# Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

**ESERCIZIO 1.** *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la trasformazione lineare tale che :*

$$\begin{aligned} f(e_1) =& 2e_1 + e_2, \\ f(e_2) =& -e_1 + e_2 - e_3, \\ f(e_3) =& e_1 - 2e_2 + 3e_3 - e_3, \end{aligned}$$

*dove* $\mathscr{B} = \{b_1; b_2; b_3\} = \{-e_1; e_2 + e_3; -e_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$.

*(a) Si scriva la matrice* $A$ *associata ad* $f$ *rispetto alla base canonica* $\mathscr{E}_3$ *sul dominio e sul codominio*

*(b) Si scriva la matrice* $A'$ *associata ad* $f$ *rispetto alla base* $\mathscr{B}$ *sul dominio e sul codominio.*

Svolgimento.

(a) Dobbiamo trovare una matrice $A$ tale che :

$$C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) = AC_{\mathscr{E}_3}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

Applichiamo tale formula ai vettori della base canonica:

$$C_{\mathscr{E}_3}(f(e_i)) = AC_{\mathscr{E}_3}(e_i) = Ae_i = \ i-esima \text{ colonna di } A;$$

siccome $C_{\mathscr{E}_3}(f(e_i)) = f(e_i)$, $A$ sarà fatta in questo modo:

$$A = [f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3)]$$

Perciò :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Cerchiamo adesso la matrice $A'$ tale che

$$C_{\mathscr{B}}(f(x)) = A'C_{\mathscr{B}}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Sapendo che:

1. $C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) = AC_{\mathscr{E}_3}(x)$;

2. $C_{\mathscr{B}}(f(x)) = M_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}_3}C_{\mathscr{E}_3}(f(x))$;

3. $C_{\mathscr{B}}(x) = M_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}_3}C_{\mathscr{E}_3}(x)$.

Quindi

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{B}}(f(x)) &= [\text{per la 2}] = M_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}_3} C_{\mathscr{E}_3}(f(x)) \\ &= [\text{per la 1}] = M_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}_3} A C_{\mathscr{E}_3}(x) \\ &= [\text{per la 3}] = M_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}_3} A M^{-1}_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}_3} C_{\mathscr{B}}(x) \end{aligned}$$

Pertanto

$$A' = M_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}_3} A M^{-1}_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}_3}$$

Adesso dobbiamo calcolare $M_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}_3}$, in verità ci risulta molto più facile calcolare $M_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}}$: applichiamo questa formula

$$C_{\mathscr{E}_3}(x) = M_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(x)$$

ad un vettore della base $\mathscr{B}$:

$$C_{\mathscr{E}_3}(b_i) = M_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}} C_{\mathscr{B}}(b_i) = M_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}} e_i = \ i-esima \text{ colonna di } M_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}}$$

ed essendo $C_{\mathscr{E}_3}(b_i) = b_i$, troviamo che :

$$M_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcolando l'inversa di questa matrice si scopre che:

$$M^{-1}_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}} = M_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}}$$

Quindi, siccome

$$M^{-1}_{\mathscr{E}_3\leftarrow\mathscr{B}} = M_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}_3}$$

le matrici del cambio di base sono tutte uguali e quindi la indichiamo con $M$:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo quindi $A'$ come $MAM$:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$