

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 20 febbraio 2015

matricola nome cognome

corso di laurea anno accademico di immatricolazione

| | | |
|------------|----|----|
| Votazione: | T1 | E1 |
| | T2 | E2 |
| | | E3 |

Compito A

T1) Si definisca quando una matrice quadrata \mathbf{A} (di forma $n \times n$) è diagonalizzabile. Si dimostri: se \mathbf{A} è diagonalizzabile, allora \mathbb{C}^n possiede una base composta da autovettori di \mathbf{A} .

T2) Si diano le definizioni di rango di una matrice e l'enunciato del teorema “nullità più rango”. Si dimostri che, se \mathbf{A} è una matrice $m \times n$, allora il rango di \mathbf{A} è uguale al rango di $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$. (Suggerimento: si considerino $N(\mathbf{A})$ e $N(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$.)

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2\alpha & 4 \\ 2 & 0 & 2\alpha & 2\alpha - 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 2$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_2)$. Inoltre si interpreti \mathbf{A}_2 come la matrice completa di un sistema lineare e si trovino tutte le soluzioni del sistema.

E2) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si verifichi che \mathcal{B} è una base di \mathbb{C}^3 . Si consideri l'applicazione lineare $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3$.

(1) Si trovi la matrice \mathbf{B} associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.

(2) Si calcoli il rango di f .

(3) Il vettore $\mathbf{w} = [0 \ 1 \ 1]^T$ appartiene all'immagine di f ? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f .

E3) Si consideri la matrice ($\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta - 2 & -1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile; si determini, quando esiste, una base di \mathbb{C}^4 formata da autovettori di \mathbf{B}_β . Esiste una base ortogonale di \mathbb{C}^4 formata da autovettori di \mathbf{B}_1 ?