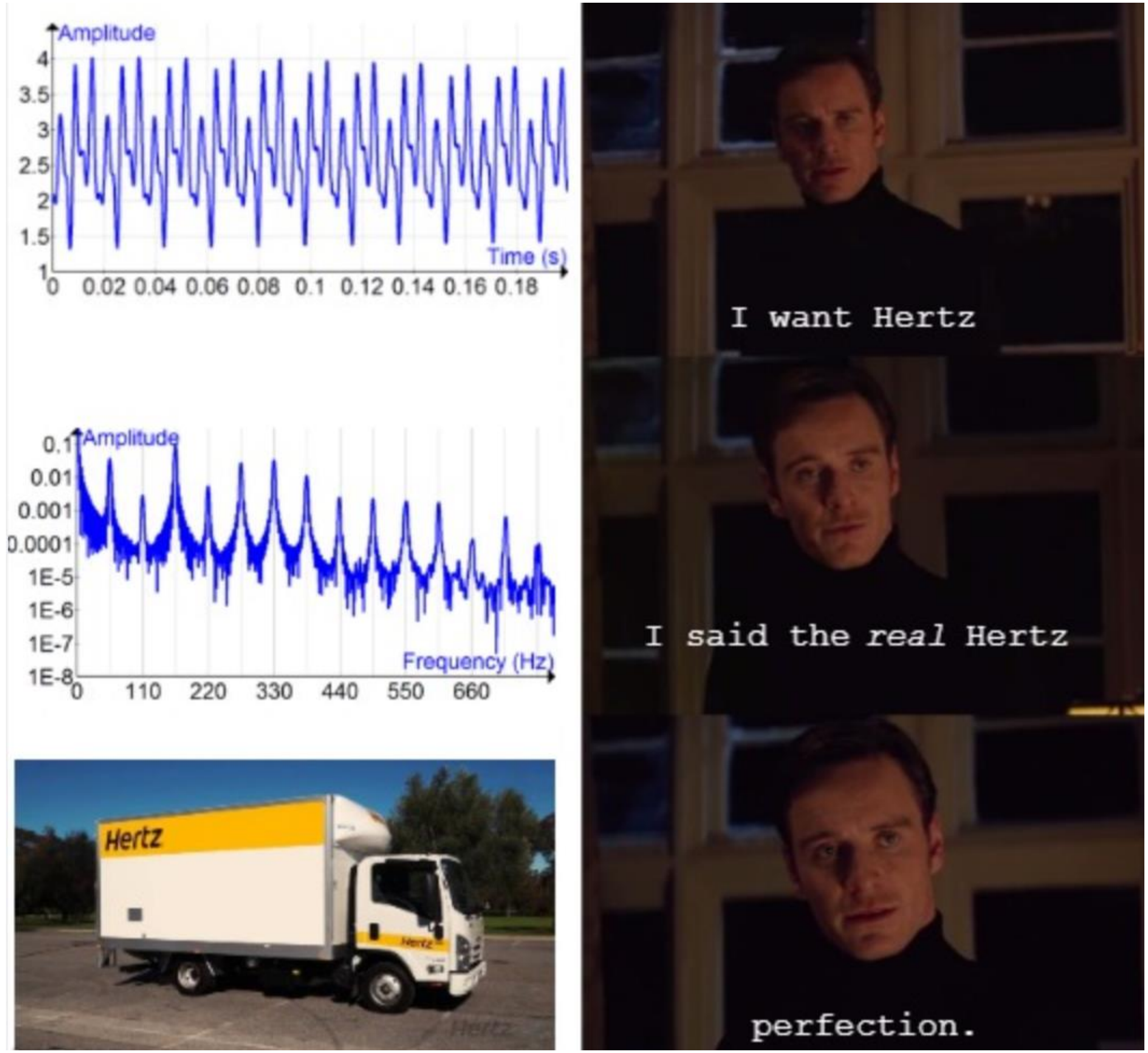
Dipartimento di Informatica
Università di Verona
A.A. 2018-19

Elaborazione dei Segnali e Immagini

Analisi di Fourier

- Serie di Fourier

Gonzalez Cap.4-4.2.2



Analisi di Fourier

- L'analisi di Fourier formalizza matematicamente come passare dai segnali temporali (o spaziali) a quelli frequenziali *e viceversa*

- Argomenti:
  - Serie di Fourier
  - Trasformata di Fourier nel continuo
  - Trasformata di Fourier tempo-discreta
  - Trasformata di Fourier discreta (1D e 2D)

SERIE DI FOURIER

- Una funzione f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di variabile continua t, periodica di periodo T, può essere espressa come:

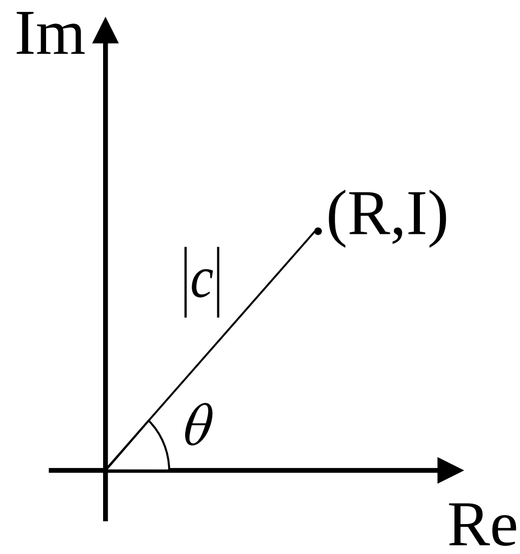
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \quad \text{per } n \in \mathbb{Z} \qquad (1, sintesi)$$

i.e., una sommatoria di esponenziali complesse di frequenza *multiple* rispetto a quella fondamentale ($2\pi/T$) moltiplicate per i coefficienti $c_n \in \mathbb{C}$, dove:

$$c_n \in \mathbb{C} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt \quad \text{per } n \in \mathbb{Z} \qquad (2, analisi)$$

- Ricordiamo che:

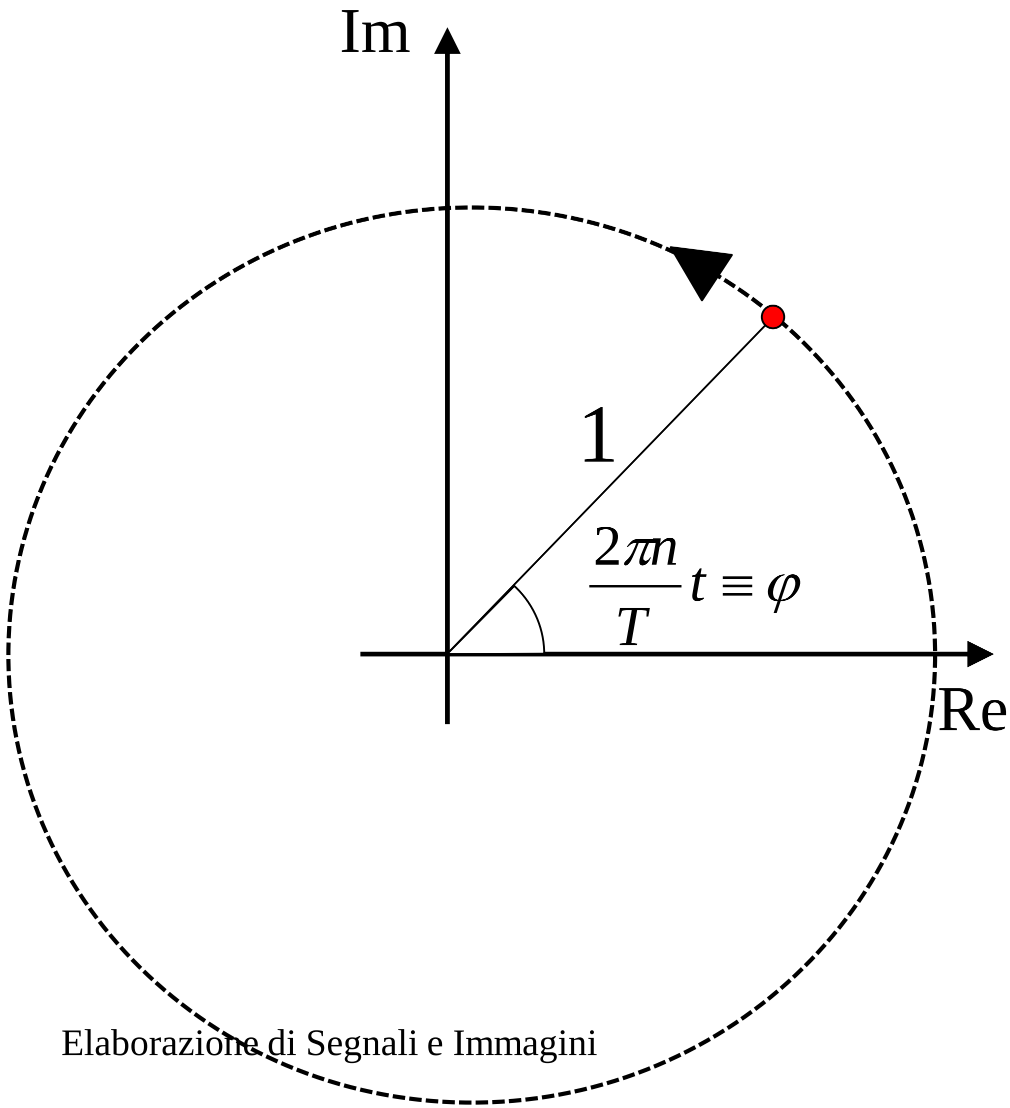
$$c \in \mathbb{C} = \mathrm{Re} + j\,\mathrm{Im}$$
$$= |c| e^{j\theta}$$



quindi

$$c_n = |c_n| e^{j\theta_n} \qquad |c_n|, \theta_n \in \mathbb{R}$$

- Ricordiamo che $e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$ è un fasore rotante di velocità angolare $\frac{2\pi n}{T}t$:



- Osserviamo quindi che

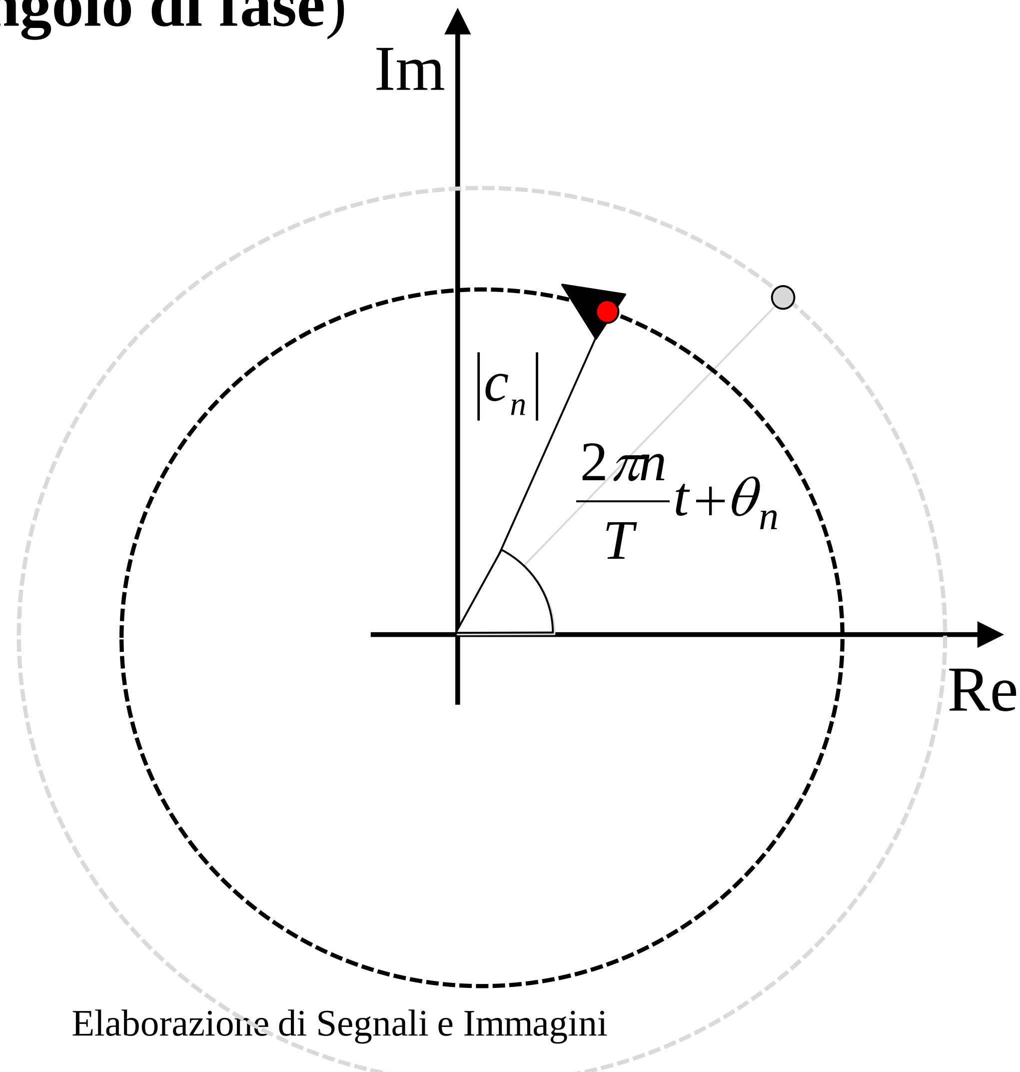
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

  - è una somma di infiniti termini
  - ogni termine vede la moltiplicazione tra un numero complesso ed un fasore, che *produce un altro fasore*

$$c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = |c_n| e^{j\theta_n} e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = |c_n| e^{j\frac{2\pi n}{T}t + \theta_n}$$

- questo in pratica corrisponde a **estendere** il fasore $e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$ ad una lunghezza $|c_n|$ facendolo partire con **un angolo di partenza** pari a θ_n (detto **angolo di fase**)

$$|c_n| e^{j\frac{2\pi n}{T}t+\theta_n}$$



$|c_n| < 1$

$\theta_n > 0$

- Notiamo che:

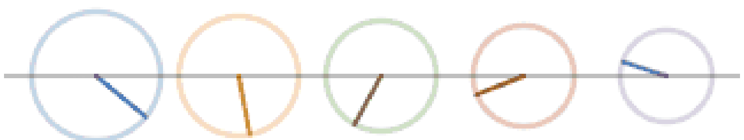
  – c_n può appartenere agli $\mathbb{R}$, nel qual caso significa che θ_n non compare, avendo quindi solo un cambiamento nella lunghezza dell'n-esimo fasore pari a $\left|c_n\right|$

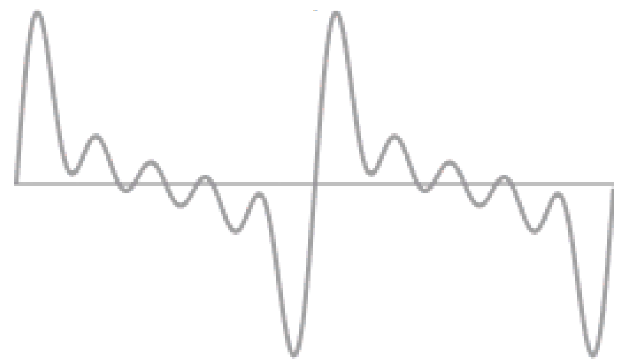
$$c_n = \left|c_n\right| \cancel{e^{j\theta_n}}$$

$$c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = \left|c_n\right| \cancel{e^{j\theta_n}} e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = \left|c_n\right| e^{j\frac{2\pi n}{T}t \cancel{+\theta_n}}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

sintesi





analisi

$$c_n \in \mathbb{C} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}dt$$

- Un primo esempio di serie di Fourier è per il segnale trigonometrico *f(t) = cos(2πt)* (*T*=1)
- Ottengo (dimostrazione come materiale aggiuntivo, lunga)

$$c_{-1} = \frac{1}{2}, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_{i \le -2, i \ge 2} = 0$$

- e sostituendo in (1)

$$\cos(2\pi t) = \frac{1}{2} e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi t} = \frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2}$$

- Tre cose:

1) $\frac{2\pi}{T} = f_0$

2) $c_n = |c_n| e^{j\theta_n}$

3) in questo caso, $c_n \in \mathbb{R}$ quindi l'angolo di fase non è presente

$$\boxed{\cos 2\pi t} = \boxed{\frac{1}{2}e^{-j2\pi t}} + \boxed{\frac{1}{2}e^{j2\pi t}}$$

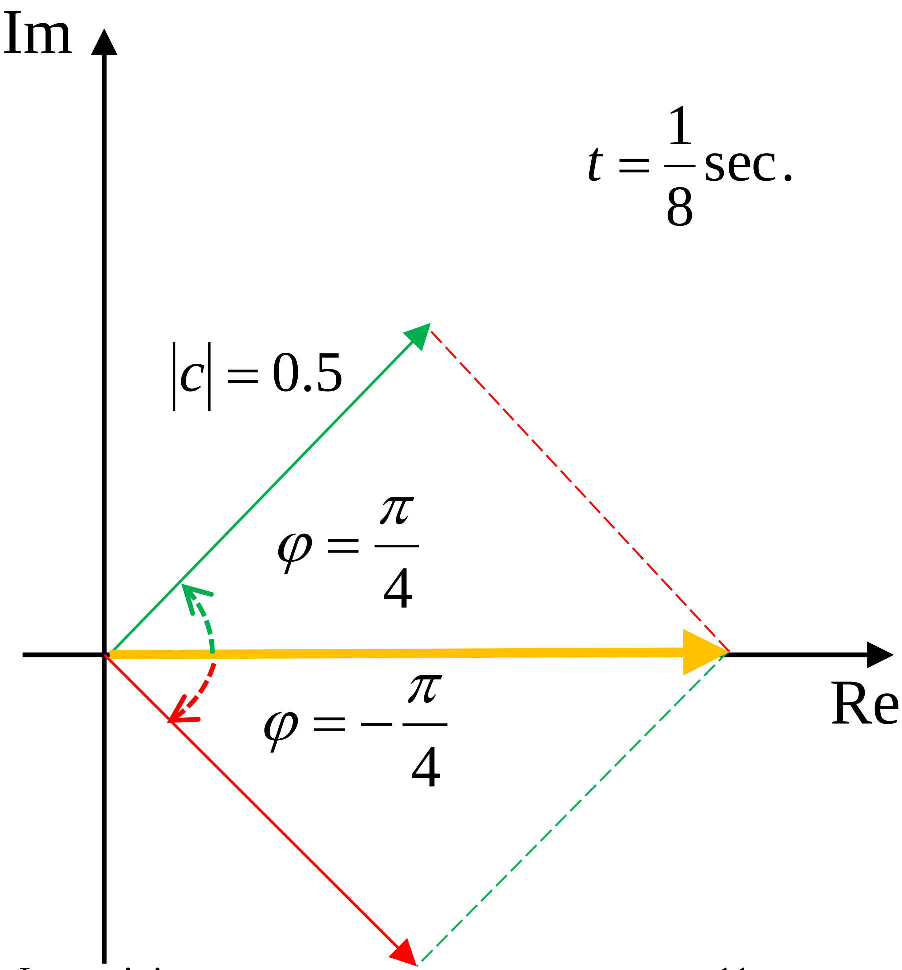
- $\boxed{\frac{1}{2}e^{j2\pi t}}$ è un fasore di modulo 0.5

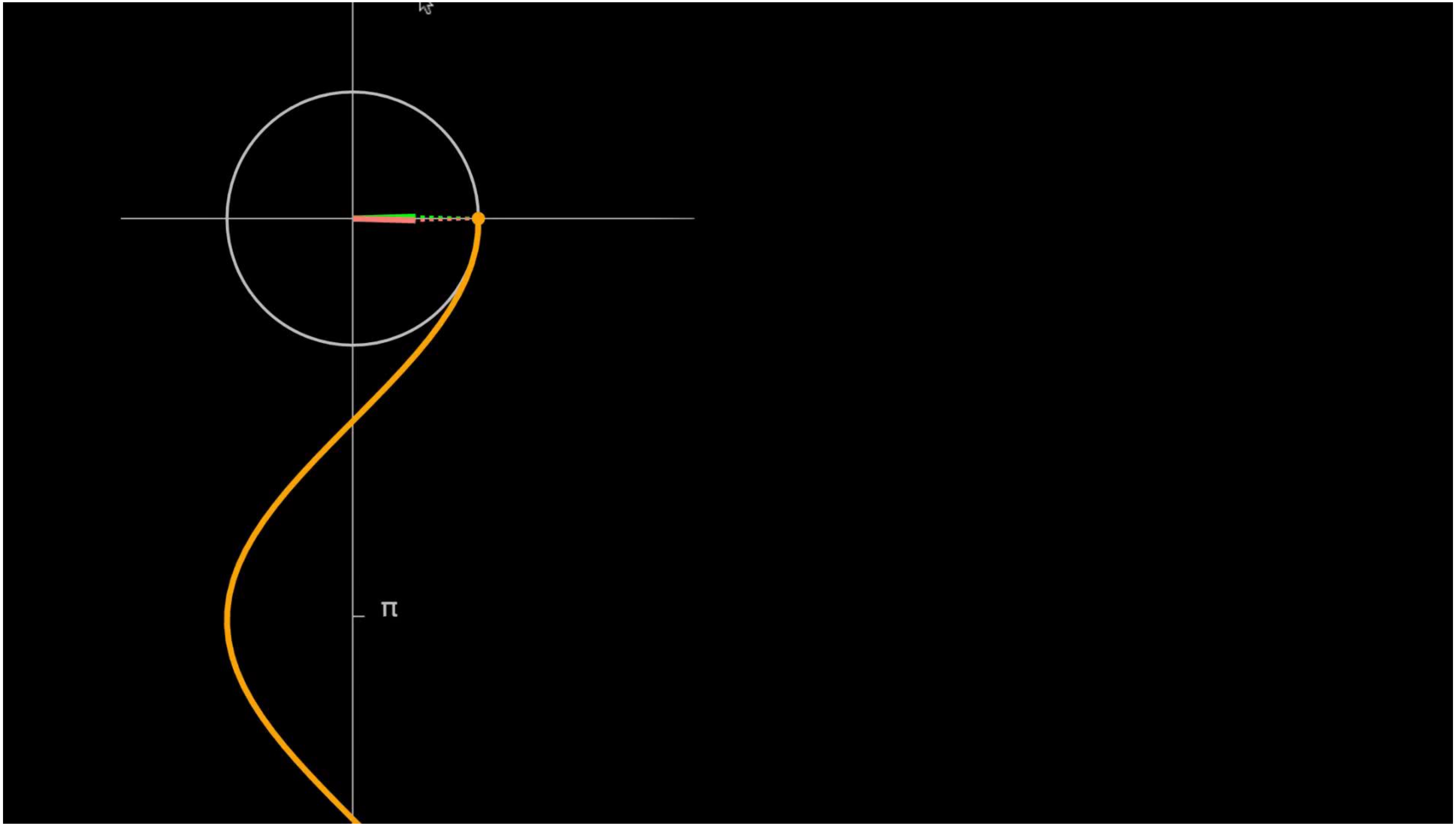
  e angolo $2\pi t$

- $\boxed{\frac{1}{2}e^{-j2\pi t}}$ è un fasore di modulo 0.5

  e angolo $-2\pi t$

- La freccia verde rappresenta il valore assunto da cos$2\pi t$ per $t=1/8$
- *Immaginate l'avanzare del tempo…*





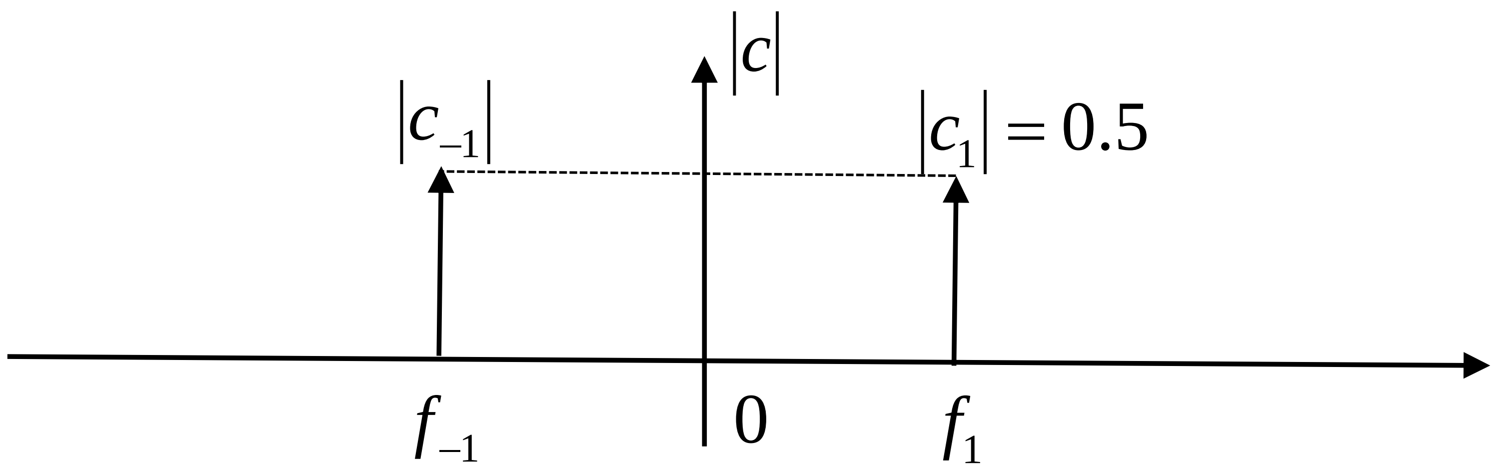
https://www.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-ac-analysis/v/ee-euler-cosine

- I coefficienti $c_{n=-1}$, $c_{n=1}$ sono relativi ai **moduli o ampiezze** dei fasori complessi di frequenza $f_0 \cdot n, \quad \mathrm{n} = -1\,,1$ ricordando che

$$e^{j\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} = e^{j\left(f_0 n t\right)}$$

che possiamo abbreviare in f_{-1}, f_1

- Possiamo quindi disegnare lo **spettro di ampiezza**



- Il secondo esempio di serie di Fourier è il segnale trigonometrico f(t) = sin(2πt)   (T=1)
- Ottengo (analogamente a quanto succede per cos(2πt))

$$c_{-1} = \frac{1}{2j}, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = -\frac{1}{2j}, \quad c_{i\leq -2, i\geq 2} = 0$$

dove questa volta $c_n \in \mathbb{C}$ ed in particolare

$$\pm\frac{1}{2j} = \pm\frac{1}{2j}\cdot\frac{j}{j} = \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{j}{j^2} = j\cdot\mp\frac{1}{2}$$

passo alla forma di esponenziale complesso (vedi Es. 2.1-2.2)

Rettangolare

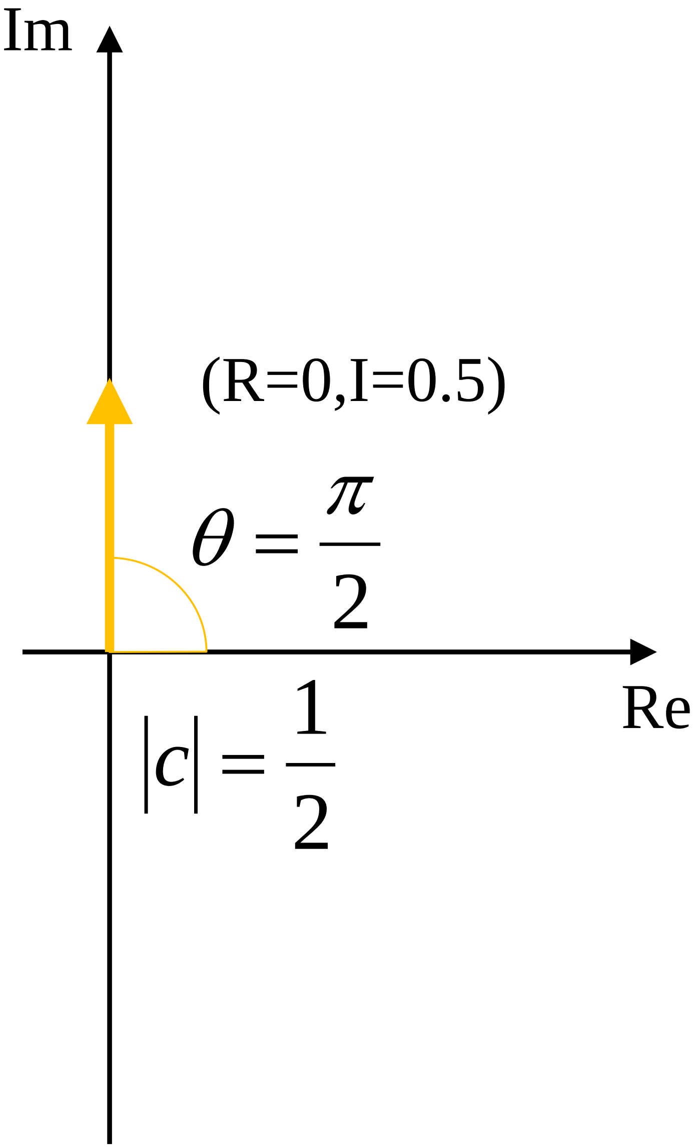
$$j \cdot \frac{1}{2} = 0 + j \cdot \frac{1}{2}$$

$$|c| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = arctg(0.5/0) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Esponenziale complessa

$$\frac{1}{2} e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = c_{-1}$$

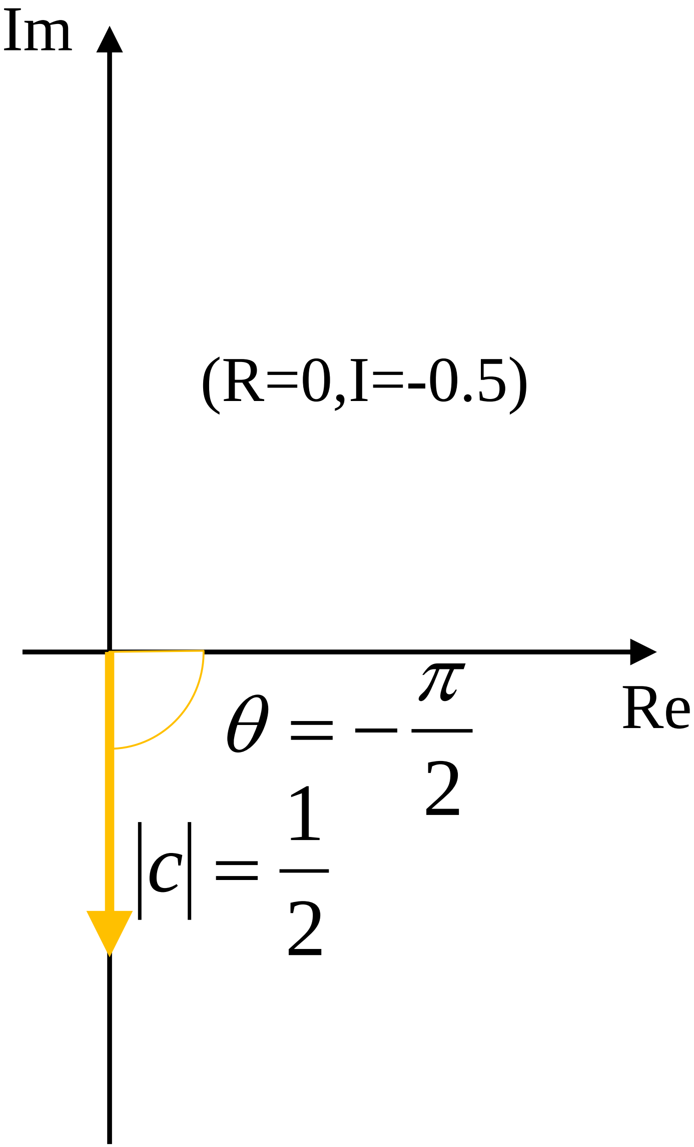


Rettangolare $$j \cdot -\frac{1}{2} = 0 + j \cdot -\frac{1}{2}$$

$$|c| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = arctg(-0.5/0) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

Esponenziale complessa $$\frac{1}{2} e^{j \cdot -\frac{\pi}{2}} = c_1$$

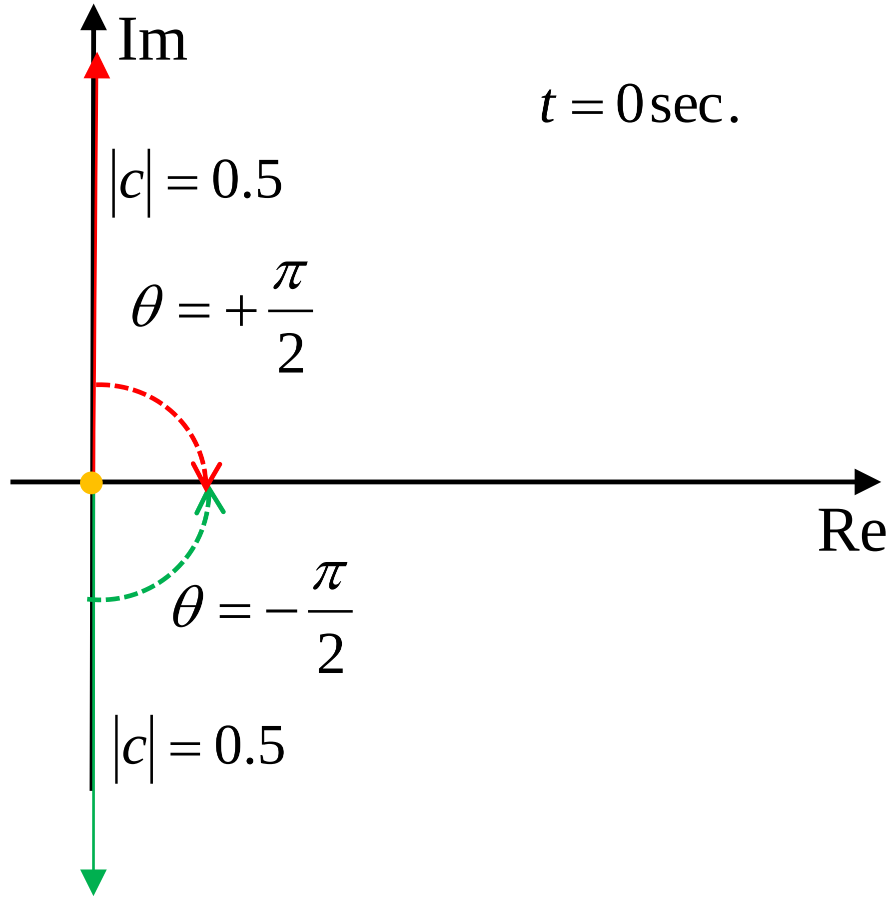


$$\boxed{\sin 2\pi t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

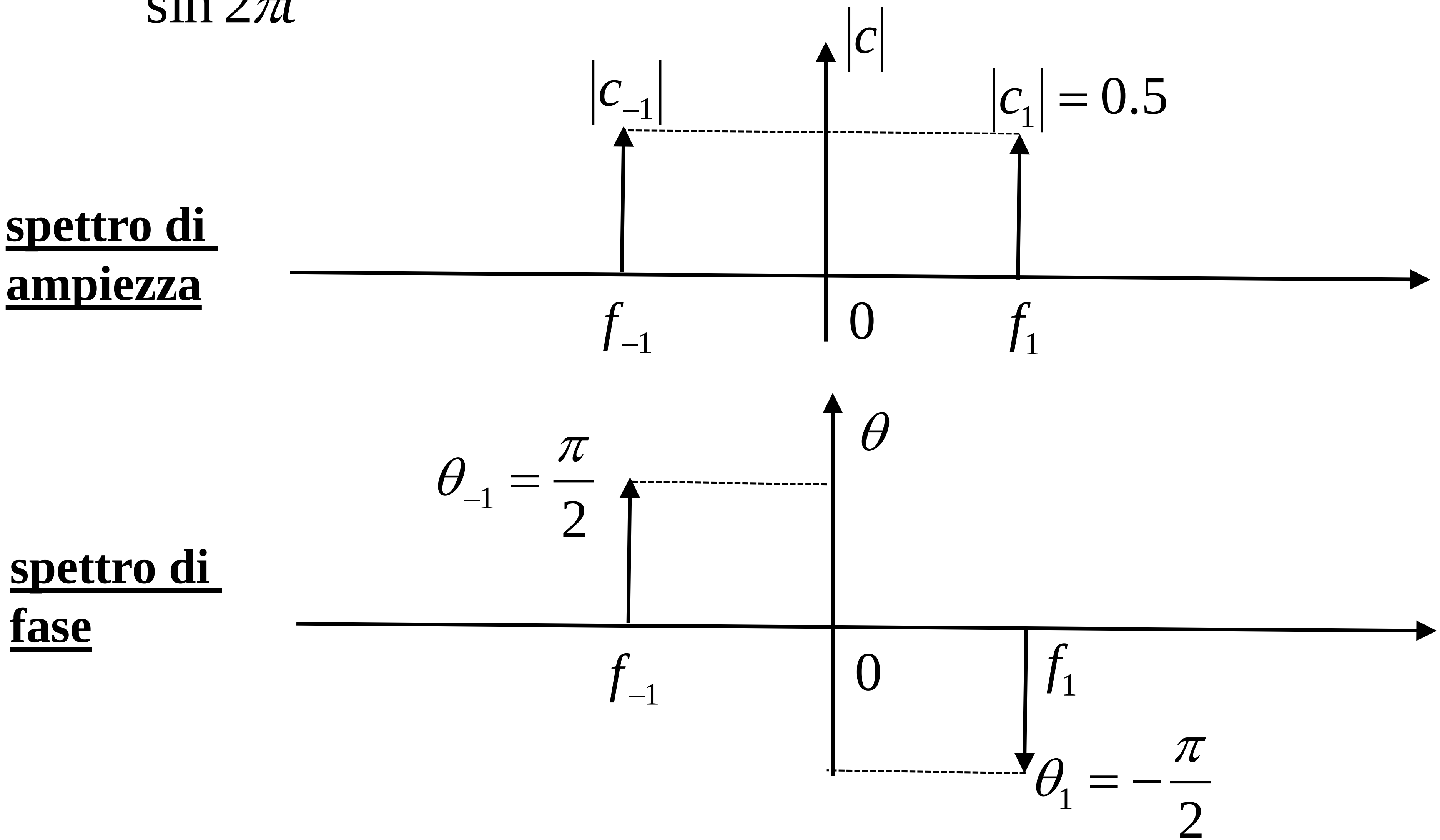
$$= c_{-1}e^{j-2\pi t} + c_1 e^{j2\pi t}$$

$$= \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\cdot -2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{-\pi}{2}}e^{j2\pi t}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}e^{j\left(-2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)}} + \boxed{\frac{1}{2}e^{j\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)}}$$



- Come prima, possiamo disegnare lo spettro di ampiezza e un nuovo grafico, chiamato **spettro di fase**, che riporta gli angoli di fase per $\sin 2\pi t$



PROPRIETA' DELLA SERIE DI FOURIER

- Lo spettro di ampiezza e di fase sono *funzioni nel dominio delle frequenze* che formano *lo spettro di Fourier*
- Lo spettro di Fourier *per i segnali periodici* gode delle seguenti proprietà:
  – Lo spettro di *ampiezza* è *simmetrico* rispetto all'asse y
  – Lo spettro di *fase* è *antisimmetrico* rispetto all'asse y
  – Se i coefficienti c_n sono reali, non esiste lo spettro di fase
  – Entrambe gli spettri sono funzioni a pettine, definite su frequenze *multiple* rispetto a quella fondamentale

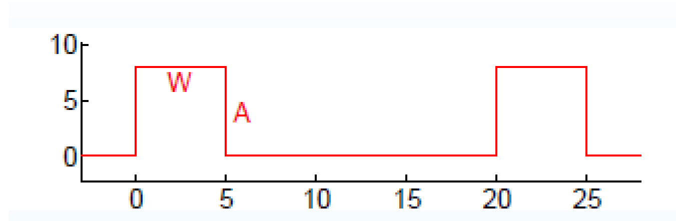
$$\left\{\frac{2\pi n}{T}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{f_0 \cdot n\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \equiv \left\{f_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

esercizio alla lavagna E3.1

- Esempio per un segnale onda quadra

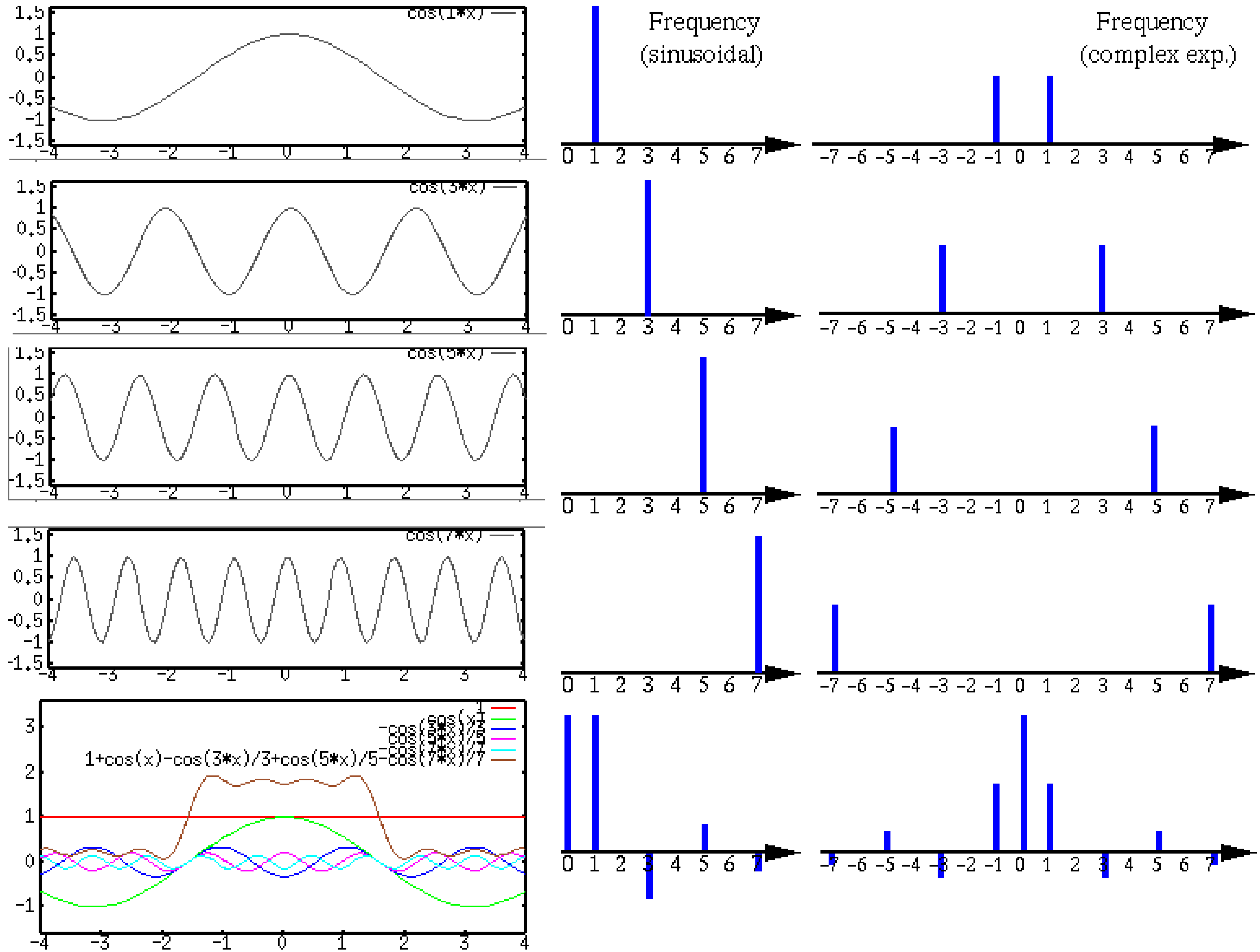
- Anch'esso è periodico, e quindi può essere calcolato come serie di Fourier

- Qui a lato, alcuni dei coefficienti
- Si notino le proprietà di cui sopra
- Date le relazioni di simmetria, posso usare la metà (più uno in 0) dei fasori per illustrare il processo di sintesi (Eq.1)



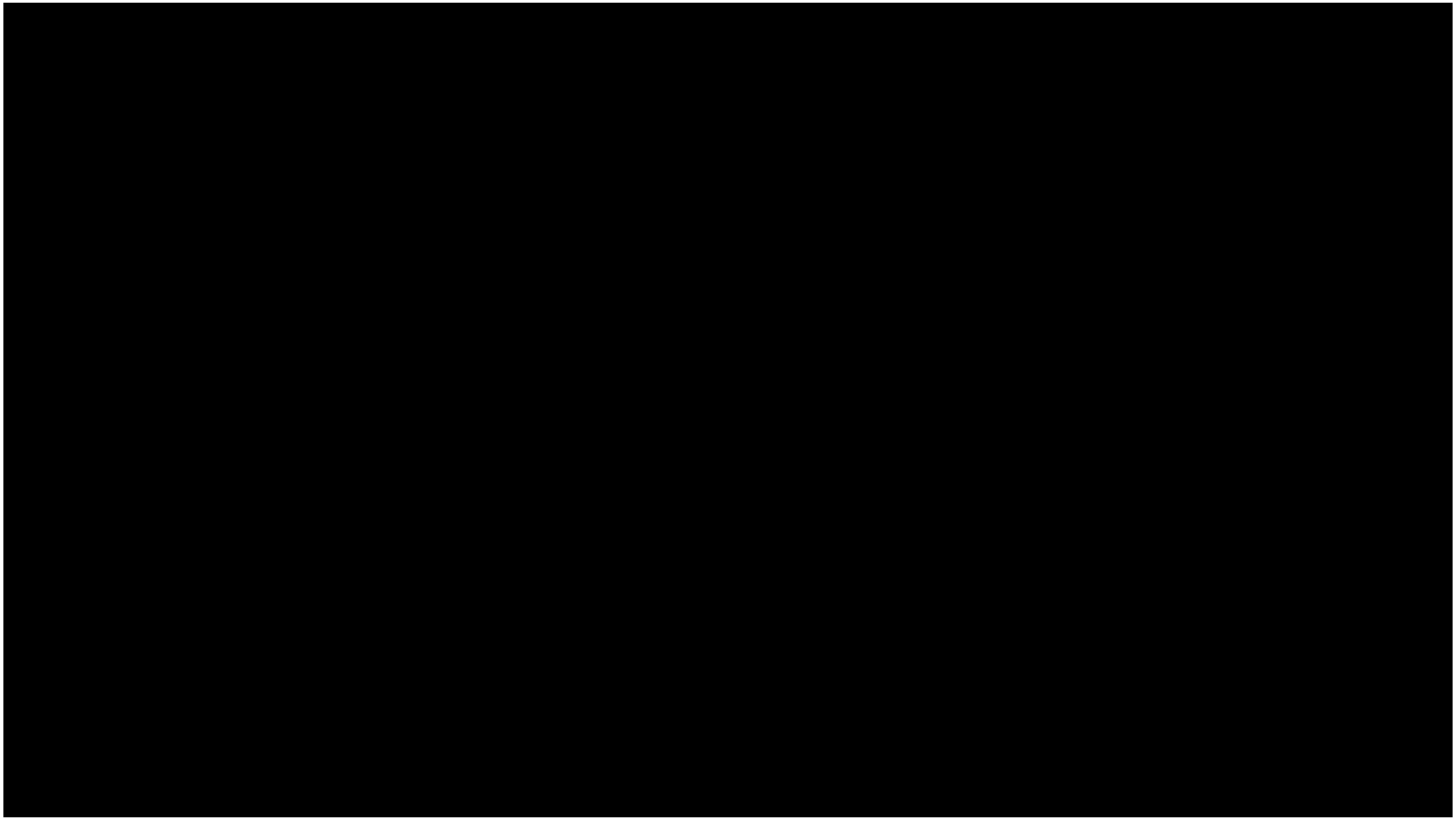
n	c_n
-6	$i\frac{8}{6\pi}$
-5	$\frac{4}{5\pi} + i\frac{4}{5\pi}$
-4	0
-3	$\frac{-4}{3\pi} + i\frac{4}{3\pi}$
-2	$i\frac{8}{2\pi}$
-1	$\frac{4}{\pi} + i\frac{4}{\pi}$
0	2
1	$\frac{4}{\pi} + i\frac{-4}{\pi}$
2	$i\frac{-8}{2\pi}$
3	$\frac{-4}{3\pi} + i\frac{-4}{3\pi}$
4	0
5	$\frac{4}{5\pi} + i\frac{-4}{5\pi}$
6	$i\frac{-8}{6\pi}$

Alcuni risultati



cos(1*x)
cos(3*x)
cos(5*x)
cos(7*x)
Frequency
(sinusoidal)
Frequency
(complex exp.)
1+cos(x)-cos(3*x)/3+cos(5*x)/5-cos(7*x)/7

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$



https://jackschaedler.github.io/circles-sines-signals/dft_introduction.html