2018/2019

Università degli Studi di Verona

Aurora Bussola

[PARZIALE DI LOGICA]

Introduzione sulla logica

La logica è importante per l'informatica perché rende possibile:
- la progettazione HW&SW
- L'intelligenza artificiale

La logica prevede un ragionamento:
- Analisi: è valido? (Sì/No)
- Sintesi: costruzione di un ragionamento in modo che possa essere valido

Il ragionamento si formalizza poi in dimostrazioni e, in secondo luogo, pure in una ricerca di controesempi.

Linguaggio

La logica del 1° ordine

Enunciati atomici: è l'unità più piccola in assoluto
Se P è un simbolo di predicato di arità n ($n \geq 0$) e t1..tn sono n termini, allora P(t1..tn) è un atomo; nient'altro è un atomo.
Se n=0, il simbolo di predicato non prende argomenti e quindi corrisponde ad una proposizione (per esempio "è nuvoloso")
Esempi:
- "E' nuvoloso" - descrive com'è il tempo
  la parola nuvoloso è:
  - ❖ simbolo di predicato
  - ❖ variabile proposizionale
  - ❖ variabile booleana
  - ❖ simbolo di predicato senza argomenti
- Parlando di solidi…

"b è un cubo"	Cubo(b) unario ❖ b: simbolo di costante ❖ Cubo: simbolo di predicato con un argomento
"b è a sinistra di c"	AsinistraDi(b,c) binario
"Marco dà Felix a Chiara"	Dare(marco, chiara, felix) ternario L'interpretazione non è univoca: Dare(marco, felix, chiara)

Simboli di costante

- ogni simbolo di costante deve riferirsi ad oggetto
- nessuna costante può nominare più di un oggetto
- un oggetto può avere più di un nome o nessun nome

dominio di numeri (oggetti)	simboli di costante (nomi)
1	1 - a
2	2 - b
3	3 - c
4	null (oggetto irraggiungibile)

Il simbolo "=", in logica, è un simbolo di predicato binario che viene identificato come l'identità.
2=b sarà vero quando 2 e b avranno lo stesso valore

N.B.: ci sono due tipi di notazione, una infissa, a = b, e una prefissa ACasa(max)

Possiamo formare atomi (o enunciati atomici) applicando un predicato ad argomenti che sono simboli di costante. Il simbolo "=" è un simbolo di predicato binario che viene interpretato come identità. L'alfabeto della logica si chiama segnatura ed è l'insieme di simboli di predicato o di costante.

Se abbiamo k argomenti e n simboli di costante, avremo n^k atomi. Il numero delle liste di lunghezza k su un alfabeto di n elementi è n^k . n^k è anche il numero delle funzioni da un insieme di cardinalità k a un insieme di cardinalità n.
Esempio:
Abbiamo un insieme A tale che |A|=n e un insieme B tale che |B|=k
L'insieme delle funzioni da B ad A sarà A^B e quindi $|A^B| = n^k$

Gli insiemi degli argomenti possono avere quattro configurazioni:

	senza ripetizioni	con ripetizioni
ordinati	permutazioni	liste (n^k)
disordinati	combinazioni (o sotto-insiemi)	multi-insiemi

Esercizio 18 pag 29

L1: DareFelix(_,_) — per ciascun predicato abbiamo due costanti (max e chiara) per due argomenti
DareFlock(_,_)
Soluzione: $2 \cdot 2^2 = 8$

L2: Dare(_,_,_) — per il solo predicato abbiamo quattro costanti (max, chiara, felix e flock) per tre argomenti
Soluzione: $4^3 = 64$

L3: DareFelix(_,_) — per ciascun predicato abbiamo quattro costanti (max, chiara, felix e flock) per due argomenti
DareFlock(_,_)
DareMax(_,_)
DareChiara(_,_)
Soluzione: $4 \cdot 4^2 = 64$

I simboli di funzione

Per dire “Elisa è la madre di Elsa” si può scrivere:
- Madre(elisa, elsa) — metodo classico
- Madre(elsa) = elisa — funzione unaria

> N.B.: in logica l’interpretazione è libera. Per esempio “Somma” può essere visto come somma o concatenazione:
> - Somma(3,4) = 7
> - Somma(3,4) = 34

Il termine

Definizione di termine…
- tutti i simboli di costante sono termini
- Se f è un simbolo di funzione con un numero di argomenti n e t1….tn sono termini, allora f(t1….tn) è un termine
- nient’altro può essere un termine

Ogni termine denota un unico individuo ma un individuo può essere denotato da un solo termine

individuo	termine
7	7
	3+4

La teoria degli insiemi

Alcuni simboli…

- "∅" simbolo di costante interpretato come insieme vuoto
- "=" simbolo di predicato chiamato come uguaglianza e interpretato come identità
- "ε" simbolo di predicato interpretato come relazione di appartenenza

Esempi…

- $2 \varepsilon \{2, 4, 6\}$
- presupponendo che c venga interpretata come 2 e a interpretata come {2, 4, 6}

  $C \varepsilon a$ -> *vera*

  $a \varepsilon a$ -> *falsa*
- $z \varepsilon \emptyset$ -> *falsa*
- è possibile avere più insiemi in un insieme

  $\{2, 3\} \varepsilon \{\{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ -> *vera*

  $\{1, 2\} \varepsilon \{\{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ -> *falsa*

  $1 \varepsilon \{\{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ -> *falsa*

  $2 \varepsilon \{\{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ -> *falsa*

  $2 \varepsilon \{2, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ -> *vera*

La teoria dell'aritmetica

N : dominio dei numeri interi naturali

1. I simboli di costante vengono interpretati come numeri naturali
2. I simboli di funzione vengono interpretati come funzioni su N e a valori in N
3. I simboli di predicato vengono interpretati come relazioni su N

Definiamo la nostra segnatura, dove 0 ed 1 sono simboli di costante, "=" e "<" simboli di predicato e "+" e "x" simboli di funzione

$$Z = \{0, 1, =, <, +, *\}$$

Si possono scrivere enunciati come…

1+1<1 -> falsa

1<1+1 -> vera

1*(1+1) = 1+1 -> vera

1*1 = 1 -> vera
1*1*1 = 1 -> vera

Ragionamento ("argument")

Cosa vuol dire ragionamento valido?
in un ragionamento avremo delle premesse ed una conclusione, il ragionamento collega queste ultime.
Esso deriva la conclusione dalle premesse oppure dimostra la tesi dalle ipotesi.
Esempio di sillogismo a deduzione:

Tutti gli esseri umani sono mortali
Socrate è un essere umano
Socrate è mortale

questo sillogismo è valido ma non è necessariamente corretto (Socrate potrebbe essere qualsiasi cosa)

In linea generale si può dire che un ragionamento è valido quando è caratterizzato da:

- premesse vere e conclusione vera
- premesse false e conclusione vera
- premesse false e conclusione falsa

Conseguenza logica

la conclusione F è conseguenza logica delle premesse H1..Hn se tutte le volte che H1..Hn sono vere, anche F è vera

$$H \models F$$

Tutti gli attori ricchi sono bravi
Ryan Gosling è un attore ricco
Ryan Gosling è un bravo attore

anche se la prima premessa fosse falsa, il ragionamento sarebbe comunque valido

Ragionamento formale

Sistema formale di deduzione per costruire dimostrazioni.
$\forall i \; 1 \le i \le k$ F è derivata mediante una regola del sistema formale di deduzione da P1..Pn, F1..Fk+1

$$H \vdash F$$

1. P1 2. P2 . . . 3. Pn (premesse)
F1 F2 . . . Fn (passi)
C = Fk+1 (conclusione)

La regola di eliminazione

1. cubo (c)
2. c = b

---

3. Cubo (b)   =elim(1, 2)

attraverso la premessa 1, ai fini della conclusione, si elimina la premessa 2

Le proprietà delle dimostrazioni

Sostitutività

$x = y \wedge P(x) \rightarrow P(y)$

$a = b \wedge P(a) \rightarrow P(b)$

1. $(x^2 - 1) = (z - 1)(z + 1)$
2. $x^2 > z^2 - 1$

---

3. $x^2 > (z - 1)(z + 1)$ =elim(2, 1)

Riflessività

a = a

succ(a) = succ(a)

b = b

da sostitutività e riflessività, usando =Elim e =Intro, si dimostra la simmetria

1. $a = b$

---

2. $a = a$ =Intro
3. $b = a$ =Elim(2, 1)

Transitività

1. $a = b$
2. $b = c$

---

3. $a = c$ =Elim(1, 2)

Esercizio 2.6 pagina 53

Dimostrare che a e c stanno nella stessa riga: StessaRiga(a, c) dato che a=b e b=c.

1. $a = b$
2. $b = c$

---

3. $a = c$ per la proprietà della transitività
4. StessaRiga(a, a)
5. StessaRiga(a, c) =Elim(4, 3)

I contro-esempi

quando F non è conseguenza logica di H

un caso in cui H è vera ma F è falsa… soluzione: d-a-b-c

1. StaFra(b, c, d) b sta fra c e d
2. StaFra(a, b, d) a sta fra b e d
3. ASinistraDi(a, c) a sta a sinistra di c

---

4. StaFra(b, a, d) b sta fra a e d X

I connettivi logici o Booleani

I connettivi logici si possono sintetizzare in tre tipologie:

1. la negazione ¬
2. la congiunzione ∧
3. la disgiunzione ∨

La negazione

Con la negazione si introduce la nozione di segno che può essere positivo o negativo:
se un atomo è positivo allora si chiamerà "letterale positivo", se al contrario un atomo è negativo, allora si chiamerà "letterale negativo".

¬ACasa(chiara) = Chiara non è a casa

Con la doppia negazione, un atomo diventa positivo

¬¬ACasa(chiara) = Chiara è a casa

Esercizio 3.4 pag 70

Supponiamo che P sia un atomo letterale positivo e che Q sia definito come $(\neg)^n P$

Dimostrare che Q è positivo quando n è pari e negativo quando n è dispari

Procedimento:

1. E' vero quello che dobbiamo dimostrare?
   Sì, quando c'è un numero di negazioni dispari, P è negativo e viceversa
2. Ipotesi per induzione, supponiamo che sia vero per un n generico
   - Se n è pari, n+1 è dispari. Supponendo che $(\neg)^n$ sia positivo, l'espressione $\neg(\neg)^n$ sarà negativa
   - Se n è dispari, n+1 è pari. Supponendo che $(\neg)^n$ sia negativo, l'espressione $\neg(\neg)^n$ sarà positiva

La congiunzione

La congiunzione gode di due proprietà:

- Commutatività
  ACasa(chiara) ∧ Felice(flock) ≡ Felice(flock) ∧ ACasa(chiara)
- Associatività
  (ACasa(chiara) ∧ ACasa(max)) ∧ Felice(flock) ≡ ACasa(chiara) ∧ (ACasa(max) ∧ Felice(flock))

La congiunzione "ma" è avversativa: Piove ma ho l'ombrello, piove ∧ Ombrello

La disgiunzione

La disgiunzione può essere di due tipi:
- inclusiva (OR): uno o l'altro o tutti e due (∨)
- esclusiva (XOR): uno o l'altro ma non tutti e due (⊕)

La disgiunzione inoltre gode delle stesse proprietà della congiunzione:
- Commutatività
  ACasa(chiara) ∨ Felice(flock) ≡ Felice(flock) ∨ ACasa(chiara)
- Associatività
  (ACasa(chiara) ∨ ACasa(max)) ∨ Felice(flock) ≡ ACasa(chiara) ∨ (ACasa(max) ∨ Felice(flock))

Unione di congiunzione e disgiunzione

In questo caso le parentesi sono importanti:

$$F \vee (G \wedge H) \neq (F \vee G) \wedge H$$

Le tavole di verità

- Congiunzione (AND)

P Q	P∧Q
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

- Disgiunzione (OR)

P Q	P∨Q
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

- Negazione (NOT)

P	¬P
0	1
1	0

Definizione di formula

Ogni atomo è una formula quindi se F è una forma, allora anche ¬F è una formula. Se F e G fossero due formule, allora anche F∧G e F∨G lo sono.

Le leggi di De Morgan

- ¬¬F ≡ F

F	¬F	¬¬F
0	1	0
1	0	1

- ¬(F∧G) ≡ ¬F∨¬G

F G	¬(F∨G)	¬F∧¬G
0 0	1	1
0 1	0	0
1 0	0	0
1 1	0	0

- ¬(F∨G) ≡ ¬F∧¬G

F G	¬(F∧G)	¬F∨¬G
0 0	1	1
0 1	1	1
1 0	1	1
1 1	0	0

La tautologia

La tautologia è una configurazione vera in tutte le circostanze, è una formula valida solo in virtù della loro struttura in termini di **connettivi vero-funzionali** (deve riferirsi alle tavole di verità)
Per questo motivo non tutte le formule valide possono essere considerate tautologie
Esempio:

$P \vee \neg P$ è una tautologia

$a = A$ non è una tautologia (non si riferisce alle tavole di verità)

N.B.: $\neg$, $\vee$, $\wedge$ si dicono connettivi vero-funzionali perché il loro comportamento è completamente caratterizzato dalle tavole di verità

Soddisfacibilità e insoddisfacibilità

Una formula è soddisfacibile se è vera in almeno una circostanza (ha valore 1 su almeno una riga della tavola di verità)
Una formula è insoddisfacibile se è falsa in ogni sua circostanza (in nessuna riga della tavola ha valore 1)

Equivalenza logica e tautologica

F e G sono equivalenti logicamente se hanno lo stesso valore di verità in tutte le circostanze
F e G sono tautologicamente equivalenti se hanno lo stesso valore di verità su ogni riga della loro tavola di verità congiunta

Esempio:

$a = b \wedge \text{Cubo}(a)$ e $a = b \wedge \text{Cubo}(b)$ sono logicamente equivalenti perché si dimostrano nello stesso modo

1. a = b
2. Cubo(a)

---

3. Cubo (b) =Elim(2, 1)

1. a = b
2. Cubo(b)

---

3. Cubo (a) =Elim(2, 1)

ma non sono tautologicamente equivalenti perché non hanno lo stesso valore di verità su ogni riga della loro tavola di verità congiunta

a = b	Cubo(a)	Cubo(b)	a = b ∧ Cubo(a)	a = b ∧ Cubo(b)
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	**0**	**1**
1	1	0	**1**	**0**
1	1	1	1	1

La forma normale

Possiamo trasformare un'espressione dalla forma normale, alla forma normale negata (NNF). Da essa, derivano altre due forme: la forma normale disgiunta (DNF) e la forma normale congiunta (CNF)

La forma normale negata

una formula è in forma normale negata se è costruita con ¬, ∨ e ∧, e tutte le occorrenze della ¬ si applicano ad atomi
Esempio: ¬(F∧G) non è in NNF, mentre ¬F ∨ ¬G sì

Idempotenza

- F∨F ≡ F
- F∧F ≡ F

(A∨B)∧C∧(¬(¬B∧¬A)∨B) ⤳ (A∨B)∧C∧(¬¬B∨¬¬A∨B)⤳
(A∨B)∧C∧(B∨A∨B)⤳(A∨B)∧C∧(B∨B∨A)⤳(A∨B)∧C∧(B∨A)⤳(A∨B)∧C∧(A∨B)⤳ (A∨B)∧C

Esercizio 4.3 pag 104

1. (A∧B)∨(¬A∨¬B)
2. (A∧B)∨(A∧¬B)
3. ¬(B∧A)∨C
4. (A∨B)∨¬(A∨(B∧C))

Supponiamo che A sia a=a, quale delle formule date è valida?
1. B∨¬B, valida
2. B∨¬B, valida
3. ¬B∨C, non valida (non sappiamo i valori di B e C)

4. $(A \lor B) \lor \neg(A \lor (B \land C))$, valida (A è vero e c’è una “$\lor$” e quindi l’espressione è valida)

Supponiamo che A sia a≠a, quale delle formule date è valida?

1. $B \lor \neg B$, valida
2. non valida (tra parentesi ci sono due “$\land$” e A non è mai vera)
3. valida
4. $B \lor \neg B \lor \neg C$, valida (c’è una tautologia)

La forma normale disgiunta

La forma normale disgiunta è caratterizzata dalla disgiunzione di congiunzioni dei letterali.
Gode della proprietà distributiva:

$$F \land (G \lor H) \equiv (F \land G) \lor (F \land H)$$

La forma normale congiunta

La forma normale congiunta è caratterizzata dalla congiunzione di disgiunzioni dei letterali.
Gode della proprietà distributiva:

$$F \lor (G \land H) \equiv (F \lor G) \land (F \lor H)$$

- $\neg((A \lor B) \land \neg C) \rightsquigarrow \neg(A \lor B) \lor \neg\neg C \rightsquigarrow \neg(A \lor B) \lor C \rightsquigarrow (\neg A \land \neg B) \lor C \rightsquigarrow (\neg A \lor C) \land (\neg B \lor C)$
- $(A \lor B) \land C \land (\neg(\neg B \land \neg A) \lor B) \rightsquigarrow (A \lor B) \land C \land (\neg\neg B \lor \neg\neg A \lor B) \rightsquigarrow (A \lor B) \land C \land (B \lor A \lor B) \rightsquigarrow (A \lor B) \land C \land (B \lor A) \rightsquigarrow (A \lor B) \land C \rightsquigarrow (A \land C) \lor (B \land C)$
- $\neg A \lor (\neg(\neg A \lor (B \land C))) \lor B \rightsquigarrow \neg A \lor (\neg\neg A \land \neg(B \land C))) \lor B \rightsquigarrow \neg A \lor (A \land \neg(B \land C)) \lor B \rightsquigarrow \neg A \lor (A \land \neg B \lor \neg C) \lor B \rightsquigarrow \neg A \lor (A \land (\neg B \lor \neg C)) \lor B \rightsquigarrow \neg A \lor (A \land \neg B) \lor (A \land \neg C) \lor B \rightsquigarrow \neg A \lor (A \land \neg B) \lor (A \land \neg C) \lor B \rightsquigarrow (\neg A \lor A) \land (\neg A \lor \neg B \lor \neg C) \lor B \rightsquigarrow (\neg A \lor A) \land (\neg A \lor \neg B \lor \neg C \lor B)$, in entrambe le parentesi ci sono delle tautologie

Il principio di risoluzione

La regola di risoluzione è una regola di inferenza che permette di desumere clausole da clausole. E’ corretta perché la clausola derivata, detta risolvente, è conseguenza tautologica delle clausole premesse

Esempio:

$$\text{Se } A \lor B \text{ e } \neg A \lor C \text{ allora } B \lor C$$

In ogni circostanza, o A è vera o A è falsa:

- Se A è vera segue che $\neg A$ è falsa, ma allora se $\neg A \lor C$ è vera bisogna che sia vera C, e quindi è vera $B \lor C$
- Se A è falsa segue che $A \lor B$ debba essere vera e per questo motivo è vero B e quindi anche $B \lor C$

Il sistema di deduzione

Il sistema di deduzione si compone di due regole:

- La regola di eliminazione
- La regola di introduzione

La dimostrazione per assurdo

Attraverso la dimostrazione per assurdo, assumendo il contrario di quello che si vuole dimostrare, si può rendere valida qualsiasi cosa

Esempio:

$$P1,\dots, Pn \vdash S, \text{ se } P1,\dots, Pn, \neg S \vdash \perp \text{ allora } P1,\dots, Pn \vdash \neg\neg S$$

La regola di eliminazione

E' possibile eliminare la congiunzione senza troppi problemi

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

Per quanto riguarda la disgiunzione le cose si fanno più complesse. Per eliminarla è necessario dimostrare attraverso delle sottoprove che i singoli letterali delle disgiunzioni diano il risultato che P∨Q dovrebbe dare.

$$\frac{P \vee Q \quad P1 \Rightarrow S \quad Q2 \Rightarrow S}{S}$$

Per eliminare l'assurdo è necessario sostituirlo con qualsiasi altra cosa

$$\frac{\perp}{S}$$

Per eliminare la negazione bisogna avere la doppia negazione dell'enunciato

$$\frac{\neg\neg F}{F}$$

La regola di introduzione

Con la disgiunzione, non è necessario dimostrare nulla

$$\frac{P}{P \lor Q}$$

Con la congiunzione è necessario avere entrambi i letterali

$$\frac{P \quad Q}{P \land Q}$$

Per introdurre l'assurdo è necessario avere due enunciati opposti

$$\frac{P \quad \neg P}{\bot}$$

Per introdurre la negazione è necessario dimostrare un assurdo

$$\frac{S \models \bot}{\neg S}$$

I connettivi

L'implicazione

Con l'implicazione si vuole intendere una formula che è valida quando F è sempre falso o quando F è vero e allo stesso tempo G è vero

$$F \rightarrow G$$

Si può leggere come "F implica G" oppure come "Se F allora G"

F G	$F \rightarrow G$
0 0	1
0 1	1
1 0	0
1 1	1

L'implicazione si può riscrivere con l'ausilio dei connettivi vero-funzionali:

- $F \rightarrow G \equiv \neg G \vee F$
- $\neg(F \rightarrow G) \equiv F \wedge \neg G$
- $F \rightarrow G \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$

Per introdurre l'implicazione è necessario ricavare G da F

$$\frac{F \Rightarrow G}{F \rightarrow G}$$

Per eliminarla è necessario avere F singolo assieme alla sua implicazione

$$\frac{F \qquad F \rightarrow G}{G}$$

La bi-implicazione

Con l'implicazione si vuole intendere una formula che è valida quando F e G hanno contemporaneamente lo stesso valore di verità

$$F \leftrightarrow G$$

Si può leggere come "F se e solo se G" ed è equivalente a $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$

F G	$F \leftrightarrow G$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

L'implicazione si può riscrivere con l'ausilio dei connettivi vero-funzionali:

- $F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$
- $F \leftrightarrow G \equiv (F \wedge G) \vee (\neg F \vee \neg G)$

Per introdurre la bi-implicazione è necessario ricavare G da F e F da G

$$\frac{F \Rightarrow G \quad G \Rightarrow F}{F \leftrightarrow G}$$

Per eliminarla è necessario avere F singolo assieme alla sua bi-implicazione

$$\frac{F \qquad F \leftrightarrow G \ (\text{o } G \leftrightarrow F)}{G}$$