Esercizio 1

All'interno di una sfera di raggio R posta nel vuoto esiste una densità di carica $\boldsymbol{\rho = \rho_0 \frac{r^2}{R^2}}$ dove r è la distanza dal centro della sfera e $\boldsymbol{\rho_0}$. Determinare:

1. **La carica totale della sfera**
2. **Il campo elettrico in tutto lo spazio**
3. **Il valore della densità superficiale di carica σ uniforme da disporre sulla superficie della sfera affinché il campo elettrico esterno alla sfera risulti nullo**

1. La carica totale all'interno della sfera si ottiene integrando la densità di carica sul volume

$$Q = \int_0^R \rho d\tau = \int_0^R \rho_0 \frac{r^2}{R^2} 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0}{R^2}\int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{5}$$

2. Essendo la carica distribuita nel volume dotato di simmetria sferica, il campo elettrico è in orni punto radiale e dipende dalla distanza dal centro. Applicando Gauss utilizzando una superficie sferica ($4\pi r^2$) otteniamo:

$$\begin{cases} E4\pi r^2 = \dfrac{\int_0^r \rho d\tau}{\varepsilon_0} = \dfrac{4\pi\rho_0 r^5}{R^2 5\varepsilon_0} \dashrightarrow E = \dfrac{\rho_0 r^3}{5R^2\varepsilon_0} & r < R \\ E4\pi r^2 = \dfrac{\int_0^R \rho d\tau}{\varepsilon_0} = \dfrac{4\pi\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0} \dashrightarrow E = \dfrac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$$

3. Un densità di carica σ superficiale disposta sulla sfera produce un campo che è calcolabile sempre con Gauss utilizzando un superficie sferica

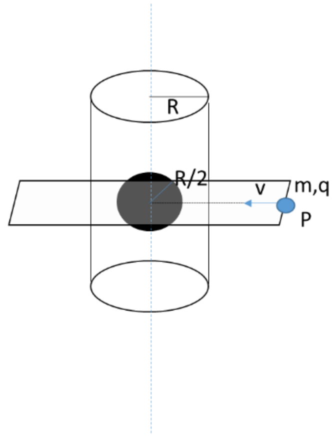
$$\begin{cases} E = 0 \quad r < R \ \ (non\ c'è\ carica) \\ E4\pi r^2 = \dfrac{\int \sigma dS}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \dashrightarrow E = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \qquad r > R \end{cases}$$

Affinché il campo elettrico complessivo si annulli all'esterno della sfera sarà sufficiente imporre che per $r > R$ la somma dei due campi sia pari a zero, pertanto:

$$\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r^2} = 0 \dashrightarrow \sigma = -\frac{\rho_0 R}{5}$$

Esercizio 2

Un cilindro infinito di raggio R=10 cm e carico con densità uniforme ρ=0.1 C/m³ ha al suo interno, una cavità sferica di raggio R/2 il cui centro giace sull'asse del cilindro. Si calcoli sul piano equatoriale della sfera perpendicolare all'asse del cilindro:



1. **Il campo elettrico nel punto P distante 3R dal centro della sfera**
2. **La velocità che deve avere una particella di massa m=10^{-5} Kg e carica q=10^{-4} C lanciata dal punto P per arrivare con velocità nulla sul bordo del cilindro.**

1. Possiamo immaginare il sistema composto da un cilindro pieno con densità di carica ρ ed una sfera con densità –ρ. Il campo in ogni punto del piano equatoriale può essere calcolato come sovrapposizione dei due contributi, sfera e cilindro, diretti entrambi radialmente. Applicando Gauss per r>R e prendendo una superficie sferica per la sfera e una superficie cilindrica per il cilindro otteniamo:

$$\begin{cases} E_{sfera} 4\pi r^2 = \dfrac{-\rho 4\pi (\frac{R}{2})^3}{3\varepsilon_0} \rightarrow E_{sfera} = \dfrac{-\rho R^3}{24\varepsilon_0 r^2} \\ E_{cilindro} 2\pi r h = \dfrac{\rho 2\pi R h}{\varepsilon_0} \rightarrow E_{cilindro} = \dfrac{\rho R}{\varepsilon_0 r} \end{cases}$$

Nel punto P distante r=3R il campo totale è pari a

$$E = E_{sfera} + E_{cilindro} = \frac{-\rho R}{216\varepsilon_0} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{72}\right) = 37.6 * 10^8\ V/m$$

2. Per la conservazione dell'energia possiamo affermare che

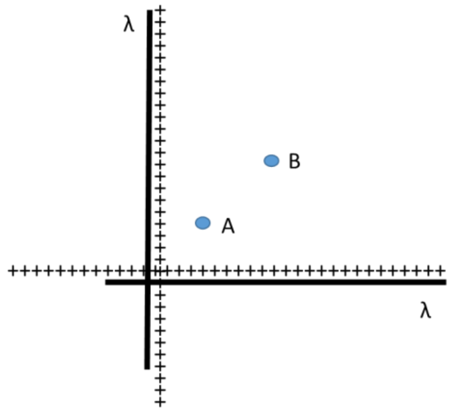
$$\frac{1}{2} m v^2 + qV(3R) = qV(R) \rightarrow v = \sqrt{\frac{2q}{m}(V(R) - V(3R))}$$

Bisogna quindi calcolare la variazione di potenziale tra R e 3R. Integriamo il campo elettrico tra questi due punti:

$$\big(V(R) - V(3R)\big) = \int_R^{3R} (\frac{-\rho R^3}{24\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho R}{\varepsilon_0 r}) dr = \frac{\rho R^3}{24\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3R} - \frac{1}{R}\right) + \frac{\rho R}{\varepsilon_0}\ln(3) = -\frac{\rho R^2}{36\varepsilon_0} + \frac{\rho R}{\varepsilon_0}\ln(3)$$
$$= 12.3 * 10^8\ V$$

Di conseguenza la velocità iniziale della particella è $v = 1.6 * 10^5\ m/s$

Esercizio 3



Due fili infiniti con densità di carica lineare λ= 10^{-9}C/m sono posti ad angolo retto l'uno rispetto all'altro. Una carica q= 10^{-3}C e massa m=0.1 g è ferma nel punto P(L,L) con L=1m. Calcolare la forza in modulo cha agisce sulla carica. La carica è quindi lasciata libera di muoversi. Calcolare la velocità con cui arriva nel punto B (2L, 3L)

I due fili generano dei campi radiali rispettivamente lungo l'asse y e lungo l'asse x. La forza che agisce sulla carica è data dalla sovrapposizione dei campi generati dai due fili infiniti

$\vec{F} = q\vec{E}_{tot}\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{X}\hat{X} + \frac{1}{Y}\hat{Y}\right) - -> F = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{1}{L^2} + \frac{1}{L^2}} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 L}\sqrt{2} = 2.5 * 10^{-2}\ N$

Possiamo calcolare la velocità utilizzando la conservazione dell'energia totale elettrostatica

$$qV(L,L) = \frac{1}{2}mv^2 + qV(2L,3L) \rightarrow v = \sqrt{\frac{2q}{m}(V(L,L) - V(2L,3L))}$$

La differenza di potenziale tra i due punti è calcolabile tramite l'equazione$\Delta V = \int Edl$, scegliendo un qualsiasi percorso che lega il punto (L,L) con il punto (2L,3L). Scegliamo un percorso parallelo all'asse x tra L e 2L ed uno parallelo all'asse delle y tra L e 3L

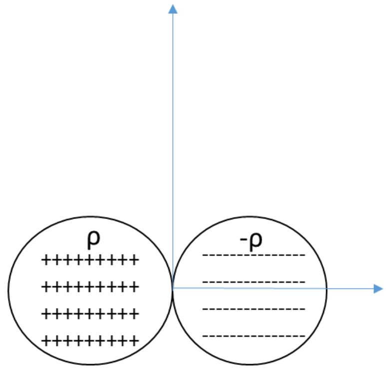
$$V(L,L) - V(2L,3L) = \int_L^{2L} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}dx + \int_L^{3L} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}dy = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}ln(6) = 32.22\ V$$

Pertanto la velocità della particella è $v = 0.8\ m/s$

Esercizio 4

Due sfere di raggio R disposte come in figura sono cariche uniformemente con densità di carica uguale e opposta ρ. Determinare:

1. **Il dipolo equivalente del sistema**
2. **Il campo elettrico nel punto di contatto (x=0) e nel centro della sfera di destra (x=R) e nel punto x=R/2.**



La carica totale di una sfera è

$$Q = \int \rho d\tau = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

La distanza tra le due sfere è 2R, quindi il sistema è visto come un dipolo caratterizzato da un momento

$$p = 2RQ = \rho \frac{8}{3}\pi R^5$$

Il campo elettrico nel punto di contatto è pari alla somma dei campi generati dalle due sfere

$$E(x=0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Mentre nel centro della sfera di destra, il campo elettrico è solo dato dalla distribuzione di carica sferica della sfera di sinistra

$$E(x=R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (2R)^2} = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2}$$

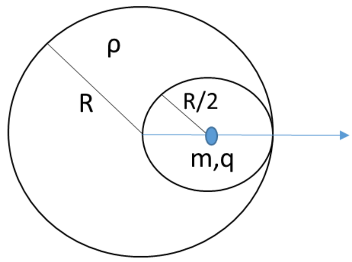
Nel punto x=R/2, esiste campo elettrico anche della sfera negativa che è calcolabile con Gauss

$$E_s 4\pi(R/2)^2 = \frac{\rho 4\pi (\frac{R}{2})^3}{3\varepsilon_0} \rightarrow \ E_s = \frac{\rho R}{6\varepsilon_0}$$

Il campo elettrico totale vale

$$E(x=R/2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{\rho R}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho R}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0}$$

Esercizio 5



Una distribuzione di carica sferica in figura ha densità uniforme ρ=10^{-6}C/m^{3} e raggio R=1 m e al suo interno è presente una regione anch'essa sferica di raggio R/2 priva di carica, nel cui centro viene posta con velocità nulla una carica puntiforme di carica q=10^{-6} C e massa m=10^{-6} Kg. Calcolare:

1. **Il campo elettrico lungo la direzione x all'interno della regione vuota**
2. **Il tempo che impiega la carica a raggiungere il bordo della superficie sferica vuota.**

Se nel centro viene posto un dipolo con momento di dipolo p= 10^{-8} Cm parallelo all'asse x, calcolare il lavoro necessario per ruotare il dipolo fino a portarlo in direzione che forma con l'asse x un angolo $\theta = 30°$

All'interno della distribuzione di carica il campo elettrico è parallelo e concorde all'asse x e pertanto, essendo inizialmente ferma, la particella si muoverà lungo l'asse delle x. Il campo elettrico si calcola sovrapponendo l'effetto di una sfera senza foro di densità uniforme ρ con centro nell'origine e quello di una sfera di carica negativa con densità uniforme -ρ centrata in R/2. I due contributi in un punto generico interno al foro e lungo x saranno calcolabili applicando Gauss

$$\begin{cases} E_+ 4\pi x^2 = \dfrac{\rho\, {}^4\!/_3\, \pi x^3}{\varepsilon_0} \rightarrow E_+ = \dfrac{\rho x}{3\varepsilon_0} \\ E_- 4\pi(\dfrac{R}{2} - x)^2 = \dfrac{\rho\, {}^4\!/_3\, \pi (\frac{R}{2} - x)^3}{\varepsilon_0} \rightarrow E_- = \dfrac{\rho(\frac{R}{2} - x)}{3\varepsilon_0} \end{cases}$$

Pertanto il campo complessivo è la somma dei due vettori che sono paralleli e concordi lungo l'asse delle x

$$E = E_+ + E_- = \frac{\rho R}{6\varepsilon_0} = 3.8 * 10^4\ V/m$$

Essendo il campo uniforme all'interno del foro, la particella si muove di moto rettilineo uniforme con una accelerazione pari $a = \frac{qE}{m} = \frac{q\rho R}{m6\varepsilon_0}$. IL moto sarà $x = \frac{1}{2}\frac{q\rho R}{m6\varepsilon_0}t^2$. Pertanto il tempo impiegato a raggiungere il bordo ($x = \frac{R}{2}$) sarà

$$t = \sqrt{\frac{m6\varepsilon_0}{q\rho}} = 7.3 * 10^{-3} s$$

Il lavoro per far ruotare il dipolo è pari a

$$W = -\Delta U = (-\vec{p} \cdot \overrightarrow{E})_i - (-\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E})_f = -pE + pE\cos\theta = pE(\cos\theta - 1) = p\frac{\rho R}{6\varepsilon_0}(\cos\theta - 1)$$
$$= -5 * 10^{-5}\ J$$

(- è giustificato dal fatto che il lavoro deve essere effettuato dall'esterno)

Esercizio 6

In un tubo da vuoto, gli elettroni (q=-1.6x10^{-19} C, m=9.1x10^{-31} Kg sono emessi da un filamento riscaldato e ricevuti da un elettrodo metallico che funge da collettore distante parallelamente d= 5 mm dal filamento. Il potenziale elettrico tra i due segue la legge $V(x) = kx^{4/3}$, dove x è la distanza generica dall'emettitore e k=30 V/m$^{4/3}$. Determinare:

1. **La densità superficiale sul collettore**
2. **Assumendo che gli elettroni partono da fermi, la velocità con cui arrivano sul collettore**
3. **L'espressione della densità di carica di volume nel punto d/2.**

Dal teorema di Coulomb sappiamo che il campo elettrico sulla superficie di un conduttore è proporzionale alla densità di carica superficiale. Il campo elettrico è calcolabile come gradiente del potenziale cambiato di segno in questo caso, il problema è unidimensionale lungo x

$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{4}{3}kx^{\frac{1}{3}}$$

Dal teorema di Coulomb $\sigma = \varepsilon_0 E(x = d) = -\frac{4}{3}\varepsilon_0 k d^{\frac{1}{3}} = -6.1 * 10^{-11}\ C/m^2$

La velocità di arrivo degli elettroni sul collettore può essere calcolata con la conservazione dell'energia:

$$q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2qkd^{4/3}}{m}} = 9.5 * 10^4\ m/s$$

La densità di carica di volume tra il collettore ed emettitore può essere invece calcolata applicando la prima legge di Gauss:

$$\rho(x) = \varepsilon_0 \nabla E = \varepsilon_0 \frac{dE}{dx} = -\frac{4}{9}k\varepsilon_0 x^{-2/3} \longrightarrow \rho\left(x = \frac{d}{2}\right) = -6.4 * 10^{-9}\ C/m^3$$

Esercizio 7

In una regione cilindrica dello spazio vuoto è presente un campo elettrico il cui potenziale è dato dalla funzione $V(x) = k(x^2 - y^2)$ con k costante. Noto il campo elettrico in un punto P (1,2,0), E(P) = 25 V/m della regione cilindrica, si calcoli:

1. **Il valore della costante k**
2. **La carica totale contenuta nel cilindro.**

Utilizzando la relazione E=-gradV, si ottengono le componenti cartesiane del campo elettrico all'interno della regione cilindrica

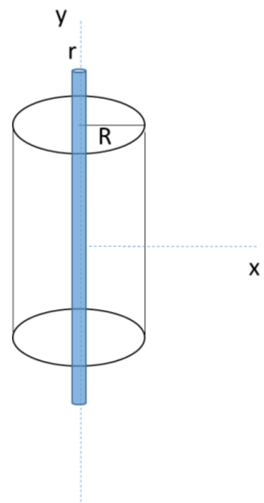
$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{dV}{dx} = -2kx \\ E_y = -\dfrac{dV}{dy} = 2ky \\ E_z = -\dfrac{dV}{dz} = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza il modulo del campo elettrico nel punto P vale $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 2k\sqrt{x^2 + y^2} = 2k\sqrt{5} \rightarrow$ $k = \frac{E}{2\sqrt{5}} = 5.59\, V/m^2$

Utilizzando la forma locale dell'equazione di Gauss (I equazione di Maxwell), $\nabla E = \rho/\varepsilon_0$ si ottiene

$\rho = \varepsilon_0 \left(\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz}\right) = \varepsilon_0(-2C + 2C) = 0$ la carica nel cilindro è nulla.

Esercizio 8



Un sottile filo rettilineo infinito di raggio r=0.5 mm ha una densità lineare di carica λ=10^{-9} C/m. Il filo è circondato da una superficie cilindrica di raggio R=1 cm con densità superficiale σ. Calcolare:

1. **Il valore di σ affinché il campo elettrico all'esterno della superficie sia nullo**
2. **Il campo elettrico e la differenza di potenziale tra il filo interno e la superficie cilindrica.**

Il campo elettrico all'esterno della superficie cilindrica è dato dalla sovrapposizione di quello generato dal filo e dalla superfice cilindrica. Quest'ultima può essere calcolata con il teorema di Gauss utilizzando una superficie cilindrica di raggio r

$$E_{cilindro} 2\pi rh = \frac{\sigma 2\pi Rh}{\varepsilon_0} \rightarrow E_{cilindro} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$$

Mentre il campo elettrico del filo è $E_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi r}$

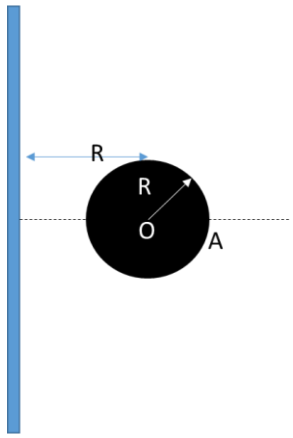
Quindi imponendo $E_{cilindro} + E_{filo} = 0 \rightarrow \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} + \frac{\lambda}{2\pi r} = 0 \rightarrow \sigma = -\frac{\lambda}{2\pi R} = -1.6 \cdot 10^{-8}\ C/m^2$

Il campo elettrico all'interno della superficie cilindrica è solo quello dovuto al campo del filo, perché per Gauss non c'è carica dovuta alla superficie cilindro. La differenza di potenziale tra r_1 e R vale

$$\Delta V = \int_{r_1}^{R} \frac{\lambda}{2\pi r} dr = \frac{\lambda}{2\pi} ln\left(\frac{R}{r_1}\right) = 2 \cdot 10^{-10}\ V$$

Esercizio 9

Il centro di una sfera di raggio R=50 cm e caratterizzata da una densità di carica uniforme ρ=5x10^{-7} C/m^3 si trova a distanza 2R da un piano infinito con densità superficiale di carica σ =10^{-7} C/m^2. Si calcoli:



1. **Dove si annulli il campo elettrico lungo l'asse tra il piano e il centro della sfera**
2. **La differenza di potenziale tra il centro della sfera (O) ed il bordo della sfera (A) lungo l'asse.**

Bisogna prima distinguere due intervalli: uno fuori la sfera ed una dentro la sfera. Fuori la distribuzione sferica il campo si annulla quando

$$E_{piano} + E_{sfera} = 0 \rightarrow \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho\, {}^4/_3\, \pi R^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0 \rightarrow r = \sqrt{\frac{2\rho R^3}{3\sigma}} = 64.5\ cm$$

Che corrisponde ad una distanza dall'origine $x = 2R - r = 2R - \sqrt{\frac{2\rho R^3}{3\sigma}} = 35.4\ cm$

Dentro la sfera il campo elettrico dato dalla sfera si calcola con Gauss ottenendo

$4\pi r^2 E_{sfera} = \frac{\rho\, {}^4/_3\, \pi r^3}{\varepsilon_0} \rightarrow E_{sfera} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$

Pertanto il campo totale si annulla se

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = 0 \rightarrow r = \frac{3\sigma}{2\rho} = 30\ cm$$

Che corrisponde ad una distanza dall'origine pari a $x = 2R - r = 70\ cm$

La differenza di potenziale dovuto dal piano tra il punto 2R e 3R si ottiene integrando il campo elettrico costante generato dal piano

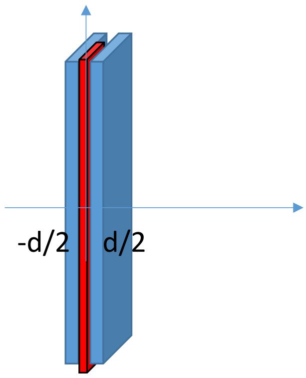
$$\Delta V_{piano} = \int_{2R}^{3R} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} R = 2.82\ kV$$

Mentre la differenza di potenziale tra il centro della sfera dovuto alla sfera ed il suo bordo tra si ottiene integrando il suo elettrico interno alla sfera

$$\Delta V_{sfera} = \int_0^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} = 2.35\ kV$$

Da cui $\Delta V_{piano} + \Delta V_{sfera} = 5.2\ kV$

Esercizio 9



Una densità di carica di volume ρ=10^{-5} C/m^3 è racchiusa in uno strato piano infinito di larghezza d=10 cm. Al centro dello strato carico c'è un piano anch'esso infinito con densità superficiale σ. Calcolare:

1. **Il campo elettrico in tutto lo spazio in funzione della distanza dal piano.**
2. **Calcolare il valore della distribuzione σ affinché il valore della differenza di potenziale tra il bordo dello strato piano (x=d/2) ed il piano carico (x=0) sia ΔV=10kV**

Il campo elettrico è la somma del contributo dovuto alla densità volumetrica e di quella di superficie. Data la simmetria del problema il campo è ovunque diretto come l'asse x. In un punto generico all'interno della distribuzione di volume, il campo elettrico generato dal piano è

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Invece la distribuzione volumetrica si calcola applicando Gauss e prendendo una superficie cilindrica di area di base A e altezza x, ottenendo:

$$\frac{d}{2} > x > -\frac{d}{2} \qquad E2A = \frac{\rho A x}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho x}{2\varepsilon_0}$$

Di conseguenza $E_{tot} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho x}{2\varepsilon_0}$

Mentre per $x > \frac{d}{2}$, il campo dovuto allo strato piano sarà costante perché dovuto a tutta la carica contenuta nello strato spesso d

$$E_{tot} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

Calcoliamo la differenza di potenziale tra x=d/2 e x=0

$$\Delta V = \int_{d/2}^{0} \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho x}{2\varepsilon_0}\right) dx = -\frac{\sigma d}{4\varepsilon_0} + \frac{\rho d^2}{8\varepsilon_0}$$

Pertanto il valore di σ per ottenere una differenza di potenziale pari a 10kV è

$$\sigma = \frac{\rho d}{2} - \frac{4\varepsilon_0 \Delta V}{d} = -3 * 10^{-7}\ C/m^2$$

Due anelli di raggio R hanno una densità di carica lineare λ e sono disposti coassialmente a distanza d. Calcolare la minima distanza d in modo che il campo elettrico nel punto C lungo l'asse risulti nullo. Calcolare la velocità che una carica negativa (m, q) posta nel dintorno del punto C con velocità nulla passi per il centro di uno dei due anelli.

Lungo l'asse, il campo elettrico totale è dato dalla sovrapposizione dei campi generati dai due anelli. Ogni anello genera un campo elettrico lungo l'asse pari a

$$E(x) = \frac{\lambda R x}{2\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Ogni campo ha un massimo a distanza da proprio centro quando $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$

Di conseguenza per avere campo nullo bisogna portare i due anelli a distanza $d = 2x = 2\frac{R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}R$

Per calcolare la velocità con cui la particella partendo con velocità nulla in C arrivi nel centro di uno dei due dischi, imponiamo la conservazione dell'energia

$$-q\left(2V\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{2}mv^2 - q\left(V(0) + V\left(\sqrt{2}R\right)\right)$$

Il potenziale di un anello calcolato in un punto P lungo l'asse è

$$V(x) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2 + R^2}} \rightarrow \begin{cases} V\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0\sqrt{(5/2)}} \\ V(0) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \\ \left(\sqrt{2}R\right) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0\sqrt{3}} \end{cases}$$

Pertanto la velocità raggiunta dalla particella è

$$v = \sqrt{\frac{2q\lambda}{m\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5/2}}\right)}$$