第 3 次作业

Log Creative

March 21, 2020

2. 由下列真值表,分别从T和F来列写出A,B和C的表达式,并分别以符号m_i和M_i表示.

P	Q	A	B	C
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
T	F	T	F	F
T	T	F	T	F

解.

$$
\begin{aligned}
A &= P \uparrow Q && \text{(表达式)} \\
&= \neg P \vee \neg Q \\
&= M_0 && (M_i) \\
&= \neg(P \wedge Q) \\
&= \neg m_3 \\
&= \vee_{0,1,2} \\
&= m_0 \vee m_1 \vee m_2 && (m_i) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= P \leftrightarrow Q && \text{(表达式)} \\
&= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \\
&= m_0 \vee m_3 && (m_i) \\
&= \vee_{0,3} \\
&= (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \\
&= M_1 \wedge M_2 && (M_i) \qquad (2) \\
&= \wedge_{1,2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= P \downarrow Q && \text{(表达式)} \\
&= \neg P \wedge \neg Q \\
&= m_0 && (m_i) \\
&= \neg(P \vee Q) \\
&= \neg M_3 \\
&= M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 && (M_i) \\
&= \wedge_{0,1,2}
\end{aligned} \tag{3}
$$

4. 证明

(1) $A \to B$与$B^* \to A^*$同永真、同可满足。

证明. 通过证明重言蕴含来同时证明两者。
若$A \to B$真，则$\neg B \to \neg A$真。（逆否命题）
而$\neg A = A^{*-}, \neg B = B^{*-}$，则$B^{*-} \to A^{*-}$真。（置换规则）
假设$A = A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$，
则$A^- = A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$，其中$P_i(i = 1, 2, \cdots, n)$是任意的命题，可以将$\neg P_i$代入后者，将得到$A$，也就意味着$B^* \to A^*$真。也就是

$$A \to B \Rightarrow B^* \to A^* \tag{4}$$

如果$B^* \to A^*$真，则$(A^*)^* \to (B^*)^*$永真。（公式 (4)）
则$A \to B$真。（$(A^*)^* = A$）
也就是

$$B^* \to A^* \Rightarrow A \to B \tag{5}$$

综合公式 (4) 和 (5)，有

$$A \to B \Leftrightarrow B^* \to A^* \tag{6}$$

(i 同永真) 如果AßB永真，则根据永真蕴含的定义，B^*ßA^*也将永真。反之亦然。

(ii 同可满足) 如果$A(a_1, a_2, \cdots, a_n), B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$是满足$A \to B$真的一个条件，则根据永真蕴含的定义，$B^* \to A^*$也将真。反之亦然。

□

(2) $A \leftrightarrow B$与$A^* \leftrightarrow B^*$同永真、同可满足。

证明. 同样地，若$A \leftrightarrow B$真，则$A = B$(等值定理)，$\neg A = \neg B$(同真假),$\neg A \leftrightarrow \neg B$真(等值定理)。
之后，根据类似的推理，$A^{*-} \leftrightarrow B^{*-}, A^* \leftrightarrow B^*$，也就是

$$A \leftrightarrow B \Rightarrow A^* \leftrightarrow B^* \tag{7}$$

反之，$A^* \leftrightarrow B^*$真，则$(A^*)^* \leftrightarrow (B^*)^*$真，$A \leftrightarrow B$真，也就是

$$A^* \leftrightarrow B^* \Rightarrow A \leftrightarrow B \tag{8}$$

综合公式 (7) 和 (8),有

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow A^* \leftrightarrow B^* \tag{9}$$

故两者同永真，同可满足。 □

5. 给出下列各公式的合取范式、析取范式、主合取范式和主析取范式。并给出所有使公式为真的解释。

(4) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

解.

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) && \text{(析取范式)} \quad (10)\\
&\quad =(P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee \neg P)\\
&\quad \quad \wedge (Q \vee Q) \wedge (Q \vee R)\\
&\quad =(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge Q \wedge (Q \vee R)\\
&\quad =Q \wedge (P \vee R) && \text{(合取范式)} \quad (11)\\
&(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)\\
&\quad =(P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)\\
&\quad =(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)\\
&\quad =m_7 \vee m_6 \vee m_3\\
&\quad =\vee_{3,6,7} && \text{(主析取范式)} \quad (12)\\
&\quad =\wedge_{\{0,1,2,4,5\}\text{补}}\\
&\quad =\wedge_{2,3,5,6,7} && \text{(主合取范式)} \quad (13)
\end{aligned}
$$

使公式为真的解释:

P	Q	R	m_i
F	T	T	m_3
T	T	F	m_6
T	T	T	m_7

(8) $(P \to Q) \vee ((Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P))$

解.

$$
\begin{aligned}
&(P \to Q) \vee ((Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P)) \\
&\quad =(P \to Q) \vee ((Q \wedge P) \leftrightarrow (\neg Q \wedge \neg\neg P) \vee (Q \wedge \neg P)) \\
&\quad =(\neg P \vee Q) \vee [(Q \wedge P) \leftrightarrow (\neg Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P)] \\
&\quad =(\neg P \vee Q) \vee \{[(Q \wedge P) \wedge ((\neg Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P))] \\
&\quad\quad \vee [\neg(Q \wedge P) \wedge \neg((\neg Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P))]\} \\
&\quad =(\neg P \vee Q) \vee \{[((Q \wedge P) \wedge (\neg Q \wedge P)) \vee ((Q \wedge P) \wedge \\
&\quad\quad (Q \wedge \neg P))] \vee [\neg(Q \wedge P) \wedge (\neg(\neg Q \wedge P) \wedge \neg(Q \wedge \neg P))]\} \\
&\quad =(\neg P \vee Q) \vee \{\mathrm{F} \vee [(\neg Q \vee \neg P) \wedge ((Q \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg Q))]\} \\
&\quad =(\neg P \vee Q) \vee \{[(\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg Q)] \wedge (\neg P \vee Q)\}
\end{aligned}
$$

$$=\neg P \vee Q \qquad \text{(析取范式、合取范式)} \tag{14}$$

$$=M_1$$

$$=\wedge_1 \qquad \text{(主合取范式)} \tag{15}$$

$$=\vee_{\{0,2,3\}\text{补}}$$

$$=\vee_{0,1,3} \qquad \text{(主析取范式)} \tag{16}$$

使公式为真的解释:

P	Q	m_i
F	F	m_0
F	T	m_1
T	T	m_3