Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 6 luglio 2017 — Compito A

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si enunci il teorema nullità + rango e lo si applichi per dimostrare che, date le applicazioni lineari $f\colon U \to V$ e $g\colon V \to W$, si ha

$$\dim \operatorname{Im}(g \circ f) \leq \dim \operatorname{Im}(f) \qquad \text{e} \qquad \dim \operatorname{Im}(g \circ f) \leq \dim \operatorname{Im}(g)$$

T2) Si dia la definizione di H-trasposta e di rango di una matrice e si dimostri che, data la matrice $\mathbf{A}$ di forma $m \times n$, allora $\operatorname{rk}(\mathbf{A}^H\mathbf{A}) = \operatorname{rk}(\mathbf{A})$.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 & 8 & 4 \\ 1-\alpha & \alpha-1 & 2-2\alpha & 3-3\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3\alpha-2 \\ 3 & -3 & 8 & 11 & \alpha+4 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la P^TLU. Per $\alpha = 1$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_1)$ e una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_1)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Si dimostri che $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_2; \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3; \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^3$) è una base di $\mathbb{C}^3$. Si consideri poi l'unica applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$$
$$f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$$
$$f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_3$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\beta & 2\beta-3 & 2\beta-6 \\ \beta & 3-\beta & 6-\beta \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.