

# **CONSIDERAÇÕES SOBRE A OBTENÇÃO DE VETORES DE PRIORIDADES NO AHP**

## **AUTORES:**

**CLEBER ALMEIDA DE OLIVEIRA**

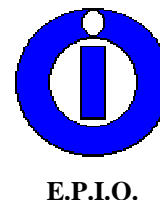
**cleber@ita.br**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA,  
Praça Marechal Eduardo Gomes - São José dos Campos - SP

**MISCHEL CARMEN N. BELDERRAIN**

**carmen@ita.br**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA,  
Praça Marechal Eduardo Gomes - São José dos Campos - SP



## RESUMO

Há alguns trabalhos na literatura em AHP que calculam o vetor de prioridades dos elementos utilizando-se da média dos valores normalizados ou da média geométrica da matriz de decisão ao invés da abordagem do autovetor direito recomendado por Thomas Saaty.

Este artigo tem como objetivo apresentar a falta de embasamento algébrico e os erros gerados ao utilizar o método da média dos valores normalizados ou o método da média geométrica para o cálculo do vetor de prioridades de uma matriz inconsistente. Como objetivo secundário, tem por finalidade revisar os fundamentos algébricos envolvidos no método AHP.

**PALAVRAS CHAVE.** Algebra, Autovetor, AHP, Apoio Multicritério à Decisão.

## ABSTRACT

In the literature, there are papers on AHP that use the mean of normalized values or the geometric mean, instead of the right eigenvector method as recommended by Thomas Saaty, to derive the priorities vector of the elements in a decision matrix.

This paper aims to present the lack of sound algebraic foundation and the errors obtained by the use of the mean of normalized values method or the geometric mean method to calculate the priorities vector of an inconsistent matrix. Secondly, it revises the algebraic fundamentals involved in the AHP.

**KEYWORDS.** Algebra, Eigenvector, AHP, MCDA

## 1. INTRODUÇÃO

O método de Análise Hierárquica, mais conhecido como método AHP (*Analytic Hierarchy Process*), é um dos métodos mais utilizados para o apoio multicritério à decisão, cujos principais aspectos são: a) visa a orientar o processo intuitivo (baseado no conhecimento e na experiência) de tomada de decisão; b) depende dos julgamentos de especialistas ou dos decisores quando não há informações quantitativas sobre o desempenho de uma variável em função de determinado critério; e c) resulta numa medida global para cada uma das ações potenciais ou alternativas, priorizando-as ou classificando-as.

No método AHP, criado por Thomas Saaty (1980), o vetor de prioridades gerado pela comparação par a par dos elementos é obtido pelo cálculo do autovetor direito associado ao autovalor máximo da matriz de decisão. Entretanto, observa-se que há alguns trabalhos na literatura que calculam o vetor de prioridades dos elementos no AHP com metodologia diferente da abordagem do autovetor direito e utilizam o resultado obtido como base para o cálculo do autovalor a fim de verificar a consistência da matriz de decisão. Golany *et al.* (1993) dividiram as metodologias para o cálculo do vetor de prioridades em dois grupos: a) abordagem do autovalor; e b) método de minimização de distância entre a matriz de decisão e a matriz consistente mais próxima. O método da média dos valores normalizados e o método da média geométrica estão inseridos no segundo grupo.

Barzilai J. (1997) e Ishizaka A. (2006) observaram que, quanto maior for a inconsistência da matriz de decisão, maior será a diferença entre os resultados obtidos pelo cálculo do vetor de prioridades utilizando-se as abordagens acima mencionadas.

Este artigo tem como objetivo apresentar a falta de embasamento algébrico e os erros gerados ao utilizar o método da média dos valores normalizados ou o método da média geométrica para o cálculo do vetor de prioridades de uma matriz inconsistente. Como objetivo secundário, tem por finalidade revisar os fundamentos algébricos envolvidos no método AHP.

Este artigo está organizado da seguinte forma: na seção 2 serão apresentados os conceitos algébricos básicos para a compreensão do AHP; na seção 3 serão abordados as etapas da metodologia AHP e os fundamentos algébricos envolvidos; na seção 4 será apresentado um estudo de caso comparativo; e finalmente, alguns aspectos conclusivos do trabalho.

## 2. CONCEITOS ALGÉBRICOS BÁSICOS

Uma matriz diz-se *quadrada* quando o número de linhas é igual ao número de colunas, possuindo a seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Os elementos  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$ ,...,  $a_{nn}$  formam a *diagonal*, também chamada de *diagonal principal*.

Uma matriz  $A$  é *positiva* se todos os seus elementos forem reais e positivos.  
Um vetor coluna não nulo  $W$  de uma matriz quadrada  $A$  é um *vetor próprio à direita* (autovetor à direita) se existir um escalar  $\lambda$  tal que:

$$AW = \lambda W \quad [1]$$

Um vetor linha não nulo  $X$  de uma matriz quadrada  $A$  é um *vetor próprio à esquerda* (autovetor à esquerda) se existir um escalar  $\lambda$  tal que:

$$XA = \lambda X$$

Portanto,  $\lambda$  é um *valor próprio* (autovalor) de  $A$ . Os valores próprios podem ser nulos. Os vetores próprios não podem ser nulos.

Da expressão [1], pode-se obter a equação característica da matriz:

$$AW = \lambda W \rightarrow AW - \lambda W = 0 \rightarrow \text{Det}(A - \lambda I)W = 0.$$

Generalizando o cálculo do determinante, obtém-se o seguinte polinômio característico, onde  $n$  é o número de ordem da matriz:

$$\text{Det} \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Det}(A - \lambda I) = b_n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda^1 + b_0 I = 0$$

Conforme o teorema de Cayley-Hamilton (Bronson R., 1989), toda matriz quadrada satisfaz a sua própria equação característica, isto é:

$$\text{Det}(A - \lambda I) = b_n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda^1 + b_0 I = 0, \text{ então } b_n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_2 A^2 + b_1 A^1 + b_0 I = 0.$$

Generalizando a equação característica de uma matriz  $A$  ( $n \times n$ ) recíproca e consistente:

$$\begin{aligned} \text{Det}(A - \lambda I) &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (\text{traço} A) \lambda^{n-1} + \dots + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda^1 + b_0 I = \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (\text{traço} A) \lambda^{n-1} \\ &= \lambda^n - (\text{traço} A) \lambda^{n-1} \\ &= \lambda^{n-1} (\lambda - (\text{traço} A)) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $\lambda$  é igual a zero com multiplicidade  $n-1$  e  $\lambda_{\max}$  é igual ao traço da matriz  $A$  com multiplicidade 1.

As principais propriedades dos valores e vetores próprios são: a) a soma dos valores próprios de uma matriz é igual ao seu *traço*, que é igual à soma dos elementos da sua diagonal principal; b) o produto dos valores próprios de uma matriz, considerando a sua multiplicidade, é igual ao determinante dessa matriz; e c) os vetores próprios correspondentes a diferentes valores próprios são linearmente independentes.

Os vetores e valores próprios poderão ser obtidos por cálculos algébricos e por métodos numéricos. A etapa 5 da metodologia AHP, explicada na seção 3 deste artigo, é dedicada para a apresentação dos referidos métodos.

Uma matriz quadrada diz-se *recíproca e positiva* quando  $a_{ij} = 1/a_{ji}$ , para todo  $a_{ij} > 0$ . Seja uma matriz B recíproca e positiva onde  $a_{21} = 1/a_{12}$ ,  $a_{31} = 1/a_{13}$ ,  $a_{32} = 1/a_{23}$  e  $a_{ii} = 1$ .

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz será *consistente* quando  $a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}$ . Seja uma matriz B consistente onde  $a_{23} = a_{21} \cdot a_{13} = a_{13}/a_{12}$ .

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{13}/a_{12} \\ 1/a_{13} & a_{12}/a_{13} & 1 \end{bmatrix}$$

Quando B for consistente, observa-se que os vetores linha da matriz B ( $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$ ) passam a ser linearmente dependentes, ou seja,  $B_1 = \alpha_1 B_2 = \alpha_2 B_3$ , onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  valem  $a_{12}$  e  $a_{13}$ , respectivamente. Nota-se que, se a matriz B for escalonada, teremos apenas a primeira linha da matriz não-nula. Pode-se dizer que a matriz possui posto 1, ou seja, só existe um autovalor diferente de zero que satisfaz a equação característica. Também, pode-se afirmar que o determinante da matriz B é nulo, conforme será demonstrado:

$$\text{Det}(B) = 1 + a_{12} \cdot a_{13} / a_{12} \cdot 1/a_{13} + 1/a_{12} \cdot a_{12} / a_{13} \cdot a_{13} - (a_{13} \cdot 1/a_{13} + a_{12} \cdot 1/a_{12} + a_{13}/a_{12} \cdot a_{12}/a_{13}) = 3 - 3 = 0.$$

A equação característica de B:

$$\text{Det}(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 1/a_{12} & 1 - \lambda & a_{13}/a_{12} \\ 1/a_{13} & a_{12}/a_{13} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Det}(B - \lambda I) = [(1 - \lambda)^3 + 1 + 1] - [(1 - \lambda) + (1 - \lambda) + (1 - \lambda)] = [1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 2] - [3 - 3\lambda] = [3\lambda^2 - \lambda^3] = 0.$$

Para uma matriz recíproca e consistente o autovetor  $\bar{w}$  pode ser obtido da seguinte forma:

a) Normalização dos elementos da coluna: quociente entre o elemento a ser normalizado e a soma dos elementos de cada coluna. Observa-se, neste caso que os elementos de cada linha serão iguais.

$$B = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^m a_{ij}} \quad j = 1, \dots, n$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{a_{12}a_{13}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} & \frac{a_{12}a_{13}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} & \frac{a_{12}a_{13}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} \\ \frac{a_{13}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} & \frac{a_{13}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} & \frac{a_{13}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} \\ \frac{a_{12}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} & \frac{a_{12}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} & \frac{a_{12}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} \end{bmatrix}$$

b) Somatório dos elementos de cada linha normalizada dividido pela ordem da matriz B (n=3).

$$\bar{w}(B_i) = \sum_{j=1}^m \bar{w}_i(B_j) / n \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\bar{w}(B) = \begin{bmatrix} \frac{a_{12}a_{13}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} \\ \frac{a_{13}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} \\ \frac{a_{12}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} \end{bmatrix}$$

c) O autovalor é obtido por meio da equação [1] obtendo-se o mesmo valor de ordem (n=3) ou o traço da matriz ( $\lambda=3$ ):

$$B * \bar{w}(B) = \lambda * \bar{w}(B) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{13}/a_{12} \\ 1/a_{13} & a_{12}/a_{13} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{a_{12}a_{13}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} \\ \frac{a_{13}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} \\ \frac{a_{12}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} \end{bmatrix} = 3 * \begin{bmatrix} \frac{a_{12}a_{13}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} \\ \frac{a_{13}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} \\ \frac{a_{12}}{a_{12}a_{13} + a_{12} + a_{13}} \end{bmatrix}$$

Posteriormente, será possível observar que este processo é utilizado no método da média dos valores normalizados para o cálculo do vetor de prioridade.

### 3. METODOLOGIA AHP – FUNDAMENTOS ALGÉBRICOS

A metodologia AHP proposta por Thomas Saaty pode ser explicada pela seguinte seqüência de etapas:

#### 3.1 - Etapa 1: Definição do Problema de Decisão

O problema de decisão é estudado em detalhes com o foco de identificar o objetivo, os critérios/sub-critérios baseados nos valores, crenças e convicções do decisor, e as alternativas para a solução do problema.

#### 3.2 - Etapa 2: Hierarquização do Problema de Decisão

O problema de decisão é dividido em níveis hierárquicos com a finalidade de facilitar a compreensão e avaliação. A figura 1 ilustra a estruturação hierárquica do problema:

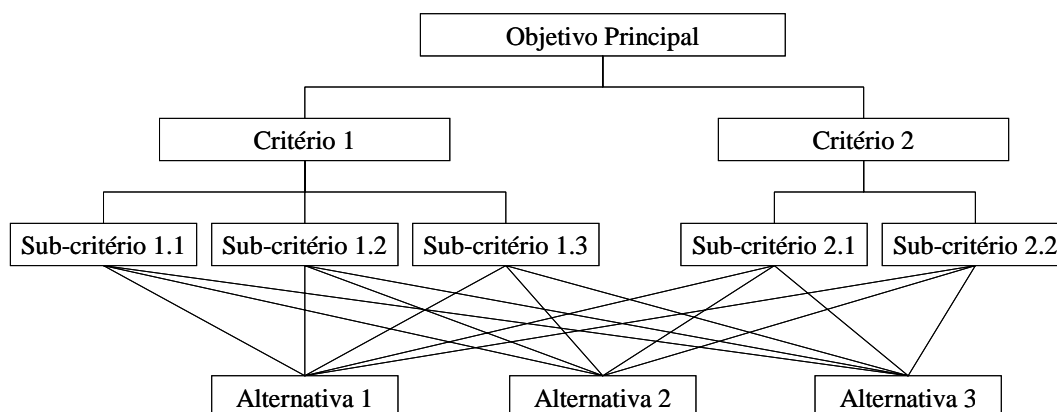


Figura 1 – Estrutura Hierárquica do AHP

#### 3.3 - Etapa 3: Coleta dos julgamentos par a par dos especialistas

Uma vez definida a estrutura hierárquica há a necessidade da coleta de dados referente aos julgamentos dos especialistas ou decisores na comparação par a par, tanto das alternativas sob o enfoque de cada sub-critério, quanto dos sub-critérios e critérios em relação ao nível imediatamente superior. Geralmente, as opções qualitativas dos especialistas, em relação a um determinado critério, são coletadas por meio de questionários, conforme exemplo apresentado na Tabela 1. Neste exemplo, o especialista compara três elementos A, B e C. Na primeira comparação, considerou que A possui uma importância pequena em relação a B, na segunda comparação considerou que A possui uma importância entre muito grande e grande em relação a C, e na terceira comparação considerou que B possui uma importância entre igual e pequena em relação a C.

**Tabela 1 - Questionário para Comparação par a par de 3 elementos**

	Absoluta	Muito grande	Grande	Pequena	Igual	Pequena	Grande	Muito grande	Absoluta	
A				X						B
A		X	X							C
B				X	X					C

Estes julgamentos, posteriormente, são convertidos em índices quantitativos utilizando uma escala própria que varia de 1 a 9, denominada **Escala Fundamental**, proposta por Saaty em 1980. A tabela 2 ilustra a escala fundamental:

**Tabela 2 - Escala Fundamental**

Intensidade	Definição	Explicação
1	Igual importância.	As duas atividades contribuem igualmente para o objetivo.
3	Importância pequena de uma sobre outra.	A experiência e o juízo favorecem uma atividade em relação à outra.
5	Importância grande ou essencial.	A experiência ou juízo favorece fortemente uma atividade em relação à outra.
7	Importância muito grande ou demonstrada.	Uma atividade é muito fortemente favorecida em relação à outra. Pode ser demonstrada na prática.
9	Importância absoluta.	A evidência favorece uma atividade em relação à outra, com o mais alto grau de segurança.
2,4,6,8	Valores Intermediários.	Quando se procura uma condição de compromisso entre duas definições.

No exemplo apresentado na Tabela 1, observam-se os índices 3, 6, e 2 convertidos pela escala fundamental nas comparações par a par.

### 3.4 - Etapa 4: **Construção das matrizes de decisão**

Cada questionário elaborado na etapa anterior deve ser organizado em uma matriz quadrada, denominada matriz de decisão, de ordem igual ao número de elementos comparados. A inserção dos elementos desta matriz segue as seguintes regras, Saaty (1980):

**Regra 1:**  $a_{ij} = 1/a_{ji}$ . Indica que, se na comparação de  $A_i$  em relação a  $A_j$  for obtido o índice 7, entra-se na matriz o valor de 7. Conseqüentemente, na comparação de  $A_j$  em relação a  $A_i$ , entra-se na matriz o valor de  $1/7$ . Logo, se  $a_{ij} = k$ , então  $a_{ji} = 1/k$  para todo  $k > 0$ ; e

**Regra 2:**  $a_{ii} = 1$  para todo  $i$ . Portanto, indica que qualquer critério comparado a ele próprio possui igual importância na escala fundamental.

Estas regras caracterizam que a matriz de decisão é sempre uma matriz quadrada, recíproca e positiva. Deve possuir a seguinte forma:



$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & 1/a_{3n} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

A matriz positiva goza de algumas propriedades, sendo que a principal para o AHP é a definida pelo Teorema de Perron: *“Uma matriz quadrada positiva tem um valor próprio (autovalor) de multiplicidade 1 igual ao seu raio espectral<sup>1</sup>, não havendo nenhum valor próprio tão grande em valor absoluto. Existe, além disso, um vetor próprio (autovetor) à direita e um vetor próprio à esquerda correspondentes ao valor espectral somente com componentes positivas.”*

Esta última frase do teorema de Perron garante que o autovetor, associado ao autovalor de maior valor absoluto, possui somente componentes positivos. Saaty [1980] demonstrou que o melhor processo para obter o vetor de prioridades dos elementos da matriz de decisão é o método do autovetor à direita. Sendo assim, quando não especificado, a expressão autovetor no AHP estará sempre associada ao autovetor à direita.

Referente ao questionário apresentado na Tabela 1 e utilizando as regras apresentadas, obtém-se a seguinte matriz de decisão M:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix} \quad [2]$$

Observa-se que esta matriz de decisão de ordem 3 é recíproca, positiva, e consistente, pois o elemento  $a_{23} = a_{21} \cdot a_{13} = 1/3 \cdot 6 = 2$ . As matrizes de decisão de ordem 1 e 2 serão sempre consistentes.

Na etapa 6 desta seção será apresentada a metodologia para verificar a razão de consistência de uma matriz de decisão. Para tanto, é necessário obter o autovalor máximo da matriz de decisão e seu autovetor associado.

<sup>1</sup> O raio espectral de uma matriz quadrada é o maior valor próprio em valor absoluto.

### 3.5 - Etapa 5: Obtenção dos autovalores e autovetores das matrizes de decisão.

#### 3.5.1 – Método Autovetor Direito:

Pode-se calcular o autovalor e o autovetor de qualquer matriz por dois métodos: algébrico e numérico. O cálculo algébrico é efetuado a partir da equação característica da matriz. A equação característica da matriz de decisão M é a seguinte:

$$\text{Det}(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 6 \\ 1/3 & 1-\lambda & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Det}(M - \lambda I) = [(1-\lambda)^3 + 1 + 1] - [(1-\lambda) + (1-\lambda) + (1-\lambda)] =$$

$$= [1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 2] - [3 - 3\lambda] =$$

$$= [3\lambda^2 - \lambda^3] = 0.$$

A equação característica desta matriz tem como solução o valor próprio  $\lambda = 3$  de multiplicidade 1,  $\lambda = 0$  de multiplicidade 2.

Observa-se que a soma dos autovalores calculados é igual ao traço da matriz original M (traço = 3).

Conforme o teorema de Perron enunciado anteriormente, é necessário obter o maior autovalor ( $\lambda_{\max}$ ) que estará associado ao autovetor principal da referida matriz positiva. Portanto, o  $\lambda_{\max}$  será 3.

Uma vez obtido o  $\lambda_{\max}$ , é necessário calcular o autovetor à direita associado, de modo que  $AW = \lambda W$ . Desta forma, deve-se construir as seguintes equações:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{vmatrix}$$

$$w_1 + 3w_2 + 6w_3 = 3w_1$$

$$1/3w_1 + 1w_2 + 2w_3 = 3w_2$$

$$1/6w_1 + 1/2w_2 + 1w_3 = 3w_3$$

$$\text{Autovetor } W = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3w_2 \\ w_2 \\ 1/2w_2 \end{vmatrix} = w_2 \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0,3333 \\ 0,1667 \end{vmatrix}$$

Como se pode observar, o processo algébrico para a determinação de valores e vetores próprios é impraticável para a maioria das matrizes de grande dimensão. Em seu lugar foram desenvolvidos métodos numéricos. Cada método inclui critérios de parada, geralmente um teste para se determinar

quando se atinge determinado grau de precisão (se os resultados forem convergentes) e um limite para o número de iterações a serem realizadas (no caso de não haver convergência). O método numérico mais simples para se obter o máximo autovalor e seu autovetor associado é o método da potência (iteração de vetores).

A idéia principal é obter iterações de modo que  $X_{k+1} = cAX_k$ , onde  $k$  é o número de iterações e  $c$  é uma constante de normalização que impede  $X_{k+1}$  de ser muito grande. Após várias iterações ( $k \rightarrow \infty$ ),  $X_{k+1}$  convergirá para o autovetor principal  $W_1$  de  $A$ , correspondente ao autovalor  $\lambda_{\max} = \lambda_1$ . Assume-se que exista um autovalor dominante  $\lambda_1$ , de tal forma que,  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \dots > \lambda_n$ .

Inicializa-se a iteração construindo-se um vetor inicial  $X_0$ . Para observar como este processo converge, decompõe-se o vetor  $X_0$  no espaço em função dos autovetores associados aos  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots, \lambda_n$ , obtendo-se:

$$X_0 = c_1 W_1 + c_2 W_2 + \dots + c_n W_n.$$

Sabe-se que para qualquer autovalor obtido vale a expressão:

$$AW = \lambda W$$

$$A^2 W = A(AW) = A\lambda W = \lambda AW = \lambda^2 W$$

$$A^3 W = A^2(AW) = A^2 \lambda W = \lambda A^2 W = \lambda^3 W$$

$$A^k W = A^{k-1}(AW) = A^{k-1} \lambda W = \lambda A^{k-1} W = \lambda^k W$$

Portanto:

$$X_k = AX_{k-1} = \dots = A^k X_0 = c_1 \lambda_1^k W_1 + c_2 \lambda_2^k W_2 + \dots + c_n \lambda_n^k W_n.$$

Dividindo-se tudo  $c_1 \lambda_1^k$ , obteremos:

$$\frac{X_k}{c_1 \lambda_1^k} = \frac{A^k X_0}{c_1 \lambda_1^k} = W_1 + \frac{c_2 \lambda_2^k W_2}{c_1 \lambda_1^k} + \dots + \frac{c_n \lambda_n^k W_n}{c_1 \lambda_1^k} =$$

$$\frac{X_k}{c_1 \lambda_1^k} = \frac{A^k X_0}{c_1 \lambda_1^k} = W_1 + \frac{c_2}{c_1} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k W_2 + \dots + \frac{c_n}{c_1} \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k W_n$$

Todos os termos  $\left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k, i \neq 1$  são menores que 1 e tendem a zero.

Portanto, a expressão tende a convergir para o autovetor principal  $W_1$ , após várias iterações ( $k \rightarrow \infty$ ).

A razão de convergência é determinada pela relação do segundo maior autovalor pelo maior autovalor. Quanto menor esta razão,  $\lambda_2/\lambda_1$ , mais rápida será a convergência.

O algoritmo usual para a utilização deste método é o seguinte:

- define-se a precisão desejada do autovalor ( $P$ ) e o número máximo de iterações;
- inicializa-se  $X_0$ , construindo-se um vetor coluna não-nulo e um contador de iterações. Sugere-se iniciar com um vetor coluna unitário;
- calcula-se o vetor  $Y_k = A \cdot X_{k-1}$ ;
- determina-se o maior valor de  $Y_k$  que será representado por  $\lambda_k = \max(Y_k)$ ;
- faz-se  $X_k = (1/\lambda_k) \cdot Y_k$ ;
- se  $|\lambda_k - \lambda_{k-1}| < P$ , pára-

se o processo. O autovalor e o autovetor associado são  $\lambda_k$  e  $X_k$ . Caso contrário, continua; e g) adiciona-se 1 a k. Se k for maior que o número máximo de iterações a serem efetuadas, pára-se o processo. Caso contrário, retorna-se para o passo c).

Exemplificando o método, utilizando-se a matriz de decisão M, escolhe-se  $X_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$ , obtendo-se as seguintes iterações:

1ª Iteração:

$$Y_1 = MX_0 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3,3333 \\ 1,6667 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 10 \quad X_1 = \frac{1}{\lambda_1} * Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,3333 & 0,1667 \end{bmatrix}^T$$

2ª Iteração:

$$Y_2 = MX_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,3333 \\ 0,1667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \quad X_2 = \frac{1}{\lambda_2} * Y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,3333 & 0,1667 \end{bmatrix}^T$$

Continua-se as iterações, gerando-se a tabela 3, onde todos os valores são arredondados a quatro casas decimais. Conforme se pode observar, o método da potência converge para o autovalor 3 associado ao autovetor  $[1 \ 0,3333 \ 0,1667]^T$ .

Tabela 3 - Iteração de vetores

Iteração	Autovetor			Autovalor
0	1	1	1	0
1	1	0,3333	0,1667	10
2	1	0,3333	0,1667	3
3	1	0,3333	0,1667	3

Outra maneira de se utilizar o método da potência é elevar a matriz de decisão a uma potência elevada e multiplicá-la por um vetor coluna unitário. Em seguida deve-se normalizar o vetor resultante pela norma da soma. Entretanto, esta metodologia converge apenas para o autovetor, devendo-se obter o autovalor a partir do autovetor convertido por meio da equação  $MW = \lambda W$ .

M			M <sup>2</sup>		
1	3	6	3	9	18
1/3	1	2	1	3	6
1/6	1/2	1	0,5	1,5	3

$M^4$				$M^8$			
	27	81	162		0,2187	0,6561	1,3122
	9	27	54	$10^4 *$	0,0729	0,2187	0,4374
	4,5	13,5	27		0,0365	0,1094	0,2187

Multiplica-se a matriz  $M^8$  por um vetor unitário de mesma ordem e normaliza-se pelo máximo valor obtendo-se o vetor prioridade:

$$M^8 * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 10^4 * \begin{bmatrix} 0,2187 & 0,6561 & 1,3122 \\ 0,0729 & 0,2187 & 0,4374 \\ 0,0365 & 0,1094 & 0,2187 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21870 \\ 7290 \\ 3645 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,3333 \\ 0,1667 \end{bmatrix}$$

### 3.5.2 – Algoritmos Aproximados para o Cálculo de Autovetor de Matrizes Consistentes

Abordaremos dois algoritmos de obtenção do vetor de prioridades descritos na literatura para matrizes recíprocas e consistentes: método da média dos valores normalizados e o método da média geométrica. Estes métodos serão exemplificados utilizando a matriz  $M$  [2]:

#### 3.5.2.1 - Método da Média dos Valores Normalizados:

A média dos valores normalizados consiste dos seguintes passos:

a) Normalização pela soma dos elementos de cada coluna.

$$W_i(M_j) = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^m a_{ij}} \quad j = 1, \dots, n \quad [3]$$

$$W_i(M_j) = \begin{bmatrix} 6/9 & 6/9 & 6/9 \\ 2/9 & 2/9 & 2/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

b) Somatório dos elementos de cada linha normalizada, dividido pela ordem da matriz.

$$W(M_i) = \sum_{j=1}^m W_i(M_j) / n \quad \forall i = 1, \dots, n \quad [4]$$

$$W(M_i) = \begin{bmatrix} 6/9 \\ 2/9 \\ 1/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,333 \\ 0,1667 \end{bmatrix}$$

c) Cálculo do autovalor associado ao vetor calculado no item anterior.

$$M * W = \lambda_{\max} * W$$

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{[AW]_i}{w_i}$$

$$M * W = \lambda_{\max} * W \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 \\ 0,3333 \\ 0,1667 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 0,5 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{[AW]_i}{w_i} = \frac{1}{3} * \left( \frac{3}{1} + \frac{1}{0,3333} + \frac{0,5}{0,1667} \right) = 3$$

### 3.5.2.2 - Método da Média Geométrica:

O método da média geométrica consiste dos seguintes passos, exemplificados pela matriz de decisão M:

a) Produto dos elementos de cada linha elevado ao inverso da ordem da matriz.

$$W(M) = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}} \quad i = 1, \dots, n \quad [5]$$

$$W(M) = \begin{vmatrix} (1 * 3 * 6)^{1/3} \\ (1/3 * 1 * 2)^{1/3} \\ (1/6 * 1/2 * 1)^{1/3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,6207 \\ 0,8736 \\ 0,4368 \end{vmatrix}$$

b) Normalização do vetor de prioridades obtido.

$$W(M) = \begin{vmatrix} 2,6207 \\ 0,8736 \\ 0,4368 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0,3333 \\ 0,1667 \end{vmatrix} \quad [6]$$

c) Cálculo do autovalor associado ao vetor calculado redundará em resultado idêntico ao subitem anterior.

$$Aw = \lambda_{\max} * w \quad \lambda_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{[Aw]_i}{w_i} \quad \lambda_{\max} = 3$$

### 3.6 - Etapa 6: Razão de Consistência da matriz de decisão.

Conforme visto na seção 2 deste artigo, uma matriz recíproca, positiva e consistente possui apenas um autovalor diferente de zero e igual ao número de ordem da matriz. Saaty (1991) demonstrou que uma matriz A recíproca e positiva possui seu autovalor máximo  $\lambda_{\max} \geq n$ . A igualdade somente é possível quando a matriz A for consistente.

O Índice de Consistência (IC) foi definido como:

$$IC = (\lambda_{\max} - n) / (n - 1)$$

onde  $\lambda_{\max}$  é o máximo autovalor da matriz de decisão associado ao autovetor direiro e n é a ordem da matriz.

Saaty (1994) propôs a tabela 4 com os Índices Aleatórios, do inglês *Random Index* (RI), para matrizes de ordem 1 a 10.

**Tabela 4 - Índice Aleatório**

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	.52	.89	1.11	1.25	1.35	1.40	1.45	1.49

O índice de consistência (IC) calculado para a matriz de decisão é comparado com o valor de RI para fornecer a Razão de Consistência (RC), de forma que  $RC = IC/RI$ . Se RC for menor que 0,1, então os julgamentos da matriz de decisão são considerados consistentes, caso contrário, existe alguma inconsistência nos julgamentos e o especialista pode ser solicitado para rever a sua opinião.

Utilizando-se os resultados obtidos na etapa anterior referente à matriz de decisão de 3ª ordem representativa dos julgamentos descritos na matriz de decisão M [2], verifica-se a sua razão de consistência. Neste caso teremos  $n = 3$ ,  $\lambda_{\max} = 3$  que proporcionam os seguintes cálculos:

$$IC = (\lambda_{\max} - n)/(n - 1) = (3 - 3)/2 = 0$$

$$RC = IC/RI = 0/0,52 = 0.$$

A matriz M foi construída recíproca e consistente, logo o RC é igual a zero. Como  $RC < 0,1$ , não será necessário solicitar que o especialista revise seus julgamentos.

### **3.7 - Etapa 7: Processo de Agregação dos Vetores de Prioridade.**

Após obter os vetores de prioridades das matrizes de decisão referente às alternativas sob cada subcritério, dos subcritérios em relação aos seus critérios superiores, e dos critérios em relação ao objetivo principal, devem ser gerados os valores finais das alternativas.

## **4. ESTUDO DE CASO COMPARATIVO**

Este estudo comparativo consiste em evidenciar os erros embutidos ao se considerar o vetor de prioridades obtido com os algoritmos aproximados apresentados na seção 3 ao invés de utilizar a abordagem do autovetor direito como base para o cálculo do autovalor de uma matriz de decisão inconsistente.

A tabela 5 ilustra uma matriz de decisão propositadamente inconsistente construída da comparação par a par de cinco alternativas segundo um determinado critério.

**Tabela 5 - Comparação das Alternativas Segundo um Critério**

Comparação das Alternativas segundo um Critério					
	A1	A2	A3	A4	A5
A1	1	2	3	5	9
A2	1/2	1	2	4	9

A3	1/3	1/2	1	2	8
A4	1/5	1/4	1/2	1	7
A5	1/9	1/9	1/8	1/7	1

Para efeito de cálculo dos algoritmos aproximados e do autovetor direito foi desenvolvido um programa na plataforma MATLAB. A referência a ser considerada para a observação do erro será o resultado do valor do autovetor direito associado ao autovalor máximo. Cabe ressaltar que foi utilizado o método numérico da potência (iteração de valores) para a obtenção do autovetor direito.

Empregando-se os passos previstos pelos algoritmos aproximados apresentados na seção 3, foram obtidos os resultados apresentados na tabela 6. O Vetor N e o Vetor G foram calculados utilizando as equações [3] [4] e [5] [6], respectivamente.

**Tabela 6 - Resultados dos Vetores de Prioridade**

	Média dos Valores Normalizados		Média Geométrica		Autovetor direito
	Cálculo	Vetor N	Cálculo	Vetor G	
A1	$(7/15+29/56+24/53+7/17+9/34)/5$	<b>0,4227</b>	$(1*2*3*5*9)^{1/5}$	<b>0,4244</b>	<b>0,4263</b>
A2	$(7/30+7/27+16/53+28/85+9/34)/5$	<b>0,2776</b>	$(1/2*1*2*4*9)^{1/5}$	<b>0,2836</b>	<b>0,2809</b>
A3	$(7/45+11/85+8/53+14/85+4/17)/5$	<b>0,1672</b>	$(1/3*1/2*1*2*8)^{1/5}$	<b>0,1685</b>	<b>0,1652</b>
A4	$(7/75+2/31+4/53+7/85+7/34)/5$	<b>0,1043</b>	$(1/5*1/4*1/2*1*7)^{1/5}$	<b>0,0977</b>	<b>0,1007</b>
A5	$(3/58+1/35+1/53+1/85+1/34)/5$	<b>0,0281</b>	$(1/9*1/9*1/8*1/7*1)^{1/5}$	<b>0,0257</b>	<b>0,0269</b>

Os resultados obtidos com os Algoritmos Aproximados somente serão iguais ao resultado do método do autovetor direito se a matriz de decisão for consistente. As diferenças dos valores evidenciados na Tabela 6 ficam ainda mais críticas quando calculamos a prioridade global dos elementos. Nesta situação, o somatório destas diferenças, associado à utilização de Algoritmos Aproximados, pode acarretar alteração do “ranking” final das alternativas, principalmente quando a maioria das matrizes possuírem número de ordem igual ou superior a 3. Ressalta-se que o vetor resultante pelo emprego de Algoritmos Aproximados não possui nenhuma relação com o autovetor da matriz de decisão inconsistente. Nesta situação, o autovalor obtido com base no resultado do Algoritmo também não possui nenhuma relação com o autovalor real.

Para o cálculo da razão de consistência da matriz de decisão, há a necessidade da obtenção do Índice de Consistência (IC). O procedimento para o cálculo de um escalar associado ao vetor obtido de uma matriz inconsistente com os algoritmos aproximados demonstrados não possui nenhum fundamento algébrico com o autovalor real daquela matriz. Portanto, gera-se mais uma fonte de erro no processo conforme pode ser observado na tabela 7.

No caso do método da média dos valores normalizados obteremos:



$$A * VetorN = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1/2 & 1 & 2 & 4 & 9 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 2 & 8 \\ 1/5 & 1/4 & 1/2 & 1 & 7 \\ 1/9 & 1/9 & 1/8 & 1/7 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 0,4227 \\ 0,2776 \\ 0,1672 \\ 0,1043 \\ 0,0281 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,2544 \\ 1,4939 \\ 0,8806 \\ 0,5388 \\ 0,1417 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{\max}^N = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{[A * VetorN]_i}{VetorN_i} = \frac{1}{5} * \left( \frac{2,2544}{0,4227} + \frac{1,4939}{0,2776} + \frac{0,8806}{0,1672} + \frac{0,5388}{0,1043} + \frac{0,1417}{0,0281} \right) = 5,2369$$

No caso do método da média geométrica obteremos:

$$A * VetorG = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1/2 & 1 & 2 & 4 & 9 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 2 & 8 \\ 1/5 & 1/4 & 1/2 & 1 & 7 \\ 1/9 & 1/9 & 1/8 & 1/7 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 0,4244 \\ 0,2836 \\ 0,1685 \\ 0,0977 \\ 0,0257 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,2169 \\ 1,4549 \\ 0,8528 \\ 0,5176 \\ 0,1394 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{\max}^G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{[A * VetorG]_i}{VetorG_i} = \frac{1}{5} * \left( \frac{2,2169}{0,4244} + \frac{1,4549}{0,2836} + \frac{0,8528}{0,1685} + \frac{0,5176}{0,0977} + \frac{0,1394}{0,0257} \right) = 5,2274$$

**Tabela 7 - Resultado Consolidado**

<b>Autovalor Real</b>	<b>Valor Associado ao Vetor Normalizado</b>	<b>Valor Associado ao Vetor Geométrico</b>
5,2297	5,2369	5,2274

## 5. CONCLUSÃO

Verificou-se que a revisão algébrica facilita a compreensão dos fundamentos do método AHP.

Observou-se que o método numérico (método das potências – iteração de valores) é o mais amigável, pois converge para a determinação do autovalor máximo associado ao autovetor da matriz de decisão.

Ressalta-se que o vetor resultante obtido pelo emprego de Algoritmos Aproximados não possui relação algébrica com o autovetor da matriz de decisão inconsistente. O autovalor aproximado obtido com base no vetor resultante do Algoritmo, também, não possui relação algébrica com o autovalor real. Os resultados obtidos com os Algoritmos Aproximados somente serão iguais ao autovetor associado ao autovalor máximo, se a matriz de decisão for consistente. Além disso, o somatório dos erros associados à utilização de Algoritmos Aproximados pode acarretar alteração do “ranking” final das alternativas.

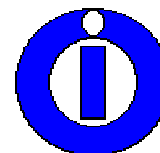


## I ERABIO – XXI ENDIO – XIX EPIO

Posadas, Misiones, Argentina

21 a 23 de Mayo de 2008

“SISTEMAS BOSCOSOS Y TECNOLOGIA”



E.P.I.O.

### REFERÊNCIAS

1. BARZILAI, J. (1997): “DERIVING WEIGHTS FROM PAIRWISE COMPARISON MATRICES”. Journal of the Operational Research Society – Vol.48 – pgs. 1226,1232.
2. BRONSON, R. (1989). MATRIZES, McGraw-Hill, New York – pgs. 302.
3. FIGUEIRA, J. ET AL.(2005). MULTIPLE CRITERIA DECISION ANALYSIS, Springer Science – pgs. 1035.
4. GOLANY B.; KRESS M. (1993): “A MULTICRITERIA EVALUATION OF THE METHODS FOR OBTAINING WEIGHTS FROM RATIO-SCALE MATRICES”. European Journal Operation Research – Vol. 69 – pgs. 210,220.
5. GOMES, L. F. A. M.; ARAYA, M. C. G.; CARIGNANO, C.(2004). TOMADA DE DECISÕES EM CENÁRIOS COMPLEXOS, Pioneira Thompson Learning, São Paulo – pgs. 168.
6. ISHIZAKA A.; LUSTI M. (2006). ”HOW TO DERIVE PRIORITIES IN AHP: A COMPARATIVE STUDY”. CEJOR – Vol 14 – pgs. 387, 400.
7. JAISWAL, N. K. (1997). MILITARY OPERATIONS RESEARCH, Kluwer Academic Publishers, Massachussets – pgs. 379.
8. SAATY, T. L. (2005). THEORY AND APPLICATIONS OF THE ANALYTIC NETWORK PROCESS: DECISION MAKING WITH BENEFITS, OPPORTUNITIES, COSTS AND RISKS, RWS Publications, Pittsburgh – pgs. 343.