Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 8 febbraio 2016

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito A

T1) Data la definizione di rango di una matrice $\mathbf{A}$, si dimostri che il rango di $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ coincide con il rango di $\mathbf{A}$.

T2) Data la definizione di autovalore e autospazio di una matrice, si dimostri che se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi agli autovalori distinti λ_1, λ_2 e λ_3, allora l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ 2 & -2 & 3 & 6-\alpha \\ -1 & 1 & \alpha-2 & 2\alpha^2-3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la P^TLU. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_0)$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} -1 & -\beta+1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta-1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = 0$ si trovi una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_0$.