Lezione 16

Tecnologia

Tecnologia

- Tecnologia: processo attraverso il quale gli input si trasformano in output.
- *Es.* lavoro, computer, proiettore e elettricità vengono combinati per produrre questa lezione.

Tecnologia

- Di solito diverse tecnologie possono essere impiegate per produrre lo stesso output – una lavagna e un gesso possono sostituire computer e proiettore.
- Qual è la tecnologia migliore?
- Come confrontiamo le tecnologie?

Combinazione di input

- x_i denota la quantità di input i usata
- Una combinazione di input è un vettore $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- *Es.* $(x_1, x_2, x_3) = (6, 0, 9)$.

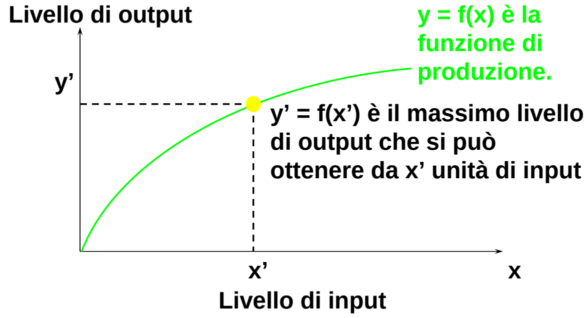
Funzione di produzione

- y denota il livello di output.
- La funzione di produzione dà il massimo ammontare di output possibile da una combinazione di input.

$$y = f(x_1, \cdots, x_n)$$

Funzione di produzione

Un input, un output



Insieme di produzione

- Un piano di produzione è una combinazione di input e un livello di output: $(x_1, \ldots, x_n, y)$.
- Un piano di produzione è realizzabile se

$$\mathbf{y \le f(x_1, \cdots, x_n)}$$

- L'insieme di tutti i piani di produzione realizzabili è detto insieme di produzione

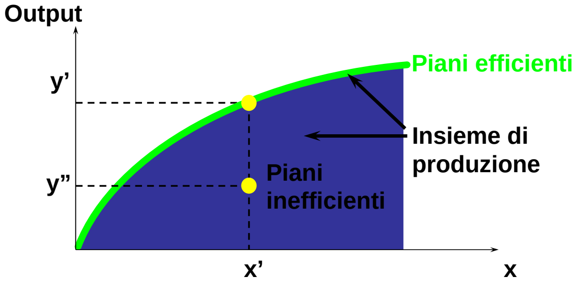
Insieme di produzione

L'insieme di produzione è dunque

$$T = \{(x_1, \cdots, x_n, y) | y \le f(x_1, \cdots, x_n) \ e \ x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0\}.$$

Insieme di produzione

Un input, un output



Tecnologia con input multipli

- Il caso di due input: livelli di input x_1 e x_2. Livello di output y.
- Supponiamo che la funzione di produzione sia

$$\mathbf{y = f(x_1, x_2) = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3}}.$$

Tecnologia con input multipli

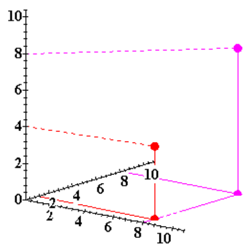
- *Es.* il massimo livello di output possibile dalla combinazione di input (x_1, x_2) = (1, 8) è

$$\mathbf{y = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3} = 2 \times 1^{1/3} \times 8^{1/3} = 2 \times 1 \times 2 = 4.}$$

- Il massimo livello di output possibile da (x_1,x_2) = (8,8) è

$$\mathbf{y = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3} = 2 \times 8^{1/3} \times 8^{1/3} = 2 \times 2 \times 2 = 8.}$$

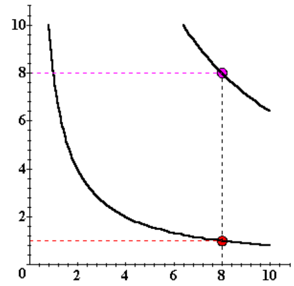
Tecnologia con input multipli



Tecnologia con input multipli

- L'isoquanto relativo alla quantità di output y è l'insieme di tutte le combinazioni di input che consentono di ottenere al più il livello di output y.

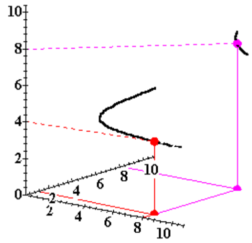
Isoquanti con due input



Isoquanti con due input

- Gli isoquanti possono essere rappresentati in un grafico 3D aggiungendo un asse verticale con il livello di output.

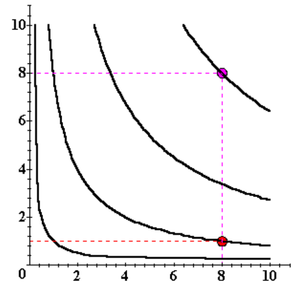
Isoquanti con due input



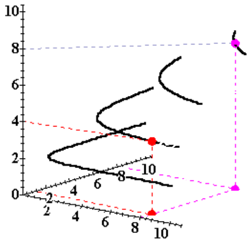
Isoquanti con due input

- Più isoquanti abbiamo più sappiamo circa la tecnologia.

Isoquanti con due input



Isoquanti con due input

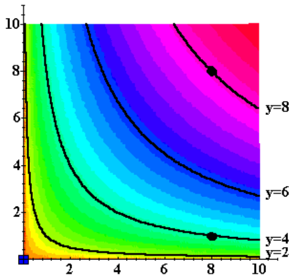


Tecnologie con input multipli

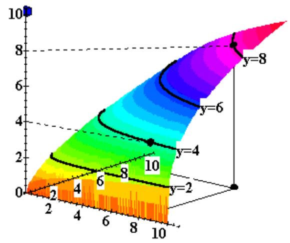
- L'insieme completo degli isoquanti è detto mappa degli isoquanti.
- Questa mappa è equivalente alla funzione di produzione
- Es.

$$y = f(x_1, x_2) = 2x_1^{1/3}x_2^{1/3}$$

Tecnologie con input multipli



Tecnologie con input multipli



Tecnologia Cobb-Douglas

- Una funzione di produzione Cobb-Douglas è

$$y = A\,x_1^{a_1}x_2^{a_2}\times\cdots\times x_n^{a_n}.$$

- Es.

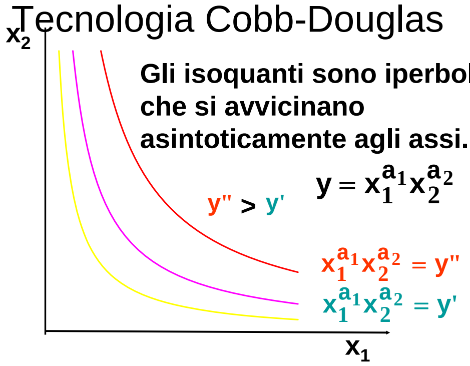
$$y = x_1^{1/3}x_2^{1/3}$$

con

$$n = 2,\ A = 1,\ a_1 = \frac{1}{3}\ \ e\ \ a_2 = \frac{1}{3}.$$

Tecnologia Cobb-Douglas

Gli isoquanti sono iperboli che si avvicinano asintoticamente agli assi.



Tecnologia a proporzioni fisse

- Funzione di produzione a proporzioni fisse:

$$y = \min\{a_1 x_1, a_2 x_2, \cdots, a_n x_n\}.$$

- Es.

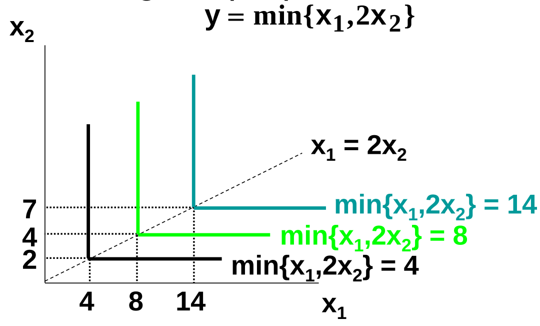
$$y = \min\{x_1, 2x_2\}$$

con

$$n = 2,\ a_1 = 1\ \ e\ \ a_2 = 2.$$

Tecnologia a proporzioni fisse

$$y = \min\{x_1, 2x_2\}$$



Input perfetti sostituti

- Una funzione di produzione con input perfetti sostituti è:

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

- Es.

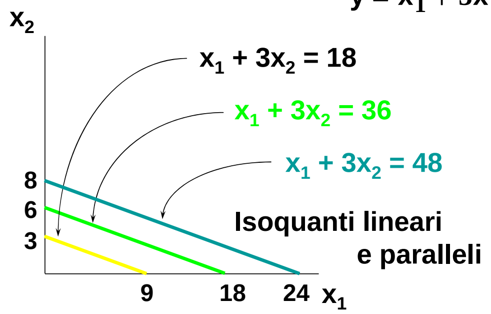
$$y = x_1 + 3x_2$$

con

$$n = 2,\ a_1 = 1\ \ e\ \ a_2 = 3.$$

Input perfetti sostituti

$$y = x_1 + 3x_2$$



Prodotto marginale

$$y = f(x_1, \cdots, x_n)$$

- Il prodotto marginale di un input i è il tasso di variazione del livello di output al variare del livello di input i, mantenendo invariati i livelli degli altri input.
- Cioè:

$$MP_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

Prodotto marginale

Es. se

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$$

Il prodotto marginale dell'input 1 è

$$MP_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3}$$

E il prodotto marginale dell'input 2 è

$$MP_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}.$$

Prodotto marginale

Di solito il prodotto marginale di un input dipende dalla quantità impiegata degli altri input. Es. se

$$MP_1 = \frac{1}{3}x_1^{-2/3}x_2^{2/3}$$ **si ottiene,**

se $x_2 = 8$, $MP_1 = \frac{1}{3}x_1^{-2/3}8^{2/3} = \frac{4}{3}x_1^{-2/3}$

e se invece $x_2 = 27$ **si ha**

$$MP_1 = \frac{1}{3}x_1^{-2/3}27^{2/3} = 3x_1^{-2/3}.$$

Prodotto marginale

- Se il prodotto marginale di un input i è decrescente, all'aumentare del livello di input i l'output aumenta sempre meno. Quindi:

$$\frac{\partial MP_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} < 0.$$

Legge della produttività marginale decrescente

Prodotto marginale

Es. se $y = x_1^{1/3}x_2^{2/3}$ →

$$MP_1 = \frac{1}{3}x_1^{-2/3}x_2^{2/3} \quad \text{e} \quad MP_2 = \frac{2}{3}x_1^{1/3}x_2^{-1/3}$$

si ha $$\frac{\partial MP_1}{\partial x_1} = -\frac{2}{9}x_1^{-5/3}x_2^{2/3} < 0$$

e $$\frac{\partial MP_2}{\partial x_2} = -\frac{2}{9}x_1^{1/3}x_2^{-4/3} < 0.$$

Entrambi i prodotti marginali sono decrescenti

Rendimenti di scala

- Il prodotto marginale rappresenta il cambiamento nel livello di output al variare di un singolo input.
- I rendimenti di scala descrivono come varia il livello di output al variare di tutti gli input nella stessa proporzione (*es.* tutti gli input raddoppiano, o si dimezzano).

Rendimenti di scala

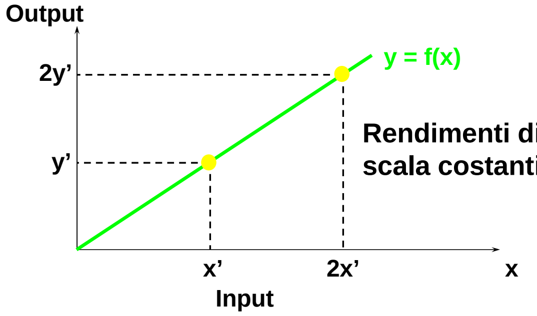
Se, per ogni combinazione di input $(x_1,\ldots,x_n)$**, si ha**

$$f(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n) = kf(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

la tecnologia rappresentata dalla funzione di produzione f esibisce rendimenti di scala costanti.
***Es*. (k = 2) raddoppiando il livello di tutti gli input si raddoppia anche l'output.**

Rendimenti di scala

Un input, un output



Rendimenti di scala costanti

Rendimenti di scala

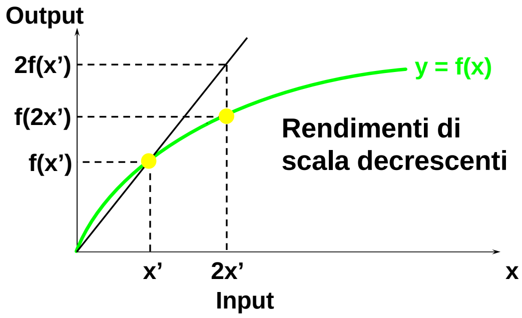
Se, per ogni combinazione $(x_1,\ldots,x_n)$, si ha

$$f(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n) < kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

la tecnologia esibisce rendimenti di scala decrescenti.
***Es.* (k = 2) raddoppiando tutti gli input, l'output meno che raddoppia.**

Rendimenti di scala

Un input, un output



Rendimenti di scala

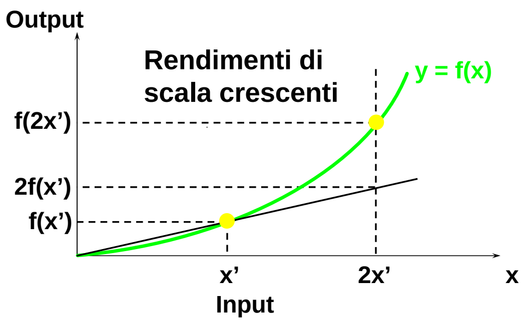
Se, per ogni combinazione $(x_1,\ldots,x_n)$, si ha

$$f(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n) > kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

la tecnologia esibisce rendimenti di scala crescenti.
***Es.* (k = 2) raddoppiando tutti gli input, l'output più che raddoppia.**

Rendimenti di scala

Un input, un output

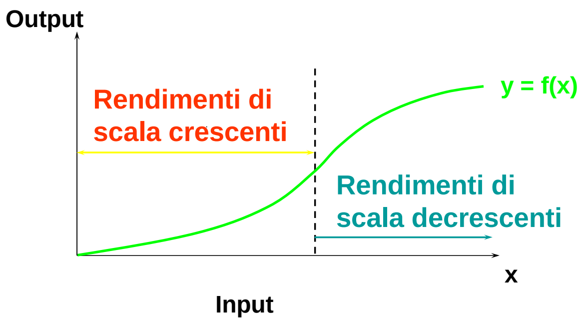


Rendimenti di scala

- Una medesima tecnologia può esibire 'localmente' diversi tipi di rendimenti di scala.

Rendimenti di scala

Un input, un output



Esempi di rendimenti di scala

La funzione di produzione con perfetti sostituti è:

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

Aumentando tutti gli input k volte, l'output diventa:

$$a_1(kx_1) + a_2(kx_2) + \cdots + a_n(kx_n)$$
$$= k(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)$$
$$= ky.$$

Esibisce rendimenti di scala costanti.

Esempi di rendimenti di scala

La funzione di produzione con perfetti complementi è:

$$y = \min\{a_1 x_1, a_2 x_2, \cdots, a_n x_n\}.$$

Aumentando tutti gli input k volte, l'output diventa:

$$\min\{a_1(kx_1), a_2(kx_2), \cdots, a_n(kx_n)\}$$
$$= k(\min\{a_1x_1, a_2x_2, \cdots, a_nx_n\})$$
$$= ky.$$

Esibisce rendimenti di scala costanti.

Esempi di rendimenti di scala

Funzione di produzione Cobb-Douglas

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}.$$

Aumentando tutti gli input k volte, l'output diventa:

$$(kx_1)^{a_1}(kx_2)^{a_2} \cdots (kx_n)^{a_n} = k^{a_1 + \cdots + a_n} y.$$

Quindi la CD presenta rendimenti di scala
costanti **se** $a_1 + \ldots + a_n = 1$
crescenti **se** $a_1 + \ldots + a_n > 1$
decrescenti **se** $a_1 + \ldots + a_n < 1$.

Rendimenti di scala

- D: Ci possono essere tecnologie con rendimenti di scala crescenti quando tutti i loro prodotti marginali ai singoli fattori sono decrescenti?
- R: Sì.
- Es. $y = x_1^{2/3} x_2^{2/3}$.

Rendimenti di scala

$$y = x_1^{2/3} x_2^{2/3} = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

$a_1 + a_2 = \frac{4}{3} > 1$ **Rendimenti di scala crescenti**

Ma $MP_1 = \frac{2}{3} x_1^{-1/3} x_2^{2/3}$ **cala all'aumentare di** x_1

$MP_2 = \frac{2}{3} x_1^{2/3} x_2^{-1/3}$ **cala all'aumentare di** x_2

Rendimenti di scala

- Perchè?
- Il prodotto marginale è il tasso di variazione dell'output all'aumentare di un input, tenendo tutti gli altri fissi.
- Il prodotto marginale diminuisce perchè gli altri input sono fissi, quindi unità aggiuntive di un solo input si combinano con sempre meno unità degli altri input.

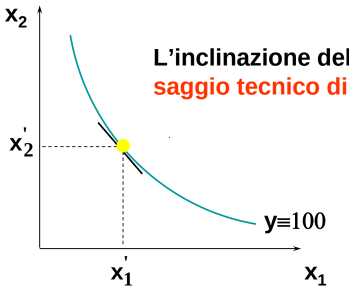
Rendimenti di scala

- Quando tutti gli input aumentano in proporzione, non c'è necessariamente una diminuzione dei prodotti marginali dal momento che ciascun input ha sempre a disposizione lo stesso ammontare degli altri input per produrre l'output. Quindi la produttività di tutti gli input nel loro insieme non deve necessariamente diminuire e può rimanere costante o aumentare.

Saggio tecnico di sostituzione

- E' il tasso al quale l'impresa deve sostituire un input con un altro per mantenere costante il livello dell'output.

Saggio tecnico di sostituzione



L'inclinazione dell'isoquanto è il saggio tecnico di sostituzione.

Saggio tecnico di sostituzione

- Come si calcola il saggio tecnico di sostituzione?
- Funzione di produzione $y = f(x_1, x_2)$.
- Un piccolo cambiamento (dx_1, dx_2) nella combinazione di input causa una variazione nel livello di output:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2.$$

Saggio tecnico di sostituzione

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2.$$

Ma dy = 0 dal momento che non c'è variazione del livello di output, quindi dx_1 e dx_2 devono soddisfare la seguente eq.

$$0 = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2.$$

Saggio tecnico di sostituzione

$$0 = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2$$

che, riscritta

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 = -\frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1$$

$$\rightarrow \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2}.$$

Saggio tecnico di sostituzione

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2}$$

è il tasso al quale si deve diminuire l'input 2 all'aumentare dell'input 1 per mantenere il livello di output costante. É la pendenza dell'isoquanto e coincide con il rapporto fra i prodotti marginali.

Saggio tecnico di sostituzione: caso della Cobb-Douglas

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a x_1^{a-1} x_2^b \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = b x_1^a x_2^{b-1}.$$

Il TRS è:

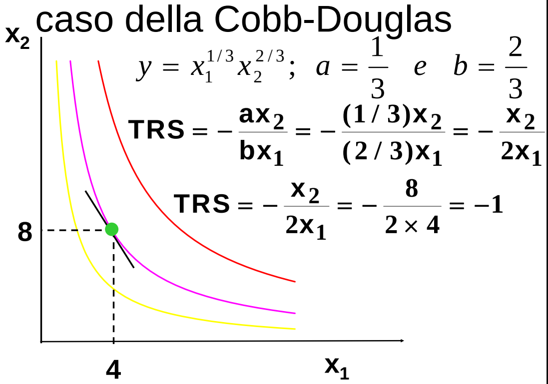
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} = -\frac{a x_1^{a-1} x_2^b}{b x_1^a x_2^{b-1}} = -\frac{a x_2}{b x_1}.$$

Saggio tecnico di sostituzione: caso della Cobb-Douglas

$$y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}; \quad a = \frac{1}{3} \quad e \quad b = \frac{2}{3}$$

$$\text{TRS} = -\frac{a x_2}{b x_1} = -\frac{(1/3)x_2}{(2/3)x_1} = -\frac{x_2}{2x_1}$$

$$\text{TRS} = -\frac{x_2}{2x_1} = -\frac{8}{2 \times 4} = -1$$

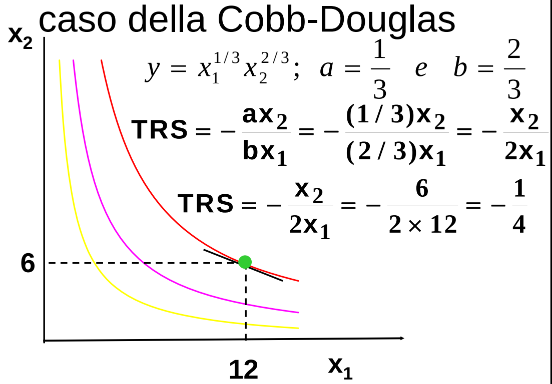


Saggio tecnico di sostituzione: caso della Cobb-Douglas

$$y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}; \quad a = \frac{1}{3} \quad e \quad b = \frac{2}{3}$$

$$\text{TRS} = -\frac{a x_2}{b x_1} = -\frac{(1/3)x_2}{(2/3)x_1} = -\frac{x_2}{2x_1}$$

$$\text{TRS} = -\frac{x_2}{2x_1} = -\frac{6}{2 \times 12} = -\frac{1}{4}$$

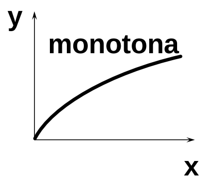


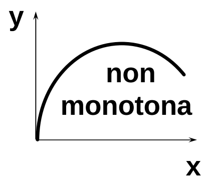
Tecnologie Well-Behaved

- Una tecnologia well-behaved è
  - monotona, e
  - convessa.

Tecnologie Well-Behaved: monotonicità

- Monotonicità: Una maggior quantità di qualsiasi input genera più output.

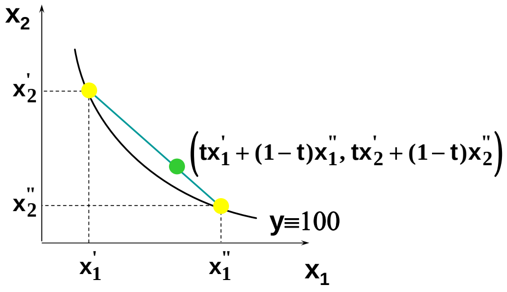




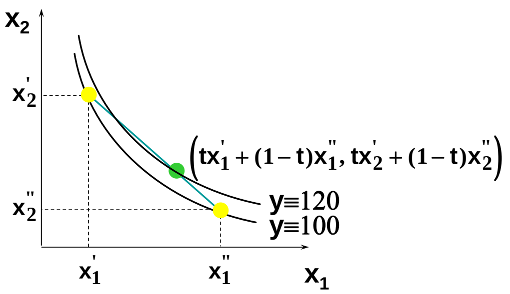
Tecnologie Well-Behaved: convessità

- Convessità: Se le combinazioni di input x’ e x” danno entrambe y unità di output allora il mix tx’ + (1-t)x” dà almeno y unità di output, per qualsiasi 0 < t < 1.

Tecnologie Well-Behaved: convessità

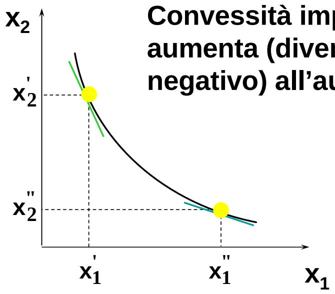


Tecnologie Well-Behaved: convessità



Tecnologie Well-Behaved: convessità

Convessità implica che il TRS aumenta (diventa meno negativo) all’aumentare di x_1.



Lungo periodo e breve periodo

- Il lungo periodo è la circostanza in cui un’impresa non ha restrizioni nella sua scelta di tutti i livelli di input.
- Il breve periodo è una circostanza in cui un’impresa è soggetta a restrizioni di qualche tipo nella sua scelta di almeno un livello di input.

Lungo periodo e breve periodo

- Esempi di restrizioni che creano circostanze di breve periodo:
  - Temporanea impossibilità di installare o rimuovere macchinari
  - Leggi che impediscono licenziamenti
  - Particolari regolamenti o vincoli che si applicano in un Paese.

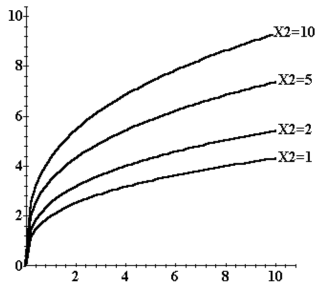
Lungo periodo e breve periodo

- Si può pensare al lungo periodo come ad una situazione nella quale un'impresa sceglie liberamente in quale circostanza di breve periodo situarsi.

Lungo periodo e breve periodo

- Esempio di restrizione di breve periodo: supponiamo che il livello di input 2 sia fisso nel breve. L'input 1 rimane invece variabile.

Lungo periodo e breve periodo



4 funzioni di produzione di breve periodo

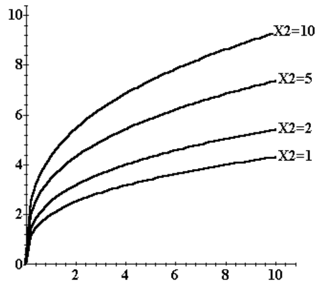
Lungo periodo e breve periodo

$y = x_1^{1/3} x_2^{1/3}$ è la funzione di produzione di lungo periodo (sia x_1 che x_2 sono variabili).

La funzione di produzione di breve periodo quando $x_2 \equiv 1$ è $y = x_1^{1/3} 1^{1/3} = x_1^{1/3}$.

La funzione di produzione di breve periodo quando $x_2 \equiv 10$ è $y = x_1^{1/3} 10^{1/3} = 2 \cdot 15 x_1^{1/3}$.

Lungo periodo e breve periodo



$y = x_1^{1/3} 10^{1/3}$

$y = x_1^{1/3} 5^{1/3}$

$y = x_1^{1/3} 2^{1/3}$

$y = x_1^{1/3} 1^{1/3}$

4 funzioni di produzione di breve periodo