(D5)

$f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ y-1 \end{bmatrix}$

pg 90

- per la preposizione: se $f: V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare, allora $f(0) = 0$

pongo $x = y = 0$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $f(0) \neq 0$ (vettore nullo) $\rightarrow$ f non è un'applicazione lineare

NB Se avessi avuto

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f(0) = 0$ devo controllare altre due condizioni

(D6) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3. Esistono $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ tali che $\{v_1; v_2; v_3; v_4\}$ è un insieme di generatori di V?

Si perché un insieme di generatori di V deve avere un numero di vettori ≥ 3

NB: dim (Spazio Vettoriale) = dim (Base)

- Un insieme di generatori di uno spazio vettoriale di dimensione n deve avere numero di vettori $\geq n$.
- Un insieme linearmente indipendente in uno spazio vettoriale di dimensione n deve avere dimensione $\leq n$
- Un insieme di generatori di dimensione n: un insieme linearmente indipendente spazio vettoriale V deve avere n° vettori $\leq$ vettori insieme generatori.

(D7) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2. Esistono $v_1, v_2, v_3 \in V$ t.c. $\{v_1; v_2; v_3\}$ è un insieme linearmente indipendente di V?

No, perché una base di V avrà dimensione 2, ma la dimensione di un insieme linearmente indipendente deve essere minore o uguale alla dim. di V, ma in questo caso

$3 > 2$

(D12) Esiste un'applicazione lineare iniettiva $f: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$?

$\dim V = \dim N(f) + \dim Im(f)$

$\dim N(f) = \dim V - \dim Im(f)$

$= 4 - \dim Im(f) \to 4 - 2 \Rightarrow \dim N(f) \neq 0$

Non esiste AL iniettiva $f: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$!

(D13) Esiste un'applicazione lineare $f: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ di rango 3 ?

(D14) Esiste una matrice A, 3x2, di rango 3 ?

No, perché una matrice con 3 righe e 2 colonne non può avere 3 colonne dominanti

(D15) Sia $\{v_1; v_2\}$ un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V. L'insieme $\{v_1; 2v_1 - v_2; v_2\}$ è linearmente indipendente ?

NB: per vedere ad occhio se è linearmente dipendente vedo se uno dei vettori è generato dagli altri:

$\{v_1; 2v_1 - v_2; v_2\}$ ex

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2(2v_1 - v_2) + \alpha_3 v_2 = 0$

× la dipendenza basta un solo (α_n) valore $\neq 0$

posti $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$ e $\alpha_3 = -1$ ottengo $0 = 0$

No perché il vettore $2v_1 - v_2$ è combinazione lineare dei vettori v_1 e v_2.

(D16) Sia $\{v_1; v_2; v_3\}$ un insieme di generatori di V. Esiste un vettore v_4 tc $\{v_1; v_2; v_3; v_4\}$ sia linearmente indipendente ?

No, perché tale insieme sarebbe lin. indip. se avesse un numero di vettori $\leq$ a quello dell'insieme di generatori di V.

NB: Sia A matrice $n \times n$. Allora
- $p_A(x)$ ha grado n !
- il termine noto di $p_A(x)$ è $\det(A)$