Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

ESERCIZIO 1. *Sia V lo spazio $\mathscr{P}_3(x)$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3 a coefficienti complessi nella variabile x.*
Sia V_0 il sottospazio di V , $V_0 = < 1 + x^3,\ 2 + x^3,\ 3 + x^3 >$.
Si determini la dimensione di V_0 e una sua base.

Svolgimento.

Potremmo vedere quali elementi di V_0 sono linearmente indipendenti mettendoli in combinazione lineare, ma questo risulterebbe ingenuo e un po' laborioso.
Ricordiamo invece la teoria che ci dice:

PROPOSIZIONE 1. *Dato $\mathscr{A}$ sottoinsieme di uno spazio vettoriale V e $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali, allora:*

- *se $f(\mathscr{A})$ (cioè l'insieme delle immagini di tutti gli elementi di $\mathscr{A}$) è un insieme linearmente indipendente, allora anche gli elementi di $\mathscr{A}$ sono linearmente indipendenti;*
- *se $\mathscr{A}$ è un insieme linearmente indipendente e f è iniettiva, allora anche $f(\mathscr{A})$ è un insieme linearmente indipendente.*

Noi abbiamo a disposizione *l'applicazione delle coordinate relative ad una base* che è un'applicazione biiettiva, quindi calcoliamo l'immagine dei vettori di V_0 rispetto alla base canonica di $\mathscr{P}_3(x)$ che chiameremo $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

$$C_{\mathscr{B}}(1 + x^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$C_{\mathscr{B}}(2 + x^3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$C_{\mathscr{B}}(3 + x^3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Quindi per la proposizione 1 possiamo considerare le immagini degli elementi di V_0 rispetto a $C_{\mathscr{B}}$ che sono vettori di $\mathscr{C}^4$, un po' più usuali da trattare per la teoria delle matrici.

Vediamo quindi quali tra questi sono linearmente indipendenti mettendoli in una matrice e applicando l'Eliminazione di Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo le colonne dominanti le prime due, possiamo dire che una base di V_0 è fatta da $\{1 + x^3,\ 2 + x^3\}$. Quindi $\dim V_0 = 2$.