第 14 次作业

Log Creative

June 13, 2020

习题一. 2. 简单图G中，如果$m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，证明$G$不存在孤立节点。

证明. 若不然，则有一孤立点v，子图$G' = G - v$的边数

$$\mid E(G') \mid = \mid E(G) \mid = m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \tag{1}$$

然而，G'边数最多的情况是完全图K_{n-1}，也就是

$$\mid E(G') \mid \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \tag{2}$$

这与式子(1)矛盾。
由于当孤立节点数不止一个时，式子(2)依然成立。所以不存在孤立节点。

□

3. 完全图的每边任给一个方向，称为有向完全图。证明在有向完全图中

$$\sum_{v_i \in V} (d^+(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V} (d^-(v_i))^2 \tag{3}$$

证明. 注意到，在完全图K_n中，所有节点的度数都是$n-1$，则:

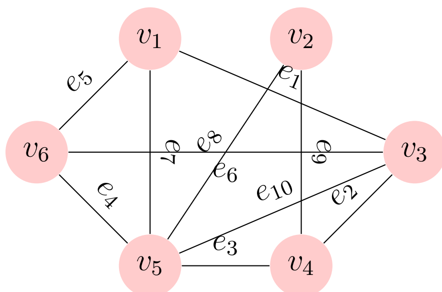
$$\begin{aligned}
&\sum_{v_i \in V} (d^+(v_i))^2 - \sum_{v_i \in V} (d^-(v_i))^2 \\
=&\sum_{v_i \in V} \left[(d^+(v_i))^2 - (d^-(v_i))^2\right] \\
=&\sum_{v_i \in V} (d^+(v_i) + d^-(v_i))(d^+(v_i) - d^-(v_i)) \\
=&\sum_{v_i \in V} d(v_i)(d^+(v_i) - d^-(v_i)) \\
=&\sum_{v_i \in V} (n-1)(d^+(v_i) - d^-(v_i)) \\
=&(n-1)\left[\sum_{v_i \in V} d^+(v_i) - \sum_{v_i \in V} d^-(v_i)\right]
\end{aligned} \tag{4}$$

对于每一条有向边来说，在这一个顶点产生了出度，必定会在另一个顶点产生入度，那么顶点的出度总数与入度总数将是相同的，所以：

$$\sum_{v_i \in V} (d^+(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V} (d^-(v_i))^2 \tag{5}$$

$\square$

8. 写出图1.7(a)中的邻接矩阵和关联矩阵。



解. 邻接矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

关联矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

习题二. 2. 证明G和$\bar{G}$至少有一个是连通图。

证明. 不失一般性，设G是非连通图，则G中存在极大连通子图$S \neq G$。对于所有的节点$v_i \in S$，由于$\bar{G} = K_n - G$，则在$\bar{G}$中，v_i将与$\forall v_j \in G - S$相连。
这样，纵使最坏情况，$\bar{G}$中关于$v_i \in S$的支撑子图和$v_j \in G - S$的支撑子图都是不连通的，但是两个点集所对应的点对(v_i, v_j)都有边相联系，则$\bar{G}$是连通的，事实上，在这种最坏情况下，$\bar{G}$为二分图。
反之亦然。 $\square$

3. 证明连通图有的最长道路必定相交于同一节点。

证明. 若只有一条最长道路，则自己与自己必然相交。下面证明非平凡的情况:

若不然，假设有两条等长的最长道路$P_1 = (a_1, \cdots, a_n)$和$P_2 = (b_1, \cdots, b_n)$，两者不相交。由于图是连通的，则必然有a_1到b_1的路径连接，设为$P_3 = (a_1, c_1, \cdots, c_r, b_1)$，那么$P' = (a_1, c_1, \cdots, c_r, b_1, \cdots, b_n)$比两者都长（长度至少为$n$，大于$n-1$），矛盾！

故连通图有的最长道路必定相交于同一节点。 □