dobbiamo studiarne la natura.

Il criterio che usiamo è lo studio della matrice Hessiana orlata calcolata in  $P$ , che è la matrice così definita:

$$B(x_0, y_0, \lambda_0) = \begin{bmatrix} 0 & g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & \mathcal{L}''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & \mathcal{L}''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ g'_y(x_0, y_0) & \mathcal{L}''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & \mathcal{L}''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{bmatrix}$$

Vale il seguente fatto:

- Se  $\det B(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ , allora il punto  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo locale vincolato per  $f$ .
- Se  $\det B(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ , allora il punto  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo locale vincolato per  $f$ .

**Osservazione.** Notiamo che il metodo dei moltiplicatori di Lagrange permette la ricerca di potenziali punti di minimo e massimo vincolato fra tutti i punti  $(x_0, y_0)$  che soddisfano l'equazione del vincolo tali che  $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . Se un punto del vincolo annulla il gradiente di  $g$ , allora dobbiamo studiare separatamente tale punto.



## 6.7 Punti di minimo e massimo globale vincolato

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange introdotto precedentemente ci permette di trovare i punti di minimo e massimo locale vincolato. Sotto opportune ipotesi è possibile pure trovare i punti di minimo e massimo globale vincolati. Uno strumento importante in questa ricerca è il teorema di Weierstrass che richiamiamo.

**Teorema 6.7.1** (T. di Weierstrass). *Sia  $f$  una funzione continua di  $n$  variabili definita su un insieme compatto (chiuso e limitato)  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Allora  $f$  assume minimo e massimo globale su  $C$ .*

Il Teorema di Weierstrass si può applicare ad esempio qualora si voglia trovare il massimo e il minimo globale di una funzione continua  $f$  definita sull'insieme

$$M = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

In tal caso  $M$  è un insieme chiuso e limitato, quindi, una volta trovati i punti di minimo e massimo locale della funzione  $f$  vincolati a  $M$ , andiamo a cercare il valore più grande e il valore più piccolo assunto dalla funzione fra quelli appena trovati.

Non possiamo tuttavia applicare il teorema di Weierstrass nel caso in cui il vincolo è dato ad esempio dall'insieme

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 0\}.$$

L'insieme  $N$  è ancora chiuso in  $\mathbb{R}^2$ , tuttavia non è limitato. In questo caso non è detto che esistano punti di minimo e massimo globale di  $f$  su  $N$ .



# Capitolo 7

## Integrazione in più variabili

### 7.1 Integrali di linea di prima specie

Consideriamo un arco di curva regolare

$$\begin{aligned}\gamma : [a, b] &\rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(t)\end{aligned}$$

e una funzione

$$\begin{aligned}f : D \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Diciamo che

$$\int_{\gamma} f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt$$

è l'integrale di linea di prima specie di  $f$  lungo  $\gamma$ .

Nel caso  $n = 2$  tale integrale è l'area con segno della superficie delimitata dalla curva  $\gamma$  e da  $f(\gamma(t))$  per  $t \in [a, b]$ .

In generale, in dimensione arbitraria (quindi anche per  $n = 2$ ), possiamo dare un'interpretazione fisica dell'integrale di linea: se la funzione  $f$  non è mai negativa tale integrale è la massa di un filo, rappresentato dalla curva  $\gamma$ , di densità lineare  $f$ .

### 7.2 Integrali doppi

Sia  $f$  una funzione definita su un rettangolo  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Possiamo dividere l'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  sottointervalli di ampiezza  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  e l'intervallo  $[c, d]$  in altrettanti

sottointervalli di ampiezza  $\Delta y = \frac{d-c}{n}$ . In tal modo il rettangolo  $R$  risulterà suddiviso in  $n^2$  rettangoli che indichiamo con  $R_{ij}$  al variare di  $i$  e  $j$  in  $\{0, \dots, n-1\}$ . Per ogni rettangolo prendiamo a piacere un punto  $P_{ij}$ .

Definiamo quindi

$$S_n := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (f(P_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y).$$

Diciamo che  $f$  è integrabile su  $R$  se esiste ed è finito il  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  e tale limite non dipende dalla scelta dei punti  $P_{ij}$ . Se una funzione non gode di particolari proprietà potrebbe non essere integrabile. Tuttavia vale il seguente teorema per le funzioni continue.

**Teorema 7.2.1** (Teorema di Fubini per i domini rettangolari).

Se  $f$  è una funzione continua su  $D = [a, b] \times [c, d]$ , allora

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

### 7.2.1 Integrali doppi su domini semplici e regolari

Vediamo alcune definizioni.

**Definizione 7.2.2** (Insiemi semplici e regolari).

Una regione  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  è *y-semplce* se è della forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

dove  $g_1, g_2$  sono due funzioni continue per ogni  $x \in [a, b]$  tali che  $g_1(x) \leq g_2(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Una regione  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  è *x-semplce* se è della forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

dove  $h_1, h_2$  sono due funzioni continue per ogni  $y \in [c, d]$  tali che  $h_1(y) \leq h_2(y)$  per ogni  $y \in [c, d]$ .

Una regione  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  è *regolare* se è unione di un numero finito di regioni semplici.

Vale il seguente teorema per l'integrazione di funzioni continue su domini semplici.

**Teorema 7.2.3** (Teorema di Fubini per i domini semplici). Con le notazioni introdotte sopra, se  $D$  è un dominio *y-semplce* e  $f(x, y)$  è una funzione continua su  $D$ , allora

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Se invece  $D$  è un dominio  $x$ -semplice, allora

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Per quel che riguarda l'integrazione su domini regolari, se  $D = D_1 \cup D_2$  con  $D_1$  e  $D_2$  domini semplici e  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ , oppure i punti in comune a  $D_1$  e a  $D_2$  sono punti di frontiera sia per  $D_1$  che per  $D_2$ , allora

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy.$$

### 7.2.2 Alcune possibili interpretazioni degli integrali doppi

L'integrale doppio di una funzione continua  $f(x, y)$  su un certo dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  può essere interpretato in vari modi a seconda del contesto in cui viene impiegato.

- In generale, posso pensare all'integrale doppio come ad un volume con segno.
- Se  $f(x, y) \geq 0$  per ogni  $(x, y) \in D$ , allora l'integrale doppio è proprio un volume in senso geometrico.
- Se  $f(x, y) \geq 0$  per ogni  $(x, y) \in D$  posso considerare  $f(x, y)$  come una funzione di densità superficiale e quindi il corrispondente integrale doppio misura la massa di quella superficie. Se poi  $f(x, y) = 1$ , allora l'integrale doppio misura l'area di  $D$ .

### 7.2.3 Cambiamento di variabili negli integrali doppi

Il calcolo degli integrali doppi è piuttosto facile quando il dominio è rettangolare. Talvolta riesco a ridurmi a un dominio rettangolare anche quando devo integrare su un dominio qualunque tramite un cambiamento di variabili.

**Teorema 7.2.4** (Formula di cambiamento di variabili per gli integrali doppi).

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un rettangolo e sia

$$\begin{aligned} T : \quad \Omega &\rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\rightarrow (g(u, v), h(u, v)) \end{aligned}$$

una funzione suriettiva di classe  $\mathbb{C}^1(\Omega)$  e iniettiva su  $\overset{\circ}{\Omega}$ .

Sia

$$\begin{aligned} f : \quad D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

una funzione continua su  $D$ .

Allora

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega} f(g(u, v), h(u, v)) \cdot |\det(DT(u, v))| \, du dv$$

dove

$$DT(u, v) = \begin{bmatrix} g'_u(u, v) & g'_v(u, v) \\ h'_u(u, v) & h'_v(u, v) \end{bmatrix}$$

è la matrice jacobiana della trasformazione  $T$ .

## 7.2.4 Coordinate polari nel piano

Ricordiamo che è possibile individuare nel piano un punto  $(x, y)$  attraverso due coordinate, dette coordinate polari, una volta fissato un punto speciale, detto polo. Se in particolare prendiamo come polo l'origine  $O$  degli assi cartesiani, allora ogni punto  $(x, y)$  del piano può essere descritto nella forma

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos(\vartheta), \\ y &= \rho \cdot \sin(\vartheta), \end{aligned}$$

al variare di  $\rho \in [0, +\infty[$  e  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ .

Se ad esempio devo integrare una funzione  $f(x, y)$  continua su un cerchio  $D$  di raggio  $r > 0$  e centro in  $O$ , posso innanzitutto considerare la funzione

$$\begin{aligned} T : [0, r] \times [0, 2\pi] &\rightarrow D \\ (\rho, \vartheta) &\mapsto (\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta)). \end{aligned}$$

Noto quindi che  $|\det(DT(\rho, \vartheta))| = \rho$ .

Perciò

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^r f(T(\rho, \vartheta)) \rho \, d\rho \right) d\vartheta.$$

## 7.3 Integrali tripli

### 7.3.1 Integrali tripli su parallelepipedi rettangolari

Sia  $f(x, y, z)$  una funzione continua definita in tutti i punti di un parallelepipedo rettangolare  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , ovvero su un insieme

$$D = [a, b] \times [c, d] \times [e, h],$$

dove  $a < b$ ,  $c < d$  ed  $e < h$ .

In analogia con il caso delle funzioni di due variabili definite su domini rettangolari potrei definire l'integrale triplo su  $D$ . In pratica, l'integrale  $\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz$  si calcola come l'integrale iterato

$$\int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_e^h f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

In realtà quest'ultimo integrale non cambia se itero i 3 integrali in ordine diverso.

### 7.3.2 Integrazione per fili

Chiamiamo dominio semplice per fili un qualunque insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\},$$

dove  $\Omega$  è un dominio regolare in  $\mathbb{R}^2$ , mentre  $g_1$  e  $g_2$  sono funzioni continue su  $\Omega$  tali che  $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$  per ogni  $(x, y) \in \Omega$ .

Se  $f(x, y, z)$  è una funzione continua su un dominio  $D$  come sopra, allora

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_{\Omega} \left( \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy.$$

### 7.3.3 Integrazione per strati

Definiamo dominio semplice per strati un qualunque insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z_1 \leq z \leq z_2, (x, y) \in \Omega(z)\},$$

dove ogni  $\Omega(z)$  è un dominio regolare nel piano. Un integrale per strati può essere calcolato così:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{z_1}^{z_2} \left( \iint_{\Omega(z)} f(x, y, z) \, dx dy \right) dz.$$

### 7.3.4 Cambiamento di variabili negli integrali tripli

Vale il seguente

**Teorema 7.3.1** (Formula del cambiamento di variabili negli integrali tripli).

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  un parallelepipedo rettangolare, oppure un dominio semplice per fili o strati e sia

$$\begin{aligned} T : \quad \Omega &\rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) &\mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \end{aligned}$$

una funzione suriettiva di classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ , iniettiva su  $\mathring{\Omega}$ .

Se  $f(x, y, z)$  è una funzione continua su  $D$ , allora

$$\iint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_{\Omega} f(T(u, v, w)) |\det(DT(u, v, w))| \, du dv dw,$$

dove

$$DT(u, v, w) = \begin{bmatrix} x'_u(u, v, w) & x'_v(u, v, w) & x'_w(u, v, w) \\ y'_u(u, v, w) & y'_v(u, v, w) & y'_w(u, v, w) \\ z'_u(u, v, w) & z'_v(u, v, w) & z'_w(u, v, w) \end{bmatrix}$$

è la matrice jacobiana della trasformazione  $T$ .

### 7.3.5 Integrali tripli in coordinate sferiche

Così come è possibile esprimere ogni punto nel piano usando le coordinate polari, nello spazio tridimensionale possiamo denotare ogni punto usando le coordinate sferiche. Nello specifico, ogni punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  si può scrivere come

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\vartheta), \\ y &= \rho \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta), \\ z &= \rho \cdot \cos(\varphi), \end{aligned}$$

dove  $\rho \geq 0$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$  e  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ .

L'integrale triplo di una funzione  $f(x, y, z)$  continua su un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  si esprime in coordinate sferiche come

$$\iiint_{D'} f(\rho, \varphi, \vartheta) \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho d\varphi d\vartheta,$$

dove  $D'$  è il dominio  $D$  espresso in coordinate sferiche.



### 7.3.6 Integrali tripli in coordinate cilindriche

È possibile esprimere ogni punto nello spazio tridimensionale anche usando delle coordinate cilindriche. Nello specifico, ogni punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  si può scrivere come

$$\begin{aligned}x &= \rho \cdot \cos(\vartheta), \\y &= \rho \cdot \sin(\vartheta), \\z &= z,\end{aligned}$$

dove  $\rho \geq 0$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  e  $z \in \mathbb{R}$ .

L'integrale triplo di una funzione  $f(x, y, z)$  continua su un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  si esprime in coordinate cilindriche come

$$\iiint_{D'} f(\rho, \vartheta, z) \rho \, d\rho d\vartheta dz,$$

dove  $D'$  è il dominio  $D$  espresso in coordinate cilindriche.

### 7.3.7 Alcune interpretazioni degli integrali tripli

L'integrale doppio di una funzione non-negativa poteva essere interpretato come la massa di un certo oggetto avente la forma data dal dominio di integrazione.

Ora, se prendiamo una funzione  $f(x, y, z)$  che non è mai negativa sul dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , possiamo interpretare l'integrale triplo di  $f$  su  $D$  come la massa del solido corrispondente alla regione  $D$ .

Se poi pongo  $f(x, y, z) = 1$  e integro  $f$  su  $D$ , quello che ottengo è proprio il volume del solido.

## 7.4 Superfici regolari

Una superficie regolare  $\Sigma$  è l'immagine in  $\mathbb{R}^3$  di una funzione

$$\begin{aligned}\sigma : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\(u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),\end{aligned}$$

detta parametrizzazione regolare di  $\Sigma$ , che soddisfa le seguenti proprietà:

- $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  e  $z(u, v)$  sono funzioni di classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ ;
- $\sigma'_u(u_0, v_0)$  e  $\sigma'_v(u_0, v_0)$  sono vettori linearmente indipendenti per ogni  $(u_0, v_0) \in \Omega$ .

### 7.4.1 Area di una superficie

Sia  $\Sigma$  una superficie regolare parametrizzata da

$$\begin{aligned}\sigma : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),\end{aligned}$$

dove  $\Omega$  è un insieme regolare di  $\mathbb{R}^2$ .

Attraverso approssimazioni dell'elemento infinitesimo di superficie, si arriva alla seguente formula per il calcolo dell'area di  $\Sigma$ :

$$Area(\Sigma) = \iint_{\Omega} \|\sigma'_u \times \sigma'_v\| \, dudv$$

## 7.5 Campi vettoriali

Diamo la seguente

**Definizione 7.5.1** (Campo vettoriale).

*Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Un campo vettoriale su  $\Omega$  è una funzione*

$$\begin{aligned}\vec{F} : \quad \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)).\end{aligned}$$

### 7.5.1 Integrali di linea di seconda specie

Di qui in avanti supponiamo che  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  sia un aperto connesso per archi e  $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ . Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  una curva regolare. Definiamo l'integrale di linea di seconda specie di  $\vec{F}$  lungo  $\gamma$  il seguente integrale:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \, d\vec{r} := \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt.$$

L'integrale di linea di seconda specie lungo  $\gamma$  è detto anche il lavoro di  $\vec{F}$  lungo  $\gamma$ . Tale terminologia si lega al fatto che se si pensa al campo  $\vec{F}$  come ad un campo di forze, allora l'integrale in questione descrive proprio il lavoro di  $\vec{F}$  lungo il cammino  $\gamma$ .

In generale il lavoro compiuto da un campo  $\vec{F}$  nello spostamento da un punto  $P$  a un punto  $Q$  dipende dalla curva che congiunge i due punti. Ci sono tuttavia dei campi per i quali il lavoro dipende solo dal punto iniziale e finale della curva.

### 7.5.2 Campi conservativi

Diamo la seguente definizione.

**Definizione 7.5.2.** Sia  $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  un campo vettoriale. Diciamo che  $\vec{F}$  è conservativo se esiste una funzione  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^2(\Omega)$ , detta potenziale di  $\vec{F}$ , tale che  $\vec{F}(x_1, \dots, x_n) = \nabla U(x_1, \dots, x_n)$ .

Vale il seguente teorema.

**Teorema 7.5.3.** Se  $\vec{F}$  è un campo conservativo su  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $U$  è un suo potenziale, allora per ogni curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  si ha che

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)),$$

cioè l'integrale di  $\vec{F}$  lungo la curva  $\gamma$  non dipende da  $\gamma$  ma solo dal punto iniziale  $\gamma(a)$  e dal punto finale  $\gamma(b)$ .

### 7.5.3 Condizione necessaria affinché un campo sia conservativo

Vale il seguente

**Teorema 7.5.4.** Sia  $\vec{F}(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$  un campo conservativo di classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ . Allora

$$(F_i)'_{x_j}(x_1, \dots, x_n) = (F_j)'_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

per ogni  $1 \leq i \leq j \leq n$ .

**Osservazione.** Si dice che un campo che verifica la condizione necessaria del teorema precedente soddisfa la condizione di uguaglianza delle derivate incrociate. È importante notare che la condizione appena scritta è solo necessaria, ovvero esistono campi che non sono conservativi ma che comunque soddisfano la condizione sulle derivate incrociate.

### 7.5.4 Condizione sufficiente affinché un campo sia conservativo

Vale il seguente teorema.

**Teorema 7.5.5.** Sia  $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo di classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ , dove  $\Omega = \mathbb{R}^n$  oppure  $\Omega = U_r(P)$  per qualche  $P \in \Omega$  e  $r \in ]0, +\infty[$ . Se  $\vec{F}$  soddisfa la condizione necessaria sulle derivate incrociate, allora  $\vec{F}$  è conservativo.