Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

18 novembre 2011

ESERCIZIO 1. *Data gli spazi vettoriali $\mathbb{C}^3$ e $\mathbb{C}^5$, esiste un'applicazione $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^5$ suriettiva?*

SVOLGIMENTO.

La risposta è no, lo capiamo dalla definizione di applicazione suriettiva e dal teorema nullità più rango .

Data $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^5$, per essere suriettiva, deve accadere che

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{C}^5$$

Questo vuol dire che $\dim \mathrm{Im}\,(f)$ dovrebbe essere 5 ma per il teorema nullità più rango :

$$\begin{gathered}\dim \mathbb{C}^3 = \dim N(f) + \dim \mathrm{Im}\,(f) \\ 3 = \dim N(f) + \dim \mathrm{Im}\,(f)\end{gathered}$$

Da cui capiamo che

$$\dim \mathrm{Im}\,(f) \leq 3 \neq 5 = \dim \mathbb{C}^5$$

Quindi non può essere suriettiva.

ESERCIZIO 2. *Data l'applicazione $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ indotta dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Dire chi è l'immagine di $v = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(b) Dare una base dello spazio delle colonne di A.

(c) Dire quant'è la dimensione dello spazio nullo di f_A.

(d) Dire se $w = \begin{bmatrix} -\sqrt{\pi} & e^{356} & 42 \end{bmatrix}^T$ sta nell'immagine di f.

Svolgimento.

(a) Essendo l'applicazione indotta dalla matrice A, che vuol dire $f(x) = Ax$, per trovare l'immagine di v basta moltiplicarlo alla matrice A:

$$f(v) = Av = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(b) Lo spazio delle colonne di A è lo spazio vettoriale generato dalle colonne della matrice A e verrà indicato con $C(A)$:

$$C(A) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

Quindi dati questi generatori, per avere una base, dobbiamo vedere quali sono linearmente indipendenti. Per fare questo applichiamo l'Eliminazione di Gauss alla matrice A e le colonne che risulteranno dominanti nella forma ridotta U, ci diranno quali sono le colonne linearmente indipendenti nella matrice A.

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss su A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{31}(-2) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2(1/3) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{32}(-6) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$E_3(1/4) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Nella forma ridotta tutte le colonne sono dominanti, quindi le colonne di A sono tutte e tre linearmente indipendenti, dunque una base di $C(A)$ è

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Per il teorema nullità più rango

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(f_A) + \dim \mathrm{Im}\,(f_A)$$

Sapendo che $\mathrm{Im}\,(f) = C(A)$ essendo l'applicazione indotta dalla matrice A e per il punto (b), possiamo scrivere:

$$3 = \dim N(f_A) + 3$$

Quindi $\dim N(f_A) = 0$, dove 0 in questo caso indica il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

Notiamo che, sempre per il fatto che l'applicazione è indotta da una matrice, $N(f_A) = N(A)$ Quindi possiamo scrivere una versione del teorema nullità più rango sulle matrici: data una matrice A $m \times n$,

$$n = \dim N(A) + \dim \mathrm{Im}\,(A)$$

Cioè $\dim N(A) + \dim \mathrm{Im}\,(A)$ è uguale al numero delle colonne (delle incognite se A è la matrice di un sistema lineare), questo perchè se $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vuol dire che $f(x)$ (vettore nel codominio, quindi di dimensione $m \times 1$) è uguale ad A per x (vettore nel dominio, quindi di dimensione $n \times 1$); è chiaro dunque che la matrice dovrà avere dimensione $m \times n$ affinché sia verificata l'uguaglianza

$$f(x) = Ax$$

Il teorema nullità più rango ci dice che $\dim N(f_A) + \dim \mathrm{Im}\,(f_A)$ è uguale alla dimensione del dominio, quindi $\dim N(A) + \dim \mathrm{Im}\,(A)$ è uguale al numero delle colonne della matrice.

(d) Siccome $\dim \mathrm{Im}\,(f_A) = 3$ (punto (b)), vuol dire che i vettori della base $\mathscr{B}$ sono anche una base di $\mathbb{R}^3$ perché sono il numero giusto di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$. Quindi generano qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^3$, pertanto anche w.

Dunque $w \in \mathrm{Im}\,(f)$.

Un'altro modo per rispondere è che siccome

$$\dim \mathrm{Im}\,(f) = 3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim(\text{codominio})$$

possiamo affermare che f è suriettiva, dunque ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ sta nell'innagine di f, pertanto $w \in \mathrm{Im}\,(f)$.

ESERCIZIO 3. *Sia data l'applicazione così definita:*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+2y \\ x-y-z \\ z-x+y \\ 4y-x+2z \end{bmatrix}$$

(a) Determinare la matrice A che induce l'applicazione f.

(b) Determinare una base di Im(f) e di $N(A)$.

(c) Dire se $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \in N(f)$.

SVOLGIMENTO.

(a) Per determinare la matrice A che induce l'applicazione f, dobbiamo trovare la matrice che fa questo lavoro:

$$f(x) = Ax$$

Siccome $f(x)$ è un vettore del codominio, ha dimensioni 4×1, mentre x è un vettore del dominio, pertanto avrà dimensioni 3×1; questo ci dice che la matrice A sarà di dimensione 4×3:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

E vogliamo che $f(x) = Ax$, quindi

$$f(x) = Ax$$
$$\begin{bmatrix} x+2y \\ x-y-z \\ z-x+y \\ 4y-x+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x+2y \\ x-y-z \\ z-x+y \\ 4y-x+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + a_2y + a_3z \\ a_4x + a_5y + a_6z \\ a_7x + a_8y + a_9z \\ a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z \end{bmatrix}$$

Uguagliando i coefficienti a_i con i coefficienti del vettore immagine, troviamo che

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Dovrebbe essere di facile intuito come si costruisce "velocemente" la matrice che induce l'applicazione: ha nella prima colonna i coefficienti della variabile x, nella seconda colonna i coefficienti della variabile y e nella terza colonna i coefficienti della variabile z. Quindi non serve fare tutto il conto con i coefficienti a_i.

(b) Siccome $\mathrm{Im}\,(f) = C(A)$, basta trovare una base dello spazio delle colonne di A, per fare questo eseguiamo l'Eliminazione di Gauss sulla matrice e vediamo quali sono le colonne dominanti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{21}(-1) \\ E_{31}(1) \\ E_{41}(1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{2}(-1/3) \\ E_{32}(-3) \\ E_{42}(-6) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Essendo le prime due le colonne dominanti in U, allora le prime due colonne di A formeranno una base per $C(A)$:

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

Per trovare una base di $N(A)$ (che non è altro che $N(f)$), pensiamo a cos'è lo spazio nullo di una matrice:

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$$

Dove 0 sta ad indicare il vettore nullo di $\mathbb{R}^4$.

Sono le soluzioni del sistema omogeneo (omogeneo vuol dire che ha i termini noti uguali a zero). Quindi risolviamo il sistema $Ax = 0$ (dove 0 sta ad indicare il vettore nullo di $\mathbb{R}^4$) che è un sistema in tre incognite (numero colonne di A) e quattro equazioni (numero righe di A).

La matrice completa del sistema è

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Per risolvere il sistema dobbiamo applicare l'Eliminazione di Gauss ad $A|b$, ma se ci pensiamo bene, non serve rifarlo: possiamo tenere la forma ridotta ottenuta nel calcolo della base di $C(A)$, tanto la colonna dei termini noti è tutta di zeri, quindi non subisce variazioni. Otteniamo dunque

$$U|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dobbiamo trovare la soluzione del sistema che ha tre incognite (che chiameremo x, y, z), iniziamo con la sostituzione all'indietro partendo dalla terza incognita. Quindi nella matrice, la terza riga ci dice che $0z = 0$ dunque la variabile z è libera:

$$z = \alpha$$

Dalla seconda riga capiamo che

$$y + 1/3z = 0 \Rightarrow y + 1/3\alpha = 0 \Rightarrow y = -1/3\alpha$$

Dalla prima riga capiamo che

$$x + 2y = 0 \Rightarrow x + 2(-1/3\alpha) = 0 \Rightarrow x = 2/3\alpha$$

Quindi il vettore delle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ (dove 0 sta ad indicare il vettore nullo di $\mathbb{R}^4$) è

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\alpha \\ -\frac{1}{3}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Da questo possiamo dire che un generico vettore nello spazio nullo è fatto in questa maniera.

È facile dunque trovare una base di tale spazio: al variare di α si ottengono tutti i vettori nello spazio, allora basta prendere il vettore che si ottiene raccogliendo lo scalare α:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\alpha \\ -\frac{1}{3}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}^T$ è il vettore che forma una base di $N(A)$.

(c) Per rispondere a questa domanda si può fare in più modi:

I MODO:

Se e_2 è nello spazio nullo, verifichiamo che $Ae_2 = 0$ (dove 0 sta ad indicare il vettore nullo di $\mathbb{R}^4$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $e_2 \notin N(f)$.

II MODO:

Se $e_2 \in N(f)$ allora si scrive come combinazione lineare dell'unico vettore di base di $N(A)$, cioè esiste un α tale che

$$\alpha \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da cui ricaviamo

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -3 \end{cases}$$

Ma essendo impossibile soddisfare contemporaneamente entrambe, concludiamo che e_2 non appartiene allo spazio nullo di f.

ESERCIZIO 4. *Data l'applicazione lineare*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ y & 0 & x \\ 0 & x+y & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Dire se f è iniettiva.

(b) *Calcolare* $\dim Im(f)$

(c) *Dire se f è suriettiva.*

Svolgimento.

(a) Ricordando che f è iniettiva se e solo se $N(f) = 0$ dove 0 in questo caso sta per il vettore nullo di R^2, dobbiamo vedere com'è fatto lo spazio nullo di f: esso è dato da tutti i vettori v di $\mathbb{R}^2$ tali che $f(v) = 0$ dove questa volta 0 sta ad indicare l'elemento nullo dello spazio $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, cioè la matrice nulla di ordine 3.

Quindi

$$f(v) = 0$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ y & 0 & x \\ 0 & x+y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui ricaviamo che un vettore nello spazio nullo di f deve soddisfare:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Dunque l'unica possibilità è $x = 0$ e $y = 0$, ma allora lo spazio nullo di f è composto dal solo vettore nullo di $\mathbb{R}^2$, di conseguenza possiamo affermare che f è iniettiva.

(b) Per il teorema nullità più rango

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim N(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$$

Per il punto (a)

$$2 = 0 + \dim \operatorname{Im}(f)$$

Dunque $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$.

(c) L'applicazione non è suriettiva perché per essere tale deve accadere che $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, ma questi sono spazi che hanno dimensioni diverse, quindi non saranno uguali; infatti

$$\dim \operatorname{Im}(f) = 2 \neq 9 = \dim \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$$

Ingenuamente si poteva rispondere che non era suriettiva perchè la matrice immagine ha una "struttura rigida": gli elementi di posizioni $(1, 2), (2, 2)$, $(3, 1), (3, 3)$ sono zero, quindi non è vero che ad ogni matrice di $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ corrisponde una controimmagine nel dominio, basta prendere una matrice che in quelle posizioni abbai l'elemento diverso da zero.