Lezione 3

Utilità

Funzioni di utilità

- Relazioni di preferenza che soddisfino gli assiomi di complezza, riflessività e transitività e che siano continue possono essere rappresentate da una funzione di utilità continua.
- Continuità significa che piccoli cambiamenti nel paniere causano solo piccoli cambiamenti nel livello di preferenza.

Funzioni di utilità

- Una funzione di utilità U(x) rappresenta una relazione di preferenza se e solo se:

$x' \succ x'' \iff U(x') > U(x'')$

$x' \prec x'' \iff U(x') < U(x'')$

$x' \sim x'' \iff U(x') = U(x'')$.

Funzioni di utilità

- L'utilità ha un significato esclusivamente ordinale.
- *Es*. se U(x) = 6 e U(y) = 2 allora il paniere x è strettamente preferito al paniere y. Ma x non è preferito il triplo di y.

F. di utilità e curve di indifferenza

- Consideriamo i panieri (4,1), (2,3) e (2,2).
- Supponiamo $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$.
- Assegnamo a questi panieri un qualunque numero che preserva l'ordine di preferenza;
  es. U(2,3) = 6 > U(4,1) = U(2,2) = 4.
- Chiamiamo questi numeri livelli di utilità.

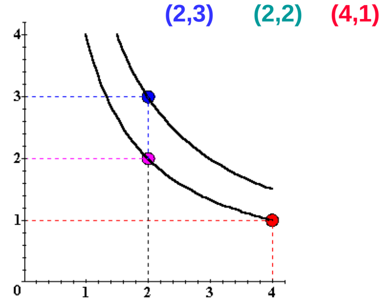
F. di utilità e curve di indifferenza

- Una curva di indifferenza contiene panieri ugualmente preferiti.
- Uguali preferenze $\Rightarrow$ stesso livello di utilità.
- Quindi tutti i panieri che si trovano su una curva di indifferenza danno lo stesso livello di utilità.

F. di utilità e curve di indifferenza

- Quindi i panieri (4,1) e (2,2) sono sulla curva di indiff. con livello di utilità U ≡ 4
- Ma il paniere (2,3) è sulla curva di indiff. Con livello di uilità U ≡ 6.
- La rappresentazione grafica è la seguente:

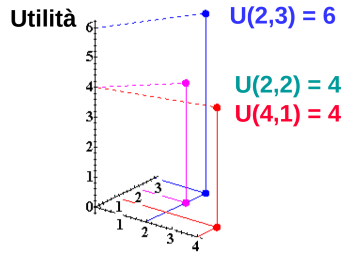
F. di utilità e curve di indifferenza



F. di utilità e curve di indifferenza

- Un altro modo di visualizzare la stessa informazione consiste nel disegnare il livello di utilità sull'asse verticale in un diagramma tridimensionale.

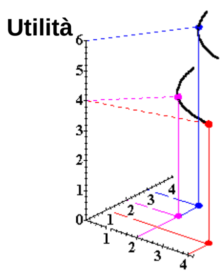
F. di utilità e curve di indifferenza



F. di utilità e curve di indifferenza

- Possiamo aggiungere a questo grafico 3D le curve di indifferenza.

F. di utilità e curve di indifferenza

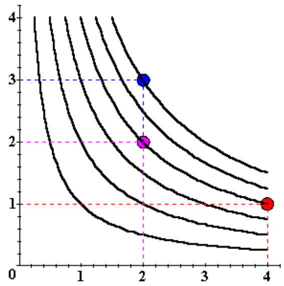


Curve di indiff. più alte contengono panieri preferiti.

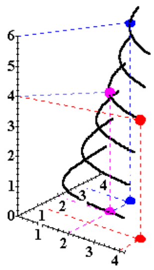
F. di utilità e curve di indifferenza

- Confrontando più panieri si ha una più ampia collezione di curve di indifferenza e una migliore descrizione delle preferenze del consumatore.

F. di utilità e curve di indifferenza



F. di utilità e curve di indifferenza



Funzioni di utilità

- Non c'è un'unica funzione di utilità che rappresenti una data descrizione delle preferenze.
- Supponiamo che $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ rappresenti le preferenze di un consumatore.
- Consideriamo di nuovo i panieri (4,1), (2,3) e (2,2).

Funzioni di utilità

- $U(x_1,x_2) = x_1x_2$, quindi

  $U(2,3) = 6 > U(4,1) = U(2,2) = 4$;

  cioè, $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$.

Funzioni di utilità

- $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ $\Rightarrow$ $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$.
- Definiamo $V = U^2$.
- Quindi $V(x_1,x_2) = x_1^2x_2^2$ e
  $V(2,3) = 36 > V(4,1) = V(2,2) = 16$
  perciò, di nuovo
  $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$.
- V preserva lo stesso ordinamento di U e quindi rappresenta le stesse preferenze.

Funzioni di utilità

- $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ $\Rightarrow$ $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$.
- Definiamo $W = 2U + 10$.
- Quindi $W(x_1,x_2) = 2x_1x_2+10$ e $W(2,3) = 22 > W(4,1) = W(2,2) = 18$.

  E' ancora vero che: $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$.
- W preserva lo stesso ordinamento di U e V e quindi rappresenta le stesse preferenze.

Funzioni di utilità

- Se
  - U è una funzione di utilità che rappresenta una relazione di preferenza e
  - f è una funzione sempre crescente,
- allora anche $V = f(U)$ è una funzione di utilità che rappresenta le stesse preferenze

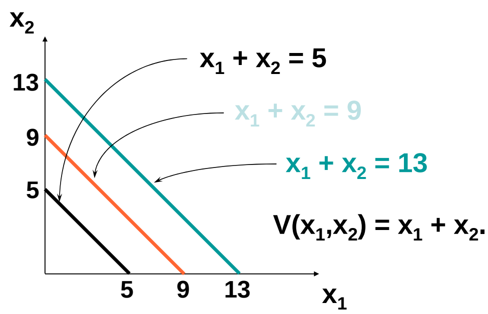
Particolari funzioni di utilità

- Invece di $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ si consideri

  $$V(x_1,x_2) = x_1 + x_2.$$

  Come sono le curve di indifferenza in questo caso di “perfetti sostituti”?

Perfetti sostituti



Lineari e parallele

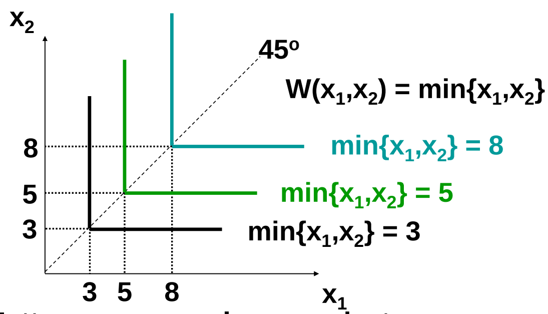
Particolari funzioni di utilità

- Invece di $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ o $V(x_1,x_2) = x_1 + x_2$, si consideri

  $$W(x_1,x_2) = \min\{x_1,x_2\}.$$

  Come sono le curve di indifferenza in questo caso di “perfetti complementi”?

Pefetti complementi



Tutte con un angolo verso destra con vertice sulla bisettrice.

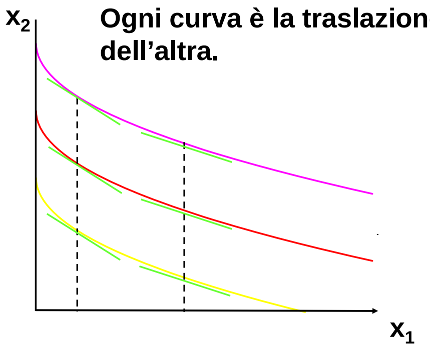
Particolari funzioni di utilità

- Una funzione di utilità del tipo

  $U(x_1,x_2) = f(x_1) + x_2$

  è lineare solo in x_2 ed è detta quasi-lineare.
- *Es.* $U(x_1,x_2) = 2x_1^{1/2} + x_2$.

Preferenze quasi lineari



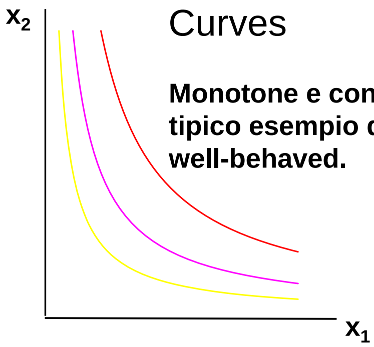
Particolari funzioni di utilità

- Qualsiasi funzione di utilità del tipo

  $U(x_1,x_2) = x_1^a x_2^b$

  con a > 0 e b > 0 è detta funzione di utilità Cobb-Douglas.
- *Es.* $U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ (a = b = 1/2)
  $V(x_1,x_2) = x_1 x_2^3$ (a = 1, b = 3)

Cobb-Douglas Indifference Curves



Utilità marginale

- L'utilità marginale di un bene è il saggio di variazione dell'utilità associato ad una variazione molto piccola della quantità consumata di quel bene:

$$MU_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

Utilità marginale

- *Es.* se $U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$ si ottiene

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^2$$

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 2x_1^{1/2} x_2$$

Utilità marginale e saggio marginale di sostituzione

- L'equazione generale di una curva di indifferenza è
  $U(x_1,x_2) = k$, con k costante.
  Dal differenziale totale si ottiene:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 = 0$$

Utilità marginale e saggio marginale di sostituzione

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 = 0$$

Si può riscrivere come

$$\frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1$$

Utilità marginale e saggio marginale di sostituzione

e $$\frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1$$

diventa

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2}.$$

Che è il MRS

Utilità marginale e saggio marginale di sostituzione

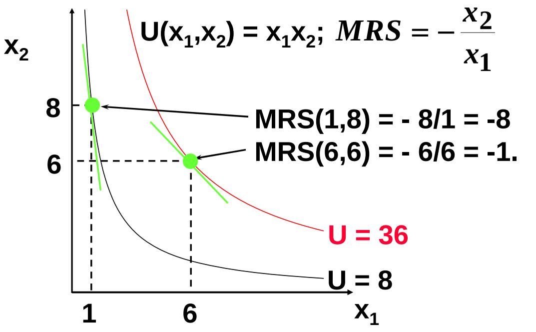
- Supponiamo che $U(x_1,x_2) = x_1x_2$.

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = (1)(x_2) = x_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = (x_1)(1) = x_1$$

Si ha $MRS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2} = -\frac{x_2}{x_1}.$

Utilità marginale e saggio marginale di sostituzione



MRS per funzioni di utilità quasi lineari

- Una funzione di utilità quasi lineare è del tipo $U(x_1,x_2) = f(x_1) + x_2$.

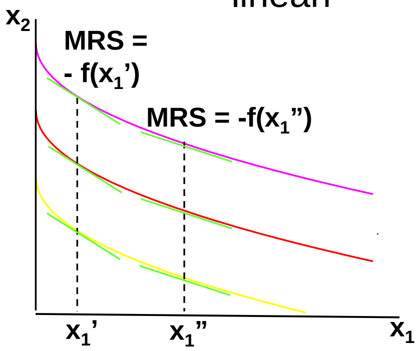
$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = f'(x_1) \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = 1$$

$$\rightarrow \; MRS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2} = -f'(x_1).$$

MRS per funzioni di utilità quasi lineari

- $MRS = - f'(x_1)$ non dipende da x_2 quindi la pendenza delle curve di indifferenza per una funzione di utilità quasi-lineare è costante lungo ogni curva sulla quale x_1 è invariato. Infatti queste curve di indifferenza appaiono come traslazioni verticali l'una dell'altra.

MRS per funzioni di utilità quasi lineari



Trasformazioni monotoniche e MRS

- Applicando una trasformazione monotonica ad una funzione di utilità che rappresenta una relazione di preferenza si crea un'altra funzione di utilità che rappresenta la stessa relazione di preferenza.
- Cosa accade al MRS quando si applica una trasformazione monotonica?

Trasformazioni monotoniche e MRS

- Per $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ il $MRS = - x_2/x_1$.
- Sia $V = U^2$; → $V(x_1,x_2) = x_1^2x_2^2$. Qual è il MRS per V?

$$MRS = -\frac{\partial V / \partial x_1}{\partial V / \partial x_2} = -\frac{2x_1x_2^2}{2x_1^2x_2} = -\frac{x_2}{x_1}$$

che è lo stesso MRS di U.

Trasformazioni monotoniche e MRS

- Più in generale, se $V = f(U)$ dove f è una funzione strettamente crescente

$$MRS = -\frac{\partial V / \partial x_1}{\partial V / \partial x_2} = -\frac{f'(U) \times \partial U / \partial x_1}{f'(U) \times \partial U / \partial x_2}$$

$$= -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2}.$$

Quindi il MRS non cambia in seguito ad una trasfomazione monotonica positiva.