Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

13 gennaio 2012

ESERCIZIO 1. *Calcolare il determinante della matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ i & -i & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7i \\ 2 & 4 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

SVOLGIMENTO.

Quest'esercizio è già svolto nel file "Determinanti".

ESERCIZIO 2 (Prodotto vettoriale o prodotto esterno)**.** *Calcolare il prodotto vettoriale $a \wedge b$ dove*

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \qquad e \qquad b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

SVOLGIMENTO.

Il prodotto vettoriale tra due vettori mi restituisce un vettore (mentre il prodotto interno si faceva sempre tra due vettori ma mi restituisce uno scalare) ortogonale a quei vettori e di norma il prodotto delle norme dei vettori per il seno dell'angolo compreso tra loro:

$$\begin{gathered} a \wedge b = c \\ (c|a) = 0 \quad (c|b) = 0 \\ \|c\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\alpha) \end{gathered}$$

Siccome a e b individuano un piano, per capire se il vettore risultante c è perpendicolare entrante o uscente da quel piano, si usa la *regola della mano destra*: a è il pollice destro, b è l'indice destro e c è il medio che ci dice dov'è diretto il vettore c.

Ci sono diversi modi per calcolare il prodotto vettoriale tra due vettori, noi vedremo come si fa con il determinante.

Il prodotto vettoriale tra due vettori $a \wedge b = c$, dove

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^T \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T$$

si ottiene in questo modo:

$$\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = c_1 i + c_2 j + c_3 k$$

i, j, k sono i versori (vettori di norma 1) delle tre direzioni degli assi cartesiani, rispettivamente dell'asse x, y, z. Questo per dire che in seguito al determinante (che mi restituisce uno scalare), il vettore c sarà $c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T$.

In fisica si usa molto scrivere un vettore di $\mathbb{R}^3$ $c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T$ come $c = c_1 i + c_2 j + c_3 k$, perchè non è altro che scrivere:

$$c = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Vediamo nel nostro caso cosa si ottiene.

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\text{[Si sviluppa obbligatoriamente secondo la prima riga]} \\ &= i \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - j \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + k \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= i + 3j - k \end{aligned}$$

Quindi

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$$

ESERCIZIO 3 (Area di un triangolo)**.** *Calcolare l'area di un triangolo di vertici*

$$A(0, 1) \qquad B(2, -3) \qquad C(3, 3)$$

Svolgimento.

Un modo per calcolare l'area di un triangolo di vertici

$$P_1(x_1, y_1) \qquad P_2(x_2, y_2) \qquad P_3(x_3, y_3)$$

è usando il determinante:

$$Area_{P_1P_2P_3} = \left| \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \right|$$

C'è il modulo perchè il determinante può risultare negativo. In questo caso si parla di area orientata: se i vertici sono stati presi in senso antiorario, l'area verrà positiva [1] (non è un caso se fin dalle elementari ci hanno abituato a scrivere i vertici delle figure in senso antiorario, anche se magari il concetto di area orientata sfuggiva all'intuizione delle maestre della scuola primaria); nel caso in cui si riportino in senso orario, l'area risulterà negativa (*argomenti di Analisi II*).

Nel nostro caso viene:

$$Area_{ABC} = \left| \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \right|$$

[Si sviluppa secondo la prima colonna perchè ha più zeri]

$$= \left| \frac{1}{2} \left(1 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} + 0 + 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2}(15+1) \right| = 8$$

ESERCIZIO 4. *Trovare gli autovalori della matrice A, dire qual è la loro molteplicità algebrica e geometrica; infine calcolare i relativi autovettori.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

[1] Spesso in matematica e in fisica, il senso antiorario è associato all'essere positivo. Questa non è altro che una convenzione radicata nel tempo, infatti la matematica e la fisica si sono sviluppate nell'emisfero boreale, e qui la rotazione della Terra viene percepita in senso antiorario, quindi dovendo dare ad un senso il segno + e ad un senso il segno -, si è preferito basarsi sul comportamento della realtà, come spesso accade.

Troviamo gli autovalori ponendo il polinomio caratteristico di A uguale a zero, questo perchè noi cerchiamo λ e v tali che $Av = \lambda v$, quindi

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ Av - \lambda v &= 0 \\ (A - \lambda I)v &= 0 \end{aligned}$$

Stiamo cercando vettori non banali (cioè diversi da quello nullo) che soddisfino questa formula. Ma quello è un sistema omogeneo di matrice $A-\lambda I$ e se vogliamo che la soluzione non sia banale, dobbiamo porre il suo determinante diverso da zero.

Quindi calcoliamo il determinante di

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

e poniamolo uguale a 0:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ (2-\lambda)(2-\lambda)(2\lambda + \lambda^2 - 3) &= 0 \\ (\lambda - 2)^2(\lambda + 3)(\lambda - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori sono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= -3 \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned}$$

Le molteplicità algebriche sono $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$ (dove m_i si riferisce a λ_i).

Possiamo già dire che sia la molteplicità geometrica d di λ_2 e di λ_3 è 1 perchè $d \leq m$.

Calcoliamo gli autovettori e quindi la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 2$. Vediamo come fare richiamando la formula $(A - \lambda I)v = 0:$ stiamo cercando i v che rendono vero il sistema lineare $(A - \lambda I)v = 0$, quindi sostituiamo a λ l'autovalore che ci interessa e siccome il sistema è omogeneo, per trovare gli autovettori relativi a λ, e dunque l'autospazio, bisogna calcolare lo spazio nullo della matrice $A - \lambda I$ (che coinciderà con l'autospazio).

Applichiamo allora l'eliminazione di Gauss sulla matrice $A - \lambda I$ con $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui si ricava per il teorema nullità più rango che $\dim(N(A)) = 1$ (essendo che la matrice ha 3 colonne dominanti, dunque il rango è uguale a 3); per cui la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 2$ è 1.

Troviamo una base per lo spazio nullo di questa matrice che sarà anche una base dell'autospazio e quel vettore di base sarà l'autovettore cercato. Dalla forma ridotta della matrice si ricava il vettore soluzione:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5}\alpha \\ \frac{1}{5}\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \alpha = 5 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Questo trovato è l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 2$. Non è importante che α mettere, tanto è in ogni caso un elemento dell'autospazio.

Verifichiamo che abbiamo fatto giusto: riprendiamo la definizione di autovalore e autovettore $Av = \lambda v$ e verifichiamo tale uguaglianza:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passiamo adesso all'altro autovalore $\lambda = -3$.

Adesso non darò più tutte le spiegazioni teoriche, essendo ovviamente uguali a quelle date per l'autovalore precedente.

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice $A - \lambda I$ con $\lambda = -3$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui ricaviamo che la dimensione dello spazio nullo e quindi la molteplicità geometrica dell'autospazio è 1 (ma lo sapevamo già). Una base dello spazio nullo e quindi un autovettore, si ricava dalla forma ridotta:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \alpha = 3 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo l'uguaglianza $Av = \lambda v$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= -3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passiamo adesso all'altro autovalore $\lambda = 1$.
Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice $A - \lambda I$ con $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui ricaviamo che la dimensione dello spazio nullo e quindi la molteplicità geometrica dell'autospazio è 1 (ma lo sapevamo già). Una base dello spazio nullo e quindi un autovettore, si ricava dalla forma ridotta:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo l'uguaglianza $Av = \lambda v$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ricapitoliamo qui quello che abbiamo trovato:

$$\lambda_1 = 2 \qquad m = 2 \qquad d = 1 \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 \qquad m = 1 \qquad d = 1 \qquad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1 \qquad m = 1 \qquad d = 1 \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$