第 11 次作业

Log Creative

May 23, 2020

17. 对A上的关系R，证明：

(1) R是自反的$\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

证明. R是自反的$\Rightarrow \forall \langle x, y \rangle \in I_A \Leftrightarrow x = y \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow I_A \subseteq R$
$I_A \subseteq R \Rightarrow \forall x \in A, \langle x, x \rangle \in R \Rightarrow R$是自反的。
综上所述，R是自反的$\Leftrightarrow I_A \subseteq R$。 □

(2) R是非自反的$\Leftrightarrow I_A \cap R = \varnothing$

证明. R是非自反的$\Rightarrow \forall \langle x, y \rangle \in I_A \Leftrightarrow x = y \Rightarrow \langle x, y \rangle \notin R \Rightarrow I_A \cap R = \varnothing$
$I_A \cap R = \varnothing \Rightarrow \forall \langle x, x \rangle \in I_A, \langle x, x \rangle \notin R \Rightarrow R$是非自反的。
综上所述，R是非自反的$\Leftrightarrow I_A \cap R = \varnothing$。 □

(3) R是传递的$\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$

证明. R是传递的$\Rightarrow \forall \langle x, z \rangle \in R \circ R, \exists y \in A : \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \Rightarrow R \circ R \subseteq R$
$R \circ R \subseteq R \Rightarrow \forall \langle x, z \rangle \in R \circ R \subseteq R, \exists y \in A : \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow R$是传递的。 □

22. 对集合$A = \{a, b, c, d\}$上的两个关系

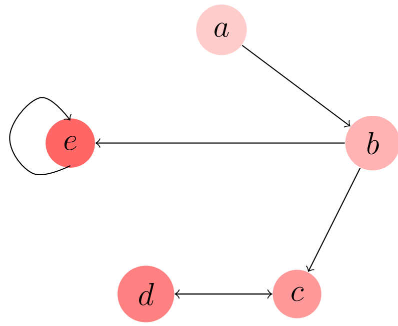
$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, d \rangle\} \\
R_2 &= \{\langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle\}
\end{aligned}
$$

求$R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1, R_1^2, R_2^2$。

解.

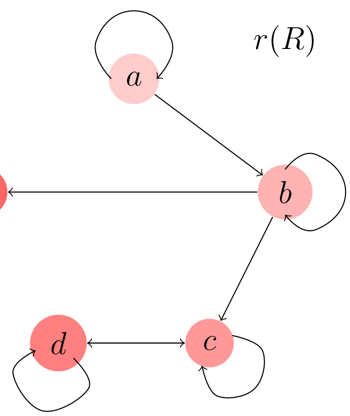
$$
\begin{aligned}
R_1 \circ R_2 &= \{\langle c, d \rangle\} \\
R_2 \circ R_1 &= \{\langle a, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle\} \\
R_1^2 &= \{\langle a, a \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, b \rangle\} \\
R_2^2 &= \{\langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle\}
\end{aligned}
$$

24. $A=\{a,b,c,d,e\}$上的关系R的关系如图，给出$r(R),s(R),t(R)$的关系图。

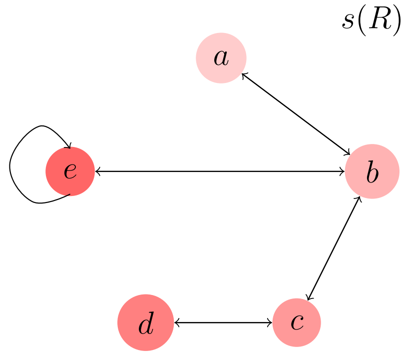


解.

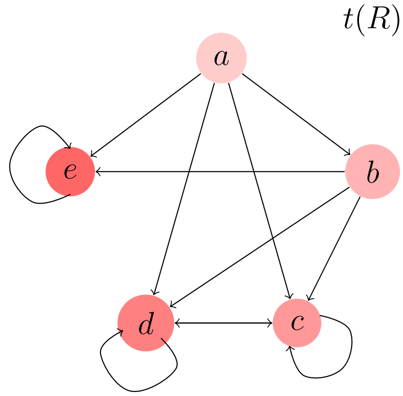
$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$



27. 对$A=\{a,b,c,d\}$上的关系

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$$

(1) 分别用矩阵运算和作图法计算求$r(R)$, $s(R)$和$t(R)$。

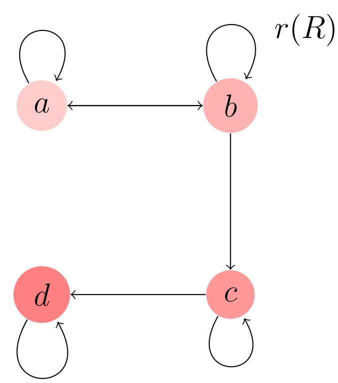
(2) 用 Warshall 算法求 $t(R)$。

解.

(1) $M(R)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$$M(r(R))=M(R\cup R^0)=M(R)+M(R^0)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=$$

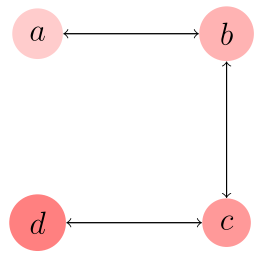
$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$



$$M(R)+M(R^{-1})=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$M(s(R))=M(R\cup R^{-1})=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

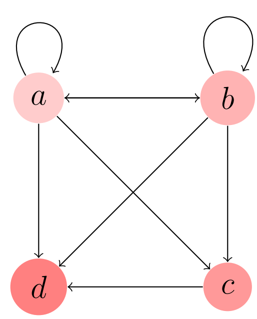
$s(R)$



$$M(t(R)) = M(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots) = M(R) \vee M(R^2) \vee M(R^3) \vee \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$t(R)$



(2)

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(R^+) = M(t(R))$$