Soluzioni dei fogli di esercizi del corso di Analisi Matematica II
Corso di laurea in Informatica
Università di Verona
A. A. 2016/17
Docente: Simone Ugolini

Ultimo aggiornamento:

21 gennaio 2017

1

Soluzione 1.1. L'equazione differenziale può essere scritta come

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)\cdot x.$$

Notiamo che c'è una soluzione costante di questa equazione differenziale, ovvero $y = 1$. Tuttavia tale soluzione non risolve il problema di Cauchy.

Possiamo quindi scrivere

$$\int \frac{1}{y-1}\ dy = \int x\ dx.$$

Quindi,

$$\ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

dove C è una costante di integrazione. Perciò,

$$|y-1| = e^C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2},$$

ovvero

$$y = \pm e^C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + 1.$$

Quindi le soluzioni non costanti dell'equazione differenziale sono tutte e sole le funzioni

$$y = K \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + 1,$$

dove $K \in \mathbb{R}^*$.

Imponendo la condizione iniziale, otteniamo $K = -3e^{-\frac{1}{2}}$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y = -3e^{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}} + 1.$$

La soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione 1.2. L'equazione differenziale può essere scritta come

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+x^3}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\int\ dy = \int \frac{x^2}{1+x^3}\ dx.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale sono tutte e sole le funzioni

$$y = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C,$$

dove C è una costante di integrazione.

Imponendo la condizione iniziale, otteniamo $C = 2$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y = \frac{1}{3} \ln |1 + x^3| + 2.$$

Il più grande intervallo contenente 0 in cui la soluzione è definita è $]-1, +\infty[$. Per tutti gli x appartenenti a tale intervallo la soluzione può essere scritta più semplicemente come

$$y = \frac{1}{3} \ln(1 + x^3) + 2.$$

Soluzione 1.3. Sia $a \in]0, +\infty[$. È immediato verificare che la funzione $y(x) = 0$ per ogni $x \in]-a, a[$ è soluzione del problema.

Cerchiamo dunque una soluzione diversa da quella costantemente nulla. Possiamo dunque supporre, per semplicità, che $y(x) > 0$ per qualche $x \in]-a, a[$. Quindi, separando le variabili,

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \int dx,$$

ovvero

$$2\sqrt{y} = x + C,$$

ovvero

$$4y = x^2 + 2xC + C^2$$

per qualche $C \in \mathbb{R}$. Quindi,

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2 + C \cdot \frac{x}{2} + \frac{C^2}{4}.$$

Prendiamo ad esempio $C = 0$ e verifichiamo se $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ può essere soluzione per qualche valore di x.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2}x, \\ \sqrt{|y|} &= \frac{1}{2}\sqrt{x^2} = \frac{1}{2}|x|. \end{aligned}$$

Quindi, se $x \geq 0$, senz'altro l'equazione differenziale è soddisfatta. Se $x < 0$ dobbiamo aggiustare opportunamente i segni. Si vede che per soddisfare l'equazione differenziale in questo caso basta prendere $y(x) = -\frac{1}{4}x^2$.

In definitiva, una soluzione diversa da quella costantemente nulla è

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, & \text{se } x \geq 0; \\ -\frac{1}{4}x^2, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Volendo potremmo scrivere una famiglia formata da infinite soluzioni. Infatti, si può verificare che, per ogni $x_0 > 0$ e per ogni $x_1 < 0$ si ha che

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x - x_0)^2, & \text{se } x > x_0, \\ 0, & \text{se } x \in [x_1, x_0], \\ -\frac{1}{4}(x - x_1)^2, & \text{se } x < x_1, \end{cases}$$

è soluzione del problema.

Soluzione 1.4. L'equazione differenziale può essere scritta come

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2y + 1}{e^{2x}}.$$

Notiamo che c'è una soluzione costante di questa equazione differenziale, ovvero $y = -1$. Tuttavia tale soluzione non risolve il problema di Cauchy.

Possiamo quindi scrivere

$$\int \frac{1}{(y+1)^2}\, dy = \int e^{-2x}\, dx.$$

Quindi,

$$-\frac{1}{y+1} = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C,$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante di integrazione.

Perciò, le soluzioni non costanti dell'equazione differenziale sono tutte e sole le funzioni

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{-2x} - C} - 1 = \frac{(2 + 2C)e^{2x} - 1}{1 - 2Ce^{2x}}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ otteniamo $C = -\frac{1}{2}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

La soluzione trovata è definita ovunque, perciò l'intervallo massimale di definizione è $\mathbb{R}$.

Soluzione 1.5. L'equazione differenziale può essere scritta come

$$\frac{dy}{dx} = (y - 1) \cdot (y + 4).$$

Notiamo che ci sono due soluzioni costanti di questa equazione differenziale, ovvero $y = -4$ e $y = 1$. Tuttavia tali soluzioni non risolvono il problema di Cauchy.

Possiamo quindi scrivere

$$\int \frac{1}{(y-1)\cdot(y+4)}\,dy = \int dx.$$

Per calcolare l'integrale di sinistra possiamo scrivere la funzione integranda come somma di frazioni parziali, ovvero possiamo trovare due coefficienti A e B in $\mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(y-1)\cdot(y+4)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+4}.$$

Svolgendo i calcoli troviamo

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{1}{5}.$$

Ora,

$$\int \frac{1}{(y-1)\cdot(y+4)}\,dy = \int \frac{1}{5(y-1)}\,dy - \int \frac{1}{5(y+4)}\,dy = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{y-1}{y+4}\right| + C,$$

dove C è una costante di integrazione.

Inoltre,

$$\int dx = x + D,$$

dove D è una costante di integrazione.

Riassumendo,

$$\frac{1}{5}\ln\left|\frac{y-1}{y+4}\right| + C = x + D.$$

Ponendo $E = D - C$ otteniamo più semplicemente

$$\frac{1}{5}\ln\left|\frac{y-1}{y+4}\right| = x + E,$$

ovvero

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+4}\right| = 5x + 5E.$$

Perciò,

$$\left|\frac{y-1}{y+4}\right| = e^{5x+5E},$$

ovvero

$$\frac{y-1}{y+4} = \pm e^{5E}\cdot e^{5x}.$$

Ponendo $K = \pm e^{5E}$, si ottiene

$$\frac{y-1}{y+4} = K\cdot e^{5x},$$

ovvero
$$y = \frac{4Ke^{5x}+1}{1-Ke^{5x}}.$$
Quelle scritte sono tutte le soluzioni non costanti dell'equazione differenziale, al variare di K in $\mathbb{R}^*$.

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = -2$ otteniamo $K = -\frac{3}{2}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è
$$y = \frac{2(-6e^{5x-5}+1)}{2+3e^{5x-5}}.$$
La soluzione trovata è definita ovunque, perciò l'intervallo massimale di definizione è $\mathbb{R}$.

Soluzione 1.6. L'equazione differenziale può essere scritta come
$$\frac{dy}{dx} = (3+y^2)\cdot x.$$
Non vi possono essere soluzioni constanti di questa equazione. Separiamo dunque le variabili e integriamo.
$$\int \frac{1}{3+y^2}\,dy = \int x\,dx.$$
Otteniamo
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}x^2 + C.$$
Quindi,
$$y = \sqrt{3}\cdot\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \sqrt{3}C\right).$$
Imponendo la condizione iniziale otteniamo la soluzione
$$y = \sqrt{3}\cdot\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
il cui intervallo massimale di definizione è
$$\left]-\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}+1}, \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}+1}\right[.$$

2

Soluzione 2.1. L'equazione differenziale in questione è lineare. Moltiplico quindi entrambi i membri dell'equazione per $e^{A(x)}$, dove $A(x)$ è una antiderivata di -7. Ad esempio, possiamo prendere $A(x) = -7x$. Così facendo ottengo

$$(e^{-7x}y)' = e^{-7x} \cdot 2x$$

e dunque

$$e^{-7x}y = \int 2xe^{-7x}\ dx + C,$$

dove C è una costante di integrazione. Integrando per parti l'integrale dell'ultima equazione, ottengo che

$$e^{-7x}y = -\frac{2}{7}xe^{-7x} - \frac{2}{49}e^{-7x} + D + C,$$

dove D è un'altra costante di integrazione. Per semplicità, poniamo $K = D + C$ e concludiamo che tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale sono le funzioni

$$y = -\frac{2}{7}x - \frac{2}{49} + K \cdot e^{7x}.$$

Per finire, imponendo la condizione iniziale $y(0) = -1$ otteniamo la soluzione del problema di Cauchy, ovvero

$$y = -\frac{2}{7}x - \frac{2}{49} - \frac{47}{49} \cdot e^{7x}.$$

La soluzione non ha problemi di definizione e quindi l'intervallo massimale richiesto è proprio $\mathbb{R}$.

Soluzione 2.2. L'equazione differenziale data potrebbe essere risolta applicano il metodo di separazione delle variabili. Tuttavia si tratta anche di un'equazione differenziale lineare, che può dunque essere risolta come tale. Moltiplichiamo innanzitutto i due membri dell'equazione per un fattore integrante, ovvero $e^{\sin(x)}$. Così facendo otteniamo

$$(y \cdot e^{\sin(x)})' = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}.$$

Quindi,

$$y \cdot e^{\sin(x)} = \int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\ dx + C,$$

dove C è una costante di integrazione. Valutando l'ultimo integrale indefinito otteniamo

$$y \cdot e^{\sin(x)} = e^{\sin(x)} + D + C,$$

dove D è una costante di integrazione. Per semplicità, poniamo $K = D + C$ e concludiamo che tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale sono le funzioni

$$y = 1 + K \cdot e^{-\sin(x)}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ otteniamo la soluzione del problema di Cauchy, ovvero

$$y = 1 - e^{-\sin(x)}.$$

La soluzione non ha problemi di definizione e quindi l'intervallo massimale richiesto è proprio $\mathbb{R}$.

Soluzione 2.3. Notiamo innanzitutto che cerchiamo una soluzione che sia definita in un intervallo contenente 2. Inoltre, tale intervallo dovrà essere contenuto in $]0, +\infty[$, in quanto per $x = 0$ l'equazione differenziale non è definita.

Per risolvere l'equazione differenziale moltiplichiamo per un fattore integrante, $e^{\ln(x)}$, ovvero per x. Otteniamo

$$(xy)' = \frac{x^2}{x^2+4} = 1 - \frac{4}{x^2+4}.$$

Quindi,

$$x \cdot y = x - 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C,$$

dove C è una costante di integrazione. Dividendo per x, si ha che

$$y = 1 - \frac{2}{x}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{C}{x}.$$

Per finire, imponendo la condizione iniziale, otteniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$y(x) = 1 - \frac{2}{x}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi - 4}{2x},$$

il cui intervallo massimale di definizione è $]0, +\infty[$.

Soluzione 2.4. Notiamo innanzitutto che cerchiamo una soluzione che sia definita in un intervallo contenente 0. Inoltre, tale intervallo dovrà essere contenuto in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, in quanto $\tan(x)$ non è definita per $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

Per risolvere l'equazione differenziale moltiplichiamo per un fattore integrante, $e^{\ln(\cos(x))}$, ovvero per $\cos(x)$. Otteniamo

$$(y\cos(x))' = x\cos(x).$$

Quindi,

$$y \cdot \cos(x) = \int x \cdot \cos(x)\ dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C,$$

dove C è una costante di integrazione. Dividendo per $\cos(x)$, si ha che

$$y = x \cdot \tan(x) + 1 + \frac{C}{\cos(x)}.$$

Per finire, imponendo la condizione iniziale, otteniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$y(x) = x \cdot \tan(x) + 1 - \frac{1}{\cos(x)},$$

il cui intervallo massimale di definizione è $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Soluzione 2.5. Per risolvere l'equazione differenziale moltiplichiamo per un fattore integrante, $e^{\ln(1+x^2)}$, ovvero per $1 + x^2$. Otteniamo

$$(y \cdot (1 + x^2))' = x.$$

Quindi,

$$y \cdot (1 + x^2) = \int x\ dx = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

dove C è una costante di integrazione. Dividendo per $1 + x^2$, si ha che

$$y = \frac{x^2}{2(x^2 + 1)} + \frac{C}{x^2 + 1}.$$

Per finire, imponendo la condizione iniziale, otteniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$y(x) = \frac{x^2}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{x^2 + 1},$$

ovvero

$$y(x) = \frac{x^2 + 2}{2(x^2 + 1)},$$

il cui intervallo massimale di definizione è $\mathbb{R}$.

Soluzione 2.6. Siano $x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 \neq x_2$. Allora, per il teorema di Lagrange, esiste $x_3 \in]x_1, x_2[$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_3) \cdot (x_2 - x_1).$$

Poiché

$$f'(x_3) = \frac{1}{2\sqrt{x_3}} < \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

concludiamo che

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(x_3)| \cdot |x_2 - x_1| \leq L \cdot |x_2 - x_1|,$$

dove $L = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Visto che la disuguaglianza

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L \cdot |x_2 - x_1|$$

è banalmente verificata anche quando $x_1 = x_2$, concludiamo che f è lipschitziana.

Se $x_0 = 0$, allora la dimostrazione precedente non è più valida. In effetti, supponiamo per assurdo che f sia ancora lispchitziana su J. Allora deve esistere un $L \geq 0$ tale che

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L \cdot |x_2 - x_1|$$

per ogni $x_1, x_2 \in J$. Notiamo che $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$. Quindi esiste $\tilde{x} \in J$ tale che $f'(\tilde{x}) > L$. Visto che

$$f'(\tilde{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\tilde{x} + h) - f(\tilde{x})}{h}$$

deve esistere $\tilde{h}$ tale che $\tilde{x} + \tilde{h} \in J$ e inoltre

$$\frac{f(\tilde{x} + \tilde{h}) - f(\tilde{x})}{\tilde{h}} > L.$$

Se definisco $x_1 := \tilde{x}$ e $x_2 := \tilde{x} + \tilde{h}$, concludo che con tali x_1 e x_2

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > L,$$

in contrasto con l'ipotesi che f fosse lipschitziana.

Soluzione 2.7. L'integrale generale dell'equazione è dato dalla famiglia di funzioni

$$e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(C_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right),$$

dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, in quanto le soluzioni dell'equazione caratteristica sono

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Imponiamo ora il dato iniziale

$$1 = y(0) = C_1.$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy dovrà essere della forma

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right),$$

dove $C_2 \in \mathbb{R}$. Derivando si ha

$$\begin{aligned} y'(x) =& e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \\ &+ e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(- \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + C_2 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Imponendo l'altro dato iniziale si ha che

$$0 = y'(0) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2.$$

Quindi $C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

Soluzione 2.8. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0,$$

che ha come unica radice reale (di molteplicità algebrica 2) $\lambda = -3$.

L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}.$$

Imponiamo il dato iniziale

$$0 = y(0) = c_1.$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy dovrà essere della forma

$$y(x) = c_2 x e^{-3x}.$$

Derivando otteniamo

$$y'(x) = c_2 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}.$$

Imponiamo l'altro dato iniziale

$$1 = y'(0) = c_2.$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = x e^{-3x}.$$

3

Soluzione 3.1. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato dalla famiglia di funzioni
$$C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x},$$
dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare dell'equazione data è
$$y_P(x) = -3xe^{2x}$$
(sono stati omessi alcuni calcoli).

In definitiva, l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è
$$y(x) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x} - 3xe^{2x},$$
dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Derivando otteniamo
$$y'(x) = 2C_1 \cdot e^{2x} + 2C_2 \cdot e^{3x} - 3e^{2x} - 6xe^{2x}.$$
Imponiamo le condizioni iniziali:
$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = 2C_1 + 3C_2 - 3 = 0. \end{cases}$$
Quindi $C_1 = -3$ e $C_2 = 3$ e la soluzione del problema è
$$y(x) = -3 \cdot e^{2x} + 3 \cdot e^{3x} - 3xe^{2x}.$$

Soluzione 3.2. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato dalla famiglia di funzioni
$$C_1 \cdot e^{-x} + C_2,$$
dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Cerchiamo ora una soluzione particolare nella forma
$$y_P(x) = A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x).$$
Calcolando le derivate prima e seconda e imponendo la condizione
$$y''_P(x) + y'_P(x) = \sin(2x)$$
si ricava
$$A = -\frac{1}{10}, \quad B = -\frac{1}{5}.$$
Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è
$$y(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 - \frac{1}{10} \cdot \cos(2x) - \frac{1}{5} \sin(2x),$$

dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Derivando otteniamo

$$y'(x) = -C_1 \cdot e^{-x} + \frac{1}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x).$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{10} = 0 \\ y'(0) = -C_1 - \frac{2}{5} = 0. \end{cases}$$

Ricaviamo dunque $C_1 = -\frac{2}{5}$ e $C_2 = \frac{1}{2}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{2}{5} \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cdot \cos(2x) - \frac{1}{5}\sin(2x).$$

Soluzione 3.3. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

al variare di C_1 e C_2 in $\mathbb{R}$.

Una soluzione particolare dell'equazione differenziale completa è

$$y_P(x) = -\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

(sono stati omessi alcuni calcoli).

L'integrale generale dell'equazione differenziale completa è quindi

$$C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x).$$

Imponendo ora le condizioni iniziali, la soluzione del problema di Cauchy è

$$-\frac{1}{2}e^x + 2xe^x - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x).$$

Soluzione 3.4. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x),$$

al variare di C_1 e C_2 in $\mathbb{R}$.

Una soluzione particolare dell'equazione differenziale completa è

$$y_P(x) = \frac{1}{2}x\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x).$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale completa è quindi

$$C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) + \frac{1}{2}x\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x).$$

Imponendo ora le condizioni iniziali, la soluzione del problema di Cauchy è

$$\frac{3}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}x\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x).$$

Soluzione 3.5. Rispondiamo alle domande.

a) Il punto P appartiene a S, ma non è interno a S. Infatti, prendiamo un qualunque intorno sferico aperto $U_r(P)$, per qualche $r > 0$. Per definizione,

$$U_r(P) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\right\}.$$

Il punto $\left(-\frac{r}{2}, 0\right)$ appartiene a $U_r(P)$ ma non a S. Quindi, in un qualunque intorno sferico di P ci sono elementi che non appartengono a S, ovvero non è possibile trovare alcun intorno sferico di P contenuto in S.

b) P è di accumulazione per S. In effetti, possiamo fare un ragionamento simile al precedente. Infatti, prendiamo un intorno sferico aperto $U_r(P)$. Possiamo supporre che $r < 4$. Infatti, se $r \geq 4$ e $U_r(P) \subseteq U$, allora $U_{r'}(P) \subseteq U_r(P)$ per ogni $r' < 4$ e quindi in ogni caso in un qualunque intorno di P è contenuto un intorno sferico aperto centrato in P di raggio più piccolo di 4.

   Procediamo dunque supponendo che $r < 4$. Allora, il punto $R = \left(\frac{r}{2}, 0\right) \in U_r(P)$. Inoltre, $R \in S$. Infatti, $0 < \frac{r}{2} < 2$ e quindi

$$\left(\frac{r}{2} - 2\right)^2 + 0^2 < 4.$$

   Quindi, abbiamo mostrato che in ogni intorno sferico di P è contenuto un punto di S diverso da P stesso.

c) Il punto $Q \notin S$. Inoltre, è possibile trovare un intorno sferico $U_r(Q)$ che è contenuto in $\mathbb{R}^2 \backslash S$. Basta prendere ad esempio $r = 1$.

Soluzione 3.6. L'insieme A è formato da tutti e soli i punti della retta di equazione $y = -x - 1$. Ogni punto della retta è un punto di frontiera, in quanto in qualunque intorno sferico aperto di ogni punto sono contenuti punti che non appartengono alla retta e punti che appartengono alla retta. In particolare, A non ha punti interni. Inoltre, non vi sono altri punti di frontiera di A eccetto i punti della retta stessa. Infatti, se prendo un qualunque punto $P = (x_0, y_0)$ che non appartiene alla retta, tale punto si troverà ad una certa distanza $\varepsilon > 0$ dalla retta. Dunque nell'intorno $U_\varepsilon(P)$ di P non sono contenuti punti della retta, ovvero P non è un punto di frontiera. Poiché P è un qualunque punto non appartenente ad A, posso concludere che $\mathrm{Fr}(A) = A$ e A contiene la sua frontiera. Quindi, A è un insieme chiuso.

Soluzione 3.7. L'insieme A non è aperto né chiuso. Infatti, A contiene alcuni punti di frontiera, come ad esempio $(-1, 0)$, ma non contiene ad esempio il punto $(-2, 1)$, che è di frontiera, essendo un punto della retta $y = -x - 1$.

4

Soluzione 4.1. (a) L'equazione della curva (rappresentata in blu) può essere riscritta come

$$x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Si tratta di un'iperbole con centro in $(0,0)$, asse trasversale sulla retta $y = 0$, vertici nei punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ e asintoti di equazione $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x$ e $y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x$.

(b) L'equazione della curva (rappresentata in rosso) può essere riscritta come

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(y-2)^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3y^2 - 4x - 12y + 13 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2(x^2 - 2x) + 3(y^2 - 4y) = -13 \\ &\Leftrightarrow \quad 2((x-1)^2 - 1) + 3((y-2)^2 - 4) = -13 \\ &\Leftrightarrow \quad 2(x-1)^2 + 3(y-2)^2 = 1. \end{aligned}$$

Si tratta di un'ellisse con centro in $(1,2)$ e vertici nei punti

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right), \quad \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right), \quad \left(1, 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(1, 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

(c) L'equazione della curva (nera) è equivalente a

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{49}{4}.$$

Si tratta di una circonferenza centrata in $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ e di raggio $\frac{7}{2}$.

(d) L'equazione della curva (verde) è equivalente a

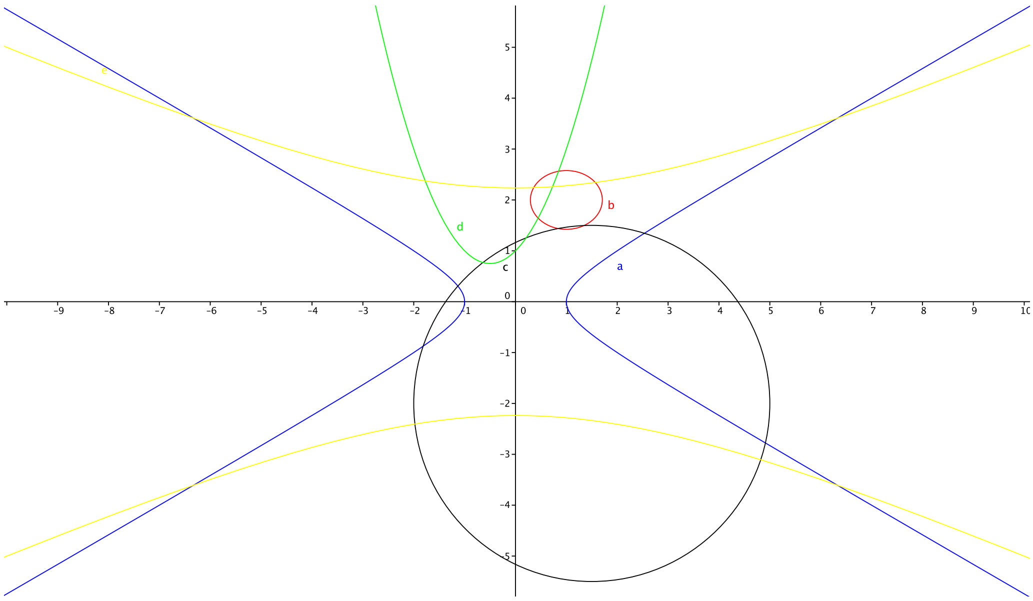
$$y = x^2 + x + 1.$$

Si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse delle y e vertice nel punto $V = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

(e) L'equazione della curva (gialla) è equivalente a

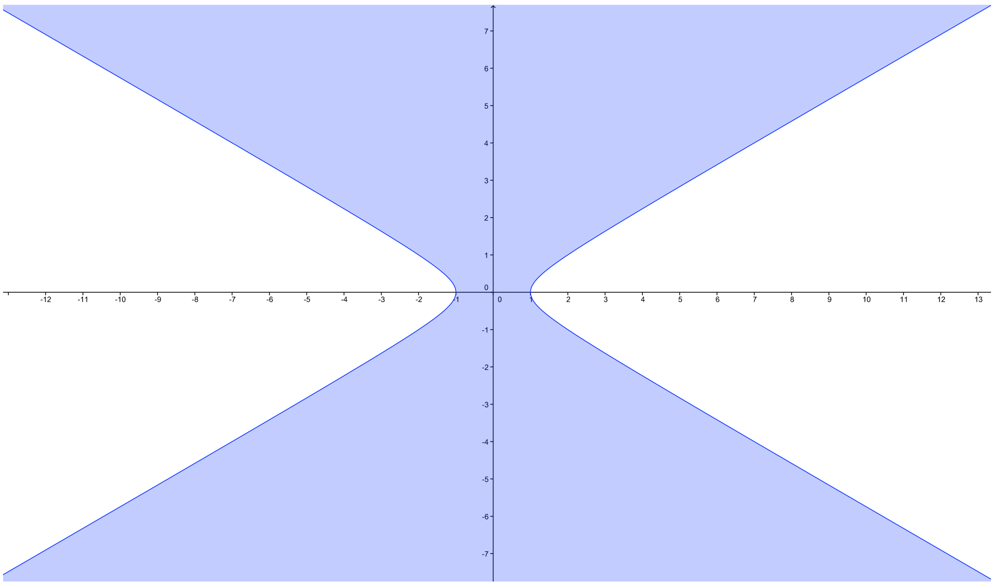
$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{5} = -1.$$

Si tratta di un'iperbole centrata in $(0,0)$, con asse trasversale sulla retta $x = 0$, con vertici in $\left(0, \sqrt{5}\right)$ e $\left(0, -\sqrt{5}\right)$ e con asintoti di equazione $y = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot x$ e $y = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot x$.

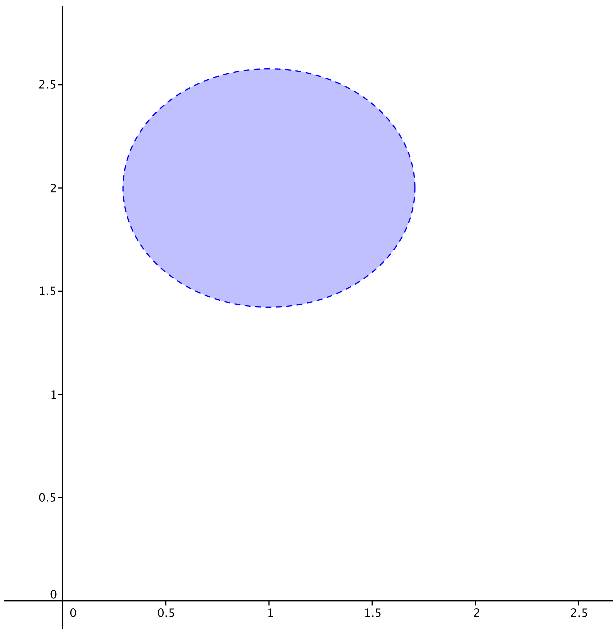


Soluzione 4.2. Le regioni richieste sono colorate in viola. Notiamo che per individuare le regioni $A - E$ possiamo rifarci all'esercizio precedente, ovvero sostituire ogni simbolo di disuguaglianza con $=$ e poi usare il metodo dei punti test.

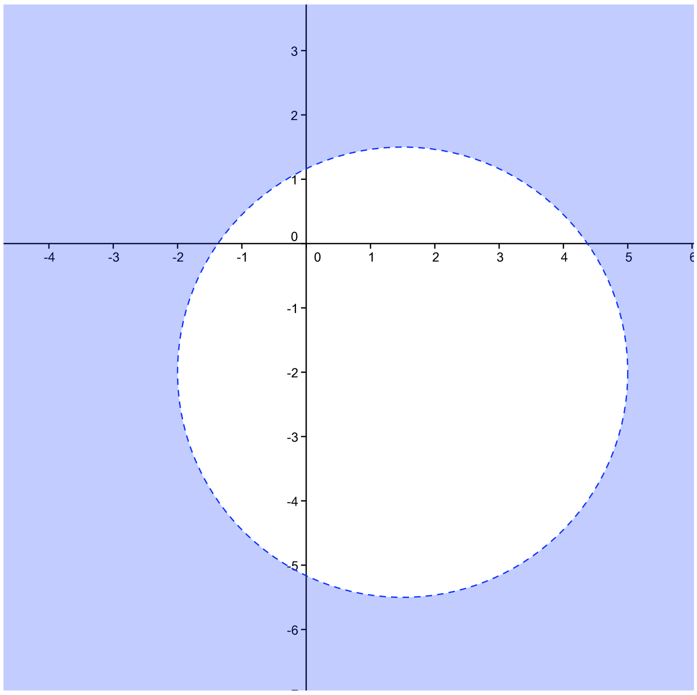
La regione A è:



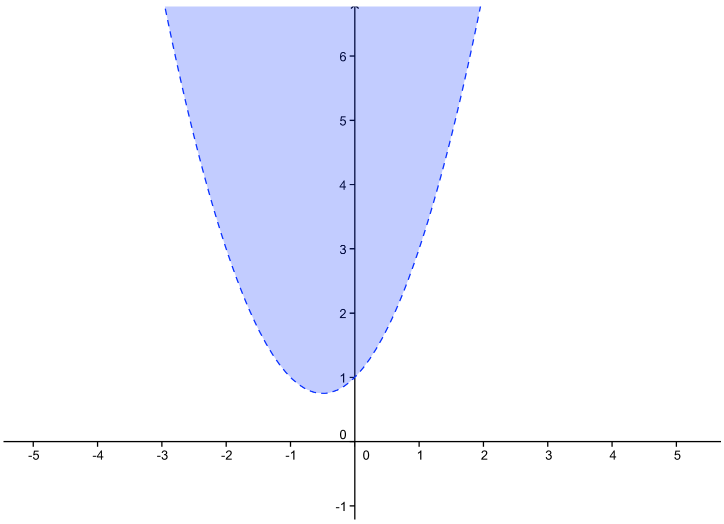
La regione B è:



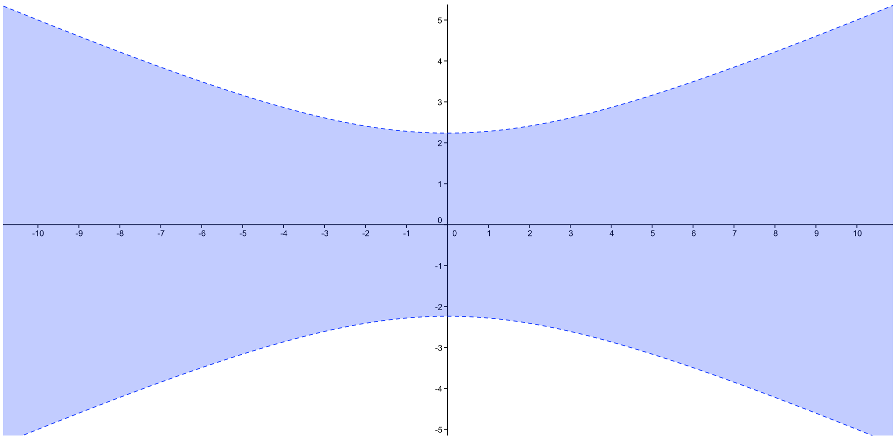
La regione C è:



La regione D è:



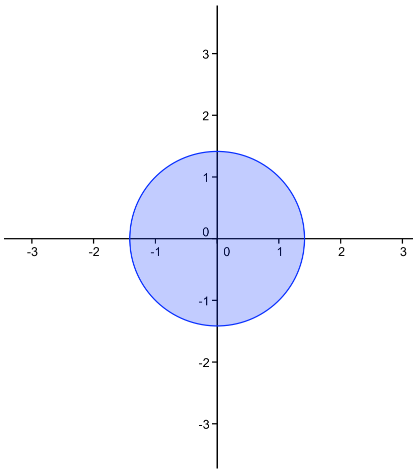
La regione E è:



Soluzione 4.3. Il dominio di f è dato da tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$2 - (x^2 + y^2) \geq 0,$$

ovvero da tutti i punti che giacciono all'interno e sul bordo del disco di raggio $\sqrt{2}$ centrato in $(0, 0)$:



Il dominio di g è dato da tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$(4 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) > 0 \quad \text{oppure} \quad (4 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

La disuguaglianza è verificata in uno dei due casi seguenti

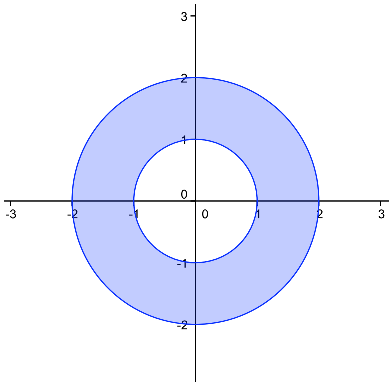
$$1) \begin{cases} 4 - x^2 - y^2 > 0 \\ x^2 + y^2 - 1 > 0 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} 4 - x^2 - y^2 < 0 \\ x^2 + y^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

I punti che soddisfano contemporaneamente le disequazioni del primo sistema sono i punti che giacciono nella regione del piano delimitata dalle circonferenze di raggio 2 e

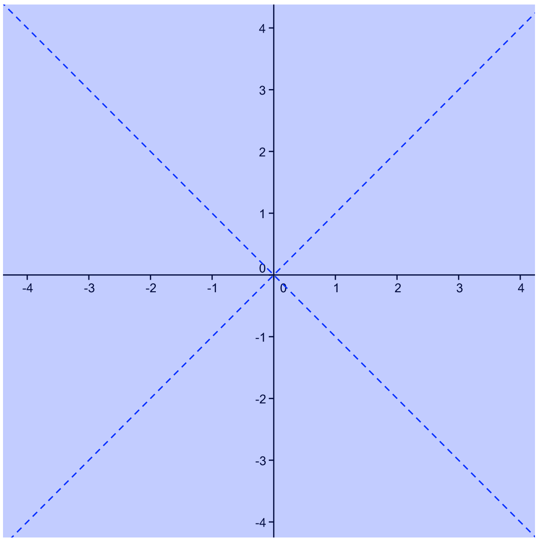
1, entrambe centrate nell'origine. Non c'è invece alcun punto che soddisfa entrambe le disequazioni del sistema 2.

L'altra possibilità da analizzare è che $(4 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$. Ciò accade se almeno uno dei due fattori è zero, ovvero se (x, y) è un punto che appartiene ad una delle due circonferenze di raggio rispettivamente 1 e 2.

In conclusione il dominio è:



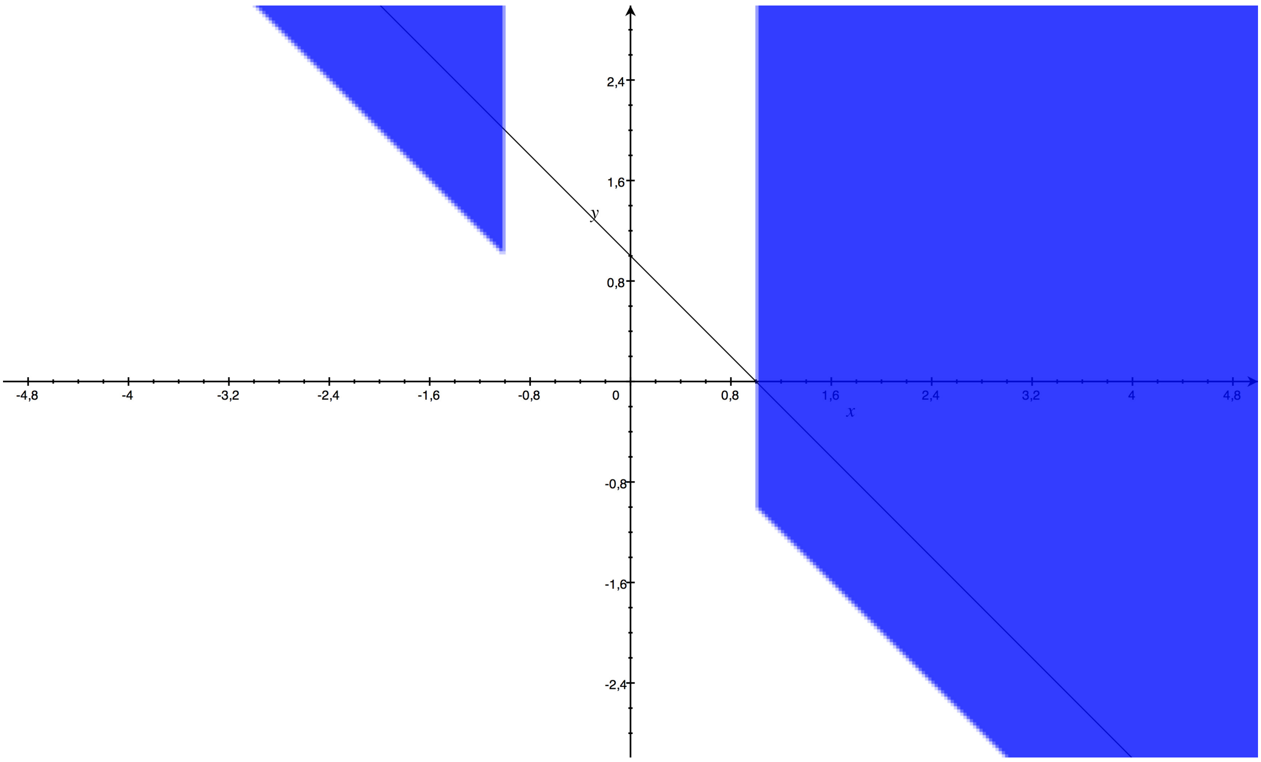
Il dominio di h è dato da tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ esclusi quelli tali che $x^2 - y^2 = 0$, ovvero tali che $(x + y)(x - y) = 0$. Questi sono tutti e soli i punti che giacciono sulle rette di equazione $y = x$ e $y = -x$.



Il dominio di l è dato da tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ che soddisfano contemporaneamente le 3 condizioni seguenti:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + y > 0 \\ x + y \neq 1. \end{cases}$$

Graficamente:



Il dominio corrisponde all'area ombreggiata in blu uniti i punti (x, y) tali che $x = 1$ e $y > -1$ oppure tali che $x = -1$ e $y > 1$ meno i punti che giacciono sulla retta nera.

(spero che si capisca, ma con il programma che ho usato per rappresentare le altre regioni non sono riuscito a rappresentare quest'ultima).

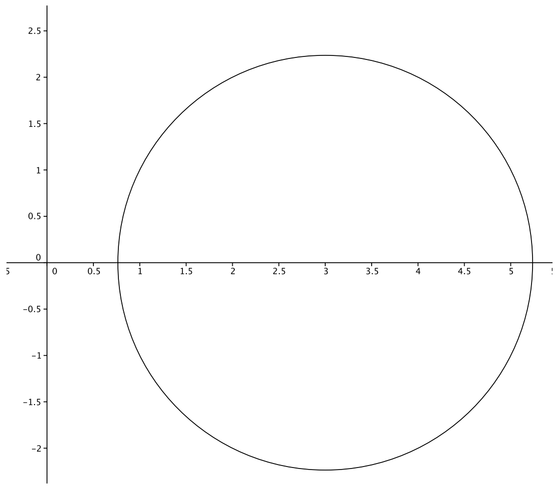
Soluzione 4.4. La curva di livello 9 della funzione f è l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$x^2 + y^2 - 6x + 13 = 9,$$

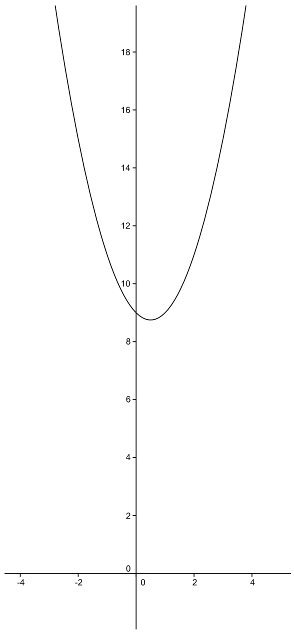
o equivalentemente

$$x^2 - 6x + y^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + y^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 5.$$

In definitiva si tratta di una circonferenza centrata in $(3, 0)$ di raggio $\sqrt{5}$.



La curva di livello 9 di g è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e vertice nel punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{35}{4}\right)$.



Soluzione 4.5. Notiamo che

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}.$$

Visto che $\sqrt{x^2+y^2}$ è continua in $(0,0)$, possiamo concludere che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$.

In alternativa il limite si può calcolare passando anche in coordinate polari. Infatti, se chiamo
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
allora
$$|f(\rho,\vartheta)| = \left|\frac{\rho^2 \cdot \cos(\vartheta)\cdot \sin(\vartheta)}{\rho}\right| \leq \rho.$$
Ora, se chiamo $g(\rho)=\rho$, ho che $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0$ e quindi segue che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Soluzione 4.6. Questo esercizio è un po' più difficile di quelli visti a lezione.

Una prima osservazione (facile) è che $f(x,0) = x$ per ogni $x \neq 0$. Quindi, quando x viene mandato verso 0, si ha che i valori $f(x,0)$ tendono verso 0. Quindi, se il limite esistesse, dovrebbe essere uguale a 0.

Una possibilità per mostrare la non esistenza del limite è innanzitutto riscrivere la funzione come
$$f(x,y) = \frac{e^{-\frac{y}{x}}}{\frac{1}{x}}.$$
Ora noto che quando x tende verso 0, ad esempio da valori positivi, il denominatore tende verso $+\infty$. Il comportamento del numeratore dipende da y. Se io riuscissi a far tendere il numeratore a $+\infty$ più velocemente del denominatore, allora potrei concludere che il limite è $+\infty$. Per fare tendere il numeratore a $+\infty$ devo far tendere l'esponente verso $+\infty$. Quindi, l'idea potrebbe essere quella di avvicinarsi a $(0,0)$ lungo una curva (x,y) con $y=-x^\alpha$ per un $\alpha \in]0,+\infty[$ opportuno. Se pongo $y=-x^\alpha$, allora l'esponente del numeratore diventa
$$-\frac{y}{x} = \frac{1}{x^{1-\alpha}}.$$
Ora, quando x tende a 0 da valori positivi, $x^{1-\alpha}$ tende a 0 purché $1-\alpha>0$, ovvero $\alpha<1$. Quindi, per $\alpha\in]0,1[$ il numeratore di $f(x,y)$ tende verso $+\infty$ e inoltre y tende verso 0.

Fissiamo dunque ad esempio $\alpha = \frac{1}{2}$. Allora, posto $y=-\sqrt{x}$, si ha che
$$f(x,-\sqrt{x}) = g(x) = x \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

Ora notiamo che
$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2} = +\infty$$

Soluzione 4.7. Per mostrare che non esiste il limite basta notare i seguenti due fatti:
$$\begin{aligned} f(x,0) &= x \to 0, \text{per } x \text{ che tende a 0;} \\ f(0,y) &= \frac{1}{y}, \text{che non ha nemmeno limite per } y \text{ che tende a 0.} \end{aligned}$$

Soluzione 4.8. Basta notare che $f(x,x) = 1$, per $x \neq 0$. Quindi, se mi avvicino a $(0,0)$ lungo i punti (x,y) con $y = x$, la funzione tende a 1, che non è uguale al valore della funzione in $(0,0)$.

Soluzione 4.9. Visto che

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leq |y|,$$
$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq |x|,$$

applicando il teorema del confronto e utilizzando il suggerimento risulta provata la continuità di f in $(0,0)$.

Soluzione 4.10. Notiamo che

$$\left|\frac{(y-1)^2}{(x-2)^2+(y-1)^2} \cdot \sin(\pi x)\right| \leq |\sin(\pi x)|.$$

Visto che $\sin(\pi x)$ tende a 0 quando (x,y) tende a $(2,1)$, per il teorema del confronto possiamo dire che tende a 0 pure la funzione f quando (x,y) tende a $(2,1)$.

Soluzione 4.11. Si può verificare innanzitutto che

$$f(x,0) = x$$

e che, al tendere di (x,y) verso $(0,0)$, i valori di $f(x,0)$ tendono verso 0. Se dunque il limite esistesse, esso dovrebbe essere uguale a 0.

D'altra parte, se consideriamo i punti della forma $(x, -x + x^\alpha)$ per valori di α sufficientemente "grandi" otteniamo una contraddizione. Consideriamo ad esempio

$$g(x) = f(x, -x + x^3) = \frac{x^6 - 2x^4 + 2x^2}{x^3}.$$

È immediato verificare che $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$. Ciò ci porta a concludere che non esiste il limite di f quando (x,y) tende verso $(0,0)$.

5

Soluzione 5.1. Una parametrizzazione della retta r è data da

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (1+t, 2+2t, 4t). \end{aligned}$$

Per ricavare delle equazioni cartesiane, notiamo che un punto (x, y, z) appartenente alla retta può essere scritto come

$$(x, y, z) = (1+t, 2+2t, 4t),$$

per qualche $t \in \mathbb{R}$. Equivalentemente possiamo scrivere

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 4t \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Possiamo ricavare t in funzione di z ottenendo $t = \frac{1}{4}z$. Quindi otteniamo

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{4}z \\ y = 2 + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 4x - z = 4 \\ 2y - z = 4 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema lineare descrivono i punti della retta r. Notate che le due equazioni lineari descrivono due piani nello spazio.

Soluzione 5.2. Un valore di t tale che $\gamma(t) = P$ lo si può trovare risolvendo il seguente sistema (non lineare):

$$\begin{cases} \sin(4t)\cos(t) = \frac{3}{4} \\ \sin(4t)\sin(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Se t soddisfa la prima equazione, allora $\cos(t) \neq 0$. Quindi, dividendo per $\cos(t)$ ottengo

$$\sin(4t) = \frac{3}{4\cos(t)}.$$

Sostituendo nella seconda equazione si ha che

$$\tan(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Notiamo che $t \in [0, 2\pi]$. I valori di t in tale intervallo per i quali $\tan(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sono $t = \frac{\pi}{6}$ e $t = \frac{7}{6}\pi$. Queste due soluzioni sono entrambe ammissibili? Andando a sostituire i valori di t trovati nel sistema iniziale si può verificare che $\frac{\pi}{6}$ effettivamente rende entrambe le uguaglianze vere, mentre ciò non è vero per $t = \frac{7}{6}\pi$ (verificatelo).

Quindi $P = \gamma\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Ora calcoliamo

$$\gamma'(t) = (4\cos(4t)\cos(t) - \sin(4t)\sin(t), 4\cos(4t)\sin(t) + \sin(4t)\cos(t)) .$$

Si ha che

$$\gamma'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}, -1 + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{-5\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}\right).$$

Per finire scriviamo una parametrizzazione della retta tangente richiesta.

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{5\sqrt{3}}{4}s, \tfrac{\sqrt{3}}{4} - \tfrac{1}{4}s\right). \end{aligned}$$

Se proviamo a rifare tutto con $Q = (0, 0)$ ci imbattiamo subito in un problema. Il sistema

$$\begin{cases} \sin(4t)\cos(t) = 0 \\ \sin(4t)\sin(t) = 0 \end{cases}$$

è soddisfatto da più di un valore di $t \in [0, 2\pi]$. Ad esempio $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2}$ sono soluzioni, ma in realtà ce ne sono altre. Ora notiamo che

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= (4, 0), \\ \gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (0, 4). \end{aligned}$$

Otteniamo dunque due rette tangenti distinte in Q, cioè

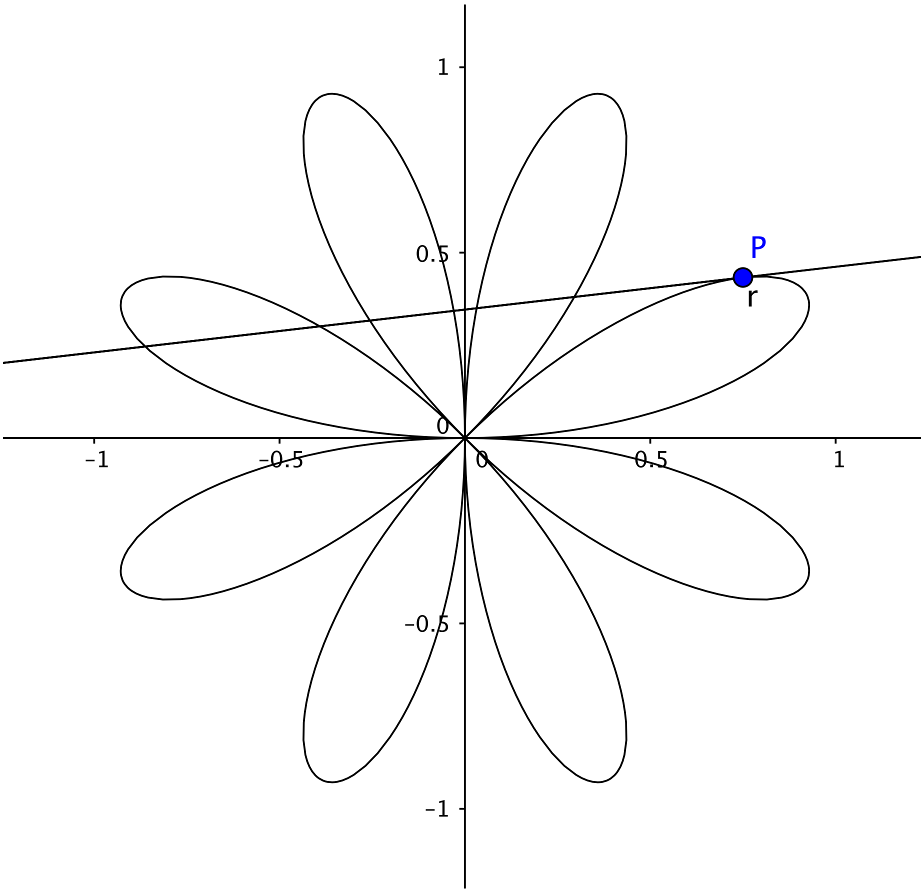
$$\begin{aligned} r_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto (4s, 0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r_2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto (0, 4s) . \end{aligned}$$

Il fatto è che Q è un punto multiplo per la curva γ, cioè la curva si intreccia in Q.

Nella seguente figura trovate la curva γ, il punto P e la retta tangente in P.



Soluzione 5.3. Notiamo che $\gamma(t) = P$ per $t = 1$. Inoltre, $\gamma'(1) = (2, 3)$ visto che

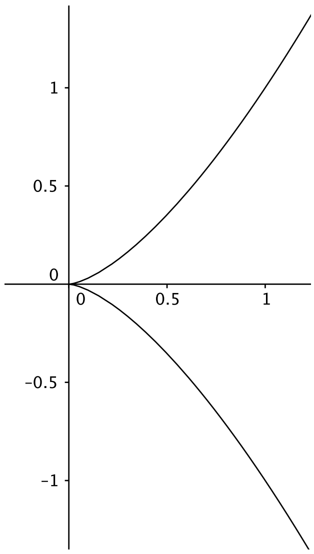
$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2),$$

Una parametrizzazione della retta r è

$$\begin{array}{rcl} r : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & (1 + 2s, 1 + 3s)\,. \end{array}$$

Se proviamo a ripetere l'esercizio con $Q = (0, 0)$ ci imbattiamo nel problema che $\gamma'(0) = (0, 0)$, quindi non siamo in grado di scrivere una parametrizzazione della retta tangente con la solita tecnica. Un punto che annulla $\gamma'(t)$ è detto punto singolare per la curva.

La curva γ è qui rappresentata.



In $(0,0)$ la curva ha un cosiddetto punto di cuspide. A parte il fatto che la curva rappresentata non può essere grafico di una funzione nella variabile x, la curva γ si ottiene ruotando di 90 gradi in senso orario il grafico di $y = \sqrt[3]{x^2}$. Il grafico di questa funzione ha un punto di cuspide in $(0,0)$. A destra di 0 il grafico di questa funzione ha rette tangenti con rapporti incrementali positivi, che tendono a $+\infty$, mentre a sinistra di 0 il grafico ha rette tangenti con rapporti incrementali negativi, che tendono a $-\infty$. Le rette tangenti a destra e a sinistra tendono alla retta verticale $x = 0$. Possiamo dunque dire che in $(0,0)$ abbiamo una tangente cuspidale, ovvero la retta $x = 0$.

Tornando al nostro problema, con un ragionamento simile possiamo dire che in Q la curva ha una tangente cuspidale, ovvero la retta $y = 0$.

6

Soluzione 6.1. Tenendo conto del fatto che

$$\gamma'(t) = \left(1, \frac{3}{2}\sqrt{t}\right),$$

applicando la formula per il calcolo della lunghezza di una curva otteniamo come risultato

$$\frac{13\sqrt{13}-8}{27}.$$

Soluzione 6.2. Notiamo innanzitutto che

$$\gamma'(t) = \left(1, \frac{1}{t}\right).$$

La lunghezza $l(\gamma)$ si calcola con il seguente integrale:

$$l(\gamma) = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\, dt = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\, dt.$$

Concentriamoci ora sul calcolo dell'integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\, dt.$$

Usando la sostituzione suggerita,

$$u = \sqrt{1+t^2}, \quad t = \sqrt{u^2-1}, \quad dt = \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\, du.$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\, dt &= \int \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\, du = \int \frac{u^2-1+1}{u^2-1}\, du \\
&= \int 1\, du + \int \frac{1}{u^2-1}\, du = u + \frac{1}{2}\ln(u-1) - \frac{1}{2}\ln(u+1) + C \\
&= \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+t^2}-1) - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+t^2}+1) + C.
\end{aligned}$$

Valutando l'integrale definito otteniamo il risultato:

$$l(\gamma) = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}-1) - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}+1) - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

Soluzione 6.3. Si tratta di calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln(\sqrt{1+t^2} + t)\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(\sqrt{1+4\pi^2} + 2\pi))$$

Soluzione 6.4. Calcoliamo le derivate parziali:

$$f'_x(x,y) = e^{x-y^3}; \qquad f'_y(x,y) = e^{x-y^3} \cdot (-3y^2);$$

$$g'_x(x,y) = \frac{(xy+y^3) - (x-y^2)\cdot y}{(xy+y^3)^2}; \quad g'_y(x,y) = \frac{-2y\cdot(xy+y^3) - (x-y^2)\cdot(x+3y^2)}{(xy+y^3)^2};$$

$$h'_x(x,y) = \cos(x+y^2); \qquad h'_y(x,y) = \cos(x+y^2)\cdot 2y;$$

$$l'_x(x,y) = \frac{1}{1+x+y^2}; \qquad l'_y(x,y) = \frac{2y}{1+x+y^2}.$$

7

Soluzione 7.1. Le derivate parziali del primo ordine di f sono:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= e^{xy}\cdot y + 2x; \\ f'_y(x,y) &= e^{xy}\cdot x + \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Quindi l'equazione del piano tangente in $(0,1,1)$ è

$$z = 1 + x + (y-1),$$

ovvero

$$z = x + y.$$

Soluzione 7.2. Le derivate parziali del primo ordine di f sono:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= e^{x+y^2} + \cos(x+y); \\ f'_y(x,y) &= e^{x+y^2}\cdot 2y + \cos(x+y). \end{aligned}$$

Quindi l'equazione del piano tangente in $(0,0,1)$ è

$$z = 1 + 2x + y.$$

Soluzione 7.3. Calcoliamo le derivate parziali con la definizione.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{h^3}{\sqrt{h^2}} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{|h|} = 0.$$

Quindi $f'_x(0,0) = 0$. Analogamente si trova che $f'_y(0,0) = 0$.
Verifichiamo la differenziabilità in $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-T_{1,P}(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

Quest'ultimo limite può essere dimostrato passando ad esempio a coordinate polari:

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\rho^3\cdot[(\cos(\vartheta))^3+(\sin(\vartheta))^3]}{\rho^2}\right| = \rho\cdot\left|[(\cos(\vartheta))^3+(\sin(\vartheta))^3]\right| \leq 2\rho.$$

Visto che

$$\lim_{\rho\to 0^+} 2\rho = 0$$

il limite è verificato.

Soluzione 7.4. Calcoliamo la derivata di f in 0 usando la definizione.

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

Quest'ultimo limite può essere dimostrato usando il teorema del confronto (la verifica è omessa).

La derivata di f in un qualunque punto diverso da 0 può essere così calcolata.

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ora notiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) &= 0, \\ \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \quad \text{non esiste.} \end{aligned}$$

Quindi, pur essendo $f'(x)$ definita ovunque, in 0 non è continua.

Soluzione 7.5. Consideriamo un qualunque versore $\overrightarrow{v} = (a, b)$. Allora

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(h(a,b)) - f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{h^3a^2b}{h^4a^4 + h^2b^2}\right)^2 \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{ha^2b}{h^2a^4 + b^2}\right)^2 = \lim_{h\to 0} \frac{ha^4b^2}{(h^2a^4 + b^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Riguardo l'ultimo passaggio, notiamo che b può essere 0 o diverso da 0. Se $b = 0$, allora stiamo calcolando il

$$\lim_{h\to 0} 0$$

che vale 0.

Se $b \neq 0$, allora il denominatore tende a b^4, mentre il numeratore tende a 0. Il risultato segue comunque.

Ora notiamo che f non è continua in $(0, 0)$ in quanto

$$f(x, x^2) = \frac{1}{4}.$$

Quindi non è vero che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$. Per finire, la formula del gradiente è comunque verificata poiché le derivate parziali in $(0, 0)$ valgono 0, visto che valgono 0 tutte le derivate direzionali.

Soluzione 7.6. Dimostriamo il teorema.

1. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che
$$0 \leq \langle \overrightarrow{x} + t\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} + t\overrightarrow{y} \rangle = \|\overrightarrow{x}\|^2 + 2t\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle + t^2\|\overrightarrow{y}\|^2.$$
Abbiamo dunque ottenuto che
$$0 \leq \|\overrightarrow{x}\|^2 + 2t\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle + t^2\|\overrightarrow{y}\|^2$$
per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quest'ultima disequazione quadratica vale per ogni t se e solo se
$$4\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle^2 - 4\|\overrightarrow{x}\|^2\|\overrightarrow{y}\|^2 \leq 0.$$
Da ciò segue la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, ovvero
$$|\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle| \leq \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\|.$$

2. Se $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ sono linearmente dipendenti, allora $\overrightarrow{y} = c\overrightarrow{x}$ o viceversa per qualche $c \in \mathbb{R}$. La verifica è immediata.
Viceversa supponiamo che
$$|\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle| = \|\overrightarrow{x}\| \cdot \|\overrightarrow{y}\|.$$
Ci sono due possibilità: o
$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \|\overrightarrow{x}\| \cdot \|\overrightarrow{y}\|$$
o
$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = -\|\overrightarrow{x}\| \cdot \|\overrightarrow{y}\|.$$
Trattiamo solo il primo caso. Se $\|\overrightarrow{x}\| = 0$, allora la tesi è banalmente vera, in quanto in tal caso $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ e il vettore nullo è banalmente dipendente da qualunque altro vettore.
Se $\|\overrightarrow{x}\| \neq 0$, allora
$$\begin{aligned}
&\langle \overrightarrow{y} - \frac{\|\overrightarrow{y}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \cdot \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} - \frac{\|\overrightarrow{y}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \cdot \overrightarrow{x} \rangle \\
&= \|\overrightarrow{y}\|^2 - 2\frac{\|\overrightarrow{y}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \cdot \langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} \rangle + \frac{\|\overrightarrow{y}\|^2}{\|\overrightarrow{x}\|^2}\|\overrightarrow{x}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{y}\|^2 - 2\frac{\|\overrightarrow{y}\|}{\|\overrightarrow{x}\|}\|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\| + \|\overrightarrow{y}\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\langle \overrightarrow{y} - \frac{\|\overrightarrow{y}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \cdot \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} - \frac{\|\overrightarrow{y}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \cdot \overrightarrow{x} \rangle = \left\| \overrightarrow{y} - \frac{\|\overrightarrow{y}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \cdot \overrightarrow{x} \right\|^2 = 0.$$

Poiché la norma di un vettore è 0 solo quando il vettore stesso è nullo, concludiamo che

$$\overrightarrow{y} = \frac{\|\overrightarrow{y}\|}{\|\overrightarrow{x}\|} \cdot \overrightarrow{x},$$

ovvero $\overrightarrow{y}$ e $\overrightarrow{x}$ sono linearmente dipendenti.

8

Soluzione 8.1. L'equazione della retta r è

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0,$$

dove $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Le derivate parziali di f sono

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= e^x \cdot y + \frac{2x}{x^2 + y^2}; \\ f'_y(x, y) &= e^x + \frac{2y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Quindi, l'equazione di r è

$$2 \cdot (x - 1) + e \cdot y = 0,$$

ovvero

$$y = -\frac{2}{e}x + \frac{2}{e}.$$

Soluzione 8.2. L'equazione della retta r è

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0,$$

dove $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Le derivate parziali di f sono

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \cos(x + y) - 3x^2; \\ f'_y(x, y) &= \cos(x + y). \end{aligned}$$

Quindi, l'equazione di r è

$$x + y = 0,$$

ovvero

$$y = -x.$$

9

Soluzione 9.1. Studiamo il segno delle forme quadratiche date.

a) La matrice associata alla forma quadratica è

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det(A) > 0$ e $a_{11} > 0$ la forma quadratica è definita positiva.

b) La matrice associata alla forma quadratica è

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det(A) > 0$ e $a_{11} < 0$ la forma quadratica è definita negativa.

c) La matrice associata alla forma quadratica è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det(A) = 0, a_{11} > 0, a_{22} > 0$ la forma quadratica è semidefinita positiva, ma non definita positiva.

d) La matrice associata alla forma quadratica è

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det(A) < 0$ la forma quadratica è indefinita.

e) La matrice associata alla forma quadratica è

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det(A) = 0, a_{11} < 0, a_{22} < 0$, la forma quadratica è semidefinita negativa.

Soluzione 9.2. Se la forma quadratica è indefinita segue che esistono almeno un punto (x_0, y_0) e un punto (x_1, y_1) tali che:

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &> 0; \\ f(x_1, y_1) &< 0. \end{aligned}$$

Ora, se prendo un qualunque numero positivo t ho che

$$\begin{aligned} f(tx_0, ty_0) &= t^2(ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2) > 0; \\ f(tx_1, ty_1) &= t^2(ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2) < 0. \end{aligned}$$

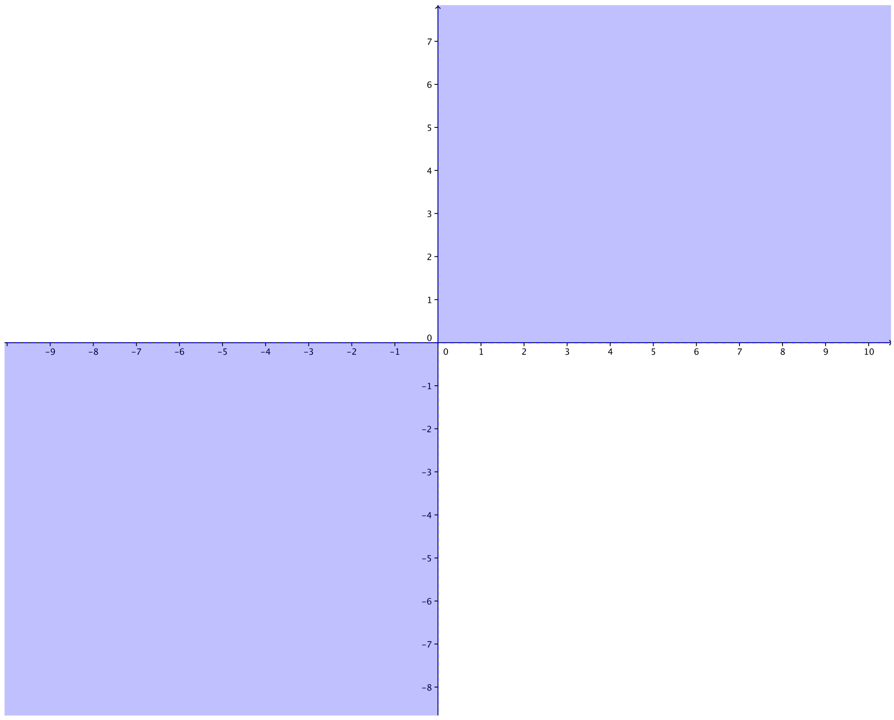
Prendendo t piccolo a piacere trovo dunque punti (tx_0, ty_0) arbitrariamente vicini a $(0,0)$ in cui la forma quadratica f è positiva e punti (tx_1, ty_1) arbitrariamente vicini a $(0,0)$ in cui la forma quadratica f è negativa.

Soluzione 9.3.

a) Il dominio D della funzione f è

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\},$$

ovvero la regione ombreggiata in viola nella figura seguente.



b) Cerchiamo ora i punti stazionari di f.

$$\begin{cases} f'_x(x,y) &= \dfrac{1-x^2}{x} = 0 \\ f'_y(x,y) &= \dfrac{1-y^2}{y} = 0. \end{cases}$$

Il sistema è soddisfatto da quattro punti, ovvero $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$. Tuttavia dobbiamo considerare che non tutti i 4 punti appartengono al dominio di D. Per questo solo due di essi sono punti stazionari di f, ovvero

$$P_1 = (1, 1); \quad P_2 = (-1, -1).$$

Per classificare i punti trovati calcolo la matrice hessiana di f:

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{-x^2 - 1}{x^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-y^2 - 1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

Valutando la matrice hessiana nei 2 punti stazionari e applicando il criterio delle derivate parziali del secondo ordine concludo che entrambi i punti sono dei punti di massimo locale.

Soluzione 9.4. Cerchiamo i punti stazionari di f su tutto $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} f'_x(x, y) & = 4x^3 + 3x^2 y - y = 0 \\ f'_y(x, y) & = x^3 - x = 0. \end{cases}$$

Noto che la seconda equazione è soddisfatta per $x = 0, 1, -1$. Ci sono quindi 3 punti stazionari per f, ovvero

$$P_1 = (0, 0); \quad P_2 = (1, -2); \quad P_3 = (-1, 2).$$

Per classificare i punti trovati calcolo la matrice hessiana di f:

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 + 6xy & 3x^2 - 1 \\ 3x^2 - 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Valutando la matrice hessiana nei 3 punti stazionari e applicando il criterio delle derivate parziali del secondo ordine concludo che tutti i 3 punti sono di sella.

Soluzione 9.5.

a) La funzione è definita per tutti i punti (x, y) tali che l'argomento del logaritmo è positivo.

$$x^2 + y^2 + x + 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + 4 - \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{15}{4} > 0.$$

Notiamo che questa disuguaglianza è sempre soddisfatta, quindi $D = \mathbb{R}^2$.

b) I punti stazionari di f sono tutti e soli i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) &= \dfrac{2x+1}{x^2+y^2+x+4} = 0 \\ f'_y(x,y) &= \dfrac{2y}{x^2+y^2+x+4} = 0. \end{cases}$$

Quindi l'unico punto stazionario di f è $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$. Per classificarlo calcoliamo la matrice hessiana di f. Le derivate parziali del secondo ordine di f sono:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2+x+4)-(2x+1)^2}{(x^2+y^2+x+4)^2}; \\ f''_{xy}(x,y) &= \frac{-(2x+1)\cdot 2y}{(x^2+y^2+x+4)^2}; \\ f''_{yy}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2+x+4)-4y^2}{(x^2+y^2+x+4)^2}. \end{aligned}$$

La matrice hessiana di f calcolata in P è dunque:

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} \dfrac{8}{15} & 0 \\ 0 & \dfrac{8}{15} \end{bmatrix}.$$

Per il criterio delle derivate parziali del secondo ordine P è dunque un punto di minimo locale.

Soluzione 9.6. Calcoliamo innanzitutto tutte le derivate parziali del primo e secondo ordine della funzione f:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 4x+1; \\ f'_y(x,y) &= 6y-1; \\ f''_{xx}(x,y) &= 4; \\ f''_{xy}(x,y) &= 0; \\ f''_{yy}(x,y) &= 6. \end{aligned}$$

a) La matrice hessiana di f è

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

La matrice è semidefinita positiva per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Infatti, il $\det(H_f(x, y)) \geq 0$ e inoltre pure i coefficienti sulla diagonale principale sono maggiori o uguali a zero.

Equivalentemente la matrice è semidefinita positiva perché tutti i suoi autovalori sono maggiori o uguali a 0 (si noti che gli autovalori sono 4 e 6 visto che la matrice è diagonale).

Possiamo dunque concludere che f è convessa su $\mathbb{R}^2$.

b) Visto che f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$, i punti di minimo e massimo globale sono da cercare fra i punti stazionari di f. Inoltre, visto che f è convessa, ogni punto stazionario sarà di minimo globale. L'unico punto stazionario di f è $P = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$. Il minimo globale di f (inteso come valore più piccolo assunto dalla funzione f) è dunque $f(P) = \frac{67}{24}$.

10

Soluzione 10.1. Notiamo innanzitutto che $\nabla g(x,y) \neq 0$ in tutti i punti $(x,y) \in M$, essendo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 25$. In effetti

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0),$$

ma $(0,0) \notin M$. Perciò, con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange troveremo tutti i punti candidati ad essere minimi o massimi locali vincolati.

Definiamo la funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

e ne cerchiamo i punti stazionari:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y,\lambda) & = 1 - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y,\lambda) & = 2y - 2\lambda y = 2y(1-\lambda) = 0 \\ g(x,y) & = x^2 + y^2 - 25 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione deduciamo che $y = 0$, oppure $\lambda = 1$. Trattiamo separatamente i due casi.

Se $y = 0$, allora $x = \pm 5$ e $\lambda = \pm \dfrac{1}{10}$.

Se $\lambda = 1$, allora $x = \dfrac{1}{2}$ e $y = \pm \dfrac{3\sqrt{11}}{2}$.

Riassumendo abbiamo trovato 4 punti stazionari, ovvero

$$P_1 = \left(5, 0, \frac{1}{10}\right) \quad P_2 = \left(-5, 0, -\frac{1}{10}\right) \quad P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{11}}{2}, 1\right) \quad P_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{11}}{2}, 1\right).$$

Dobbiamo ora studiare la natura dei 4 punti trovati. Innanzitutto calcolo la matrice hessiana orlata.

$$B_{\mathcal{L}}(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2-2\lambda \end{bmatrix}$$

Si ha che

$$B_{\mathcal{L}}(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \qquad \det B_{\mathcal{L}}(P_1) = -180 < 0$$

e dunque $(5,0)$ è un punto di minimo locale per la funzione f.

Passando a P_2

$$B_{\mathcal{L}}(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ -10 & \dfrac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{11}{5} \end{bmatrix} \qquad \det B_{\mathcal{L}}(P_2) = -220 < 0$$

e dunque anche $(-5, 0)$ è un punto di minimo locale per f.

Analizziamo i punti P_3, P_4.

$$B_{\mathcal{L}}(P_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3\sqrt{11} \\ 1 & -2 & 0 \\ 3\sqrt{11} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det B_{\mathcal{L}}(P_3) = 198 > 0.$$

Quindi $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3\sqrt{11}}{2}\right)$ è un punto di massimo locale.

$$B_{\mathcal{L}}(P_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3\sqrt{11} \\ 1 & -2 & 0 \\ -3\sqrt{11} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det B_{\mathcal{L}}(P_4) = 198 > 0.$$

Quindi $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3\sqrt{11}}{2}\right)$ è un punto di massimo locale.

Soluzione 10.2. Notiamo innanzitutto che il gradiente di $g(x, y) = x^2 + y - 1$ è $(2x, 1)$. Il gradiente non si annulla mai, quindi con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange troveremo tutti i punti candidati ad essere minimi o massimi locali vincolati.

La funzione Lagrangiana è $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y - 1)$. Troviamo i punti stazionari di tale funzione risolvendo il seguente sistema.

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x, y, \lambda) & = 1 - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x, y, \lambda) & = 1 - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x, y, \lambda) & = -(x^2 + y - 1) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $\lambda = 1$ e quindi dalla prima $x = \dfrac{1}{2}$. Quindi dall'ultima equazione otteniamo $y = \dfrac{3}{4}$. L'unico punto stazionario è quindi $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, 1\right)$. La matrice hessiana orlata è

$$B_{\mathcal{L}}(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 1 \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Valutando tale matrice nell'unico punto stazionario che abbiamo trovato otteniamo

$$B_{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il determinante di tale matrice è $2>0$. Quindi il punto $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ è un punto di massimo locale vincolato per la funzione f.

Soluzione 10.3. Notiamo innanzitutto che $\nabla g(x,y)\neq 0$ in tutti i punti $(x,y)\in M$, essendo $g(x,y)=x^2-y^2-1$. In effetti

$$\nabla g(x,y)=(2x,-2y)=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0),$$

ma $(0,0)\notin M$. Perciò, con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange troveremo tutti i punti candidati ad essere minimi o massimi locali vincolati. Per trovare i punti di minimo e massimo locale della funzione f sull'insieme M usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange costruiamo la funzione lagrangiana.

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(x^2-y^2-1).$$

Ora cerchiamone i punti stazionari.

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y,\lambda) & =2x-2\lambda x=2x(1-\lambda)=0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y,\lambda) & =2y+2\lambda y=2y(1+\lambda)=0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x,y,\lambda) & =-(x^2-y^2-1)=0. \end{cases}$$

La prima equazione è verificata se e solo se $x=0$ oppure $\lambda=1$. Se $x=0$, allora dalla terza equazione ricaviamo che $y^2+1=0$, che è impossibile. Quindi consideriamo il caso $\lambda=1$. Con tale scelta per λ la seconda equazione è soddisfatta solo se $y=0$. Dalla terza equazione ricaviamo quindi $x=\pm1$. In definitiva ci sono due punti stazionari:

$$P_1=(1,0,1),\quad P_2=(-1,0,1).$$

Calcoliamo ora la matrice hessiana orlata:

$$B_{\mathcal{L}}(x,y,\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & 2x & -2y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ -2y & 0 & 2+2\lambda \end{bmatrix}$$

Valutiamo il determinante della matrice $B_{\mathcal{L}}$ nei punti trovati e otteniamo:

$$\det(B_{\mathcal{L}}(P_1))=\det(B_{\mathcal{L}}(P_2))=-16.$$

Quindi, $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono punti di minimo locale vincolato.

Soluzione 10.4. Notiamo che $\nabla g(x,y) = (3(x-1)^2, 2y) = (0,0)$ per $(x,y) = (1,0)$. Il punto $(1,0)$ è un punto singolare del vincolo. Quindi questo punto potrebbe essere di minimo e massimo locale. In realtà in questo caso è facile notare che $(1,0)$ è un punto di minimo locale vincolato (in realtà è pure di minimo globale vincolato) in quanto $f(1,0) = 0 \leq f(x,y)$, per ogni $(x,y) \in M$.

Procedendo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, cerchiamo i punti stazionari di

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + y^2 - \lambda((x-1)^3 + y^2)$$

risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y,\lambda) & = 2(x-1) - 3\lambda(x-1)^2 = (x-1)(2 - 3\lambda(x-1)) = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y,\lambda) & = 2y - 2\lambda y = 2y(1-\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x,y,\lambda) & = -((x-1)^3 + y^2) = 0. \end{cases}$$

Notiamo che la seconda equazione è verificata solo per $y = 0$ o $\lambda = 1$. Analizziamo separatamente i due casi.

- Se $y = 0$, allora la terza equazione è soddisfatta solo per $x = 1$. Notiamo che per $x = 1$ la prima equazione è soddisfatta. Quindi abbiamo trovato infiniti punti stazionari della forma
$$P_\lambda = (1, 0, \lambda),$$
dove λ è un valore reale che possiamo scegliere a piacere. La situazione che si presenta è un po' anomala, ma del resto se (x,y,λ) è un punto stazionario per $\mathcal{L}$, in particolare si ha che
$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y).$$
Visto che $(1,0)$ annulla $\nabla g(x,y)$ e pure $\nabla f(x,y)$, è chiaro che qualunque valore di λ va bene. Ricordiamo comunque che $(1,0)$ è un punto singolare per il vincolo e quindi tale punto non soddisfa le ipotesi del teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

- Se $\lambda = 1$, allora la prima equazione è soddisfatta solo se $x = 1$ o $x = \frac{5}{3}$. Per $x = 1$ otteniamo $y = 0$ dalla terza equazione. Se $x = \frac{5}{3}$, allora la terza equazione non può essere soddisfatta.

In definitiva con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange non abbiamo trovato alcun nuovo punto candidato a risolvere il problema di ottimizzazione vincolata.

Soluzione 10.5. L'insieme S è il cerchio di raggio 1 centrato nell'origine. Si tratta dunque di un insieme compatto. Essendo f continua su tale insieme, segue che f assume minimo e massimo globale su S.

Cerchiamo punti candidati a risolvere il problema all'interno di S. Cerchiamo dunque i punti stazionari di f. Si tratta dunque di trovare tutti i punti (x,y) interni a S tali che il seguente sistema sia soddisfatto.

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & = 4x - 1 = 0 \\ f'_y(x,y) & = 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è dunque $P_1 = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

Cerchiamo ora altri punti candidati sulla frontiera di S. Per fare ciò, introduciamo la funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 2x^2 + y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Si tratta ora di trovare tutti i punti stazionari della funzione Lagrangiana.

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y,\lambda) & = 4x - 1 - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y,\lambda) & = 2y - 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x,y,\lambda) & = -(x^2 + y^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione è soddisfatta solo per $\lambda = 1$ oppure $y = 0$.

Se $\lambda = 1$, allora $x = \frac{1}{2}$ e le possibilità per y sono $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi, due possibili candidati sono

$$P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad P_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Se $y = 0$, allora $x = 1$ oppure $x = -1$. Quindi gli ultimi due punti candidati a risolvere il problema sono

$$P_4 = (1,0), \quad P_5 = (-1,0).$$

Valutando la funzione nei 5 punti, si verifica che il valore più grande è $f(-1,0) = 3$, mentre quello più piccolo è $f\left(\frac{1}{4}, 0\right) = -\frac{1}{8}$. Quindi, il massimo globale è 3, mentre il minimo globale è $-\frac{1}{8}$.

Soluzione 10.6. La regione S è chiusa e limitata e consiste dei punti racchiusi dalla retta $y = 3$ e dal grafico di $y = x^2 - 1$. In particolare, i punti di intersezione fra queste due curve sono $(2,3)$ e $(-2,3)$.

Iniziamo a cercare eventuali punti stazionari di f nella parte interna di tale regione. Il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & = ye^{xy} = 0 \\ f'_y(x,y) & = xe^{xy} = 0 \end{cases}$$

è soddisfatto solo dal punto $P_1 = (0,0)$.

Ora consideriamo i punti $(x, 3)$ con $-2 \leq x \leq 2$. In tali punti $f(x, 3) = e^{3x}$. Quest'ultima funzione, di una sola variabile x, non ha punti stazionari. Quindi, eventuali punti che possono risolvere il problema di ottimizzazione sono solo gli estremi del segmento che congiunge $(-2, 3)$ a $(2, 3)$, ovvero

$$P_2 = (2, 3), \quad P_3 = (-2, 3).$$

Per finire, consideriamo i punti che si trovano sulla parabola. Ponendo $y = x^2 - 1$ otteniamo la funzione

$$h(x) = f(x, x^2 - 1) = e^{x^3 - x},$$

che ha esattamente due punti stazionari, ovvero $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Quindi, gli ultimi due punti candidati a risolvere il problema sono

$$P_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3}\right), \quad P_5 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3}\right).$$

Confrontando i valori della funzione nei 5 punti si conclude che il massimo globale è $f(2, 3) = e^6$, mentre il minimo globale è $f(-2, 3) = e^{-6}$.

Soluzione 10.7. L'insieme S è chiuso e limitato e consiste dei punti racchiusi dal triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Cerchiamo innanzitutto punti stazionari di f nella parte interna del triangolo. Tali punti sono tutti e soli quelli che soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - y = 0 \\ x^2 + 2xy - x = 0. \end{cases}$$

Si trovano quattro punti stazionari, dei quali però solo 1 appartiene alla parte interna di S, ovvero

$$P_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Per finire, si può verificare che $f(x, y) = 0$ in tutti i punti sul bordo del triangolo. In definitiva, tutti i punti del bordo sono di massimo globale, mentre il punto P_1 è di minimo globale e $f(P_1) = -\dfrac{1}{27}$.

Soluzione 10.8. Il problema consiste nel trovare il massimo della funzione f soggetta al vincolo

$$g(x, y) = 0,$$

dove $g(x, y) = x + y - 1$.

Il problema si può risolvere con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il massimo viene raggiunto per $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (i calcoli sono omessi).

Soluzione 10.9. Innanzitutto calcoliamo

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 8y, 18z).$$

Quindi l'equazione di π è

$$\langle (2, 8, 18), (x - 1, y - 1, z - 1) \rangle = 0,$$

ovvero

$$x + 4y + 9z = 14.$$

11

Soluzione 11.1. Il piano π passante per i 3 punti assegnati ha un'equazione cartesiana della forma

$$ax + by + cz = d$$

per opportuni coefficienti a, b, c e d.

Sostituendo al posto di x, y e z le coordinate dei 3 punti si ottiene un sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite (a, b, c e d). Si ottengono infinite soluzioni dipendenti da un parametro libero $t \in \mathbb{R}$, ovvero

$$(a, b, c, d) = (2t, t, -t, t) = t(2, 1, -1, 1).$$

Per ogni $t \in \mathbb{R}^*$ si ottiene un'equazione cartesiana del piano passante per i 3 punti. In particolare, se pongo $t = 1$ (ma potrei prendere un qualunque t diverso da 0), ottengo l'equazione

$$2x + y - z = 1.$$

Soluzione 11.2. Procedendo in maniera analoga a sopra si ottiene un sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite (a, b, c e d), che, diversamente da prima, ha infinite soluzioni dipendenti da due parametri liberi $t, u \in \mathbb{R}$, ovvero

$$(a, b, c, d) = (t - u, -2t + u, t, u) = t(1, -2, 1, 0) + u(-1, 1, 0, 1).$$

Ciò significa che per ogni coppia (t, u) che non annulla simultaneamente tutti i coefficienti a, b, c, d ottengo una diversa equazione cartesiana di un piano passante per i punti A, B, C. Rispetto a prima però queste equazioni non descrivono tutte lo stesso piano.

Ad esempio se pongo $t = 1$ e $u = 0$ ottengo l'equazione

$$x - 2y + z = 0,$$

mentre se pongo $t = 0$ e $u = 1$ ottengo l'equazione

$$-x + y = 1.$$

È facile verificare che i due piani descritti da queste due equazioni non sono coincidenti. Infatti i piani si intersecano solo lungo una retta, cioè non hanno tutti i punti in comune.

In definitiva la domanda dell'esercizio è mal posta perché non vi è un unico piano passante per i tre punti, bensì infiniti piani che si intersecano lungo la retta contenente i punti A, B e C che risultano essere allineati.

Soluzione 11.3. Si tratta di calcolare l'integrale

$$\int_0^\pi e^{2t} \cdot [(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2] \cdot \sqrt{2e^{2t}}\, dt = \int_0^\pi \sqrt{2} e^{3t}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(e^{3t}\right)\Big|_0^\pi = \sqrt{2} \cdot \frac{e^{3\pi} - 1}{3}.$$

Soluzione 11.4. Si tratta di calcolare l'integrale

$$\int_0^2 (9t - 4t + 1 + t + 5) \cdot \sqrt{26}\ dt = \sqrt{26} \cdot \big(3t^2 + 6t\big)\Big|_0^2 = \sqrt{26} \cdot 24.$$

Soluzione 11.5. Calcoliamo l'integrale:

$$\iint_D e^{x-y}\ dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} e^{x-y}\ dx \right)\ dy = \int_{-1}^{1} (e^{1-y} - e^{-1-y})\ dy = (e - e^{-1})^2.$$

Soluzione 11.6. Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^2 \left(\int_{-1}^{1} (e^x y + y^2 x)\ dx \right)\ dy = \int_0^2 [(e - e^{-1}) \cdot y]\ dy = 2 \cdot (e - e^{-1}).$$

12

Soluzione 12.1. Il dominio è unione di due domini semplici con intersezione lungo la frontiera di entrambi. Quindi, l'integrale richiesto si ottiene come somma degli integrali doppi di f su ognuna delle regioni D_1 e D_2.

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} f(x,y)\, dxdy &= \int_{-1}^{0} \left(\int_{-x}^{x^2+1} xy\, dy \right) dx = \int_{-1}^{0} \left[\frac{1}{2}x(x^2+1)^2 - \frac{1}{2}x^3 \right] dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left[\frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x \right] dx = -\frac{11}{24}. \\
\iint_{D_2} f(x,y)\, dxdy &= \int_{0}^{1} \left(\int_{\sqrt{x}}^{1+x} xy\, dy \right) dx = \int_{0}^{1} \left[\frac{1}{2}x(1+x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \right] dx \\
&= \int_{0}^{1} \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right] dx = \frac{13}{24}. \\
\iint_{D} f(x,y)\, dxdy &= \frac{2}{24}.
\end{aligned}$$

Soluzione 12.2. Si tratta di calcolare l'integrale

$$\int_1^2 \left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right) dx = \int_1^2 \left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \frac{x}{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}\, dy \right) dx$$

$$= \int_1^2 \left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \frac{1}{x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}\, dy \right) dx = \int_1^2 \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) \Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} dx$$

$$= \int_1^2 \left[\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right] dx.$$

Prima di proseguire calcoliamo i seguenti integrali indefiniti:

$$\begin{aligned}
\int \arctan(x)\, dx &= x \cdot \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx \\
&= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \\
\int \arctan(x/2)\, dx &= x \cdot \arctan(x/2) - \int x \cdot \frac{1/2}{1+(x/2)^2}\, dx \\
&= x \cdot \arctan(x/2) - \int \frac{2x}{4+x^2}\, dx \\
&= x \cdot \arctan(x/2) - \ln(4+x^2) + K.
\end{aligned}$$

Valutiamo per finire l'integrale:

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 \left[\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right] \, dx \\
= \quad & 2\arctan(2) - \frac{1}{2}\ln(5) - \arctan(1) + \frac{1}{2}\ln(2) + \\
& -2\arctan(1) + \ln(8) + \arctan(1/2) - \ln(5).
\end{aligned}$$

Usando alcune proprietà dei logaritmi sarebbe possibile semplificare un po' quest'ultima scrittura.

Soluzione 12.3. Passando a coordinate polari,

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2+y^2-9} \, dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_3^5 \sqrt{\rho^2-9} \cdot \rho \, d\rho d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}(\rho^2-9)^{3/2}\right] \Big|_3^5 d\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} 16^{3/2} \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{64}{3} \, d\vartheta = \frac{128\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Soluzione 12.4. Per il calcolo dell'integrale passiamo a coordinate polari.

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dxdy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_1^2 \frac{1}{\rho} \cdot \rho \, d\rho\right) d\vartheta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\vartheta = \pi.
\end{aligned}$$

Soluzione 12.5. Il parallelogramma può essere parametrizzato da questa funzione:

$$\begin{aligned}
T: \quad [0,1]\times[0,1] \quad &\to \quad D \\
(u,v) \quad &\mapsto \quad u(1,1) + v(1,-1) = (u+v, u-v).
\end{aligned}$$

Notiamo che

$$DT(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e quindi $|\det(DT(u,v))| = 2$.

Perciò devo calcolare

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 (2v)^2 2 \, dv\right) \, du = 8 \int_0^1 \left(\frac{1}{3}v^3\right) \Big|_{v=0}^1 du = 8 \int_0^1 \frac{1}{3} \, du = \frac{8}{3}.$$

Soluzione 12.6. Calcoliamo i volumi dei solidi richiesti.

1. Definiamo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}$. Allora, il volume richiesto è

$$\iint_\Omega h \, dxdy = \int_0^R \int_0^{2\pi} h\rho \, d\vartheta d\rho = \int_0^R (h\vartheta\rho) \Big|_0^{2\pi} d\rho = \int_0^R 2\pi h\rho \, d\rho = \pi h R^2.$$

2. Definiamo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}$. Allora, il volume richiesto è

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\ dxdy &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho\ d\vartheta d\rho \\ = \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho \cdot 2\pi\ d\rho &= \left(-\frac{1}{3}(R^2 - \rho^2)^{3/2} \cdot 2\pi\right)\Big|_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

3. Il volume richiesto si può calcolare sottraendo al volume del cilindro circolare di raggio R e altezza h il volume del solido sotteso dal grafico di f per gli (x, y) tali che $x^2 + y^2 \le R^2$. Quest'ultimo volume si calcola come segue:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{h}{R} \cdot \rho \cdot \rho\ d\vartheta d\rho = \int_0^R \frac{h}{R}\rho^2 2\pi d\rho = \frac{2\pi}{3} hR^2.$$

Quindi, il volume del cono è $\pi R^2 h - \dfrac{2\pi}{3} hR^2 = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$.

Soluzione 12.7. Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Dobbiamo calcolare l'integrale seguente.

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} 1\ dz\right) dxdy &= \iint_D (2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2})\ dxdy \\ = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (2 - \rho^2 - \rho)\rho\ d\vartheta\right) d\rho &= \int_0^1 2\pi \cdot \left(2\rho - \rho^3 - \rho^2\right)\ d\rho = \frac{5}{6}\pi.\end{aligned}$$

Soluzione 12.8. Calcoliamo i volumi richiesti.

1. Devo calcolare

$$\int_0^h \left(\iint_{\Omega(z)} 1\ dxdy\right)\ dz,$$

dove

$$\Omega(z) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\right\}$$

per ogni z. Quindi,

$$\begin{aligned}\int_0^h \left(\iint_{\Omega(z)} 1\ dxdy\right)\ dz &= \int_0^h \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho\ d\vartheta d\rho dz = \int_0^h \int_0^R 2\pi\rho\ d\rho dz \\ &= \int_0^h \pi R^2\ dz = \pi R^2 h.\end{aligned}$$

2. Devo calcolare

$$\int_0^R \left(\iint_{\Omega(z)} 1 \; dxdy \right) \; dz,$$

dove

$$\Omega(z) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2 - z^2 \right\}$$

per ogni z. Quindi,

$$\begin{aligned} \int_0^R \left(\iint_{\Omega(z)} 1 \; dxdy \right) \; dz &= \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \int_0^{2\pi} \rho \; d\vartheta d\rho dz = \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} 2\pi\rho \; d\rho dz \\ &= \int_0^R \pi(R^2 - z^2) \; dz = \frac{2}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

3. Devo calcolare

$$\int_0^h \left(\iint_{\Omega(z)} 1 \; dxdy \right) \; dz,$$

dove

$$\Omega(z) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \le \frac{R}{h} z \right\}$$

per ogni z. Quindi,

$$\begin{aligned} \int_0^h \left(\iint_{\Omega(z)} 1 \; dxdy \right) \; dz &= \int_0^h \int_0^{Rz/h} \int_0^{2\pi} \rho \; d\vartheta d\rho dz = \int_0^h \int_0^{Rz/h} 2\pi\rho \; d\rho dz \\ &= \int_0^h \pi \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot z^2 \; dz = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 h. \end{aligned}$$

13

Soluzione 13.1. Passando a coordinate sferiche l'integrale diventa

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 (\sin(\varphi))^2 (\cos(\vartheta))^2 \rho^2 \sin(\varphi)\ d\vartheta \right) d\varphi \right) d\rho$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \rho^4 (\sin(\varphi))^3 (\cos(\vartheta))^2\ d\vartheta \right) d\varphi \right) d\rho.$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \int (\cos(\vartheta))^2\ d\vartheta &= \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) + \int \sin(\vartheta)\sin(\vartheta)\ d\vartheta \\ &= \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) + \int\ d\vartheta - \int (\cos(\vartheta))^2\ d\vartheta. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\int (\cos(\vartheta))^2\ d\vartheta = \frac{\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) + \vartheta}{2} + C,$$

dove C è una costante di integrazione. Quindi,

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\vartheta))^2\ d\vartheta = \pi.$$

Proseguendo il calcolo dell'integrale triplo abbiamo che

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \rho^4 (\sin(\varphi))^3 (\cos(\vartheta))^2\ d\vartheta \right) d\varphi \right) d\rho = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \pi\rho^4 (\sin(\varphi))^3 d\varphi \right) d\rho.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \int (\sin(\varphi))^3 d\varphi &= \int \sin(\varphi) \cdot [1 - (\cos(\varphi))^2]\ d\varphi \\ &= \int \sin(\varphi) d\varphi - \int \sin(\varphi) \cdot (\cos(\varphi))^2 d\varphi \\ &= -\cos(\varphi) + \frac{1}{3}(\cos(\varphi))^3 + C, \end{aligned}$$

dove C è una costante di integrazione. Perciò,

$$\int_0^{\pi} (\sin(\varphi))^3 d\varphi = \frac{4}{3}.$$

Proseguendo il calcolo dell'integrale triplo abbiamo che

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \pi\rho^4 (\sin(\varphi))^3 d\varphi \right) d\rho = \int_0^1 \pi \cdot \rho^4 \cdot \frac{4}{3}\ d\rho = \frac{4}{15}\pi.$$

Soluzione 13.2. L'insieme D è formato da tutti i punti contenuti nella semisfera della sfera di raggio 1 centrata in $(0,0,0)$ con $z \geq 0$ che si trovano al di sotto del grafico di $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Quest'ultimo grafico è un cono con vertice in $(0,0,0)$ e rette generatrici che formano con l'asse z un angolo di $\pi/4$.

In alternativa, tenendo conto delle disuguaglianze che descrivono i punti del dominio di integrazione D e del fatto che in coordinate sferiche ogni punto dello spazio si individua con un a terna $(\rho, \varphi, \vartheta)$ dove

$$\begin{aligned} \rho &\in [0, +\infty[, \\ \varphi &\in [0, \pi], \\ \vartheta &\in [0, 2\pi[, \end{aligned}$$

ricaviamo quanto segue:

- $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \rho \leq 1$;
- $0 \leq z \Leftrightarrow 0 \leq \cos(\varphi) \Leftrightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;
- $z \leq \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \cos(\varphi) \leq \sin(\varphi) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$.

Riassumendo,

$$(\rho, \varphi, \vartheta) \in [0,1] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi[.$$

Integriamo dunque usando delle coordinate sferiche:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^3 \sin(\varphi)\ d\varphi \right) d\vartheta \right) d\rho = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 \cdot [-\cos(\varphi)] \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} d\vartheta \right) d\rho$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} d\vartheta \right) d\rho = \int_0^1 2\pi\rho^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} d\rho = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

Soluzione 13.3. Calcoliamo questo integrale passando a coordinate cilindriche. Ricordiamo che ogni punto dello spazio può essere individuato da una terna (ρ, ϑ, z) dove

$$\begin{aligned} \rho &\in [0, +\infty[, \\ \vartheta &\in [0, 2\pi[, \\ z &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tenendo conto delle disuguaglianze che descrivono l'insieme D otteniamo quanto segue:

- $x^2 + y^2 \leq z^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq \rho \leq \sqrt{z^2+1}$.

Integriamo dunque usando delle coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2\pi}\left(\int_{0}^{\sqrt{z^2+1}}\frac{\rho^3(\cos(\vartheta))^2e^z}{1+z^2}\;d\rho\right)d\vartheta\right)dz\\
= &\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{1}{4}(z^2+1)^2\cdot\frac{(\cos(\vartheta))^2e^z}{1+z^2}\right)d\vartheta\right)dz\\
= &\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{1}{4}(z^2+1)\cdot(\cos(\vartheta))^2\cdot e^z\right)d\vartheta\right)dz\\
= &\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{4}\cdot(z^2+1)\cdot e^z\;dz=\frac{\pi}{2}\cdot\left(e-\frac{3}{e}\right).
\end{aligned}$$

Nel calcolo dell'integrale sono stati usati i seguenti integrali indefiniti che andrebbero calcolati separatamente:

- $\displaystyle\int(\cos(\vartheta))^2\;d\vartheta=\frac{1}{2}\cdot(\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)+\vartheta)+C;$
- $\displaystyle\int(z^2+1)\cdot e^z\;dz=e^z\cdot(z^2-2z+3)+K.$

Soluzione 13.4. Calcoliamo questo integrale passando a coordinate cilindriche. Tenendo conto delle disuguaglianze che descrivono l'insieme D otteniamo quanto segue:

- $x^2+y^2\leq 3\Leftrightarrow 0\leq\rho\leq\sqrt{3}$;
- $\sqrt{x^2+y^2+1}\leq z\leq 2\Leftrightarrow\sqrt{\rho^2+1}\leq z\leq 2.$

Integriamo dunque usando delle coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(\int_{0}^{2\pi}\left(\int_{\sqrt{\rho^2+1}}^{2}z^2\rho\;dz\right)d\vartheta\right)d\rho\\
= &\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{3}\left[-(\rho^2+1)^{3/2}\rho+8\rho\right]d\vartheta\right)d\rho\\
= &\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{2\pi}{3}\left(-(\rho^2+1)^{3/2}\rho+8\rho\right)d\rho\\
= &\frac{2\pi}{3}\left(12-\frac{32}{5}+\frac{1}{5}\right)=\frac{58\pi}{15}.
\end{aligned}$$

Soluzione 13.5. Questo integrale può essere calcolato in più modi, ad esempio in coordinate sferiche e cilindriche.

Usando delle coordinate cilindriche, le disuguaglianze che definiscono il dominio diventano:

- $\rho^2 \leq 4 - z^2 \Leftrightarrow 0 \leq \rho \leq \sqrt{4-z^2}$;
- $z \geq 1$.

Quindi, per quel che riguarda ϑ non ho restrizioni, mentre, per ogni fissato z, ho che

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{4-z^2}.$$

Sappiamo che $z \geq 1$. Tuttavia, affinché le restrizioni su ρ siano verificate, è necessario imporre che $z \in [0, 2]$. In definitiva $z \in [1, 2]$.

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{4-z^2}} \frac{1}{\rho^2 + z^2} \rho \, d\rho \right) d\vartheta \right) dz \\
= & \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln(\rho^2 + z^2) \right]_{\rho=0}^{\sqrt{4-z^2}} d\vartheta \right) dz \\
= & \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln(4) - \frac{1}{2} \ln(z^2) \right] d\vartheta \right) dz \\
= & \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} [\ln(2) - \ln(z)] \, d\vartheta \right) dz = 2\pi \int_1^2 [\ln(2) - \ln(z)] \;\, dz \\
= & \; 2\pi [\ln(2) z - z \ln(z) + z]_1^2 = 2\pi [1 - \ln(2)].
\end{aligned}$$

Se avessimo voluto calcolare l'integrale in coordinate sferiche, avremmo dovuto innanzitutto convertire le disuguaglianze come segue:

- $0 \leq \rho \leq 2$;
- $\rho \cos(\varphi) \geq 1$.

Ricordiamo che $\varphi \in [0, \pi]$ in generale. La seconda disuguaglianza può essere riscritta come

$$\rho \geq \frac{1}{\cos(\varphi)}.$$

Qui stiamo supponendo che $\cos(\varphi) > 0$, altrimenti potrebbero esserci problemi con il verso della disuguaglianza. Possiamo supporre ciò perché, qualora $\cos(\varphi) \leq 0$, la disuguaglianza $\rho \cos(\varphi) \geq 1$ non sarebbe verificata.

Riassumendo, abbiamo due restrizioni su ρ:

- $0 \leq \rho \leq 2$;
- $\rho \geq \dfrac{1}{\cos(\varphi)}$.

Queste due restrizioni si possono così riassumere:

$$\frac{1}{\cos(\varphi)} \leq \rho \leq 2. \tag{1}$$

Visto che $\cos(\varphi) > 0$, dobbiamo supporre che $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Tuttavia, dai vincoli appena imposti su ρ, deduciamo che

$$\frac{1}{\cos(\varphi)} \leq 2,$$

cioè $\cos(\varphi) \geq \frac{1}{2}$. In definitiva

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

Il calcolo dell'integrale in coordinate sferiche, con le restrizioni appena imposte, porta allo stesso risultato precedente.

Soluzione 13.6. Il campo vettoriale $\overrightarrow{F}$ è conservativo in quanto è definito su tutto $\mathbb{R}^2$ e verifica la condizione necessaria sull'uguaglianza delle derivate incrociate:

$$(F_1)'_y(x,y) = (F_2)'_x(x,y) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Sia dunque $U(x,y)$ un potenziale. Allora,

$$\begin{aligned} U(x,y) \in \frac{2xy}{(1+x^2)^2}\, dx &= -\frac{y}{1+x^2} + c(y), \\ U(x,y) \in \frac{-1}{1+x^2}\, dy &= -\frac{y}{1+x^2} + d(x). \end{aligned}$$

Ora,

$$-\frac{y}{(1+x^2)} + c(y) = -\frac{y}{1+x^2} + d(x)$$

prendendo ad esempio $c(y) = d(x) = 0$. Un potenziale di $\overrightarrow{F}$ è dunque

$$U(x,y) = -\frac{y}{1+x^2}.$$

Soluzione 13.7. Il campo vettoriale $\overrightarrow{F}$ è conservativo in quanto è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ e verifica la condizione necessaria sull'uguaglianza delle derivate incrociate:

$$\begin{aligned} (F_1)'_y(x,y,z) &= (F_2)'_x(x,y,z) = 2; \\ (F_1)'_z(x,y,z) &= (F_3)'_x(x,y,z) = 0; \\ (F_2)'_z(x,y,z) &= (F_3)'_y(x,y,z) = 0. \end{aligned}$$

Sia dunque $U(x,y,z)$ un potenziale. Allora,

$$U(x,y,z) \in \int (2y+1)\ dx = 2xy + x + c(y,z);$$
$$U(x,y,z) \in \int (2x-1)\ dy = 2xy - y + d(x,z);$$
$$U(x,y,z) \in \int 2z\ dz = z^2 + e(x,y).$$

Notiamo che

$$2xy + x + c(y,z) = 2xy - y + d(x,z) = z^2 + e(x,y)$$

prendendo ad esempio

$$\begin{aligned} c(y,z) &= z^2 - y; \\ d(x,z) &= x + z^2; \\ e(x,y) &= 2xy + x - y. \end{aligned}$$

Un potenziale di $\overrightarrow{F}$ è dunque

$$U(x,y,z) = 2xy + x + z^2 - y.$$

Soluzione 13.8. Il campo vettoriale dato non è conservativo, in quanto non soddisfa la condizione necessaria sull'uguaglianza delle derivate incrociate. Infatti,

$$\begin{aligned} (F_1)'_y(x,y) &= 3; \\ (F_2)'_x(x,y) &= 4. \end{aligned}$$

Soluzione 13.9.

1. Il campo vettoriale è conservativo, in quanto è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ e soddisfa la condizione di uguaglianza sulle derivate incrociate (la verifica è omessa, ma va fatta come negli esercizi precedenti).

   Cerchiamo dunque un potenziale:

   $$U(x,y,z) \in \int (y^2 + \sin(z))\ dx = xy^2 + x\sin(z) + c(y,z);$$
   $$U(x,y,z) \in \int 2xy\ dy = xy^2 + d(x,z);$$
   $$U(x,y,z) \in \int x\cos(z)\ dz = x\sin(z) + e(x,y).$$

   Un potenziale è dunque

   $$(x,y,z) = xy^2 + x\sin(z).$$

2. L'integrale di linea di seconda specie si può calcolare sfruttando il potenziale ed è in realtà indipendente dal cammino scelto. Il suo valore è:

$$U(2,0,\pi) - U(1,1,0) = -1.$$

Soluzione 13.10.

1. Il campo vettoriale dato non è conservativo. Ad esempio notiamo che

$$(F_1)'_y = 0 \neq (F_2)'_x = z.$$

2. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} &= \int_1^2 \langle (2t-2, 2t^2-4t, -t^2-1+2t), (1,-1,2) \rangle\ dt \\
&= \int_1^2 (-4t^2+10t-4)\ dt = \left[-\frac{4}{3}t^3 + 5t^2 - 4t \right]_1^2 = \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Soluzione 13.11. Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \langle (-\vartheta \sin(\vartheta), \vartheta \cos(\vartheta)), (\cos(\vartheta) - \vartheta \sin(\vartheta), \sin(\vartheta) + \vartheta \cos(\vartheta) \rangle\ d\vartheta \\
= &\int_0^{2\pi} \vartheta^2\ d\vartheta = \frac{1}{3}\vartheta^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3}.
\end{aligned}$$

Soluzione 13.12. Calcoliamo innanzitutto un vettore ortogonale al piano tangente in P. Iniziamo notando che il vettore

$$\sigma_u \times \sigma_v = (2u, -1, 2v)$$

è ortogonale alla superficie in ogni punto $\sigma(u,v)$ della superficie. Si tratta ora di trovare (u,v) tale che $\sigma(u,v) = P$, ovvero tale che

$$(u+1, u^2+v^2, v) = (2,2,1).$$

Si verifica che $\sigma(1,1) = P$. Quindi

$$\overrightarrow{n} = (2,-1,2)$$

è ortogonale alla superficie in P. Perciò

$$\pi : 2(x-2) - (y-2) + 2(z-1) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\pi : 2x - y + 2z - 4 = 0.$$

Soluzione 13.13. Calcoliamo innanzitutto un vettore ortogonale al piano tangente in P. Iniziamo notando che il vettore

$$\sigma_t \times \sigma_\varphi = (-t\cos(\varphi), -t, -t\sin(\varphi))$$

è ortogonale alla superficie in ogni punto. Si tratta ora di trovare (t, φ) tale che $\sigma(t, \varphi) = P$.

Si verifica che $\sigma(-2, \pi/4) = P$. Quindi,

$$\pi : \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 2y + \sqrt{2}(z - 1 - \sqrt{2}) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\pi : \sqrt{2}x + 2y + \sqrt{2}z - 4 - \sqrt{2} = 0.$$

Soluzione 13.14. Calcoliamo

$$\sigma_\varphi \times \sigma_\vartheta = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \cos(\varphi)\cos(\vartheta) & \cos(\varphi)\sin(\vartheta) & -\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi)\sin(\vartheta) & \sin(\varphi)\cos(\vartheta) & 0 \end{bmatrix}.$$

Otteniamo

$$\sigma_\varphi \times \sigma_\vartheta = ((\sin(\varphi))^2\cos(\vartheta), (\sin(\varphi))^2\sin(\vartheta), \cos(\varphi)\sin(\varphi)).$$

Perciò,

$$\|\sigma_\varphi \times \sigma_\vartheta\| = |\sin(\varphi)| = \sin(\varphi),$$

poiché $0 \le \varphi \le \pi$.

Quindi,

$$Area(\Sigma) \;=\; \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(\varphi)\; d\vartheta d\varphi = \int_0^\pi 2\pi\sin(\varphi)\; d\varphi = 4\pi.$$

Soluzione 13.15. Calcoliamo

$$\sigma_u \times \sigma_v = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 1 \end{bmatrix}.$$

Otteniamo

$$\sigma_u \times \sigma_v = (\sin(v), -\cos(v), u).$$

Perciò,

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{1+u^2}.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Area(\Sigma) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+u^2}\; dvdu = \int_0^1 2\pi\sqrt{1+u^2}\; du \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{2}(u\sqrt{1+u^2} + \ln(u + \sqrt{1+u^2}))\right)\Big|_0^1 = \pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})). \end{aligned}$$