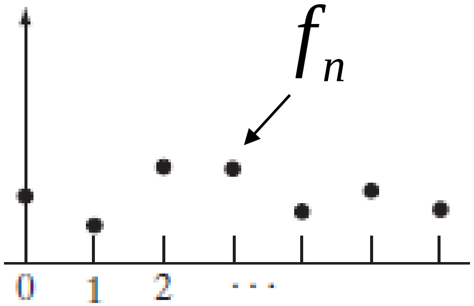
Dipartimento di Informatica
Università di Verona
A.A. 2018-19

Elaborazione dei Segnali e Immagini

Elaborazione di immagini: rinforzo nel dominio delle frequenze

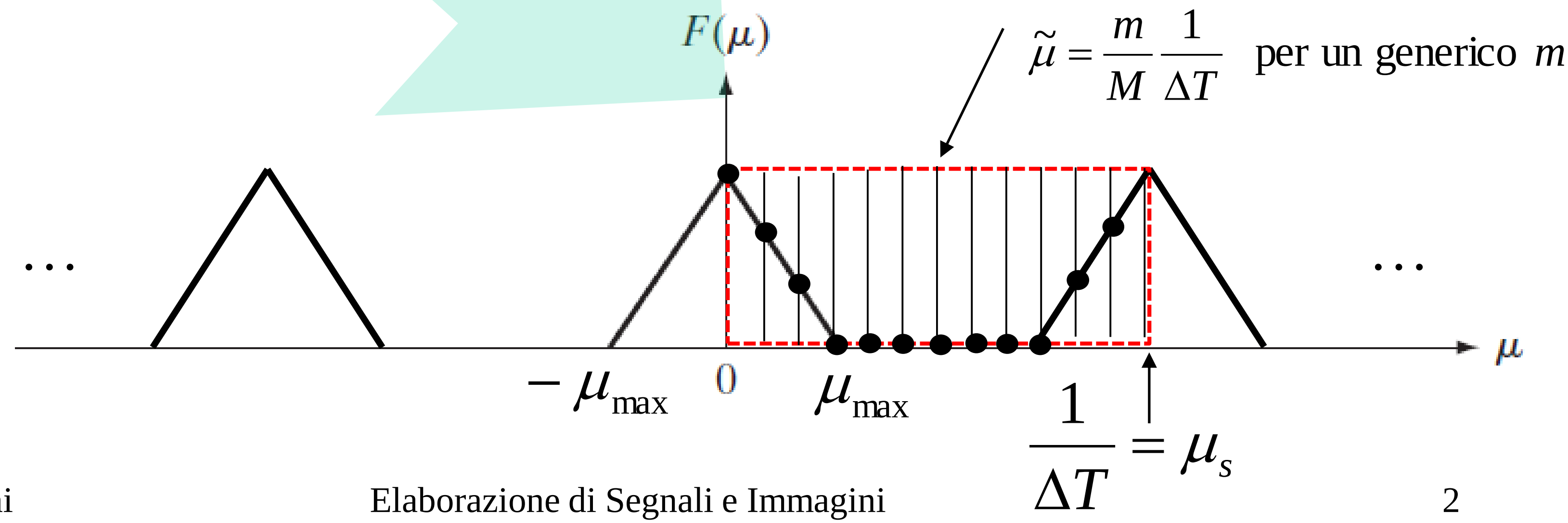
Gonzalez Cap.4

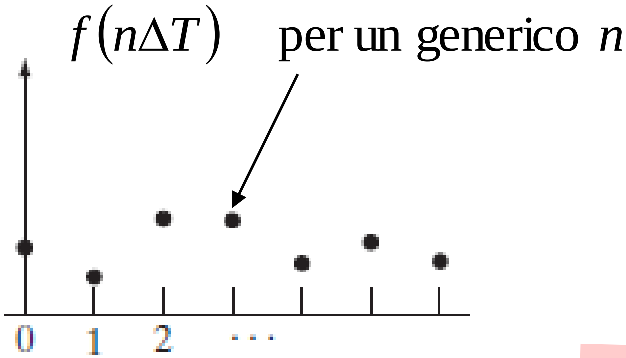
Ripasso: DFT 1D



- Prima di passare al filtraggio in frequenza, un richiamo alla DFT

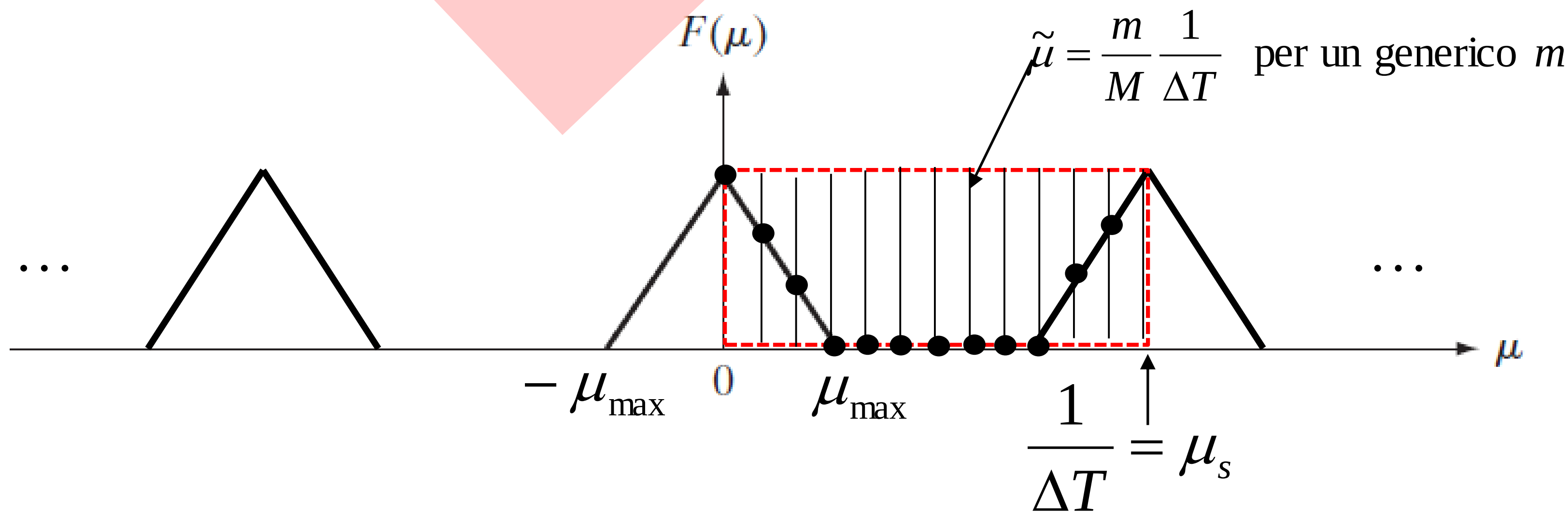
$$\tilde{F}\left(\frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}\right) = F\left(\frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}\right) = F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\frac{m}{M}n}$$





TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA INVERSA

$$\tilde{f}(n\Delta T) = f(n\Delta T) = f_n = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi \frac{m}{M} n}$$



Da 1D a 2D: osservazioni

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi \frac{m}{M} n}$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} f_n \left[\cos\left(2\pi \frac{m}{M} n \right) - j \sin\left(2\pi \frac{m}{M} n \right) \right]$$

- Posso intendere la DFT come la moltiplicazione del segnale per delle funzioni sinusoidali 1D
- Queste funzioni le definisco per M campioni, quindi esse sono dei frammenti di funzione

- Eseguo un cambio di variabile, *u* diventa la variabile delle frequenze, *x* quella dello spazio, dove entrambe rappresentano una quantità campionata

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi \frac{m}{M} n} \rightarrow F_u = F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi \frac{u}{M} x}$$

- Passo al 2D

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi \left(\frac{u}{M} x + \frac{v}{N} y \right)}$$

$$F(u,v) \overset{\mathcal{F}}{=} \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}x+\frac{v}{N}y\right)}$$

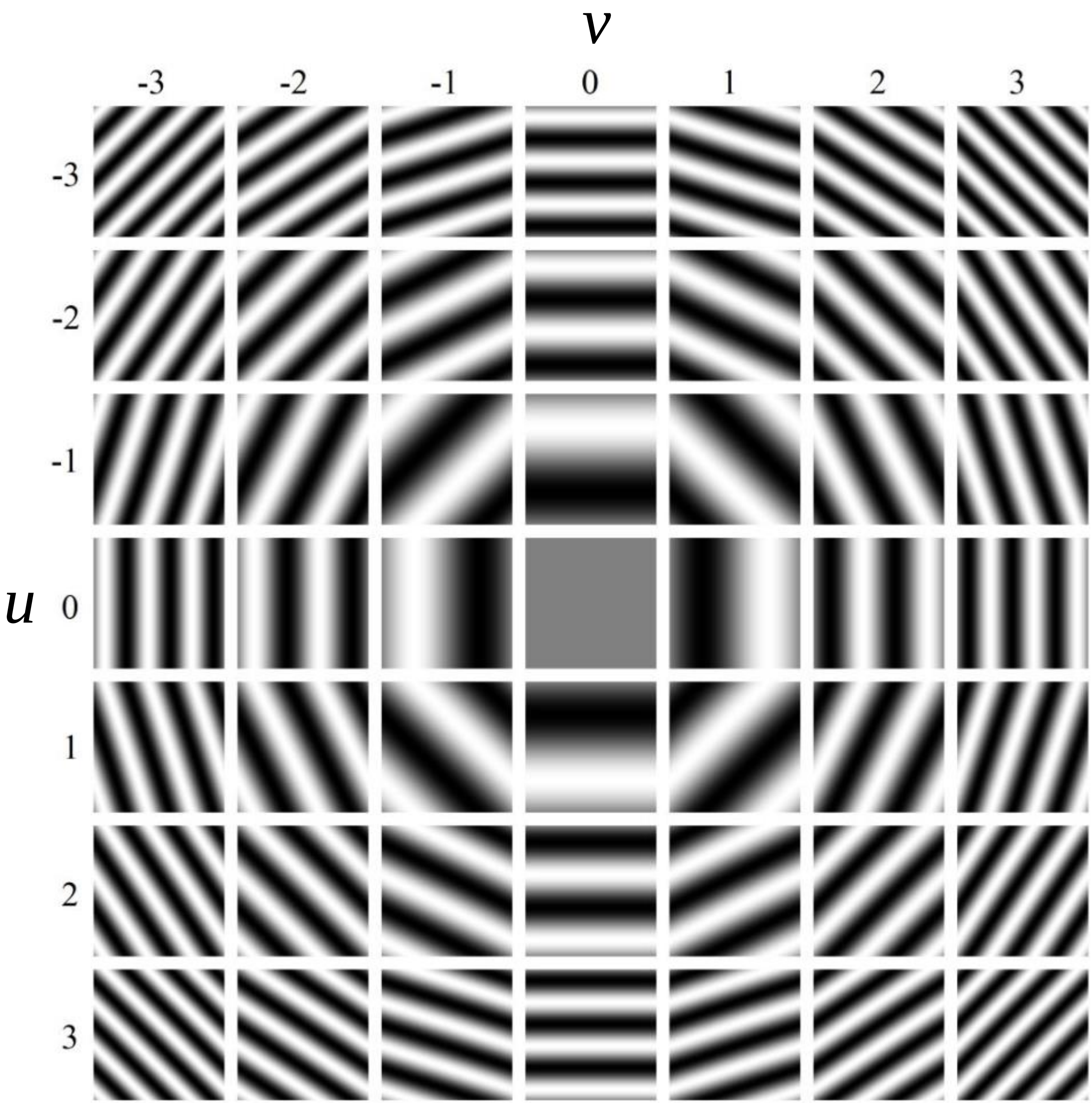
$$= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, B^{(u,v)}(x,y) = I \cdot B^{(u,v)}$$

Risposta di I all'*immagine (complessa)* base (u,v)

Immagine (complessa) base che [funzione di (u,v)

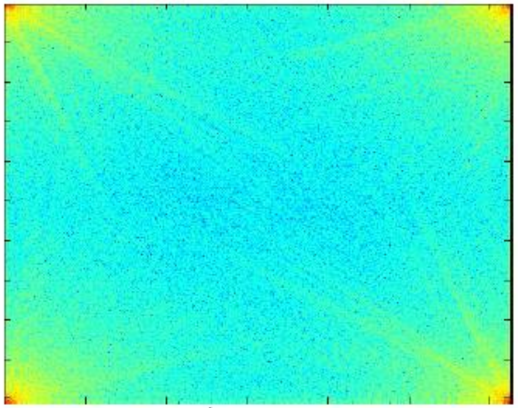
Esempi di immagini di base

$$f(x,y) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{=} \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{j2\pi\left(\frac{u}{M}x+\frac{v}{N}y\right)}$$



Immagini di base
per M=N=3

$F(u,v)$



(0,0)

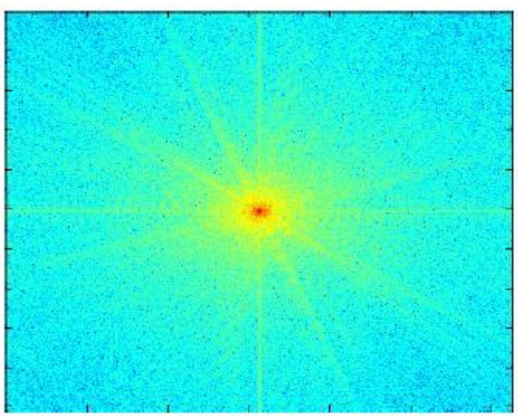
freq. basse	freq. alte	freq. basse
freq. alte	freq. alte	freq. alte
freq. basse	freq. alte	freq. basse

(M-1,N-1)

Le risposte relative a basse frequenze le troviamo agli angoli

Le risposte relative ad alte frequenze le troviamo al centro dell' immagine e dei lati.

Centramento per una migliore visualizzazione



(M/2,N/2)

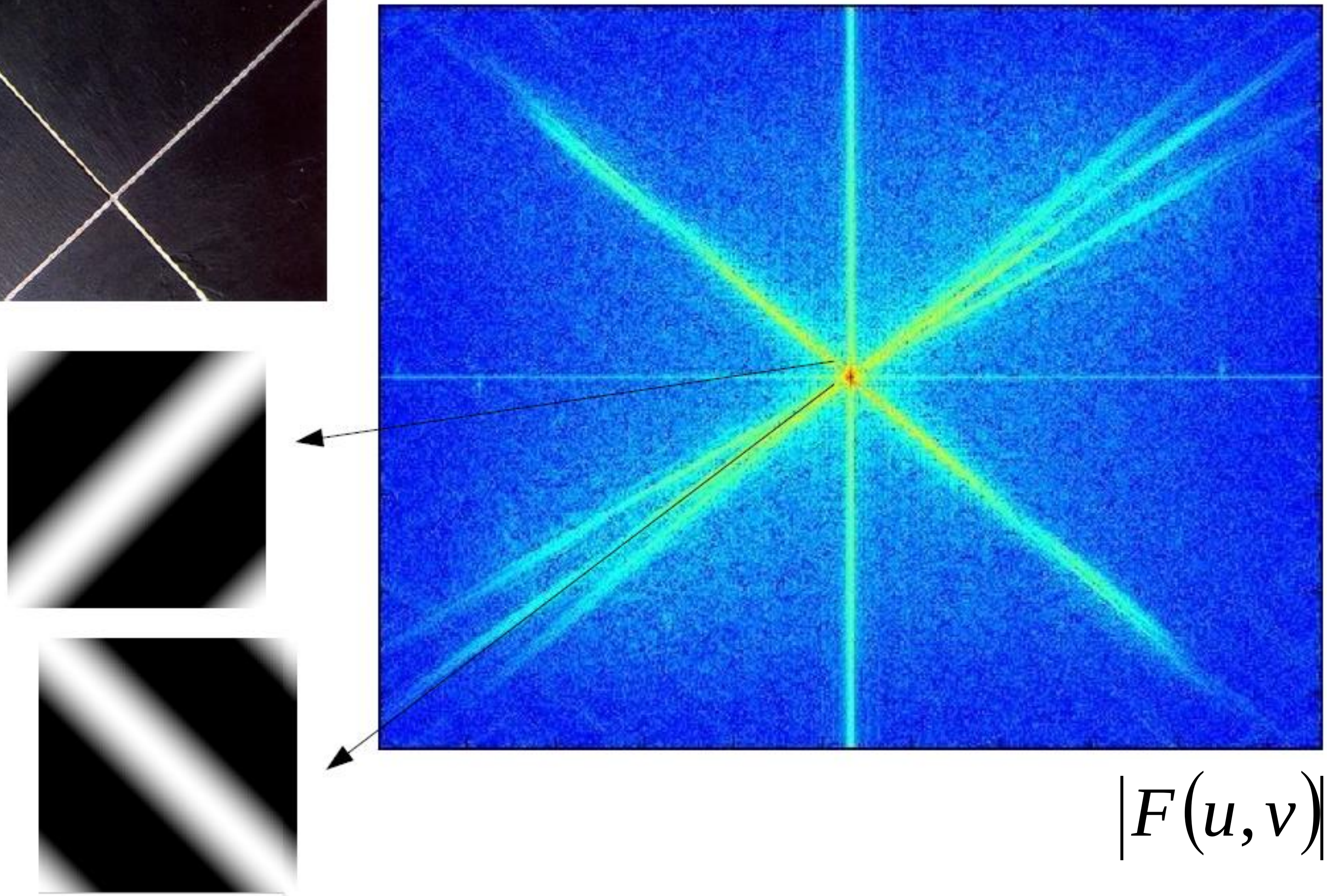
freq. alte	freq. alte	freq. alte
freq. alte	freq. basse	freq. alte
freq. alte	freq. alte	freq. alte

(0,0)

(M/2,N/2)

dopo applicazione di trasformazione logaritmica e centramento (fftshift)

$f(x,y)$



$|F(u,v)|$

Alcune proprietà DFT 2D

TRASLAZIONE

$$g(x,y) = f(x - x_0, y - y_0)$$

$$G(u,v) = F(u,v)e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}x_0 + \frac{v}{N}y_0\right)}$$

$$g(x,y) = f(x,y)e^{j2\pi\left(\frac{u}{M}x_0 + \frac{v}{N}y_0\right)}$$

$$G(u,v) = f(u - u_0, v - v_0)$$

ROTAZIONE

$$\mathfrak{F}(f_\theta)(u,v) = \mathfrak{F}(f)_\theta(u,v)$$

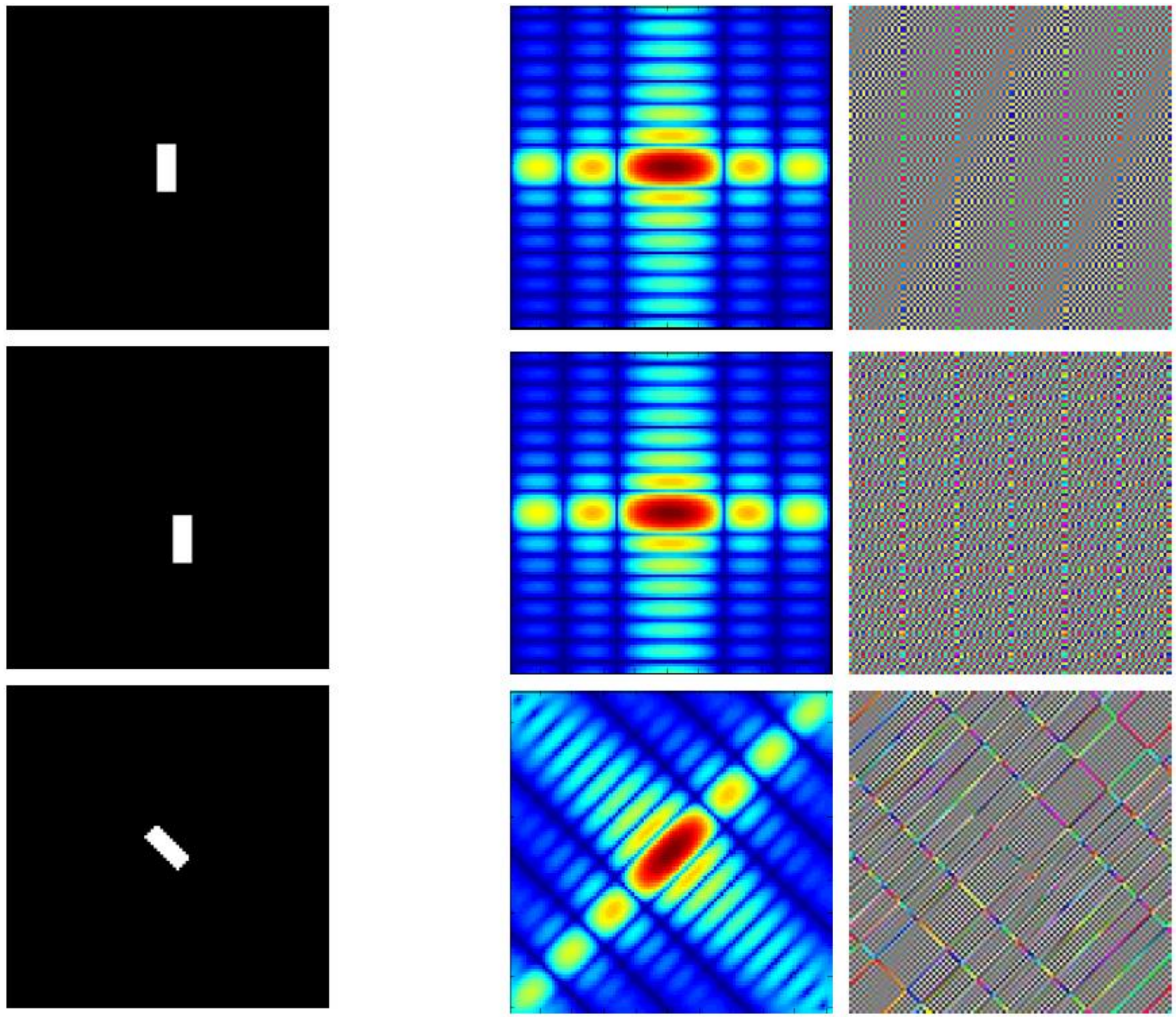
- la TdF di una immagine a cui è stata applicata una rotazione θ porterà ad una immagine di trasformata ruotata di un angolo θ

MODULO FASE

$$|F(u,v)| \qquad \angle F(u,v)$$

abs di MATLAB

angle di MATLAB



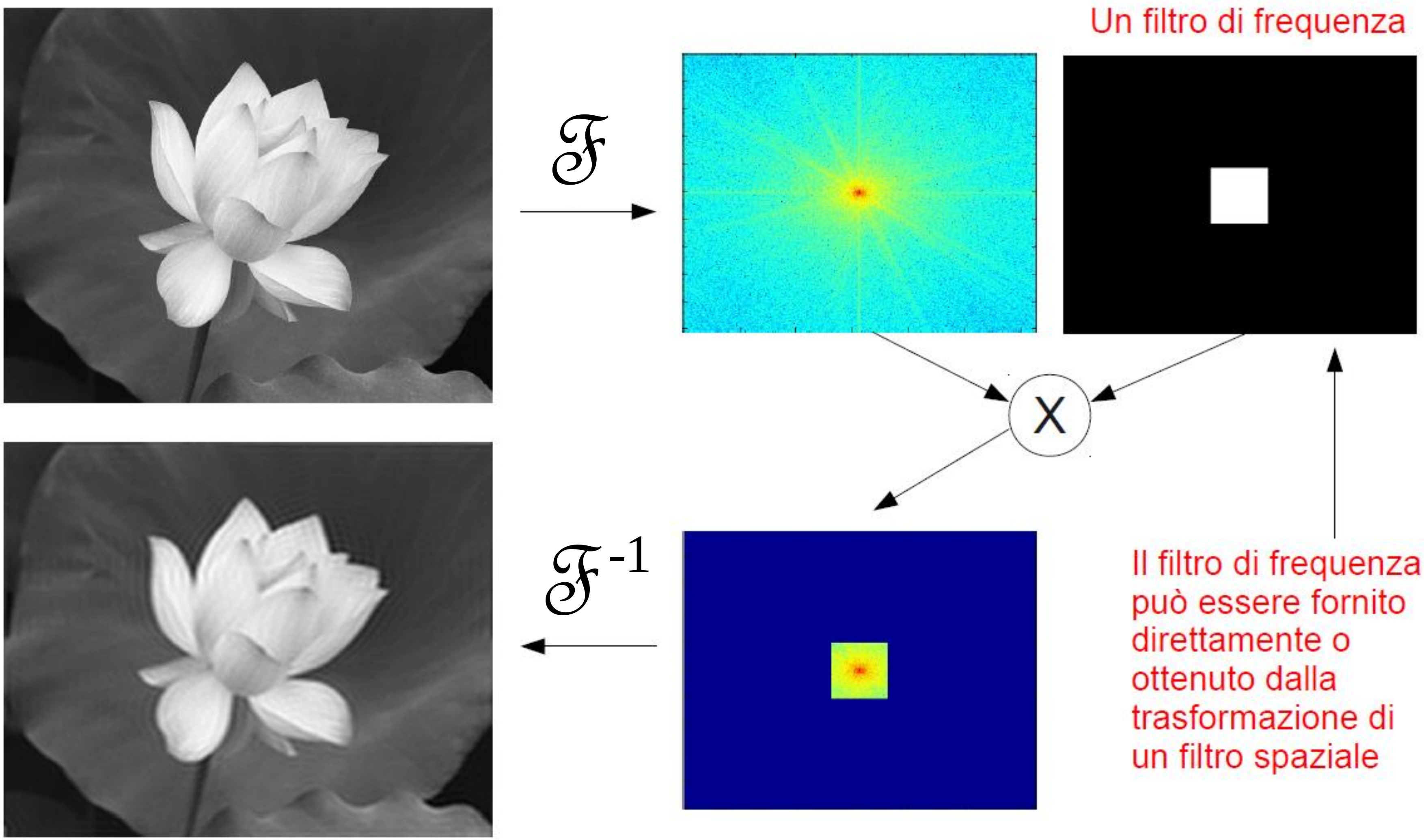
Teorema di convoluzione, richiamo

$$\mathcal{F}(f * h) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(h)$$

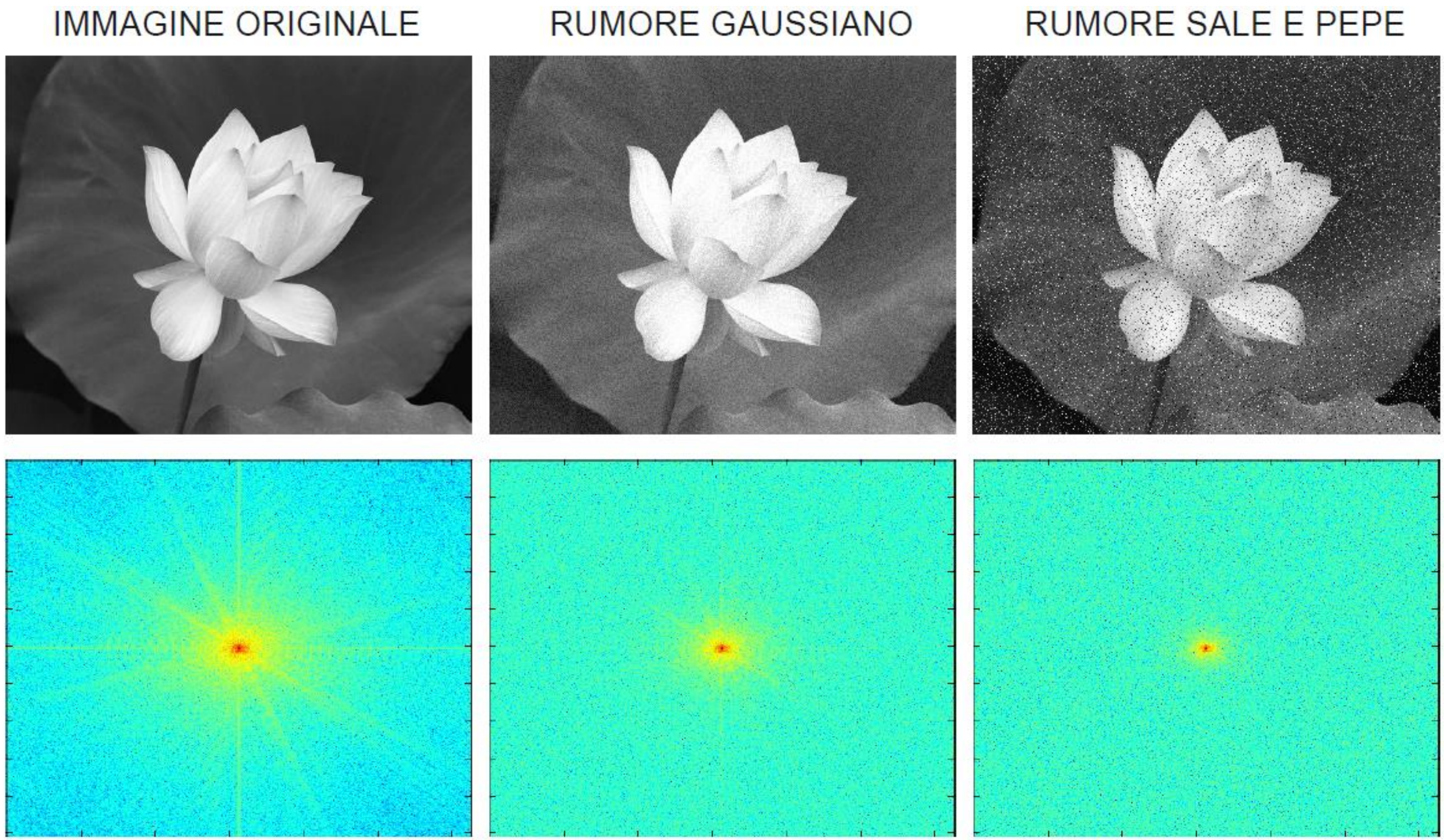
$$\mathcal{F}(f \cdot h) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(h)$$

- E' la base del filtraggio in frequenza
- **PIPELINE 1**:a) progetto il filtro in frequenza H; b) calcolo la TDF dell'immagine F; c) F.*H; d) antitrasformo il prodotto
- **PIPELINE 2**:a) ho un filtro dato nello spazio; b) eseguo operazione di zero-padding, lo trasformo in H; eseguo la PIPELINE 1

Filtraggio nel dominio delle frequenze



Rumore nel dominio delle frequenze



Il rumore porta ad un aumento delle alte frequenze. Riducendo le alte frequenze riduciamo il rumore, ma anche il livello di dettaglio

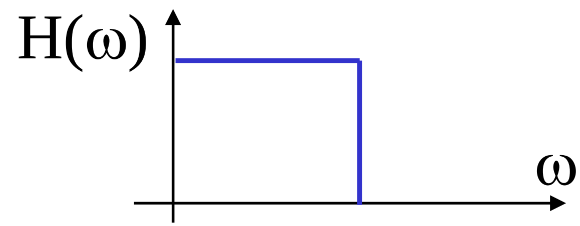
Filtri passa alto e passa basso

- L'informazione a basse frequenze corrispondono a parti dell'immagine in cui abbiamo lente variazioni di intensità, come muri di una stanza, o nuvolosità nel cielo.
- Le informazioni ad alte frequenze corrispondono invece a parti in cui abbiamo variazioni repentine, come spigoli, angoli e rumore.
- Un filtro passa basso rimuove dall'immagine le informazioni ad alte frequenze e mantiene quelle a basse frequenze.
- Un filtro passa alto viceversa rimuove dall'immagine informazioni a basse frequenze e mantiene quelle ad alte frequenze.
- Filtri passa alto possono essere derivati da filtri passa basso (e viceversa) con

$$H_{PA} = 1 - H_{PB}$$

Filtro passa basso “ideale”

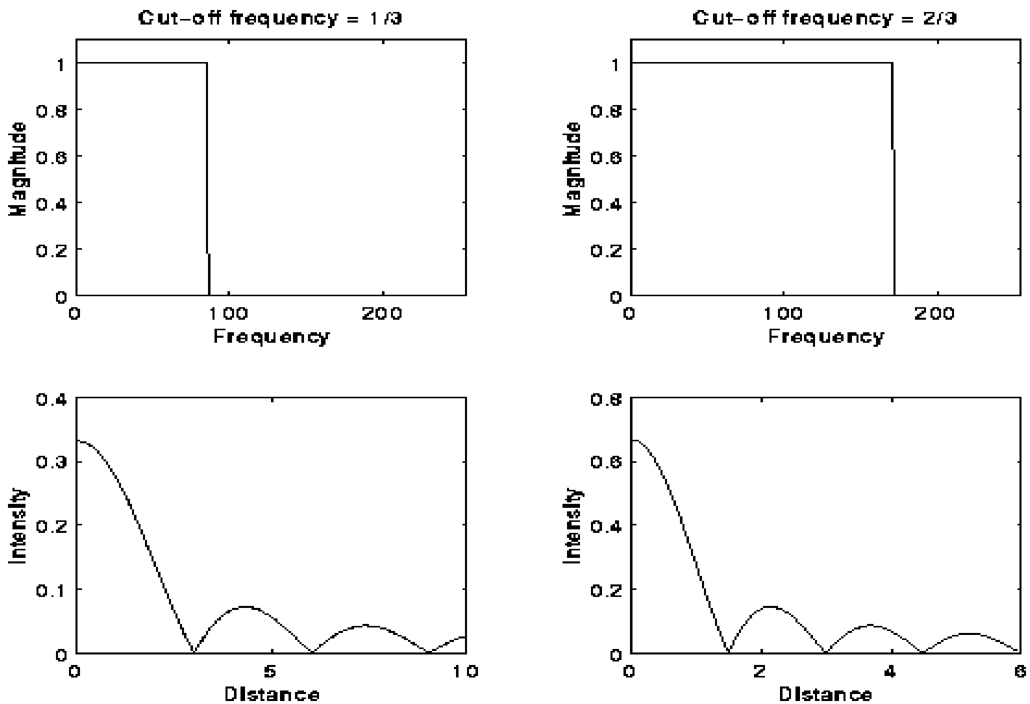
- Lo sfocamento o smoothing si ottiene attenuando le alte frequenze.
- Anche la riduzione del rumore passa attraverso l’attenuazione delle alte frequenze
- Un filtro passa basso ideale ha una *funzione di trasferimento* (= la sua trasformata in frequenza) a box.



- Una transizione così netta in corrispondenza alla *frequenza di taglio* non è fisicamente realizzabile.
- Questo non sarebbe un problema, visto che i filtri che che ci interessano sono digitali, ma provoca un effetto visivo indesiderato, il *ringing*.

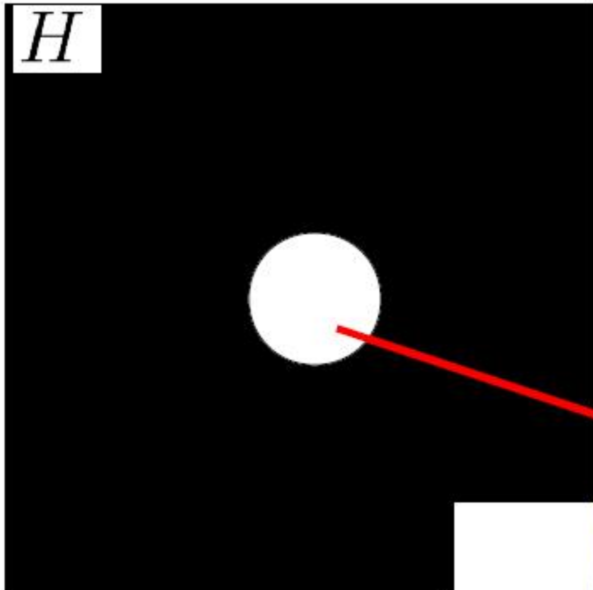
Ringing

- Il *ringing* (o effetto di Gibbs) è dovuto al fatto che filtrare con un PB ideale (in frequenza) equivale a convoluire con un *sinc* (nello spazio).
- La risposta all'impulso del PB ideale è un *sinc*.



- Qui a sinistra mostro semplicemente che a parità di sistemi di riferimento, aumentare l'ampiezza della box porta ad avere i lobi del sinc più vicini tra loro

Filtro passa basso "ideale"



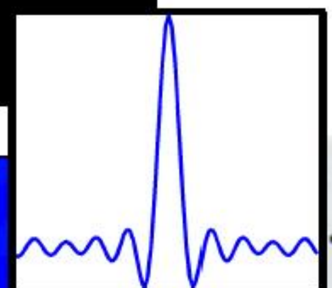
$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u,v) \le D_0 \\ 0 & \text{se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

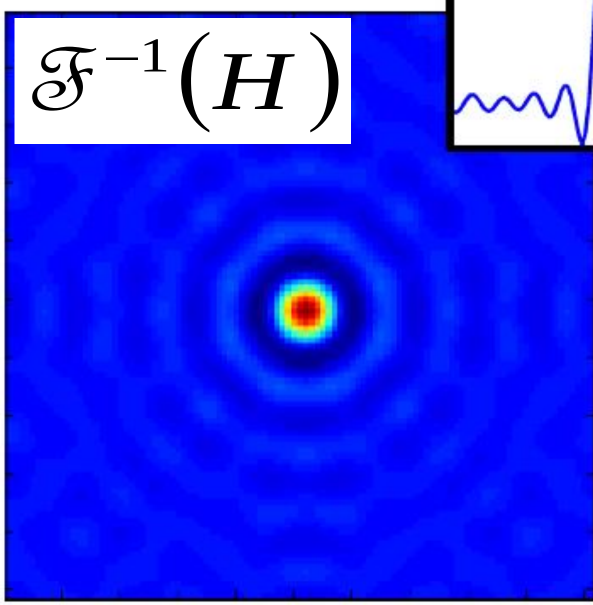
raggio cerchio

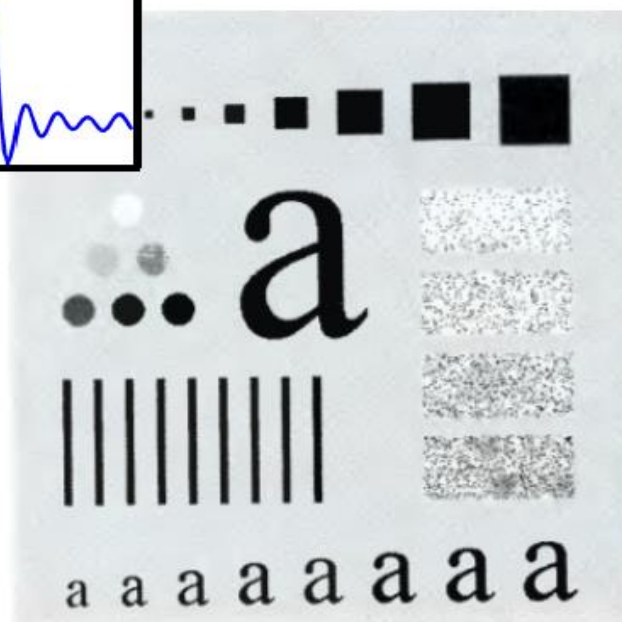
$D_0 = \mu_c$

$$D(u,v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

Solo le frequenze nel cerchio di raggio Do vengono mantenute.







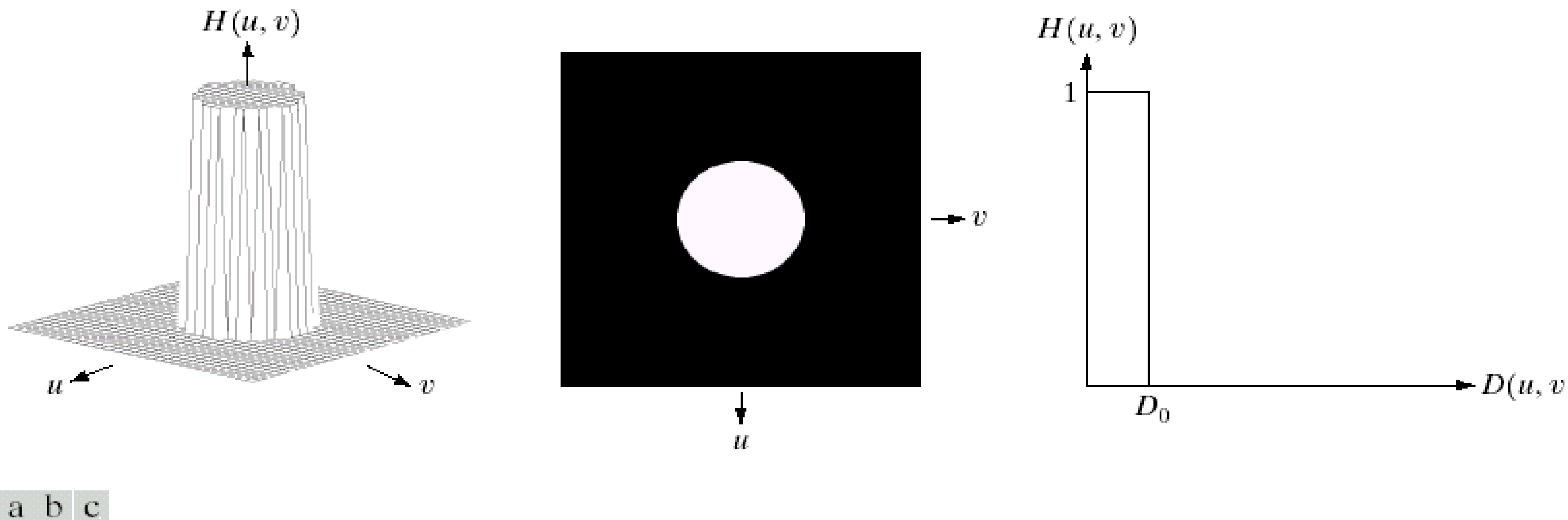
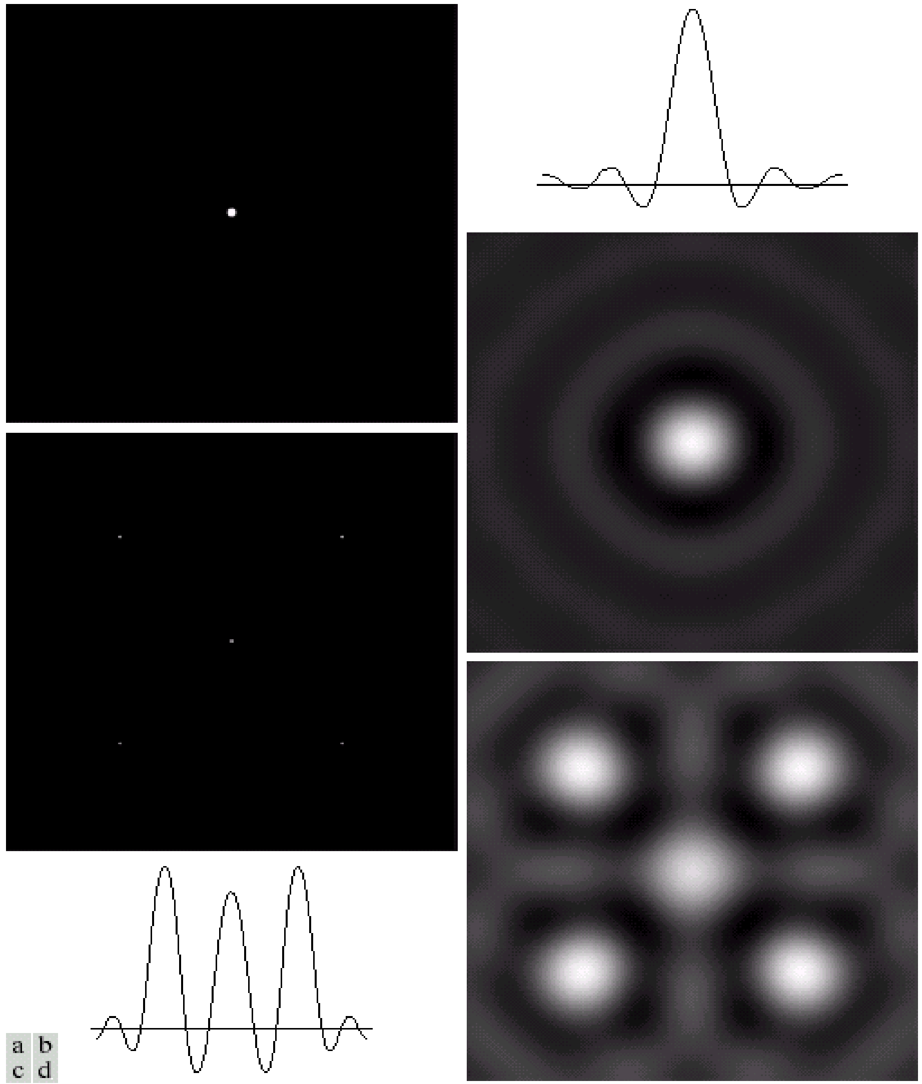


FIGURE 4.10 (a) Perspective plot of an ideal lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.

Esempio di ringing example

Passa basso in frequenza di raggio 5 pixel

Immagine con 5 pixel



Passa basso antitrasformato nello spazio 2D

Applicazione del passabasso nello spazio

FIGURE 4.13 (a) A frequency-domain ILPF of radius 5. (b) Corresponding spatial filter (note the ringing). (c) Five impulses in the spatial domain, simulating the values of five pixels. (d) Convolution of (b) and (c) in the spatial domain.

originale

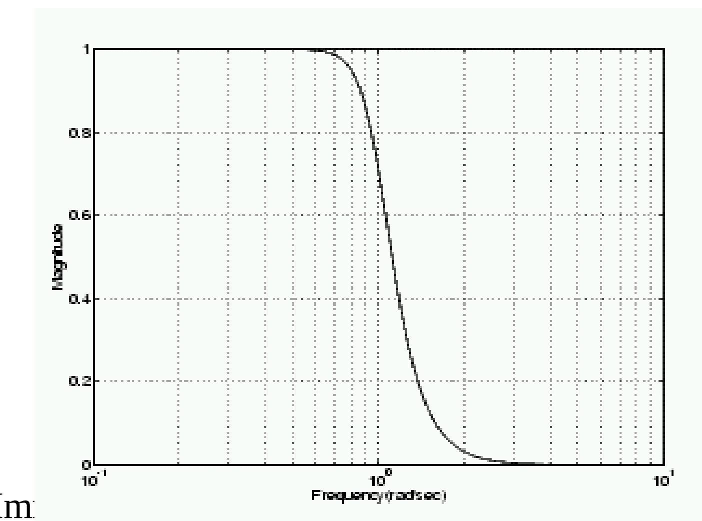
noise gaussiano

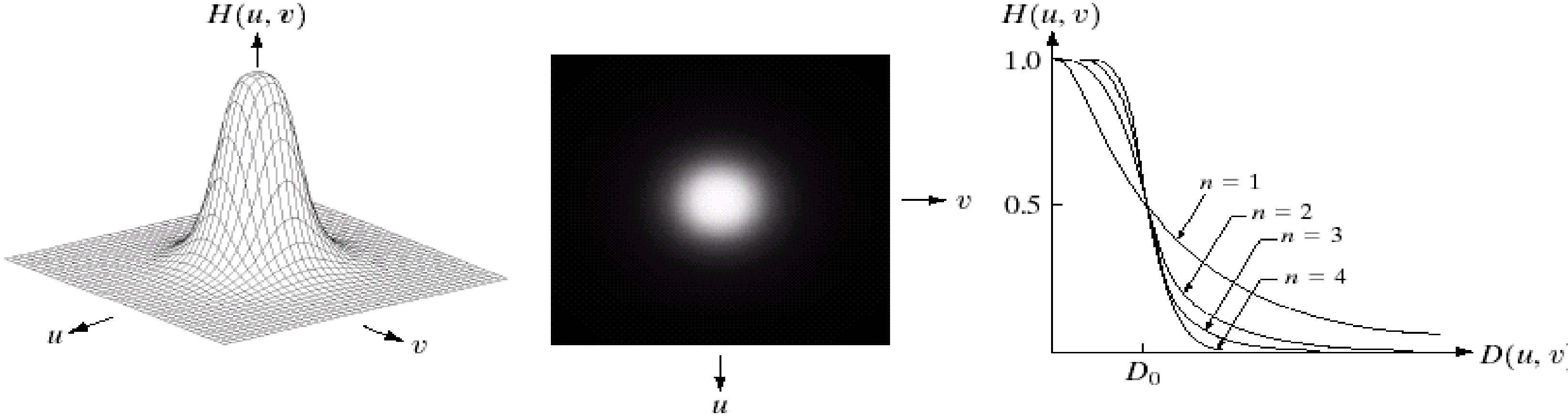
filtraggio con passa basso ideale

Filtro passa basso di Butterworth

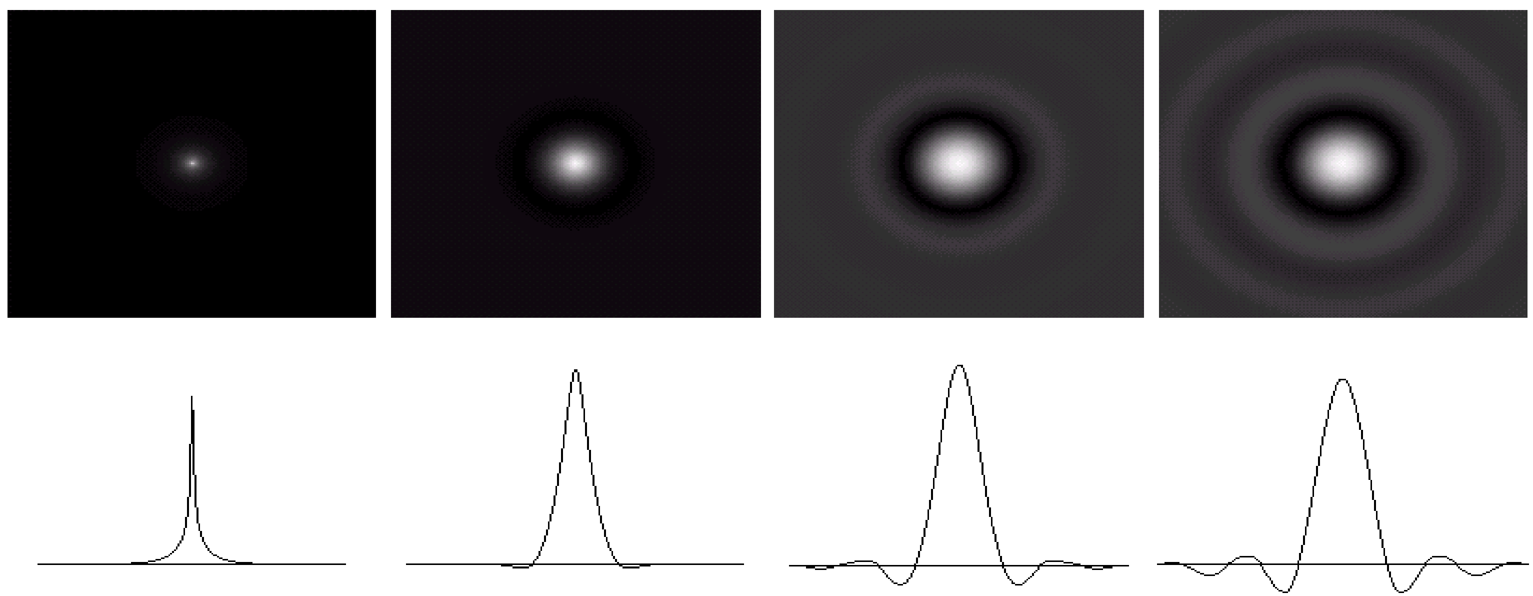
- Filtro con attenuazione dolce in prossimità della frequenza di taglio.
- Proprietà caratterizzante: risposta molto ripida nella banda passante.
- Ordine *n*, frequenza di taglio $D_0=\mu_c$

$$H(u,v) = \frac{1}{1+\left(D(u,v)/D_0\right)^{2n}}$$





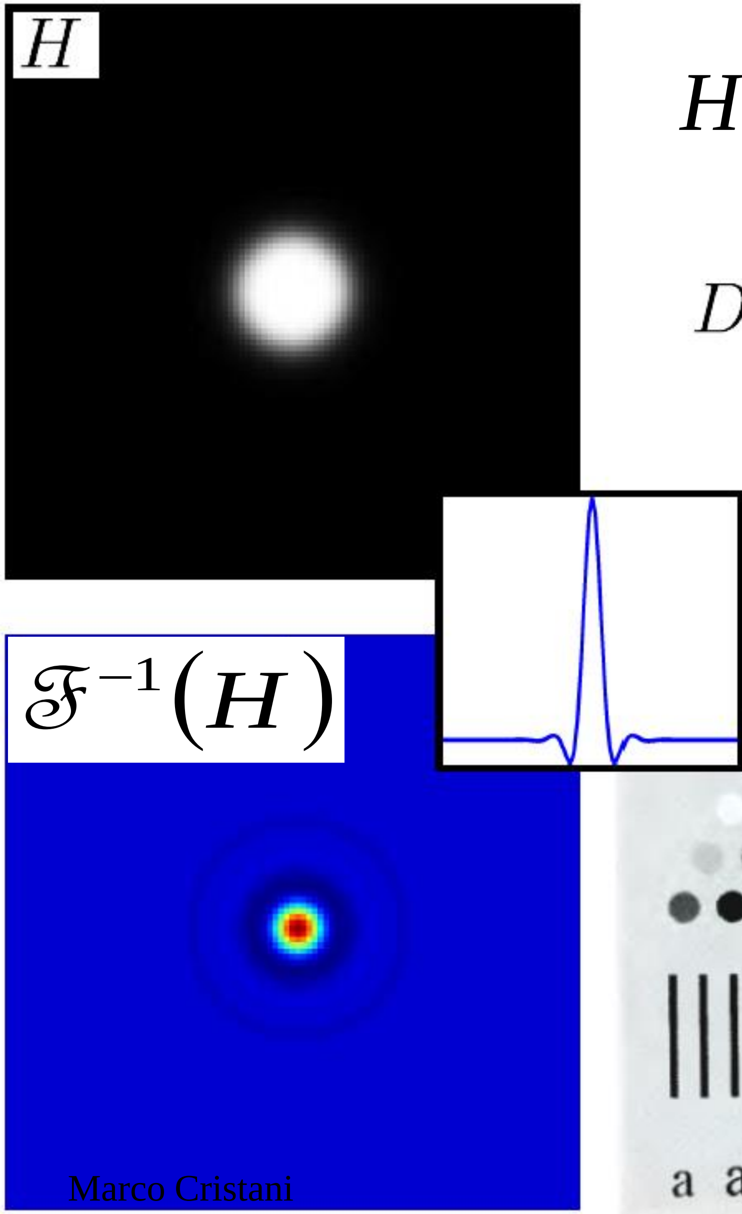
$$\mathscr{F}^{-1}(H)$$



n=1 n=2 n=5 n=20

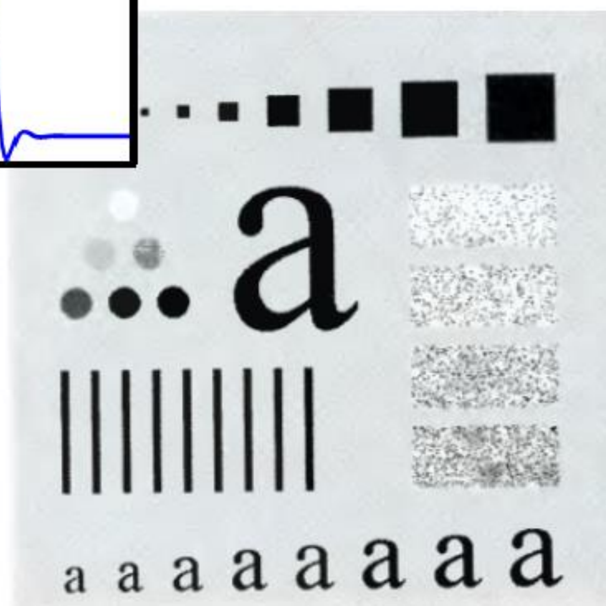
Vittc

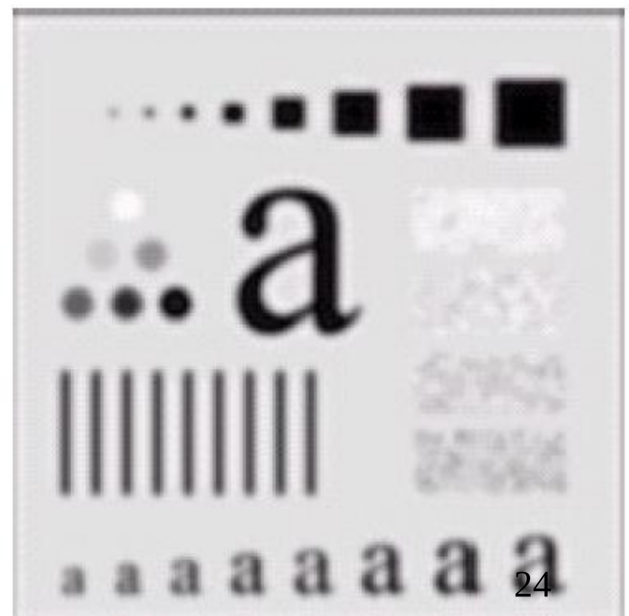
level
eases



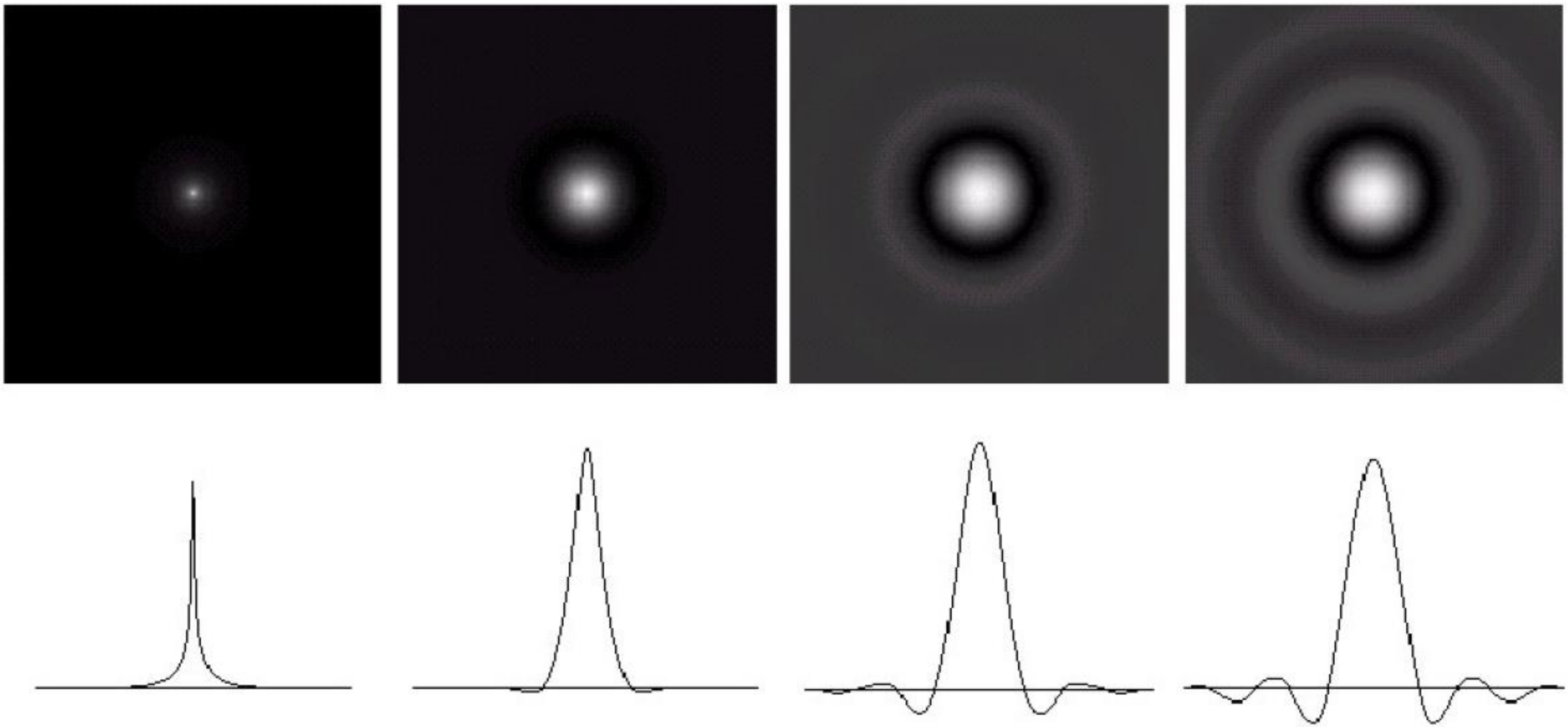
$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

$$D(u,v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$





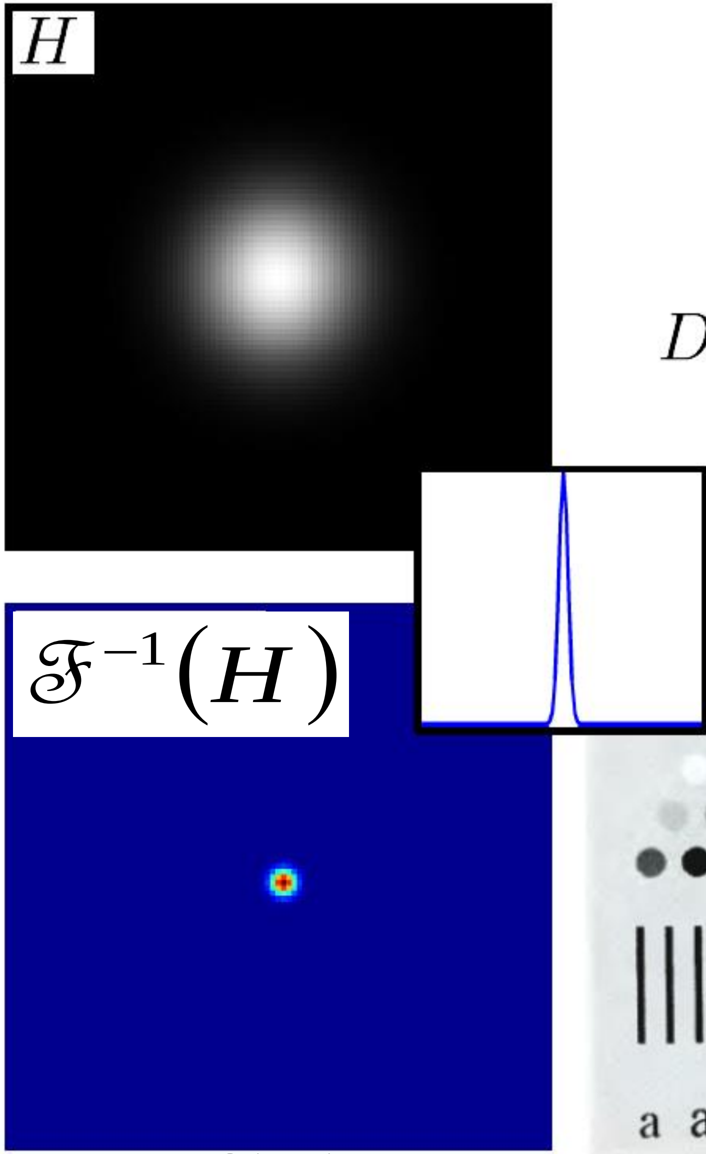
per n tendente all'infinito otteniamo il filtro passa basso ideale

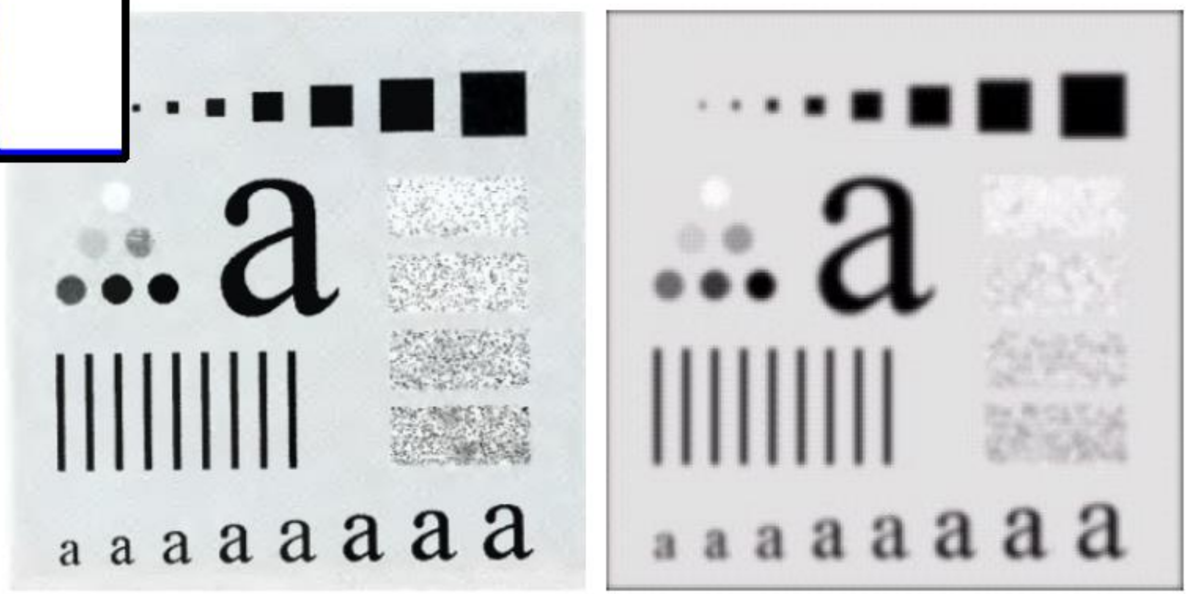


Filtro passa basso Gaussiano

$$H(u,v) = e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

$$D(u,v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$





- la TdF di una funzione Gaussiana è anch'essa Gaussiana (la dimostrazione impleca l'uso di calcolo differenziale)

$$F(u) = Ae^{-u/2\sigma^2} \qquad f(t) = \sqrt{2\pi}\sigma A e^{-2\pi^2\sigma^2 t^2}$$

oppure

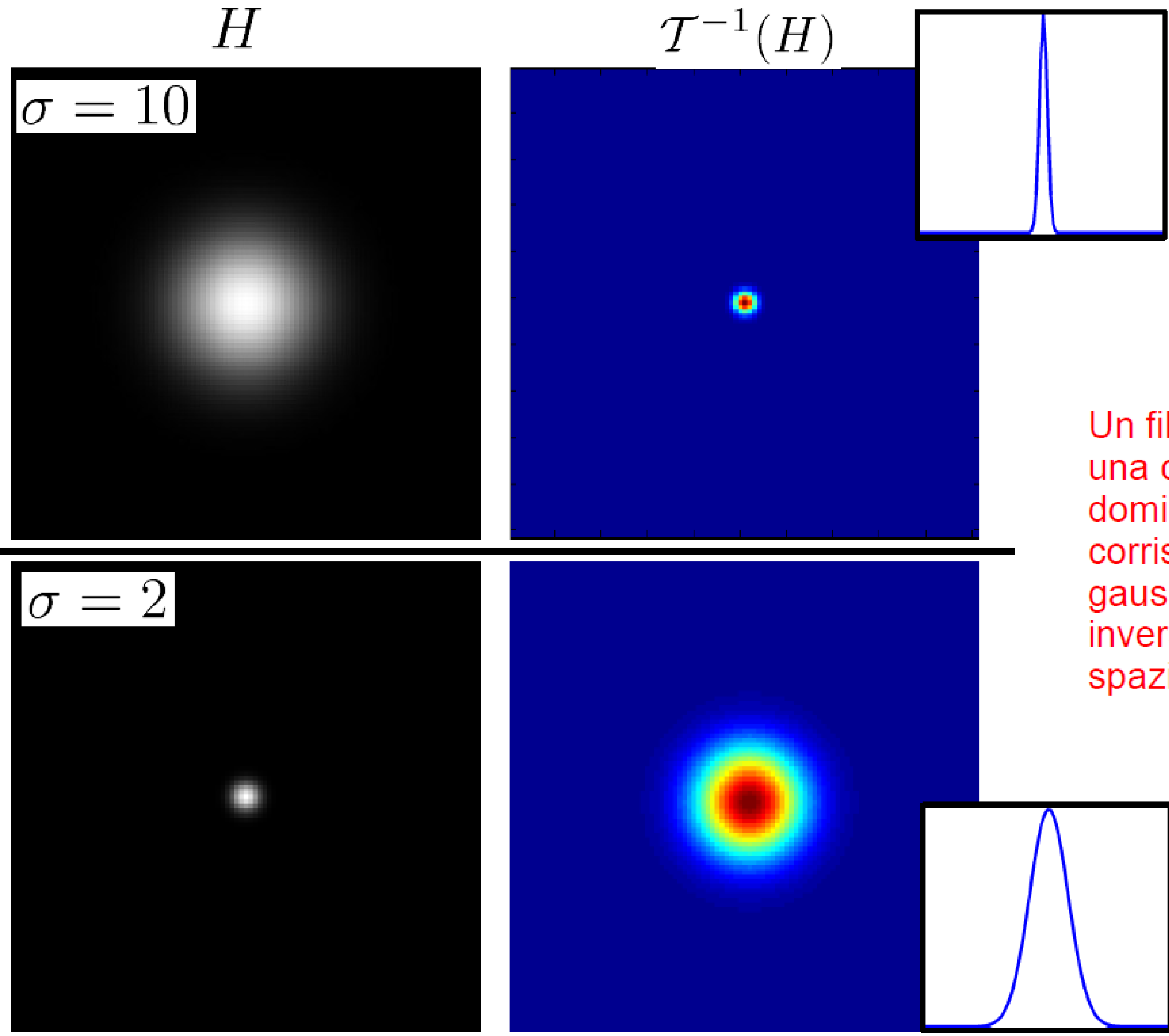
$$f(t) = Ae^{-t/2\sigma^2} \qquad F(u) = \sqrt{2\pi}\sigma A e^{-2\pi^2\sigma^2 u^2}$$

- Nella slide precedente, D_0 può essere sostituita con σ, l'effettiva deviazione standard della distribuzione Gaussiana
- In questo caso, la frequenza di taglio D_0 corrisponde alla deviazione standard σ
- Quando D(u,v)= σ l'intensità di taglio è 0.607, ossia il filtraggio crea un attenamento di quella frequenza del 60.7%

- Osservazione:

$$F(u) = Ae^{-u/2\sigma^2}$$

$$f(t) = \sqrt{2\pi}\sigma A e^{-2\pi^2\sigma^2 t^2}$$



Un filtro gaussiano con una certa scala nel dominio delle frequenze, corrisponde ad un filtro gaussiano con scala inversa nel dominio dello spazio.

Riassunto dei filtri passa-basso

- Ideale: brusca (= step) transizione in corrispondenza della frequenza di cut-off → fenomeno di Gibbs o di ringing

- Gaussiano: transizione di cut-off dolce. Il parametro σ determina la frequenza di cut-off.

- Butterworth: di ripidità variabile, e transizione smooth. La ripidità viene modellata dall'ordine del filtro. La frequenza di cut-off viene selezionata indipendentemente dall'ordine del filtro.

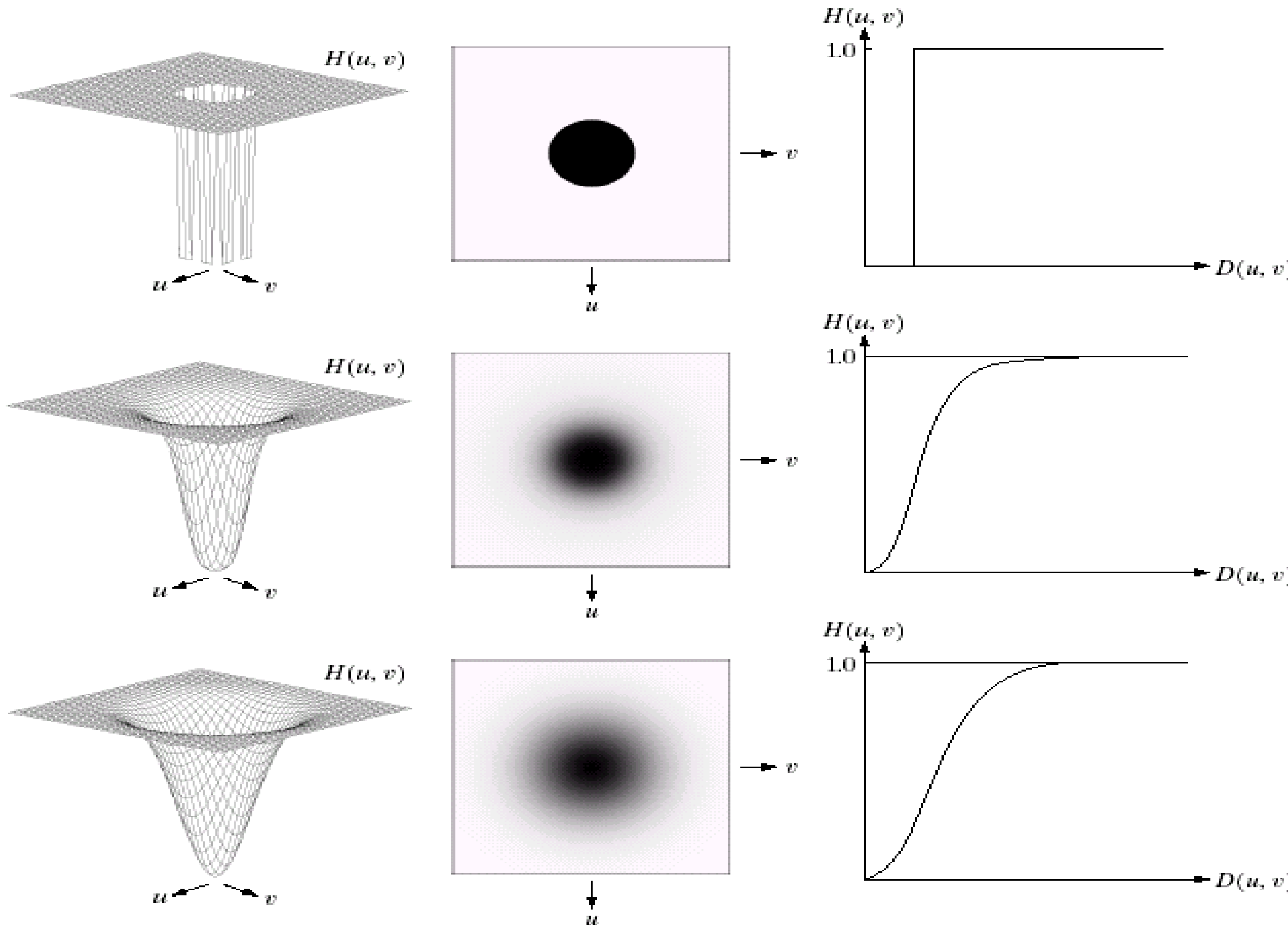
Filtri passa alto, PA

- Un filtro passa alto sopprime (blocca) le basse frequenze e lascia passare le alte frequenze. La costruzione di un filtro passa alto può essere eseguita come $H_{PA} = 1 - H_{PB}$ ← passa basso

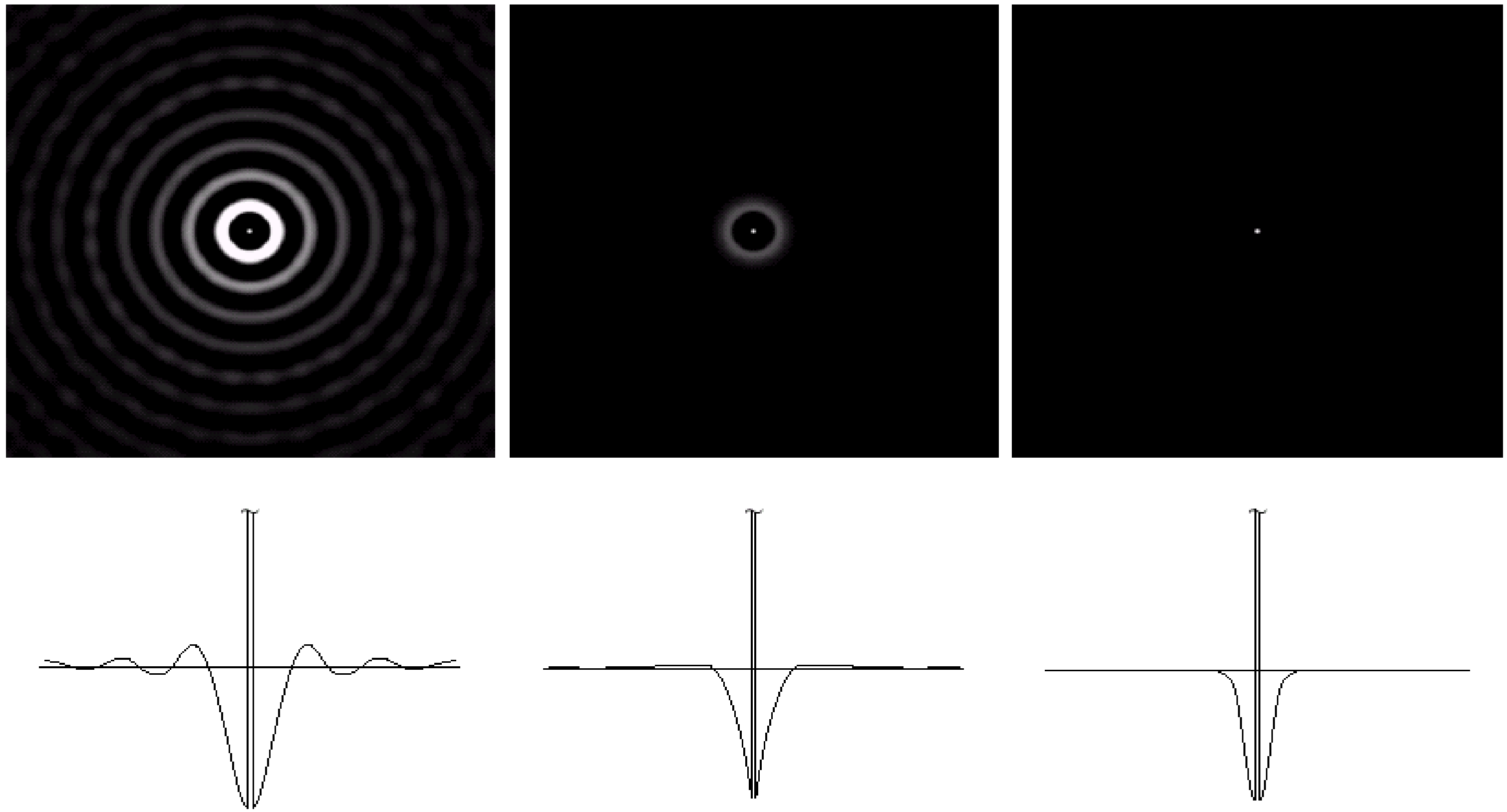
PA Ideale

PA di Butterworth

PA gaussiano



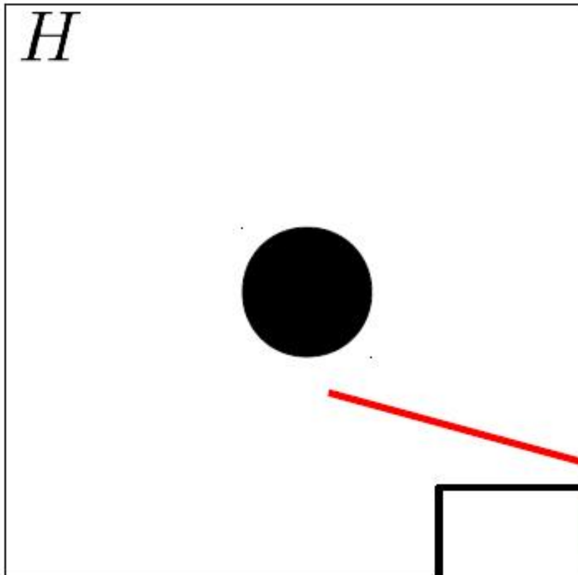
Rappresentazione spaziale dei filtri passa alto ideali, Butterworth and gaussiani



a b c

FIGURE 4.23 Spatial representations of typical (a) ideal, (b) Butterworth, and (c) Gaussian frequency domain highpass filters, and corresponding gray-level profiles.

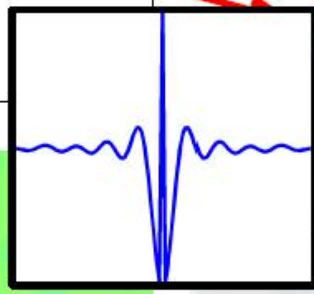
Filtro passa alto ideale



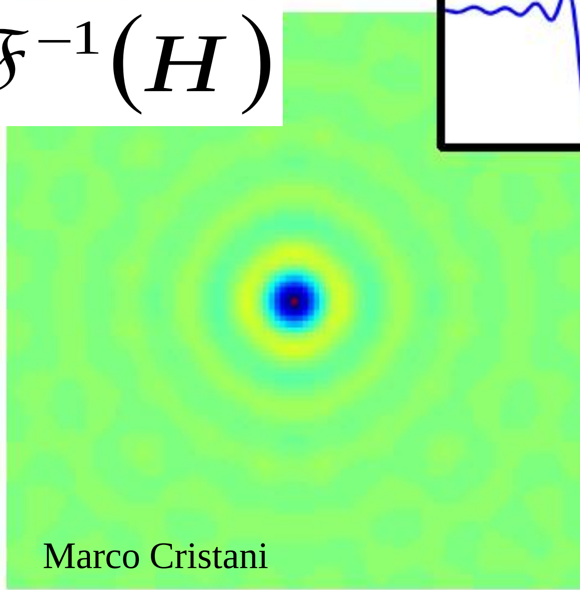
$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{se } D(u,v) \le D_0 \\ 1 & \text{se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

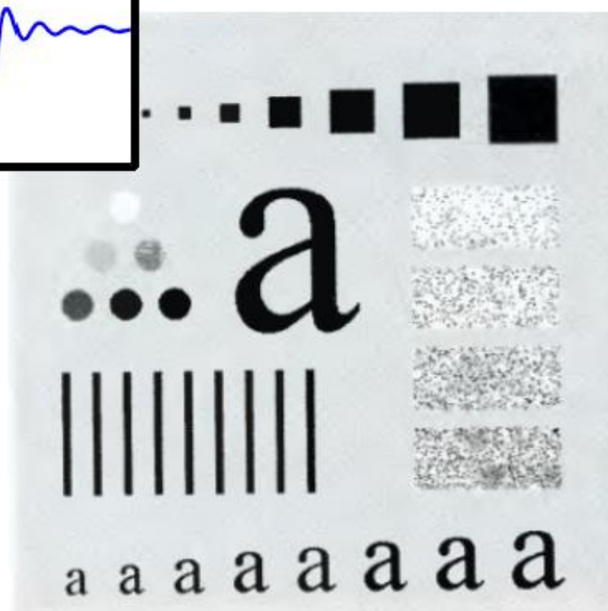
$$D(u,v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

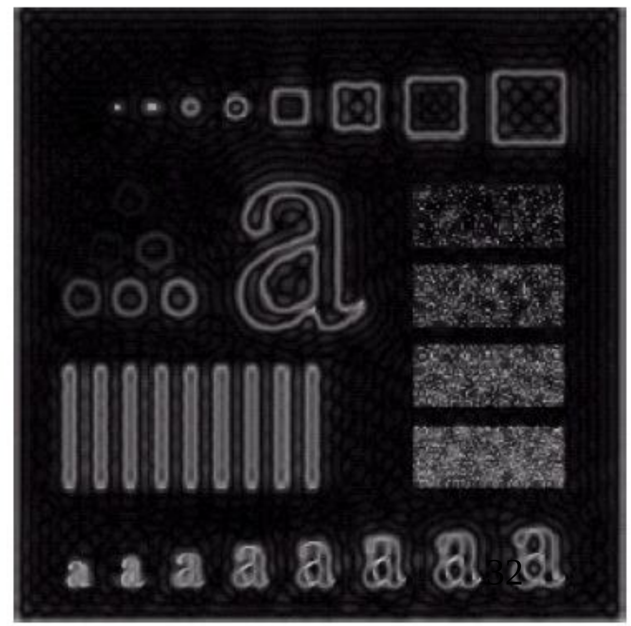
Solo le frequenze fuori dal cerchio di raggio D_0 vengono mantenute.



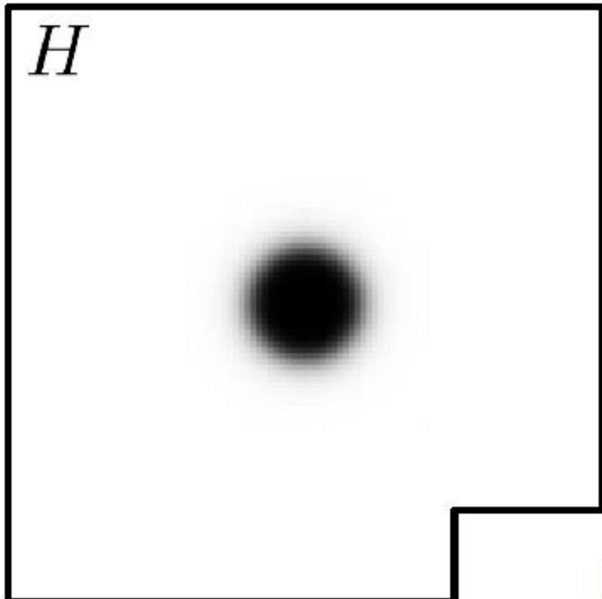
$\mathfrak{F}^{-1}(H)$







Filtro passa alto di Butterworth

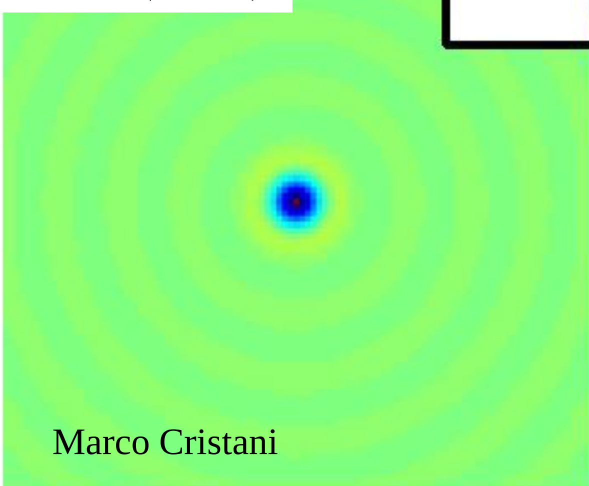


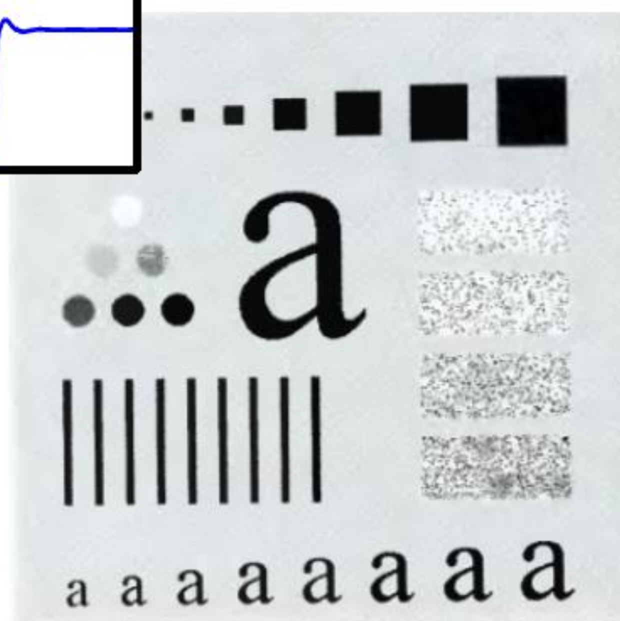
$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{-2n}}$$

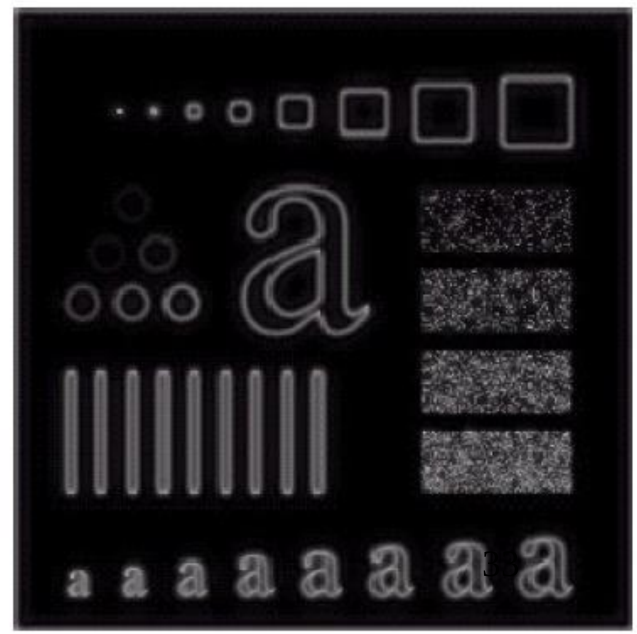
$$D(u,v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

Per n tendente ad infinito abbiamo il filtro passa alto ideale.

$\mathcal{F}^{-1}(H)$



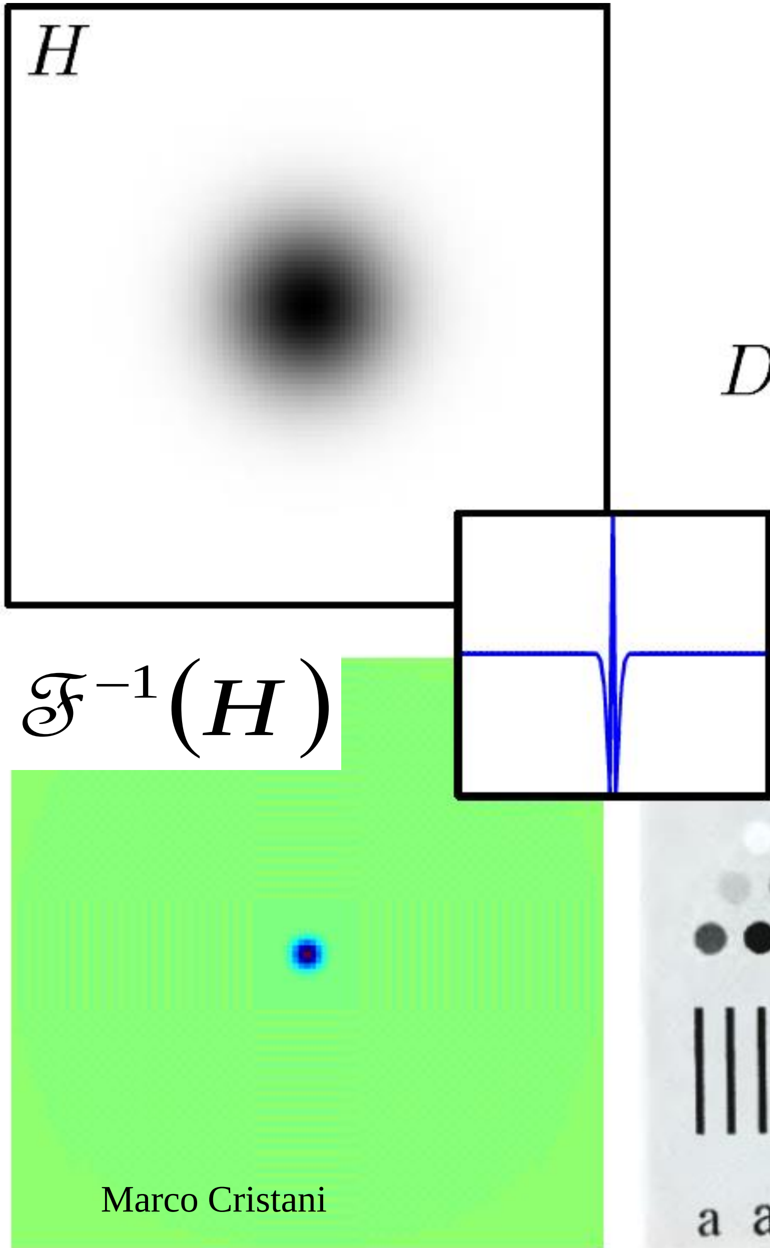


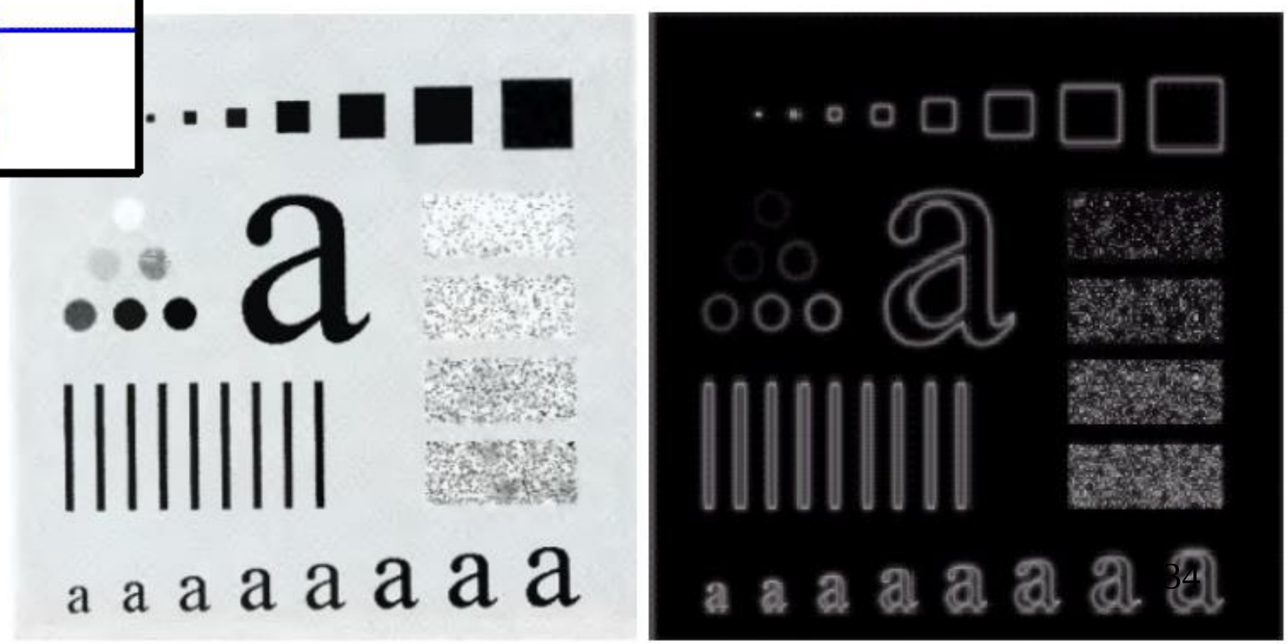


Filtro passa alto Gaussiano

$$H(u,v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

$$D(u,v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$



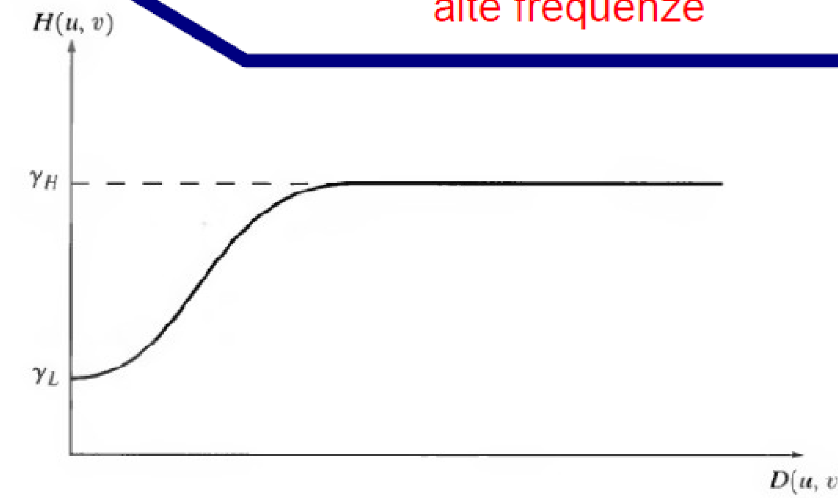


Filtri per enfatizzare le alte frequenze

$$H(u,v) = 1 + k\,H_{PA}(u,v)$$

filtro passa alto

contributo delle alte frequenze



FILTRO OMEOMORFO:
attenua contributo basse frequenze e aumenta quello delle alte frequenze

$$H(u,v) = (\gamma_H - \gamma_L)\left[1 - e^{-cD^2[u,v]/D_0^2}\right] + \gamma_L$$

Filtri passa banda ed ferma banda

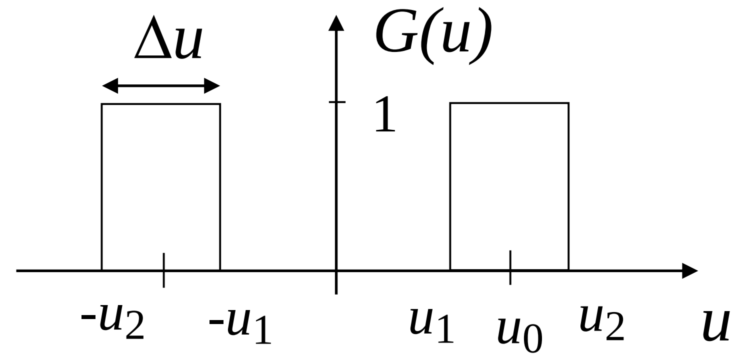
- Vediamo ora una classe di filtri che agiscono su una banda di frequenze anziché discriminare solo tra frequenze alte e basse.
- Un filtro passa banda sopprime tutte le frequenze al di fuori di un intervallo di frequenze specificato.
- Un filtro ferma banda viceversa sopprime tutte le frequenze nell'intervallo specificato.
- In modo simile a quanto visto per i filtri passa basso e alto, si può derivare un filtro passa banda da un filtro ferma banda (e viceversa) nel seguente modo:

$$H_{PBn} = 1 - H_{EBn}$$

Filtro passa-banda ideale 1D

- Mantenimento inalterato delle componenti in frequenza compresi tra u_1 e u_2, $u_1 < u_2$
- La funzione di trasferimento desiderata e`:

$$G(u) = \begin{cases} 1, & u_1 < |u| < u_2 \\ 0, & altrove \end{cases}$$



$$\Rightarrow G(u) = \Pi\left(\frac{u}{\Delta u}\right) * \left[\delta(u-u_0) + \delta(u+u_0)\right]$$

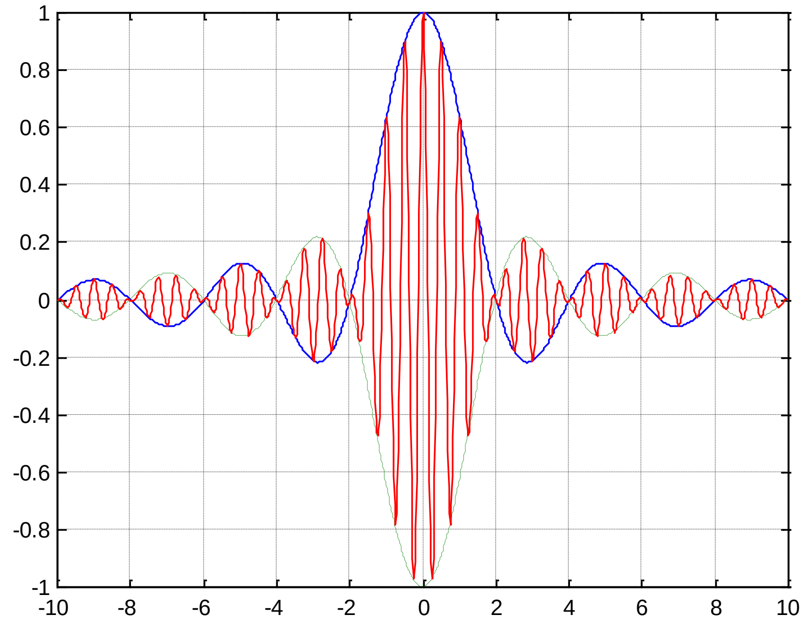
dove $u_0 = (u_1 + u_2)/2$ e $\Delta u = u_2 - u_1$

- La corrispondente risposta all'impulso è:

$$g(t) = 2\Delta u \frac{\sin(\pi t \Delta u)}{\pi t \Delta u} \cos(2\pi u_0 t)$$

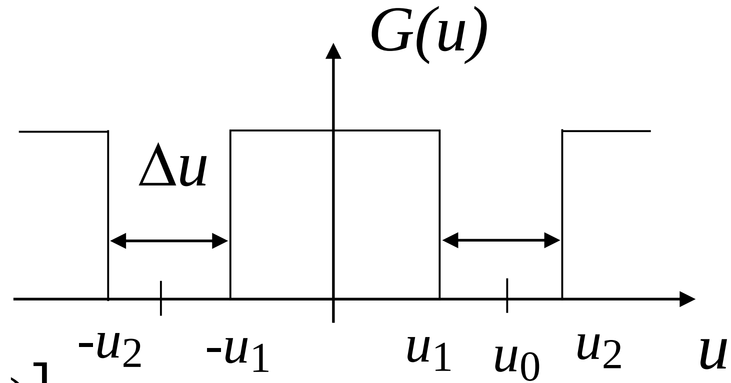
- Poiche` $\Delta u < u_0$, allora *g(t)* è un coseno modulato dal *sinc*
- Se u_0 è costante e $\Delta u \to 0$, allora si ottiene un coseno

g(t)



Filtro ideale ferma-banda

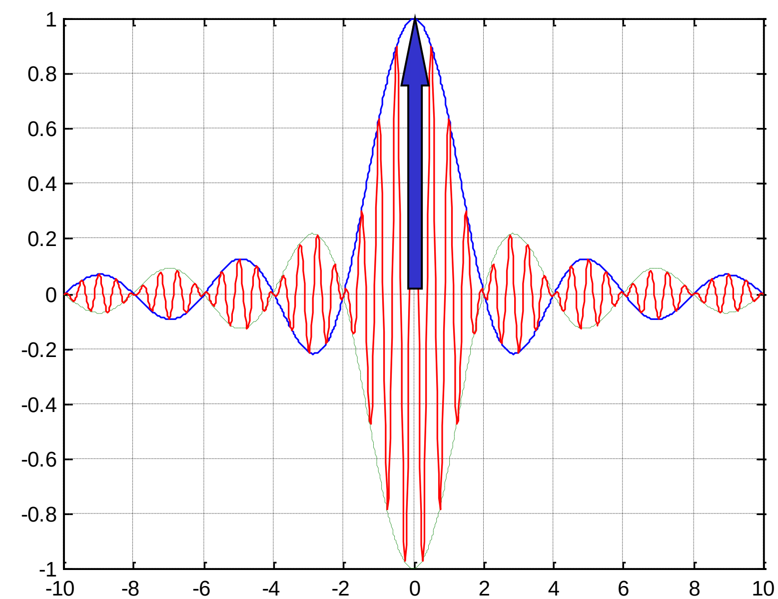
$$G(u) = \begin{cases} 0, & u_1 < |u| < u_2 \\ 1, & altrove \end{cases}$$



$$\Rightarrow G(u) = 1 - \Pi\left(\frac{u}{\Delta u}\right) * \left[\delta(u - u_0) + \delta(u + u_0)\right]$$

$$g(t) = \delta(t) - 2\Delta u \frac{\sin(\pi t \Delta u)}{\pi t \Delta u} \cos(2\pi u_0 t)$$

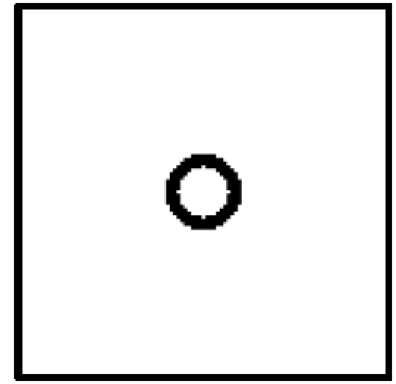
g(t)



$$D(u,v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

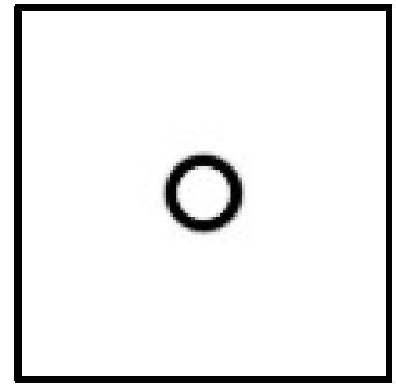
IDEALE

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{se } |D(u,v) - D_0| \leq W/2 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



BUTTERWORTH

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D(u,v)W}{D^2(u,v) - D_0^2}\right)^{2n}}$$



GAUSSIANO

$$H(u,v) = 1 - e^{-\left(\frac{D^2(u,v) - D_0^2}{D(u,v)W}\right)^2}$$