Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

4 novembre 2011

ESERCIZIO 1. *Determinare la scomposizione LU o $P^T LU$ della matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3 & -15 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1/2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

Vogliamo trovare due matrici L e U, la prima diagonale inferiore invertibile e la seconda diagonale superiore, nonché forma ridotta della matrice A di partenza in seguito all'Eliminazione di Gauss. Esse sono tali che

$$A_{m \times n} = L_{m \times m} U_{m \times n}$$

O eventualmente, qualora si effetueranno scambi di righe, si dovrà determinare anche la matrice di permutazione P e la scomposizione sarà

$$A_{m \times n} = P^T_{m \times m} L_{m \times m} U_{m \times n}$$

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3 & -15 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1/2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E_{21} \quad \begin{bmatrix} -3 & -15 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1/2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(-1/3) \\ E_{31}(-1) \\ E_{41}(-1/2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{24} \\ E_2(2/9) \\ E_{34} \\ E_3(1/3) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Notiamo che è stato fatto uno scambio di riga, quindi la scomposizione sarà del tipo $A = P^T LU$ con matrice di permutazione P, matrice quadrata di ordine 4 invertibile, che non è altro che l'identità in cui sono scambiate le righe secondo le matrici E_{ij}:

$$P = E_{34}E_{24}E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Adesso calcoliamo la matrice PA:

$$PA = \begin{bmatrix} -3 & -15 & 6 \\ 1/2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

ed eseguiamo l'Eliminazione di Gauss che non necessiterà di alcuno scambio di righe, in questo modo otteniamo la U e L in modo che

$$PA = LU \qquad \text{da cui} \qquad A = P^{-1}LU = P^T LU$$

Notare che la U sarà quella già trovata, mentre la L si ottiene dalla seconda Eliminazione di Gauss, cioè quella svolta su PA.

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss a PA:

$$PA = \begin{bmatrix} -3 & -15 & 6 \\ 1/2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} E_1(-1/3) \\ E_{21}(-1/2) \\ E_{41}(-1) \\ E_2(2/9) \\ E_3(1/3) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Quindi avendo trovato la forma ridotta U, dobbiamo trovare la matrice invertibile L. Tale matrice è chiaro che dev'essere una matrice quadrata 4×4.

I vari elementi della matrice devono verificare la seguente definizione:

$$a_{ij_{i \neq j}} = \begin{cases} -\alpha & \text{se è stata applicata } E_{ij}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{se è stata applicata } E_i(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$L = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -9/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si verifica, moltiplicando le matrici che

$$P^T LU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -9/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3 & -15 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1/2 & 7 & -1 \end{bmatrix} = A$$

ESERCIZIO 2. *Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{C}$, la scomposizione LU o $P^T LU$ della matrice*

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -\alpha & -2 \\ \alpha/2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\alpha/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

Vogliamo trovare due matrici L e U, la prima diagonale inferiore invertibile e la seconda diagonale superiore, nonché forma ridotta della matrice A di partenza in seguito all'Eliminazione di Gauss. Esse sono tali che

$$A_{m\times n} = L_{m\times m}U_{m\times n}$$

O eventualmente, qualora si effetueranno scambi di righe, si dovrà determinare anche la matrice di permutazione P e la scomposizione sarà

$$A_{m\times n} = P^T_{m\times m}L_{m\times m}U_{m\times n}$$

Il tutto con il parametro α. Faremo in modo, ponendo delle condizioni su α (condizioni di esistenza: il denominatore diverso da zero), di arrivare ad una scomposizione LU o P^TLU per "la maggior parte" dei valori di α per poi vedere cosa succede con quei valori che abbiamo tolto.

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A_α:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -\alpha & -2 \\ \alpha/2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\alpha/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} E_1(1/2) \\ E_{21}(-\alpha/2) \\ E_{31}(1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \alpha/2 & -\alpha/2 & -1 \\ 0 & \frac{4-\alpha^2}{4} & \frac{\alpha^2-4}{4} & \frac{\alpha+2}{2} \\ 0 & 0 & -\alpha/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} E_2(\frac{4}{4-\alpha^2}) \\ E_3(-2/\alpha) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \alpha/2 & -\alpha/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{2-\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Siamo arrivati in fondo moltiplicando per qualche frazione con al denominatore il parametro α, quindi possiamo dire che per

$$\alpha \neq 2 \qquad \alpha \neq -2 \qquad \alpha \neq 0$$

la matrice A_α ammette una scomposizione LU.

Quindi avendo trovato la forma ridotta U, dobbiamo trovare la matrice invertibile L. Tale matrice è chiaro che dev'essere una matrice quadrata 3×3.

I vari elementi della matrice devono verificare la seguente definizione:

$$a_{ij_{i\neq j}} = \begin{cases} -\alpha & \text{se è stata applicata } E_{ij}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{se è stata applicata } E_{i}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha/2 & \frac{4-\alpha^2}{4} & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha/2 \end{bmatrix}$$

Si verifica, moltiplicando le matrici che

$$\begin{aligned} LU &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha/2 & \frac{4-\alpha^2}{4} & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha/2 & -\alpha/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{2-\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -\alpha & -2 \\ \alpha/2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\alpha/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_\alpha \end{aligned}$$

Tutto questo è stato fatto ponendo

$$\alpha \neq 2 \qquad \alpha \neq -2 \qquad \alpha \neq 0$$

Vediamo cosa succede allora quando α è uguale a quei valori:
Cerchiamo la decomposizione della matrice di partenza ponendo $\alpha = 2$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A_2:

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} E_1(1/2) \\ E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ E_{23} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} E_2(-1) \\ E_3(1/2) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U \end{aligned}$$

Notiamo che è stato fatto uno scambio di riga, quindi la scomposizione sarà del tipo $A_2 = P^T LU$ con matrice di permutazione P, matrice quadrata di ordine 3 invertibile, che non è altro che l'identità in cui sono scambiate le righe secondo le matrici E_{ij}:

$$P = E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Adesso calcoliamo la matrice PA_2:

$$PA_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ed eseguiamo l'Eliminazione di Gauss che non necessiterà di alcuno scambio di righe, in questo modo otteniamo la U e L in modo che

$$PA_2 = LU \qquad \text{da cui} \qquad A_2 = P^{-1}LU = P^T LU$$

Notare che la U sarà quella già trovata, mentre la L si ottiene dalla seconda Eliminazione di Gauss, cioè quella svolta su PA_2.

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss a PA_2:

$$PA_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(1/2) \\ E_{21}(1) \\ E_{31}(-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_2(-1) \\ E_3(1/2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Quindi avendo trovato la forma ridotta U, dobbiamo trovare la matrice invertibile L. Tale matrice è chiaro che dev'essere una matrice quadrata 3×3.

I vari elementi della matrice devono verificare la seguente definizione:

$$a_{ij_{i \neq j}} = \begin{cases} -\alpha & \text{se è stata applicata } E_{ij}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{se è stata applicata } E_i(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si verifica, moltiplicando le matrici che

$$
\begin{aligned}
P^T LU &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_2
\end{aligned}
$$

Cerchiamo la decomposizione della matrice di partenza ponendo $\alpha = -2$:

$$A_{-2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A_{-2}:

$$
\begin{aligned}
A_{-2} &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{matrix} E_1(1/2) \\ E_{21}(1) \\ E_{31}(1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
E_{23} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U
\end{aligned}
$$

Notiamo che è stato fatto uno scambio di riga, quindi la scomposizione sarà del tipo $A_{-2} = P^T LU$ con matrice di permutazione P, matrice quadrata di ordine 3 invertibile, che non è altro che l'identità in cui sono scambiate le righe secondo le matrici E_{ij}:

$$P = E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Adesso calcoliamo la matrice PA_{-2}:

$$PA_{-2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ed eseguiamo l'Eliminazione di Gauss che non necessiterà di alcuno scambio di righe, in questo modo otteniamo la U e L in modo che

$$PA_{-2} = LU \qquad \text{da cui} \qquad A_{-2} = P^{-1}LU = P^T LU$$

Notare che la U sarà quella già trovata, mentre la L si ottiene dalla seconda Eliminazione di Gauss, cioè quella svolta su PA_{-2}.

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss a PA_{-2}:

$$PA_{-2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(1/2) \\ E_{21}(1) \\ E_{31}(1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

Quindi avendo trovato la forma ridotta U, dobbiamo trovare la matrice invertibile L. Tale matrice è chiaro che dev'essere una matrice quadrata 3×3.

I vari elementi della matrice devono verificare la seguente definizione:

$$a_{ij_{i \neq j}} = \begin{cases} -\alpha & \text{se è stata applicata } E_{ij}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{se è stata applicata } E_i(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si verifica, moltiplicando le matrici che

$$P^T LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_{-2}$$

Cerchiamo la decomposizione della matrice di partenza ponendo $\alpha = 0$:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A_0:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(1/2) \\ E_{31}(1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Quindi avendo trovato la forma ridotta U, dobbiamo trovare la matrice invertibile L. Tale matrice è chiaro che dev'essere una matrice quadrata 3×3.

I vari elementi della matrice devono verificare la seguente definizione:

$$a_{ij_{i\neq j}} = \begin{cases} -\alpha & \text{se è stata applicata } E_{ij}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{se è stata applicata } E_i(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si verifica, moltiplicando le matrici che

$$\begin{aligned} LU &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_0 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3. *Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{C}$, la scomposizione LU o $P^T LU$ della matrice*

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ \alpha & \alpha & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

Vogliamo trovare due matrici L e U, la prima diagonale inferiore invertibile e la seconda diagonale superiore, nonché forma ridotta della matrice A di partenza in seguito all'Eliminazione di Gauss. Esse sono tali che

$$A_{m\times n} = L_{m\times m}U_{m\times n}$$

O eventualmente, qualora si effetueranno scambi di righe, si dovrà determinare anche la matrice di permutazione P e la scomposizione sarà

$$A_{m\times n} = P^T_{m\times m}L_{m\times m}U_{m\times n}$$

Il tutto con il parametro α. Faremo in modo, ponendo delle condizioni su α (condizioni di esistenza: il denominatore diverso da zero), di arrivare ad una scomposizione LU o P^TLU per "la maggior parte" dei valori di α per poi vedere cosa succede con quei valori che abbiamo tolto.

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A_α:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ \alpha & \alpha & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(-i) \\ E_{21}(-\alpha) \\ E_{31}(-2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \alpha & 2\alpha-1 & -\alpha \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_2(1/\alpha) \\ E_{32}(1) \\ E_{42}(-\alpha) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2\alpha-1}{\alpha} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} & -1 \\ 0 & 0 & -2\alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_3(\frac{\alpha}{\alpha-1}) \\ E_{43}(2\alpha) \\ E_4(-\frac{\alpha-1}{\alpha(\alpha+1)}) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2\alpha-1}{\alpha} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\alpha}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha-1} \end{bmatrix}$$

$$E_4(-\tfrac{\alpha-1}{\alpha(\alpha+1)}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2\alpha-1}{\alpha} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\alpha}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Siamo arrivati in fondo moltiplicando per qualche frazione con al denominatore il parametro α, quindi possiamo dire che per

$$\alpha \neq 0 \qquad \alpha \neq 1 \qquad \alpha \neq -1$$

la matrice A_α ammette una scomposizione LU.

Quindi avendo trovato la forma ridotta U, dobbiamo trovare la matrice invertibile L. Tale matrice è chiaro che dev'essere una matrice quadrata 4×4.

I vari elementi della matrice devono verificare la seguente definizione:

$$a_{ij_{i\neq j}} = \begin{cases} -\alpha & \text{se è stata applicata } E_{ij}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{se è stata applicata } E_i(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$L = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{\alpha-1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha & -2\alpha & -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha-1} \end{bmatrix}$$

Si verifica, moltiplicando le matrici che

$$LU = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{\alpha-1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha & -2\alpha & -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2\alpha-1}{\alpha} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\alpha}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ \alpha & \alpha & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \end{bmatrix} = A_\alpha$$

Tutto questo è stato fatto ponendo

$$\alpha \neq 0 \qquad \alpha \neq 1 \qquad \alpha \neq -1$$

Vediamo cosa succede allora quando α è uguale a quei valori:
Cerchiamo la decomposizione della matrice di partenza ponendo $\alpha = 0$:

$$A_0 = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A_0:

$$A_0 = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(-i) \\ E_{31}(-2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{23} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_2(-1) \\ E_3(-1) \\ E_{43}(1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Notiamo che è stato fatto uno scambio di riga, quindi la scomposizione sarà del tipo $A_0 = P^T LU$ con matrice di permutazione P, matrice quadrata di ordine 4 invertibile, che non è altro che l'identità in cui sono scambiate le righe secondo le matrici E_{ij}:

$$P = E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adesso calcoliamo la matrice PA_0:

$$PA_0 = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ed eseguiamo l'Eliminazione di Gauss che non necessiterà di alcuno scambio di righe, in questo modo otteniamo la U e L in modo che

$$PA_0 = LU \qquad \text{da cui} \qquad A_0 = P^{-1}LU = P^T LU$$

Notare che la U sarà quella già trovata, mentre la L si ottiene dalla seconda Eliminazione di Gauss, cioè quella svolta su PA_0.

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss a PA_0:

$$A_0 = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(-i) \\ E_{21}(-2) \\ E_3(-1) \\ E_{43}(1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2(-1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Quindi avendo trovato la forma ridotta U, dobbiamo trovare la matrice invertibile L. Tale matrice è chiaro che dev'essere una matrice quadrata 4×4.

I vari elementi della matrice devono verificare la seguente definizione:

$$a_{ij_{i \neq j}} = \begin{cases} -\alpha & \text{se è stata applicata } E_{ij}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{se è stata applicata } E_i(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$L = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si verifica, moltiplicando le matrici che

$$P^T LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = A_0$$

Cerchiamo la decomposizione della matrice di partenza ponendo $\alpha = 1$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A_1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(-i) \\ E_{21}(-1) \\ E_{31}(-2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{32}(1) \\ E_{42}(-1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{34} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_3(-1/2) \\ E_4(-1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Notiamo che è stato fatto uno scambio di riga, quindi la scomposizione sarà del tipo $A_1 = P^T LU$ con matrice di permutazione P, matrice quadrata di ordine 4 invertibile, che non è altro che l'identità in cui sono scambiate le righe secondo le matrici E_{ij}:

$$P = E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Adesso calcoliamo la matrice PA_1:

$$PA_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

ed eseguiamo l'Eliminazione di Gauss che non necessiterà di alcuno scambio di righe, in questo modo otteniamo la U e L in modo che

$$PA_1 = LU \qquad \text{da cui} \qquad A_1 = P^{-1}LU = P^T LU$$

Notare che la U sarà quella già trovata, mentre la L si ottiene dalla seconda Eliminazione di Gauss, cioè quella svolta su PA_1.

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice PA_1:

$$PA_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(-i) \\ E_{21}(-1) \\ E_{41}(-2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{32}(-1) \\ E_{42}(1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_3(-1/2) \\ E_4(-1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Quindi avendo trovato la forma ridotta U, dobbiamo trovare la matrice invertibile L. Tale matrice è chiaro che dev'essere una matrice quadrata 4×4.

I vari elementi della matrice devono verificare la seguente definizione:

$$a_{ij_{i \neq j}} = \begin{cases} -\alpha & \text{se è stata applicata } E_{ij}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{se è stata applicata } E_i(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$L = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si verifica, moltiplicando le matrici che

$$\begin{aligned} P^T LU &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = A_1 \end{aligned}$$

Cerchiamo la decomposizione della matrice di partenza ponendo $\alpha = -1$:

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A_{-1}:

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(-i) \\ E_{21}(1) \\ E_{31}(-2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_2(-1) \\ E_{32}(1) \\ E_{42}(1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_3(1/2) \\ E_{43}(-2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Quindi avendo trovato la forma ridotta U, dobbiamo trovare la matrice invertibile L. Tale matrice è chiaro che dev'essere una matrice quadrata 4×4.

I vari elementi della matrice devono verificare la seguente definizione:

$$a_{ij_{i \neq j}} = \begin{cases} -\alpha & \text{se è stata applicata } E_{ij}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{se è stata applicata } E_{i}(\alpha) \text{ nell'Eliminazione di Gauss} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$L = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si verifica, moltiplicando le matrici che

$$LU = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = A_{-1}$$