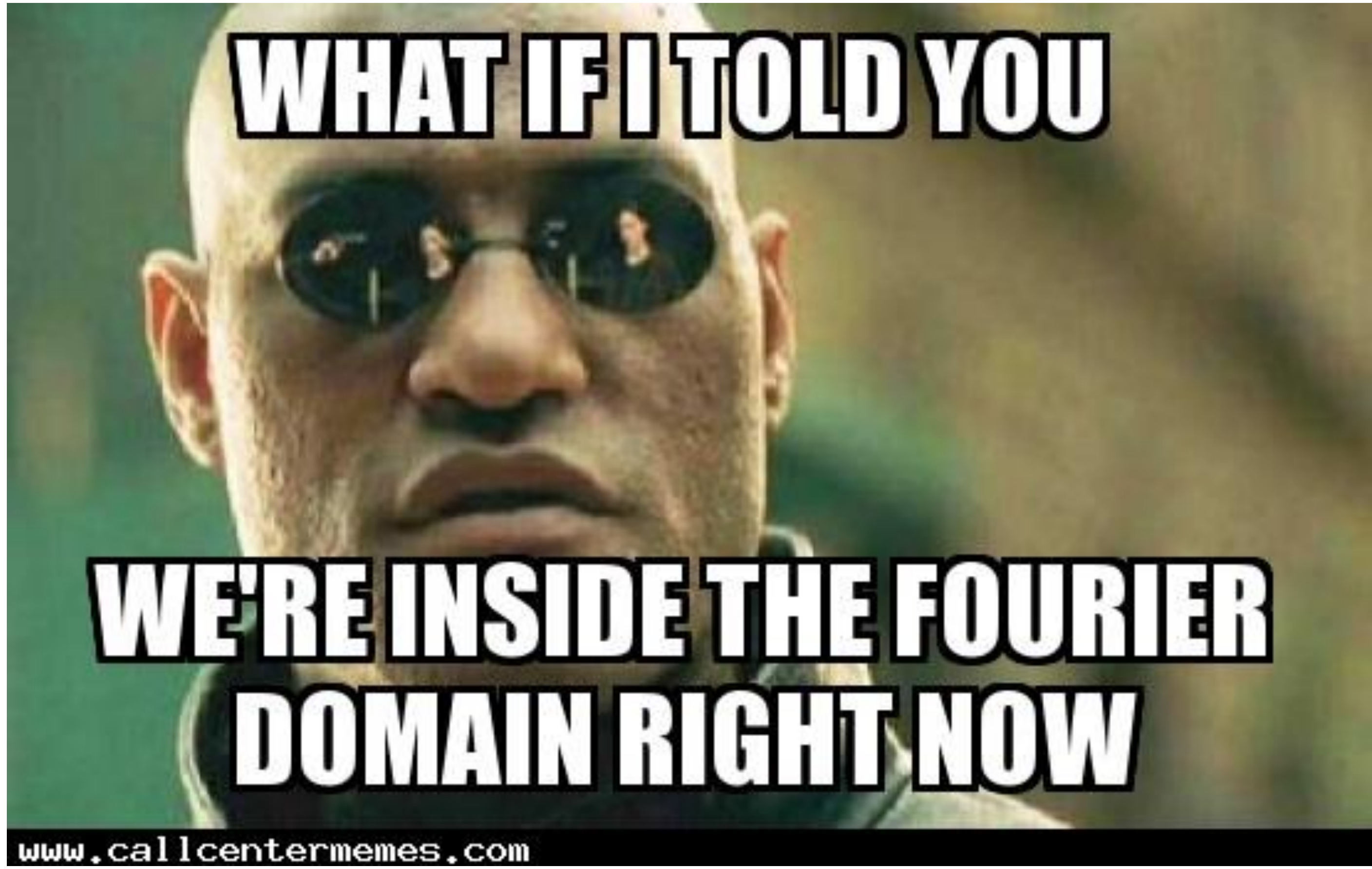
Dipartimento di Informatica
Università di Verona
A.A. 2018-19

Elaborazione dei Segnali e Immagini

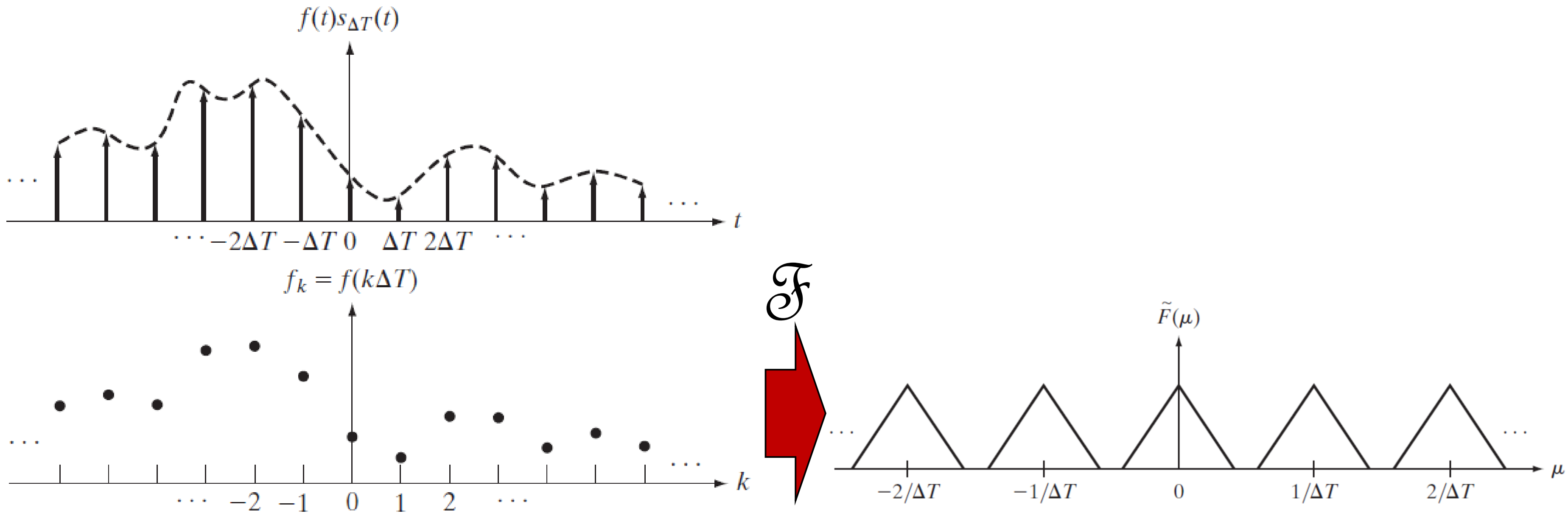
Analisi di Fourier
-
Trasformata di Fourier discreta

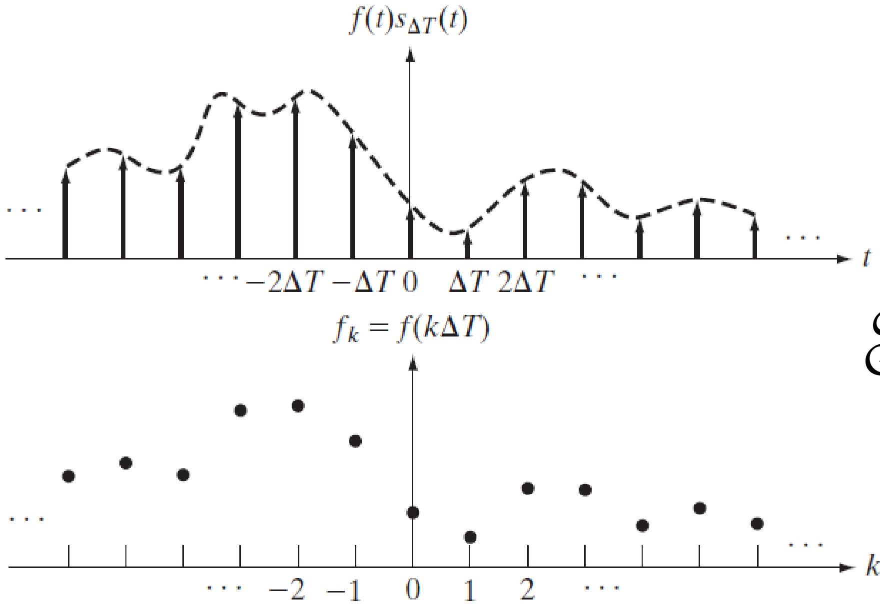
Gonzalez Cap.4.4



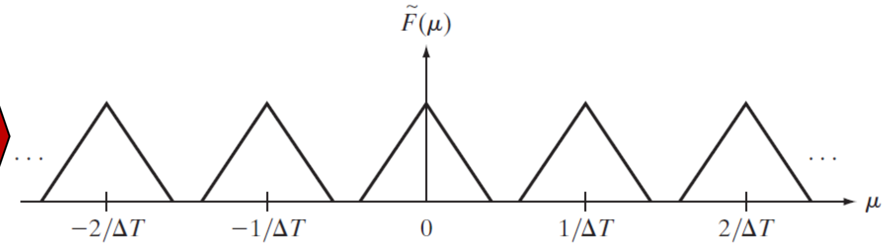
TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA

- (DTFT)La trasformata di Fourier di un segnale reale continuo *f(t)* di dominio illimitato e non periodico, campionato nel tempo con periodo di campionamento ΔT, è una funzione continua, periodica (di periodo $1/\Delta T$) anch'essa di dominio illimitato





$\mathscr{F}$



$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) \quad \Rightarrow \quad \tilde{F}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

- (Un) problema di questa formulazione: l'espressione analitica dello spettro suppone che io conosca la TdF teorica *F* del segnale di partenza!!! Raramente accade questo!

- Voglio trovare una formulazione della trasformata di Fourier per funzioni campionate più a basso livello, che non richieda a priori la conoscenza della forma analitica della TdF

$$\mathfrak{F}\left(\tilde{f}(t)\right) = \tilde{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} \delta(t - n\Delta T) dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t - n\Delta T) dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t - n\Delta T)dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n\Delta T)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta T)e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$

- Quindi ho due formulazioni, equivalenti, per la DTFT:

$$\tilde{F}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$

- La seconda formulazione è costruttiva, bottom-up, perché mi permette di costruire una rappresentazione spettrale a partire dai campioni della funzione originale *f(t)*

$$\tilde{F}(\mu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$

- La prima formulazione era più chiara per farmi capire che la trasformata di Fourier di una funzione campionata mi genera delle repliche dello spettro originale *F(μ)*

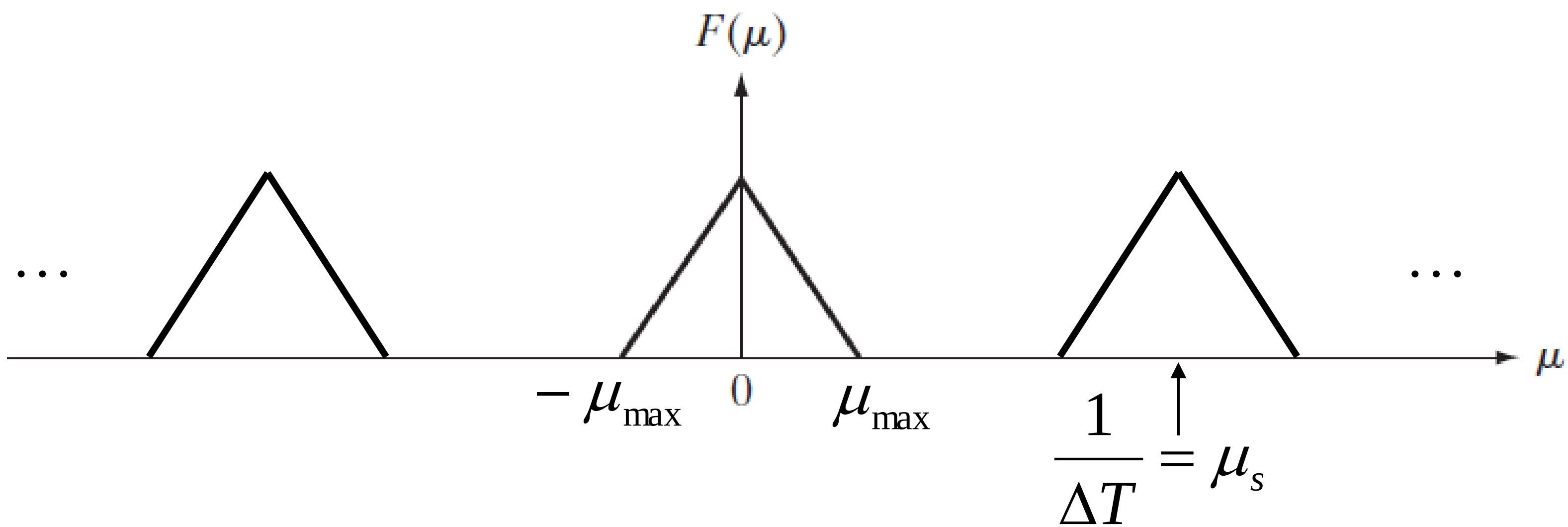
$$\tilde{F}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

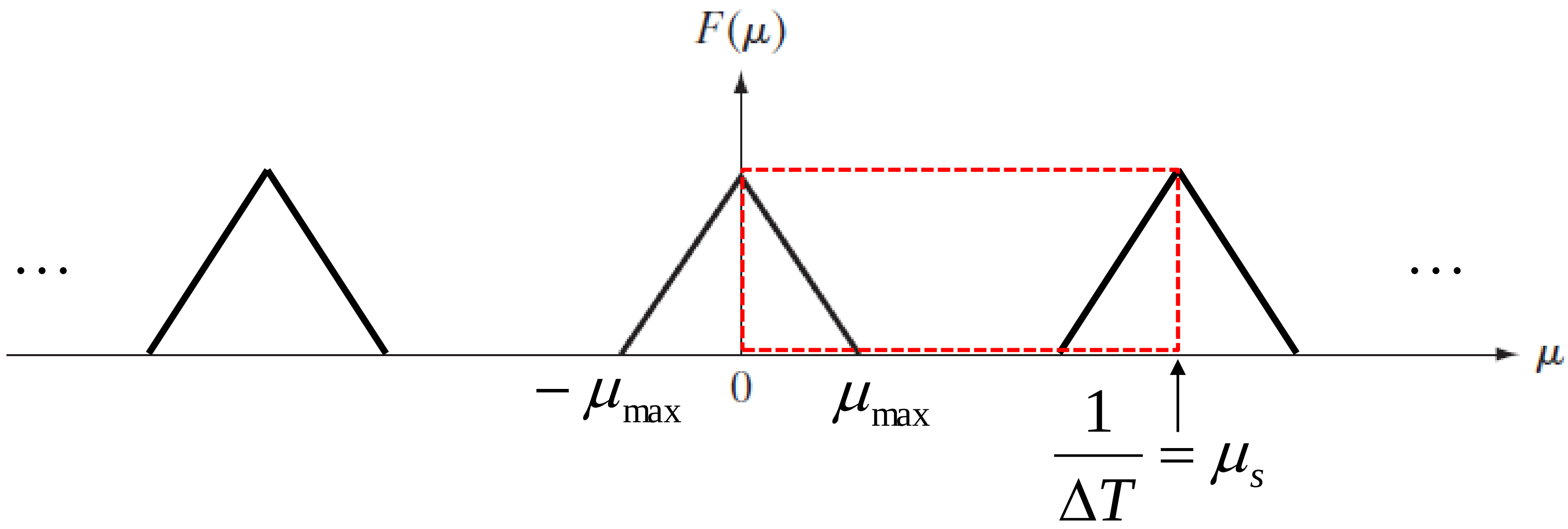
- Nonostante la sua espressività, l’espressione

$$\tilde{F}(\mu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$

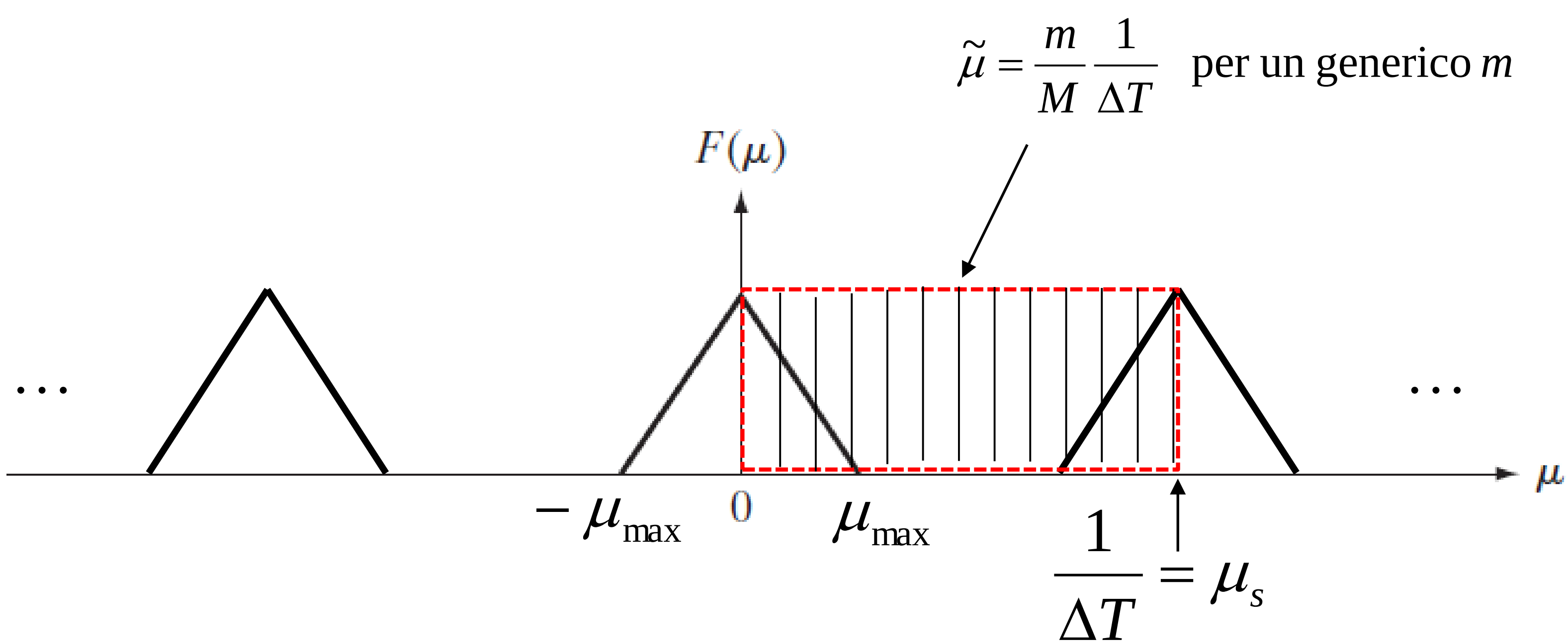
deve essere rivista, campionando anche il dominio spettrale (mai campionato finora), per poterla ospitare su pc

- Qual’è la porzione di spettro che mi interessa catturare, in modo da poter fare la ricostruzione?



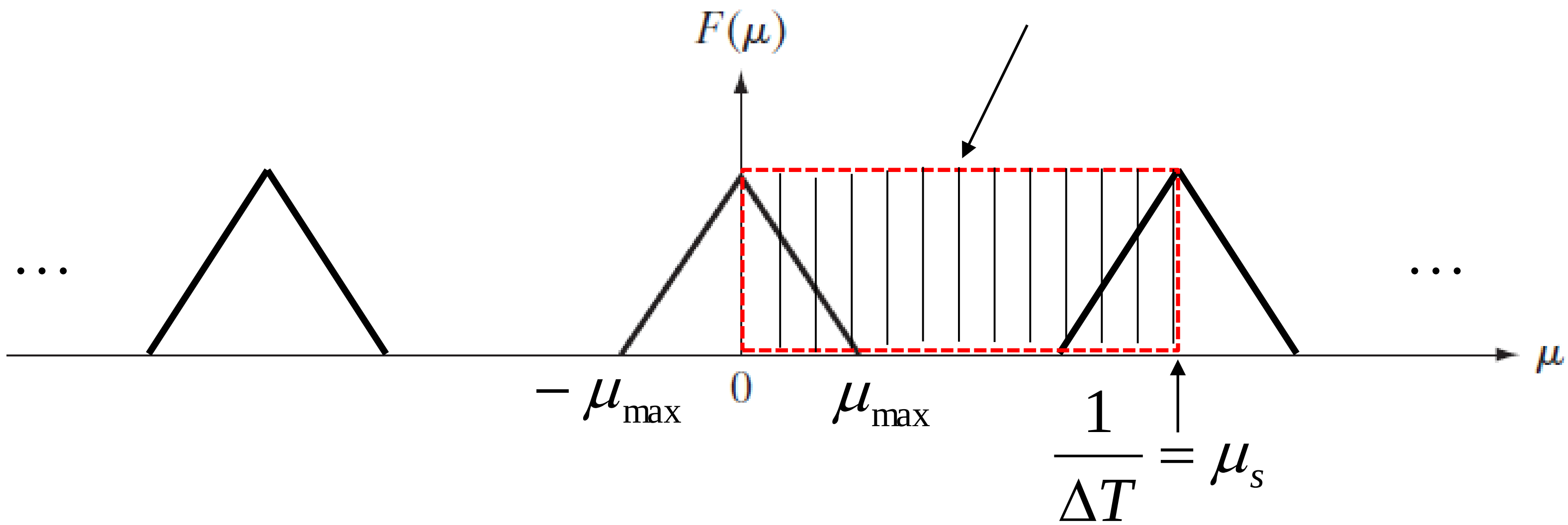


- Mi interessa una singola copia dello spettro (che mi permette in linea teorica di ricostruire il segnale)
- Per comodità nei conti (per evitare indici negativi), decido di prendere l'intervallo frequenziale da 0 a $\frac{1}{\Delta T} = \mu_s$
- Decido inoltre di prendere in considerazione M campioni



- Pertanto $\tilde{\mu} = \frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}$ $\qquad m = 0,\ldots, M-1$

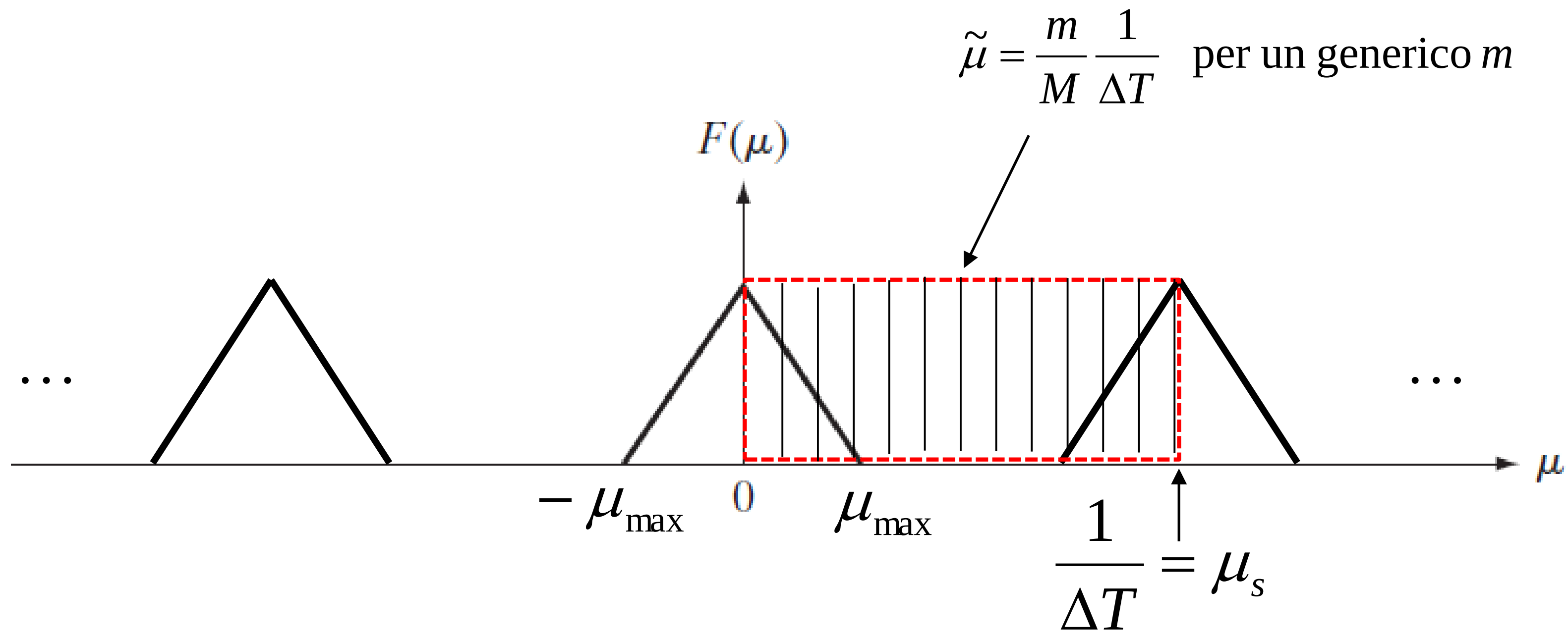
dove $\frac{m}{M} \in \left[0, 1 - \frac{1}{M}\right]$



$$\tilde{F}(\mu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T} \qquad \tilde{\mu} = \frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T} \qquad m = 0,\ldots,M-1$$

- Calcolo la DTFT su questi M campioni

$$\tilde{F}(\tilde{\mu}) = \tilde{F}\left(\frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-j2\pi\frac{m}{M}\frac{1}{\cancel{\Delta T}}n\cancel{\Delta T}} \qquad m = 0,\ldots,M-1$$



$$\tilde{F}(\tilde{\mu}) = \tilde{F}\left(\frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-j2\pi\frac{m}{M}n} \qquad m = 0,\dots,M-1$$

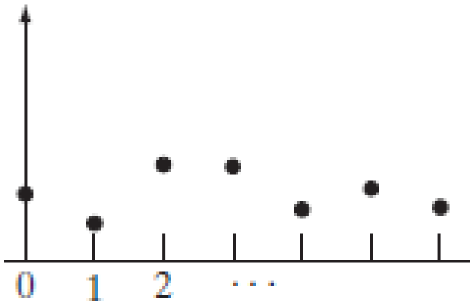
- A questo punto devo far fronte al fatto che non ho campioni infiniti del mio segnale di partenza. Per semplicità, assumo di averne M

- Giungo così alla forma finale della trasformata di Fourier discreta, ovvero

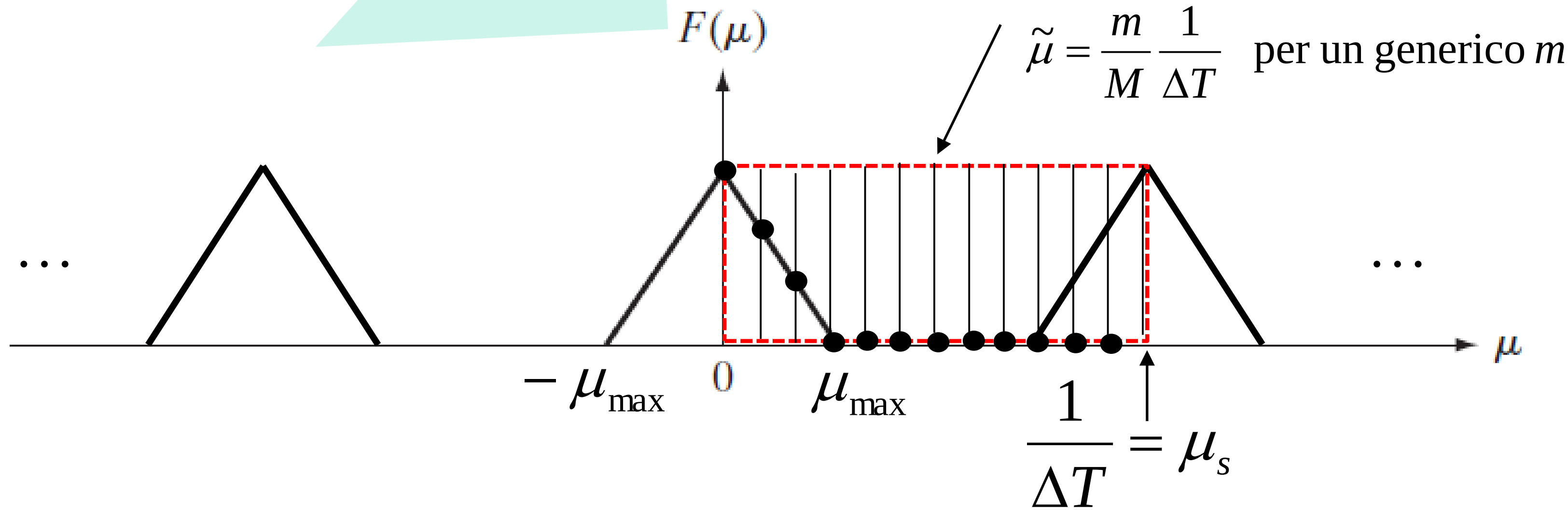
$$\tilde{F}(\tilde{\mu}) = \tilde{F}\left(\frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\frac{m}{M}n} \qquad m = 0,\ldots, M-1$$

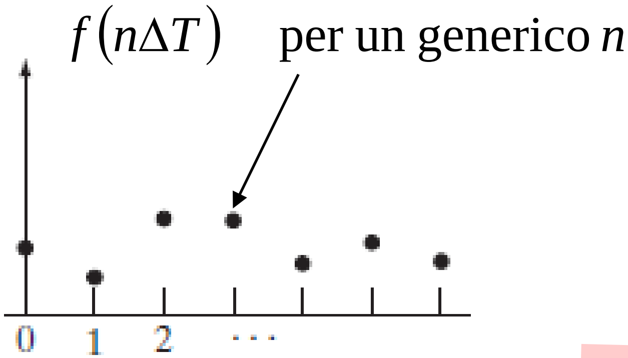
- Si dimostra (difficile!) che questa riduzione di numero di campioni nel tempo non inficia la bontà della stima, ovvero
- Nei punti frequenziali $\frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}$ $m = 0,\ldots, M-1$ che partizionano l'intervallo $\left[0, \frac{1}{\Delta T}\right[$

la Trasformata di Fourier discreta è esatta per il segnale che ho ritagliato!



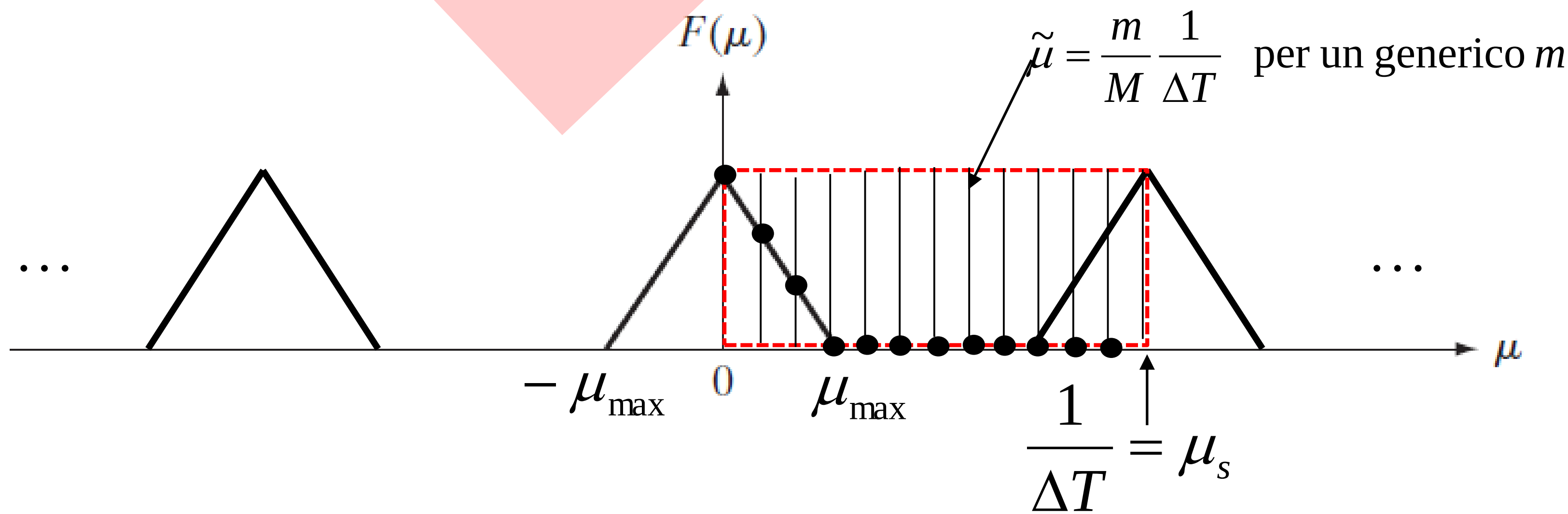
$$\tilde{F}\left(\frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}\right)=F\left(\frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}\right)=F_m=\sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\frac{m}{M}n}$$





TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA INVERSA

$$\tilde{f}(n\Delta T) = f(n\Delta T) = f_n = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi \frac{m}{M} n}$$



Ora potete:

- **Fare analisi in frequenza di un segnale**
- **Filtraggi**
- ***tutto***