Esercizi per il corso di Analisi Matematica II
Corso di laurea in Informatica
Università di Verona
A. A. 2017/18
Docente: Simone Ugolini

Ultimo aggiornamento:

17 gennaio 2018

1

Premessa: adottiamo la convenzione di denotare con y una funzione incognita di una variabile x. In altre parole, y va inteso come $y(x)$ e y' come $y'(x)$ ovunque.

Esercizio 1.1. *Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = (y-1) \cdot x \\ y(1) = -2 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 1.2. *Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{1+x^3} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 1.3. *Si trovino almeno due soluzioni distinte del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

definite su un intervallo della forma $]-a, a[$ *per qualche* $a \in \mathbb{R}$ *con* $a > 0$.

Esercizio 1.4. *Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y^2 x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 1.5. *Si trovi una soluzione locale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y^2 x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

2

Esercizio 2.1. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+2y+1}{e^{2x}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2.2. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y^2+3y-4 \\ y(1) = -2 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2.3. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = (3+y^2)\cdot x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Suggerimento: *ad un certo punto occorre calcolare* $\int \frac{1}{3+y^2}\,dy$*, che conviene scrivere così:*

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dy$$

Esercizio 2.4. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' - 7y = 2x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2.5. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \cos(x)y = \cos(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2.6. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{x^2+4} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2.7. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' - \tan(x) \cdot y = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2.8. *Si risolva il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2xy}{x^2+1} = \dfrac{x}{x^2+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

determinando inoltre l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

Esercizio 2.9. *In questo esercizio guidato si mostra il legame fra il polinomio caratteristico di un'EDO lineare a coefficienti costanti*

$$y'' + ay' + by = 0$$

e il polinomio caratteristico di una matrice che costruiamo in questo esercizio.

- *Definiamo una funzione ausiliaria* $u(x) := y'(x)$.
- *Grazie alla funzione ausiliaria introdotta l'EDO iniziale è equivalente al seguente sistema di EDO:*

  $$\begin{cases} y'(x) &= u(x) \\ u'(x) &= -by(x) - au(x) \end{cases}$$

  In notazione matriciale il sistema sopra si scrive

  $$\begin{bmatrix} y'(x) \\ u'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(x) \\ u(x) \end{bmatrix}$$

- *Si verifichi che il polinomio caratteristico di*

  $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$$

  è proprio il polinomio caratteristico dell'EDO iniziale.

3

Esercizio 3.1. *Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3.2. *Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' + y' = \sin(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.3. *Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \cos(x) + \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.4. *Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' + y = \cos(x) + \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.5. *Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' + 4y' = x^2 + 5x + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.6. *Si consideri l'insieme $S = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Si dica se ognuno dei seguenti punti è interno, esterno o di frontiera per S motivando la risposta.*

1. $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$;
2. $Q = (1, 2)$.

Esercizio 3.7. *Si consideri l'insieme $S = \{(m,n) : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Si dica se il punto $P = (1,1)$ è interno, esterno o di frontiera per S motivando la risposta.*

Esercizio 3.8. *Definiamo in* $\mathbb{R}^n$ *una distanza* d *diversa da quella euclidea.*

Se $P = (p_1, \dots, p_n)$ *e* $Q = (q_1, \dots, q_n)$ *sono punti di* $\mathbb{R}^n$*, allora*

$$d(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|.$$

Quindi definiamo la norma di un vettore $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *come*

$$\|\overrightarrow{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Definiamo infine l'intorno "sferico" di ogni $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ *di raggio* $r > 0$ *come*

$$U_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - P\| < r\}.$$

1. *Si rappresenti nel piano cartesiano* $U_1(O)$ *dove* $O = (0, 0)$.
2. *[facoltativo] Utilizzando eventualmente un'applicazione di rappresentazione grafica si rappresenti* $U_1(O)$ *dove* $O = (0, 0, 0)$.

4

Esercizio 4.1. *Sia* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$. *Si dica se ognuna delle seguenti affermazioni è vera motivando la risposta.*

a) Il punto $P = (0, 0)$ *è interno all'insieme* S.

b) Il punto $P = (0, 0)$ *è di accumulazione per l'insieme* S.

c) Il punto $Q = (5, 0)$ *è esterno all'insieme* S.

Esercizio 4.2. *Si dica se l'insieme*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 = 0\}$$

è aperto, chiuso o né aperto né chiuso, motivando la risposta.

Esercizio 4.3. *Si dica se l'insieme*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

è aperto, chiuso o né aperto né chiuso.

Esercizio 4.4. *Si trovi una parametrizzazione dell'iperbole*

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1,$$

dove a, b *sono numeri reali positivi e* x_C, y_C *sono numeri reali qualunque.*

Esercizio 4.5. *Si calcoli la lunghezza dell'arco di curva*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, t^2). \end{array}$$

Nota: *questo non è un esercizio facile. Ad un certo punto, facendo una semplice sostituzione, si può ridurre il problema a quello del calcolo di* $\int \sqrt{1 + u^2}\, du$. *Si può tentare di calcolare l'integrale per parti. Tuttavia ad un certo punto si dovrà calcolare l'integrale*

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}\, du.$$

A questo punto può essere utile ricorrere alle funzioni iperboliche, sfruttando il fatto che

$$(\sinh(x))' = \cosh(x), \quad 1 + (\sinh(x))^2 = (\cosh(x))^2.$$

Esercizio 4.6. *Si trovi una parametrizzazione della retta r passante per i punti $P = (1,2,0)$ e $Q = (2,4,4)$.*

Si trovino quindi delle equazioni cartesiane della retta.

Esercizio 4.7. *Si trovi una parametrizzazione della retta r tangente alla curva*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\sin(4t)\cos(t), \sin(4t)\sin(t)) \end{array}$$

in $P = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Si può trovare "la" retta tangente alla curva γ in $Q = (0,0)$? Qual è il problema? Provate a visualizzare la curva γ con qualche programma di rappresentazione grafica.

Esercizio 4.8. *Si trovi una parametrizzazione della retta r tangente alla curva*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t^2, t^3) \end{array}$$

in $P = (1,1)$.

Si può trovare la retta tangente alla curva γ in $Q = (0,0)$? Qual è il problema? Provate a visualizzare la curva γ con qualche programma di rappresentazione grafica.

Esercizio 4.9. *Si calcoli la lunghezza dell'arco di curva*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, \sqrt{t^3}). \end{array}$$

Esercizio 4.10. *Si calcoli la lunghezza dell'arco di curva*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [1,2] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, \ln(t)). \end{array}$$

[Suggerimento: può essere utile usare la sostituzione $u := \sqrt{1+t^2}$ all'interno dell'integrale che permette il calcolo della lunghezza della curva.]

Esercizio 4.11. *Si calcoli la lunghezza dell'arco della spirale archimedea*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t)). \end{array}$$

5

Esercizio 5.1. *Si identifichino le curve descritte dalle seguenti equazioni e le si disegnino nel piano cartesiano:*

(a) $x^2 - 3y^2 = 1$*;*

(b) $2x^2 + 3y^2 - 4x - 12y + 13 = 0$*;*

(c) $x^2 - 3x + y^2 + 4y = 6$*;*

(d) $x^2 + x + 1 - y = 0$*;*

(e) $y^2 - \frac{x^2}{5} = 5$.

Esercizio 5.2. *Nel piano cartesiano si rappresentino le regioni corrispondenti ad ognuno dei seguenti insiemi di punti:*

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 3y^2 \le 1\right\} \\
B &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 - 4x - 12y + 13 < 0\right\} \\
C &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 3x + y^2 + 4y > 6\right\} \\
D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x + 1 - y < 0\right\} \\
E &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - \frac{x^2}{5} < 5\right\}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5.3. *Si determini il dominio di ognuna delle seguenti funzioni e lo si rappresenti nel piano cartesiano:*

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sqrt{2 - (x^2 + y^2)}; \\
g(x,y) &= \sqrt{(4 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1)}; \\
h(x,y) &= \frac{1}{x^2 - y^2}; \\
l(x,y) &= \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\ln(x+y)}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5.4. *Si disegnino le curve di livello 9 delle funzioni*

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2 + y^2 - 6x + 13; \\
g(x,y) &= y - x^2 + x.
\end{aligned}$$

Esercizio 5.5. *Si dimostri che*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Esercizio 5.6. *Sia* $f(x,y) = xe^{-\frac{y}{x}}$ *una funzione definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tale che* $x \neq 0$. *Si mostri che non esiste* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

[Suggerimento: si considerino delle curve della forma $y = \pm x^\alpha$*]*

Esercizio 5.7. *Sia* $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ *una funzione definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Si mostri che non esiste* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Esercizio 5.8. *Si dimostri che la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$$

è discontinua in $(0,0)$.

Esercizio 5.9. *Si dimostri che la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y-x)}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$.

[Suggerimento: si calcolino separatamente i limiti $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ *e* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$*]*

Esercizio 5.10. *Si dimostri che la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y-1)^2\sin(\pi x)}{(x-2)^2+(y-1)^2}, & se\ (x,y) \neq (2,1) \\ 0, & se\ (x,y) = (2,1) \end{cases}$$

è continua in $(2,1)$.

Esercizio 5.11. *Si consideri la funzione*

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

definita per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tale che* $x \neq -y$.

Si mostri che non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

[Suggerimento: si provino varie direzioni, ad esempio quelle della forma (x,mx), (x,x^α), $(x,-x+x^\alpha)$ *con* α *numero reale positivo].*

6

Esercizio 6.1. *Si consideri l'insieme*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Si dica se ognuno di questi punti è interno, esterno o di frontiera per A:

1. $P = (1, 0)$;
2. $Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
3. $R = (0, 2)$.

Esercizio 6.2. *Si trovino le derivate parziali delle seguenti funzioni:*

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{x-y^3}; \\ g(x, y) &= \frac{x - y^2}{xy + y^3}; \\ h(x, y) &= \sin(x + y^2); \\ l(x, y) &= \ln(1 + x + y^2). \end{aligned}$$

7

Esercizio 7.1. *Si trovi l'equazione del piano tangente al grafico di*

$$f(x,y) = e^{x \cdot y} + x^2 + \ln(y)$$

nel punto $(0,1,1)$.

Esercizio 7.2. *Si trovi l'equazione del piano tangente al grafico di*

$$f(x,y) = e^{x+y^2} + \sin(x+y)$$

nel punto $(0,0,1)$.

Esercizio 7.3. *Si consideri la funzione di due variabili così definita:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & se\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si calcolino $f'_x(0,0)$ *e* $f'_y(0,0)$. *Quindi si verifichi che* f *è differenziabile in* $(0,0)$.

Esercizio 7.4. *Si consideri la funzione di una variabile* x *così definita:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x = 0, \\ x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & se\ x \neq 0. \end{cases}$$

Si verifichi che f *è derivabile in* 0 *e quindi differenziabile in* 0 *visto che per funzioni di una variabile i due concetti sono equivalenti. Si verifichi poi che* $f'(x)$ *non è continua in* 0. *Da ciò si può quindi concludere che la continuità della derivata non è necessaria per la differenziabilità.*

Esercizio 7.5. *Si consideri la seguente funzione definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & se\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si verifichi che le derivate direzionali di f *calcolate in* $(0,0)$ *sono tutte nulle. Si noti quindi che le ipotesi del teorema della formula del gradiente non sono soddisfatte per questa funzione (si provi a calcolare il limite per* (x,y) *che tende a* $(0,0)$ *di questa funzione lungo la direzione* $y = x^2$*). Nonostante ciò constatiamo che la formula del gradiente funziona comunque in questo esempio. Perciò la condizione espressa dalla formula del gradiente è solo sufficiente.*

8

Esercizio 8.1. *Si trovi l'equazione della retta r tangente alla curva di livello 0 della funzione $f(x, y) = e^x \cdot y + \ln(x^2 + y^2)$ nel punto $(1, 0)$.*

Esercizio 8.2. *Si trovi l'equazione della retta r tangente alla curva di livello 0 della funzione $f(x, y) = \sin(x + y) - x^3$ nel punto $(0, 0)$.*

Esercizio 8.3. *Si studi il segno di ognuna delle seguenti forme quadratiche (cioè si dica se ognuna delle seguenti forme quadratiche è definita positiva, definita negativa, semidefinita positiva, semidefinita negativa o indefinita) usando il criterio dei minori.*

1. $f(x, y) = 4x^2 + 8xy + 5y^2$;
2. $f(x, y) = -x^2 + xy - 3y^2$;
3. $f(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$;
4. $f(x, y) = 4x^2 - y^2$;
5. $f(x, y) = 6xy - 9y^2 - x^2$.

Esercizio 8.4. *Si studi il segno di ognuna delle seguenti forme quadratiche usando il criterio degli autovalori.*

1. $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + z^2$;
2. $q(x, y, z) = xy + y^2 + z^2$;
3. $q(x, z, y) = xy + yz$.

Esercizio 8.5. *Sia $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ una forma quadratica. Si supponga di sapere che tale forma quadratica è indefinita. Si mostri che è possibile trovare punti (x, y) arbitrariamente vicini a $(0, 0)$ in cui $f(x, y) < 0$ e punti arbitrariamente vicini a $(0, 0)$ in cui $f(x, y) > 0$.*

9

Esercizio 9.1. *Sia*
$$f(x,y) = \ln(xy) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

a) Si trovi il dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ della funzione f.

b) Si trovino e si classifichino i punti stazionari della funzione f all'interno del suo dominio di definizione.

Esercizio 9.2. *Sia*
$$f(x,y) = x^4 + x^3y - xy$$
una funzione definita per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Si trovino e si classifichino i punti stazionari della funzione f.

Esercizio 9.3. *Sia*
$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + x + 4).$$

a) Si trovi il dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ della funzione f (non è difficile, ma non è una conica...).

b) Si trovino e si classifichino i punti stazionari della funzione f all'interno del suo dominio di definizione.

Esercizio 9.4. *Si trovino il minimo e il massimo globale della funzione*
$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$$
sull'insieme
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Esercizio 9.5. *Si trovino il minimo e il massimo globale della funzione*
$$f(x,y) = e^{xy}$$
sull'insieme
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 3\}.$$

10

Esercizio 10.1. *Sia* $f(x,y) = x + y^2$ *una funzione di due variabili reali definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Si cerchino i punti di minimo e massimo locale della funzione* f *sull'insieme*

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 25 = 0\right\}.$$

Esercizio 10.2. *Sia* $f(x,y) = x + y$ *una funzione di due variabili reali definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Si cerchino i punti di minimo e massimo locale della funzione* f *sull'insieme*

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y - 1 = 0\right\}.$$

Esercizio 10.3. *Sia* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *una funzione di due variabili reali definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Si cerchino i punti di minimo e massimo locale della funzione* f *sull'insieme*

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - 1 = 0\right\}.$$

Esercizio 10.4. *Sia* $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ *una funzione di due variabili reali definita per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Si cerchino i punti di minimo e massimo locale della funzione* f *sull'insieme*

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^3 + y^2 = 0\right\}.$$

[Osservazione: in questo esercizio c'è un punto singolare per il vincolo.]

Esercizio 10.5. *Si trovino il minimo e il massimo globale della funzione*

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x$$

sull'insieme

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 10.6. *Si calcoli l'integrale di linea di prima specie* $\displaystyle\int_\gamma f\ ds$, *dove*

$$\begin{aligned} \gamma : [0,\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (e^t\cos(t), e^t\sin(t)) \end{aligned}$$

e $f(x,y) = x^2 + y^2$, *per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 10.7. *Si calcoli l'integrale di linea di prima specie* $\displaystyle\int_\gamma f\ ds$, *dove*

$$\begin{aligned} \gamma : [0,2] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (3t, 4t-1, t+5) \end{aligned}$$

e $f(x,y,z) = 3x - y + z$, *per ogni* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 10.8. *Si calcoli* $\displaystyle\iint_D e^{x-y}\ dxdy$, *dove* $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

Esercizio 10.9. *Si calcoli* $\displaystyle\iint_D (e^x y + y^2 x)\ dxdy$, *dove* $D = [-1,1] \times [0,2]$.

11

Esercizio 11.1. *Si calcoli* $\iint_D xy\ dxdy$*, dove* $D = D_1 \cup D_2$ *e*

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0, -x \le y \le x^2+1\}; \\ D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le x+1\}. \end{aligned}$$

Esercizio 11.2. *Si calcoli* $\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\ dxdy$ *sapendo che*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, \frac{x^2}{2} \le y \le x^2\right\}.$$

Esercizio 11.3. *Si calcoli*

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2-9}\ dxdy,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9 \le x^2+y^2 \le 25\}$.

Esercizio 11.4. *Si calcoli*

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdy,$$

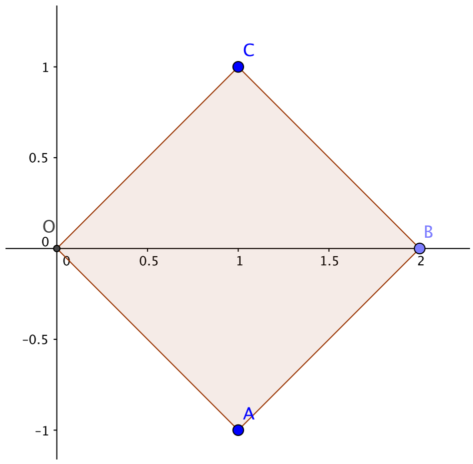
dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4, y \ge x\}.$$

Esercizio 11.5. *Si calcoli*

$$\iint_D (x-y)^2\ dxdy,$$

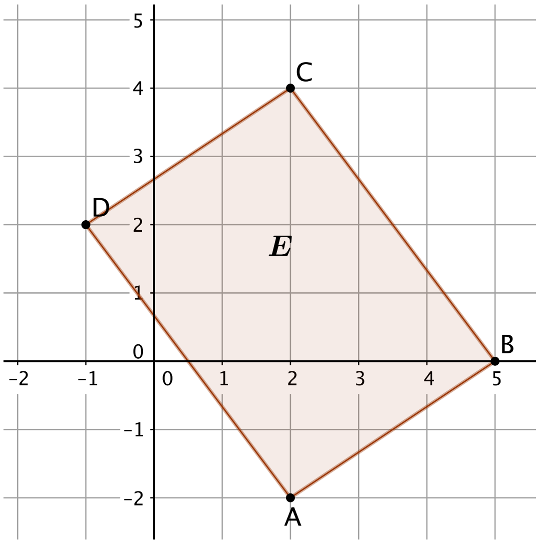
dove D *è il parallelogramma qui rappresentato:*



Esercizio 11.6. *Si calcoli*

$$\iint_E x \, dxdy,$$

dove E è il parallelogramma qui rappresentato:



Esercizio 11.7. *Si calcoli il volume dei seguenti solidi usando degli opportuni integrali doppi.*

1. *Cilindro di altezza $h > 0$ a base circolare di raggio $R > 0$.*
2. *Semisfera di raggio $R > 0$.*

   [Suggerimento: l'equazione cartesiana della semisfera di raggio R centrata in $(0, 0, 0)$ è $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$]

3. *Cono circolare retto di raggio R e altezza $h > 0$.*

12

Esercizio 12.1. *Calcolare il volume della regione*

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

usando l'integrazione per fili (si tratta quindi di integrare la funzione 1 *su* Ω *usando l'integrazione per fili).*

Esercizio 12.2. *Si calcoli il volume dei seguenti solidi usando degli opportuni integrali* tripli *(si suggerisce di usare l'integrazione per strati).*

1. *Cilindro di altezza* $h > 0$ *a base circolare di raggio* $R > 0$*.*

2. *Semisfera di raggio* $R > 0$*.*

3. *Cono circolare retto di raggio* R *e altezza* $h > 0$*.*

Esercizio 12.3. *Si calcoli l'integrale*

$$\iiint_D (x^2 + y^2)^2 \, dxdydz,$$

dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [2, 4], x^2 + y^2 \leq 5 - z\}$*, usando l'integrazione per strati.*

13 (ultimo foglio di esercizi)

Esercizio 13.1. *Si calcoli il seguente integrale triplo usando delle coordinate sferiche:*

$$\iiint_D x^2 \, dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 13.2. *Si calcoli il seguente integrale triplo usando delle coordinate sferiche:*

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\}.$$

[Suggerimento: si cerchi di rappresentare il dominio di integrazione. In particolare, si presti attenzione agli estremi di integrazione rispetto alla variabile φ]

Esercizio 13.3. *Si calcoli il seguente integrale triplo:*

$$\iiint_D \frac{x^2 e^z}{1+z^2} \, dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2 + 1\}.$$

Esercizio 13.4. *Si calcoli il seguente integrale triplo:*

$$\iiint_D z^2 \, dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 3, \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \leq z \leq 2\}.$$

Esercizio 13.5. *Si calcoli il seguente integrale triplo:*

$$\iiint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \, dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1\}.$$

Esercizio 13.6. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{F}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\dfrac{2xy}{(1+x^2)^2}, -\dfrac{1}{1+x^2} \right). \end{array}$$

Si dica se tale campo è conservativo e in caso affermativo si trovi un potenziale U di $\overrightarrow{F}$.

Esercizio 13.7. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{F}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2y+1, 2x-1, 2z). \end{array}$$

Si dica se tale campo è conservativo e in caso affermativo si trovi un potenziale U di $\overrightarrow{F}$.

Esercizio 13.8. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{F}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (2x+3y, 4x-5y)\,. \end{array}$$

Si dica se tale campo è conservativo e in caso affermativo si trovi un potenziale U di $\overrightarrow{F}$.

Esercizio 13.9. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{F}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (y^2+\sin(z), 2xy, x\cos(z))\,. \end{array}$$

1. *Si dica se tale campo è conservativo e in caso affermativo si trovi un potenziale U di $\overrightarrow{F}$.*
2. *Si calcoli l'integrale di linea di seconda specie del campo $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento che congiunge $P=(1,1,0)$ a $Q=(2,0,\pi)$.*

Esercizio 13.10. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{F}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x, (xz-2), xy)\,. \end{array}$$

1. *Si dica se tale campo è conservativo e in caso affermativo si trovi un potenziale U di $\overrightarrow{F}$.*
2. *Si calcoli l'integrale di linea di seconda specie del campo $\overrightarrow{F}$ lungo la curva*

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & [1,2] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (t-1, 1-t, 2t-2)\,. \end{array}$$

Esercizio 13.11. *Si calcoli l'integrale di linea di seconda specie del campo vettoriale*

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{F}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (-y, x) \end{array}$$

lungo la curva

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vartheta & \mapsto & (\vartheta\cos(\vartheta), \vartheta\sin(\vartheta))\,. \end{array}$$

Esercizio 13.12. *Si calcoli l'area della superficie Σ parametrizzata da*

$$\begin{array}{rcl} \sigma: [0,\pi]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\varphi,\vartheta) & \mapsto & (\sin(\varphi)\cos(\vartheta), \sin(\varphi)\sin(\vartheta), \cos(\varphi)). \end{array}$$

Esercizio 13.13. *Si calcoli l'area della superficie Σ parametrizzata da*

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & [0,1]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (u\cos(v), u\sin(v), v). \end{array}$$