3. Segnali

Le teorie che si occupano del trattamento e della trasmissione delle informazioni indicano con la parola *segnale* quello che i matematici chiamano *funzione*: si tratta di una qualche legge (meccanismo, processo, algoritmo, misura, filtro, etc...) che associa ad una variabile (può essere il *tempo*, la *frequenza*, le coordinate di un pixel su uno schermo, la posizione e l'istante in cui si esegue una misurazione,...) una quantità che, per essere trattata matematicamente, può essere rappresentata da un *numero reale*, da un *numero complesso*, da un *vettore*, da una *matrice* o quant'altro.

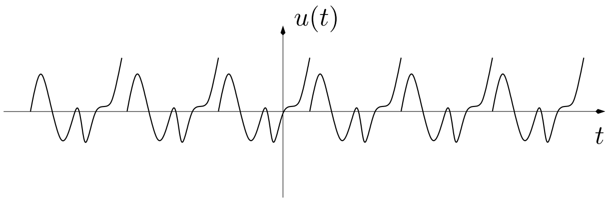
Nella descrizione dei *segnali* occorre quindi precisare sempre

- quale tipo di variabile si sta considerando e dove questa è definita (il *dominio* del segnale: lo indicheremo momentaneamente con D)
- quale tipo di risultato ci aspettiamo dal segnale (il *codominio*): tipicamente i valori assunti da un segnale sono numeri reali (il codominio è quindi $\mathbb{R}$) ma spesso sarà utile considerare segnali *complessi*, (quindi il codominio sarà $\mathbb{C}$). La distinzione viene fatta solitamente all'inizio di ogni argomento e viene lasciata sottointesa durante tutto il discorso.

Definizione 3.1 (Segnali) *Un* segnale *(*reale *o* complesso*) è una* funzione *che associa ad ogni elemento del dominio D un numero (appunto* reale *o* complesso*). Indicheremo con $\boldsymbol{S}(D)$ l'insieme di tutti i segnali aventi dominio D.*

Vediamo subito qualche esempio; alcuni di questi ci accompagneranno lungo tutto il corso.

Segnali temporali. Quando $D := \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ e la variabile in D è pensata come tempo, $\boldsymbol{S}(-\infty, +\infty)$ è costituito da tutti i possibili *segnali temporali* (si chiamano anche *segnali a tempo continuo*). Indicheremo spesso con t la variabile "tempo", con $u(t)$ il valore assunto dal segnale all'istante t.



Se consideriamo solo segnali temporali definiti per valori positivi del tempo otteniamo $\boldsymbol{S}(0, +\infty)$, spesso chiamati *segnali causali*; restringendoci ulteriormente ad un intervallo limitato $(T_{\text{inizio}}, T_{\text{fine}})$ (ciò che ovviamente succede in pratica) si ottengono i segnali di $\boldsymbol{S}(T_{\text{inizio}}, T_{\text{fine}})$.

Esempi

E.1 I segnali *costanti:* sono quelli che assumono sempre lo stesso valore c, cioè

$$u(t) = c \quad \text{per ogni } t \in (-\infty, +\infty).$$

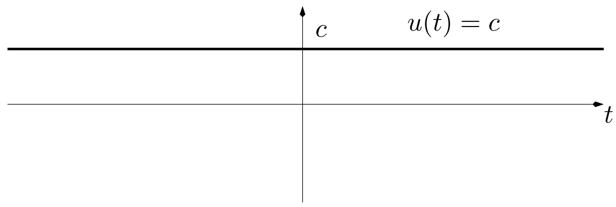


Figura 3.1: Un segnale costante

E.2 I segnali *lineari* o *affini*: sono quelli del tipo

$$u(t) = a + bt \quad \text{per una scelta delle costanti } a, b.$$

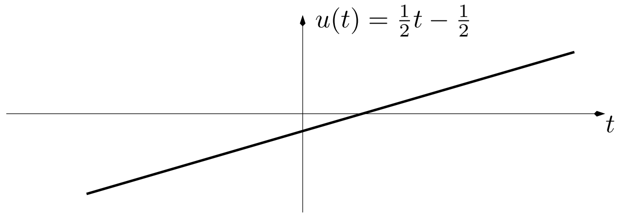


Figura 3.2: Esempio di segnale affine

E.3 I segnali *quadratici*: hanno la forma

$$u(t) := a + bt + ct^2$$

E.4 I segnali *polinomiali*: sono la generalizzazione naturale degli esempi precedenti e per poterli scrivere in forma compatta si usano, anziché le costanti $a, b, c, \ldots$, i simboli con indice $a_0, a_1, \ldots$: quindi

$$u(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_d t^d = \sum_{n=0}^{d} a_n t^n.$$

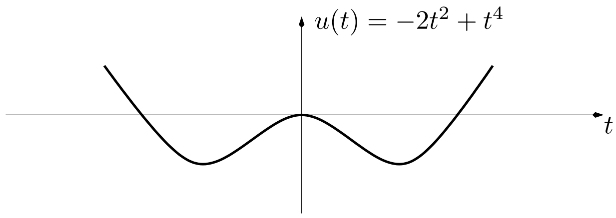


Figura 3.3: Un segnale polinomiale

Vale la pena di osservare che, mentre la variabile t è sempre pensata reale (il tempo!) le costanti $a_0, \ldots a_d$ possono essere sia reali (segnali reali) che complesse (in tal caso si ha un segnale complesso).

E.5 I segnali *costanti a tratti.* Prendiamo il caso di un intervallo limitato $(T_{\text{inizio}}, T_{\text{fine}})$; si divide l'intervallo di tempo in un numero finito di parti tramite i punti di una suddivisione

$$\mathscr{S} = \Big\{ t_0 = T_{\text{inizio}} < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots < t_{N-1} < t_N = T_{\text{fine}} \Big\} \tag{3.1}$$

e si considerano i segnali che sono *costanti* in ogni singolo tratto (t_{n-1}, t_n), quindi

$$u|_{(t_{n-1}, t_n)} \equiv U_n.$$

Una volta scelta la suddivisione $\mathscr{S}$, il segnale risulta quindi completamente determinato dai valori $\{U_1, U_2, \ldots, U_N\}$: è quindi uno dei modi possibili per rappresentare un segnale discreto U. Dal punto di vista fisico, il valore nei punti dove c'è un salto non è molto rilevante e spesso non lo si precisa. Un caso molto comune è quello di una suddivisione uniforme, per la quale

$$t_n - t_{n-1} = \tau = \frac{T_{\text{fine}} - T_{\text{inizio}}}{N}.$$

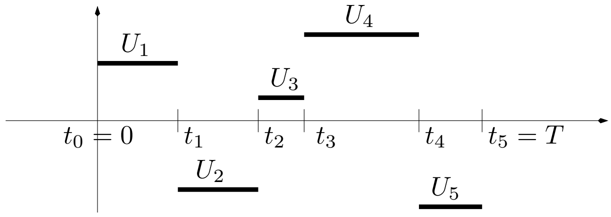


Figura 3.4: Un segnale costante a tratti

E.6 I segnali *(continui e) lineari a tratti* relativi alla suddivisione $\mathscr{S}$ definita in (3.1) sono quelli che in ogni intervallo sono lineari; essi vengono facilmente determinati assegnando il loro valore nei punti della suddivisione, imponendo cioè che

$$u(t_n) := U_n, \quad \text{da cui}$$
$$u(t) = U_{n-1} + \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}(U_n - U_{n-1}) \quad \text{se } t \in (t_{n-1}, t_n). \tag{3.2}$$

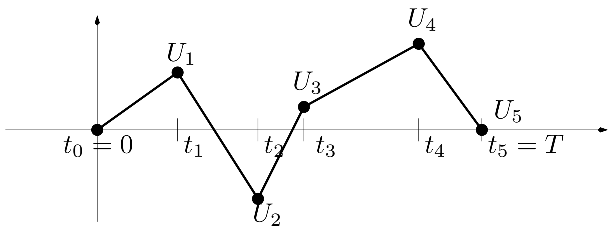


Figura 3.5: Un segnale lineare a tratti

E.7 Concludiamo gli esempi con qualche segnale che incontreremo frequentemente e che quindi merita un nome particolare:

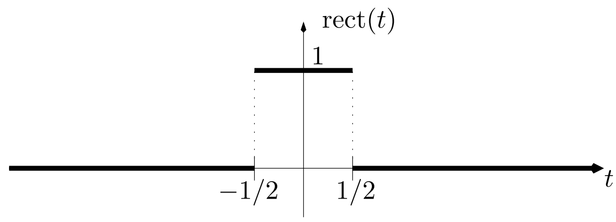


Figura 3.6: Il segnale $\mathrm{rect}(t)$

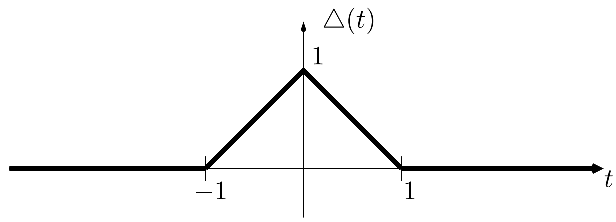


Figura 3.7: Il segnale $\triangle(t) = \big(1 - |t|\big)^+$

Digressione

Segnali in frequenza. Un segnale "in frequenza" è un segnale la cui variabile è appunto una frequenza $f \in (-\infty, +\infty)$ (più avanti preciseremo meglio il significato di questo termine) e i cui valori sono $u(f)$. Chiunque si sentirebbe a disagio ad identificare una frequenza con un tempo. La rappresentazione matematica

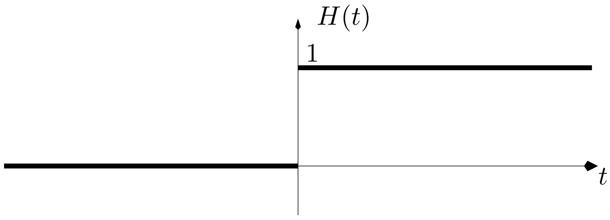


Figura 3.8: Il segnale di Heaviside $H(t)$

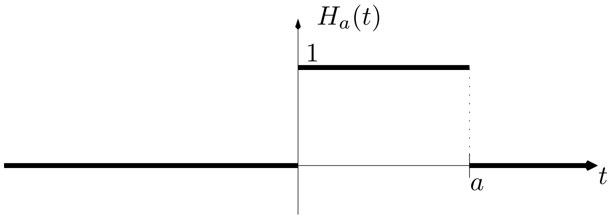


Figura 3.9: Il segnale $H_a(t) = H(t) - H(t-a)$, $a > 0$

di tali segnali, tuttavia, è identica, poiché si tratta sempre di "qualcosa" che associa ad un numero (che sia il tempo o la frequenza) un altro numero (il valore appunto del segnale): siamo quindi in $\boldsymbol{S}(-\infty, +\infty)$ (naturalmente sono diverse le operazioni e le unità di misura che ci permettono di associare un numero ad un tempo o ad una frequenza).
Quando sarà il caso, sottolineeremo comunque la differenza tra l'origine dei due tipi di segnale scegliendo nomi diversi per le variabili (t e f), benché questa distinzione sia matematicamente inessenziale (ogni concetto matematico *deve* essere indipendente dal nome scelto per le varie variabili in gioco).
Vedremo (molto) più avanti che la possibilità di scambiare tempo e frequenza nelle trasformate di Fourier sarà una tecnica comunque utile (si chiama talvolta principio di *dualità*.)

Esempio

Segnali discreti. Torniamo ad oggetti più semplici (apparentemente...): un segnale è *discreto* quando la sua variabile può assumere solo un insieme *discreto* di valori: $D := \mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ rappresenta la scelta più semplice e in questo caso il segnale $U \in \boldsymbol{S}(\mathbb{Z})$ (useremo spesso le lettere maiuscole per i segnali discreti) è determinato dai valori $U_n := U(n), \quad n \in \mathbb{Z}$. Lavorando con gli interi il matematico si sente attratto irresistibilmente dal nome n per la variabile indipendente, anche se questa è un tempo o una frequenza e questo può causare qualche fraintendimento.
Al solito, se si considerano solo interi nonnegativi, basta usare $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \}$ al posto di $\mathbb{Z}$.

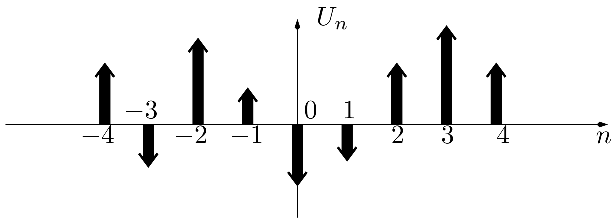


Figura 3.10: Rappresentazione "a frecce" di un segnale discreto

Spesso è utile non essere costretti a scegliere intervalli unitari tra i valori ammissibili per la variabile discreta: si fissa quindi un numero $\tau > 0$ (si chiama *passo* o *ampiezza* della suddivisione) e si considera $D := \{n\tau : n \in \mathbb{Z}\}$: $\boldsymbol{S}(D)$ può essere adatto a rappresentare il campionamente a passo τ di un segnale temporale.
Naturalmente considerare segnali definiti su tutto $\mathbb{N}$ o addirittura su $\mathbb{Z}$ è un'utile astrazione matematica ma ogni elaborazione informatica richiede un numero finito di valori, diciamo N. Si sceglie allora $D := \{0, \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots, (N-1)\tau\}$ e in questo caso un elemento U di $\boldsymbol{S}(D)$ è determinato da N numeri reali $U_n := U(n\tau)$, $n = 0, \ldots, N-1$, e può quindi essere rappresentato da un vettore di $\mathbb{R}^N$, cioè da N numeri reali, che possono poi essere manipolati ($\mathbb{C}^N$ nel caso di segnali complessi). Questa rappresentazione è comoda per trattare segnali discreti finiti (*segnali digitali*).

Esempio

Il dominio delle frequenze complesse. Quando parleremo della trasformata di Laplace (e, se ci sarà tempo, della trasformata $\mathcal{Z}$) incontreremo segnali la cui variabile è *complessa*, cioè il cui dominio D sarà un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ (in questo caso i semipiani e i dischi giocano un ruolo importante). Dunque incontreremo segnali complessi dipendenti da una variabile pure complessa.

Esempio

Segnali stazionari. Anche se ci soffermeremo principalmente sui segnali temporali, vi sono molti altri casi in cui le variabili di un segnale hanno tutt'altro significato. Ad esempio la distribuzione di potenziale elettrostatico in una sfera $B \subset \mathbb{R}^3$ è un elemento di $\boldsymbol{S}(B)$; esso dipende dalla posizione dei punti in D, quindi da tre coordinate spaziali. Se tale potenziale varia nel tempo, il segnale spazio-temporale associato è un elemento di $\boldsymbol{S}(B \times \mathbb{R})$: alle coordinate spaziali in B se ne aggiunge un'altra temporale in $\mathbb{R}$; il dominio, in questo caso, è $D := B \times \mathbb{R}$.

Digressione

Immagini digitali. Non sempre è naturale scegliere $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ come codominio né un vettore discreto di valori per la variabile da cui dipende il segnale. Ad esmpio un'*immagine rettangolare* composta da $N \times M$ pixel può essere rappresentata associando al pixel di coordinate (n, m) un valore reale $U_{n,m} = U(n, m)$ (0 o 1 se si considera un'immagine in bianco e nero; da 0 a $K - 1$ se si hanno a disposizione K toni di grigio) corrispondente allo stato di quel pixel: in questo caso $D := \{0, 1, \dots, N - 1\} \times \{0, 1, \dots, M - 1\} \subset \mathbb{R}^2$ è naturalmente una *matrice* di punti nel piano ed anche il codominio è discreto, essendo costituito solo da $\{0, 1, \dots, K - 1\}$.
In realtà tutti i segnali digitali hanno un codominio discreto, potendo assumere solo un numero finito di valori, ma, a differenza di un'immagine in bianco e nero, quando la rappresentazione di questi ultimi è complicata è più conveniente pensare il codominio costituito da un intervallo *continuo* di $\mathbb{R}$. Anche la scelta del dominio è flessibile: in certi casi può essere utile pensare che il segnale digitale U sia definito per *tutti i valori interi*, ad esempio estendendolo in modo periodico oppure ponendolo 0 al di fuori della griglia iniziale.

Motivazioni

Ci si può chiedere come mai occorre insistere così a lungo sul concetto di segnale. Il motivo fondamentale per cui vale la pena spendere del tempo per acquisire un po' di familiarità *matematica* con questo concetto è che in molte situazioni conviene *pensare ad un segnale come ad un singolo oggetto matematico da trattare nel suo complesso* piuttosto che analizzarlo attraverso ciascuno dei suoi valori, come invece si è imparato a fare durante i primi corsi di calcolo. Tutte le operazioni che studieremo in questo corso (serie e trasformate di Fourier, trasformata di Laplace, convoluzioni, filtri,...) agiscono *globalmente* sui segnali e il loro risultato si può conoscere solo se si conosce fin dall'inizio l'intera informazione contenuta in un segnale. Già che ci siamo, preveniamo un'altra possibile domanda: **perché insistiamo subito con i segnali complessi?** Vedremo che la teoria delle serie e trasformate di Fourier (per non parlare di quella di Laplace) risulta notevolmente semplificata se ci si abitua a lavorare con i numeri complessi.

Qualunque sia l'insieme $\boldsymbol{S}(D)$ dei segnali (reali o complessi, definiti quindi nel dominio D) che si stanno considerando, è sempre possibile agire su di essi con alcune operazioni fondamentali, che ora richiamiamo.

Definizione 3.2 (Somma e prodotto di due segnali)
Se $u, v \in \boldsymbol{S}(D)$ sono due segnali a valori reali o complessi, si definisce somma *di u, v (indicata con il solito simbolo $u + v$) il nuovo segnale*

$$w = u + v : \quad w(t) := u(t) + v(t) \quad \forall\, t \in D.$$

Analogamente, il prodotto *di u, v (indicato con uv) è definito da*

$$w = uv : \quad w(t) := u(t)v(t) \quad \forall\, t \in D.$$

Se λ è un numero complesso, il segnale λu è il segnale "amplificato" *definito da*

$$w = \lambda u : \quad w(t) = \lambda u(t) \quad \forall\, t \in D.$$

Il calcolo della somma di due segnali è particolarmente semplice quando questi *non interferiscono*, cioè quando non succede mai che i due segnali u e v siano *contemporaneamente diversi da* 0. In tal caso la somma è la semplice *sovrapposizione del grafico dei due segnali*; un semplice esempio è riportato in Figura 3.11. Queste operazioni, benché elementari, possono produrre effetti difficilmente prevedibili, soprattutto quando sono applicate ripetutamente. Riportiamo alcuni semplici esempi in Figura 3.12. Ne vedremo un esempio sorprendente proprio con le serie di Fourier.

Accontentiamoci ora di un semplice esempio, comunque piuttosto utile per lavorare in seguito.

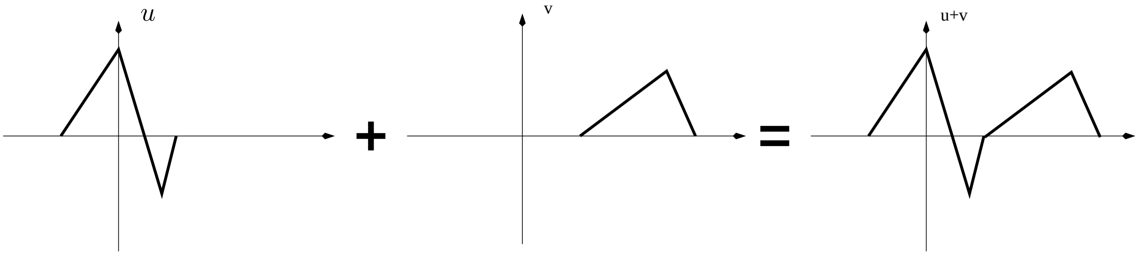


Figura 3.11: Somma di segnali che non interferiscono

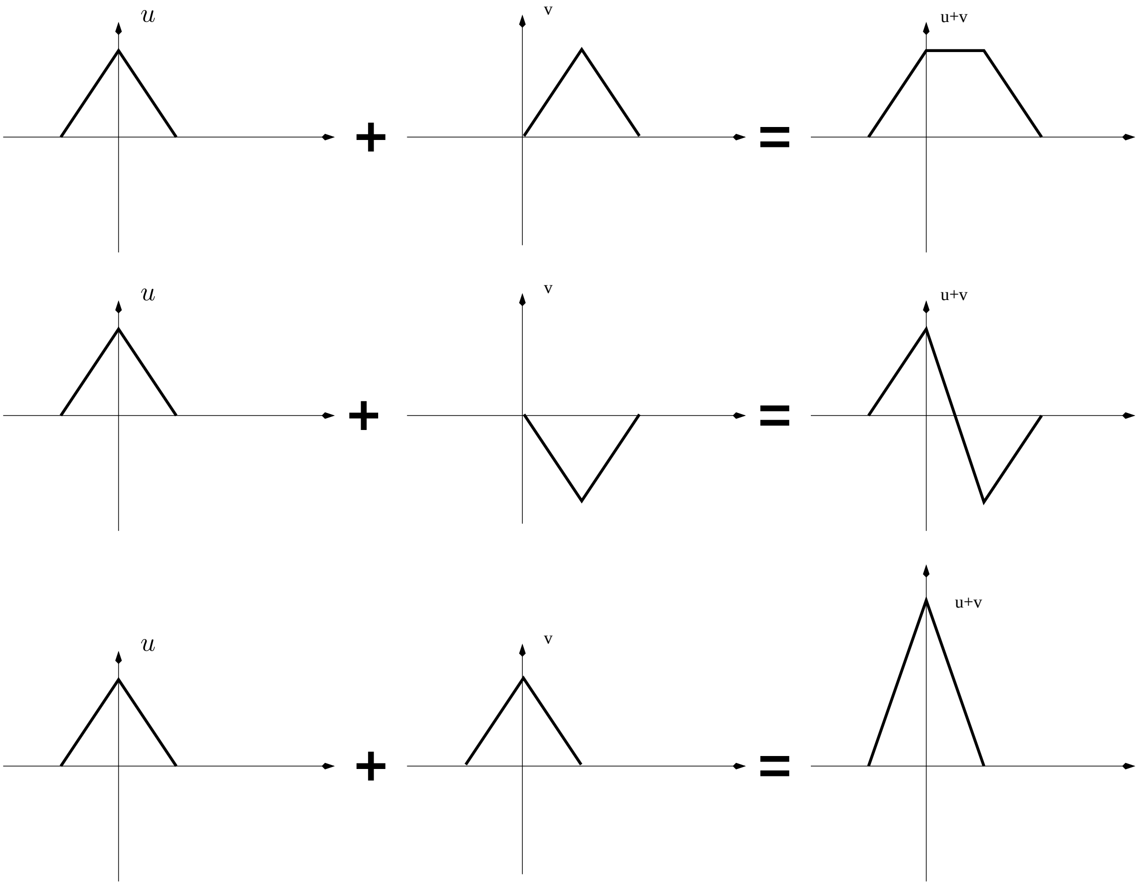


Figura 3.12: Somma di segnali che interferiscono

Esempio 3.3 (Decomposizione di un segnale complesso I) Come ci si può fare un'idea di un segnale *complesso*? La prima possibilità è quella di considerare la sua parte reale $\mathrm{Re}\, u$ e la sua parte immaginaria $\mathrm{Im}\, u$. Come è facile intuire, questi sono due nuovi segnali (questa volta *reali* che sono definiti da

$$\big(\mathrm{Re}\, u\big)(t) := \mathrm{Re}(u(t)) = \frac{u+\bar{u}}{2}, \quad \big(\mathrm{Im}\, u\big)(t) := \mathrm{Im}(u(t)) = \frac{u-\bar{u}}{2i} \qquad \forall\, t \in D, \tag{3.3}$$

dove $\bar{u}$ indica il segnale *coniugato*. Di conseguenza ogni segnale complesso u ammette la decomposizione

$$u = \mathrm{Re}\, u + i\, \mathrm{Im}\, u, \quad u(t) = \mathrm{Re}\, u(t) + i\, \mathrm{Im}\, u(t) \qquad \forall\, t \in D, \tag{3.4}$$

che coivolge le operazioni di somma e di moltiplicazione (in questo caso per la costante complessa i) introdotte nella Definizione 3.2.

Richiami

L'esponenziale complesso. Riservandoci di ritornare con maggior profondità sull'argomento, richiamiamo alcune proprietà dell'esponenziale complesso. Innanzitutto

$$e^{i\alpha} := \cos\alpha + i\sin\alpha, \tag{3.5}$$

da cui

$$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha = \overline{e^{i\alpha}} \tag{3.6}$$

e quindi

$$\cos\alpha = \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}\right) = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}, \qquad \sin\alpha = \operatorname{Im}\left(e^{i\alpha}\right) = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}. \tag{3.7}$$

Le formule di addizione sono equivalenti alle proprietà dell'esponenziale:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} \tag{3.8}$$

da cui, sviluppando

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) &= \big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big)(\cos\beta + i\sin\beta\big)\\ &= \big(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\big) + i\big(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\big)\end{aligned}$$

e, prendendo parte reale e parte immaginaria

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \tag{3.9}$$

Finalmente, se $z = x + iy$ è un generico numero complesso, si pone

$$e^z := e^x e^{iy} = e^x\big(\cos y + i\sin y\big) \tag{3.10}$$

in modo che

$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Arg} e^z = y = \operatorname{Im} z. \tag{3.11}$$

Esempio 3.4 (Decomposizione di un segnale complesso II) C'è un altro modo di decomporre un segnale complesso $u \in \boldsymbol{S}(D)$ (potremmo chiamarlo *moltiplicativo*, per distinguerlo da quello *additivo* appena visto): si considera il suo ***modulo*** $|u|$ e il suo ***argomento*** $\operatorname{Arg} u$, cioè

$$|u|(t) := |u(t)|, \quad \operatorname{Arg} u(t) := \operatorname{Arg}(u(t)) \quad \forall\, t \in D. \tag{3.12}$$

Si ha quindi la rappresentazione esponenziale

$$u = |u|e^{i\operatorname{Arg} u} = |u|\Big(\cos\big(\operatorname{Arg} u\big) + i\sin\big(\operatorname{Arg} u\big)\Big), \tag{3.13}$$

che fornisce una decomposizione *moltiplicativa* di u. Si può osservare che

$$\operatorname{Re} u = |u|\cos\big(\operatorname{Arg} u\big), \quad \operatorname{Im} u = |u|\sin\big(\operatorname{Arg} u\big), \quad |u| = \sqrt{\big(\operatorname{Re} u\big)^2 + \big(\operatorname{Im} u\big)^2}. \tag{3.14}$$

Morale...

Segnali complessi vs segnali reali. **Un segnale complesso** è un oggetto matematico **molto** utile per trattare in modo più sintetico **una coppia di segnali reali**, la cui rappresentazione, appunto, complessa rivela spesso più di quanto non appaia quando li si consideri semplicemente due segnali reali.

Digressione

L'argomento di un numero complesso. Ricordiamo che, al contrario della parte reale, della parte immaginaria e del modulo, la definizione di argomento di un numero complesso non è *canonica* (i matematici usano questo aggettivo per chiarire che si tratta di una proprietà universale, la cui definizione intrinseca non nasconde alcuna possibile ambiguità ed è adottata da tutti), ma dipende da alcune scelte che vanno sempre esplicitate. Rimandiamo la discussione alla appendice.

Vale la pena sottolineare una proprietà importante, comune a tutti gli esempi di segnali che abbiamo appena introdotto: se si considerano due segnali u, v della stessa classe (cioè ad esempio due segnali quadratici, due segnali costanti a tratti, due segnali lineari a tratti, etc.) anche la loro somma appartiene alla stessa classe, così come il prodotto di un segnale per un qualunque numero complesso. Per sottolineare questo fatto (solo in apparenza banale) i matematici dicono che questi segnali formano ***uno spazio vettoriale.***

Definizione 3.5 (Spazi vettoriali di segnali) Un insieme di segnali V (reali o complessi) è uno ***spazio vettoriale*** se dati due segnali qualunque $u, v \in V$ e un numero (reale o complesso) λ la somma $u + v$ e il prodotto λu sono ancora segnali appartenenti a V.

Non sempre converrà considerare *tutti* i segnali possibili di $\boldsymbol{S}(D)$: molto spesso individueremo alcune sottoclassi su cui sarà più semplice operare, per le quali la teoria ci fornisce maggiori informazioni, e che corrispondono meglio ai fenomeni che si vogliono studiare. Ad esempio, in molti casi si conosce a priori che le quantità in gioco non possono superare certi valori di soglia: in tal caso è naturale lavorare fin da subito con l'insieme dei segnali *limitati.*

Definizione 3.6 (Segnali limitati) *Un segnale (reale o complesso) $u \in \boldsymbol{S}(D)$ si dice* limitato *se il suo modulo non può diventare arbitrariamente grande: matematicamente, esiste una* costante *M (cioè qualcosa che non dipende dalla variabile del segnale) tale che*

$$|u(t)| \le M \qquad \forall\, t \in D. \tag{3.15}$$

Indicheremo con $\boldsymbol{B}(D)$ ($\boldsymbol{B}$ sta per bounded*, che in inglese significa appunto limitato) l'insieme di tutti i segnali limitati definiti in D.*

Esercizio Verificare che $\mathbf{B}(D)$ è uno spazio vettoriale.

Richiami ***Il modulo....*** Se il segnale u è reale, la condizione (3.15) dice che

$$-M \le u(t) \le M \qquad \forall\, t \in D. \tag{3.16}$$

Quando il segnale è complesso, esso si può sempre decomporre come richiamato negli esempi 3.3 e 3.4; è facile convincersi che in tal caso u è limitato sse tanto la sua parte reale $\mathrm{Re}\, u$ che la sua parte immaginaria $\mathrm{Im}\, u$ lo sono.

Sui segnali temporali si possono effettuare due nuove operazioni: traslazioni e dilatazioni. I termini inglesi *shift* e *rescaling* che giustificano i simboli che introduciamo, sono più espressivi...

Definizione 3.7 (Shift e rescaling) *Per ogni segnale $u \in \boldsymbol{S}(-\infty, +\infty)$, $\tau \in \mathbb{R}$ e $\omega \neq 0$, il segnale ritardato $\mathsf{S}_\tau[u]$ e il segnale riscalato $\mathsf{R}_\omega[u]$ sono dati da*

$$\mathsf{S}_\tau[u](t) := u(t - \tau), \quad \mathsf{R}_\omega[u](t) := u(\omega t). \tag{3.17}$$

Quando il parametro τ è positivo, $\mathsf{S}_\tau[\cdot]$ trasla il grafico del segnale verso destra:

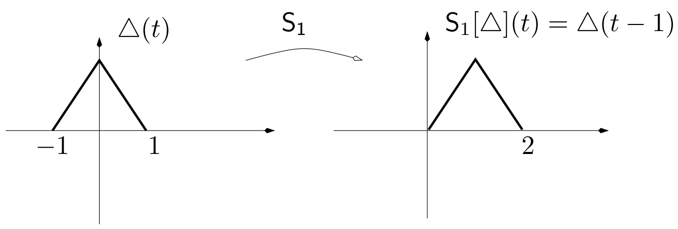


Figura 3.13: Effetto di $\mathsf{S}_1[\cdot]$

Valori negativi di τ corrispondono a traslazioni verso sinistra:

Riscalamenti con $\omega > 1$ comportano una “contrazione dei tempi”, il segnale viene “trasmesso più velocemente”:

Quando $0 < \omega < 1$ si ottiene una “dilatazione dei tempi”, il segnale viene “trasmesso più lentamente”:

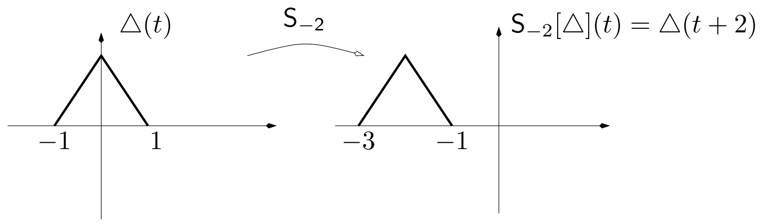


Figura 3.14: Effetto di $\mathsf{S}_{-2}[\cdot]$

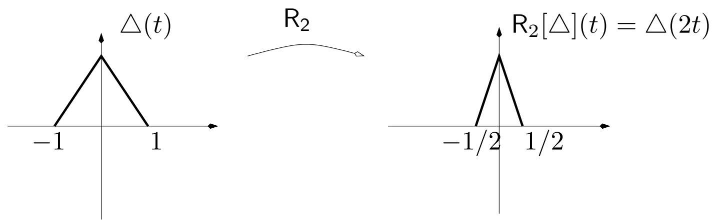


Figura 3.15: Effetto di $\mathsf{R}_2[\cdot]$

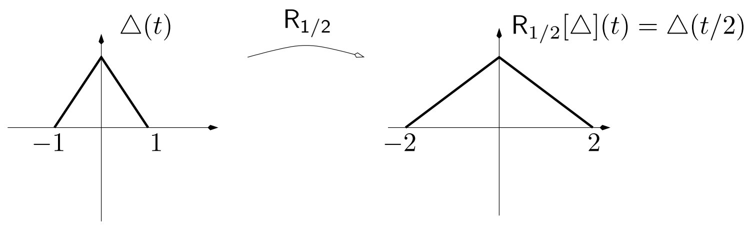


Figura 3.16: Effetto di $\mathsf{R}_{1/2}[\cdot]$

Definizione 3.8 (Segnali T-periodici e gli spazi $\boldsymbol{S}_T(-\infty,+\infty)$, $\mathbf{B}_T(-\infty,+\infty)$) *Diciamo che un segnale $u \in \boldsymbol{S}(-\infty,+\infty)$ è* T-periodico *se*

$$u(t) = u(t+T) \quad \forall\, t \in (-\infty,+\infty),$$

o, equivalentemente, se

$$\mathsf{S}_T[u] \equiv u. \tag{3.18}$$

Chiamiamo $\boldsymbol{S}_T(-\infty,+\infty)$ lo spazio costituito da tutti i segnali T-periodici e $\boldsymbol{B}_T(-\infty,+\infty)$ quello costituito da tutti i segnali T-periodici e limitati.

Esercizio — Se un segnale è T-periodico è anche $2T$-periodico e, in generale, kT-periodico, per ogni ***intero*** $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio — Se un segnale u è T-periodico (frequenza $f_0 = 1/T$) allora $\mathsf{R}_\omega[u]$ è T/ω-periodico (e quindi la sua frequenza è ωf_0).

Convenzione — ***Frequenza e pulsazione fondamentale.*** Indicheremo generalmente con $f_0 := \frac{1}{T}$ la *frequenza* fondamentale di oscillazione associata ad un periodo T; talvolta si usa pure la *frequenza angolare* o *pulsazione* $\omega_0 := 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Esempio 3.9 (Segnali trigonometrici) Fissato $T > 0$ i *segnali trigonometrici elementari* che hanno T come *minimo* periodo sono

$$c_{\omega_0}(t) = \cos(\omega_0 t) = \cos(2\pi f_0 t), \quad s_{\omega_0}(t) = \sin(\omega_0 t) = \sin(2\pi f_0 t). \tag{3.19}$$

Ci si accorge subito che anche

$$\cos(\omega_0 t + \theta), \quad \sin(\omega_0 t + \theta)$$

hanno il medesimo periodo (il numero reale θ viene solitamente chiamata *fase*) e così pure ogni loro combinazione lineare. Grazie alle formule di addizione

$$\begin{aligned}\cos(\omega_0 t + \theta) &= \cos\theta\cos(\omega_0 t) - \sin\theta\sin(\omega_0 t) = \cos\theta\, c_{\omega_0}(t) - \sin\theta\, s_{\omega_0}(t),\\ \sin(\omega_0 t + \theta) &= \sin\theta\cos\omega_0 t + \cos\theta\sin\omega_0 t = \sin\theta\, c_{\omega_0}(t) + \cos\theta\, s_{\omega_0}(t),\end{aligned}$$

ogni segnale trigonometrico *reale* di pulsazione ω_0 si rappresenta come

$$u(t) := a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) = \rho\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{3.20}$$

dove

$$\rho := \sqrt{a^2 + b^2} = |a - ib|, \quad a = \rho\cos\theta, \quad b = -\rho\sin\theta, \quad \theta = \mathrm{Arg}(a - ib). \tag{3.21}$$

Ogni segnale è quindi in corrispondenza con un numero complesso

$$c := a - ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \quad |c| = \rho, \quad \mathrm{Arg}\, c = \theta \tag{3.22}$$

il cui modulo fornisce l'ampiezza del segnale mentre l'argomento ne è la fase. Ricordando la formula di Eulero

$$c = \rho e^{i\theta}, \tag{3.23}$$

possiamo anche scrivere, grazie alle proprietà dell'esponenziale

$$\begin{aligned}u(t) &= a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t = \rho\cos(\omega_0 t + \theta) = \mathrm{Re}\left(\rho e^{i(\omega_0 t + \theta)}\right) = \mathrm{Re}\left(\rho e^{i\theta} e^{i\omega_0 t}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(c e^{i\omega_0 t}\right)\\ &= \hat{u}_1 e^{i\omega_0 t} + \hat{u}_{-1} e^{-i\omega_0 t}\end{aligned} \tag{3.24}$$

dove finalmente

$$c = a - ib, \quad u_1 = \overline{\hat{u}}_{-1} = \frac{1}{2}(a - ib) = \frac{1}{2}c. \tag{3.25}$$

Esercizio Se $\omega \in \mathbb{R}$, il segnale complesso $t \mapsto e^{i\omega t} = e^{2\pi i\, f t}$ è T-periodica se e solo se

$$\omega = 2\pi\frac{n}{T} = n\omega_0, \quad f = nf_0, \quad \text{per qualche intero } n \in \mathbb{Z}. \tag{3.26}$$

cioè se la frequenza (la pulsazione) sono multiple intere della frequenza (pulsazione) fondamentale. Analogamente, i segnali trigonometrici $\cos(\omega t) = \cos(2\pi f t), \sin(\omega t) = \sin(2\pi f t)$ sono T-periodici se e solo se vale la (3.26).

Analisi e sintesi dei segnali

Ripartiamo dalla definizione di spazio vettoriale di segnali che abbiamo dato nella precedente lezione:

Definizione 3.10 (Spazi vettoriali di segnali) Un insieme di segnali V (reali o complessi) è uno ***spazio vettoriale*** se dati due segnali qualunque $u, v \in V$ e un numero (reale o complesso) λ la somma $u + v$ e il prodotto λu sono ancora segnali appartenenti a V. Si dice, equivalentemente, che ogni combinazione lineare del tipo $\lambda u + \mu v$ (λ, μ coefficienti reali o complessi) appartiene ancora a V.

Esempi

E.1 È chiaro che, qualunque sia il dominio D, $\boldsymbol{S}(D)$ costituisce uno spazio vettoriale: segnali temporali e segnali discreti sono gli esempi più semplici di spazi vettoriali.

E.2 È facile rendersi conto che una combinazione lineare di segnali T-periodici e limitati (aventi lo stesso periodo!) è ancora T-periodica e limitata: $\mathbf{B}_T(-\infty, +\infty)$ è dunque uno spazio vettoriale.

E.3 I segnali costanti a tratti relativi alla partizione

$$\mathscr{S} = \Big\{ t_0 = T_{\text{inizio}} < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots < t_{N-1} < t_N = T_{\text{fine}} \Big\} \tag{3.27}$$

(si veda l'esempio E.5 della lezione precedente) formano uno spazio vettoriale: una combinazione lineare di due qualunque di questi è ancora costante in ciascun intervallo (t_{n-1}, t_n) della suddivisione.

E.4 Analogamente, i segnali continui e lineari a tratti discussi nell'esempio E.6 della prima lezione formano uno spazio vettoriale.

Motivazioni

Gli spazi vettoriali sono l'ambiente più semplice e naturale per formulare il problema dell'*analisi e della sintesi* dei segnali: ecco perché insistiamo su questo fondamentale concetto.

Elaborazione lineare di segnali

Supponiamo ora di avere scelto un "ambiente di lavoro" naturale per il tipo di modelli che vogliamo studiare e che questo "ambiente di lavoro" sia uno spazio vettoriale, che indichiamo con la lettera V: possiamo pensare a uno qualunque degli esempi sopra riportati.

Il nostro modello elabora un segnale di ingresso (input) u e restituisce un segnale in uscita (output) v che indichiamo con $\mathscr{T}[u]$. Facciamo l'ipotesi **fondamentale** che il modello sia "lineare", cioè

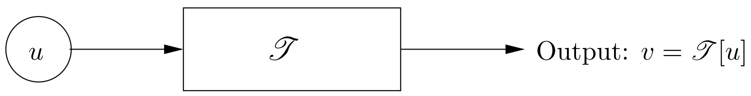


Figura 3.17: Elaborazione del segnale di ingresso u

obbedisca al cosiddetto "principio di sovrapposizione degli effetti": la riposta di $\mathscr{T}$ (qualunque cosa significhi....) ad una sollecitazione che è una sovrapposizione di segnali dati si può ottenere calcolando la somma delle risposte ottenute per ciascuna sollecitazione; inoltre se amplifichiamo l'ingresso di un coefficiente α l'uscita ne risulterà amplificata della medesima quantità:

$$\mathscr{T}[u_1 + u_2] = \mathscr{T}[u_1] + \mathscr{T}[u_2], \qquad \mathscr{T}[\alpha u] = \alpha \mathscr{T}[u]. \tag{3.28}$$

Supponiamo ancora che il modello stesso ci suggerisca un certo "insieme privilegiato"

$$\mathsf{E} := \{\ldots \mathsf{e}_{-N}, \mathsf{e}_{-N+1}, \ldots, \mathsf{e}_{-1}, \mathsf{e}_0, \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \ldots, \mathsf{e}_N, \ldots\} \tag{3.29}$$

di segnali particolarmente "semplici", con cui è facile operare: ciò significa che è facile calcolare la risposta $\mathsf{g_k} := \mathscr{T}[\mathsf{e_k}]$ a ciascun ingresso e_k; *un esempio molto frequente* è quello in cui ciascun segnale e_k venga semplicemente *amplificato* di una costante λ_k, cioè

$$\mathscr{T}[\mathsf{e}_k] = \lambda_k \mathsf{e}_k. \tag{3.30}$$

Allora per capire l'effetto di $\mathscr{T}$ su un generico (e spesso complicato...) ingresso u converrà prima cercare di

1. **Analisi:** decomporre u nella sovrapposizione dei segnali semplici e_k opportunamente pesati: si cercano cioè i pesi α_k in modo che

$$u = \alpha_{-N}\mathsf{e}_{-N} + \alpha_{-N+1}\mathsf{e}_{-N+1} + \ldots + \alpha_{-1}\mathsf{e}_{-1} + \alpha_0\mathsf{e}_0 + \alpha_1\mathsf{e}_1 + \ldots + \alpha_N\mathsf{e}_N = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k \mathsf{e}_k \quad (3.31)$$

2. **Elaborazione:** elaborare ciascuno di questi tramite $\mathscr{T}$:

$$\mathscr{T}[\alpha_k \mathsf{e}_k] = \alpha_k \mathscr{T}[\mathsf{e}_k] = \alpha_k \mathsf{g}_k; \quad (3.32)$$

il coefficiente di amplificazione α_k si riporta sull'output grazie alla linearità di $\mathscr{T}$

3. **Sintesi:** infine ricomporre l'uscita come la sovrapposizione di ciascuna uscita semplice:

$$v = \mathscr{T}[u] = \alpha_{-N}\mathsf{g}_{-N} + \alpha_{-N+1}\mathsf{g}_{-N+1} + \ldots + \alpha_{-1}\mathsf{g}_{-1} + \alpha_0\mathsf{g}_0 + \alpha_1\mathsf{g}_1 + \ldots + \alpha_N\mathsf{g}_N = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k \mathsf{g}_k \quad (3.33)$$

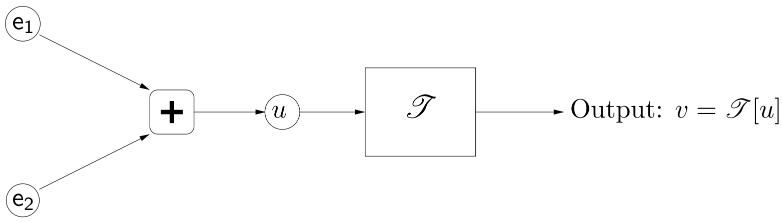


Figura 3.18: Risposta all'ingresso u che è la sintesi di e_1 e e_2

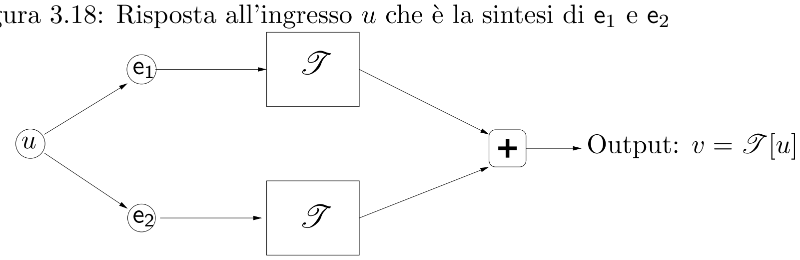


Figura 3.19: In un modello lineare la risposta si può anche ottenere sintetizzando le risposte "più semplici"

Notazione

Indici negativi. Abbiamo usato anche indici negativi per indicare i segnali semplici di (3.29) perché questo sarà il caso tipico dei segnali esponenziali nell'analisi di Fourier.

Precisazione

Dal punto di vista pratico, ogni calcolo numerico opererà con un insieme E di segnali semplici *finito*. Dal punto di vista teorico, invece, è fondamentale poter analizzare segnali arbitrari e di conseguenza trattare un insieme *infinito* di segnali elementari (ecco il motivo dei "puntini" ... in (3.29). Poter considerare la sintesi di un numero infinito di segnali richiede una trattazione matematica più sofisticata.

Esempio

Consideriamo lo spazio V dei segnali lineari a tratti e continui individuato dalla suddivisione canonica dei punti a coordinata intera Questi segnali si possono rappresentare come sovrapposizione di segnali "triangolari" del tipo $\mathsf{e}_k(t) = \Delta(t-k)$, ottenendo la rappresentazione

$$u(t) = U_{-2}\mathsf{e}_{-2} + U_{-1}\mathsf{e}_{-1} + U_0\mathsf{e}_0 + U_1\mathsf{e}_1 + U_2\mathsf{e}_2 \quad (3.34)$$

dove i valori di U_k coincidono esattamente con i valori del segnale u nel nodo k.

Se consideriamo la trasformazione

$$\mathscr{T}[u] := \frac{d}{dt}u \quad (3.35)$$

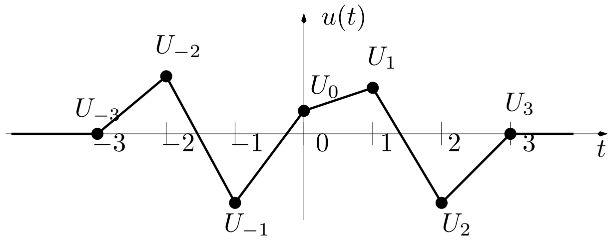


Figura 3.20: Un segnale lineare a tratti, $U_k = u(k)$.

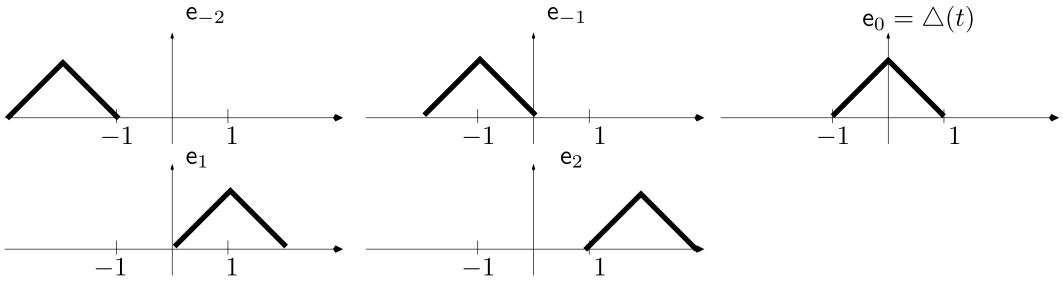


Figura 3.21: Segnali elementari.

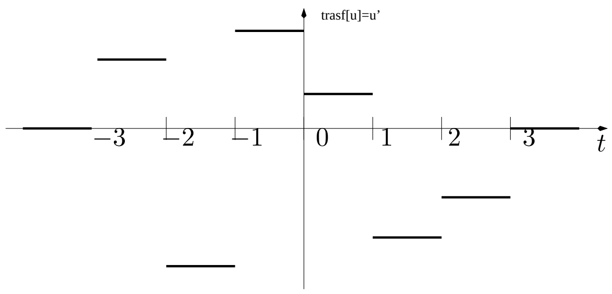


Figura 3.22: Elaborazione del segnale u

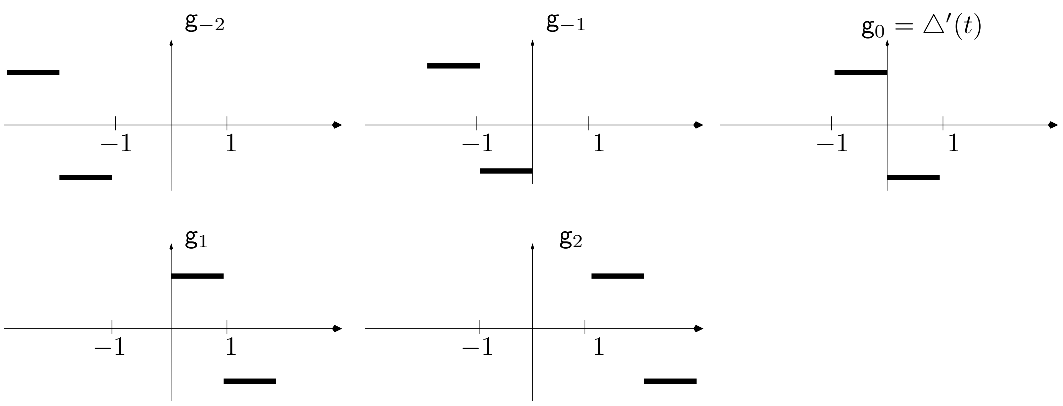


Figura 3.23: Elaborazione dei segnali elementari.

il segnale u della figura 3.20 produce

Il risultato può essere ricostruito a partire dai segnali "derivati" $\mathsf{g}_k := \mathscr{T}[\mathsf{e}_k] = \frac{d}{dt}\mathsf{e}_k$ in figura 3.23 con la formula di sintesi analoga alla (3.34)

$$v(t) = \mathscr{T}[u] = \frac{d}{dt}u = U_{-2}\mathsf{g}_{-2} + U_{-1}\mathsf{g}_{-1} + U_0\mathsf{g}_0 + U_1\mathsf{g}_1 + U_2\mathsf{g}_2. \tag{3.36}$$

Nelle prossime lezioni affronteremo più in dettaglio questi problemi nel caso dei segnali periodici e del sistema trigonometrico di Fourier; vedremo alla fine che alcuni procedimenti e risultati della teoria sono in realtà molto più generali.