Esame di Analisi Matematica II
Corso di laurea in Informatica
Università di Verona

Verona, 2 settembre 2016

Informazioni personali

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Si barri e firmi l'opzione desiderata.

1. Chiedo che venga corretto l'esame.

   Firma: ______________________________

2. Intendo ritirarmi.

   Firma: ______________________________

In caso di consegna, si indichi il numero di fogli protocollo consegnati: ______________.

ISTRUZIONI

- Il testo di questa prova è diviso in due parti, entrambe stampate sul retro di questo foglio.
- Occorre rispondere alle domande sui fogli protocollo. Su tali fogli è necessario scrivere il proprio nome, cognome e matricola.
- È vietato utilizzare dispositivi elettronici e consultare libri o appunti durante lo svolgimento della prova pena l'annullamento della prova stessa.
- Il tempo per lo svolgimento del compito è **3 ore**.

$\boxed{\textbf{Parte I}}$

Esercizio 1 (punti: .... /4)**.** Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 + 2y + 1) \cdot x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(non è necessario determinare l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata).

Esercizio 2 (punti: .... /4)**.** Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3 (punti: .... /6)**.**

Sia $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2 + 1}$ una funzione di due variabili reali x e y.

1. (2 pt.) Si rappresenti nel piano cartesiano il dominio naturale D di f.
2. (2 pt.) Si rappresenti nel piano cartesiano la curva di livello 1 della funzione f.
3. (1 pt.) Il punto $P = (1, 0)$ è interno, esterno o di frontiera per D? Si motivi la risposta.
4. (1 pt.) Il punto $Q = (0, 0)$ è interno, esterno o di frontiera per D? Si motivi la risposta.

Esercizio 4 (punti: .... /2)**.** Si dimostri che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^6}{x^2 + y^2} = 0.$$

$\boxed{\textbf{Parte II}}$

Esercizio 5 (punti: .... /4)**.**

Sia $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$ una funzione di due variabili reali x e y definita per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Si trovino e si classifichino i punti stazionari di f.

Esercizio 6 (punti: ....../5)**.** Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - 1)^2 - y^2 \\ g(x, y) &= x^2 - 2x + y^2 \end{aligned}$$

definite per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Sia inoltre

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : g(x, y) = 0\}.$$

1. (1 pt.) Si rappresenti nel piano cartesiano la curva di equazione $g(x, y) = 0$.
2. (4 pt.) Si trovino i punti di minimo e massimo locale vincolato della funzione f al variare di (x, y) in M usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esercizio 7 (punti: .... /4)**.**

Si consideri la funzione $f(x, y) = x^2 y$ definita su

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x \le 2, -\sqrt{x} \le y \le \frac{1}{x} \right\}.$$

1. (1 pt.) Si rappresenti nel piano cartesiano l'insieme dei punti di D.
2. (3 pt.) Si calcoli $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$.

Esercizio 8 (punti: .... /3)**.** Si calcoli il seguente integrale triplo

$$\iiint_D z^2 \, dxdydz,$$

dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \le 3, \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \le z \le 2\}$.

$\boxed{\textbf{Soluzioni}}$ *Premessa:* vista l'analogia di molti esercizi del presente appello con gli appelli precedenti, per gran parte degli esercizi si riportano solo delle tracce di soluzione .

Soluzione 1. L'equazione differenziale è a variabili separabili. Separando le variabili e svolgendo i calcoli si ottiene come soluzione generale

$$y(x) = -\frac{x^2 + 2 + C}{x^2 + C}$$

dove C è una costante di integrazione.

Imponendo la condizione iniziale otteniamo la soluzione del problema di Cauchy, ovvero

$$y(x) = -\frac{x^2}{x^2 - 2}.$$

Soluzione 2. Le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

sono

$$2i, \quad -2i.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma

$$\overline{y}(x) = A\cos(x) + B\sin(x).$$

Svolgendo i calcoli si ricava $A = 0$, $B = \frac{1}{3}$.

Quindi l'integrale generale dell'equazione completa è

$$c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{\sin(x)}{3}$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$.

Imponendo le condizioni iniziali troviamo la soluzione del problema, che è

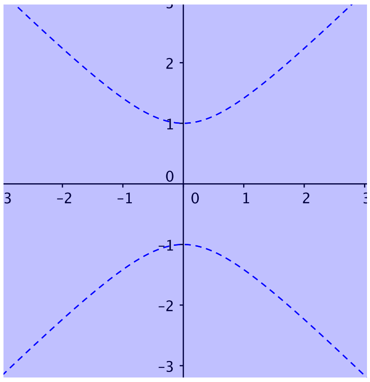
$$y(x) = -\frac{1}{6}\sin(2x) + \frac{\sin(x)}{3}.$$

Soluzione 3.

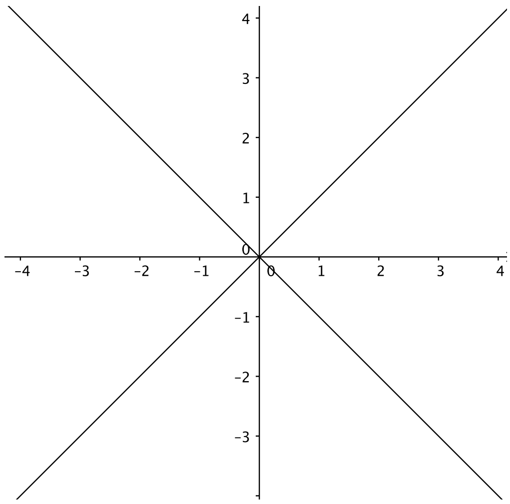
1. Il dominio D di f è dato da tutti i punti $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tali che

$$x^2 - y^2 + 1 \neq 0.$$

Il dominio D è rappresentato dalla regione ombreggiata nella seguente figura.



2. La curva di livello 0 della funzione f è data dai punti che soddisfano l'equazione
$$x^2 - y^2 = 0.$$
Tale equazione descrive una coppia di rette che sono qui rappresentate.



3. Il punto P è interno a D in quanto
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 - y^2 + 1 \neq 0\}$$
è un insieme è aperto e ogni punto di D è dunque interno a D.
4. Q è interno a D per lo stesso ragionamento di prima.

Soluzione 4.

La dimostrazione è omessa.

Parte II

Soluzione 5.

Cerchiamo i punti stazionari di f risolvendo il seguente sistema (non lineare):

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ f'_y(x,y) = \dfrac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

Ci sono due punti stazionari: $P = (1,0)$ e $Q = (-1,0)$. Dopo aver calcolato le derivate parziali del secondo ordine e valutato la matrice hessiana nei due punti stazionari, concludiamo che P è un punto di massimo locale, mentre Q è un punto di minimo locale.

Soluzione 6.

1. Per identificare la curva di equazione $g(x,y) = 0$ compiamo alcune manipolazione algebriche sull'equazione stessa:

$$g(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

   Quindi $g(x,y) = 0$ è l'equazione di una circonferenza di raggio 1 centrata in $(1,0)$.

   (La rappresentazione grafica è omessa).

2. Notiamo che il vincolo non ha punti singolari in quanto

$$\nabla g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x-2, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,0)$$

   e $(1,0)$ non è un punto di M.

   Cerchiamo ora i punti stazionari della funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x-1)^2 - y^2 - \lambda(x^2 - 2x + y^2)$$

   risolvendo il seguente sistema (non lineare):

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y,\lambda) & = 2(x-1) - 2\lambda x + 2\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y,\lambda) & = -2y - 2\lambda y = -2y(1+\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x,y,\lambda) & = -g(x,y) = 0 \end{cases}$$

   La seconda equazione è soddisfatta solo se $y = 0$ oppure $\lambda = -1$. Studiamo separatamente i due casi.

   - Se $y = 0$, allora dalla terza equazione ricaviamo che

$$x^2 - 2x = 0,$$

     le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = 2$. Possiamo ricavare i relativi valori di λ dalla prima equazione trovando quindi i seguenti punti stazionari per la funzione lagrangiana:

$$P_1 = (0,0,1)\,, \quad P_2 = (2,0,1)\,.$$

- Se $\lambda = -1$, allora la prima equazione è soddisfatta solo se $x = 1$. Andiamo a sostituire tale valore di x nella terza equazione, che è equivalente a $g(x, y) = 0$, ovvero a
$$y^2 = 1.$$
Visto che le soluzioni di quest'ultima equazione sono $y = 1$ oppure $y = -1$, ricaviamo i seguenti punti stazionari per la funzione lagrangiana:
$$P_3 = (1, 1, -1), \quad P_4 = (1, -1, -1).$$

La matrice hessiana orlata di $\mathcal{L}$ è
$$B_{\mathcal{L}}(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 2x-2 & 2y \\ 2x-2 & 2-2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2-2\lambda \end{bmatrix}.$$

Poiché
$$\det(B_{\mathcal{L}}(P_1)) = \det(B_{\mathcal{L}}(P_1)) = 16,$$
concludiamo che $(0, 0)$ e $(2, 0)$ sono punti di massimo locale vincolato per f.

Poiché
$$\det(B_{\mathcal{L}}(P_3)) = \det(B_{\mathcal{L}}(P_4)) = -16,$$
concludiamo che $(1, 1)$ e $(1, -1)$ sono punti di minimo locale vincolato per f.

Soluzione 7.

1. La rappresentazione grafica di D è omessa.
2. Calcoliamo l'integrale:
$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\frac{1}{x}} x^2 y \, dy \right) dx &= \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{-\sqrt{x}}^{\frac{1}{x}} dx \\ &= \int_1^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x^3 \right] dx = -\frac{11}{8}. \end{aligned}$$

Soluzione 8. Calcoliamo questo integrale passando a coordinate cilindriche. Tenendo conto delle disuguaglianze che descrivono l'insieme D otteniamo quanto segue:

- $x^2 + y^2 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}$;
- $\sqrt{x^2 + y^2 + 1} \leq z \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\rho^2 + 1} \leq z \leq 2$.

Integriamo dunque usando delle coordinate cilindriche:

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\sqrt{\rho^2+1}}^{2} z^2 \rho \; dz \right) d\vartheta \right) d\rho \\
= \; & \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \left[-(\rho^2+1)^{3/2}\rho + 8\rho \right] d\vartheta \right) d\rho \\
= \; & \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\pi}{3} \left(-(\rho^2+1)^{3/2}\rho + 8\rho \right) d\rho \\
= \; & \frac{\pi}{3} \int_0^{\sqrt{3}} (-2\rho(\rho^2+1)^{3/2} + 16\rho) d\rho \\
= \; & \frac{\pi}{3} \left[\frac{-(\rho^2+1)^{5/2}}{5/2} + 8\rho^2 \right]_0^{\sqrt{3}} \\
= \; & \frac{\pi}{3} \left(-\frac{64}{5} + 24 + \frac{2}{5} \right) = \frac{58\pi}{15}.
\end{aligned}
$$