第三次作业

人工智能　CS410　2021年秋季

姓名：李子龙　学号：518070910095　日期：2021 年 11 月 25 日

题目 1. 2-CNF表达式类似于3-CNF，其中每个子句(clause)里含有两个文字(literals)，例如：

$$(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee g) \wedge (\neg d \vee g)$$

(1) 运用反证法，证明上面的表达可以推导出g (the above sentence entails g)，可以参考课件的归结证明resolution部分。

(2) 对于2-CNF问题，假设现在我们有n个不同的符号。如果我们规定每个子句要求用**不同**的符号组成，那么我们可以用这n个符号组成多少种**语义不同**（**semantic distinct)**的子句（clause）？如果我们规定每个子句可以用**相同**的符号组成，那么我们可以用这n个符号组成多少种**语义不同**的子句？

解. (1) 用反证法，如果不能推导出g，则

$$(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee g) \wedge (\neg d \vee g) \wedge \neg g$$

应当是可以满足的。然而

$$\begin{aligned}
&(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee g) \wedge (\neg d \vee g) \wedge \neg g \\
=&(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee d) \wedge \neg c \wedge \neg d \\
=&(a \vee b) \wedge \neg a \wedge \neg b \\
=&
\end{aligned}$$

却是不可满足的。所以能够推导出g。

(2) 不同符号语义不同的子句个数

$$C_n^2 \times 2^2 = 2n(n-1)$$

可以相同符号语义不同的子句个数

$$C_n^2 \times 2^2 + n \times 3 = 2n^2 + n$$

□

题目 2. 我们建立了一个新的数学空间，在这个空间里有以下公理：

- 1. $0 \leq 3$
- 2. $7 \leq 9$
- 3. $\forall x \quad x \leq x$
- 4. $\forall x \quad x \leq x + 0$
- 5. $\forall x \quad x + 0 \leq x$
- 6. $\forall x, y \quad x + y \leq y + x$
- 7. $\forall w, x, y, z \quad x \leq y \wedge w \leq z \Rightarrow w + x \leq y + z$
- 8. $\forall x, y, z \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

我们希望用以上原子语句进行推理，得到$7 \le 3+9$。注意在推理的过程中，我们只能使用以上8条公理，不能使用现实数学中的各种运算。

(1) 假如我们使用反向链接算法（见课件上backward chaining部分）。我们可以得到以下推理过程，请完善推理过程。

Goal G0: $7 \le 3+9$, resolve with axiom 8 and $\{x0/7, z0/(3+9), y0/(7+0)\}$

*/*Use axiom 8, and substitute the (x, y, z) in axiom with (7, (7+0), (3+9)*/*

*/*To achieve Goal G0, we need to find a intermediate (7+0) and achieve Goal G1 and G2.*/*

Goal G1: $7 \le 7+0$, resolve with (a) $\underline{4.\ \forall x \quad x \le x+0}$. Goal G1 Succeeds.

Goal G2: 7+0 $\le$ 3+9, resolve with (b) $\underline{8.\ \forall x, y, z \quad x \le y \land y \le z \Rightarrow x \le z \text{ and } \{n/0+7\}}$.

*/*To achieve Goal G2, we need to find a intermediate and achieve Goal G3 and G4.*/*

Goal G3: $7+0 \le n$, resolve with (c) $\underline{6.\ \forall x, y \quad x+y \le y+x}$. Goal G3 Succeeds.

Goal G4: $n \le$ 3+9, resolve with (d) $\underline{7.\ \forall w, x, y, z \quad x \le y \land w \le z \Rightarrow w+x \le y+z}$.

*/*To achieve Goal G4, we need to find a intermediate and achieve Goal G5 and G6.*/*

Goal G5: $0 \le 3$, resolve with axiom 1. Goal G5 Succeeds.

Goal G6: $7 \le 9$, resolve with axiom 2. Goal G6 Succeeds.

Goal G4 succeeds.

Goal G2 succeeds.

Goal G0 succeeds.

(2) 假如我们使用前向链接算法（见课件上forward chaining部分），我们可以怎样推理得到结论？请写出推理过程。

解. 第一轮：

公理 7 得到满足，置换为 $\{w/0, x/7, y/9, z/3\}$，添加 $0+7 \le 3+9$。

公理 6 得到满足，置换为 $\{x/7, y/0\}$，添加 $7+0 \le 0+7$。

公理 4 得到满足，置换为 $\{x/7\}$，添加 $7 \le 7+0$。

第二轮：

公理 8 得到满足，置换为 $\{x/7+0, y/0+7, z/3+9\}$，添加 $7+0 \le 3+9$。

公理 8 得到满足，置换为 $\{x/7, y/7+0, z/3+9\}$，添加 $7 \le 3+9$。

□

题目 3. 给定下图1所示的贝叶斯网络。网络中有(B, A, E, J, M)五个变量。

(1) 根据给定的贝叶斯网络对联合概率$P(B, E, A, J, M)$进行因子分解。
(2) 对于变量B而言，我们给定哪一个或者两个变量的值，能够使得该变量条件独立于贝叶斯网络中的其他变量？
(3) 如果我们给定变量A的值，其他的变量(B, E, J, M)之间有哪些是条件独立的？如果我们不给定变量A的值呢？注意，贝叶斯网络间两个节点条件独立可以写为$X_i \perp X_j$。
(4) 我们希望求解贝叶斯网络中$J = j, M = m, B = b$的概率，即$P(B = b_0, J = j_0, M = m_0)$。请根据联合概率的表达式列出计算$P(B = b_0, J = j_0, M = m_0)$的表达式。除此以外，请列出使用消元法求解$P(B = b_0, J = j_0, M = m_0)$的过程。为了方便，我们要求消元的顺序是$M \to J \to A \to E \to B$。

解. (1)

$$P(B, E, A, J, M) = P(J|A)P(M|A)P(A|B, E)P(B)P(E)$$

(2) 给定其马尔科夫毯，即 A, E。
(3) 给定 A 的值，$B \perp M, B \perp J, E \perp J, E \perp M, J \perp M$；不给定 A 的值，$B \perp E$。

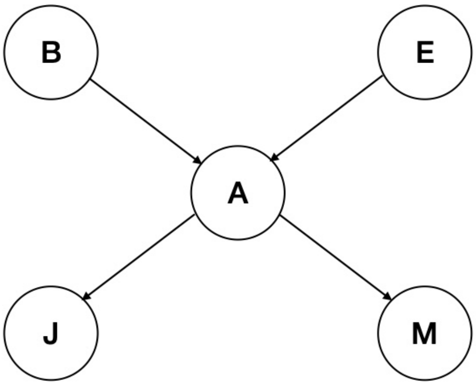


图 1: 第三题的贝叶斯网络

(4) 使用链式法则，

$$
\begin{aligned}
P(b,j,m) &= \sum_e \sum_a P(b,j,m,e,a) \\
&= \sum_e \sum_a P(j|a)P(m|a)P(a|b,e)P(b)P(e) \\
&= P(b)\sum_e P(e)\sum_a P(j|a)P(m|a)P(a|b,e)
\end{aligned}
$$

消元法求解：

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{f}_1(B) \times \sum_e \mathbf{f}_2(E) \times \sum_a \mathbf{f}_3(A|B,E) \times \mathbf{f}_4(A) \times \mathbf{f}_5(A) \\
&= \mathbf{f}_1(B) \times \sum_e \mathbf{f}_2(E) \times \mathbf{f}_6(B,E) \\
&= \mathbf{f}_1(B) \times \mathbf{f}_7(B)
\end{aligned}
$$

其中

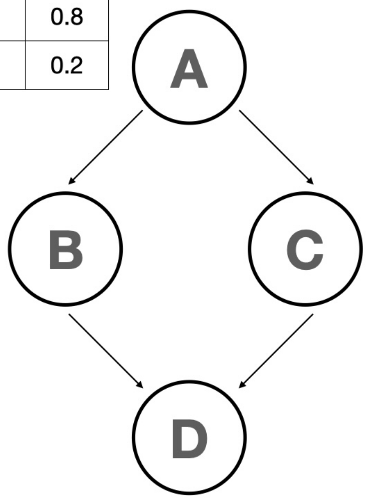
$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_1(B) &= P(b) \\
\mathbf{f}_2(E) &= \begin{pmatrix} P(e) \\ P(\neg e) \end{pmatrix} \\
\mathbf{f}_3(A|B,E) &= (P(a|b,e) \cdots P(\neg a|b,\neg e))_{2\times 1\times 2} \\
\mathbf{f}_4(A) &= \begin{pmatrix} P(j|a) \\ P(j|\neg a) \end{pmatrix} \\
\mathbf{f}_5(A) &= \begin{pmatrix} P(m|a) \\ P(m|\neg a) \end{pmatrix} \\
\mathbf{f}_6(B,E) &= \sum_a \mathbf{f}_3(A|B,E) \times \mathbf{f}_4(A) \times \mathbf{f}_5(A) = \mathbf{f}_3(a|B,E) \times \mathbf{f}_4(a) + \mathbf{f}_3(\neg a|B,E) \times \mathbf{f}_4(\neg a) \\
\mathbf{f}_7(B) &= \sum_e \mathbf{f}_2(E) \times \mathbf{f}_6(B,E) = \mathbf{f}_2(e) \times \mathbf{f}_6(B,e) + \mathbf{f}_2(\neg e) \times \mathbf{f}_6(B,\neg e)
\end{aligned}
$$

□

题目 4. 给定如下图2所示的贝叶斯网络模型。我们希望从给定的模型中通过取样的方式进行一些概率的估算，且我们规定采样时该模型各节点的拓扑顺序为$(A \to B \to C \to D)\Theta$

A	P(A)
+a	0.8
-a	0.2

A	B	P(B|A)
+a	+b	0.8
+a	-b	0.2
-a	+b	0.5
-a	-b	0.5



B	C	D	P(D|B,C)
+b	+c	+d	0.3
+b	+c	-d	0.7
+b	-c	+d	0.1
+b	-c	-d	0.9
-b	+c	+d	0.2
-b	+c	-d	0.8
-b	-c	+d	0.9
-b	-c	-d	0.1

A	C	P(C|A)
+a	+c	0.7
+a	-c	0.3
-a	+c	0.1
-a	-c	0.9

图 2: 第四题的贝叶斯网络

示例：采用先验采样（prior sample）的方法生成样本。给定采样过程中的随机数为$(0.31 \to 0.58 \to 0.04 \to 0.94 \to 0.67 \to 0.49 \to 0.37 \to 0.42)$。

- 首先我们取随机数$r = 0.31$，而$r = 0.31 < P(+a) = 0.8$，因此对于节点A我们取$+a$
- 接着随机数$r = 0.58 < P(+b|+a) = 0.8$，因此对于节点$B$我们取$+b$
- 随机数$r = 0.04 < P(+c|+a) = 0.7$，因此对于节点$B$我们取$+c$
- 随机数$r = 0.94 > P(+d|+b,+c) = 0.3$，因此对于节点$D$我们取$-d$。这样我们通过一次采样得到了一个样本$(+a,+b,+c,-d)$
- 随机数$r = 0.67 < P(+a) = 0.8$，因此对于节点A我们取$+a$
- 随机数$r = 0.49 < P(+b|+a) = 0.8$，因此对于节点$B$我们取$+b$
- 随机数$r = 0.37 < P(+c|+a) = 0.7$，因此对于节点$C$我们取$+c$
- 随机数$r = 0.42 > P(+d|+b,+c) = 0.3$，因此对于节点$D$我们取$-d$。这样我们通过一次取样获得了一个新的样本$(+a,+b,+c,-d)$
- 采用了八个随机数，进行了两次采样，得到了两个样本，均为$(+a,+b,+c,-d)$

(1) 采用拒绝采样的方法（rejection sampling）计算$P(-d|-b)$，请参照模型上方的示例写出采样过程（包括最后进行了几次采样，得到了怎样的样本）。采样时的随机数为$(0.31 \to 0.58 \to 0.04 \to 0.94 \to 0.67 \to 0.49 \to 0.37 \to 0.42)$，且规定当随机数$r < P(+a)$时采样$+a$,当$r \geq P(+a)$时采样$-a$，随机数用完以后即废弃、当所有随机数用完整个算法停止。

解.
- 随机数取$r = 0.31 < 0.8$，因此对于节点A我们取$+a$。
- 随机数取$r = 0.58 < P(+b|+a) = 0.8$，因此对于节点$B$我们取$+b$。
- 随机数取$r = 0.04 < P(+c|+a) = 0.7$，因此对于节点$C$我们取$+c$。

- 随机数取$r = 0.94 > P(+d|+b,+c) = 0.3$，因此对于节点$D$我们取$-d$。
  本次采样的结果被丢弃，因为与证据$-b$不符合。
- 随机数$r = 0.67 < P(+a) = 0.8$，因此对于节点A我们取$+a$。
- 随机数$r = 0.49 < P(+b|+a) = 0.8$，因此对于节点$B$我们取$+b$。
- 随机数$r = 0.37 < P(+c|+a) = 0.7$，因此对于节点$C$我们取$+c$。
- 随机数$r = 0.42 > P(+d|+b,+c) = 0.3$，因此对于节点$D$我们取$-d$。
  本次采样的结果被丢弃，因为与证据$-b$不符合。
- 采用了八个随机数，进行了两次采样，得到0个样本。

□

(2) 采用似然采样的方法（likelihood weighting sampling）计算$P(-d|-b)$，请参照模型上方的示例写出采样过程（包括最后进行了几次采样，得到了怎样的样本）。采样时的随机数为$(0.31 \to 0.58 \to 0.04 \to 0.94 \to 0.67 \to 0.49)$，且规定当随机数$r < P(+a)$时采样$+a$,当$r \geq P(+a)$时采样$-a$，随机数用完以后即废弃、当所有随机数用完整个算法停止。

解.
- 权值w为1.0。A不是一个证据变量，随机数取$r = 0.31 < 0.8$，因此对于节点A我们取$+a$。
- B是一个证据变量，其值为 false，因此我们设置

$$w \leftarrow w \times P(-b|+a) = 0.2$$

- C不是一个证据变量，随机数取$r = 0.58 < 0.7 = P(+c|+a)$，因此对于节点$C$我们取$+c$。
- D不是一个证据变量，随机数取$r = 0.04 < 0.2 = P(+d|-b,+c)$，因此对于节点$D$我们取$+d$。
  事件[true, false, true, true]以权值0.2被记录到$D = -d$中去。
- 权值w为1.0。A不是一个证据变量，随机数取$r = 0.94 > 0.8$，因此对于节点A我们取$-a$。
- B是一个证据变量，其值为 false，因此我们设置

$$w \leftarrow w \times P(-b|-a) = 0.5$$

- C不是一个证据变量，随机数取$r = 0.67 > 0.1 = P(+c|-a)$，因此对于节点$C$我们取$-c$。
- D不是一个证据变量，随机数取$r = 0.49 < 0.9 = P(+d|-b,-c)$，因此对于节点$D$我们取$+d$。
  事件[false, false, false, true]以权值0.5被记录到$D = +d$中去。
- 采用了六个随机数，进行了两次采样，得到了2个样本（一个正样本、一个负样本），$P(-d|-b) = \alpha\langle 0.2, 0.5\rangle = \langle 0.286, 0.714\rangle$。

□

(3) 采用吉布斯采样的方法（Gibbs sampling）计算$P(-d|-b)$，请参照模型上方的示例写出采样过程（包括最后进行了几次采样，得到了怎样的样本）。采样时的随机数为$(0.31 \to 0.58 \to 0.04 \to 0.94 \to 0.67 \to 0.49)$，采样初时刻的节点取值初始化为$(+a,-b,+c,+d)$，且规定当随机数$r < P(+a)$时采样$+a$,当$r \geq P(+a)$时采样$-a$，随机数用完以后即废弃、当所有随机数用完整个算法停止。

解. 固定$B = -b$，其余变量已经被初始化为$(+a,-b,+c,+d)$。

对A采样，$P(A|-b,+c) = \alpha P(A)P(-b|A)P(+c|A) = \alpha\langle 0.8 \times 0.2 \times 0.7, 0.2 \times 0.5 \times 0.1\rangle = \alpha\langle 0.112, 0.01\rangle = \langle 0.918, 0.082\rangle$，随机数$r = 0.31 < 0.918 = P(+a|-b,+c)$，所以$A$取$+a$。

- 对C采样，$P(C|+a,-b,+d)=\alpha P(C|+a)P(+d|-b,C)=\alpha\langle 0.7\times 0.2, 0.3\times 0.9\rangle = \alpha\langle 0.14, 0.27\rangle = \langle 0.58, 0.42\rangle$，随机数$r=0.58>0.341$，所以$C$取$-c$。
- 对D采样，$P(D|-b,-c)=\alpha P(D|-b,-c)=\langle 0.9, 0.1\rangle$，随机数 $r=0.04<0.9=P(+d|-b,-c)$，所以D取$+d$。
- 本次采样的结果为 $(+a,-b,-c,+d)$。
- 对A采样，随机数$r=0.94>0.918=P(+a|-b,+c)$，所以A取$-a$。
- 对C采样，$P(C|-a,-b,+d)=\alpha P(C|-a)P(+d|-b,C)=\langle 0.1\times 0.2, 0.9\times 0.9\rangle = \langle 0.02, 0.81\rangle$，随机数$r=0.67>P(+c|-a,-b,+d)=0.024$，所以$C$取$-c$。
- 对D采样，随机数$r=0.49<0.9=P(D|-b,-c)$，所以D取$+d$。
- 本次采样结果为 $(-a,-b,-c,+d)$。
- 采用六个随机数，进行了两次采样，得到了2个样本：$(+a,-b,-c,+d),(-a,-b,-c,+d)$ 皆为负样本。

□

题目 5. 给定一个隐马尔可夫模型（HMM）。

(1) 运用HMM的建模方式，用条件概率的计算方式推导并化简$P(x_1,...,x_t,y_{t-1}=s_v,y_t=s_j)$。

提示：一般来说，我们会对HMM模型有以下的建模方式（与课件上一致)——x_t表示t时刻的观察状态，y_t表示t时刻的隐藏状态,隐藏状态可能取值为$\{1,2,3,\cdots,M\}$。初始状态的概率（start probabilities）表示为$\{\pi_1,\cdots,\pi_M\}$，隐藏状态之间从状态i转化为状态j的转移概率（transition probabilities）为$a_{i,j}$，隐藏状态$y_i=s_j$与观察状态x_i之间的发散概率（emission probabilities）为$b_j(x_i)$。在使用前向算法推导序列概率的时候，设定的前向因子$\alpha_t^i=P(x_1,...,x_t,y_t=s_i)$。

解.

$$
\begin{aligned}
&P(x_1,...,x_t,y_{t-1}=s_v,y_t=s_j)\\
=&\sum_{y_1}\sum_{y_2}\cdots\sum_{y_{t-2}}\pi_{y_1}\times\prod_{\tau=2}^{t-2}a_{y_\tau,y_{\tau+1}}\times\prod_{\tau=1}^{t-2}P(x_\tau|y_\tau)\times a_{t-1,t}P(x_{t-1}|y_{t-1}=s_v)P(x_t|y_t=s_j)\\
=&a_{y_{t-1}=s_v,y_t=s_j}P(x_{t-1}|y_{t-1}=s_v)P(x_t|y_t=s_j)\sum_{i=1}^{M}\alpha_{t-2}^i\\
=&a_{y_{t-1}=s_v,y_t=s_j}b_v(x_{t-1})b_j(x_t)\sum_{i=1}^{M}\alpha_{t-2}^i
\end{aligned}
$$

其中

$$\alpha_\tau^i=b_i(x_\tau)\sum_{k=1}^{M}\alpha_{\tau-1}^k a_{k,i}$$

□

(2) 我们给定的HMM模型如下图3所示。假定图中的圆圈表示A,B,C三种可能的隐藏状态，而圆圈中的数字表示特定隐藏状态下的观察状态以及其发射概率（emission probabilities）。圆圈之间的箭头表示隐藏状态的转移以及相应的转移概率（transition probabilities）。我们用$p_{y=A}^t$表示在t时刻，隐状态为A的概率，用$p_{x=1}^t$表示在t时刻，观察状态为1的概率。为了简便，我们规定初始的隐状态为A，即$p_A^1=1$。在每个时刻，隐状态会通过转移概率确定下个时刻的状态。

(a)请用图中给定的数值与符号计算$p_{y=C}^3$。

(b)假设在t时刻，$(p_{y=B}^t,p_{y=C}^t)$分别为(b_0,c_0),请用图中给定的数值与符号计算$p_{x=2}^t$。

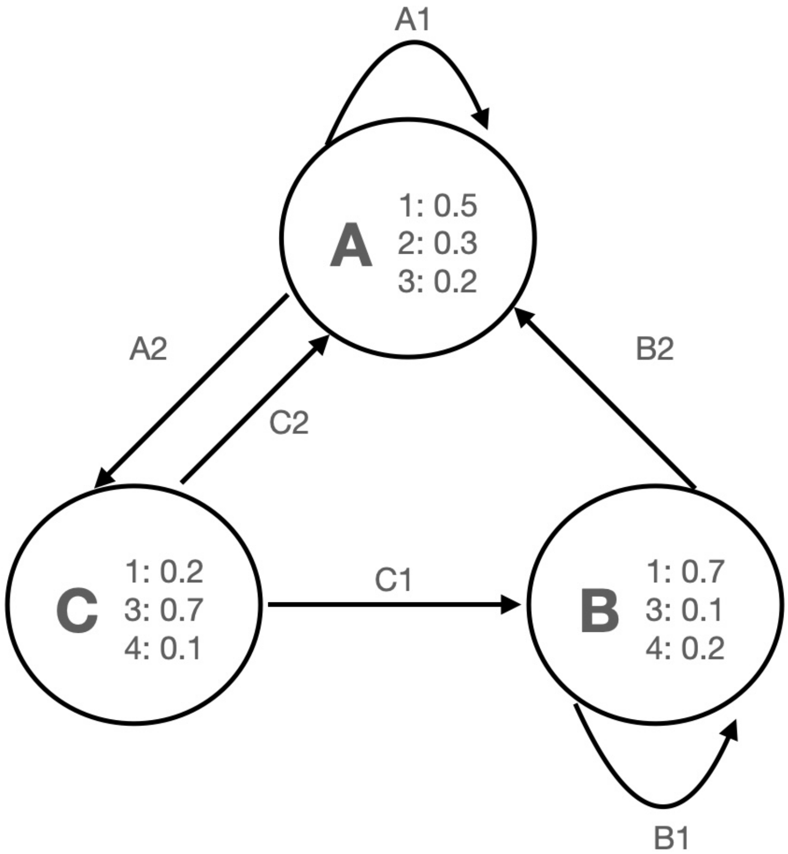


图 3: 第四题第二小问的HMM模型

解. (a) 由于没有给定观察状态，所以

$$
\begin{aligned}
p^3_{y=C} =& \sum_{y_1}\sum_{y_2} P(y_1)P(y_2|y_1)P(y_3=C|y_2) \\
=& \sum_{y=2} P(y_2|y_1=A)P(y_3=C|y_2) \\
=& P(y_2=A|y_1=A)P(y_3=C|y_2=A) + P(y_2=C|y_1=A)P(y_3=C|y_2=C) \\
=& A_1A_2 + A_2 \times 0 \\
=& A_1A_2
\end{aligned}
$$

(b) 使用后向算法推算，其中$p^t_{y=A} = 1 - b_0 - c_0$：

$$
\begin{aligned}
p^t_{x=2} =& \sum_{y=t} P(x_t=2, y_t) \\
=& \sum_{y=t} P(y_t)P(x_t=2|y_t) \\
=& P(y_t=A)P(x_t=2, y_t=A) + P(y_t=B)P(x_t=2, y_t=B) \\
& + P(y_t=C)P(x_t=2, y_t=C) \\
=& 0.3(1 - b_0 - c_0)
\end{aligned}
$$

□