

第 12 次作业

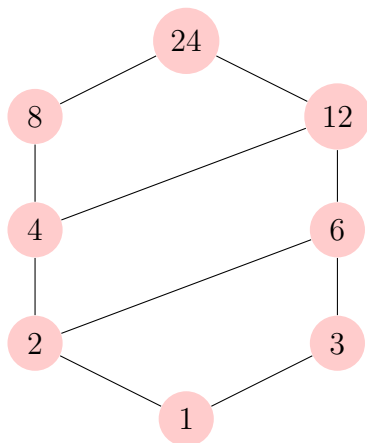
Log Creative

May 30, 2020

39. 对下列集合的整除关系画出哈斯图。

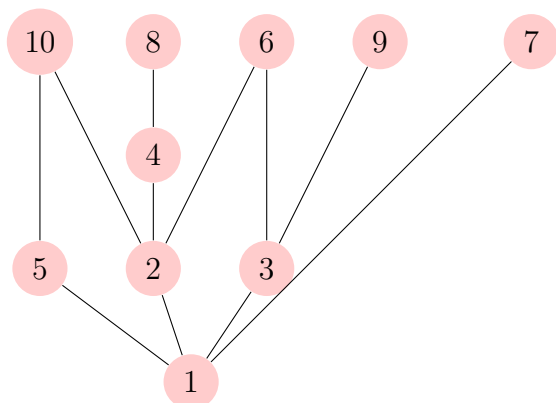
(1) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

解.



42. 设 $\mathbf{Z}_+ = \{x | x \in \mathbf{Z} \wedge x > 0\}$, D 是 \mathbf{Z}_+ 上的整除关系, $T = \{1, 2, \dots, 10\} \subseteq \mathbf{Z}_+$ 。在偏序集 $\langle \mathbf{Z}_+, D \rangle$ 中, 求 T 的上界、下界、上确界、下确界。

解.



下界与下确界为1。

上确界为6,7,8,9,10的最小公倍数: 2520。

上界为 $2520n(n \in \mathbf{Z}_+)$ 。

46. 对集合 A , 下列的 R 都是 $P(A) \times P(A)$ 上的关系。 R 是否是偏序关系, R 是否是全序关系。

$$(1) \langle P, Q \rangle R \langle X, Y \rangle \Leftrightarrow (P \oplus Q) \subseteq (X \oplus Y)$$

解. 自反性成立:

$$\begin{aligned} & \langle P, Q \rangle R \langle P, Q \rangle \\ & \Leftrightarrow (P \oplus Q) \subseteq (P \oplus Q) \end{aligned}$$

反对称性不成立:

$$\begin{aligned} & (\langle P, Q \rangle R \langle X, Y \rangle) \wedge (\langle X, Y \rangle R \langle P, Q \rangle) \\ & \Leftrightarrow ((P \oplus Q) \subseteq (X \oplus Y)) \wedge ((X \oplus Y) \subseteq (P \oplus Q)) \\ & \Leftrightarrow P \oplus Q = X \oplus Y \\ & \Leftrightarrow (P - Q) \cup (Q - P) = (X - Y) \cup (Y - X) \\ & \Rightarrow (P = X) \wedge (Q = Y) \\ & \Rightarrow \langle P, Q \rangle = \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

反对称性应当保证两者同时成立时, 两个对象相等。

所以不是偏序关系。

不是全序关系: 取 $A \neq \emptyset: \langle P, Q \rangle = \langle A, \emptyset \rangle, \langle X, Y \rangle = \langle \emptyset, A \rangle$

$$\begin{aligned} & \langle P, Q \rangle R \langle X, Y \rangle \\ & \Leftrightarrow \langle A, \emptyset \rangle R \langle \emptyset, A \rangle \\ & \Leftrightarrow (A \oplus \emptyset) \subseteq (\emptyset \oplus A) \\ & \Leftrightarrow A \subseteq A \\ & = T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle X, Y \rangle R \langle P, Q \rangle \\ & \Leftrightarrow \langle \emptyset, A \rangle R \langle A, \emptyset \rangle \\ & \Leftrightarrow (\emptyset \oplus A) \subseteq (A \oplus \emptyset) \\ & \Leftrightarrow A \subseteq A \\ & = T \end{aligned}$$

但是 $A \neq \emptyset, \langle P, Q \rangle \neq \langle X, Y \rangle$