第 13 次作业

Log Creative

June 6, 2020

4. 设$f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}, f(x)=\begin{cases}1 & \text{当}x\text{是奇数},\\ \frac{x}{2} & \text{当}x\text{是偶数}.\end{cases}$

求$f(0), f[\{0\}], f[\{0,2,4,6,\cdots\}], f[\{1,3,5,\cdots\}], f^{-1}[\{2\}], f^{-1}[\{3,4\}]$。

解.

$$\begin{aligned}f(0)&=0\\ f[\{0\}]&=\{0\}\\ f[\{0,2,4,6,\cdots\}]&=\{0,1,2,3,\cdots\}\\ f[\{1,3,5,\cdots\}]&=\{1\}\\ f^{-1}[\{2\}]&=\{4\}\\ f^{-1}[\{3,4\}]&=\{6,8\}\end{aligned}$$

5. 对下列函数分别确定：

(a) 是否是满射的、单射的；如果是双射的，写出f^{-1}的表达式.

(b) 写出函数的象和对给定集合S的完全原象.

(c) 关系$R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in\mathrm{dom}(f)\wedge f(x)=f(y)\}$是$\mathrm{dom}(f)$上的等价关系，一般称为由函数$f$导出的等价关系，求$R$.

(4) $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}, f(n)=\langle n,n+1\rangle, S=\{\langle 2,2\rangle\}$
解. (a)不是满射，是单射。 (b)$f[\mathbf{N}]=\{\langle n,n+1\rangle|n\in\mathbf{N}\}; f^{-1}(S)=\varnothing$. (c)$R=I_{\mathbf{N}}$

(5) $f:[0,1]\to[0,1], f(x)=\frac{2x+1}{4}, S=\left[0,\frac{1}{2}\right]$.
解. (a)不是满射，是单射。 (b)$f([0,1])=[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]; f^{-1}(S)=[0,\frac{1}{2}]$ (c)$R=I_{[0,1]}$

11. 对$f:A\to B$，定义$g:B\to P(A)$为$g(b)=\{x|x\in A\wedge f(x)\in b\}$.
证明：若f是满射的，则g是单射的。其逆是否成立?

证明. 对$\forall b_1, b_2 \in B \wedge b_1 \neq b_2, g(b_1) = \{x | x \in A \wedge f(x) \in b_1\}; g(b_2) = \{x | x \in A \wedge f(x) \in b_2\}$

若f是满射的：$\exists a_1, a_2 \in A : f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$,如果$a_1 = a_2$而$b_1 \neq b_2$，那么$f$将不是函数，所以$a_1 \neq a_2$。所以$g(b_1) \neq g(b_2)$，$g$是单射的。

逆不成立。对$\forall b \in B$，$g(b)$只能保证是独特的，并且$g(b) = \varnothing$是可以成立的，就不能保证f是满射的。

□

12. 设$f : A \to B, g : C \to D, f \subseteq g, C \subseteq A$，证明：$f = g$.

证明. $\forall c \in C \subseteq A, f(c) = b, g(c) = d. f \subseteq g \Rightarrow b = d$

$a \in A - C$,若$f(a)$存在，而$f \subseteq g$，矛盾。所以$A = C$。

所以$f = g$。 □