Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 22 giugno 2017 — Compito A

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dia la definizione di autovalore e autospazio. Si dimostri che, se λ è un autovalore di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è simile a $\mathbf{A}$, allora λ è un autovalore di $\mathbf{B}$ e gli autospazi hanno la stessa dimensione.

T2) Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché la matrice $\mathbf{A}$, di forma $m \times n$, abbia inversa destra.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & 2 \\ 2 & 2\alpha & 5 & 1 \\ 2 & 2\alpha & \alpha+2 & -\alpha+4 \\ 1 & \alpha & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 0$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_0)$ e una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Si dimostri che $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3; \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2; \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^3$) è una base di $\mathbb{C}^4$. Si consideri poi l'unica applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$$
$$f(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$$
$$f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_2$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2\beta & 2 \\ 0 & \beta+1 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 22 giugno 2017 — Compito B

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dia la definizione di autovalore e autospazio. Si dimostri che, se λ è un autovalore di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è simile a $\mathbf{A}$, allora λ è un autovalore di $\mathbf{B}$ e gli autospazi hanno la stessa dimensione.

T2) Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché la matrice $\mathbf{A}$, di forma $m \times n$, abbia inversa destra.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 2 \\ 2 & -2\alpha & 5 & 1 \\ 2 & -2\alpha & -\alpha+2 & \alpha+4 \\ 1 & -\alpha & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 0$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_0)$ e una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Si dimostri che $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2; \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3; \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^3$) è una base di $\mathbb{C}^4$. Si consideri poi l'unica applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$$
$$f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$$
$$f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_2$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -2\beta & 2 \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ 1 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.