第 2 次作业

李子龙 518070910095

March 15, 2020

1. 证明下列等值公式。

(1) $P \to (Q \wedge R) = (P \to Q) \wedge (P \to R)$

证明.

$$\begin{aligned} P \to (Q \wedge R) &= \neg P \vee (Q \wedge R) && (\to\text{的等值公式}) \\ &= (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) && (\text{分配律}) \\ &= (P \to Q) \wedge (P \to R) && (\to\text{的等值公式}) \end{aligned}$$

□

(3) $((P \to \neg Q) \to (Q \to \neg P)) \wedge R = R$

证明.

$$\begin{aligned} ((P \to \neg Q) \to (Q \to \neg P)) \wedge R &= ((P \to \neg Q) \to (\neg\neg P \to \neg Q)) \wedge R && (\text{逆否定理}) \\ &= ((P \to \neg Q) \to (P \to \neg Q)) \wedge R && (\text{双重否定}) \\ &= \mathrm{T} \wedge R && (\text{等幂律}) \\ &= R && (\text{同一律}) \end{aligned}$$

□

(5) $P \to (Q \to R) = (P \wedge Q) \to R$

证明.

$$\begin{aligned} P \to (Q \to R) &= P \to (\neg Q \vee R) && (\to\text{的等值公式}) \\ &= \neg P \vee (\neg Q \vee R) && (\to\text{的等值公式}) \\ &= (\neg P \vee \neg Q) \vee R && (\text{结合律}) \\ &= \neg(P \wedge Q) \vee R && (\text{摩根律}) \\ &= (P \wedge Q) \to R && (\to\text{的等值公式}) \end{aligned}$$

□

(6) $\neg(P \leftrightarrow Q) = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

证明.

$$\begin{aligned}
\neg(P \leftrightarrow Q) &= \neg((P \to Q) \wedge (Q \to P)) && (\leftrightarrow\text{定义}) \\
&= \neg(P \to Q) \vee \neg(Q \to P) && (\text{摩根律}) \\
&= \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P) && (\to\text{的等值公式}) \\
&= (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg Q \wedge \neg P) && (\text{摩根律}) \\
&= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) && (\text{双重否定}) \\
&= (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) && (\text{交换律})
\end{aligned}$$

□

3. 用↑和↓分别表示出¬, ∧, ∨, →和 ↔。

证明. 令P, Q为命题变元。

$$\begin{aligned}
\neg P &= \neg P \vee \neg P && (\text{等幂律}) \\
&= P \uparrow P && (\uparrow\text{定义}) && \text{(1a)} \\
\neg P &= \neg P \wedge \neg P && (\text{等幂律}) \\
&= P \downarrow P && (\downarrow\text{定义}) && \text{(1b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \wedge Q &= \neg\neg P \wedge \neg\neg Q && (\text{双重否定}) \\
&= \neg P \downarrow \neg Q && (\downarrow \text{定义}) \\
&= (P \uparrow P) \downarrow (Q \uparrow Q) && (\text{公式 (1a)}) && (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \vee Q &= \neg\neg P \vee \neg\neg Q && (\text{双重否定}) \\
&= \neg P \uparrow \neg Q && (\uparrow\text{定义}) \\
&= (P \downarrow P) \uparrow (Q \downarrow Q) && (\text{公式 (1b)}) && (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \to Q &= \neg P \vee Q && (\to\text{的等值公式}) \\
&= (P \uparrow P) \vee Q && (\text{公式 (1a)}) \\
&= ((P \uparrow P) \downarrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \downarrow Q) && (\text{公式 (3)}) && (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \leftrightarrow Q =&(P \to Q) \wedge (Q \to P) && (\leftrightarrow\text{定义}) \\
=&(((P \uparrow P) \downarrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \downarrow Q)) \wedge (((Q \uparrow Q) \downarrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \downarrow P)) && (\text{公式 (4)}) \\
=&((((P \uparrow P) \downarrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \downarrow Q)) \uparrow (((P \uparrow P) \downarrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \downarrow Q)))) \\
&\downarrow ((((Q \uparrow Q) \downarrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \downarrow P)) \uparrow (((Q \uparrow Q) \downarrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \downarrow P))) && (\text{公式 (2)})
\end{aligned}$$

□