

## 第三次作业

人工智能 CS410 2021年秋季

姓名：李子龙 学号：518070910095 日期：2021 年 12 月 5 日

题目 1. 2-CNF表达式类似于3-CNF，其中每个子句(clause)里含有两个文字(literals)，例如：

$$(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee g) \wedge (\neg d \vee g)$$

- (1) 运用反证法，证明上面的表达可以推导出g (the above sentence entails g)，可以参考课件的归结证明resolution部分。
- (2) 对于2-CNF问题，假设现在我们有 $n$ 个不同的符号。如果我们规定每个子句要求用不同的符号组成，那么我们可以用这 $n$ 个符号组成多少种语义不同 (semantic distinct)的子句 (clause)? 如果我们规定每个子句可以用相同的符号组成，那么我们可以用这 $n$ 个符号组成多少种语义不同的子句?

解. (1) 用反证法，如果不能推导出g，则

$$(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee g) \wedge (\neg d \vee g) \wedge \neg g$$

应当是可以满足的。然而

$$\begin{aligned} & (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee g) \wedge (\neg d \vee g) \wedge \neg g \\ &= (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee d) \wedge \neg c \wedge \neg d \\ &= (a \vee b) \wedge \neg a \wedge \neg b \\ &= \end{aligned}$$

却是不可满足的。所以能够推导出g。

(2) 不同符号语义不同的子句个数

$$C_n^2 \times 2^2 = 2n(n-1)$$

可以相同符号语义不同的子句个数

$$C_n^2 \times 2^2 + n \times 3 = 2n^2 + n$$

□

题目 2. 我们建立了一个新的数学空间，在这个空间里有以下公理：

- 1.  $0 \leq 3$
- 2.  $7 \leq 9$
- 3.  $\forall x \quad x \leq x$
- 4.  $\forall x \quad x \leq x + 0$
- 5.  $\forall x \quad x + 0 \leq x$
- 6.  $\forall x, y \quad x + y \leq y + x$
- 7.  $\forall w, x, y, z \quad x \leq y \wedge w \leq z \Rightarrow w + x \leq y + z$
- 8.  $\forall x, y, z \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

我们希望用以上原子语句进行推理，得到 $7 \leq 3 + 9$ 。注意在推理的过程中，我们只能使用以上8条公理，不能使用现实数学中的各种运算。

(1) 假如我们使用反向链接算法（见课件上backward chaining部分）。我们可以得到以下推理过程，请完善推理过程。

Goal G0:  $7 \leq 3 + 9$ , resolve with axiom 8 and  $\{x0/7, z0/(3 + 9), y0/(7 + 0)\}$   
 /\*Use axiom 8, and substitute the  $(x, y, z)$  in axiom with  $(7, (7+0), (3+9))$ \*/  
 /\*To achieve Goal G0, we need to find a intermediate  $(7+0)$  and achieve Goal G1 and G2.\*/  
 Goal G1:  $7 \leq 7 + 0$ , resolve with (a) 4.  $\forall x \quad x \leq x + 0$ . Goal G1 Succeeds.  
 Goal G2:  $7+0 \leq 3+9$ , resolve with (b) 8.  $\forall x, y, z \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$  and  $\{n/0 + 7\}$ .  
 /\*To achieve Goal G2, we need to find a intermediate and achieve Goal G3 and G4.\*/  
 Goal G3:  $7 + 0 \leq n$ , resolve with (c) 6.  $\forall x, y \quad x + y \leq y + x$ . Goal G3 Succeeds.  
 Goal G4:  $n \leq 3+9$ , resolve with (d) 7.  $\forall w, x, y, z \quad x \leq y \wedge w \leq z \Rightarrow w + x \leq y + z$ .  
 /\*To achieve Goal G4, we need to find a intermediate and achieve Goal G5 and G6.\*/  
 Goal G5:  $0 \leq 3$ , resolve with axiom 1. Goal G5 Succeeds.  
 Goal G6:  $7 \leq 9$ , resolve with axiom 2. Goal G6 Succeeds.  
 Goal G4 succeeds.  
 Goal G2 succeeds.  
 Goal G0 succeeds.

(2) 假如我们使用前向链接算法（见课件上forward chaining部分），我们可以怎样推理得到结论？请写出推理过程。

解. 第一轮：

公理 7 得到满足，置换为  $\{w/0, x/7, y/9, z/3\}$ ，添加  $0 + 7 \leq 3 + 9$ 。

公理 6 得到满足，置换为  $\{x/7, y/0\}$ ，添加  $7 + 0 \leq 0 + 7$ 。

公理 4 得到满足，置换为  $\{x/7\}$ ，添加  $7 \leq 7 + 0$ 。

第二轮：

公理 8 得到满足，置换为  $\{x/7 + 0, y/0 + 7, z/3 + 9\}$ ，添加  $7 + 0 \leq 3 + 9$ 。

公理 8 得到满足，置换为  $\{x/7, y/7 + 0, z/3 + 9\}$ ，添加  $7 \leq 3 + 9$ 。

□

题目 3. 给定下图1所示的贝叶斯网络。网络中有 $(B, A, E, J, M)$ 五个变量。

- (1) 根据给定的贝叶斯网络对联合概率 $P(B, E, A, J, M)$ 进行因子分解。
- (2) 对于变量 $B$ 而言，我们给定哪一个或者两个变量的值，能够使得该变量条件独立于贝叶斯网络中的其他变量？
- (3) 如果我们给定变量 $A$ 的值，其他的变量 $(B, E, J, M)$ 之间有哪些是条件独立的？如果我们不给定变量 $A$ 的值呢？注意，贝叶斯网络间两个节点条件独立可以写为 $X_i \perp X_j$ 。
- (4) 我们希望求解贝叶斯网络中 $J = j, M = m, B = b$ 的概率，即 $P(B = b_0, J = j_0, M = m_0)$ 。请根据联合概率的表达式列出计算 $P(B = b_0, J = j_0, M = m_0)$ 的表达式。除此以外，请列出使用消元法求解 $P(B = b_0, J = j_0, M = m_0)$ 的过程。为了方便，我们要求消元的顺序是 $M \rightarrow J \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B$ 。

解. (1)

$$P(B, E, A, J, M) = P(J|A)P(M|A)P(A|B, E)P(B)P(E)$$

(2) 给定其马尔科夫毯，即  $A, E$ 。

(3) 给定  $A$  的值， $B \perp M, B \perp J, E \perp J, E \perp M, J \perp M$ ；不给定  $A$  的值， $B \perp E$ 。

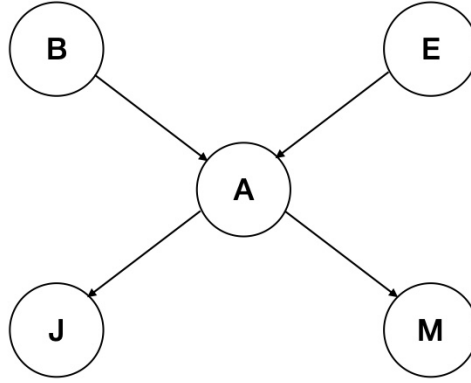


图 1: 第三题的贝叶斯网络

(4) 使用链式法则,

$$\begin{aligned}
 P(b, j, m) &= \sum_e \sum_a P(b, j, m, e, a) \\
 &= \sum_e \sum_a P(j|a)P(m|a)P(a|b, e)P(b)P(e) \\
 &= P(b) \sum_e P(e) \sum_a P(j|a)P(m|a)P(a|b, e)
 \end{aligned}$$

消元法求解:

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{f}_1(B) \times \sum_e \mathbf{f}_2(E) \times \sum_a \mathbf{f}_3(A|B, E) \times \mathbf{f}_4(A) \times \mathbf{f}_5(A) \\
 &= \mathbf{f}_1(B) \times \sum_e \mathbf{f}_2(E) \times \mathbf{f}_6(B, E) \\
 &= \mathbf{f}_1(B) \times \mathbf{f}_7(B)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_1(B) &= P(b) \\
 \mathbf{f}_2(E) &= \begin{pmatrix} P(e) \\ P(\neg e) \end{pmatrix} \\
 \mathbf{f}_3(A|B, E) &= (P(a|b, e) \cdots P(\neg a|b, \neg e))_{2 \times 1 \times 2} \\
 \mathbf{f}_4(A) &= \begin{pmatrix} P(j|a) \\ P(j|\neg a) \end{pmatrix} \\
 \mathbf{f}_5(A) &= \begin{pmatrix} P(m|a) \\ P(m|\neg a) \end{pmatrix} \\
 \mathbf{f}_6(B, E) &= \sum_a \mathbf{f}_3(A|B, E) \times \mathbf{f}_4(A) \times \mathbf{f}_5(A) = \mathbf{f}_3(a|B, E) \times \mathbf{f}_4(a) + \mathbf{f}_3(\neg a|B, E) \times \mathbf{f}_4(\neg a) \\
 \mathbf{f}_7(B) &= \sum_e \mathbf{f}_2(E) \times \mathbf{f}_6(B, E) = \mathbf{f}_2(e) \times \mathbf{f}_6(B, e) + \mathbf{f}_2(\neg e) \times \mathbf{f}_6(B, \neg e)
 \end{aligned}$$

□

题目 4. 给定如下图2所示的贝叶斯网络模型。我们希望从给定的模型中通过取样的方式进行一些概率的估算，且我们规定采样时该模型各节点的拓扑顺序为 $(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D) \Theta$

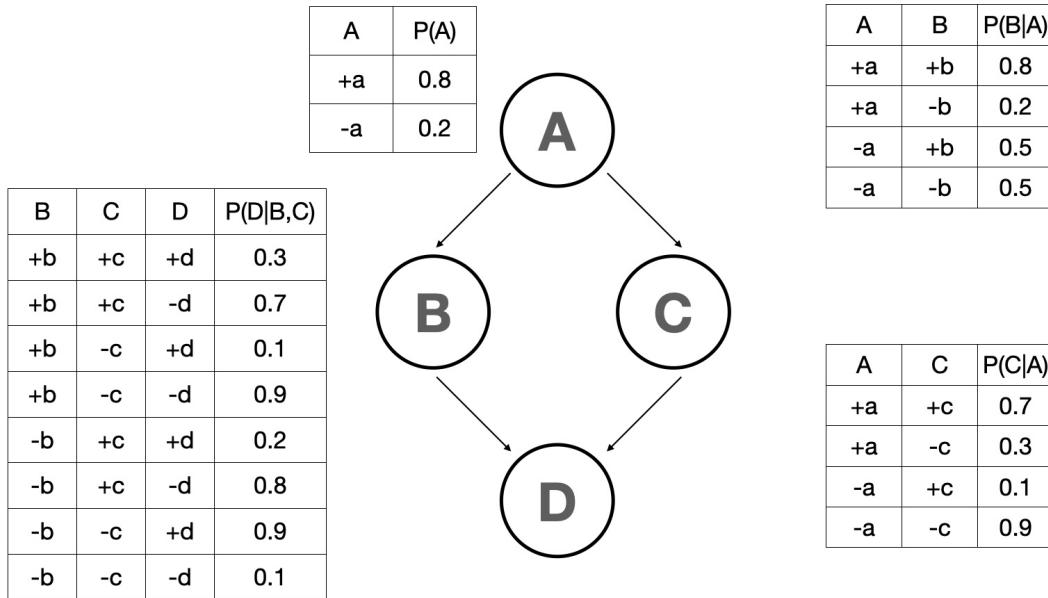


图 2: 第四题的贝叶斯网络

示例：采用先验采样（prior sample）的方法生成样本。给定采样过程中的随机数为 $(0.31 \rightarrow 0.58 \rightarrow 0.04 \rightarrow 0.94 \rightarrow 0.67 \rightarrow 0.49 \rightarrow 0.37 \rightarrow 0.42)$ 。

- 首先我们取随机数 $r = 0.31$ ，而 $r = 0.31 < P(+a) = 0.8$ ，因此对于节点A我们取 $+a$
- 接着随机数 $r = 0.58 < P(+b|+a) = 0.8$ ，因此对于节点B我们取 $+b$
- 随机数 $r = 0.04 < P(+c|+a) = 0.7$ ，因此对于节点C我们取 $+c$
- 随机数 $r = 0.94 > P(+d|+b, +c) = 0.3$ ，因此对于节点D我们取 $-d$ 。这样我们通过一次采样得到了一个样本 $(+a, +b, +c, -d)$
- 随机数 $r = 0.67 < P(+a) = 0.8$ ，因此对于节点A我们取 $+a$
- 随机数 $r = 0.49 < P(+b|+a) = 0.8$ ，因此对于节点B我们取 $+b$
- 随机数 $r = 0.37 < P(+c|+a) = 0.7$ ，因此对于节点C我们取 $+c$
- 随机数 $r = 0.42 > P(+d|+b, +c) = 0.3$ ，因此对于节点D我们取 $-d$ 。这样我们通过一次采样获得了一个新的样本 $(+a, +b, +c, -d)$
- 采用了八个随机数，进行了两次采样，得到了两个样本，均为 $(+a, +b, +c, -d)$

- (1) 采用拒绝采样的方法（rejection sampling）计算 $P(-d|-b)$ ，请参照模型上方的示例写出采样过程（包括最后进行了几次采样，得到了怎样的样本）。采样时的随机数为 $(0.31 \rightarrow 0.58 \rightarrow 0.04 \rightarrow 0.94 \rightarrow 0.67 \rightarrow 0.49 \rightarrow 0.37 \rightarrow 0.42)$ ，且规定当随机数 $r < P(+a)$ 时采样 $+a$ ，当 $r \geq P(+a)$ 时采样 $-a$ ，随机数用完以后即废弃、当所有随机数用完整个算法停止。

解. 这里采用书上的拒绝采样算法，完成一次先验采样后，进行证据检测，与课件上有所不同。

```

function REJECTION-SAMPLING( $X, \mathbf{e}, bn, N$ ) returns an estimate of  $P(X|\mathbf{e})$ 
  inputs:  $X$ , the query variable
            $\mathbf{e}$ , observed values for variables  $\mathbf{E}$ 
            $bn$ , a Bayesian network
            $N$ , the total number of samples to be generated
  local variables:  $\mathbf{N}$ , a vector of counts for each value of  $X$ , initially zero

  for  $j = 1$  to  $N$  do
     $\mathbf{x} \leftarrow \text{PRIOR-SAMPLE}(bn)$ 
    if  $\mathbf{x}$  is consistent with  $\mathbf{e}$  then
       $\mathbf{N}[x] \leftarrow \mathbf{N}[x] + 1$  where  $x$  is the value of  $X$  in  $\mathbf{x}$ 
  return NORMALIZE( $\mathbf{N}$ )

```

**Figure 14.14** The rejection-sampling algorithm for answering queries given evidence in a Bayesian network.

图 3: 书上拒绝采样算法

- 随机数取  $r = 0.31 < 0.8$ , 因此对于节点  $A$  我们取  $+a$ 。
- 随机数取  $r = 0.58 < P(+b|+a) = 0.8$ , 因此对于节点  $B$  我们取  $+b$ 。
- 随机数取  $r = 0.04 < P(+c|+a) = 0.7$ , 因此对于节点  $C$  我们取  $+c$ 。
- 随机数取  $r = 0.94 > P(+d|+b, +c) = 0.3$ , 因此对于节点  $D$  我们取  $-d$ 。  
本次采样的结果被丢弃, 因为与证据  $-b$  不符合。
- 随机数  $r = 0.67 < P(+a) = 0.8$ , 因此对于节点  $A$  我们取  $+a$ 。
- 随机数  $r = 0.49 < P(+b|+a) = 0.8$ , 因此对于节点  $B$  我们取  $+b$ 。
- 随机数  $r = 0.37 < P(+c|+a) = 0.7$ , 因此对于节点  $C$  我们取  $+c$ 。
- 随机数  $r = 0.42 > P(+d|+b, +c) = 0.3$ , 因此对于节点  $D$  我们取  $-d$ 。  
本次采样的结果被丢弃, 因为与证据  $-b$  不符合。
- 采用了八个随机数, 进行了两次采样, 得到 0 个样本。

□

- (2) 采用似然采样的方法 (likelihood weighting sampling) 计算  $P(-d|-b)$ , 请参照模型上方的示例写出采样过程 (包括最后进行了几次采样, 得到了怎样的样本)。采样时的随机数为  $(0.31 \rightarrow 0.58 \rightarrow 0.04 \rightarrow 0.94 \rightarrow 0.67 \rightarrow 0.49)$ , 且规定当随机数  $r < P(+a)$  时采样  $+a$ , 当  $r \geq P(+a)$  时采样  $-a$ , 随机数用完以后即废弃、当所有随机数用完整个算法停止。

**解.** • 权值  $w$  为 1.0。  $A$  不是一个证据变量, 随机数取  $r = 0.31 < 0.8$ , 因此对于节点  $A$  我们取  $+a$ 。

- $B$  是一个证据变量, 其值为 false, 因此我们设置

$$w \leftarrow w \times P(-b|+a) = 0.2$$

- $C$  不是一个证据变量, 随机数取  $r = 0.58 < 0.7 = P(+c|+a)$ , 因此对于节点  $C$  我们取  $+c$ 。
- $D$  不是一个证据变量, 随机数取  $r = 0.04 < 0.2 = P(+d|-b, +c)$ , 因此对于节点  $D$  我们取  $+d$ 。  
事件  $[\text{true}, \text{false}, \text{true}, \text{true}]$  以权值 0.2 被记录到  $D = -d$  中去。

- 权值 $w$ 为1.0。 $A$ 不是一个证据变量，随机数取 $r = 0.94 > 0.8$ ，因此对于节点 $A$ 我们取 $-a$ 。
- $B$ 是一个证据变量，其值为 false，因此我们设置

$$w \leftarrow w \times P(-b| -a) = 0.5$$

- $C$ 不是一个证据变量，随机数取 $r = 0.67 > 0.1 = P(+c| -a)$ ，因此对于节点 $C$ 我们取 $-c$ 。
- $D$ 不是一个证据变量，随机数取 $r = 0.49 < 0.9 = P(+d| -b, -c)$ ，因此对于节点 $D$ 我们取 $+d$ 。  
事件[false, false, false, true]以权值0.5被记录到 $D = +d$ 中去。
- 采用了六个随机数，进行了两次采样，得到了2个样本（一个正样本、一个负样本）， $P(-d| -b) = \alpha\langle 0.2, 0.5 \rangle = \langle 0.286, 0.714 \rangle$ 。

□

- (3) 采用吉布斯采样的方法（Gibbs sampling）计算 $P(-d| -b)$ ，请参照模型上方的示例写出采样过程（包括最后进行了几次采样，得到了怎样的样本）。采样时的随机数为 $(0.31 \rightarrow 0.58 \rightarrow 0.04 \rightarrow 0.94 \rightarrow 0.67 \rightarrow 0.49)$ ，采样初时刻的节点取值初始化为 $(+a, -b, +c, +d)$ ，且规定当随机数 $r < P(+a)$ 时采样 $+a$ ，当 $r \geq P(+a)$ 时采样 $-a$ ，随机数用完以后即废弃、当所有随机数用完整个算法停止。

**解.** 固定 $B = -b$ ，其余变量已经被初始化为 $(+a, -b, +c, +d)$ 。

对 $A$ 采样， $P(A| -b, +c) = \alpha P(A)P(-b|A)P(+c|A) = \alpha\langle 0.8 \times 0.2 \times 0.7, 0.2 \times 0.5 \times 0.1 \rangle = \alpha\langle 0.112, 0.01 \rangle = \langle 0.918, 0.082 \rangle$ ，随机数 $r = 0.31 < 0.918 = P(+a| -b, +c)$ ，所以 $A$ 取 $+a$ 。

- 对 $C$ 采样， $P(C| +a, -b, +d) = \alpha P(C| +a)P(+d| -b, C) = \alpha\langle 0.7 \times 0.2, 0.3 \times 0.9 \rangle = \alpha\langle 0.14, 0.27 \rangle = \langle 0.58, 0.42 \rangle$ ，随机数 $r = 0.58 > 0.341$ ，所以 $C$ 取 $-c$ 。
- 对 $D$ 采样， $P(D| -b, -c) = \langle 0.9, 0.1 \rangle$ ，随机数 $r = 0.04 < 0.9 = P(+d| -b, -c)$ ，所以 $D$ 取 $+d$ 。
- 本次采样的结果为 $(+a, -b, -c, +d)$ 。
- 对 $A$ 采样，随机数 $r = 0.94 > 0.918 = P(+a| -b, +c)$ ，所以 $A$ 取 $-a$ 。
- 对 $C$ 采样， $P(C| -a, -b, +d) = \alpha P(C| -a)P(+d| -b, C) = \langle 0.1 \times 0.2, 0.9 \times 0.9 \rangle = \langle 0.02, 0.81 \rangle = \langle 0.024, 0.976 \rangle$ ，随机数 $r = 0.67 > P(+c| -a, -b, +d) = 0.024$ ，所以 $C$ 取 $-c$ 。
- 对 $D$ 采样，随机数 $r = 0.49 < 0.9 = P(D| -b, -c)$ ，所以 $D$ 取 $+d$ 。
- 本次采样结果为 $(-a, -b, -c, +d)$ 。
- 采用六个随机数，进行了两次采样，得到了2个样本： $(+a, -b, -c, +d), (-a, -b, -c, +d)$ 皆为负样本。

□

### 题目 5. 给定一个隐马尔可夫模型（HMM）。

- (1) 运用HMM的建模方式，用条件概率的计算方式推导并化简 $P(x_1, \dots, x_t, y_{t-1} = s_v, y_t = s_j)$ 。

提示：一般来说，我们会对HMM模型有以下的建模方式（与课件上一致）—— $x_t$ 表示 $t$ 时刻的观察状态， $y_t$ 表示 $t$ 时刻的隐藏状态，隐藏状态可能取值为 $\{1, 2, 3, \dots, M\}$ 。初始状态的概率（start probabilities）表示为 $\{\pi_1, \dots, \pi_M\}$ ，隐藏状态之间从状态 $i$ 转化为状态 $j$ 的转移概率（transition probabilities）为 $a_{i,j}$ ，隐藏状态 $y_i = s_j$ 与观察状态 $x_i$ 之间的发散概率（emission probabilities）为 $b_j(x_i)$ 。在使用前向算法推导序列概率的时候，设定的前向因子 $\alpha_t^i = P(x_1, \dots, x_t, y_t = s_i)$ 。

解.

$$\begin{aligned}
& P(x_1, \dots, x_t, y_{t-1} = s_v, y_t = s_j) \\
&= \sum_{y_1} \sum_{y_2} \cdots \sum_{y_{t-2}} \pi_{y_1} \times \prod_{\tau=2}^{t-2} a_{y_\tau, y_{\tau+1}} \times \prod_{\tau=1}^{t-2} P(x_\tau | y_\tau) \times a_{t-1, t} P(x_{t-1} | y_{t-1} = s_v) P(x_t | y_t = s_j) \\
&= a_{y_{t-1}=s_v, y_t=s_j} P(x_{t-1} | y_{t-1} = s_v) P(x_t | y_t = s_j) \sum_{i=1}^M \alpha_{t-2}^i \\
&= a_{y_{t-1}=s_v, y_t=s_j} b_v(x_{t-1}) b_j(x_t) \sum_{i=1}^M \alpha_{t-2}^i
\end{aligned}$$

其中

$$\alpha_\tau^i = b_i(x_\tau) \sum_{k=1}^M \alpha_{\tau-1}^k a_{k,i}$$

□

- (2) 我们给定的HMM模型如下图4所示。假定图中的圆圈表示A, B, C三种可能的隐藏状态，而圆圈中的数字表示特定隐藏状态下的观察状态以及其发射概率（emission probabilities）。圆圈之间的箭头表示隐藏状态的转移以及相应的转移概率（transition probabilities）。我们用 $p_{y=A}^t$ 表示在t时刻，隐状态为A的概率，用 $p_{x=1}^t$ 表示在t时刻，观察状态为1的概率。为了简便，我们规定初始的隐状态为A，即 $p_A^1 = 1$ 。在每个时刻，隐状态会通过转移概率确定下个时刻的状态。

(a) 请用图中给定的数值与符号计算 $p_{y=C}^3$ 。

(b) 假设在t时刻， $(p_{y=B}^t, p_{y=C}^t)$ 分别为 $(b_0, c_0)$ ，请用图中给定的数值与符号计算 $p_{x=2}^t$ 。

解. (a) 由于没有给定观察状态，所以

$$\begin{aligned}
p_{y=C}^3 &= \sum_{y_1} \sum_{y_2} P(y_1) P(y_2 | y_1) P(y_3 = C | y_2) \\
&= \sum_{y_2} P(y_2 | y_1 = A) P(y_3 = C | y_2) \\
&= P(y_2 = A | y_1 = A) P(y_3 = C | y_2 = A) + P(y_2 = C | y_1 = A) P(y_3 = C | y_2 = C) \\
&= A_1 A_2 + A_2 \times 0 \\
&= A_1 A_2
\end{aligned}$$

(b) 使用后向算法推算，其中 $p_{y=A}^t = 1 - b_0 - c_0$ ：

$$\begin{aligned}
p_{x=2}^t &= \sum_{y=t} P(x_t = 2, y_t) \\
&= \sum_{y=t} P(y_t) P(x_t = 2 | y_t) \\
&= P(y_t = A) P(x_t = 2, y_t = A) + P(y_t = B) P(x_t = 2, y_t = B) \\
&\quad + P(y_t = C) P(x_t = 2, y_t = C) \\
&= 0.3(1 - b_0 - c_0)
\end{aligned}$$

□

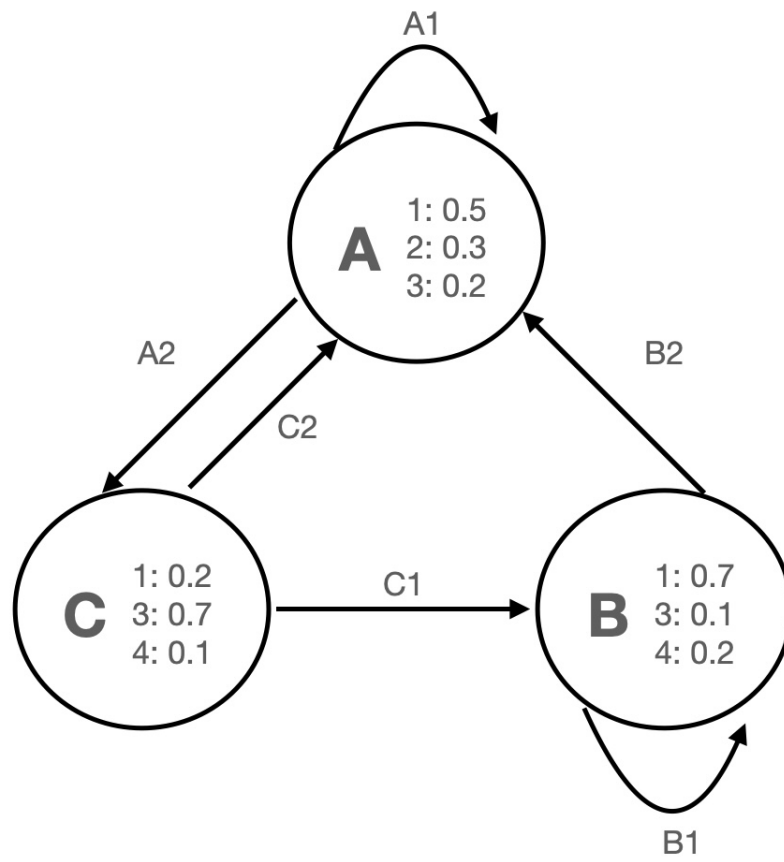


图 4: 第四题第二小问的HMM模型