Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 22 settembre 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1	E1
	T2	E2
		E3

☐ (1) Se $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ è un'applicazione lineare suriettiva, allora f è biiettiva.

☐ (2) Siano $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se λ^2 non è un autovalore di una matrice $\mathbf{A}^2$, allora λ non è un autovalore della matrice $\mathbf{A}$.

☐ (3) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di uno spazio vettoriale V, allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ non è un insieme di generatori di V.

T1) Si definisca quando una matrice quadrata $\mathbf{A}$ (di forma $n \times n$) è diagonalizzabile. Si dimostri: Se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, allora $\mathbb{C}^n$ possiede una base composta da autovettori di $\mathbf{A}$.

T2) Si diano le definizioni di rango e di spazio nullo di una matrice e si dimostri che, se $\mathbf{A}$ è una matrice $m \times n$, allora la somma fra il rango di $\mathbf{A}$ e la dimensione dello spazio nullo coincide con n.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha & 1 \\ 2 & 2 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 1$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_1)$. Inoltre si interpreti $\mathbf{A}_1$ come la matrice completa di un sistema lineare e si trovino tutte le soluzioni del sistema.

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Si consideri l'applicazione lineare $f \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2$.

(1) Si trovi la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.

E3) Si consideri la matrice ($\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta - 1 & -1 & \beta - 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile; si determini, quando esiste, una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$. Esiste una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_0$?