Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

ESERCIZIO 1. *Trovare gli autovalori della matrice A, dire qual è la loro molteplicità algebrica e geometrica; infine calcolare i relativi autovettori.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

SVOLGIMENTO.

Troviamo gli autovalori ponendo il polinomio caratteristico di A uguale a zero, questo perchè noi cerchiamo λ e v tali che $Av = \lambda v$, quindi

$$\begin{gathered} Av = \lambda v \\ Av - \lambda v = 0 \\ (A - \lambda I)v = 0 \end{gathered}$$

Stiamo cercando vettori non banali (cioè diversi da quello nullo) che soddisfino questa formula. Ma quello è un sistema omogeneo di matrice $A - \lambda I$ e se vogliamo che la soluzione non sia banale, dobbiamo porre il suo determinante diverso da zero.

Quindi calcoliamo il determinante di

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

e poniamolo uguale a 0:

$$\begin{gathered} \det(A - \lambda I) = 0 \\ (1-\lambda)(\lambda + \lambda^2) = 0 \\ (1-\lambda)(\lambda)(\lambda+1) = 0 \end{gathered}$$

Quindi gli autovalori sono:

$$\begin{gathered} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -1 \end{gathered}$$

Le molteplicità algebriche sono $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$ (dove m_i si riferisce a λ_i).

Possiamo già dire che la molteplicità geometrica d di di tutti e tre gli autovalori è 1 perchè $d \leq m$.

Calcoliamo gli autovettori e quindi la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 1$. Vediamo come fare richiamando la formula $(A - \lambda I)v = 0$: stiamo cercando i v che rendono vero il sistema lineare $(A - \lambda I)v = 0$, quindi sostituiamo a λ l'autovalore che ci interessa e siccome il sistema è omogeneo, per trovare gli autovettori relativi a λ, e dunque l'autospazio, bisogna calcolare lo spazio nullo della matrice $A - \lambda I$ (che coinciderà con l'autospazio).

Applichiamo allora l'eliminazione di Gauss sulla matrice $A - \lambda I$ con $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui si ricava per il teorema nullità più rango che $\dim(N(A)) = 1$ (essendo che la matrice ha 3 colonne dominanti, dunque il rango è uguale a 3; ma lo sapevamo già); per cui la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ è 1.

Troviamo una base per lo spazio nullo di questa matrice che sarà anche una base dell'autospazio e quel vettore di base sarà l'autovettore cercato. Dalla forma ridotta della matrice si ricava il vettore soluzione:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Questo trovato è l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 1$. Non è importante che α mettere, tanto è in ogni caso un elemento dell'autospazio.

Verifichiamo che abbiamo fatto giusto: riprendiamo la definizione di autovalore e autovettore $Av = \lambda v$ e verifichiamo tale uguaglianza:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Passiamo adesso all'altro autovalore $\lambda = 0$.

Adesso non darò più tutte le spiegazioni teoriche, essendo ovviamente uguali a quelle date per l'autovalore precedente.

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice $A - \lambda I$ con $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui ricaviamo che la dimensione dello spazio nullo e quindi la molteplicità geometrica dell'autospazio è 1 (ma lo sapevamo già). Una base dello spazio nullo e quindi un autovettore, si ricava dalla forma ridotta:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo l'uguaglianza $Av = \lambda v$:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= 0 \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Passiamo adesso all'altro autovalore $\lambda = -1$.
Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice $A - \lambda I$ con $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui ricaviamo che la dimensione dello spazio nullo e quindi la molteplicità geometrica dell'autospazio è 1 (ma lo sapevamo già). Una base dello spazio nullo e quindi un autovettore, si ricava dalla forma ridotta:

$$\begin{bmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo l'uguaglianza $Av = \lambda v$:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= -1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ricapitoliamo qui quello che abbiamo trovato:

$$\lambda_1 = 1 \qquad m = 1 \qquad d = 1 \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0 \qquad m = 1 \qquad d = 1 \qquad v = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -1 \qquad m = 1 \qquad d = 1 \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$