COSTANTI FISICHE
Massa elettrone $m_e=9\times10^{-31}$ kg; carica elettrone $-e=1.6\times10^{-19}$ C;
$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$ (SI); $1/4\pi\varepsilon_0=9\times10^{9}$ (SI); $\mu_0=4\pi\ 10^{-7}$ (SI)

QUESITO 1

Enunciare il teorema di Gauss per il campo elettrico, spiegandone significato fisico e condizioni di validità.

ESERCIZIO 1

Un cilindrico conduttore cavo di lunghezza indefinita, raggio interno $\mathbf{R_2=5cm}$ e raggio esterno $\mathbf{R_3=6cm}$, contiene, in modo coassiale, un filo conduttore con densità di carica lineare $\boldsymbol{\lambda}$**=6.67 10^{-10} Cm^{-1}**.
Il sistema è isolato.

1- Determinare la distribuzione di carica indotta.
2- Ricavare il campo elettrico e il potenziale nello spazio in funzione della distanza r dall'asse del sistema. Dare la rappresentazione grafica delle funzioni E(r) e V(r).

Si consideri la nuova situazione in cui a distanza $\mathbf{R_P=10cm}$ dall'asse del sistema, in punti diametralmente opposti, vengono posti un'elettrone e un protone (trascurare gli effetti induttivi delle particelle sul cilindro).

3- Calcolare il lavoro totale del campo per portare il protone e l'elettrone sulla superficie del conduttore.

Successivamente l'armatura esterna del conduttore viene collegata a terra.

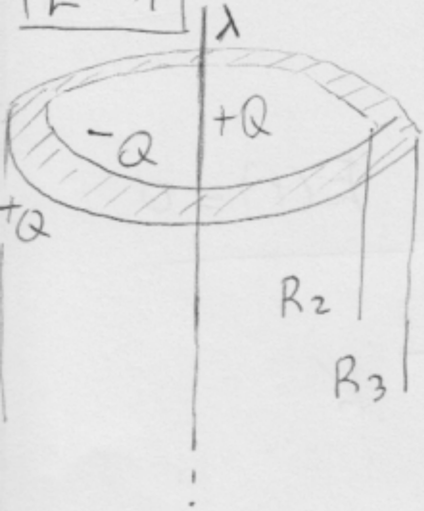
4- Calcolare nella nuova situazione di equilibrio la densità di energia del campo elettrico nella regione esterna e interna al sistema.

L'intercapedine tra R_1 e R_2 viene riempita di un materiale dielettrico lineare e omogeneo di costante dielettrica **K=3**.

5- Calcolare il vettore polarizzazione **P** e la densità di cariche di polarizzazione nel dielettrico.

APPELLO 6/7/2016 — SOLUZIONE

EX 1



1) Induzione completa tra filo e cilindro conduttore → sulle superfici compaiono le cariche $-Q\ (R_{int}) \to \sigma_2^-$
$+Q\ (R_{est}) \to \sigma_3^+$

Per unità di lunghezza:

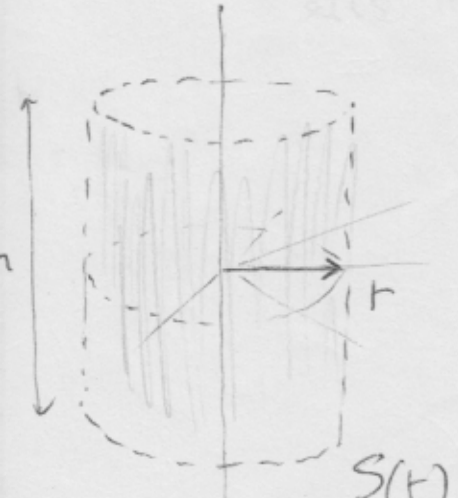
$$\lambda^+ = \sigma_2^- 2\pi R_2 = \sigma_3^+ 2\pi R_3$$

densità superficiale di carica

$$\sigma_2^{\mp} = \frac{6.67\ 10^{-10}}{2\pi\ 5\cdot 10^{-2}} = 2.1\cdot 10^{-9}\ C/m^2$$

$$\sigma_3^+ = \frac{6.67\cdot 10^{-10}}{2\pi\ 6\cdot 10^{-2}} = 1.8\cdot 10^{-9}\ C/m^2$$

2) Distribuzione di carica a simmetria cilindrica. Il campo dipende solo dalla distanza r dall'asse e le superfici equipotenziali (E cost ⊥) sono i cilindri coassiali.



Superficie Gaussiana

Teorema di Gauss

$$\oint_{S(r)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{interno a } S(r)}}{\epsilon_0}$$

$$\parallel$$

$$2\pi r h\, E(r)$$

(sulle basi del cilindro $\Phi = 0$)

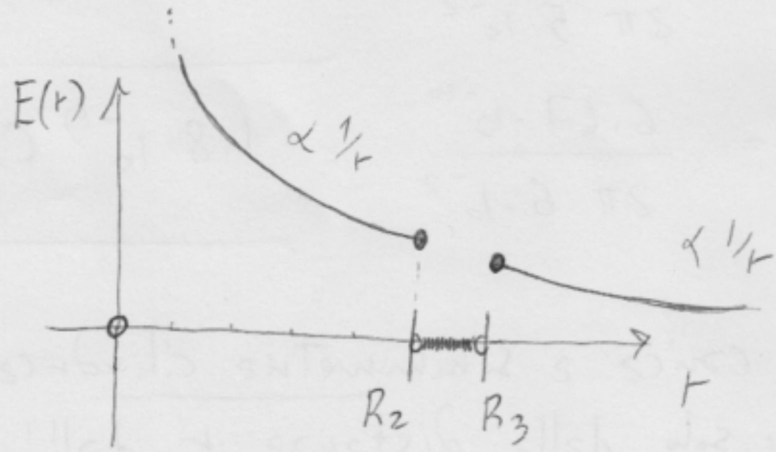
$0 < r \le R_2 \qquad 2\pi r \cancel{h} E(r) = \dfrac{\lambda \cancel{h}}{\epsilon_0}$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

$R_2 < r < R_3 \qquad Q_{int} = 0 \longrightarrow E(r) = 0$

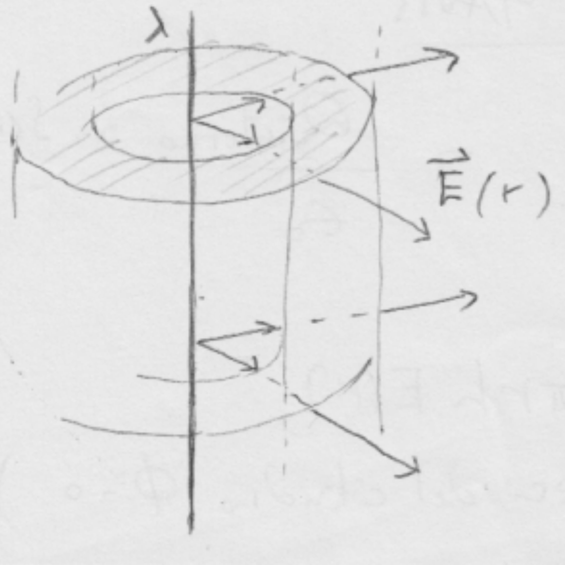
$R_3 \le r \qquad 2\pi r \cancel{h} E(r) = \overbrace{\sigma_3 2\pi R_3}^{\lambda} \cancel{h}$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$



$$E(R_i) = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0}$$

Le linee di campo sono radiali perpendicolari all'asse del cilindro e uscenti dall'asse



(B)

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{r_A}^{r_B} E(r)\,dr$$

Prendo come riferimento un punto qualunque $r_0 \geq R_3$

$$V(r) = V_0 - \int_{r_0}^{r} E(r)\,dr$$ *

...Non possiamo prendere come RIF V_∞ perchè $V(r)$ diverge

$V_0 = V(r_0) \equiv 0$ $\quad V_{RIFERIMENTO}$

$r \geq R_3$ $\quad V(r) = \cancel{V_0} - \int_{r_0}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,dr$

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

$R_2 < r < R_3$ $\quad V = \text{costante}$ $\quad$ conduttore in equilibrio

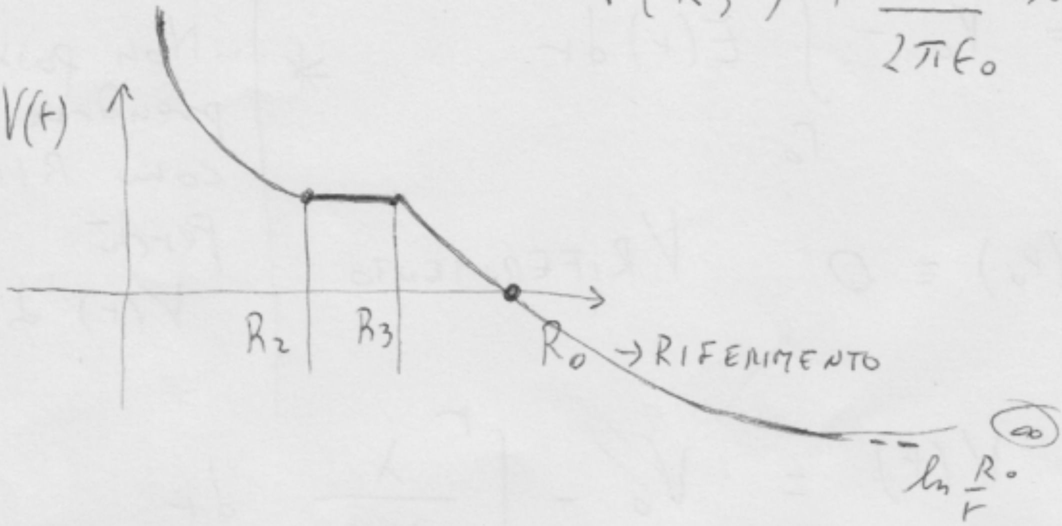
$$= V(R_3)$$

infatti $\quad V(r) = -\int_{r_0}^{r} E(r)\,dr = -\int_{r_0}^{R_3} E\,dr - \int_{R_3}^{r} \cancel{E\,dr}$

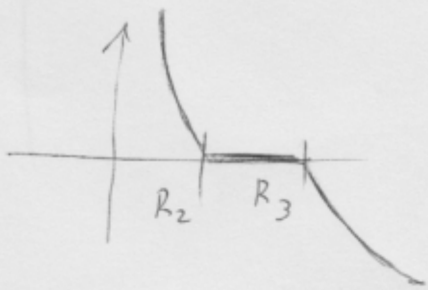
$$\text{Costante} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{R_3}$$

$0 < r \leq R_2 \qquad V(r) = -\int_{r_0}^{R_3} E\,dr - \int_{R_3}^{R_2} \cancel{E\,dr} - \int_{R_2}^{r} E\,dr$

$$V(R_3) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{r}$$



...Si poteva prendere come riferimento $r_0 = R_3$: sulla superficie del conduttore $V_0 = V(R_3) \equiv 0$



3) Principio di sovrapposizione

$$L_{TOT} = L(E_{conduttore}) + L(E_{\substack{particelle \\ p \leftrightarrow e}})$$

$$E_{TOT} = E_{CONDUTTORE} + E_p + E_e$$

$L = 0 \qquad L_e = -L_p$

$L_{pe} \neq 0$

Il campo del conduttore compie un lavoro totale nullo sul (protone + elettrone)

$$L = -q\Delta V_{cilindro}$$

$$L_{cilindro} = -p\Delta V + e\Delta V = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} q_p = p = +e \\ q_e = -e \end{array} \right.$$

MA:

$$L_{TOT} = L_{pe} = -\Delta U$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{ij} q_i V_j = \frac{-pe}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$L_{TOT} = \frac{ep}{8\pi\epsilon_0 r}\Bigg|_{R_p}^{R_3} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_p}\right)$$

$$= \frac{(1.6\cdot 10^{-19})^2}{2}\, 9\cdot 10^{9} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) 10^{+2}$$

$$= 7.7\cdot 10^{-28}\ \text{J}$$

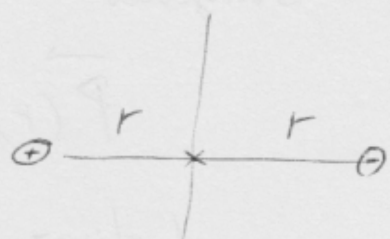
$L > 0$

Il campo compie lavoro

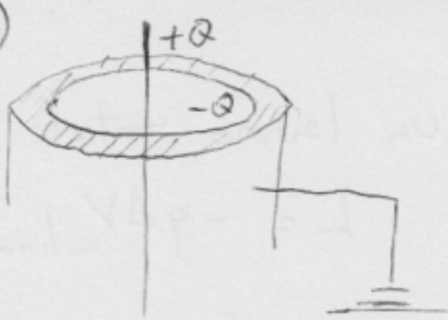
Si poteva calcolare anche come lavoro della F di coulomb tra p^+ ed e^- (attrattiva)

$$L_{\text{su ogni singola particella } (p,\, e)} = \int_{R_p}^{R_3} \frac{q_p q_e}{4\pi\epsilon_0 (2r)^2}$$

L = Lp + Le



4)



L'armatura esterna è scarica

$\Downarrow$

$$E = 0 \quad r \geq R_3$$

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \begin{cases} = 0 & r > R_2 \\ = \dfrac{\lambda^2}{8\pi^2 \epsilon_0 r^2} & 0 < r \leq R_2 \end{cases}$$

$r < R_3$:

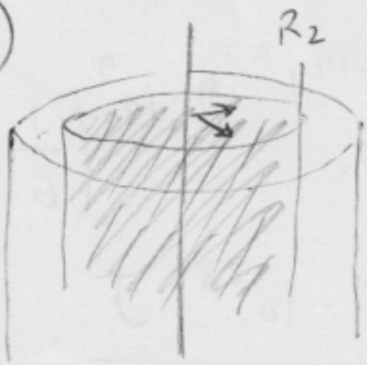
la situazione rimane invariata:

$$E = 0 \quad R_2 < r < R_3$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad r \geq R_2$$

---

5)



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{int \text{ LIBERE}}$$

Gauss in presenza di dielettrico

$$\Rightarrow D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad r < R_2$$

vettore spostamento

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

dielettrico lineare omogeneo $\Rightarrow \vec{P} = (K-1)\epsilon_0 \vec{E} = \dfrac{K-1}{K} \vec{D}$

$$\vec{P}(r) = \frac{K-1}{K} \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{u}_r$$ vettore Polarizzazione

(direzione come il campo D radiale uscente)

(D)

La densità di cariche di polarizzazione è <u>superficiale</u> nei "bordi" del dielettrico

$r = R_2$

$$\sigma_{POL}^{(+)} = |\vec{P}(R)| = \frac{K-1}{K} \underbrace{\frac{\lambda}{2\pi R_2}}_{\sigma_2} = \frac{2}{3} \cdot 2.1 \cdot 10^{-9}$$

$$= \frac{K-1}{K} \sigma_{LIBERE}$$

$$= \underline{1.4 \cdot 10^{-9} \ C/m^2}$$

per $r \to 0$
"bordo interno"

compare una carica di polarizz.

$$\lambda_{POL}^{(-)} = \frac{k-1}{k} \lambda$$

$$= \frac{2}{3} \ 6.67 \ 10^{-10}$$

$$= \underline{4.4 \cdot 10^{-10} \ C/m}$$