Lezione 26

Teoria dei giochi

Teoria dei giochi

- La teoria dei giochi studia il comportamento strategico di agenti che capiscono che le loro decisioni influenzano le azioni di altri agenti.
- La teoria fornisce un insieme di strumenti per analizzare il comportamento decisionale dei "giocatori" nel caso di interazione strategica.

Alcune applicazioni

- Studio dell'oligopolio (cartelli ecc.)
- Studio delle esternalità: es. l'uso di risorse comuni come la pesca.
- Studio di strategie militari.

Cos'è un gioco?

- In un gioco vi sono
  - Un insieme di giocatori
  - Un insieme di strategie per ogni giocatore
  - Una matrice delle vincite o matrice payoff che elenca la vincita per ogni giocatore per ogni possibile insieme di strategie scelte dai giocatori.
  - Ci occuperemo di giochi con 2 soli giocatori, ognuno con 2 strategie

Un esempio con due giocatori

- I giocatori sono A e B.
- Il giocatore A ha due strategie, diciamo "Up" e "Down".
- Il giocatore B ha due strategie, diciamo "Left" e "Right".
- La tabella che mostra i payoffs dei due giocatori per ognuna delle 4 possibili combinazioni di strategie è detta matrice payoff.

Un esempio con due giocatori

		Player B	
		L	**R**
Player A	**U**	**(3,9)**	**(1,8)**
	D	**(0,0)**	**(2,1)**

matrice payoff

Fra le parentesi:
il payoff del giocatore A è il primo
il payoff del giocatore B è il secondo

Un esempio con due giocatori

		Player B L	Player B R
Player A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Es. se A gioca Up e B gioca Right la vincita (payoff) di A è 1 e quella di B è 8.

Un esempio con due giocatori

		Player B L	Player B R
Player A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Se A gioca Down e B gioca Right il payoff di A è 2 e quello di B è 1.

Un esempio con due giocatori

		Player B L	Player B R
Player A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Indichiamo le possibili scelte come coppie di azioni, es. (U,R), dove il primo elemento è la strategia scelta dal giocatore A e il secondo è la strategia scelta da B.

Un esempio con due giocatori

		Player B L	Player B R
Player A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Quali sono le scelte migliori in questo gioco? La scelta di un giocatore dovrà essere ottima rispetto alle scelte ottime dell'altro giocatore (nessuno dei due sa In anticipo cosa farà l'altro).

Un esempio con due giocatori

		Player B L	Player B R
Player A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(U,R) è una buona scelta?

Se B gioca Right la scelta migliore per A è Down dato che così il payoff di A passa da 1 a 2. Quindi (U,R) non verrà giocato.

Un esempio con due giocatori

		Player B L	Player B R
Player A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(D,R) è una buona scelta?

Se B gioca Right la migliore risposta di A è Down. Se A gioca Down la migliore risposta di B è Right.
Quindi (D,R) è una buona scelta.

Un esempio con due giocatori

		Player B L	Player B R
Player A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

E (D,L)?

Se A gioca Down, la miglior risposta di B è Right, quindi (D,L) non va bene.

Un esempio con due giocatori

		Player B L	Player B R
Player A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

E (U,L)?

Se A gioca Up la migliore risposta di B è Left. Se B gioca Left la migliore risposta di A è Up. Quindi anche (U,L) è una scelta probabile.

Equilibrio di Nash

- Una coppia di strategie dove la scelta di ogni giocatore è ottima data la scelta ottima dell'altro è un equilibrio di Nash.
- In altri termini, un equilibrio è di Nash se ciascun giocatore, una volta osservate le scelte degli altri, non ha alcun interesse a cambiare la propria.
- Nell'esempio precedente ci sono due equilibri di Nash: (U,L) e (D,R).

Un esempio con due giocatori

		Player B L	Player B R
Player A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(U,L) e (D,R) sono due equilibri di Nash per questo gioco. Quale verrà scelto? Notare che (U,L) è preferito a (D,R) da entrambi i giocatori. Quindi la scelta sarà solo (U,L)?

Dilemma del prigioniero

- Per capire se risultati preferibili in senso Paretiano sono quelli sempre scelti in un gioco, si consideri un gioco famoso: il Dilemma del Prigioniero.

Dilemma del prigioniero

		Caio S	Caio C
Berto	S	(-5,-5)	(-30,-1)
	C	(-1,-30)	(-10,-10)

Caio e Berto devono scegliere fra negare (Silence) e confessare (Confess)

Dilemma del prigioniero

		Caio S	Caio C
Berto	S	(-5,-5)	(-30,-1)
	C	(-1,-30)	(-10,-10)

Se Berto gioca Silence la migliore risposta per Caio è Confess.

Dilemma del prigioniero

		Caio S	Caio C
Berto	S	(-5,-5)	(-30,-1)
	C	(-1,-30)	(-10,-10)

Se Berto gioca Confess la migliore risposta di Caio è Confess.

Dilemma del prigioniero

		Caio S	Caio C
Berto	S	(-5,-5)	(-30,-1)
	C	(-1,-30)	(-10,-10)

Quindi indipendentemente da quello che fa Berto, la migliore risposta di Caio è sempre la Confessione.
La Confessione è una strategia dominante per Caio.

Dilemma del prigioniero

		Caio S	Caio C
Berto	S	(-5,-5)	(-30,-1)
	C	(-1,-30)	(-10,-10)

Allo stesso modo, indipendentemente da quello che fa Caio, il meglio che Berto può fare è Confessare sempre.
Confessare è una strategia dominante anche per Berto.

Dilemma del prigioniero

		Caio S	Caio C
Berto	S	(-5,-5)	(-30,-1)
	C	(-1,-30)	(-10,-10)

Quindi il solo eq. di Nash per questo gioco è (C,C), anche se (S,S) dà sia a Berto che a Caio un payoff maggiore.
L'unico eq. di Nash è inefficiente!

Chi gioca quando?

- In tutti e due gli esempi i giocatori scelgono lo loro strategie simultaneamente.
- Si tratta dunque di giochi simultanei.

Chi gioca quando?

- Ma ci sono giochi in cui un giocatore sceglie per primo.
- Tali giochi sono detti giochi sequenziali.
- Il giocatore che si muove per primo è detto leader. Il giocatore che agisce per secondo è detto follower.

Giochi sequenziali: un esempio

- A volte un gioco ha più di un equilibrio di Nash ed è difficile dire quali di questi sia l'outcome più probabile.
- Tuttavia quando il gioco è sequenziale è talvolta possibile dire che un equilibrio di Nash è più probabile di un altro.

Giochi sequenziali: un esempio

Player B

Player A		L	R
	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(U,L) e (D,R) sono entrambi equilibri di Nash quando questo gioco è simultaneo e non c'è modo di decidere quale equilibrio sia più probabilmente scelto.

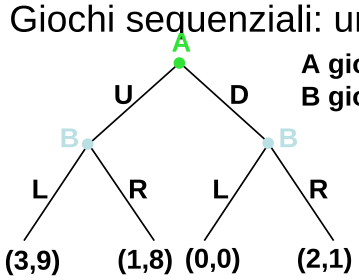
Giochi sequenziali: un esempio

Player B

Player A		L	R
	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

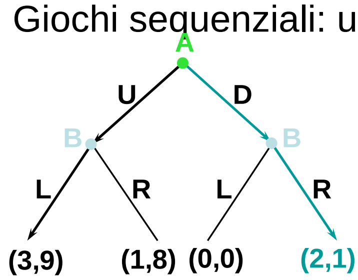
Supponiamo invece che il gioco sia sequenziale, con A leader e B follower. Possiamo riscrivere il gioco in forma estensiva.

Giochi sequenziali: un esempio



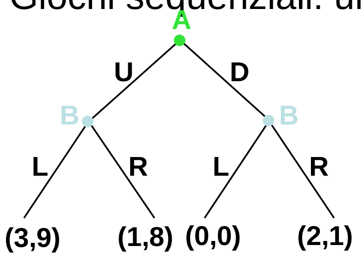
A gioca per primo
B gioca per secondo

Giochi sequenziali: un esempio



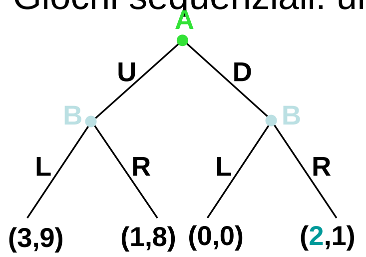
(U,L) è un equilibrio di Nash.
(D,R) è un equilibrio di Nash.
Ma quale è scelto con più probabilità?

Giochi sequenziali: un esempio



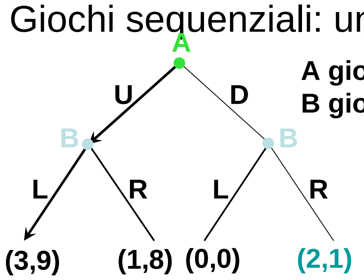
Se A gioca U → B gioca L; A prende 3.

Giochi sequenziali: un esempio



Se A gioca D → B gioca R; A prende 2.

Giochi sequenziali: un esempio



A gioca per primo
B gioca per secondo

Se A gioca U → B gioca L; A prende 3.
Se A gioca D → B gioca R; A prende 2.
Quindi (U,L) è l'eq. di Nash più probabile.

Strategia pura

Player A		Player B: L	Player B: R
	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Ancora l'esempio originale.
Supponiamo ancora che il gioco sia simult.
Abbiamo visto che ci sono due equilibri di Nash: (U,L) e (D,R).

Strategia pura

Player A		Player B: L	Player B: R
	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Abbiamo pensato al giocatore A che sceglie di giocare U o D, ma non una combinazione di entrambi: U e D sono strategie pure per il giocatore A.

Strategia pura

Player A		Player B: L	Player B: R
	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Allo stesso modo, L e R sono strategie pure der il giocatore B.

Strategia pura

		Player B L	Player B R
Player A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Conseguentemente, (U,L) e (D,R) sono equilibri di Nash di strategia pura. È forse vero che ogni gioco ha almeno un “pure strategy Nash equilibrium”?

Strategia pura

		Player B L	Player B R
Player A	U	(1,2)	(0,4)
	D	(0,5)	(3,2)

Un nuovo gioco. Ci sono equilibri di Nash di strategie pure?
NO!

Strategia pura

		Player B L	Player B R
Player A	U	(1,2)	(0,4)
	D	(0,5)	(3,2)

Il gioco non ha equilibri di Nash di strategie pure. Tuttavia, il gioco ha un equilibrio di Nash, ma in strategie miste.

Strategia mista

- Invece di giocare solo Up o Down, il Player A seleziona una distribuzione di probabilità $(\pi_U, 1-\pi_U)$, cioè con probabilità π_U il Player A giocherà Up e con probabilità $1-\pi_U$ giocherà Down.
- Il giocatore A sta mettendo in atto una strategia mista fra Up e Down.
- La distribuzione di probabilità $(\pi_U, 1-\pi_U)$ è una strategia mista per il giocatore A.

Strategia mista

- B può fare lo stesso e selezionare una distribuzione di probabilità $(\pi_L, 1-\pi_L)$, cioè con probabilità π_L il Player B giocherà Left e con probabilità $1-\pi_L$ giocherà Right.
- La distribuzione di probabilità $(\pi_L, 1-\pi_L)$ è una strategia mista per il giocatore B.

Strategia mista

		Player B L, π_L	Player B $R, 1-\pi_L$
Player A	U, π_U	(1,2)	(0,4)
	$D, 1-\pi_U$	(0,5)	(3,2)

Strategia mista

Player B

		L,π_L	$R,1-\pi_L$
Player A	U,π_U	(1,2)	(0,4)
	$D,1-\pi_U$	(0,5)	(3,2)

Se B gioca Left il payoff atteso è
$$2\pi_U + 5(1-\pi_U)$$

Strategia mista

Player B

		L,π_L	$R,1-\pi_L$
Player A	U,π_U	(1,2)	(0,4)
	$D,1-\pi_U$	(0,5)	(3,2)

Se B gioca Right il payoff atteso è
$$4\pi_U + 2(1-\pi_U).$$

Strategia mista

Player B

		L,π_L	$R,1-\pi_L$
Player A	U,π_U	(1,2)	(0,4)
	$D,1-\pi_U$	(0,5)	(3,2)

Se $2\pi_U + 5(1-\pi_U) > 4\pi_U + 2(1-\pi_U) \rightarrow$
B giocherà solo Left. Ma non ci sono eq. di Nash nei quali B gioca solo Left.

Strategia mista

Player B

		L,π_L	$R,1-\pi_L$
Player A	U,π_U	(1,2)	(0,4)
	$D,1-\pi_U$	(0,5)	(3,2)

Se $2\pi_U + 5(1-\pi_U) < 4\pi_U + 2(1-\pi_U) \rightarrow$
B giocherà solo Right. Ma non ci sono eq. di Nash nei quali B gioca solo Right.

Strategia mista

Player B

		L,π_L	$R,1-\pi_L$
Player A	U,π_U	(1,2)	(0,4)
	$D,1-\pi_U$	(0,5)	(3,2)

Quindi per l'esistenza di un eq. di Nash, B deve essere indifferente tra giocare Left o Right $\rightarrow$ $2\pi_U + 5(1-\pi_U) = 4\pi_U + 2(1-\pi_U)$

Strategia mista

Player B

		L,π_L	$R,1-\pi_L$
Player A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

$$2\pi_U + 5(1-\pi_U) = 4\pi_U + 2(1-\pi_U)$$
$$\Rightarrow \quad \pi_U = 3/5.$$

Strategia mista

Player B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
Player A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Strategia mista

Player B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
Player A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Se A gioca Up il suo payoff atteso è
$$1 \times \pi_L + 0 \times (1-\pi_L) = \pi_L.$$

Strategia mista

Player B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
Player A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Se A gioca Down il suo payoff atteso è
$$0 \times \pi_L + 3 \times (1-\pi_L) = 3(1-\pi_L).$$

Strategia mista

Player B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
Player A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Se $\pi_L > 3(1-\pi_L)$ **A giocherà solo Up.**

Ma non ci sono eq. di Nash nei quali A gioca sempre Up.

Strategia mista

Player B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
Player A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Se $\pi_L < 3(1-\pi_L)$ **A giocherebbe solo Down.**

Ma non ci sono eq. di Nash nei quali A gioca solo Down.

Strategia mista

Player B

		$L, \frac{3}{4}$	$R, \frac{1}{4}$
Player A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Quindi per l'esistenza di un eq. di Nash, A deve essere indifferente tra giocare Up o Down → $\pi_L = 3(1-\pi_L) \Rightarrow \pi_L = 3/4.$

Strategia mista

Player B

		$L, \frac{3}{4}$	$R, \frac{1}{4}$
Player A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Quindi il solo eq. di Nash è quello in cui A gioca la strategia mista (3/5, 2/5) e B gioca la strategia mista (3/4, 1/4). Ogni altra prob. avrebbe spinto un giocatore ad una scelta pura ma sappiamo che qui non c'e' un eq.

Strategia mista

Player B

		$L, \frac{3}{4}$	$R, \frac{1}{4}$
Player A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

I payoffs saranno (1,2) con probabilità

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$$

Strategia mista

Player B

		$L, \frac{3}{4}$	$R, \frac{1}{4}$
Player A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

I payoffs saranno (0,4) con probabilità

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

Strategia mista

Player B

		$L, \frac{3}{4}$	$R, \frac{1}{4}$
Player A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5) 6/20	(3,2)

I payoffs saranno (0,5) con probabilità

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

Strategia mista

Player B

		$L, \frac{3}{4}$	$R, \frac{1}{4}$
Player A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5) 6/20	(3,2) 2/20

I payoffs saranno (3,2) con probabilità

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

Strategia mista

Player B

		$L, \frac{3}{4}$	$R, \frac{1}{4}$
Player A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5) 6/20	(3,2) 2/20

Il payoff atteso dell'eq. di Nash per A è

$$1 \times \frac{9}{20} + 0 \times \frac{3}{20} + 0 \times \frac{6}{20} + 3 \times \frac{2}{20} = \frac{3}{4}.$$

Il payoff atteso dell'eq. di Nash per B è

$$2 \times \frac{9}{20} + 4 \times \frac{3}{20} + 5 \times \frac{6}{20} + 2 \times \frac{2}{20} = \frac{16}{5}.$$

Esistenza dell’equilibrio di Nash

- Si può dimostrare che un gioco con un numero finito di giocatori, ciascuno con un numero finito di strategie pure, ha almeno un eq. di Nash.
- Quindi se il gioco non ha un eq. di Nash di strategie pure deve avere almeno un eq. di Nash di strategie miste.

Giochi ripetuti

- E se il dilemma del prigioniero potesse essere giocato più volte?
- Quante volte?
- La minaccia di non cooperare può indurre i giocatori ad adottare una strategia Pareto efficiente: es. strategia del colpo su colpo.