

## 第 5 次作业

Log Creative

April 4, 2020

5. 将下列语句符号化。

(2) 凡有理数都可写成分数。

解.  $P(x)$ 表示“ $x$ 是有理数”， $Q(x)$ 表示是“ $x$ 是分数”，则

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

(6) 凡实数都能比较大小。

解.  $P(x)$ 表示“ $x$ 是实数”， $Q(x, y)$ 表示“ $x, y$ 可以比较大小”，则

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \wedge P(y) \rightarrow Q(x, y))$$

7. 设个体域为 $\{a, b, c\}$ ，试将下列公式写成命题逻辑公式。

(10)  $(\forall y)((\exists x)P(x, y) \rightarrow (\forall x)Q(x, y))$

解.

$$\begin{aligned} & (\forall y)((\exists x)P(x, y) \rightarrow (\forall x)Q(x, y)) \\ &= (\forall y)(P(a, y) \vee P(b, y) \vee P(c, y) \rightarrow Q(a, y) \wedge Q(b, y) \wedge Q(c, y)) \\ &= (P(a, a) \vee P(b, a) \vee P(c, a) \rightarrow Q(a, a) \wedge Q(b, a) \wedge Q(c, a)) \wedge \\ & \quad (P(a, b) \vee P(b, b) \vee P(c, b) \rightarrow Q(a, b) \wedge Q(b, b) \wedge Q(c, b)) \wedge \\ & \quad (P(a, c) \vee P(b, c) \vee P(c, c) \rightarrow Q(a, c) \wedge Q(b, c) \wedge Q(c, c)) \end{aligned}$$

8. 判断下列公式是普遍有效的，不可满足的还是可满足的？

(2)  $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x))$

解. 普遍有效。 $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) = \text{T}$ 意味着存在一个 $x_0$ 使得 $P(x_0) = \text{T}$ 而且 $Q(x_0) = \text{T}$ ，也就是 $((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)) = \text{T}$ ，所以普遍有效。

(6)  $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$

解. 普遍有效。因为 $P(x) = \text{T}$ 时， $\neg P(x) = \text{F}$ ； $P(x) = \text{F}$ 时， $\neg P(x) = \text{T}$ ，所以 $P(x) \vee \neg P(x) = \text{T}$ ，也就是 $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x)) = \text{T}$ ，所以普遍有效。

$$(7) \quad ((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)) \rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$$

**解.** 可满足的。只有满足 $P(x_0) = T$ 的 $x_0$ 能够使 $Q(x_0) = T$ ,式子才能成立。

10. 设个体域为 $\{a, b\}$ , 并对 $P(x, y)$ 设定为 $P(a, a) = T, P(a, b) = F, P(b, a) = F, P(b, b) = T$ 计算下列公式的真值。

$$(1) \quad (\forall x)(\exists y)P(x, y) = (\forall x)(P(x, a) \vee P(x, b)) = T$$

$$(3) \quad (\forall x)(\forall y)P(x, y) = (\forall x)(P(x, a) \wedge P(x, b)) = F$$

$$(5) \quad (\exists y)\neg P(a, y) = \neg P(a, a) \vee \neg P(a, b) = T$$

$$(7) \quad (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)) = T, \text{ 由于 } (\forall x)(\forall y)(P(a, b) = P(b, a))$$