费曼的奇妙观点

LC

May 11, 2021

Chapter 1

速度 坐标交换

1.1 位移关系

然后，我们来看一种更为自然的引入方法。
在二维的旋转中，在原来θ的旋转后再旋转一个小角度$\Delta\theta$，然后我们考查x轴和y轴的位移变化。

$$\Delta x = -PQ\sin\theta = -r\Delta\theta\frac{y}{r} = -y\Delta\theta \tag{1.1}$$

$$\Delta y = +x\Delta\theta \tag{1.2}$$

关联的坐标正好交换了！

1.2 速度关系

然后我们等式两边同时除以Δt，根据速度的定义即可得到:

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = +\omega x \tag{1.3}$$

然而，当我们求出速度的大小时，这种奇怪的现象就消失了！

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega \tag{1.4}$$

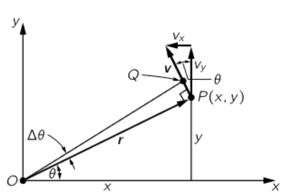

Figure 1.1: 二维旋转运动学

1.3 通常推导

所以在通常的课本上，我们推导时就不会发现这种奇妙的事情。

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = r\Delta\varphi \tag{1.5}$$

$$|\Delta \boldsymbol{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t} = \omega r \tag{1.6}$$

Chapter 2

力矩的自然引入

我们在初中知道，力矩等于力乘上力臂，并且我们通过实验得到了在平衡的杠杆中，力矩是相等的。
但是，这未免有些突兀。今天，我们来深入探讨力矩究竟是怎样引入的。

2.1 二维旋转

我们知道，功等于力与位移的内积，在一维方向上就是力与位移的大小乘积。
但是在二维旋转中，角度是一个重要的量，我们今天将要推导出功与角度的关联量——并将其定义为力矩。
将力和微小位移分解到x轴和y轴上,则力F在x轴上的分量F_x所做的元功为：

$$\Delta W_x = F_x \cdot \Delta s = F_x \cdot (\Delta x + \Delta y) = F_x \cdot \Delta x \tag{2.1}$$

同理可得，

$$\Delta W_y = F_y \cdot \Delta y \tag{2.2}$$

将公式(1)(2)代入式子中，可以得到：

$$\Delta W_x = -yF_x\Delta\theta \tag{2.3}$$

$$\Delta W_y = xF_y\Delta\theta \tag{2.4}$$

则总元功为：

$$\Delta W = \Delta W_x + \Delta W_y = (xF_y - yF_x)\Delta\theta \tag{2.5}$$

我们将$xF_y - yF_x$定义为力矩，记为M_{xy}。
我们注意到第一节的奇怪现象：速度关联坐标交换直接影响到了这里力矩的表达式，x与F_y相乘，y与F_x相乘。但是这种奇怪的组合事实上涉及一个更广泛的概念。

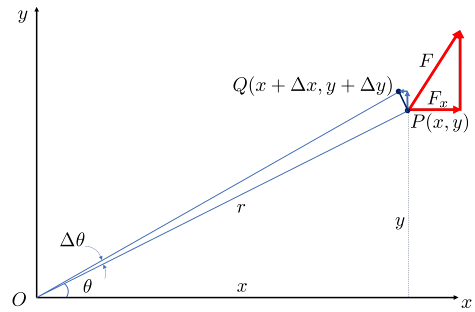

Figure 2.1: 元功与角度

2.2 三维情况

同样地，在xOz和yOz平面中，有与xOy类似的表达式：

$$M_{xy} = xF_y - yF_x \tag{2.6}$$
$$M_{xz} = xF_z - zF_x \tag{2.7}$$
$$M_{yz} = yF_z - zF_y \tag{2.8}$$

这恰好满足叉积的结果，就有：

$$\boldsymbol{M} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{2.9}$$

这正是课本上的结果！

2.3 角动量

根据牛顿第二定律$F = ma = m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$，我们可将力展开，公式(12)就变成了：

$$M_x y = xm\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - ym\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{2.10}$$

奇怪的是，上面的式子是另一个函数的导数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(xm\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - ym\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) \tag{2.11}$$

推导如下：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(xm\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - ym\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) &= xm\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - ym\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ &= xm\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - ym\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned} \tag{2.12}$$

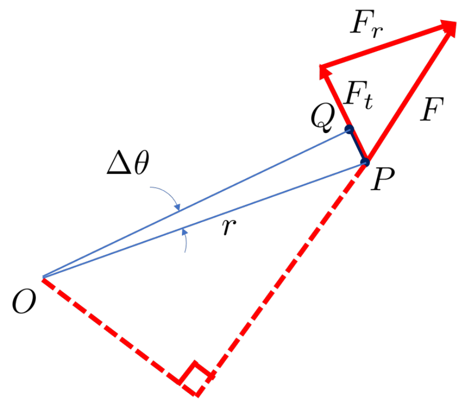

Figure 2.2: 力矩与角度

这正是力矩！ 我们将被求导的函数记为角动量，即

$$L = xm\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - ym\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{2.13}$$

而我们又知道，动量$p = mv = m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，所以上式简化为：

$$L = xp_y - yp_x \tag{2.14}$$

注意比较角动量与力矩形式的相似性。

2.4 初中情况

那这个表达式与初中的力乘上力臂有什么关系呢？ 简化图形，将力分解在切向和法向上。在这里元功等于力的切向分量F_t与微小位移$\Delta s = r\Delta\theta$的乘积，即

$$\Delta W = F_t r \Delta\theta \tag{2.15}$$

得到了相同的形式！根据定义，$F_t r$就是力矩了。 有注意到，有两个相似三角形。 根据对应边成比例有

$$\frac{F}{r} = \frac{F_t}{l} \tag{2.16}$$

则力矩就变为

$$M = Fl \tag{2.17}$$

l为力臂，这正是初中时候的定义！
在上一小节中得到的角动量表达式与力矩形式几乎相同，只是把F换成了p，则角动量也将有类似的形式

$$\begin{aligned} L &= pl' \\ \boldsymbol{L} &= r \times p \end{aligned} \tag{2.18}$$

而且下式被称为角动量定理

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \tag{2.19}$$

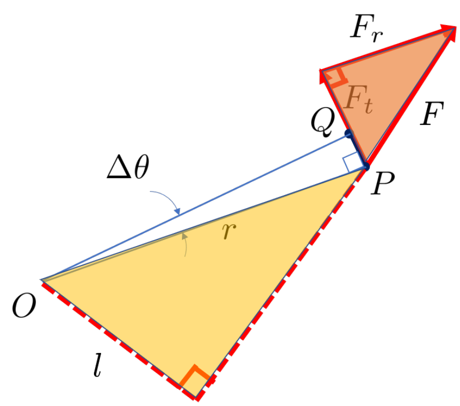

Figure 2.3: 两个相似三角形

Chapter 3

科里奥利力

3.1 站上传送带

甲一动不动地站在环形传送带上，随之旋转。乙在地面上静止不动地看着甲。
下面从甲的角动量出发，去思考另一种神秘的力——科里奥利力。
令甲所在的位置与圆心的距离为r，传送带的角速度为ω，甲的质量为m，由(4)式得，甲的速度为

$$v = \omega r \tag{3.1}$$

由(24)式知，甲的角动量为

$$L = rp = rmv = m\omega r^2 \tag{3.2}$$

到目前为止，乙看到传送带在旋转，甲认为传送带是静止的。

3.2 迈出一步

接着，甲按耐不住了，相对于传送带，有了一个沿着半径方向的速度v_r。但是切向速度是不变的，故在叉乘规则下角动量大小不变，表达式仍为(27)式。
不同的是，现在的r是一个关于t的函数，已非常量。那么为了使角动量改变，一定有一个力矩。假设这个力沿着半径的切向，大小为F_C。则

$$M = F_C r \tag{3.3}$$

由角动量定理(25)式知，

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 2m\omega r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \tag{3.4}$$

(28)式和(29)式代表的力矩是同一个力矩，故有

$$F_C = 2m\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2m\omega v_r \tag{3.5}$$

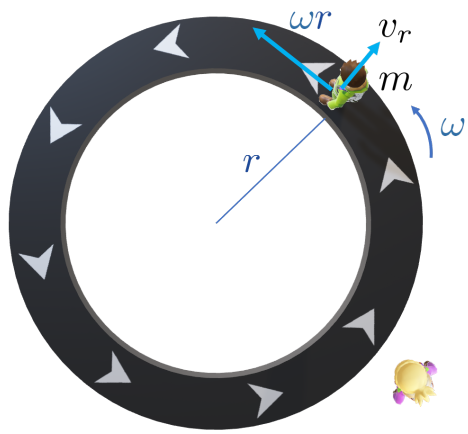

Figure 3.1: 传送带上的甲与地面上的乙

这个式子可按照叉乘规则改写为

$$F_C = 2m(\boldsymbol{v_r} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{3.6}$$

这个力就被定义为科里奥利力。
值得一提的是，当相对速度$\boldsymbol{v}$方向不再沿着径向时，上式仍然成立，即

$$F_C = 2m(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{3.7}$$

3.3 直觉

还是甲相对于传送带的速度沿着径向，站在地上的乙认为甲的运动时两个运动的合成：

$$\boldsymbol{v'} = \boldsymbol{v_r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{3.8}$$

这是真实速度，故向心力的大小为

$$F_n = -m\frac{v'^2}{r} = -\frac{mv_r^2}{r} - m\omega^2 r - 2m\omega v_r \tag{3.9}$$

而最后一项恰是我们之前定义的科里奥利力！
甲能感受到前两项，因为我相对传送带有一个v_r的速度，向心力也应该如此，维持甲有这么一个相对速度。第二项是因为甲现有的物理知识能想象得到，如果甲不动的话，这就是甲的向心力。但第三项只看传送带是他是无论如何也不知道的。而第三项是因为我们在不同的参考系下，在这里是由旋转参考系变为乙所在的地面系转换所导致的，所以它和向心力一样，也是一种效果力。

Appendix A

注释

1. 视频地址(合集)：https://www.bilibili.com/video/av40013448/
2. LogCreative 个人主页：http://space.bilibili.com/31271993?
3. 全文摘自《费曼物理学讲义》(*Feynman Lectures on Physics*)第一卷第18章-第20章，
   在线版网址：
   - 第18章：http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_18.html
   - 第19章：http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_19.html
   - 第20章：http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_19.html
4. 视频结尾摘自 Lecture 2 The Relation of Mathematics to Physics—The Characteristic of Physics Law—Richard Feynman
   网址：视频链接
5. 视频中的符号均为加粗，有时代表向量，视情况而定。
6. 视频与本篇讲义内容或有不妥之处，敬请斧正！