Esercitazione Algebra lineare

Marco Gattulli

11 novembre 2011

ESERCIZIO 1. *Si dica se i vettori*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ i \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

Svolgimento.

Prima di scrivere il calcolo che ci darà la soluzione dell'esercizio, vediamo come ci si arriva. Ci stiamo chiedendo se i tre vettori sono linearmente indipendenti, quindi ci stiamo chiedendo se

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Scriviamolo per esteso

$$\alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Ma questo non è altro che il sistema lineare

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + 4\gamma = 0 \\ i\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + i\gamma = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Inoltre abbiamo detto che l'unica possibilità è che $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ma allora il sistema in questione è un sistema omogeneo che ha come unica soluzione la soluzione banale e nient'altro. In altre parole il sistema è determinato.

Una proprietà equivalente all'essere determinato del sistema è che il rango della sua matrice dei coefficienti sia massimo.

Tornando al nostro problema dunque, basta mettere i vettori come colonne di una matrice, calcolarne il rango e nel caso in cui risultasse massimo, vorrà dire che i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Costruiamo la matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & i & -2 \\ 1 & 0 & i \end{bmatrix}$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & i & -2 \\ 1 & 0 & i \end{bmatrix} \\
\begin{matrix} E_1(1/2) \\ E_{31}(-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & i & -2 \\ 0 & 1/2 & -2+i \end{bmatrix} \\
\begin{matrix} E_2(-i) \\ E_{32}(-1/2) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
E_3(-1/2) & \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U
\end{aligned}$$

Siccome questa matrice, che ha per colonne i vettori di partenza, ha rango 3, vuol dire che il sistema (1) è determinato, quindi che la sua unica soluzione è quella banale, che è proprio la condizione di indipendenza lineare.

Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 2. *Si dica, al variare di $a \in \mathbb{R}$, se i vettori*

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} a+2 \\ 0 \\ a-1 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

Svolgimento.

Prima di scrivere il calcolo che ci darà la soluzione all'esercizio, vediamo come ci si arriva. Ci stiamo chiedendo se i tre vettori sono linearmente indipendenti, quindi ci stiamo chiedendo se

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Scriviamolo per esteso

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} a+2 \\ 0 \\ a-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Ma questo non è altro che il sistema lineare

$$\begin{cases} -\alpha + (a+2)\gamma = 0 \\ \alpha + a\beta = 0 \\ \alpha + (a-1)\gamma = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Inoltre abbiamo detto che l'unica possibilità è che $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ma allora il sistema in questione è un sistema omogeneo che ha come unica soluzione la soluzione banale e nient'altro. In altre parole il sistema è determinato.

Una proprietà equivalente all'essere determinato del sistema è che il rango della sua matrice dei coefficienti sia massimo.

Tornando al nostro problema dunque, basta mettere i vettori come colonne di una matrice, calcolarne il rango e vedere per quali valori di a risulta massimo, perchè in quel caso vorrà dire che i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Costruiamo la matrice A_a:

$$A_a = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & a+2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss:

$$A_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 & a+2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_1(-1) \\ E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 \\ 0 & a & a+2 \\ 0 & 0 & 2a+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E_2(1/a) \\ E_3(\frac{1}{2a+1}) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 \\ 0 & 1 & \frac{a+2}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Arriviamo a questa forma ridotta se $a \neq 0$ e $a \neq -1/2$. Sotto queste condizioni, questa matrice, che ha per colonne i vettori di partenza, ha rango 3, vuol dire che il sistema (2) è determinato, quindi che la sua unica soluzione è quella banale, che è proprio la condizione di indipendenza lineare.

Quindi se $a \neq 0$ e $a \neq -1/2$ i tre vettori sono linearmente indipendenti.
Vediamo cosa succede se $a = 0$: Costruiamo la matrice A_0:

$$A_0 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} E_1(-1) \\ E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} E_2(1/2) \\ E_{32}(-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U \end{aligned}$$

Essendo il rango 2, vuol dire che il sistema (2) è indeterminato, quindi che la soluzione banale non è l'unica. In altre parole, non servono α, β, γ tutti nulli affinché la combinazione lineare dei vettori di partenza dia come risultato il vettore nullo.

Concludiamo che con $a = 0$ i vettori sono linearmente dipendenti.
Vediamo cosa succede se $a = -1/2$: Costruiamo la matrice $A_{-1/2}$:

$$A_{-1/2} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss:

$$\begin{aligned} A_{-1/2} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -3/2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} E_1(-1) \\ E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ E_2(-2) & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U \end{aligned}$$

Essendo il rango 2, vuol dire che il sistema (2) è indeterminato, quindi che la soluzione banale non è l'unica. In altre parole, non servono α, β, γ tutti nulli affinché la combinazione lineare dei vettori di partenza dia come risultato il vettore nullo.

Concludiamo che con $a = -1/2$ i vettori sono linearmente dipendenti.

ESERCIZIO 3. *Dire per quale valore di k la matrice*

$$A_k = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 2 & 2k \end{bmatrix}$$

appartiene al sottospazio vettoriale W di $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

M_1 e M_2 generano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, questo vuol dire che ogni elemento di W si può ricavare dalla combinazione lineare $\alpha M_1 + \beta M_2$ con degli opportuni α e β.

Ci stiamo chiedendo se A appartiene a questo sottospazio vettoriale, quindi vediamo se si può scrivere come combinazione lineare di M_1 e M_2:

$$\alpha M_1 + \beta M_= A$$

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 2 & 2k \end{bmatrix}$$

Eseguendo la moltiplicazione per scalare e la somma tra matrici, otteniamo

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta & \alpha \\ \beta & 3\alpha + 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 2 & 2k \end{bmatrix}$$

Da cui ricaviamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k \\ \alpha = 0 \\ \beta = 2 \\ 3\alpha + 2\beta = 2k \end{cases}$$

Dal quale capiamo che $\alpha = 0$, $\beta = 2$ il che è coerente con $k = 2$. Quindi essendo il sistema determinato, la matrice A appartiene al sottospazio vettoriale W se $k = 2$.

ESERCIZIO 4. *Dato*

$$U = \{ \begin{bmatrix} a-b & b+c & c+a & 0 \end{bmatrix}^T \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$*, determinare una base di* U*.*

Svolgimento.

Iniziamo con lo scomporre il generico vettore di U in una combinazione lineare:

$$\begin{bmatrix} a-b \\ b+c \\ c+a \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da questo si capisce che i vettori che appaiono nella combinazione lineare sono i generatori di U:

$$U = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

Questi sono dei generatori, per avere una base, dobbiamo vedere quali sono linearmente indipendenti.

Questo si vede ponendo i vettori in una matrice e in seguito all'Eliminazione di Gauss, le colonne dominanti, ci diranno quali sono i vettori linearmente indipendenti: se n colonne risultano dominanti, i vettori che erano in quelle colonne sono linearmente indipendenti.

Costruiamo la matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esegiamo l'Eliminazione di Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{31}(-1) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{32}(-1) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Essendo le prime due le colonne dominanti, i vettori linearmente indipendenti saranno quelli che hanno formato la prima e la seconda colonna di A.

Quindi una base di U è data dai vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

ESERCIZIO 5. *Trovare una base dello spazio vettoriale*

$$W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$$

Dove

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$v_3 = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$
$$v_5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$$

Svolgimento.

Ricordiamo innanzitutto che una base è un insieme di generatori linearmente indipendenti per lo spazio vettoriale.

Questi cinque vettori sono dei generatori di W quindi bisogna cercare quali sono linearmente indipendenti.

Per fare questo mettiamoli in una matrice e tramite l'Eliminazione di Gauss vediamo quali sono linearmente indipendenti:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -6 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} E_1(1/2) \\ E_{21}(-4) \\ E_{31}(2) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} E_{23} \\ E_{42}(-2) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} E_3(-1/5) \\ E_{43}(2) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Dalla forma ridotta vediamo che le colonne dominanti sono la prima, la quarta e la quinta. Questo vuol dire che sono i vettori corrispondenti alla prima, alla quarta e alla quinta colonna di A ad essere linearmente indipendenti.

Dunque una base di W è data da:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T \qquad v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$
$$v_5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$$

ESERCIZIO 6. *Trovare una base dello spazio vettoriale*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x-y & y+z \\ x+z & 0 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Svolgimento.

Iniziamo con lo scomporre un generico elemento di U in una combinazione lineare:

$$\begin{bmatrix} x-y & y+z \\ x+z & 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Ho trovato così un insieme di generatori per U:

$$U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Per vedere quali di questi sono linearmente indipendenti, ne faccio la combinazione lineare:

$$x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sviluppo i conti (ottenedo il generico elemento di U) e voglio che dia la matrice nulla:

$$\begin{bmatrix} x - y & y + z \\ x + z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Questo mi porta al sistema lineare

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Adesso devo vedere come si comportano le costanti: per esempio se l'unica possibilità è che $x = y = z = 0$ allora le tre matrici saranno linearmente indipendenti, altrimenti no. Per fare questo, passo alla matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e ne calcolo il rango; le colonne che risulteranno dominanti, mi diranno quali sono le matrici linearmente indipendenti.

Eseguiamo l'Eliminazione di Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{31}(-1) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{32}(-1) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Quindi le colonne dominanti sono le prime due, cioè quelle relative alle incognite x e y, dunque le matrici che nella combinazione lineare (3) avevano come coefficienti x e y sono le matrici linearmente indipendenti.

Concludiamo dicendo che una base dello spazio V è dato dalle matrici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$