Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

ESERCIZIO 1. *Sia*

$$\mathscr{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix};\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

una base di $\mathbb{C}^3$ *e sia* $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ *un'applicazione lineare tale che:*

$$\begin{aligned} f(v_1) =& v_2; \\ f(v_2) =& v_3; \\ f(v_3) =& v_2 + v_3. \end{aligned}$$

(a) Si trovi la matrice A *associata a* f *rispetto alla base canonica.*

(b) Si calcoli il rango di f*, una base di* $Im(f)$ *e una base di* $N(f)$*.*

(c) Si dica se i vettori $w = v_1 + v_3$ *e* $q = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -7 \end{bmatrix}^T$ *appartengono a* $Im(f)$*.*

Svolgimento.

(a) Dobbiamo calcolare la matrice A tale che:

$$f(x) = Ax.$$

Siccome l'applicazione delle coordinate rispetto alla base canonica $\mathscr{E}_3$ sui vettori è l'identità, la formula sopra può essere riscritta così:

$$C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) = AC_{\mathscr{E}_3}(x).$$

A questa formula al posto di x mettiamo i vettori della base canonica e_i:

$$C_{\mathscr{E}_3}(f(e_i)) = AC_{\mathscr{E}_3}(e_i) = Ae_i = i - esima\ colonna\ di\ A$$

quindi

$$A = \begin{bmatrix} C_{\mathscr{E}_3}(f(e_1)) & C_{\mathscr{E}_3}(f(e_2)) & C_{\mathscr{E}_3}(f(e_3)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{bmatrix}.$$

A questo punto allora basta calcolare quanto vale la f sui vettori della base canonica, ma noi sappiamo quanto vale sui vettori di $\mathbb{B}$, quindi , sfruttando la linearità di f, riscriviamo quello che conosciamo:

$$\begin{aligned} f(v_1) =& f(e_1 + 2e_3) = f(e_1) + 2f(e_3) = v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T; \\ f(v_2) =& f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T; \\ f(v_3) =& f(e_3) = v_2 + v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Quindi $f(e_3)$ ce l'abbiamo già e sarà la terza colonna di A, calcoliamo $f(e_1)$ e $f(e_2)$:

$$f(e_1) = v_2 - 2f(e_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix};$$
$$f(e_2) = v_3 - f(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo dunque trovato la matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Per calcolare il rango di f basta calcolare il rango della matrice A trovata al punto (a). Eseguiamo quindi l'Eliminazione di Gauss su A:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo le colonne dominanti due, il rango di f è 2.

Troviamo adesso una base di $Im(f)$. Una base di tale spazio è data dalle colonne di A che sono risultate dominanti nella forma ridotta in seguito all'Eliminazione di Gauss. Dunque:

$$Im(f) = < \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} >$$

Per trovare una base dello spazio nullo di f dobbiamo immaginarci di risolvere il sistema $Av = 0$ quindi in seguito all'Eliminazione di Gauss avremmo $[U|0]$ dove U sta ad indicare la forma ridotta di A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se chiamiamo x, y, z le coordinate di v allora dalla terza riga della matrice troviamo $0z = 0$ che è indeterminata, cioè va bene qualsiasi numero, quindi daremo a z il valore del generico parametro α: $z = \alpha$. Dalla seconda riga troviamo $y - z = 0$ da cui $y = z$ cioè $y = \alpha$. Dalla prima riga troviamo $x - y - z = 0$ da cui $x = y + z$ cioè $x = 2\alpha$.

Questo ci dice che un generico vettore dello spazio nullo è della forma $\begin{bmatrix} 2\alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix}^T$. Raccogliendo α troviamo $\alpha\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, quindi una base dello spazio nullo di f è data dal vettore $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$:

$$N(f) = < \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} >$$

Notare che le dimensioni di $Im(f)$ e di $N(f)$ rispettano il teorema nullità più rango.

(c) Adesso dobbiamo dire se il vettore $w = v_1 + v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$ appartiene all'immagine di f. Se così fosse allora sarebbe nello spazio $Im(f)$ e come tale sarebbe combinazione lineare dei vettori della base di $Im(f)$. Un modo per vedere la dipendenza lineare è mettere i tre vettori in una matrice e applicare l'Eliminazione di Gauss. Se il rango sarà 3 allora w non apparrà a $Im(f)$ essendo linearmente indipendente ai vettori di base di tale spazio, al contrario, se il rango risulterà 2 allora vorrà dire che w sta in $Im(f)$.

Eseguiamo quindi l'Eliminazione di Gauss:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avendo 3 colonne dominanti, il rango della matrice è 3, quindi w non appartiene all'immagine di f.

Vediamo se il vettore $q \in Im(f)$ allo stesso modo di come abbiamo fatto per w, quindi eseguiamo l'Eliminazione di Gauss sulla matrice che ha come colonne i vettori della base di $Im(f)$ e q per trovarne il rango:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avendo 2 colonne dominanti, il rango della matrice è 2, quindi q appartiene all'immagine di f.

Proviamo a trovare quel vettore $v \in \mathbb{C}^3$, tale che $f(v) = q$, cioè $Av = q$ (esso esiste perchè q appartiene all'immagine di f). Si tratta quindi di risolvere il sistema lineare $Av = q$:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se chiamiamo x, y, z le coordinate di v allora dalla terza riga della matrice troviamo $0z = 0$ che è indeterminata, cioè va bene qualsiasi numero, quindi daremo a z il valore del generico parametro α: $z = \alpha$. Dalla seconda riga troviamo $y - z = -1$ da cui $y = -1 + z$ cioè $y = -1 + \alpha$. Dalla prima riga troviamo $x - y - z = 3$ da cui $x = 3 + y + z$ cioè $x = 2 + 2\alpha$. Otteniamo così:$v = \begin{bmatrix} 2+2\alpha & -1+\alpha & \alpha \end{bmatrix}^T$

Non ci deve stupire che la soluzione non è unica, infatti il rango della matrice è 2. A questo punto basta dare un qualsiasi valore ad α ottenendo così il v cercato, controimmagine di q rispetto a f. Per semplicità di conto poniamo $\alpha = 0$, ottenendo così $v = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$.