Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

13 gennaio 2012

ESERCIZIO 1. *Dato U sottospazio di $\mathbb{C}^3$, generato dai vettori:*

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \qquad u_3 = \begin{bmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Trovare $U^{\perp}$.

(b) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ (che non sia quella canonica).

(c) Trovare $P_U(v)$, con $v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Svolgimento.

(a) Per torvare il complemento ortogonale di U ci sono due metodi di approccio ma che sostanzialmente, quando si vanno ad eseguire i calcoli, sono la stessa cosa.

Vediamo il primo metodo, che parte direttamente dalla definizione di cosa sia il complemento ortogonale di un sottospazio: $U^{\perp}$ è un sottospazio di $\mathbb{C}^3$ i cui vettori sono tutti ortogonali ai vettori di U.

Ma ovviamente non proviamo l'ortogonalità su tutti gli infiniti vettori di U, bensì prendiamo una base. Quindi mettiamo i generatori di U in una matrice, applichiamo l'Eliminazione di Gauss e vediamo quali sono linearmente indipendenti:

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -i \\ i & 0 & -1 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \\
E_{21}(-i) & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -i \\ 0 & -2i & -2 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{c} E_2(i/2) \\ E_{32}(-i) \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Abbiamo così scoperto che una base di U è data da u_1 e u_2.

Un generico vettore di $U^{\perp}$, che essendo incognito chiameremo $w = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$, deve essere ortogonale (il prodotto interno deve essere 0) a tutti i vettori di U e quindi ai suoi vettori di base. Imponiamo quindi questa condizione:

$$
(u_1|w) = u_1^H w = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a - ib = 0
$$

$$
(u_2|w) = u_1^H w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2a - ic = 0
$$

Per trovare a, b, c basta quindi risolvere il sistema omogeneo

$$
\begin{cases} a - ib = 0 \\ 2a - ic = 0 \end{cases} \tag{1}
$$

Risolviamolo con le matrici:

$$
\begin{array}{rc}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -i & 0 \end{array}\right] \\
E_{21}(-2) & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & -i & 0 \end{array}\right] \\
E_2(-i/2) & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
$$

Essendo la terza colonna non dominante, l'incognita c è un parametro libero, quindi risolvendo:

$$c = \alpha$$
$$b = \frac{1}{2}\alpha$$
$$a = \frac{i}{2}\alpha$$

Questo ci dice che un generico vettore di $U^\perp$ è $\begin{bmatrix} \frac{i}{2}\alpha & \frac{1}{2}\alpha & \alpha \end{bmatrix}^T$ quindi una base per $U^\perp$ è data dal vettore $\begin{bmatrix} i & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ (vettore ottenuto mettendo $\alpha = 2$, potevamo porre α uguale a qualsiasi altro numero di $\mathbb{C}$, ma con il 2, per comodità, abbiamo eliminato i denominatori).

Vediamo adesso l'altro metodo per trovare il complemento ortogonale di U, che sfrutta pesantemente la teoria. Ricordiamo la proposizione:

PROPOSIZIONE 1. *Sia A una matrice $m \times n$, allora*

1. *$N(A)$ è il complemento ortogonale di $C(A^H)$ in $\mathbb{C}^n$.*
2. *$N(A^H)$ è il complemento ortogonale di $C(A)$ in $\mathbb{C}^m$.*

Vediamo come sfruttare questo risultato, nel nostro caso facciamo riferimento al punto 2: all'inizio abbiamo applicato l'Eliminazione di Gauss sulla matrice fatta dai 3 vettori u_1, u_2, u_3 e trovando una base di U abbiamo sostanzialmente trovato una base dello spazio delle colonne di quella matrice, quindi

$$U = C(A)$$

Dunque per trovare il complemento ortogonale di U, facciamo l'H-trasposta di A e ne calcoliamo lo spazio nullo essendo, per via della proposizione ricordata, che

$$U^\perp = N(A^H)$$

Sia dunque

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -i \\ i & 0 & -1 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

allora

$$A^H = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 2 & 0 & -i \\ i & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamone lo spazio nullo, con l'Eliminazione di Gauss:

$$A^H = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 2 & 0 & -i \\ i & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_{21}(-2) \\ E_{31}(-i) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 2i & -i \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_2(-i/2) \\ E_{32}(2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolare lo spazio nullo di questa matrice equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a - ib = 0 \\ b - \frac{1}{2}c = 0 \end{cases}$$

Non c'è l'ultima riga perchè è tutta di zeri.

Risolviamolo con le matrici (per come è fatto non serve neanche fare l'Eliminazione di Gauss):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right]$$

Essendo la terza colonna non dominante, l'incognita c è un parametro libero, quindi risolvendo:

$$c = \alpha$$
$$b = \frac{1}{2}\alpha$$
$$a = \frac{i}{2}\alpha$$

Quindi lo spazio nullo di A^H ha come base il vettore $\begin{bmatrix} i & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ che è quindi anche una base per $U^\perp$.

(b) Per trovare una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ bisogna prendere una base qualsiasi di $\mathbb{C}^3$, renderla ortogonale con l'algoritmo di Gram-Schmidt e poi normalizzeremo i vettori trovati.

Ricordando che dato uno spazio vettoriale W e un suo sottospazio V, allora

$$W = V \oplus V^\perp$$

Possiamo scrivere allora $\mathbb{C}^3 = U \oplus U^{\perp}$ e quindi una base di $\mathbb{C}^3$ è data dai vettori che formano una base di U uniti a quello di base di $U^{\perp}$. dunque una base di $\mathbb{C}^3$ è:

$$\mathscr{B} = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt per rendere tale base ortogonale. tale base la chiameremo: $\mathscr{B}' = \{w_1, w_2, w_3\}$

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1 \\ w_2 &= u_2 - \alpha_{12} w_1 \\ w_3 &= u_3 - \alpha_{13} w_1 - \alpha_{23} w_2 \end{aligned}$$

Con

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } w_i = 0 \\ \frac{(w_i|u_j)}{(w_i|w_i)} & \text{se } w_i \neq 0 \end{cases}$$

Applichiamo dunque Gram-Schmidt:

(GS1)

$$w_1 = u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$$

(GS2)

$$w_2 = u_2 - \alpha_{12} w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix}$$

(GS3)

$$w_3 = u_3 - \alpha_{13}w_1 - \alpha_{23}w_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$- \frac{\begin{bmatrix} 1 & i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Quindi una base ortogonale di $\mathbb{C}^3$ è:

$$\mathscr{B}' = \left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Notiamo che $w_1 = u_1$, per definizione dell'algoritmo, e $w_3 = u_3$ perchè era già ortogonale agli altri due essendo un vettore del complemento ortogonale; quindi l'algoritmo è servito semplicemente per "sistemare" u_2.

Per rendere ortonormale questa base dobbiamo calcolare la norma di ogni vettore e e poi dividere ogni componente per essa. Calcoliamo le norme, ricordando che

$$\|v\| = \sqrt{v^H v}$$

Dunque:

$$\|w_1\| = \sqrt{2}.$$
$$\|w_2\| = \sqrt{3}.$$
$$\|w_3\| = \sqrt{6}.$$

Abbiamo così terminato questo punto trovando la base ortonormale (che chiameremo $\mathscr{A}$):

$$\mathscr{A} = \left\{ v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix} \quad v_3 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Per calcolare la proiezione del vettore v, ricordiamo come si calcolano le proiezioni ortogonali su un sottospazio U:

PROPOSIZIONE 2. *Sia U un sottospazio dello spazio vettoriale V, $\mathscr{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ base ortogonale di U, allora per ogni elemento $v \in V$ si ha che la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U è*

$$P_U(v) = \frac{(u_1|v)}{(u_1|u_1)}u_1 + \frac{(u_2|v)}{(u_2|u_2)}u_2 + \ldots + \frac{(u_n|v)}{(u_n|u_n)}u_n \tag{2}$$

Inoltre se $\mathscr{A} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base ortonormale di U, allora la formula 2 diventa

$$\begin{aligned} P_U(v) &= (w_1|v)w_1 + (w_2|v)w_2 + \ldots + (w_n|v)w_n \\ &= w_1 w_1^H v + w_2 w_2^H v + \ldots + w_n w_n^H v \\ &= (w_1 w_1^H + w_2 w_2^H + \ldots + w_n w_n^H)v \end{aligned} \tag{3}$$

Dalla (3) si capisce che la matrice P dell'applicazione lineare della proiezione ortogonale è

$$P = w_1 w_1^H + w_2 w_2^H + \ldots + w_n w_n^H$$

Un altro modo per ottenere P è $P = QQ^H$ dove la matrice Q è una matrice che ha come colonne i vettori della base ortonormale.

Nota bene: bisogna usare solo la base di U, non di $\mathbb{C}^3$!

Detto questo calcoliamoci la proiezione ortogonale di v su U nei diversi modi che ci ha illustrato la proposizione 2:

Usando la base ortrogonale di U

La base ortogonale di U è fatta dai primi 2 vettori di $\mathscr{B}'$:

$$\left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix} \right\}$$

Applichiamo la formula (2) della proposizione 2:

$$
\begin{aligned}
P_U(v) &= \frac{(w_1|v)}{(w_1|w_1)}w_1 + \frac{(w_2|v)}{(w_2|w_2)}w_2 \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 1 & i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 \\ i \\ 2i \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Quindi

$$P_U(v) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 \\ i \\ 2i \end{bmatrix}$$

Usando la base ortonormale di U

La base ortonormale di U è fatta dai primi 2 vettori di $\mathscr{A}$:

$$\left\{ v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix} \right\}$$

Applichiamo la formula (3) della proposizione 2:

$$
\begin{aligned}
P_U(v) &= (v_1v_1^H + v_2v_2^H)v = \\
&= \left(\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i & -i \end{bmatrix} \right)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \left(\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & -1 \\ i & -1 & 1 \end{bmatrix} \right)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -i & -i \\ i & 5 & -2 \\ 2i & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 \\ i \\ 2i \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Quindi

$$P_U(v) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 \\ i \\ 2i \end{bmatrix}$$

Teniamo presente che la matrice P trovata è quella associata alle basi canoniche su dominio e codominio per l'applicazione

$$P_U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

Usando la matrice Q

La matrice Q è una matrice che ha come colonne i vettori della base ortonormale di U:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \qquad Q^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Allora la matrice di proiezione P è data da $P = QQ^H$:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -i & -i \\ i & 5 & -2 \\ 2i & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} P_U(v) &= Pv \\ &= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -i & -i \\ i & 5 & -2 \\ 2i & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 \\ i \\ 2i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi

$$P_U(v) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 \\ i \\ 2i \end{bmatrix}$$

In tre modi diversi abbiamo sempre trovato il vettore $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & i & 2i \end{bmatrix}^T$. Come facciamo a capire se abbiamo fatto giusto?

Dalla teoria (e un po' di immaginazione) sappiamo che $v - P_U(v) = w$ dove $w \in U^\perp$ Quindi per vedere se abbiamo fatto giusto verifichiamo che $w \in U^\perp$ (non è una vera e propria dimostrazione, ma se verifichiamo che $w \in U^\perp$ ci sono alte probabilità di aver fatto tutto giusto).

$$w = v - P_U(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 \\ i \\ 2i \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -2i \end{bmatrix}$$

Il vettore w così trovato sta in $U^\perp$ infatti

$$U^\perp = \langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle$$

e

$$w = \alpha \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

con $\alpha = -\frac{i}{6}$.