第 4 次作业

Log Creative

March 29, 2020

第二章

7. 判断下列推理式是否正确?

(10) $((P \wedge Q) \to R) \wedge ((P \vee Q) \to \neg R) \Rightarrow P \wedge Q \wedge R$

解. 错误。理由:

$$\begin{aligned}
((P \wedge Q) \to R) \wedge ((P \vee Q) \to \neg R) \to P \wedge Q \wedge R \\
&= \neg((\neg(P \wedge Q) \vee R) \wedge (\neg(P \vee Q) \vee \neg R)) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\
&= ((P \wedge Q) \wedge \neg R) \vee ((P \vee Q) \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\
&= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\
&= ((P \wedge Q) \wedge (\neg R \vee R)) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \\
&= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)
\end{aligned}$$

当$P = Q = \mathrm{F}$时，该式为F。故根据$P \to Q$为真与$P \Rightarrow Q$等价的关系可以得到推理式错误。

(11) $P \to Q \Rightarrow (P \to R) \to (Q \to R)$

解. 错误。理由:

$$\begin{aligned}
(P \to Q) \to &((P \to R) \to (Q \to R)) \\
&= \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg(\neg P \vee R) \vee (\neg Q \vee R)) \\
&= (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R) \vee (\neg Q \vee R) \\
&= \neg Q \vee (P \wedge \neg R) \vee R \\
&= \neg Q \vee P \vee R \neq \mathrm{T}
\end{aligned}$$

8. 使用推理规则证明

(4) $P \vee Q \to R \wedge S, S \vee E \to U \Rightarrow P \to U$

证明.

$$P \vee Q \to R \wedge S \qquad \text{(前提引入)} \tag{1a}$$
$$P \qquad \text{(附加前提引入)} \tag{1b}$$
$$R \wedge S \qquad \text{(分离)} \tag{1c}$$
$$S \qquad \text{(合取)} \tag{1d}$$
$$S \vee E \to U \qquad \text{(前提引入)} \tag{1e}$$
$$U \qquad \text{(分离)} \tag{1f}$$
$$P \to U \qquad \text{((1b)和(1f) 条件证明规则)} \tag{1g}$$

□

(5) $\neg R \vee S, S \to Q, \neg Q \Rightarrow Q \leftrightarrow R$

证明.

$$S \to Q \qquad \text{(前提引入)} \tag{2a}$$
$$\neg Q \to \neg S \qquad \text{(置换)} \tag{2b}$$
$$\neg Q \qquad \text{(前提引入)} \tag{2c}$$
$$\neg S \qquad \text{(分离)} \tag{2d}$$
$$\neg R \vee S \qquad \text{(前提引入)} \tag{2e}$$
$$\neg S \to \neg R \qquad \text{(置换)} \tag{2f}$$
$$\neg R \qquad \text{(分离)} \tag{2g}$$
$$Q \leftrightarrow R \qquad \text{((2c)和(2g) 条件证明规则)} \tag{2h}$$

□

(6) $\neg Q \vee S, (E \to \neg U) \to \neg S \Rightarrow Q \to E$

证明.

$$\neg Q \vee S \qquad \text{(前提引入)} \tag{3a}$$
$$Q \to S \qquad \text{(置换)} \tag{3b}$$
$$Q \qquad \text{(附加前提引入)} \tag{3c}$$
$$S \qquad \text{(分离)} \tag{3d}$$
$$(E \to \neg U) \to \neg S \qquad \text{(前提引入)} \tag{3e}$$
$$S \to \neg(E \to \neg U) \qquad \text{(置换)} \tag{3f}$$
$$\neg(E \to \neg U) \qquad \text{(分离)} \tag{3g}$$
$$E \wedge U \qquad \text{(置换)} \tag{3h}$$
$$E \qquad \text{(合取)} \tag{3i}$$
$$Q \to E \qquad \text{((3c)和(3i) 条件证明规则)} \tag{3j}$$

□

(补充) $P \to (Q \to R), Q \to (R \to S) \Rightarrow P \to (R \to S)$

证明.

$P \to (Q \to R)$	(前提引入)	(4a)
P	(附加前提引入)	(4b)
$Q \to R$	(分离)	(4c)
$Q \to (R \to S)$	(前提引入)	(4d)
$(Q \to R) \to (R \to S)$	(置换)	(4e)
$R \to S$	(分离)	(4f)
$P \to (R \to S)$	((4b)和(4f) 条件证明规则)	(4g)

□

9. 证明下列推理关系:

(1) 在大城市球赛中. 如果北京队第三, 那么如果上海队第二, 那么天津队第四. 沈阳队不是第一或北京队第三. 上海队第二. 从而知, 如果沈阳队第一, 那么天津队第四.

证明. 令: A_1 =沈阳队第一, A_2 =上海队第二, A_3 =北京队第三, A_4 =天津队第四。则原命题可以陈述为

$$A_3 \to (A_2 \to A_4), \neg A_1 \vee A_3, A_2 \Rightarrow A_1 \to A_4$$

$\neg A_1 \vee A_3$	(前提引入)	(5a)
$A_1 \to A_3$	(置换)	(5b)
A_1	(附加前提引入)	(5c)
A_3	(分离)	(5d)
$A_3 \to (A_2 \to A_4)$	(前提引入)	(5e)
$A_2 \to A_4$	(分离)	(5f)
A_2	(前提引入)	(5g)
A_4	(分离)	(5h)
$A_1 \to A_4$	((5c)和(5h) 条件证明规则)	(5i)

□

12. 利用归结法证明

(1) $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R) \Rightarrow R$

证明.

$$\begin{aligned}&(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R) \wedge \neg R\\ =&(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R\end{aligned}$$

建立子句集$S = \{P \vee Q, \neg P \vee R, \neg Q \vee R, \neg R\}$

$$\begin{aligned}
&P \vee Q && && \text{(6a)}\\
&\neg P \vee R && && \text{(6b)}\\
&\neg Q \vee R && && \text{(6c)}\\
&\neg R && && \text{(6d)}\\
&Q \vee R && \text{((6a)和(6b) 归并)} && \text{(6e)}\\
&R && \text{((6c)和(6e) 归并)} && \text{(6f)}\\
&\square && \text{((6e)和(6f) 归并)} && \text{(6g)}
\end{aligned}$$

$\square$

第四章

1. 判断下列各式是否合式公式

(1) $P(x) \vee (\forall x)Q(x)$
解. 不是。同一变量两边辖域不同。

(2) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$
解. 是。

(4) $(\exists x)P(y, z)$
解. 是。

(6) $(\forall x)(P(x) \wedge R(x)) \to ((\forall x)P(x) \wedge Q(x))$
解. 不是。右侧的同一变量两侧辖域不同。

(8) $(\exists x)((\forall y)P(y) \to Q(x, y))$
解. 不是。$(\forall y)P(y) \to Q(x, y)$内$y$的辖域不同。

(9) $(\exists x)(\exists y)(P(x, y, z) \to S(u, v))$
解. 是。

2. 作如何的具体设定下列公式方为命题

(3) $(\forall x)(\exists y)P(x, f(y, a)) \wedge Q(z)$
解. 当且仅当x,y,a,z取为常数，f是常函数，P, Q为谓词常量。

3. 指出下列公式中的自由变元和约束变元, 并指出各量词的辖域

(2) $(\forall x)(P(x) \wedge (\exists y)Q(y)) \wedge ((\forall x)P(x) \to Q(z))$

解. z是自由变元，x, y是约束变元。

$(\forall x)(P(x) \wedge (\exists y)Q(y))$，$P(x) \wedge (\exists y)Q(y)$是$x$的辖域。

$(\exists y)Q(y)$，$Q(y)$是y的辖域。

$(\forall x)P(x)$，$P(x)$是x的辖域。

(3) $(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \wedge (\exists y)R(y) \wedge S(z)$

解. z是自由变元，x, y是约束变元。

$(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x))$,$P(x) \leftrightarrow Q(x)$是$x$的辖域。

$(\exists y)R(y)$,$R(y)$是y的辖域。

4. 求下列各式的真值

(2) $(\exists x)(P \to Q(x)) \wedge R(a)$.论域为$\{-2, 1, 2, 3, 5, 6\}$, P 表 $2 > 1$, $Q(x)$表 $x \leq 3$, $R(x)$表$x > 5, a = 3$.

解. $P = \mathrm{T}$

$(\exists x)(P \to Q(x)) = \mathrm{T}$(因为论域中有满足$x \leq 3$的数字，$\mathrm{T} \to \mathrm{T} = \mathrm{T}$)

$R(a) = \mathrm{F}$(因为$3 \not> 5$)

$(\exists x)(P \to Q(x)) \wedge R(a) = \mathrm{F}$