Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 8 settembre 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1	E1	
	T2	E2	
		E3	

☐ (1) Se $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ è un'applicazione lineare suriettiva, allora f è biiettiva.

☐ (2) Se λ è un autovalore di una matrice $\mathbf{A}$, allora λ^2 è un autovalore della matrice $\mathbf{A}^2$.

☐ (3) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di uno spazio vettoriale V, allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ è un insieme linearmente indipendente.

T1) Data una matrice quadrata $\mathbf{A}$, si diano le definizioni di autovalore e di polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$. Si dimostri: $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di $\mathbf{A}$ se e solo se il polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}}(X)$ di $\mathbf{A}$ soddisfa $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

T2) Si dia la definizione di prodotto interno in uno spazio vettoriale e si dimostri che, se $(\cdot \mid \cdot)$ è un prodotto interno su V, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vale la disuguaglianza

$$(\mathbf{u} \mid \mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{u} \mid \mathbf{u})(\mathbf{v} \mid \mathbf{v}).$$

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 1$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_1)$. Inoltre si interpreti $\mathbf{A}_1$ come la matrice completa di un sistema lineare e si trovino tutte le soluzioni del sistema.

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Si consideri l'applicazione lineare $f \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

(1) Si trovi la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.

E3) Si consideri la matrice ($\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta+1 & 0 & 2\beta+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -\beta-1 & 0 & -1-2\beta \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile; si determini, quando esiste, una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$. Esiste una base ortogonale di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_2$?