Lezione Undici

Mercati delle Attività

Attività

- Un'attività è un bene che fornisce un flusso di servizi nel tempo.
- Es. una casa.
- Un'attività finanziaria fornisce un flusso di moneta nel tempo.

Attività

- Normalmente il valore di un'attività è incerto. Per semplicità, iniziamo scorporando l'incertezza dalla nostra analisi.
- Nella seconda parte della lezione considereremo invece il mercato della attività rischiose.

Arbitraggio

- L'Arbitraggio è lo scambio di attività al fine di trarne profitto.
- Se i mercati funzionano bene tutte le occasioni di profitto verranno scovate presto: in equilibrio vale la condizione di NON arbitraggio.
- Quali sono le implicazioni per i prezzi delle attività nel tempo?

Arbitraggio

- Il prezzo oggi di un titolo è p_0. Il suo prezzo domani sarà p_1. E' meglio vendere?
- Il tasso di rendimento nel caso si decida di non vendere è

$$R = \frac{p_1 - p_0}{p_0}$$

cioè

$$(1+R)p_0 = p_1.$$

Arbitraggio

- Vendendo l'attività ora per €p_0, mettendo il denaro in banca e guadagnado un tasso di interesse r domani si avrà

$$(1+r)p_0.$$

Arbitraggio

- Quand'è meglio <u>non</u> vendere?
  Quando $(1+R)p_0 > (1+r)p_0$.
  cioè se il tasso di rendimento conservando l'attività supera il tasso di interesse, $R > r$ è meglio tenere l'attività
- E se $R < r$ si ha $(1+R)p_0 < (1+r)p_0$ quindi è meglio vendere ora per €p_0.

Arbitraggio

- Se tutti i mercati delle attività sono in equilibrio si ha $R = r$ per ogni attività ➔ condizione di non arbitraggio.
- Quindi, per ogni attività, i prezzi di oggi p_0 e i prezzi di domani p_1 soddisfano la condizione:

$$p_1 = (1+r)p_0.$$

Arbitraggio

$$p_1 = (1+r)p_0$$

Cioè il prezzo di domani è il valore futuro del prezzo di oggi. Allo stesso modo,

$$p_0 = \frac{p_1}{1+r}.$$

Il prezzo di oggi è il valore attuale del prezzo di domani.

Arbitraggio

- D: Se $R < r$

Devo vendere, ma chi compra? Ovviamente nessuno al prezzo P_0

Quindi domanda < offerta ➔ P cala

fino a che R = r

Arbitraggio in titoli

- I titoli pagano un interesse. Quando il tasso di interesse corrisposto dalle banche aumenta il prezzo di mercato dei titoli cala. Perchè?

Arbitraggio in titoli

- Un titolo corrisponde un flusso prefissato di pagamenti per €x per anno, indipendentemente dal tasso di interesse pagato dalle banche.
- All'equilibrio iniziale il tasso di rendimento di un titolo deve essere R = r', il tasso di interesse bancario iniziale.
- Se il tasso bancario aumenta a r" > r' allora r" > R e il titolo deve essere venduto.
- La vendita di titoli ne abbassa il prezzo di mercato.

Tassazione dei rendimenti delle Attività

- r_b è il tasso di rendimento lordo di un'attività tassabile.
- r_e è il tasso di rendimento di un bene esente da tassazione.
- t è l'aliquota di imposta.
- La regola di non arbitraggio è:
  $(1 - t)r_b = r_e$
- Cioè i rendimenti netti sono uguali in equilibrio

Attività a rischio

- Introduciamo il rischio nella nostra analisi.
- Un'alternativa all'utilità attesa per l'analisi delle scelte in condizioni di incertezza è il modello media-varianza.
- Si assume che le preferenze possano essere descritte prendendo in considerazione solo alcuni dati statistici riassuntivi sulle distribuzioni di probabilità (anzichè l'intera distribuzione).

Media di una distribuzione

- Una variabile random (v.r.) *w* assume i valori $w_1,\ldots,w_S$ con probabilità $\pi_1,\ldots,\pi_S$ $(\pi_1 + \cdot \cdot \cdot + \pi_S = 1)$.
- La media (valore atteso) della distribuzione è il valore medio della v.r.:

$$\mathbf{E}[w] = \mu_w = \sum_{s=1}^{S} w_s \pi_s .$$

Varianza di una distribuzione

- La varianza della distribuzione è la media delle deviazioni quadratiche dalla media della v.r.:

$$\mathbf{var}[w] = \sigma_w^2 = \sum_{s=1}^{S} (w_s - \mu_w)^2 \pi_s .$$

- La varianza misura la variabilità della v.r.

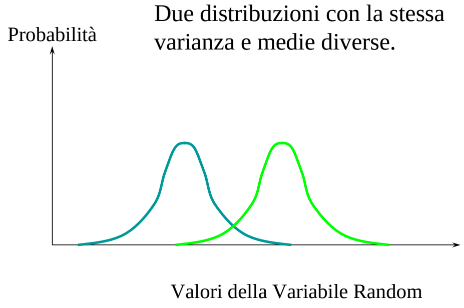
Scarto quadratico medio o deviazione standard

- La deviazione standard della distribuzione è la radice quadrata della sua varianza;

$$\mathbf{st.\ dev}[w] = \sigma_w = \sqrt{\sigma_w^2} = \sqrt{\sum_{s=1}^{S} (w_s - \mu_w)^2 \pi_s} .$$

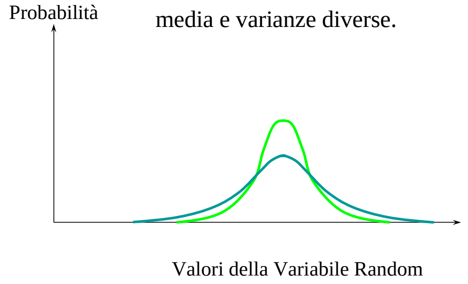
- Anche la deviazione standard dunque misura la variabilità della r.v.

Media e varianza



Media e varianza

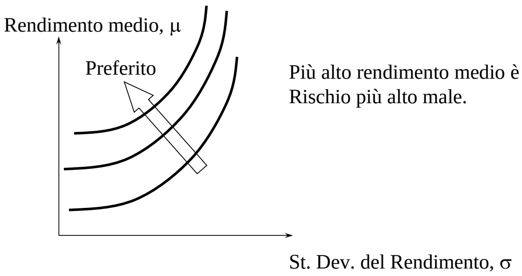
Due distribuzioni con la stessa media e varianze diverse.



Preferenze sulle attività a rischio

- Si preferiscono le attività con rendimento medio più elevato.
- Si preferiscono le attività con minor variabilità nei rendimenti (meno rischio).
- Le preferenze sono rappresentate dalla funzione di utilità $U(\mu,\sigma)$.
- $U \uparrow$ all' $\uparrow$ del rendimento medio μ.
- $U \downarrow$ all' $\uparrow$ del rischio σ.

Preferenze sulle attività a rischio



Più alto rendimento medio è bene. Rischio più alto male.

Preferenze sulle attività a rischio

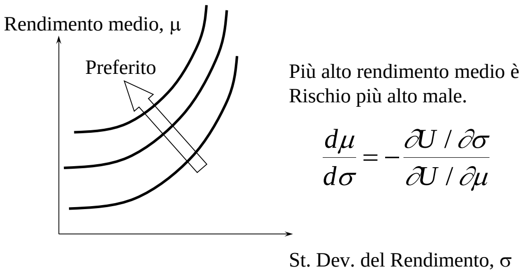
- Come si calcola il SMS?

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial U}{\partial \sigma} d\sigma = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu = -\frac{\partial U}{\partial \sigma} d\sigma$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{d\sigma} = -\frac{\partial U / \partial \sigma}{\partial U / \partial \mu}.$$

Preferenze sulle attività a rischio



Più alto rendimento medio è bene. Rischio più alto male.

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = -\frac{\partial U / \partial \sigma}{\partial U / \partial \mu}$$

Vincolo di bilancio e attività a rischio

- Due attività: senza rischio e a rischio.
- Tasso di rendimento dell'attività senza rischio è r_f.
- Tasso di rend. della seconda è m_s nello stato di natura s, con prob. π_s.
- Tasso di rendimento medio dell'attività a rischio: $r_m = \sum_{s=1}^{S} m_s \pi_s.$

Vincolo di bilancio e attività a rischio

- Si consideri un paniere che contiene alcune attività a rischio e alcune prive di rischio: portafoglio.
- *x* è la frazione di ricchezza usata per acquistare l'attività a rischio.
- Dato *x*, il tasso di rendimento medio del portafoglio è: $r_x = xr_m + (1-x)r_f$

Vincolo di bilancio e attività a rischio

$$r_x = xr_m + (1-x)r_f\,.$$

$x = 0 \Rightarrow$ $r_x = r_f$ **e** **$x = 1 \Rightarrow$** $r_x = r_m$.

Vincolo di bilancio e attività a rischio

$$r_x = xr_m + (1-x)r_f\,.$$

$x = 0 \Rightarrow$ $r_x = r_f$ **and $x = 1 \Rightarrow$** $r_x = r_m$.

Dato che un'attività è rischiosa e il rischio non è un bene affichè quell'attività venga acquistata dovrà essere

$$r_m > r_f\,.$$

Quindi il tasso di rendimento atteso del portafoglio aumenta con *x*

Vincolo di bilancio e attività a rischio

- Varianza del tasso di rendimento del Portafoglio:

$$\sigma_x^2 = \sum_{s=1}^{S} (xm_s + (1-x)r_f - r_x)^2 \pi_s.$$

Vincolo di bilancio e attività a rischio

- Varianza

$$\sigma_x^2 = \sum_{s=1}^{S} (xm_s + (1-x)r_f - r_x)^2 \pi_s.$$

$$r_x = xr_m + (1-x)r_f\,.$$

Vincolo di bilancio e attività a rischio

- Varianza

$$\sigma_x^2 = \sum_{s=1}^{S} (xm_s + (1-x)r_f - r_x)^2 \pi_s.$$

$$r_x = xr_m + (1-x)r_f\,.$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{s=1}^{S} (xm_s + (1-x)r_f - xr_m - (1-x)r_f)^2 \pi_s$$

Vincolo di bilancio e attività a rischio

- Varianza

$$\sigma_x^2 = \sum_{s=1}^{S} (xm_s + (1-x)r_f - r_x)^2 \pi_s.$$

$$r_x = xr_m + (1-x)r_f.$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{s=1}^{S} (xm_s + (1-x)r_f - xr_m - (1-x)r_f)^2 \pi_s$$

$$= \sum_{s=1}^{S} (xm_s - xr_m)^2 \pi_s$$

Vincolo di bilancio e attività a rischio

- Varianza

$$\sigma_x^2 = \sum_{s=1}^{S} (xm_s + (1-x)r_f - r_x)^2 \pi_s.$$

$$r_x = xr_m + (1-x)r_f.$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{s=1}^{S} (xm_s + (1-x)r_f - xr_m - (1-x)r_f)^2 \pi_s$$

$$= \sum_{s=1}^{S} (xm_s - xr_m)^2 \pi_s = x^2 \sum_{s=1}^{S} (m_s - r_m)^2 \pi_s$$

Vincolo di bilancio e attività a rischio

- Varianza

$$\sigma_x^2 = \sum_{s=1}^{S} (xm_s + (1-x)r_f - r_x)^2 \pi_s.$$

$$r_x = xr_m + (1-x)r_f.$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{s=1}^{S} (xm_s + (1-x)r_f - xr_m - (1-x)r_f)^2 \pi_s$$

$$= \sum_{s=1}^{S} (xm_s - xr_m)^2 \pi_s = x^2 \sum_{s=1}^{S} (m_s - r_m)^2 \pi_s = x^2 \sigma_m^2.$$

Vincolo di bilancio e attività a rischio

Varianza $\sigma_x^2 = x^2 \sigma_m^2$

➔ **deviazione std.** $\sigma_x = x\sigma_m.$

Vincolo di bilancio e attività a rischio

Varianza $\sigma_x^2 = x^2 \sigma_m^2$

➔ **deviazione std.** $\sigma_x = x\sigma_m.$

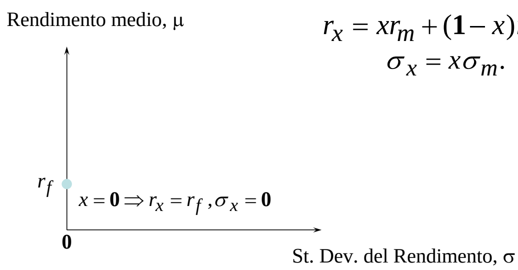
***x* = 0** $\Rightarrow$ $\sigma_x = 0$ **e *x* = 1** $\Rightarrow$ $\sigma_x = \sigma_m.$

Quindi il rischio aumenta con *x* (ovviamente più attività a rischio nel portafoglio).

Vincolo di bilancio e attività a rischio

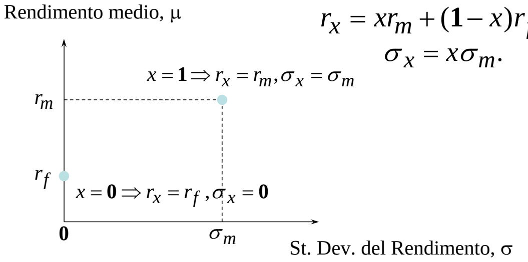
$$r_x = xr_m + (1-x)r_f.$$

$$\sigma_x = x\sigma_m.$$



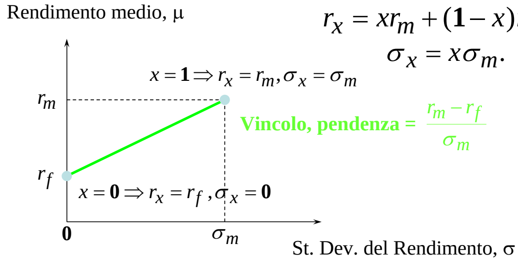
Vincolo di bilancio e attività a rischio

$$r_x = x r_m + (1-x) r_f .$$
$$\sigma_x = x\sigma_m .$$

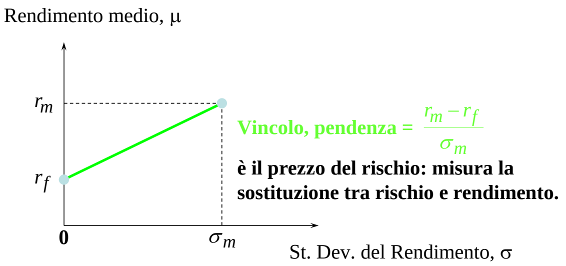


Vincolo di bilancio e attività a rischio

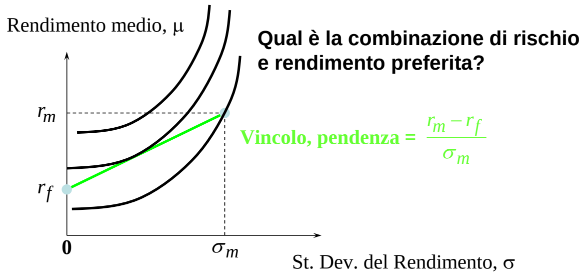
$$r_x = x r_m + (1-x) r_f .$$
$$\sigma_x = x\sigma_m .$$



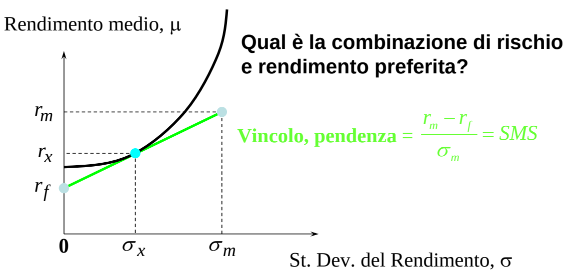
Scelta del portafoglio



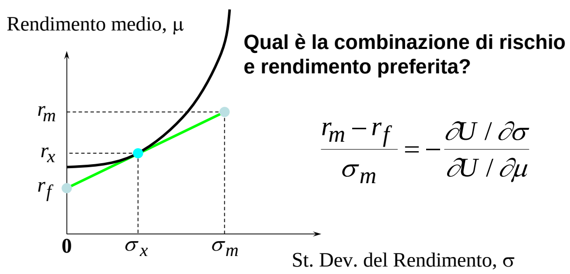
Scelta del portafoglio



Scelta del portafoglio



Scelta del portafoglio



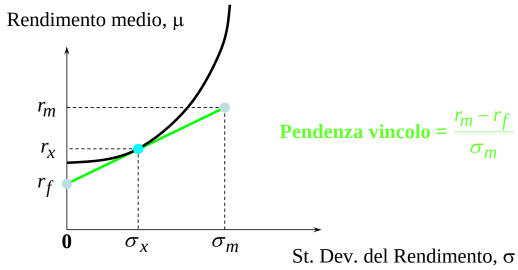
$$\frac{r_m - r_f}{\sigma_m} = -\frac{\partial U / \partial \sigma}{\partial U / \partial \mu}$$

Scelta del portafoglio

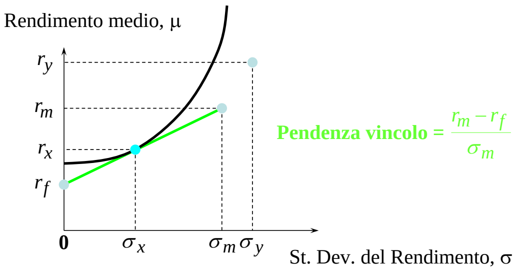
- Assumiamo che ci sia una nuova attività a rischio, con un tasso medio di rendimento pari a $r_y > r_m$ e una st. dev. $\sigma_y > \sigma_m$.
- Quale attività è preferita?
- Si supponga che

$$\frac{r_y - r_f}{\sigma_y} > \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}.$$

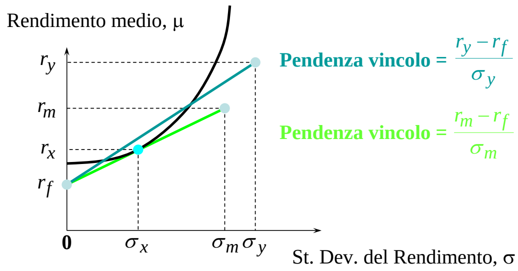
Scelta del portafoglio



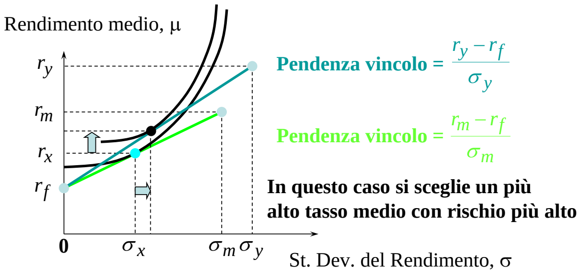
Scelta del portafoglio



Scelta del portafoglio



Scelta del portafoglio



Misurare il rischio

- Il rischio è misurato dallo scarto quadratico medio. Ma se vi sono più attività?
- Dipende da quanto il suo valore è legato a quello di altre attività.
- Es. Il valore dell'attività A è €60 con prob. 1/4 e €20 con prob. 3/4.
- Si paga al più €30 per averla.

Misurare il rischio

- Il valore dell'attività A è €60 con prob. 1/4 e €20 con prob. 3/4.
- Il valore dell'attività B è €20 quando l'attività A vale €60 e €60 quando A vale €20 (correlazione negativa perfetta tra i valori).
- Si paga fino a €40 > €30 per un mix 50-50 di A e di B. Attività correlate negativamente riducono il rischio.

Misurare il rischio

- Il rischio di A relativamente al rischio nell'intero mercato delle attività a rischio è misurato dall'indice beta:

$$\beta_A = \frac{\text{rischio di A}}{\text{rischio dell'intero mercato}}.$$

Statisticamente: $\beta_A = \dfrac{\text{covarianza }(r_A, r_m)}{\text{varianza}(r_m)}$

dove r_m è il tasso di rend. del mercato e r_A è il tasso di rendimento di A.

Misurare il rischio

- $\beta_A = 1 \Rightarrow$ il rendimento di A è perfettamente correlato con quello dell'intero mercato e quindi A è rischioso quanto il mercato nel suo insieme.
- Un indice maggiore di 1 indica che il rendimento amplifica l'andamento del mercato di riferimento. Se inferiore a 1, al contrario, lo attenua.
- L'indice beta delle azioni viene regolamente calcolato e pubblicato.

Equilibrio nei mercati delle attività a rischio

- In equilibrio, il tasso di rendimento corretto in rapporto al rischio di tutte le attività deve essere uguale (arbitraggio).
- Ma come si calcola un tasso corretto in rapporto al rischio?

Equilibrio nei mercati delle attività a rischio

- Il rischio dell'attività A in rapporto a tutto il mercato è β_A.
- Il rischio totale del mercato è σ_m.
- Quindi il rischio totale di A è $\beta_A\sigma_m$.
- Il prezzo del rischio è

$$p = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}.$$

- Quindi il costo del rischio di A è $p\beta_A\sigma_m$.

Equilibrio nei mercati delle attività a rischio

- La correzione per il rischio di A è:

$$p\beta_A\sigma_m = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}\beta_A\sigma_m = \beta_A(r_m - r_f).$$

- Quindi il tasso di rendimento di A corretto per il rischio è

$$r_A - \beta_A(r_m - r_f).$$

Equilibrio nei mercati delle attività a rischio

- In equilibrio, tutti i tassi di rendimento corretti sono uguali.
- Per l'attività senza rischio β = 0 quindi il suo tasso corretto è r_f .
- Quindi, $$r_f = r_A - \beta_A(r_m - r_f)$$
  cioè $r_A = r_f + \beta_A(r_m - r_f)$
  per qualunque attività a rischio A.

Equilibrio nei mercati delle attività a rischio

- $r_{\mathbf{A}} = r_f + \beta_{\mathbf{A}}(r_m - r_f)$ cioè il rendimento atteso è pari alla somma del rendimento dell'attività non rischiosa e della correzione in rapporto al rischio.
- Questo è il risultato principale del Capital Asset Pricing Model (CAPM), un modello ampiamente usato per studiare i mercati finanziari.

Retta di mercato