Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

ESERCIZIO 1. *Calcolare il determinante della matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4i \end{bmatrix}$$

SVOLGIMENTO.

Data una matrice 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.
Quindi nel nostro caso:

$$\det(A) = 1 \cdot 4i - 3 \cdot 2 = 4i - 6$$

Il calcolo del determinante delle matrici 2×2 è la base per il calcolo delle matrici di ordine superiore.

ESERCIZIO 2. *Calcolare il determinante della matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ i & -i & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7i \\ 2 & 4 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

SVOLGIMENTO.

Calcoliamo il determinante di questa matrice usando lo sviluppo di Laplace. È opportumo procedere lungo quella riga o colonna che ha più zeri, notiamo che è la terza riga e $7i$ è un coefficiente di posto dispari perchè è a_{34} ($3 + 4 = 7$ che è dispari) quindi lo riporteremo col segno opposto a quello che ha nella matrice. A questo punto dobbiamo calcolare il determinante della matrice 3×3 che si ottiene eliminando la riga e la colonna di $7i$ e così in modo ricorsivo per calcolare questo determinante sceglierò la riga o colonna con più zeri, prenderò un elemento alla volta stando attento a vedere di che posto è: se pari $(+)$ o dispari$(-)$ e lo moltiplicherò per il determinante della matrice 2×2 che si ottiene eliminando la sua riga e colonna. Ora il determinante della 2×2 è noto come si calcola.

Non è importante se si sviluppa per riga o per colonna e tanto meno quale riga o quale colonna.

La formula per lo sviluppo di Laplace di una matrice A di ordie n è

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \qquad \text{sviluppo secondo la } i\text{-esima riga}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \qquad \text{sviluppo secondo la } j\text{-esima colonna}$$

Dove con A_{ij} si intende la matrice che si ottiene da A eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Torniamo al nostro esercizio:

$$\det(A) = -7i \cdot \det(A_{34}) = -7i \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ i & -i & 5 \\ 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned}
&[\text{sviluppiamo secondo la prima colonna}] \\
&= -7i \cdot [1 \cdot (-i \cdot 12 - 4 \cdot 5) - i \cdot (2 \cdot 12 - 4 \cdot 6) + 2 \cdot (2 \cdot 5 - (-i) \cdot 6)] \\
&= -7i \cdot [1 \cdot (-12i - 20) - i \cdot (24 - 24) + 2 \cdot (10 + 6i)] \\
&= -7i \cdot [-12i - 20 + 20 + 12i)] \\
&= -7i \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Era prevedibile questo risultato perchè l'ultima riga è multipla della prima, quindi volendo potevamo moltiplicare la prima riga per (-2) e sommarla all'ultima così da farla risultare tutta di zeri e una matrice con una riga (o una colonna) tutta di zeri ha determinante nullo.

ESERCIZIO 3. *Calcolare il determinante delle matrici A e B*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i & -i \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & -2i & i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -i & i & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ i & -2i & 4 \end{bmatrix}$$

SVOLGIMENTO.

Sviluppiamo il determinante di A per la prima colonna:

$$\det(A) = 2(5i + 2i) + 4(i + 5i) = 14i + 24i = 38i$$

Sviluppiamo il determinante di B secondo la prima colonna:

$$\det(B) = -i(20) - 1(4i + 4i) + i(-10) = -20i - 8i - 10i = -38i$$

Questo esercizio ci fa capire che se facciamo uno scambio di colonna (la matrice B è ottenuta da A scambiando la prima con la terza colonna), il determinante cambia di segno.

Ogni volta che si fa uno scambio di riga o di colonna, il determinante cambia di segno. Quindi un numero pari di scambi lasciano il determinante invariato, un numero dispari gli cambia il segno.

ESERCIZIO 4. *Calcolare il determinante delle matrici A e A^T*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

Calcoliamo il determinante di A sviluppando lungo la terza riga:

$$\det(A) = -3(4-2) = -6$$

Calcoliamo A^T

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A^T sviluppando lungo la terza riga:

$$\det(A) = -1(0) - 3(4-2) = -6$$

Questo esercizio ci fa capire che $\det(A) = \det(A^T)$.
Inoltre $\det(A^H) = \overline{\det(A)}$ e $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$

ESERCIZIO 5. *Calcolare il determinante delle matrici A e B e del loro prodotto AB*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & -5i \\ 2 & 3i \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

Calcoliamo il determinante di A:

$$\det(A) = i$$

Calcoliamo il determinante di B:

$$\det(B) = -21i + 10i = -11i$$

Calcoliamo AB:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -5i \\ 2 & 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -5i \\ -5i & 2 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di AB:

$$\det(AB) = -14 + 25 = 11$$

Notare che

$$\det(A)\det(B) = \det(AB)$$

Questa è detta formula di Binnet.

ESERCIZIO 6. *Calcolare il determinante delle matrici A e A^{-1}, dove*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

Calcoliamo il determinante di A:

$$\det(A) = i$$

Calcoliamo l'inversa di A attraverso il determinante.

Definiamo cos'è la *matrice aggiunta* di A che chiameremo $adj(A)$. l'elemento $a_{ji} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ (in classe a esercitazione ho fatto la trasposta di quella che ho chiamato matrice aggiunta, qui faccio tutto in un passaggio ecco perchè viene definito l'elemento a_{ji} e non a_{ij}. Scrivo questa perchè c'è anche sul libro).

Quindi

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

Ovviamente il determinante di un numero è il numero stesso.

La formula per la matrice inversa è

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

Quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{i} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A^{-1}: $\det(A^{-1}) = i$ e notiamo che $det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$, dunque il determinante dell'inversa è l'inverso del determinante:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$