DOMANDINE INIZIALI ALGEBRA LINEARE

(D1) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti complessi. Esiste un sottospazio vettoriale di V di dimensione 6 ?

$\boxed{\text{NB}: \dim(\text{Sottospazio Vettoriale}) \leq \dim(\text{Spazio Vettoriale})}$

No perché un sottospazio di uno spazio vettoriale V delle matrici 2×2 può avere dimensione massima pari alla dimensione spazio vettoriale. □

(D2) Sia A matrice 3×3 di rango 2. È vero che 0 è un autovalore di A ?

NB: Ricordiamo che se A $m\times m$, affinché sia invertibile dobbiamo avere che:
- il rango di A è m;
- il determinante non è nullo: $\det A \neq 0$;

$AB = BA = I_m$

Una matrice 3×3 di rango 2 non è invertibile (quindi singolare), e perciò $\det(A) = 0$.

$\det(A - xI) = 0$; con $x = 0$ si ha $\det(A) = 0$ e perciò 0 è un autovalore di A. □

(D3) Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{v_1; v_2\}$ un insieme linearmente indipendente.
L'insieme $\{v_1; 2v_1 - v_2\}$ è linearmente indipendente?

Sì perché v_1, $2v_1 - v_2$ sono vettori a loro volta linearmente indipendenti

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2(2v_1 - v_2)$

NB: Per def l'insieme $A = \{v_1; v_2; \dots; v_m\}$ è linearmente indipendente sse, per $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m \in \mathbb{C}$ da

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

segue che $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0 \dots \alpha_m = 0$

(D4) Siano $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Il vettore v è un autovettore di A? Se sì, per quale autovalore?

Posto $Av = \lambda v$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ 1\lambda \\ 1\lambda \end{bmatrix} \quad \text{da cui} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ 1\lambda \\ 1\lambda \end{bmatrix} \quad \text{impossibile}$$

(D8) Sia A una matrice 3×3 con $\det A \neq 0$. Si dica se 0 è un autovalore di A

$\det(A - xI) = 0$; con $x = 0 \rightarrow \det(A) = 0$ ma abbiamo supposto $\det A \neq 0$.
Quindi 0 non è un autovalore di A.

(D9) Esistono applicazioni lineari biiettive $f: \underset{V}{\mathbb{C}^3} \longrightarrow \underset{W}{\mathbb{C}^3}$?

Per il teorema nullità + rango sappiamo:

$\dim V = \dim N(f) + \dim Im(f)$

$\dim N(f) = \dim V - \dim Im(f)$

$\dim N(f) = 3 - \dim Im(f)$

se $\dim Im(f) = 3$, $\boxed{\dim N(f) = 0 \Rightarrow \text{esiste un'applicazione lineare iniettiva}}$

$\boxed{\dim Im(f) = 3 = \dim W \Rightarrow \text{esiste un'applicazione lineare suriettiva}}$

esiste perciò un'applicazione lineare biiettiva $f: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ □

NB : - biiettiva : se ho $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ (automaticamente è biettiva)

- iniettiva : $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ $n < m$
- suriettiva : $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ $n > m$

(D10) Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^4$

$\dim V = \dim N(f) + \dim Im(f)$

$\dim Im(f) = \dim V - \dim N(f) \leq \overset{3}{\dim V} < \overset{4}{\dim W}$

↳ non esistono applicazioni lineari suriettive $f: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^4$

NB : per suriettività uso $\dim Im(f)$, per l'iniettività uso $\dim N(f)$ e per biiettività parto da $\dim N(f)$

(D11) Sia $\{v_1; v_2, v_3\}$ una base dello spazio vettoriale V. Esiste un vettore v_4 t.c. $\{v_1; v_2, v_3, v_4\}$ sia linearmente indipendente?

No, perché data una base di dimensione 3 associata allo spazio vettoriale anch'esso di dim 3 non può succedere che dim (insieme lin. indip.) > dim (spazio vettoriale)