Esercitazione algebra lineare

Marco Gattulli

25 novembre 2011

ESERCIZIO 1. *Trovare i quattro sottospazi vettoriali fondamentali della matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -i & -i & 0 & -2i \\ i & 2i & i & i \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

I quattro sottospazi fondamentali di una matrice sono:

- $C(A)$ = spazio delle colonne di A.
- $N(A)$ = spazio nullo di A.
- $C(A^H)$ = spazio delle righe di A.
- $N(A^H)$ = spazio nullo sinistro di A.

Troviamo innanzitutto lo spazio delle colonne eseguendo l'Eliminazione di Gauss sulla matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -i & -i & 0 & -2i \\ i & 2i & i & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{21}(i) \\ E_{31}(-i) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2i & 2i & -2i \\ 0 & -i & -i & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{2}(-i/2) \\ E_{32}(i) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Essendo le prime due colonne dominanti in U, le prime due colonne di A formano una base di $C(A)$:

$$C(A) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 3 \\ -i \\ 2i \end{bmatrix} \rangle$$

Già che abbiamo la U, calcoliamo lo spazio nullo di A, pensando di risolvere il sistema omogeneo $Ax = 0$, dove 0 indica il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$. La quarta incognita è libera, quindi la chiameremo α, lo è anche la terza, che chiameremo dunque β, mentre la seconda risulta $\alpha - \beta$ e la prima $-2\beta - 3(\alpha - \beta) = -3\alpha + \beta$:

$$N(A) = \begin{bmatrix} -3\alpha + \beta \\ \alpha - \beta \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi essendo i due vettori nella combinazione lineare dei generatori di $N(A)$ ed essendo linearmente indipendenti (Si vede che dato uno di loro, non esiste nessuno scalare che moltiplicato mi dia l'altro), formano una base dello spazio nullo:

$$N(A) = \langle \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

Adesso troviamo lo spazio delle righe di A che è dato dalle righe non nulle di U H-trasposte:

$$C(A^H) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$$

Calcoliamo infine lo spazio nullo sinistro di A che essendo $N(A^H)$ consiste nello spazio nullo della matrice H-trasposta.

Eseguiamo l'H-trasposizione:

$$A^H = \begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ 3 & i & -2i \\ 2 & 0 & -i \\ 0 & 2i & -i \end{bmatrix}$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss :

$$A^H = \begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ 3 & i & -2i \\ 2 & 0 & -i \\ 0 & 2i & -i \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{21}(-3) \\ E_{31}(-2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & -2i & i \\ 0 & -2i & i \\ 0 & 2i & -i \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_2(i/2) \\ E_{32}(2i) \\ E_{42}(-2i) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Calcoliamo lo spazio nullo di A^H, pensando di risolvere il sistema omogeneo $A^H x = 0$, dove 0 indica il vettore nullo di $\mathbb{R}^4$. La terza incognita è libera, quindi la chiameremo γ, la seconda risulta $\gamma/2$ e la prima $i\gamma - i\gamma/2 = i\gamma/2$:

$$N(A^H) = \begin{bmatrix} i\gamma/2 \\ \gamma/2 \\ \gamma \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} i/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} i/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

Riportiamo qui quello che abbiamo trovato:

$$\begin{aligned} C(A) =& \langle \begin{bmatrix} 1 & -i & i \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & -i & 2i \end{bmatrix}^T \rangle \\ N(A) =& \langle \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \rangle \\ C(A^H) =& \langle \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \rangle \\ N(A^H) =& \langle \begin{bmatrix} i/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}^T \rangle \end{aligned}$$

Facciamo un controllo sulle dimensioni: dalla teoria sappiamo che

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^4 =& N(A) \oplus C(A^H) \\ \mathbb{C}^3 =& N(A^H) \oplus C(A) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{C}^4 &= \dim N(A) + \dim C(A^H) \\ \dim \mathbb{C}^3 &= \dim N(A^H) + \dim C(A) \end{aligned}$$

E per il teorema nullità più rango

$$\text{numero di colonne di } A = \dim N(A) + \text{rk}A$$
$$\text{numero di colonne di } A^H = \dim N(A^H) + \text{rk}A^H$$

E infatti così è.

ESERCIZIO 2. *Dire se il sistema*

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ y + z = -2 \\ 3x - 4y - 2z = -3 \end{cases}$$

Ha un'unica soluzione, ha infinite soluzioni (specificando da quanti parametri dipendono) o non ha soluzione.

Svolgimento.

Per risolvere questo esercizio dobbiamo ricordarci un importante risultato:

TEOREMA 1 (Rouché-Capelli)**.** *Sia $Ax = b$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Il sistema è risolubile se e solo se*

$$rkA = rk[A|b]$$

e, in tal caso, le soluzioni del sistema dipendono da $n - rkA$ parametri.

In particolare il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se

$$rkA = rk[A|b] = n$$

Inoltre, da quanto detto sopra, si capisce che il sistema non ha soluzione se e solo se

$$rkA \neq rk[A|b]$$

Ricaviamo allora la matrice completa del sistema e con l'Eliminazione di Gauss valutiamo i ranghi:

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & -2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} E_1(1/3) \\ E_{31}(-3) \end{matrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

$$E_{31}(2) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

$$E_3(-1/8) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = U|b'$$

Da cui si capisce che

$$\text{rk}A = 2 \qquad \text{rk}[A|b] = 3$$

Quindi il sistema non ha soluzione.

ESERCIZIO 3. *Dire al variare di $h \in \mathbb{R}$ se il sistema*

$$\begin{cases} hx - y + (h+1)z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x + y + 3z = h \end{cases}$$

Ha un'unica soluzione, ha infinite soluzioni (specificando da quanti parametri dipendono) o non ha soluzione.

Svolgimento.

Per risolvere questo esercizio dobbiamo ricordarci un importante risultato:

TEOREMA 2 (Rouché-Capelli)**.** *Sia $Ax = b$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Il sistema è risolubile se e solo se*

$$rkA = rk[A|b]$$

e, in tal caso, le soluzioni del sistema dipendono da $n - rkA$ parametri.

In particolare il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se

$$rkA = rk[A|b] = n$$

Inoltre, da quanto detto sopra, si capisce che il sistema non ha soluzione se e solo se

$$rkA \neq rk[A|b]$$

Ricaviamo allora la matrice completa del sistema e con l'Eliminazione di Gauss valutiamo i ranghi:

$$A|b_h = \left[\begin{array}{ccc|c} h & -1 & h+1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & h \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} E_1(1/h) \\ E_{21}(-1) \\ E_{31}(-3) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/h & (h+1)/h & 1/h \\ 0 & (h+1)/h & (h-1)/h & -1/h \\ 0 & (h+3)/h & -3/h & (h^2-3)/h \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} E_2(h/(h+1)) \\ E_{32}((-h-3)/h) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/h & (h+1)/h & 1/h \\ 0 & 1 & (h-1)/(h+1) & -1/(h+1) \\ 0 & 0 & -(h+5)/(h+1) & (h^2+h-2)/(h+1) \end{array}\right]$$

$$E_3(-(h+1)/(h+5)) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/h & (h+1)/h & 1/h \\ 0 & 1 & (h-1)/(h+1) & -1/(h+1) \\ 0 & 0 & 1 & -(h^2+h-2)/(h+5) \end{array}\right] = U|b'$$

Da cui si capisce che

$$\mathrm{rk} A_h = 3 \qquad \mathrm{rk}[A|b_h] = 3$$

Con la condizione che $h \neq 0$, $h \neq -1$ e $h \neq -5$. Quindi, tenendo conto di queste condizioni, il sistema ha soluzione unica perchè i ranghi sono uguali al numero delle colonne di A_h.

Per valutare il variare di h su tutto $\mathbb{R}$, è chiaro che si prospettano quattro casi:

- $h \neq 0$, $h \neq -1$ e $h \neq -5$ che è il caso appena visto in cui il sistema ha soluzione unica.
- $h = 0$.
- $h = -1$.
- $h = -5$.

Analiziamoli uno alla volta. Nel caso in cui $h = 0$ la matrice completa diventa:

$$A|b_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss per valutare i ranghi:

$$\begin{array}{rl}
A|b_0 = & \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \\
\begin{array}{l} E_{21} \\ E_{31}(-3) \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right] \\
\begin{array}{l} E_2(-1) \\ E_{32}(2) \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{array}\right] \\
E_3(-1/5) & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right] = U|b'
\end{array}$$

Da cui si capisce che

$$\mathrm{rk} A_0 = 3 \qquad \mathrm{rk}[A|b_0] = 3$$

Quindi, anche in questo caso che $h = 0$, il sistema ha soluzione unica perchè i ranghi sono uguali al numero delle colonne di A_0.

Guardiamo ora il caso in cui $h = -1$ la matrice completa diventa:

$$A|b_{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss per valutare i ranghi:

$$\begin{array}{rl} A|b_{-1} = & \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{r} E_1(-1) \\ E_{21}(-1) \\ E_{31}(-3) \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right] \\ \begin{array}{l} E_{23} \\ E_2(-1/2) \\ E_3(1/2) \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] = U|b' \end{array}$$

Da cui si capisce che

$$\text{rk}A_{-1} = 3 \qquad \text{rk}[A|b_{-1}] = 3$$

Quindi, anche in questo caso che $h = -1$, il sistema ha soluzione unica perchè i ranghi sono uguali al numero delle colonne di A_{-1}.

Guardiamo ora il caso in cui $h = -5$ la matrice completa diventa:

$$A|b_{-5} = \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right]$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss per valutare i ranghi:

$$A|b_{-5} = \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} E_1(-1/5) \\ E_{21}(-1) \\ E_{31}(-3) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/5 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 4/5 & 6/5 & 1/5 \\ 0 & 2/5 & 3/5 & -22/5 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} E_2(5/4) \\ E_{32}(-2/5) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/5 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & -45/10 \end{array}\right]$$

$$E_3(-10/45) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/5 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = U|b'$$

Da cui si capisce che

$$\text{rk}A_{-5} = 2 \qquad \text{rk}[A|b_{-5}] = 3$$

Quindi se $h = -5$ il sistema non ha soluzione.

Questo esercizio ci deve far capire che i casi che dobbiamo analizzare non danno per forza risposte differenti.

Alla fine dobbiamo dare una risposta conclusiva:

- Pere $h \neq -5$ il sistema ammette un'unica soluzione.
- Per $h = -5$ il sistema non ammette soluzione.

ESERCIZIO 4. *Dire al variare di $a \in \mathbb{R}$ se il sistema*

$$\begin{cases} x + ay + z + t = 3 \\ ax + y + z + t = a \end{cases}$$

Ha un'unica soluzione, ha infinite soluzioni (specificando da quanti parametri dipendono) o non ha soluzione.

Svolgimento.

Per risolvere questo esercizio dobbiamo ricordarci un importante risultato:

TEOREMA 3 (Rouché-Capelli)**.** *Sia $Ax = b$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Il sistema è risolubile se e solo se*

$$rkA = rk[A|b]$$

e, in tal caso, le soluzioni del sistema dipendono da $n - rkA$ parametri.

In particolare il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se

$$rkA = rk[A|b] = n$$

Inoltre, da quanto detto sopra, si capisce che il sistema non ha soluzione se e solo se

$$rkA \neq rk[A|b]$$

Ricaviamo allora la matrice completa del sistema e con l'Eliminazione di Gauss valutiamo i ranghi:

$$\begin{aligned}
A|b_a &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 & 1 & a \end{array}\right] \\
E_{21}(-a) & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a & -2a \end{array}\right] \\
E_2(1/(1-a^2)) & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/(1+a) & 1/(1+a) & -2a/(1-a^2) \end{array}\right] = U|b'
\end{aligned}$$

Da cui si capisce che

$$\mathrm{rk}A_a = 2 \qquad \mathrm{rk}[A|b_a] = 2$$

Con la condizione che $a \neq 1$ e $a \neq -1$. Quindi, tenendo conto di queste condizioni, il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da $n - \mathrm{rk}A = 4 - 2 = 2$ parametri.

Per valutare il variare di a su tutto $\mathbb{R}$, è chiaro che si prospettano tre casi:

- $a \neq 1$ e $a \neq -1$ che è il caso appena visto in cui il sistema ha infinite soluzioni.
- $a = 1$.
- $a = -1$.

Analiziamoli uno alla volta. Nel caso in cui $a = 1$ la matrice completa diventa:

$$A|b_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss per valutare i ranghi:

$$\begin{aligned}
A|b_1 &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\
E_{21}(-1) & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \\
E_2(-1/2) & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = U|b'
\end{aligned}$$

Da cui si capisce che

$$\text{rk}A_1 = 1 \qquad \text{rk}[A|b_1] = 2$$

Quindi,in questo caso che $a = 1$, il sistema non ha soluzione.
Guardiamo ora il caso in cui $a = -1$ la matrice completa diventa:

$$A|b_{-1} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss per valutare i ranghi:

$$\begin{array}{rl} A|b_{-1} = & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \\ E_{21}(1) & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \\ E_2(1/2) & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = U|b' \end{array}$$

Da cui si capisce che

$$\text{rk}A_{-1} = 2 \qquad \text{rk}[A|b_{-1}] = 2$$

Quindi, in questo caso che $a = -1$, il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da $n - \text{rk}A = 4 - 2 = 2$ parametri.

Questo esercizio ci deve far capire che i casi che dobbiamo analizzare non danno per forza risposte differenti.

Alla fine dobbiamo dare una risposta conclusiva:

- Pere $a \neq 1$ il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da $n - \text{rk}A = 4 - 2 = 2$ parametri.
- Per $a = 1$ il sistema non ammette soluzione.

ESERCIZIO 5. *Dire al variare di $k \in \mathbb{R}$ se il sistema*

$$\begin{cases} -3x + z = 2k \\ kx + y = 2 + k \\ -kx + ky = 0 \end{cases}$$

Ha un'unica soluzione, ha infinite soluzioni (specificando da quanti parametri dipendono) o non ha soluzione.

Svolgimento.

Per risolvere questo esercizio dobbiamo ricordarci un importante risultato:

TEOREMA 4 (Rouché-Capelli)**.** *Sia $Ax = b$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Il sistema è risolubile se e solo se*

$$rkA = rk[A|b]$$

e, in tal caso, le soluzioni del sistema dipendono da $n - rkA$ parametri.

In particolare il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se

$$rkA = rk[A|b] = n$$

Inoltre, da quanto detto sopra, si capisce che il sistema non ha soluzione se e solo se

$$rkA \neq rk[A|b]$$

Ricaviamo allora la matrice completa del sistema e con l'Eliminazione di Gauss valutiamo i ranghi:

$$A|b_k = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 2k \\ k & 1 & 0 & 2+k \\ -k & k & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} E_1(-1/3) \\ E_{21}(-k) \\ E_{31}(k) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & -2k/3 \\ 0 & 1 & k/3 & (2k^2+3k+6)/3 \\ 0 & k & -k/3 & -2k^2/3 \end{array}\right]$$

$$E_{32}(-k) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & -2k/3 \\ 0 & 1 & k/3 & (2k^2+3k+6)/3 \\ 0 & 0 & -(k^2+k)/3 & -(2k^3+5k^2+6k)/3 \end{array}\right]$$

$$E_3(-3/k(k+1)) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & -2k/3 \\ 0 & 1 & k/3 & (2k^2+3k+6)/3 \\ 0 & 0 & 1 & (2k^2+5k+6)/(k+1) \end{array}\right] = U|b'$$

Da cui si capisce che

$$\mathrm{rk}A_k = 3 \qquad \mathrm{rk}[A|b_k] = 3$$

Con la condizione che $k \neq 0$ e $k \neq -1$. Quindi, tenendo conto di queste condizioni, il sistema ha soluzione unica perchè i ranghi sono uguali al numero delle colonne di A_k.

Per valutare il variare di k su tutto $\mathbb{R}$, è chiaro che si prospettano tre casi:

- $k \neq 0$ e $k \neq -1$ che è il caso appena visto in cui il sistema ha soluzione unica.

- $k = 0$.
- $k = -1$.

Analiziamoli uno alla volta. Nel caso in cui $k = 0$ la matrice completa diventa:

$$A|b_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss per valutare i ranghi:

$$\begin{array}{rl} A|b_0 = & \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ E_1(-1/3) & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = U|b' \end{array}$$

Da cui si capisce che

$$\text{rk}A_0 = 2 \qquad \text{rk}[A|b_0] = 2$$

Quindi in questo caso che $k = 0$, il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da $n - \text{rk}A = 3 - 2 = 1$ parametro.

Guardiamo ora il caso in cui $k = -1$ la matrice completa diventa:

$$A|b_{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss per valutare i ranghi:

$$\begin{array}{rl} A|b_{-1} = & \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{l} E_1(-1/3) \\ E_{21}(1) \\ E_{31}(-1) \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & -1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right] \\ E_{32}(1) & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = U|b' \end{array}$$

Da cui si capisce che

$$\mathrm{rk} A_{-1} = 2 \qquad \mathrm{rk}[A|b_{-1}] = 3$$

Quindi in questo caso che $k = -1$, il sistema non ha soluzione.
Ricapitolando:

- Per $k \neq 0$ e $k \neq -1$ il sistema ha un'unica soluzione.
- Per $k = 0$ il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro.
- Per $k = -1$ il sistema non ammette soluzione.