Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 7 aprile 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3	

☐ (1) Esiste una matrice $\mathbf{A}$ 4×4 il cui polinomio caratteristico ha grado 3?

☐ (2) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+z \\ y^2 \\ y+z \end{bmatrix}$. È un'applicazione lineare?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale e $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente. L'insieme $\{\mathbf{v}_1; 2\mathbf{v}_2; -\mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente?

T1) Si diano le seguenti definizioni: (1) applicazione lineare, (2) insieme di vettori linearmente indipendente. Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare iniettiva e sia $\{\mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_n\}$ una base di V. Si dimostri che $\{f(\mathbf{v}_1); \dots; f(\mathbf{v}_n)\}$ è un insieme linearmente indipendente di vettori di W.

T2) Si dia la definizione di prodotto interno in uno spazio vettoriale e si dimostri che, se $(\cdot \mid \cdot)$ è un prodotto interno su V e si pone $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \mid \mathbf{v})$, questo definisce una norma su V.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & \alpha-5 & 10 & \alpha \\ 6 & 1 & \alpha+14 & 3 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 5$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_5)$. Inoltre si interpreti $\mathbf{A}_5$ come la matrice completa di un sistema lineare e si trovino tutte le soluzioni del sistema.

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Sia $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^4$ e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$.

(1) Si trovi la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $[2\ -1\ 0\ 1]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = [2\ -1\ 0\ 1]^T$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.

E3) Si consideri la matrice ($\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile; si determini, quando esiste, una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$. Esiste una base ortogonale di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_2$?