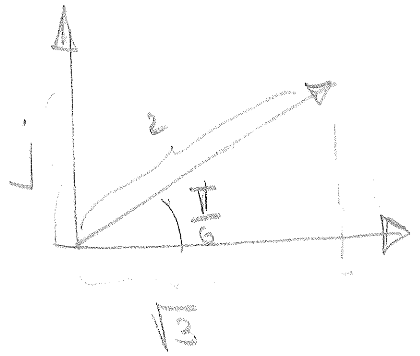
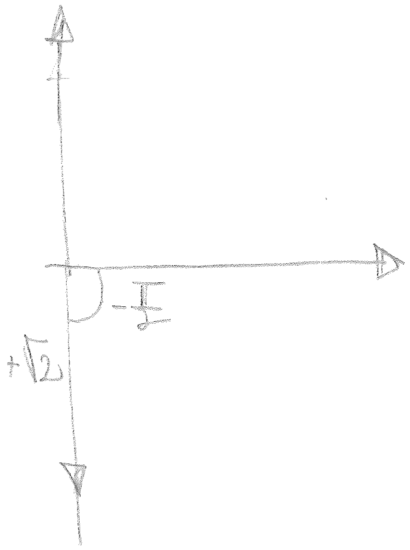
ESERCIZI TEORIA

(2.1) Dati i seguenti numeri complessi in forma polare, determinarne la forma rettangolare

- $2e^{j\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + j$

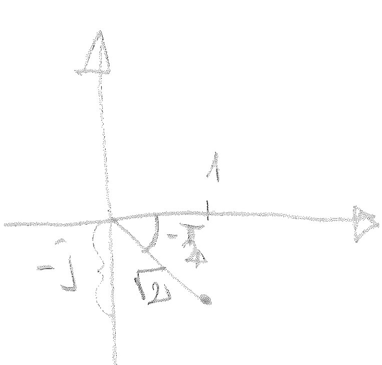


- $\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{2} + j\sin -\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(0 + j(-1)\right) = -j\sqrt{2}$



(2.2) Dati i seguenti numeri in forma rettangolare, determinarne la forma polare

$1 - j \longrightarrow c\,e^{j\theta}$ ——— $= \sqrt{2}\, e^{j -\frac{\pi}{4}}$



$c = \sqrt{(1)^2 + (+1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$

FASORI

(2.3) Dato il Fasore

(I) $(t) = 1 \cdot e^{j2\pi t}$ qual è la sua forma rettangolare?

$= 1 \left(\cos 2\pi t + j \sin 2\pi t \right)$

Questo è il fasore visto a lezione.
Voglio ora un fasore $g(t)$ che vada alla metà della velocità angolare precedente, di modulo doppio

a) che forma polare ha?
b) che forma rettangolare ha?

SOLUZIONE

a) La forma generale di un fasore in forma polare è
$|c| \, e^{j \frac{2\pi}{T_0} t}$ dove $|c|$ è il modulo

$\frac{2\pi}{T_0}$ lo potete pensare come il coefficiente angolare di un moto 1D $y = mt$, solo applicato agli angoli

Nell'esempio:
$2\pi = \frac{2\pi}{1 = T_0}$

T_0 indica la durata (in secondi) di quanto tempo ci vuole per fare un angolo giro.

Per avere la metà della velocità angolare significa che ci devo mettere il doppio per eseguire un giro, quindi $T_0 = 2$ sec.

$\Rightarrow g(t) = 2 \cdot e^{j\pi t}$

2.3 II

b) $2\left(\cos \pi T + j \sin \pi T\right)$

2.4 (I)

Si consideri il segnale

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$$

e si risponda alle seguenti domande:

a) rappresentare graficamente il segnale

b) calcolare l'energia e la potenza media del segnale e discutere se $s(t)$ è un segnale ad energia finita o a potenza media finita

c) scrivere l'espressione analitica e rappresentare graficamente i segnali

$$z(t) = -f(-t)$$

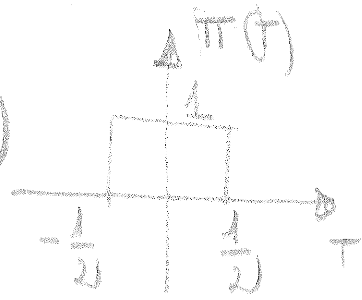
$$v(t) = f(t+4)$$

SOLUZIONE

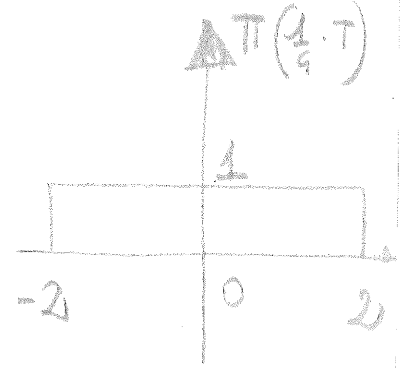
Esamino prima

a) $\underbrace{\Pi\left(\frac{t-2}{4}\right)}_{\text{Funzione box a cui ho applicato delle operazioni}} = \Pi\left(\frac{1}{4}\cdot(t-2)\right) =$

funzione box $\Pi(t)$



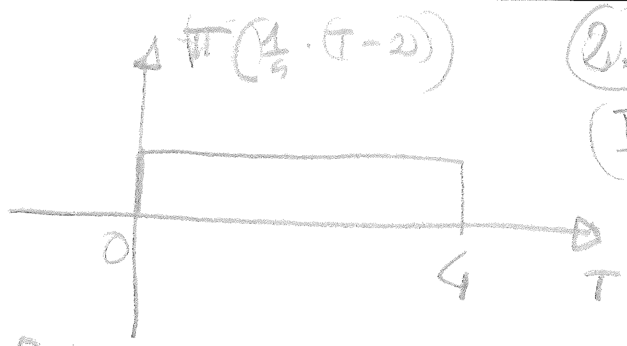
$\longrightarrow \Pi\left(\frac{1}{4}\cdot t\right)$



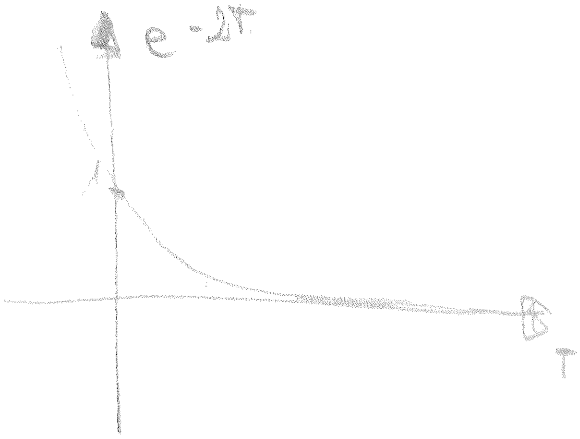
2.4

(II)

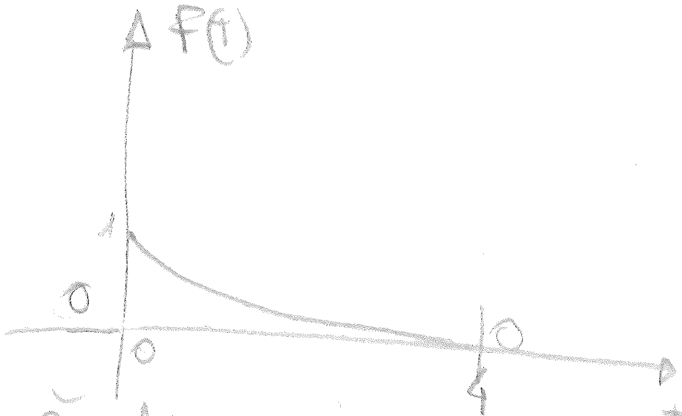
$$\Pi\left(\frac{1}{4}\cdot(t-2)\right)$$



esamino ora e^{-2t}



f(t) è pertanto il segnale esponenziale messo a 0 al di fuori dell'intervallo $[0, 4)$



b) Intuitivamente si capisce che è di energia, e quindi non di potenza

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt \overset{\text{poiché } f \in \mathbb{R}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) \quad , \quad P_f = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)$$

Analizzo l'energia

$$E_f = \int_0^{+4} e^{-4t} \, dt = \left.\frac{e^{-4t}}{-4}\right|_0^4 = \frac{1 - e^{-16}}{4} \simeq \frac{1}{4} \neq 0 \quad \boxed{\text{ENERGIA FINITA}}$$

Analizzo la potenza media

$$P_f = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \underbrace{\int_0^4 e^{-4t} \, dt}_{= E_f} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} E_f = 0$$

Nota: considerando il segnale $f(t) = e^{-2t}$ (2.4) (III)

questo risulta essere un segnale né a energia finita né a potenza media finita. Infatti:

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4t}\,dt = \left.\frac{e^{-4t}}{-4}\right|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{T \to +\infty} \frac{e^{-T} - e^{T}}{-4} = +\infty$$

$$P_f = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-4t}\,dt = \lim_{T \to +\infty} \left.\frac{e^{-4t}}{-4T}\right|_{-\frac{T}{2}}^{T/2} =$$

$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{e^{-2T} - e^{2T}}{-4T} = +\infty$$

c) le espressioni analitiche per i due segnali $z(t)$ e $v(t)$ si ottengono per sostituzione della var. indipendente

$$z(t) = -f(-t) = -\left[\Pi\left(\frac{(-t)-2}{4}\right)e^{-2(-t)}\right] = -\Pi\left(\frac{-t-2}{4}\right)e^{2t}$$

$$v(t) = f(t+4) = \Pi\left(\frac{t-2+4}{4}\right)e^{-2(t+4)}$$

Per il disegno, $z(t)$ è la copia simmetrica rispetto all'origine di $f(t)$ e $v(t)$ è $f(t)$ shiftata a sx di 4, quindi centrata sull'origine

2.6 (I) Si consideri il segnale

$$f(t) = \operatorname{sgn}\left(a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)\right)$$

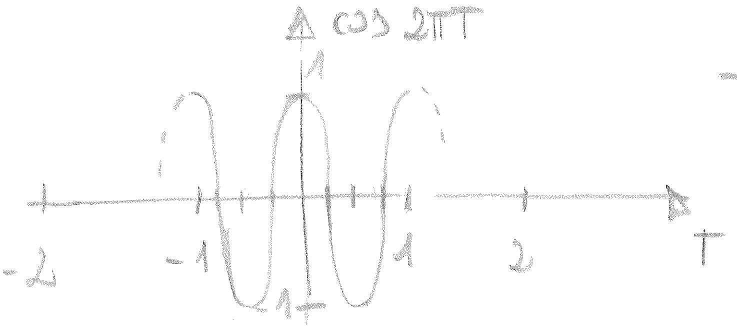
e si risponda alle seguenti domande:

a) rappresentare graficamente il segnale

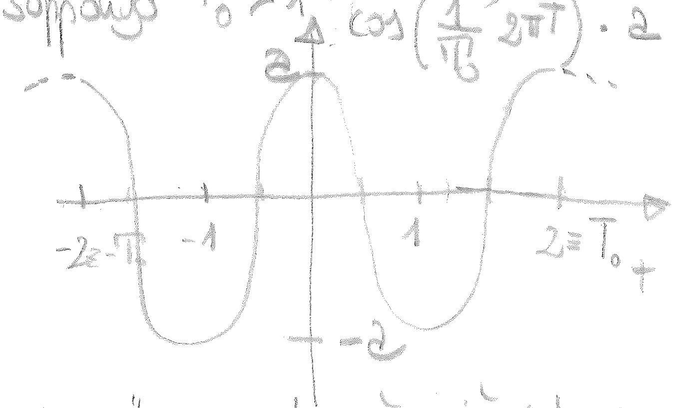
b) calcolare l'energia e la potenza media del segnale e discutere se è un segnale a energia finita (= segnale di energia) o a potenza media finita (= segnale di potenza)

SOLUZIONE

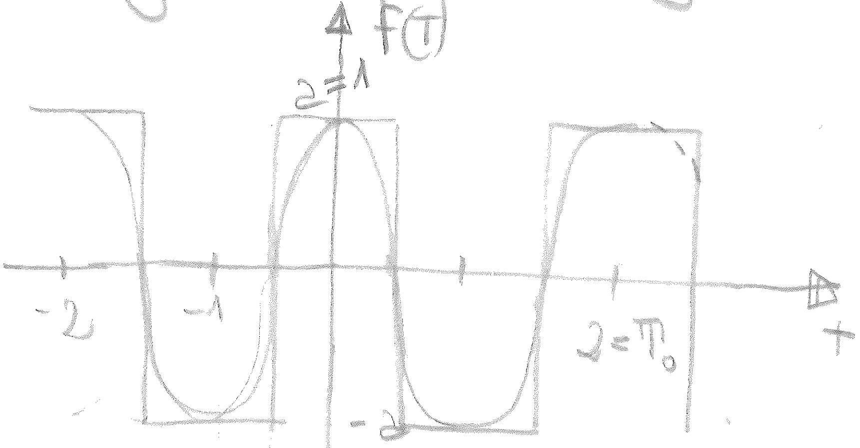
a) Considero $\cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) = \cos\left(\frac{1}{T_0} \cdot 2\pi t\right)$



supponga $T_0 > 1$ (p.e. $T_0 = 2$)



per $T_0 > 1$ il segnale è rallentato, per $T_0 < 1$ il segnale è più veloce
Il fattore a aumenta (>1) o diminuisce (<1) l'ampiezza del segnale rispetto all'originale



b) Il segnale è periodico, quindi ad energia infinita (Ri...) (II)

T_0 è il periodo del segnale

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \lim_{T \to +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt$$

← scrivere questo è = a scrivere

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_{-nT_0/2}^{nT_0/2} |f(t)|^2 dt = \lim_{n \to +\infty} n \cdot \underbrace{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |f(t)^2| dt}_{} = +\infty$$

siccome il segnale è periodico di periodo T_0

Qui sopra in pratica ho isolato un periodo ed ho mostrato che è $\neq 0$ trasformando il limite all'infinito in un prodotto di infinite copie di un periodo.

Il valore della potenza media lo posso calcolare per definizione di potenza media e come è (fuori un segnale periodico) su un periodo

$$P_f = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt =$$

esprimo T in funzione di T_0

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{nT_0} \int_{-\frac{nT_0}{2}}^{+\frac{nT_0}{2}} |f(t)|^2 dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{nT_0} n \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |f(t)|^2 dt$$

2,5 III

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |f(t)|^2 dt$$

che nel caso in esame

$$\left(\begin{array}{c} T_0 = 2 \\ a = 1 \end{array} \right)$$

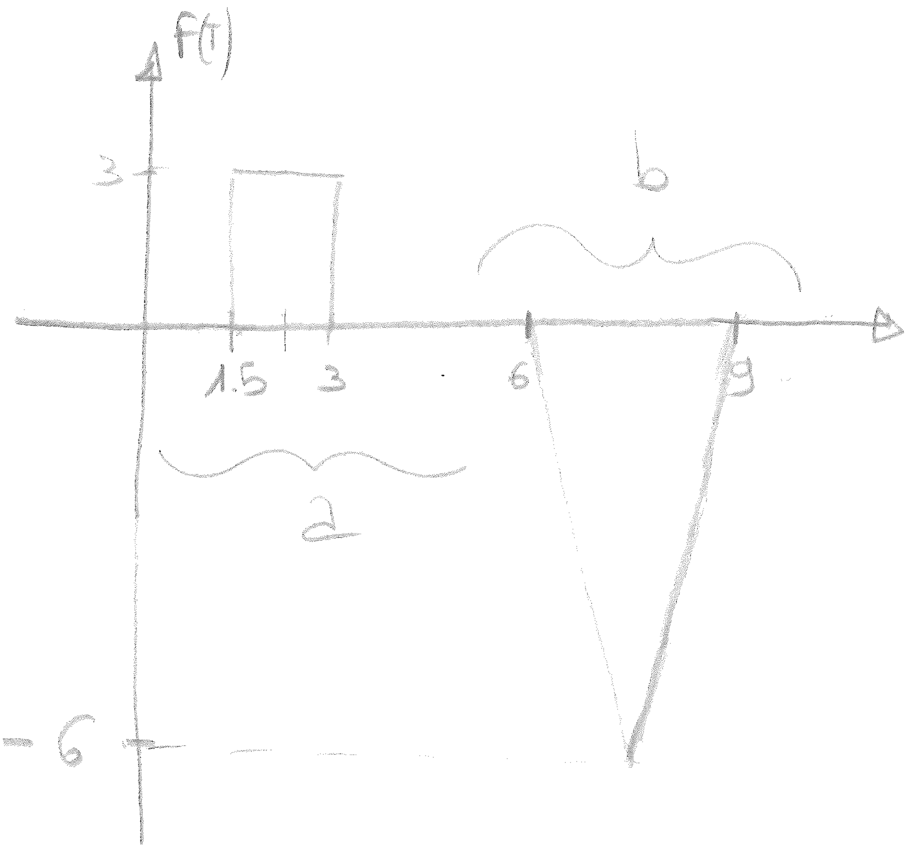
$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |f(t)|^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \neq +\infty$$

Potenza finita

—— o ——

2.6 I

Sia $f(t)$ il segnale disegnato in figura 1



Scrivere $f(t)$ utilizzando i segnali primitivi visti a lezione

$f(t)$ = una box alta 3, shiftata di 2.25 a dx, di larghezza 1.5

- una box alta 3 $= 3 \cdot \Pi(t)$
- una box shiftata a dx di 2.25 $= \Pi(t - 2.25)$
- una box di larghezza 1.5 = un segnale rallentato di

$$\frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} = \Pi\left(\frac{2}{3}t\right)$$

metto assieme ed ottengo la parte a del segnale

$$= 3 \cdot \Pi\left(\frac{2}{3}(t - 2.25)\right)$$

2.6 II

la parte b è

- un segnale triangolo largo 3 = rallentato di un fattore $\frac{2}{3}$ = $Tri\left(\frac{2}{3}t\right)$
- $tri(t)$ ribaltato rispetto all'asse x = $-Tri(t)$
- $Tri(t)$ shiftato a dx di 7.5 = $tri(t-7.5)$
- $Tri(t)$ amplificato di un fattore 6 = $6\,Tri(t)$

mettendo assieme ho il segnale b come

$$= -6\,Tri\left(\frac{2}{3}\left(t-7.5\right)\right)$$

mettendo assieme ho

$$f(t) = 3\,\Pi\left(\frac{2}{3}\left(t-2.25\right)\right) - 6\,Tri\left(\frac{2}{3}\left(t-7.5\right)\right)$$