Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

27 gennaio 2012

ESERCIZIO 1. *Si dica per quali valori di β la matrice*

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile.

Svolgimento.

Innanzitutto ricordiamo cosa vuol dire che una matrice è diagonalizzabile:

DEFINIZIONE 1. *A è una matrice diagonalizzabile se è simile ad una matrice D diagonale, ossia se esistono una matrice diagonale D ed una matrice invertibile S tali che*

$$A = SDS^{-1}$$

Questa è solo una definizione, a noi servirebbe un modo per capire quando ha senso cercare questa D e questa S, ovvero delle condizioni necessarie e sufficienti che ci dicano se data A essa è diagonalizzabile.

Un importante teorema ci dà proprio queste condizioni:

TEOREMA 1. *Sia A una matrice complessa $n \times n$, λ_i i suoi autovalori e $E_A(\lambda_i)$ i relativi autospazi, allora sono equivalenti i seguenti fatti:*

1. *A è diagonalizzabile.*
2. *$\mathbb{C}^n$ ha una base costituita da autovettori di A.*
3. *$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} E_A(\lambda_i)$, con $k \leq n$.*
4. *la molteplicità geometrica di ciascun autovalore coincide con la sua molteplicità algebrica.*

La condizione più facile da verificare affinché A sia diagonalizzabile é la quarta.

Torniamo al nostro esercizio: troviamo gli autovalori di B_β, calcolando il determinante di $B_\beta - \lambda I$ e ponendolo uguale a zero:

$$B_\beta - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(B_\beta - \lambda I) &= 0\\ (\beta-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) &= 0\\ (\beta-\lambda)(2-\lambda)^2(1-\lambda) &= 0\end{aligned}$$

Da cui otteniamo:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2 \qquad m = 2 \qquad d =?\\ \lambda_2 &= 1 \qquad m = 1 \qquad d = 1\end{aligned}$$

Il terzo autovalore sarebbe β. Si presentano quindi 3 casi:

$\boxed{\textbf{CASO } \beta \neq 1,2}$ In questo caso avremmo 3 autovalori diversi e non importa che valore di β, quindi per comodità poniamo $\beta = 0$ e vediamo se B_0 è diagonalizzabile:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

In questo modo otteniamo (non serve rifare il polinomio caratteristico sulla nuova matrice, basta andare a sostituire il valore di β nel risultato già torvato all'inizio)

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2 \qquad m = 2 \qquad d =?\\ \lambda_2 &= 1 \qquad m = 1 \qquad d = 1\\ \lambda_3 &= 0 \qquad m = 1 \qquad d = 1\end{aligned}$$

Dunque la matrice è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 2$ è 2. Calcoliamo allora lo spazio nullo di $B_0 - 2I$ applicandovi l'Eliminazione di Gauss:

$$B_0 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Da cui capiamo che il rango della matrice è 3 (tre colonne dominanti) quindi la dimensione dello spazio nullo, e quindi la dimensione dell'autospazio, è 1 (per teorema nullità più rango). Questo vuol dire che la molteplicità geometrica è 1 e non essendo uguale a quella algebrica (che era 2), possiamo dire che per $\beta = 0$, ma in verità per $\beta \neq 1, 2$, la matrice B_β non è diagonalizzabile.

$\boxed{\textbf{CASO } \beta = 2}$ Innanzitutto vediamo come diventa la matrice:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

In questo modo otteniamo (non serve rifare il polinomio caratteristico sulla nuova matrice, basta andare a sostituire il valore di β nel risultato già torvato all'inizio)

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 2 \qquad m = 3 \qquad d = ? \\ \lambda_2 = 1 \qquad m = 1 \qquad d = 1 \end{aligned}$$

Dunque la matrice è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 2$ è 3. Calcoliamo allora lo spazio nullo di $B_2 - 2I$ applicandovi l'Eliminazione di Gauss:

$$B_2 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui capiamo che il rango della matrice è 2 (due colonne dominanti) quindi la dimensione dello spazio nullo, e quindi la dimensione dell'autospazio, è 2 (per teorema nullità più rango). Questo vuol dire che la molteplicità geometrica è 2 e non essendo uguale a quella algebrica (che era 3), possiamo dire che per $\beta = 2$ la matrice B_β non è diagonalizzabile.

$\boxed{\textbf{CASO } \beta = 1}$ Innanzitutto vediamo come diventa la matrice:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In questo modo otteniamo (non serve rifare il polinomio caratteristico sulla nuova matrice, basta andare a sostituire il valore di β nel risultato già torvato all'inizio)

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 2 \qquad m = 2 \qquad d = ? \\ \lambda_2 = 1 \qquad m = 2 \qquad d = ? \end{aligned}$$

Dunque la matrice è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$ è 2.

Vediamo prima per $\lambda_1 = 2$: calcoliamo allora lo spazio nullo di $B_1 - 2I$ applicandovi l'Eliminazione di Gauss:

$$B_1 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui capiamo che il rango della matrice è 2 (due colonne dominanti) quindi la dimensione dello spazio nullo, e quindi la dimensione dell'autospazio, è 2 (per teorema nullità più rango). Questo vuol dire che la molteplicità geometrica è 2 ed è uguale a quella algebrica (che era 2).

Se anche la molteplicità geometrica di $\lambda_2 = 1$ sarà 2, potremmo dire che per $\beta = 1$ la matrice B_β è diagonalizzabile.

Dall'Eliminazione di Gauss appena fatta ricaviamo il vettore soluzione:

$$\begin{bmatrix}\beta\\\alpha\\\alpha\\0\end{bmatrix} \rightarrow \beta\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix}\alpha = 1\\\beta = 1\end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Quindi gli autovettori relativi a $\lambda = 2$ sono $v_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ e $v_2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$

Per verificare che abbiamo fatto giusto, notare che $B_1 v_1 = \lambda_1 v_1$ e $B_1 v_2 = \lambda_1 v_2$ e che $(B_1 - 2I)v_1 = 0$ e $(B_1 - 2I)v_2 = 0$ (queste equazioni derivano proprio dalla definizione di autovettore).

Vediamo ora per $\lambda_2 = 1$: calcoliamo allora lo spazio nullo di $B_1 - I$ applicandovi l'Eliminazione di Gauss:

$$B_1 - 2I = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Da cui capiamo che il rango della matrice è 2 (due colonne dominanti) quindi la dimensione dello spazio nullo, e quindi la dimensione dell'autospazio, è 2 (per teorema nullità più rango). Questo vuol dire che la molteplicità geometrica è 2 ed è uguale a quella algebrica (che era 2).

Tenendo conto del conto precedente sull'autovalore $\lambda_1 = 2$ possiamo dire che per $\beta = 1$ la matrice B_β è diagonalizzabile.

Dall'Eliminazione di Gauss appena fatta ricaviamo il vettore soluzione:

$$\begin{bmatrix}0\\0\\\beta\\\alpha\end{bmatrix} \rightarrow \beta\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix}\alpha = 1\\\beta = 1\end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Quindi gli autovettori relativi a $\lambda = 1$ sono $v_3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ e $v_4 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$

Per verificare che abbiamo fatto giusto, notare che $B_1 v_3 = \lambda_2 v_3$ e $B_1 v_4 = \lambda_2 v_4$ e che $(B_1 - I)v_3 = 0$ e $(B_1 - I)v_4 = 0$ (queste equazioni derivano proprio dalla definizione di autovettore).

Quindi la risposta definitiva è: la matrice B_β è diagonalizzabile per $\beta = 1$
Vediamo come escono S e D tali che $B_1 = SDS^{-1}$.
Ricordiamo la matrice B_1:

$$B_1 = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Da essa, per i calcoli fatti prima, troviamo:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 2 & m = 2 & d = 2 \\ \lambda_2 = 1 & m = 2 & d = 2 \end{array}$$

A questo punto definiamo le matrici D e S e diamo anche S^{-1}:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notare che nella i-esima colonna di S sta l'autovettore relativo all'autovalore di posto ii in D.

É facile verificare che

$$B_1 = SDS^{-1}$$

ESERCIZIO 2. *Si dica per quali valori di β la matrice*

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 2\beta & 2 \\ 2\beta & 0 & -6\beta \\ 0 & -2\beta & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile

Svolgimento.

Innanzitutto ricordiamo cosa vuol dire che una matrice è diagonalizzabile:

DEFINIZIONE 2. *A è una matrice diagonalizzabile se è simile ad una matrice D diagonale, ossia se esistono una matrice diagonale D ed una matrice invertibile S tali che*

$$A = SDS^{-1}$$

Questa è solo una definizione, a noi servirebbe un modo per capire quando ha senso cercare questa D e questa S, ovvero delle condizioni necessarie e sufficienti che ci dicano se data A essa è diagonalizzabile.

Un importante teorema ci dà proprio queste condizioni:

TEOREMA 2. *Sia A una matrice complessa $n \times n$, λ_i i suoi autovalori e $E_A(\lambda_i)$ i relativi autospazi, allora sono equivalenti i seguenti fatti:*

1. *A è diagonalizzabile.*
2. *$\mathbb{C}^n$ ha una base costituita da autovettori di A.*
3. *$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} E_A(\lambda_i)$, con $k \leq n$.*
4. *la molteplicità geometrica di ciascun autovalore coincide con la sua molteplicità algebrica.*

La condizione più facile da verificare affinché A sia diagonalizzabile é la quarta.

Torniamo al nostro esercizio: troviamo gli autovalori di B_β, calcolando il determinante di $B_\beta - \lambda I$ e ponendolo uguale a zero:

$$B_\beta - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2\beta & 2 \\ 2\beta & 0-\lambda & -6\beta \\ 0 & -2\beta & 0-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(B_\beta - \lambda I) &= 0 \\ -\lambda(-2\lambda + \lambda^2 - 4\beta^2) + 2\beta(-12\beta + 6\lambda\beta - 4\beta) &= 0 \\ 2\lambda^2 - \lambda^3 + 4\beta^2\lambda - 32\beta^2 + 12\beta^2\lambda &= 0 \\ -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 16\beta^2\lambda - 32\beta^2 &= 0 \\ -\lambda^2(\lambda-2) + 16\beta^2(\lambda-2) &= 0 \\ (\lambda-2)(16\beta^2 - \lambda^2) &= 0 \\ (\lambda-2)(4\beta-\lambda)(4\beta+\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Da cui otteniamo:

$$\lambda_1 = 2 \qquad m = 1 \qquad d = 1$$

Il secondo e terzo autovalore sarebbero -4β e 4β. Si presentano quindi 4 casi:

CASO $\beta \neq 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ In questo caso avremmo 3 autovalori diversi e pertanto tutte le molteplicità algebriche e geometriche coinciderebbero per ogni autovalore.

Dunque se $\beta \neq 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ la matrice B_β è diagonalizzabile.

ATTENZIONE: questo vuol dire che se prendiamo $\beta \neq 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ riusciamo a trovare S e D tali che $B_\beta = SDS^{-1}$ ma niente ci dice che per $\beta = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, B_β non sia pure diagonalizzabile. Quindi questa è solo una risposta provvisoria, dobbiamo vedere cosa accade per $\beta = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$. Ripeto: sicuramente per $\beta \neq 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ la matrice B_β è diagonalizzabile, e per $\beta = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$? Scopriamolo nei prossimi tre casi.

CASO $\beta = 0$ Innanzitutto vediamo come diventa la matrice:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo modo otteniamo (non serve rifare il polinomio caratteristico sulla nuova matrice, basta andare a sostituire il valore di β nel risultato già torvato all'inizio)

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 2 \qquad m = 1 \qquad d = 1 \\ \lambda_2 = 0 \qquad m = 2 \qquad d = ? \end{aligned}$$

Dunque la matrice è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica di $\lambda_2 = 0$ è 2. Calcoliamo allora lo spazio nullo di $B_0 - 0I = B_0$ applicandovi l'Eliminazione di Gauss:

$$B_0 - 0I = B_0 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui capiamo che il rango della matrice è 1 (due colonne dominanti) quindi la dimensione dello spazio nullo, e quindi la dimensione dell'autospazio, è 2 (per teorema nullità più rango). Questo vuol dire che la molteplicità geometrica è 2 ed essendo uguale a quella algebrica (che era 2), possiamo dire che per $\beta = 0$ la matrice B_0 è diagonalizzabile.

Troviamo quindi gli autovettori relativi a $\lambda = 0$

Dall'Eliminazione di Gauss appena fatta ricaviamo il vettore soluzione:

$$\begin{bmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \rightarrow \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi gli autovettori relativi a $\lambda = 0$ sono $v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

Per verificare che abbiamo fatto giusto, notare che $B_0 v_1 = \lambda_2 v_1$ e $B_0 v_2 = \lambda_2 v_2$ e che $(B_0 - 0I)v_1 = 0$ e $(B_0 - 0I)v_2 = 0$ (queste equazioni derivano proprio dalla definizione di autovettore).

Troviamo ora l'autovettore relativo a $\lambda_1 = 2$: calcoliamo allora lo spazio nullo di $B_0 - 2I$ applicandovi l'Eliminazione di Gauss:

$$B_0 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ritroviamo che il rango della matrice è 2 (due colonne dominanti) quindi la dimensione dello spazio nullo, e quindi la dimensione dell'autospazio, è 1 (per teorema nullità più rango). Questo vuol dire che la molteplicità geometrica è 1 ed è uguale a quella algebrica (che era 1).

Dall'Eliminazione di Gauss appena fatta ricaviamo il vettore soluzione:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi l'autovettore relativo a $\lambda = 2$ è $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

Per verificare che abbiamo fatto giusto, notare che $B_0 v_3 = \lambda_1 v_3$ e che $(B_0 - 2I)v_3 = 0$ (queste equazioni derivano proprio dalla definizione di autovettore).

A questo punto definiamo le matrici D e S e diamo anche S^{-1}:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notare che nella i-esima colonna di S sta l'autovettore relativo all'autovalore di posto ii in D.

É facile verificare che

$$B_0 = SDS^{-1}$$

$\boxed{\textbf{CASO } \beta = \frac{1}{2}}$ Innanzitutto vediamo come diventa la matrice:

$$B_{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo modo otteniamo (non serve rifare il polinomio caratteristico sulla nuova matrice, basta andare a sostituire il valore di β nel risultato già torvato all'inizio)

$$\lambda_1 = 2 \qquad m = 2 \qquad d = ?$$
$$\lambda_2 = -2 \qquad m = 1 \qquad d = 1$$

Dunque la matrice è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 2$ è 2. Calcoliamo allora lo spazio nullo di $B_{\frac{1}{2}} - 2I$ applicandovi l'Eliminazione di Gauss:

$$B_{\frac{1}{2}} - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui capiamo che il rango della matrice è 2 (due colonne dominanti) quindi la dimensione dello spazio nullo, e quindi la dimensione dell'autospazio, è 1 (per teorema nullità più rango). Questo vuol dire che la molteplicità geometrica è 1 e non essendo uguale a quella algebrica (che era 2), possiamo dire che per $\beta = \frac{1}{2}$ la matrice B_β non è diagonalizzabile.

$\boxed{\textbf{CASO } \beta = -\frac{1}{2}}$ Innanzitutto vediamo come diventa la matrice:

$$B_{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo modo otteniamo (non serve rifare il polinomio caratteristico sulla nuova matrice, basta andare a sostituire il valore di β nel risultato già torvato all'inizio)

$$\lambda_1 = 2 \qquad m = 2 \qquad d = ?$$
$$\lambda_2 = -2 \qquad m = 1 \qquad d = 1$$

Dunque la matrice è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 2$ è 2. Calcoliamo allora lo spazio nullo di $B_{-\frac{1}{2}} - 2I$ applicandovi l'Eliminazione di Gauss:

$$B_{-\frac{1}{2}} - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui capiamo che il rango della matrice è 2 (due colonne dominanti) quindi la dimensione dello spazio nullo, e quindi la dimensione dell'autospazio, è 1 (per teorema nullità più rango). Questo vuol dire che la molteplicità geometrica è 1 e non essendo uguale a quella algebrica (che era 2), possiamo dire che per $\beta = -\frac{1}{2}$ la matrice B_β non è diagonalizzabile.

Quindi la risposta definitiva è: la matrice B_β è diagonalizzabile per $\beta \neq \frac{1}{2}$ e $\beta \neq -\frac{1}{2}$