Dipartimento di Informatica
Università di Verona
A.A. 2018-19

Elaborazione dei Segnali e Immagini

Analisi di Fourier - Trasformata di Fourier continua

Gonzalez Cap.4.2.4-4.2.5

TRASFORMATA DI FOURIER

- Sia *f(t)* segnale reale continuo $f\colon\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *anche non periodico*, si chiama trasformata di Fourier (TdF) $\mathscr{F}(f(t))$ = F(μ) il segnale $\mathscr{F}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$

$$\mathscr{F}\big(f(t)\big)=F\big(\mu\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt$$

- L'unità frequenziale μ è l'analogo di *n/T* della serie di Fourier

- La TdF esiste se f(t) è segnale di energia (condizione sufficiente, altri segnali ammettono TdF)

TRASFORMATA DI FOURIER INVERSA

- Sia $F(\mu)$ la trasformata di Fourier di un segnale $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si definisce trasformata di Fourier inversa il segnale $\mathfrak{F}^{-1}(F(\mu)) = f(t)$

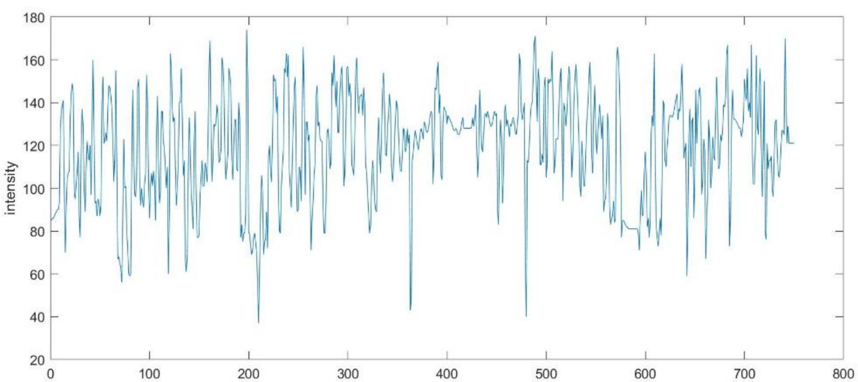
$$\mathfrak{F}^{-1}(F(\mu)) = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

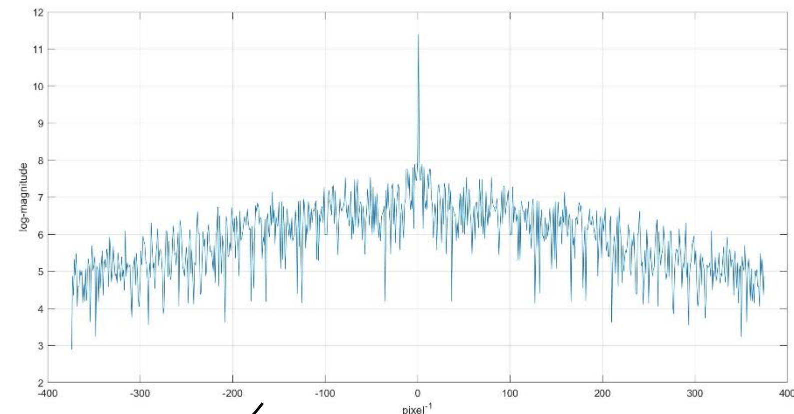
- In pratica, la TdF restituisce, per una data frequenza μ, un coefficiente di “presenza” $F(\mu)$
- La $\mathfrak{F}^{-1}$ permette di ricostruire f a partire da F

$$\mathcal{F}\big(f(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}\,dt$$

$F(\mu)$

$f(t)$



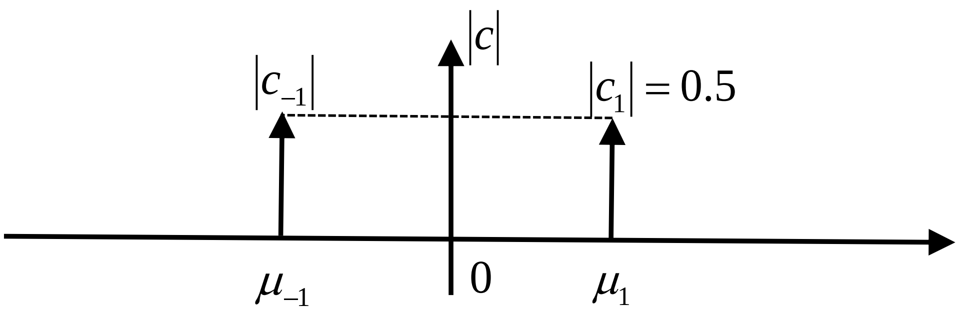


$$\mathcal{F}^{-1}\big(F(\mu)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu)e^{j2\pi\mu t}\,d\mu$$

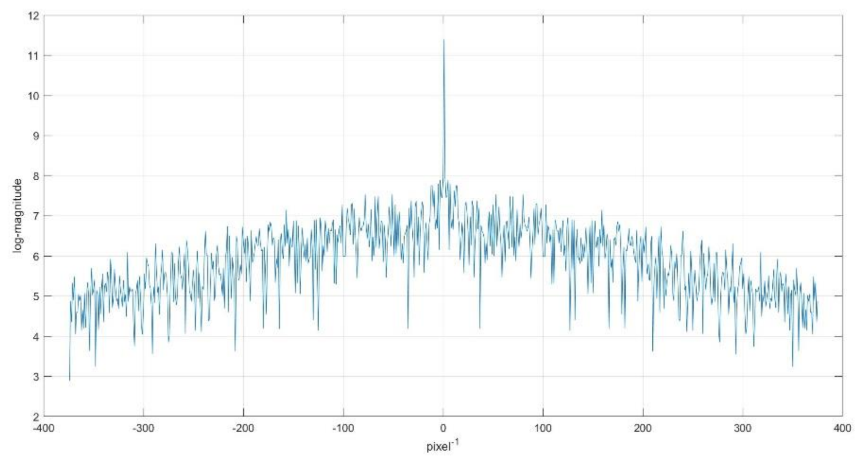
- Se f(t) è reale, la sua trasformata in generale è complessa
  - Se *t* rappresenta il tempo (sec.), μ rappresenta Hertz (cicli/sec.)
  - Se *t* rappresenta lo spazio (m), μ rappresenta freq. spaziale (cicli/m)
- Nella serie di Fourier si hanno coefficienti $c_n \in \mathbb{C}$ complessi (cfr. Eq. *analisi*), qui abbiamo funzioni di codominio complesso

$$\mathfrak{F}\big(f(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt \qquad c_n \in \mathbb{C} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$$

- Gli spettri di ampiezza e fase nella serie di Fourier erano funzioni a pettine, qui sono generalmente continue (per quanto riguarda lo spettro di ampiezza) o continue a tratti



$$|c|(\mu)$$



$$F(\mu)$$

PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER(1)

- LINEARITÀ

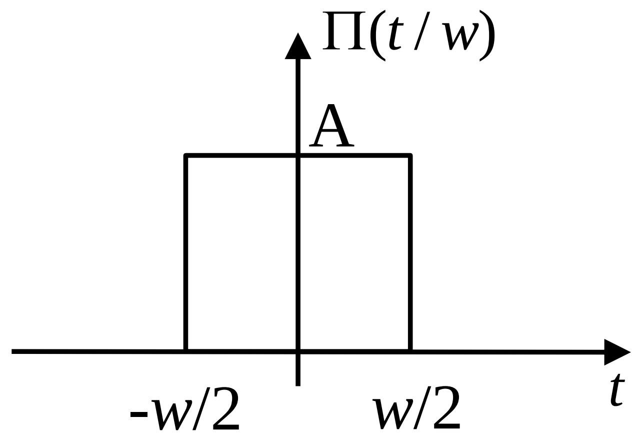
$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} a_1 F_1(\mu) + a_2 F_2(\mu)$$

- SCALATURA TEMPORALE

$$z(t) = f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(\mu) = \frac{1}{a} F\left(\frac{\mu}{a}\right)$$

$$a = -1, \qquad z(t) = f(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(\mu) = F(-\mu)$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA BOX



$$\mathfrak{F}\big(f(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t/w) e^{-j2\pi\mu t}\, dt = F\big(\mu\big)$$

$$= \int_{-w/2}^{w/2} A e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

$$= A \int_{-w/2}^{w/2} e^{-j2\pi\mu t}\, dt = \frac{-A}{j2\pi\mu}\Big[e^{-j2\pi\mu t}\Big]_{-w/2}^{w/2} = \frac{A}{j2\pi\mu}\Big[e^{j\pi\mu w} - e^{-j\pi\mu w}\Big]$$

$$= \frac{A}{\pi\mu} \cdot \frac{1}{2j}\Big[e^{j\pi\mu w} - e^{-j\pi\mu w}\Big] = \frac{A}{\pi\mu} \cdot \sin\big(\pi\mu w\big) = Aw \cdot \frac{\sin\big(\pi\mu w\big)}{\pi\mu w}$$

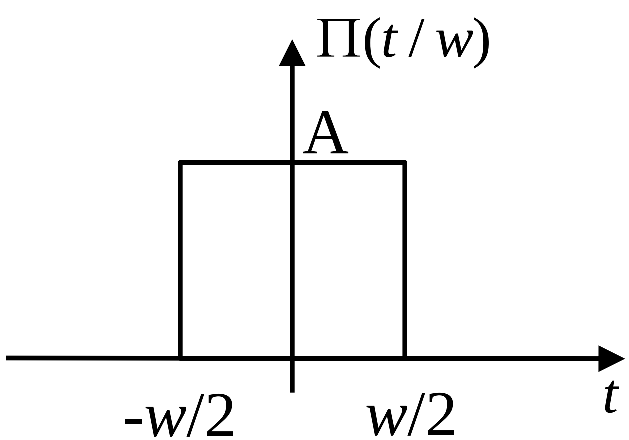
- La funzione $Aw \cdot \dfrac{\sin(\pi\mu w)}{\pi\mu w}$ prende il nome di funzione *sinc(μw)*
- In generale $sinc(m) = \dfrac{\sin(\pi m)}{\pi m}$ e

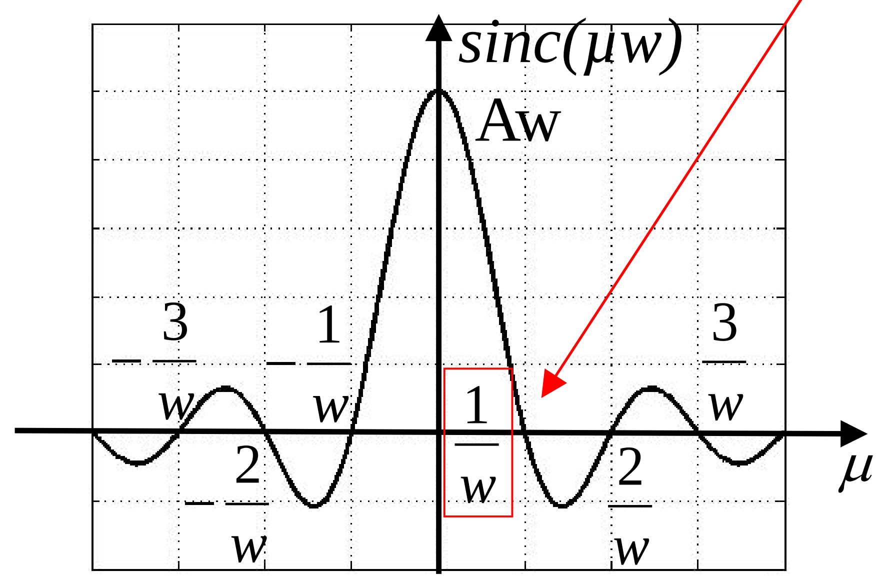
$$sinc(0) = 1$$

$$sinc(m) = 0 \quad \forall \mathrm{m} \in \mathbb{Z}$$

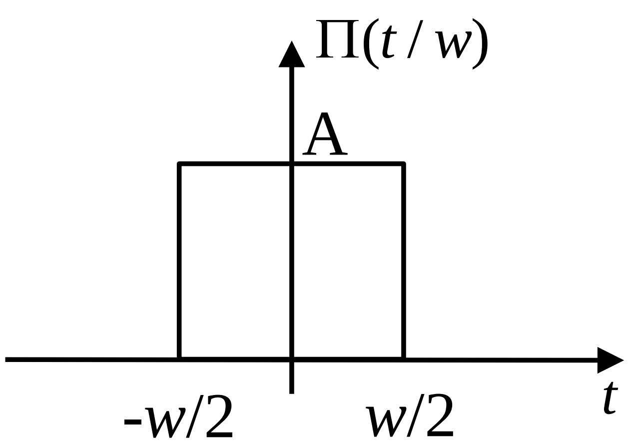
$$m = 1 \leftarrow \mu = \frac{1}{w}$$

Nel nostro caso:

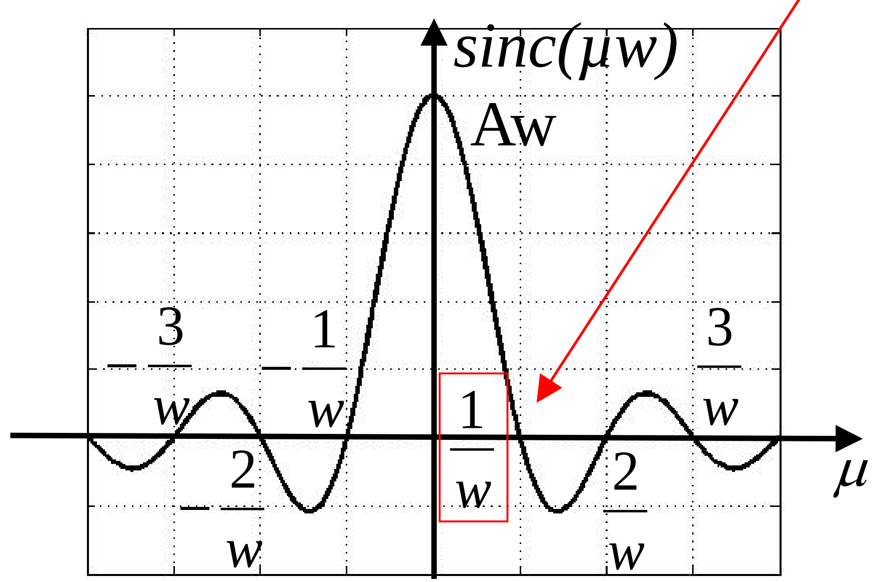




- Osservazioni:
  - più è larga la box, più è frequente la funzione sinc
  - la box è limitata, la sinc è infinita a dx e sx, anche se il termine la denominatore attenua il valore della funzione



$m = 1 \leftarrow \mu = \frac{1}{w}$



PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER(2)

- DUALITÀ

$$f(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} F(\mu)$$

$$F(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} f(-\mu)$$

- fondamentale per eseguire trasformate con pochissimi passaggi
- Se mi sono fatto i conti per una trasformata, ne ho una gratis

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\mu) \qquad \left(F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt \right)$$

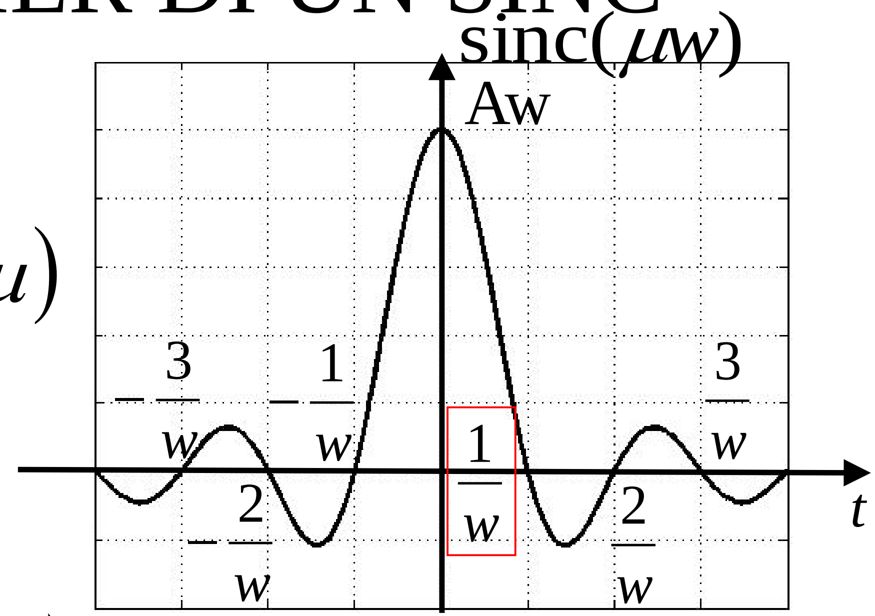
$$F(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} f(-\mu) \qquad \left(f(-\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-j2\pi\mu t}dt \right)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu)e^{j2\pi\mu t}d\mu \quad \text{———} \quad t \to -t \longrightarrow f(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu)e^{-j2\pi\mu t}d\mu$$

$$t \to \mu \quad \& \quad \mu \to t \longrightarrow f(-\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-j2\pi\mu t}dt$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SINC

$$\mathfrak{F}\big(f(t)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}(tw)e^{-j2\pi\mu t}dt=F(\mu)$$

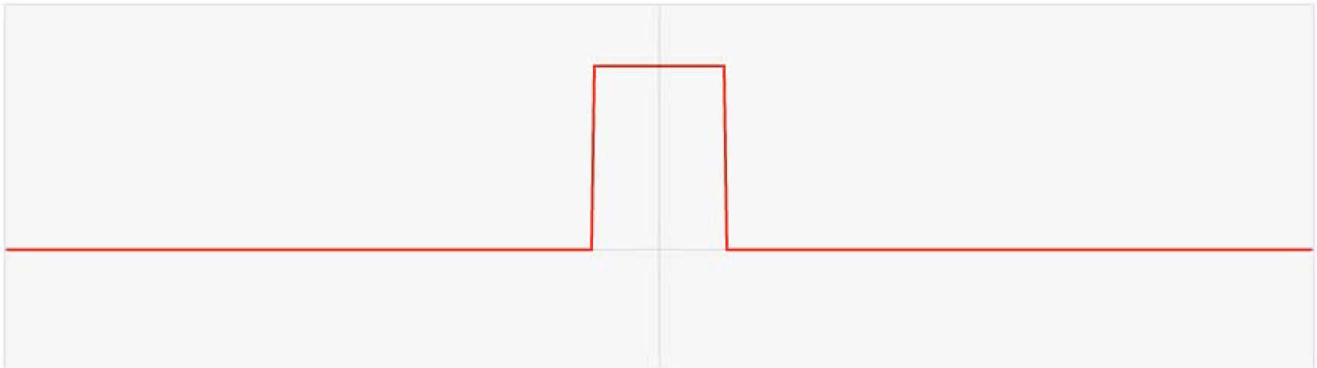


$$f(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\mu)$$

$$F(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} f(-\mu)$$

$$\Pi(t/w) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \mathrm{sinc}(\mu w)$$

$$\mathrm{sinc}(tw) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \Pi(-\mu/w)=\Pi(\mu/w)$$



$f(x)$

https://www.youtube.com/watch?v=r4c9ojz6hJg

I simboli delle funzioni sono diversi, il concetto rimane

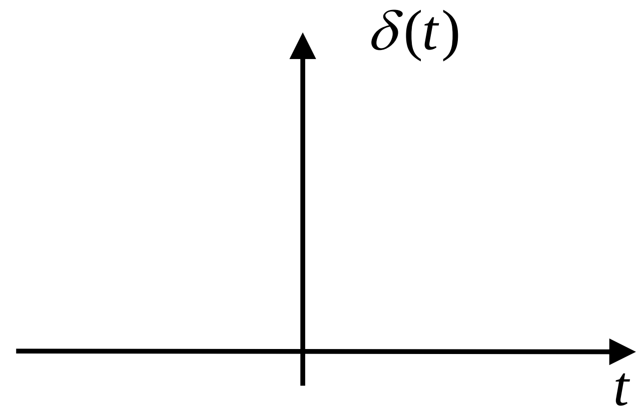
TRASFORMATA DI FOURIER DI UN IMPULSO

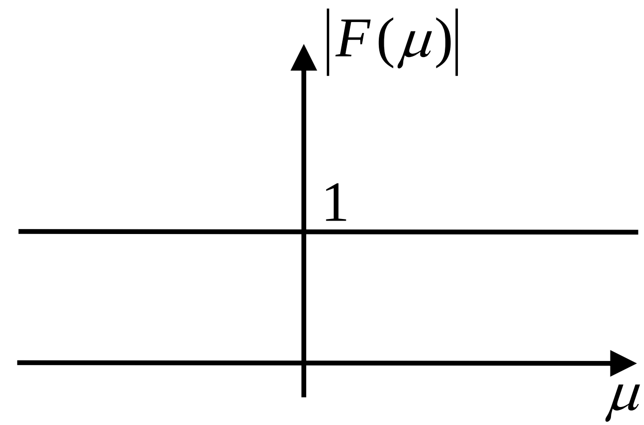
$$\mathfrak{F}\big(f(t)\big) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(0) e^{-j2\pi\mu 0} dt = 1$$

Ricordando che:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$





E’ una costante $\in \mathbb{R}$

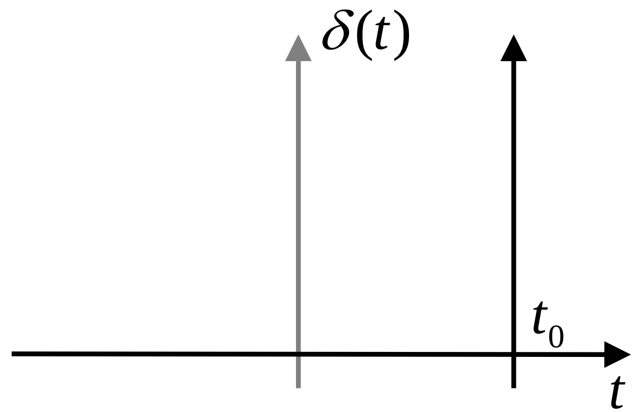
→ho solo lo *spettro di ampiezza*!

- In maniera analoga con impulso centrato in t_0

$$\mathfrak{F}\left(f(t)\right) = F\left(\mu\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

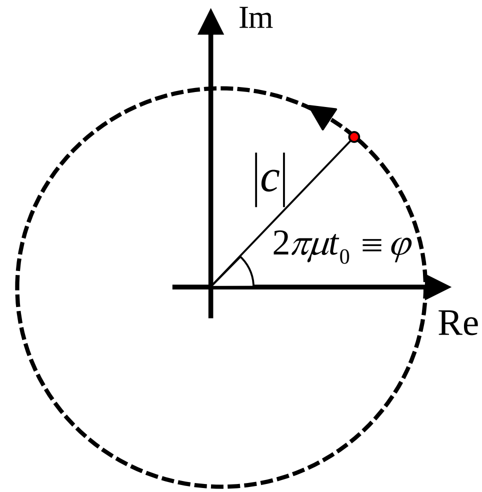
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$= e^{-j2\pi\mu t_0}$$



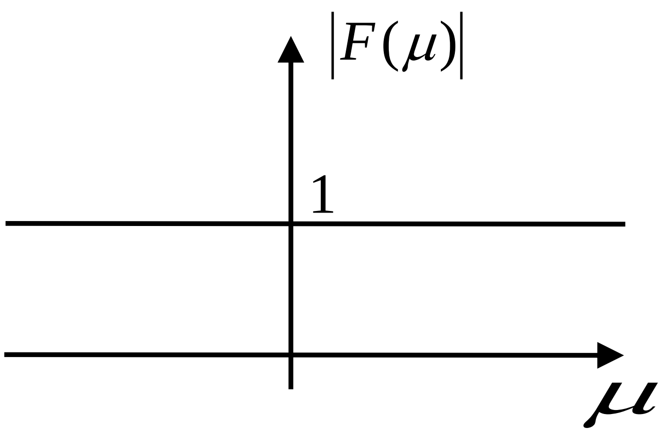
- Non abbiamo più valori reali, ma complessi

- Ricordando la forma esponenziale di un numero (o funzione) complesso $f(x) = |c| e^{j2\pi x}$



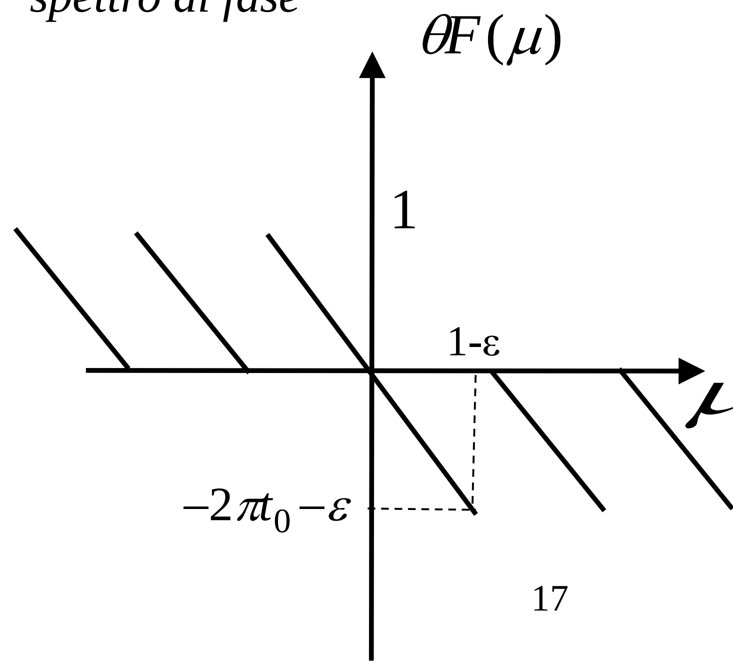
$$e^{-j2\pi\mu t_0} = 1 \cdot e^{-j2\pi\mu t_0} = F(\mu)$$

spettro di ampiezza



μ	$-2\pi\mu t_0$
0	0
0.5	$-\pi t_0$
-0.5	πt_0
1-ε	$-2\pi t_0 - \varepsilon$
1.5	$-\pi t_0$
-1.5	πt_0

spettro di fase



- Applico la proprietà di dualità per vedere qual’è la trasformata gratis che ottengo

$$f(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\mu)$$

$$F(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} f(-\mu)$$

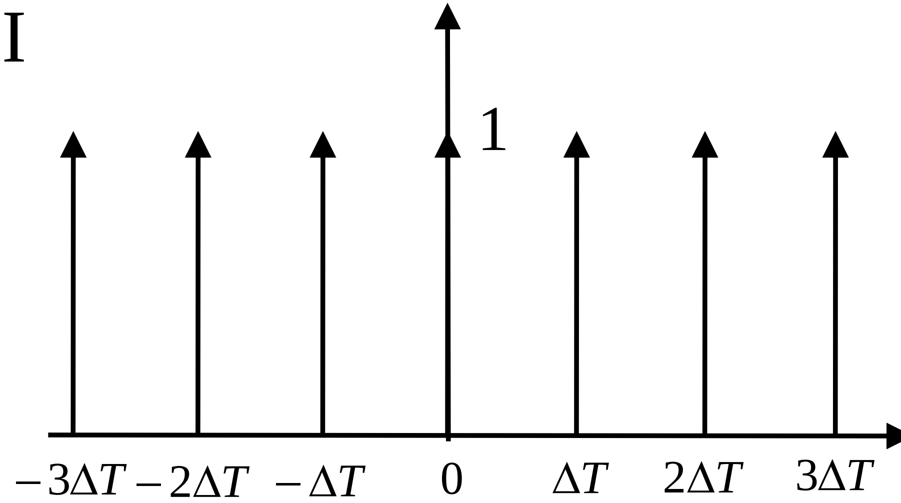
$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}} e^{-j2\pi\mu t_0}$$

$$e^{-j2\pi t t_0} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \delta(-\mu-t_0)$$

$$e^{j2\pi t t_0} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \delta(\mu-t_0)$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI UN TRENO DI IMPULSI

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) \quad n \in \mathbb{Z}$$



$$\mathfrak{F}(s_{\Delta t}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\Delta t}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = F(\mu)$$

- Osservando che $s_{\Delta T}(t)$ è periodica, uso la serie di Fourier per rappresentarla

$$\left(f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \right)$$

- determino c_n

$$c_n = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} dt$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} dt$$

$$= \frac{1}{\Delta T}$$

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$$

- Ho una forma alternativa per il treno di impulsi
- Un'esponenziale complessa con cui ho già lavorato (slide17)

$$e^{j2\pi t t_0} \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\mu - t_0)$$

- Uso la linearità (mi dimentico della sommatoria per ora e dello scalare)
- Uso il risultato di dualità di slide 17 e ottengo

$$e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

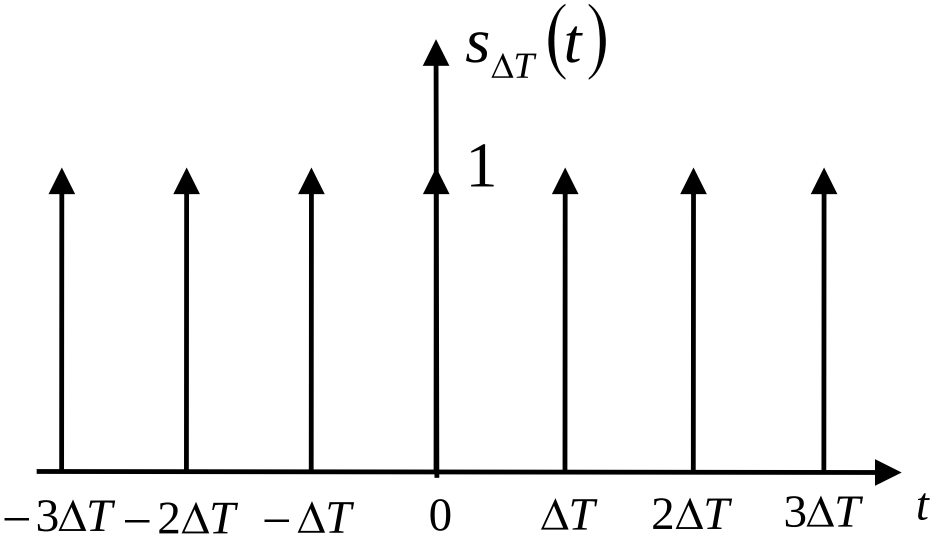
- da cui

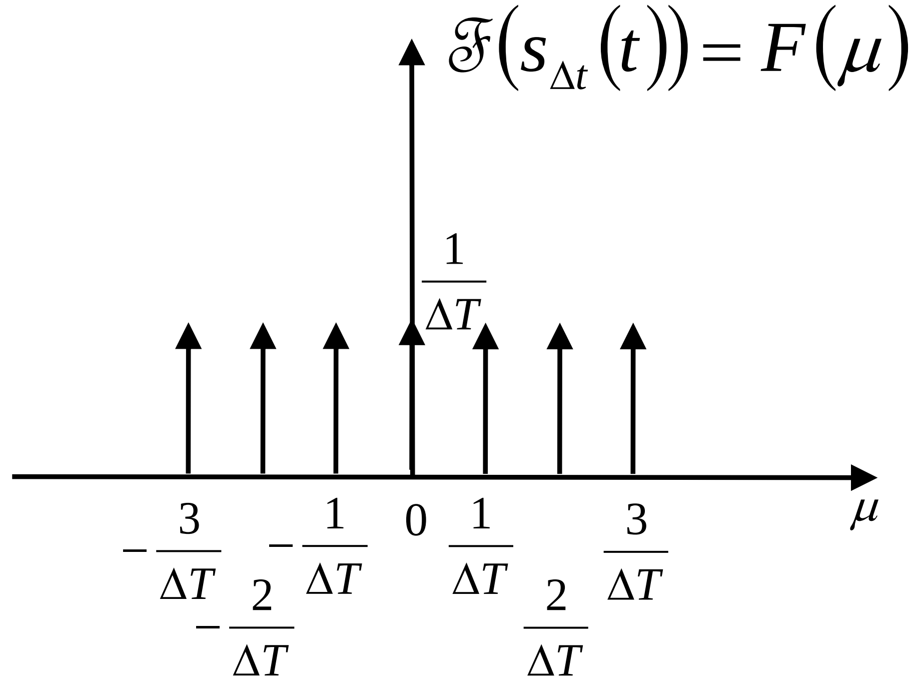
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$


I KNOW
FOURIER
memegenerator.net





- Più lungo il periodo di campionamento ΔT in questo dominio…

…più è fitto il periodo di campionamento qui e meno sono alti gli impulsi

…E VICEVERSA!

- CONVOLUZIONE (*da lezione 2*)
  - “Parente stretto” della cross-correlazione
  - Dati $f_1(t)$, $f_2(t)$ segnali continui di variabile reale, l’integrale di convoluzione è

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

sotto l’ipotesi di esistenza dell’integrale per ogni $t \in \mathbb{R}$

(p.e., se i segnali non sono ne’ di energia ne’ di potenza l’integrale diverge)

- Cosa serve fare la convoluzione (non curiamoci dell'essere nel continuo/discreto… supponiamo tutto continuo)?
- Immaginate di avere questo kernel f_1 :

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

che operazione state implementando con la convoluzione?

f_2

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	200	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	100	0	0
0	0	0	0	0	0

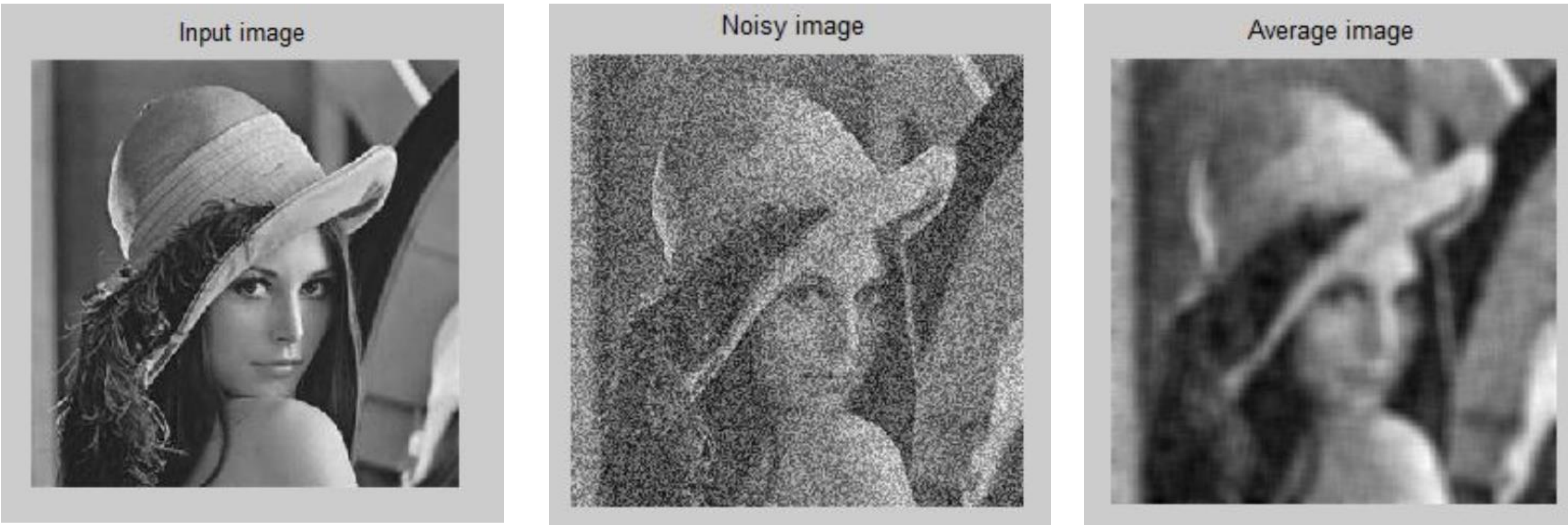
$*$

f_1 ruotato di 180°

0	0	0	0	0
0	0.11	0.11	0.11	0
0	0.11	0.11	0.11	0
0	0.11	0.11	0.11	0
0	0	0	0	0

$=$

0	0	0	0	0	0
0	22	22	22	0	0
0	22	22	22	0	0
0	22	33	33	11	0
0	0	11	11	11	0
0	0	11	11	11	0


Input image
Noisy image
Average image

TRASFORMATA DI FOURIER DELLA CONVOLUZIONE (fondamentale!)

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$\mathfrak{F}\left(f * h(t)\right) = F(\mu)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f * h(t) \right] e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) e^{-j2\pi\mu t} dt \right] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) H(\mu) e^{-j2\pi\mu\tau} d\tau$$

$$= H(\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j2\pi\mu\tau} d\tau$$

$$= H(\mu) \cdot F(\mu)$$

- La TdF di un prodotto di due funzioni continue reali è la convoluzione delle trasformate di Fourier
- La TdF di una convoluzione tra due funzioni continue reali è il prodotto delle TdF delle singole funzioni
- RISULTATO FONDAMENTALE:
  - Per eseguire il filtraggio di segnali o immagini, anziché eseguire la convoluzione del kernel con il segnale
    - prendo il segnale, ne faccio la trasformata di Fourier
    - prendo il kernel, ne faccio la trasformata di Fourier
    - moltiplico i due spettri
    - antitrasformo
    - ottengo il risultato del filtraggio

- ANCORA MEGLIO
  - prendo il segnale, ne faccio la trasformata di Fourier
  - PROGETTO UN FILTRO DIRETTAMENTE NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE, DEFINENDO A MANO I SUOI SPETTRI
  - moltiplico i due spettri
  - antitrasformo
  - ottengo il risultato del filtraggio