Lezione 18

Minimizzazione dei costi

Minimizzazione dei costi

- Un impresa minimizza i costi se produce un qualsiasi livello di output dato, $y \geq 0$, al costo totale più basso possibile.
- $c(y)$ denota il più basso costo totale possibile per l'impresa per produrre y unità di output.
- $c(y)$ è la funzione del costo totale dell'impresa.

Minimizzazione dei costi

- Se l'impresa affronta prezzi dati per gli input, $w = (w_1,w_2,\ldots,w_n)$, la funzione del costo totale può essere scritta come:

$$c(w_1,\ldots,w_n,y)$$

Il problema di min. dei costi

- Si consideri un'impresa che usa due input per ottenere un output.
- La funzione di produzione è
  $y = f(x_1,x_2)$.
- Si consideri il livello di output $y \geq 0$ come dato.
- Dati i prezzi dei fattori w_1 e w_2, il costo del paniere di fattori (x_1,x_2) è $w_1x_1 + w_2x_2$.

Il problema di min. dei costi

- Dati w_1, w_2 e y, il problema di min. dei costi per l'impresa è:

$$\min_{x_1,x_2\geq 0} w_1x_1 + w_2x_2$$

con il vincolo $f(x_1,x_2) = y.$

Domanda condizionata dei fattori

- I livelli di $x_1^*(w_1,w_2,y)$ e $x_2^*(w_1,w_2,y)$ scelti sono la domanda condizionata o domanda derivata dei fattori 1 e 2.
- Il costo totale più basso possibile per produrre y unità di output è dunque

$$c(w_1,w_2,y) = w_1x_1^*(w_1,w_2,y) + w_2x_2^*(w_1,w_2,y).$$

Rette di isocosto

- Dati w_1, w_2 e y, come si individua il paniere di input che costa meno? E come si trova la funzione di costo totale?
- Una curva che contiene tutte le combinazioni di fattori che costano lo stesso ammontare è detta isocosto. Per es., dati w_1 e w_2, l'isocosto \$100 ha equazione:

$$w_1x_1 + w_2x_2 = 100.$$

Rette di isocosto

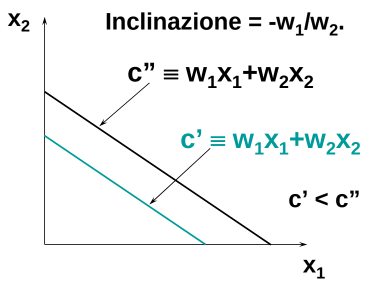
- Quindi, dati w_1 e w_2, l'equazione dell'isocosto \$c è:

$$w_1x_1 + w_2x_2 = c$$

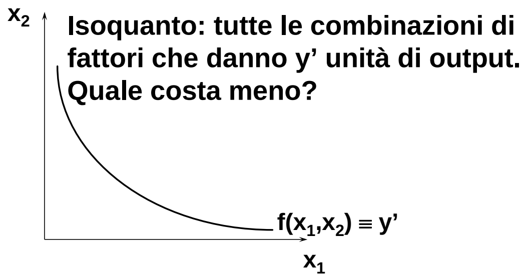
$$\rightarrow \quad x_2 = -\frac{w_1}{w_2}x_1 + \frac{c}{w_2}.$$

- L'inclinazione è - w_1/w_2.

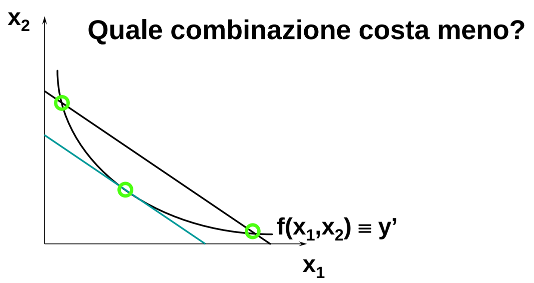
Rette di isocosto



Isoquanto relativo all'output y'



Il problema di min. dei costi



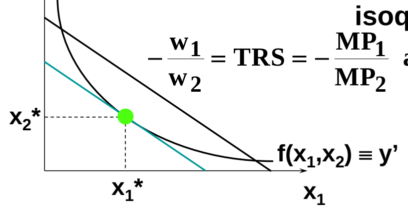
Il problema di min. dei costi

Per una soluzione interiore si ha:

(a) $f(x_1^*, x_2^*) = y'$ **e**

(b) incl. dell'isocosto = incl. dell' isoquanto $\rightarrow$

$$-\frac{w_1}{w_2} = \mathrm{TRS} = -\frac{MP_1}{MP_2} \text{ at } (x_1^*, x_2^*).$$



N.B. TRS = saggio tecnico di sostituzione

Esempio: Cobb-Douglas

- Si consideri una funzione di produzione Cobb-Douglas

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}.$$

- I prezzi dei fattori siano w_1 e w_2.
- Quali saranno le funzioni di domanda condizionata dei fattori?

Esempio: Cobb-Douglas

Con la combinazione di fattori (x_1*,x_2*) che minimizza il costo di produrre y unità di output si ha:

(a) $$y = (x_1^*)^{1/3}(x_2^*)^{2/3} \quad \text{e}$$

(b)

$$-\frac{w_1}{w_2} = -\frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} = -\frac{(1/3)(x_1^*)^{-2/3}(x_2^*)^{2/3}}{(2/3)(x_1^*)^{1/3}(x_2^*)^{-1/3}} = -\frac{x_2^*}{2x_1^*}.$$

Esempio: Cobb-Douglas

(a) $y = (x_1^*)^{1/3}(x_2^*)^{2/3}$ (b) $\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2^*}{2x_1^*}$.

Da (b), $x_2^* = \frac{2w_1}{w_2} x_1^*$.

Sostituendo in (a) si ottiene

$$y = (x_1^*)^{1/3}\left(\frac{2w_1}{w_2}x_1^*\right)^{2/3} = \left(\frac{2w_1}{w_2}\right)^{2/3} x_1^*.$$

→ $x_1^* = \left(\frac{w_2}{2w_1}\right)^{2/3} y$ **Domanda condizionata dell'input 1.**

Esempio: Cobb-Douglas

Da $x_2^* = \frac{2w_1}{w_2} x_1^*$ **e** $x_1^* = \left(\frac{w_2}{2w_1}\right)^{2/3} y$

$$x_2^* = \frac{2w_1}{w_2}\left(\frac{w_2}{2w_1}\right)^{2/3} y = \left(\frac{2w_1}{w_2}\right)^{1/3} y$$

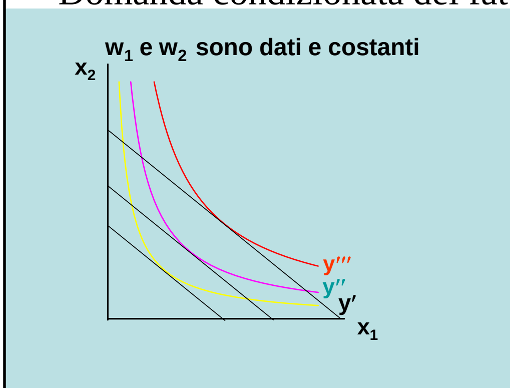
Domanda condizionata del fattore 2.

Esempio: Cobb-Douglas

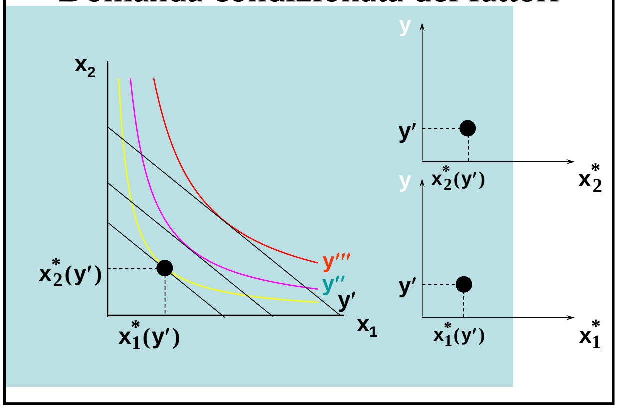
Quindi la combinazione di fattori meno costosa che consente di ottenere y unità di output è:

$$\left(x_1^*(w_1, w_2, y), x_2^*(w_1, w_2, y)\right) = \left(\left(\frac{w_2}{2w_1}\right)^{2/3} y, \left(\frac{2w_1}{w_2}\right)^{1/3} y\right).$$

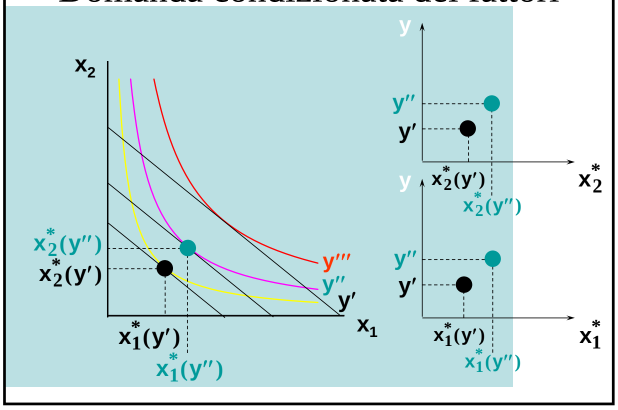
Domanda condizionata dei fattori



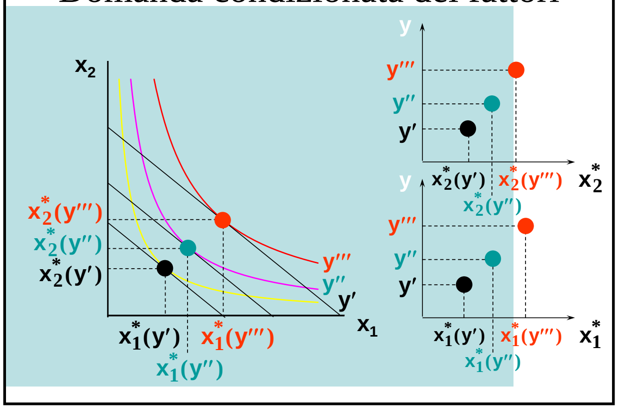
Domanda condizionata dei fattori



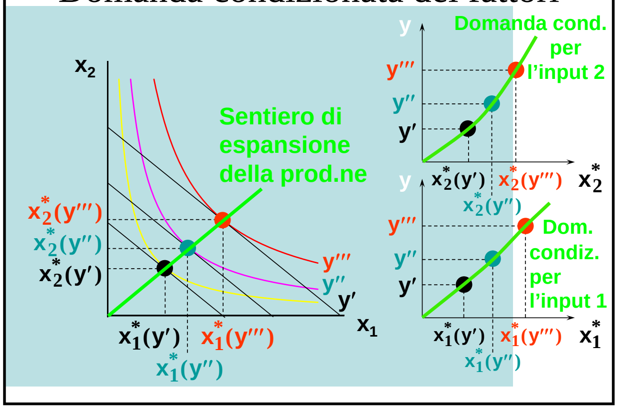
Domanda condizionata dei fattori



Domanda condizionata dei fattori



Domanda condizionata dei fattori



Sentiero di espansione

- È il luogo dei punti di tangenza tra una famiglia di isoquanti ed un fascio di isocosti.
- La sua forma dipende dalla funzione di produzione: es. ad un certo livello di produzione potrebbe essere opportuno usare una quantità maggiore di un fattore e minore di un altro.

Esempio: Cobb-Douglas

La funzione di costo totale è:

$$c(w_1,w_2,y) = w_1 x_1^*(w_1,w_2,y) + w_2 x_2^*(w_1,w_2,y)$$

$$= w_1\left(\frac{w_2}{2w_1}\right)^{2/3} y + w_2\left(\frac{2w_1}{w_2}\right)^{1/3} y$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} w_1^{1/3} w_2^{2/3} y + 2^{1/3} w_1^{1/3} w_2^{2/3} y$$

$$= 3\left(\frac{w_1 w_2^2}{4}\right)^{1/3} y.$$

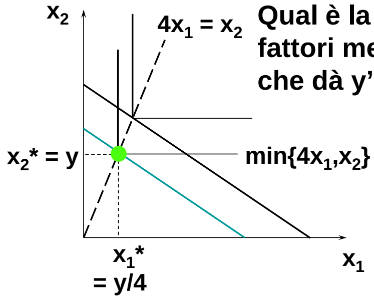
Esempio: perfetti complementi

- Es. la funzione di produzione è:

$$y = \min\{4x_1, x_2\}.$$

- I prezzi degli input w_1 e w_2 sono dati.
- Quali sono le funzioni di domanda condizionata degli input 1 e 2?
- Qual è la funzione di costo totale?

Esempio: perfetti complemeti



Qual è la combinaz. di fattori meno costosa che dà y' unità di output?

Esempio: perfetti complementi

La funzione di produzione è

$$y = \min\{4x_1, x_2\}$$

E le funzioni di domanda condizionata sono

$$x_1^*(w_1, w_2, y) = \frac{y}{4} \quad \text{and} \quad x_2^*(w_1, w_2, y) = y.$$

Quindi la funzione del costo totale è

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, y)$$

$$= w_1 \frac{y}{4} + w_2 y = \left(\frac{w_1}{4} + w_2\right) y.$$

Costo totale medio

- Per livelli positivi di output y, il costo totale medio per produrre y unità è

$$AC(w_1, w_2, y) = \frac{c(w_1, w_2, y)}{y}.$$

Rendimenti di scala e costo medio

- Il tipo di rendimenti di scala determina come il costo di produzione medio cambia al variare del livello di produzione.
- La nostra impresa produce y' unità di output.
- Come cambia il costo medio se produce 2y' unità di output?

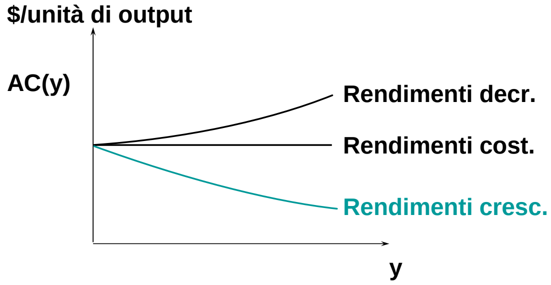
Rendimenti di scala e costo medio

- Se ha rendimenti di scala costanti, raddoppiare il livello di output da y' a 2y' richiede il raddoppio delle quantità di fattori impiegati.
- Il costo totale di produzione raddoppia.
- Il costo medio non cambia.

Rendimenti di scala e costo medio

- Se i rendimenti di scala sono decrescenti (crescenti), raddoppiare l'output da y' a 2y' richiede più (meno) del doppio dei fattori impiegati.
- Il costo totale di produzione è più (meno) del doppio.
- Il costo medio aumenta (diminuisce).

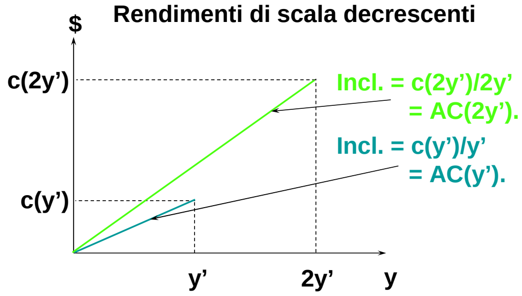
Rendimenti di scala e costo medio



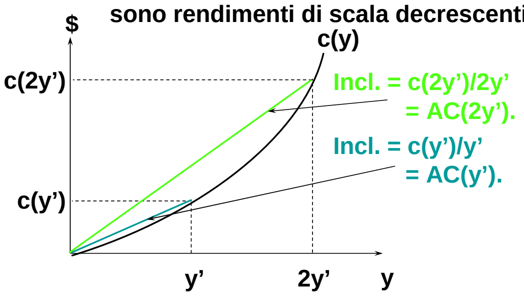
Rendimenti di scala e costo totale

- Quali implicazioni ha tutto questo sulla forma della funzione del costo totale?

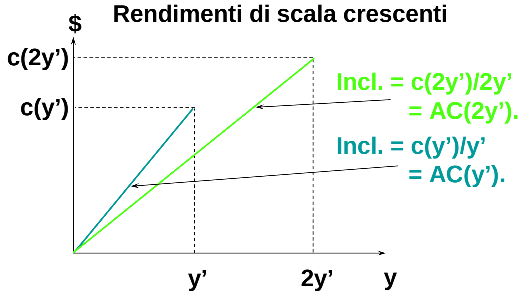
Rendimenti di scala e costo totale



Rendimenti di scala e costo totale

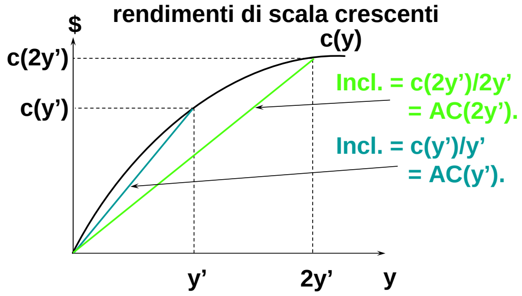


Rendimenti di scala e costo totale



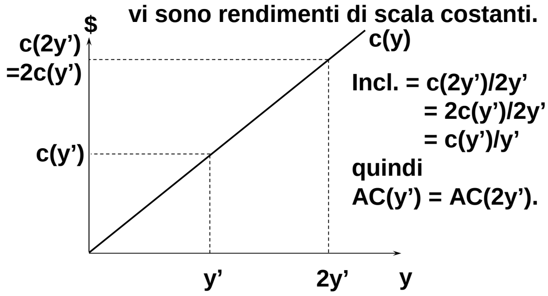
Rendimenti di scala e costo totale

Il costo medio cala con y se vi sono rendimenti di scala crescenti



Rendimenti di scala e costo totale

Il costo medio è costante quando vi sono rendimenti di scala costanti.



Costi di breve e lungo periodo

- Nel lungo periodo un’impresa può cambiare il livello di qualsiasi fattore.
- Supponiamo che l’input 2 sia x_2’ unità e non possa cambiare.
- Che differenza c’è fra il costo totale di breve periodo per produrre y unità di output e quello di lungo periodo per produrre lo stesso output?

Costi di breve e lungo periodo

- Il problema di min dei costi di lungo periodo è $\min_{x_1,x_2\geq 0} w_1x_1 + w_2x_2$
  con il vincolo $f(x_1,x_2) = y.$
- Il problema di min dei costi di breve periodo è $\min_{x_1\geq 0} w_1x_1 + w_2x_2'$
  vincolo $f(x_1,x_2') = y.$

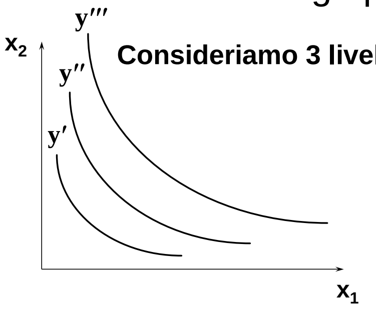
Costi di breve e lungo periodo

- Il problema di min costi nel breve periodo è uguale a quello di lungo periodo con l’extra vincolo $x_2 = x_2$’.
- Se la scelta di lungo periodo per x_2 fosse x_2’ l’extra vincolo $x_2 = x_2$’ non sarebbe in realtà un vincolo e quindi il costo totale di breve e di lungo periodo per produrre y unità di output sarebbe lo stesso.

Costi di breve e lungo periodo

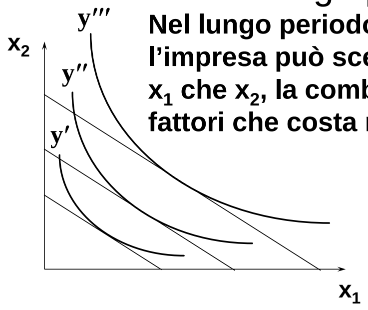
- Il problema di min. dei costi di breve periodo è dunque diverso dal problema di lungo periodo se $x_2 = x_2$” nel breve mentre la scelta di lungo periodo per $x_2 \neq x_2$”. Allora l’impresa in questo breve periodo non può sosterra un costo di produzione pari a quello di lungo periodo ma maggiore.

Costi di breve e lungo periodo

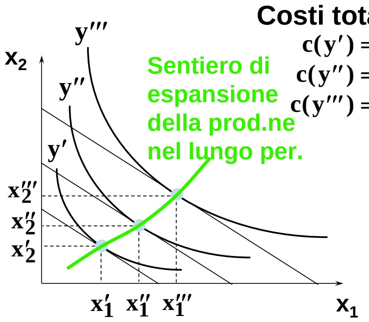


Consideriamo 3 livelli di output

Costi di breve e lungo periodo



Nel lungo periodo, quando l'impresa può scegliere sia x_1 che x_2, la combinazione di fattori che costa meno è: ...



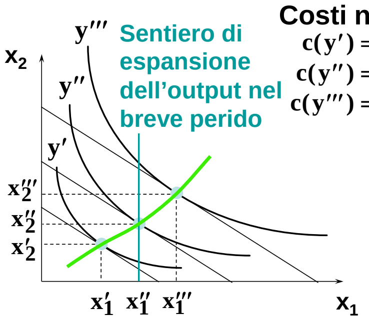
Costi totali nel lungo

$$c(y') = w_1 x_1' + w_2 x_2'$$
$$c(y'') = w_1 x_1'' + w_2 x_2''$$
$$c(y''') = w_1 x_1''' + w_2 x_2'''$$

Costi di breve e lungo periodo

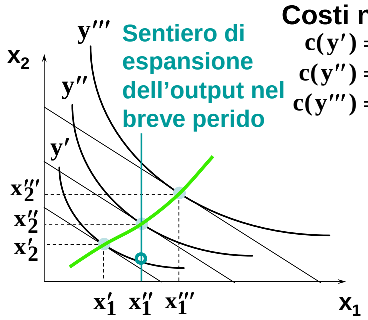
- Ora assumiamo che l'impresa sia soggetta al vincolo di breve periodo

$x_1 = x_1$"



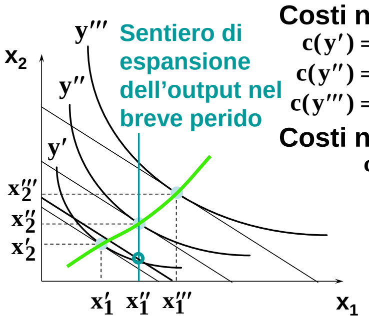
Costi nel lungo:

$$c(y') = w_1 x_1' + w_2 x_2'$$
$$c(y'') = w_1 x_1'' + w_2 x_2''$$
$$c(y''') = w_1 x_1''' + w_2 x_2'''$$



Costi nel lungo

$$c(y') = w_1 x_1' + w_2 x_2'$$
$$c(y'') = w_1 x_1'' + w_2 x_2''$$
$$c(y''') = w_1 x_1''' + w_2 x_2'''$$



Costi nel lungo

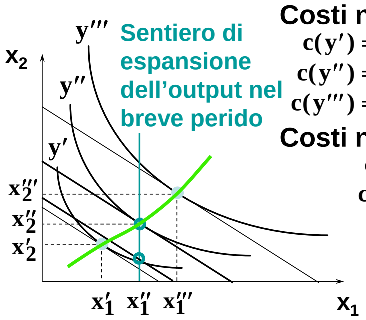
$c(y') = w_1x_1' + w_2x_2'$

$c(y'') = w_1x_1'' + w_2x_2'''$

$c(y''') = w_1x_1''' + w_2x_2'''$

Costi nel breve:

$c_s(y') > c(y')$



Costi nel lungo

$c(y') = w_1x_1' + w_2x_2'$

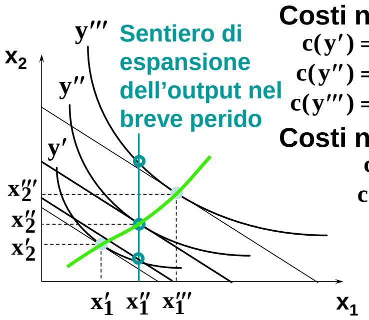
$c(y'') = w_1x_1'' + w_2x_2'''$

$c(y''') = w_1x_1''' + w_2x_2'''$

Costi nel breve:

$c_s(y') > c(y')$

$c_s(y'') = c(y'')$



Costi nel lungo

$c(y') = w_1x_1' + w_2x_2'$

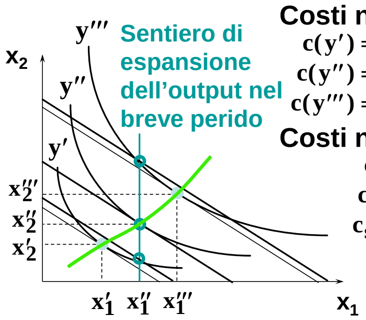
$c(y'') = w_1x_1'' + w_2x_2'''$

$c(y''') = w_1x_1''' + w_2x_2'''$

Costi nel breve:

$c_s(y') > c(y')$

$c_s(y'') = c(y'')$



Costi nel lungo

$c(y') = w_1x_1' + w_2x_2'$

$c(y'') = w_1x_1'' + w_2x_2'''$

$c(y''') = w_1x_1''' + w_2x_2'''$

Costi nel breve:

$c_s(y') > c(y')$

$c_s(y'') = c(y'')$

$c_s(y''') > c(y''')$

Costi di breve e lungo periodo

- I costi di breve superano i costi di lungo ad eccezione del livello di output in corrispondenza del quale il vincolo sul livello di input di breve periodo è uguale alla scelta sull'input di lungo periodo.
- Quindi la curva di costo totale di lungo periodo ha sempre un punto in comune con una curva di costo totale di breve periodo.

Costi di breve e lungo periodo

Una curva di costo totale di breve periodo ha sempre un punto in comune con la curva di costo totale di lungo periodo, ed è, in ogni altro punto, più alta.