Esercitazione 3
Teoria dei Giochi

Chiara Nardi

Corso di Laurea in Economia Aziendale
Università degli Studi di Verona

15 dicembre 2014

Teoria dei Giochi

Un gioco è formato da:

a giocatori

b strategie

c matrice dei payoff

Possiamo inoltre affermare che:

- Un gioco con un numero finito di giocatori e di strategie ha almeno un NE. Quindi, se non sono presenti NE in strategie pure, esiste sicuramente un NE in strategie miste (**Teorema di Nash**).
- Un gioco in cui sono presenti delle strategie **strettamente** dominanti ha un UNICO NE, in cui ciascun giocatore sceglie la propria strategia dominante. Infatti, le strategie strettamente dominate possono essere eliminate.
- Un gioco in cui sono presenti delle strategie **debolmente** dominanti potrebbe avere più di un NE.

Esercizio 1

Due persone salgono su un autobus e vedono due posti liberi molto stretti. Ogni persona deve decidere se stare in piedi (P) o sedersi (S).
Si consideri la seguente matrice dei payoff:

		Persona 2	
		P	S
Persona 1	P	0;0	0;2
	S	2;0	1;1

1. Descrivere il gioco.
2. Dire se esistono delle strategie dominanti.
3. Determinare l'equilibrio di Nash nel caso in cui la scelta sia simultanea.

Esercizio 1

Soluzione:

1. Elementi del gioco:
   - a due giocatori: Persona 1 e Persona 2
   - b ciascun giocatore ha a disposizione due strategie: Stare in Piedi (P) e Sedersi (S)
   - c la matrice dei payoff è

		Persona 2	
		P	S
Persona 1	P	0;0	0;**2**
	S	**2**;0	**1**;**1**

   dove, il primo numero è l'utilità (payoff) del giocatore riga (Persona 1), mentre il secondo numero è l'utilità (payoff) del giocatore colonna (Persona 2)

2. Per entrambi i giocatori la strategia (strettamente) dominante è Sedersi
3. **In presenza di strategie strettamente dominanti il gioco ha un UNICO NE**, in cui ciascun giocatore sceglie la propria strategia dominante. In questo caso, (S;S)

Esercizio 2

Calcolare tutti gli equilibri di Nash del seguente gioco:

		Marco		
		S	C	D
	A	3,1	1,4	4,2
Luca	M	2,4	0,2	3,1
	B	1,3	2,1	6,0

Esercizio 2

Soluzione:

- Per Luca, M è una strategia strettamente dominata da A e quindi possiamo eliminarla.
- Per Marco, D è una strategia strettamente dominata da C e quindi possiamo eliminarla.

Possiamo riscrivere il gioco nel seguente modo:

		Marco	
		S	C
Luca	A	3,1	1,4
	M	1,3	2,1

Assumiamo che:

- Luca scelga la strategia A con probabilità x e la strategia M con probabilità $(1-x)$
- Marco scelga la strategia S con probabilità y e la strategia C con probabilità $(1-y)$

Esercizio 2

Soluzione (continua)

A è la BR_L se $U_L(A, y) \geq U_L(B, y)$, ossia se $y \geq \frac{1}{3}$.
B è la BR_L se $U_L(B, y) \geq U_L(A, y)$, ossia se $y \leq \frac{1}{3}$.

$$PBR_L(y) = \begin{cases} A & y > \dfrac{1}{3} \\ A, B & y = \dfrac{1}{3} \\ B & y < \dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad BR_L(y) = \begin{cases} x = 1 & y > \dfrac{1}{3} \\ x \in [0, 1] & y = \dfrac{1}{3} \\ x = 0 & y < \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Esercizio 2

Soluzione (continua)

S è la BR_M se $U_M(x,S) \geq U_M(x,C)$, ossia se $x \leq \frac{2}{5}$.
C è la BR_M se $U_M(x,C) \geq U_M(x,S)$, ossia se $x \geq \frac{2}{5}$.

$$PBR_M(x) = \begin{cases} S & x < \frac{2}{5} \\ S, C & x = \frac{2}{5} \\ C & x > \frac{2}{5} \end{cases} \qquad BR_M(x) = \begin{cases} y = 1 & x < \frac{2}{5} \\ y \in [0,1] & x = \frac{2}{5} \\ y = 0 & x > \frac{2}{5} \end{cases}$$

In conclusione, rappresentando le BR in un grafico con x in ascisse e y in ordinate, vediamo che questo gioco non ha equilibri di Nash in strategie pure. L'unico NE è in strategie miste ed è dato da:

$$\left(\tfrac{2}{5}A + \tfrac{3}{5}B; \tfrac{1}{3}S + \tfrac{2}{3}C\right)$$

Esercizio 3

Calcolare tutti gli equilibri di Nash del seguente gioco:

		Giocatore 2			
		L	M	C	R
Giocatore 1	U	1,3	-1,2	0,0	2,1
	D	0,1	-1,-1	1,4	1,2

Esercizio 3

Soluzione:

- Per il Giocatore 1, non esistono strategie dominate.
- Per Il Giocatore 2, M è una strategia strettamente dominata da L ($3 > 2$ e $1 > -1$) e quindi possiamo eliminarla.

Possiamo riscrivere il gioco nel seguente modo:

		Giocatore 2		
		L	C	R
Giocatore 1	U	**1,3**	0,0	2,1
	D	0,1	**1,4**	1,2

Assumiamo che:

- Giocatore 1 scelga la strategia U con probabilità x e la strategia D con probabilità $(1 - x)$
- Giocatore 2 scelga la strategia L con probabilità y, la strategia C con probabilità z e la strategia R con probabilità $(1 - y - z)$

Esercizio 3

Soluzione (continua)

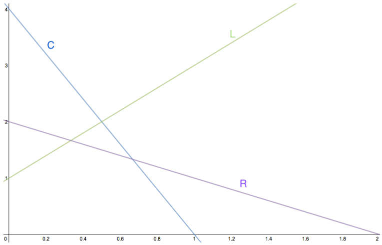
Per il Giocatore 1,
U è la BR_1 se $U_1(U, y, z) \geq U_1(D, y, z)$, ossia se $z \leq \frac{1}{2}$.
D è la BR_1 se $U_1(D, y, z) \geq U_1(U, y, z)$, ossia se $z \geq \frac{1}{2}$.

$$PBR_L(y) = \begin{cases} U & z < \dfrac{1}{2} \\ U, D & z = \dfrac{1}{2} \\ D & z > \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad BR_L(y) = \begin{cases} x = 1 & z < \dfrac{1}{2} \\ x \in [0, 1] & z = \dfrac{1}{2} \\ x = 0 & z > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 3

Soluzione (continua)

Per il Giocatore 2, abbiamo $U_2(x, L) = 1 + 2x$, $U_2(x, C) = 4 - 4x$ e $U_2(x, R) = 2 - x$.
Rappresentando le funzioni nello spazio (x,U_2) si ottiene:



Dal grafico possiamo vedere che la retta corrispondente alla strategia R è sempre inferiore alle rette associate alle strategie L e C. Questo significa che la strategia R è dominata da una combinazione di L e C e quindi, in equilibrio, non sarà mai scelta dal Giocatore 2. Vediamo inoltre che $PBR_2 = C$ se $x \leq \frac{1}{2}$ e $PBR_2 = L$ se $x \geq \frac{1}{2}$.

Esercizio 3

Soluzione (continua)

$$PBR_2(x) = \begin{cases} C & x < \dfrac{1}{2} \\ C, L & x = \dfrac{1}{2} \\ L & x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad BR_2(x) = \begin{cases} z = 1 (y = 0) & x < \dfrac{1}{2} \\ y, z \in [0,1], y + z = 1 & x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 (z = 0) & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Se il Giocatore 1 sceglie U $\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow PBR_2 = L$.
  Se il Giocatore 2 sceglie L $\Rightarrow y = 1$ e quindi $z = 0 \Rightarrow z < \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow PBR_1 = U$.
  $\Rightarrow$ (U,L) è un NE
- Se il Giocatore 1 sceglie D $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = 1$ e quindi $y = 0 \Rightarrow PBR_2 = C$.
  Se il Giocatore 2 sceglie C $\Rightarrow z = 1$ e quindi $z > \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow PBR_1 = D$.
  $\Rightarrow$ (D,C) è un NE
- se $x \in [0,1] \Rightarrow z = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
  $\Rightarrow$ NE in strategie miste dato da $(\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}D; \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}C)$