

# 费曼的奇妙观点

LC

May 11, 2021

# 速度 坐标交换

**位移关系** 然后，我们来看一种更为自然的引入方法。  
在二维的旋转中，在原来 $\theta$ 的旋转后再旋转一个小角度 $\Delta\theta$ ，然后我们考查 $x$ 轴和 $y$ 轴的位移变化。

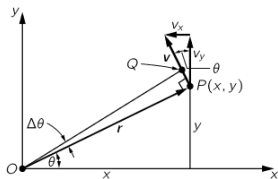


Figure: 二维旋转运动学

$$\Delta x = -PQ \sin \theta = -r \Delta \theta \frac{y}{r} = -y \Delta \theta \quad (1)$$

$$\Delta y = +x \Delta \theta \quad (2)$$

关联的坐标正好交换了！

**速度关系** 然后我们等式两边同时除以 $\Delta t$ ，根据速度的定义即可得到：

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = +\omega x \quad (3)$$

然而，当我们求出速度的大小时，这种奇怪的现象就消失了！

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega \quad (4)$$

**通常推导** 所以在通常的课本上，我们推导时就不会发现这种奇妙的事情。

$$|\Delta \mathbf{r}| = r \Delta \varphi \quad (5)$$

$$|\Delta \mathbf{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \varphi|}{\Delta t} = \omega r \quad (6)$$

# 力矩的自然引入

我们在初中知道，力矩等于力乘上力臂，并且我们通过实验得到了在平衡的杠杆中，力矩是相等的。  
但是，这未免有些突兀。今天，我们来深入探讨力矩究竟是怎样引入的。

**二维旋转** 我们知道，功等于力与位移的内积，在一维方向上就是力与位移的大小乘积。但是在二维旋转中，角度是一个重要的量，我们今天将要推导出功与角度的关联量——并将其定义为力矩。

将力和微小位移分解到 $x$ 轴和 $y$ 轴上,则力 $F$ 在 $x$ 轴上的分量 $F_x$ 所做的元功为:

$$\Delta W_x = F_x \cdot \Delta s = F_x \cdot (\Delta x + \Delta y) = F_x \cdot \Delta x \quad (7)$$

同理可得,

$$\Delta W_y = F_y \cdot \Delta y \quad (8)$$

将公式(1)(2)代入式子中,可以得到:

$$\Delta W_x = -yF_x\Delta\theta \quad (9)$$

$$\Delta W_y = xF_y\Delta\theta \quad (10)$$

则总元功为:

$$\Delta W = \Delta W_x + \Delta W_y = (xF_y - yF_x)\Delta\theta \quad (11)$$



我们将 $x F_y - y F_x$ 定义为力矩，记为 $M_{xy}$ 。

我们注意到第一节的奇怪现象：速度关联坐标交换直接影响到了这里力矩的表达式， $x$ 与 $F_y$ 相乘， $y$ 与 $F_x$ 相乘。但是这种奇怪的组合事实上涉及一个更广泛的概念。

**三维情况** 同样地，在 $xOz$ 和 $yOz$ 平面中，有与 $xOy$ 类似的表达式：

$$M_{xy} = xF_y - yF_x \quad (12)$$

$$M_{xz} = xF_z - zF_x \quad (13)$$

$$M_{yz} = yF_z - zF_y \quad (14)$$

这恰好满足叉积的结果，就有：

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (15)$$

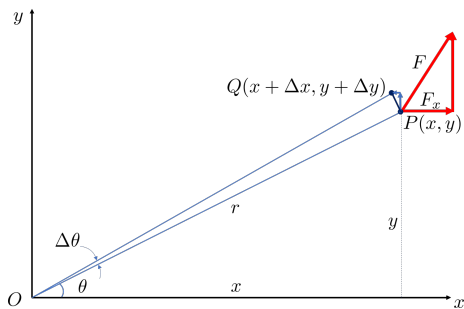


Figure: 元功与角度

这正是课本上的结果！

**角动量** 根据牛顿第二定律  $F = ma = m \frac{d^2 s}{dt^2}$ , 我们可将力展开, 公式(12)就变成了:

$$M_{xy} = xm \frac{d^2 y}{dt^2} - ym \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (16)$$

奇怪的是, 上面的式子是另一个函数的导数:

$$\frac{d}{dt} \left( xm \frac{dy}{dt} - ym \frac{dx}{dt} \right) \quad (17)$$

推导如下:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( xm \frac{dy}{dt} - ym \frac{dx}{dt} \right) &= xm \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} m \frac{dy}{dt} - ym \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} m \frac{dx}{dt} \\ &= xm \frac{d^2 y}{dt^2} - ym \frac{d^2 x}{dt^2} \end{aligned} \quad (18)$$

这正是力矩！ 我们将被求导的函数记为角动量，即

$$L = xm \frac{dy}{dt} - ym \frac{dx}{dt} \quad (19)$$

而我们又知道，动量  $p = mv = m \frac{ds}{dt}$ ，所以上式简化为：

$$L = xp_y - yp_x \quad (20)$$

注意比较角动量与力矩形式的相似性。

**初中情况** 那这个表达式与初中的力乘上力臂有什么关系呢？

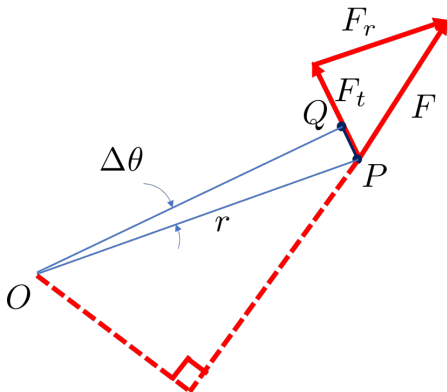


Figure: 力矩与角度

简化图形，将力分解在切向和法向上。在这里元功等于力的切向分量 $F_t$ 与微小位移 $\Delta s = r\Delta\theta$ 的乘积，即

$$\Delta W = F_t r \Delta\theta \quad (21)$$

得到了相同的形式！根据定义， $F_t r$ 就是力矩了。有注意到，有两个相似三角形。

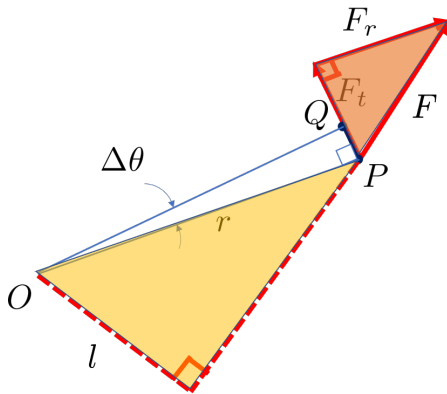


Figure: 两个相似三角形



根据对应边成比例有

$$\frac{F}{r} = \frac{F_t}{l} \quad (22)$$

则力矩就变为

$$M = Fl \quad (23)$$

$l$ 为力臂，这正是初中时候的定义！

在上一小节中得到的角动量表达式与力矩形式几乎相同，只是把 $F$ 换成了 $p$ ，则角动量也将有类似的形式

$$\begin{aligned} L &= pl' \\ \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \end{aligned} \quad (24)$$

而且下式被称为角动量定理

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (25)$$

# 科里奥利力

**站上传送带** 甲一动不动地站在环形传送带上，随之旋转。乙在地面上静止不动地看着甲。下面从甲的角动量出发，去思考另一种神秘的力——科里奥利力。

令甲所在的位置与圆心的距离为 $r$ ，传送带的角速度为 $\omega$ ，甲的质量为 $m$ ，由(4)式得，甲的速度为

$$v = \omega r \quad (26)$$

由(24)式知，甲的角动量为

$$L = rp = rmv = m\omega r^2 \quad (27)$$

到目前为止，乙看到传送带在旋转，甲认为传送带是静止的。

## 迈出一步

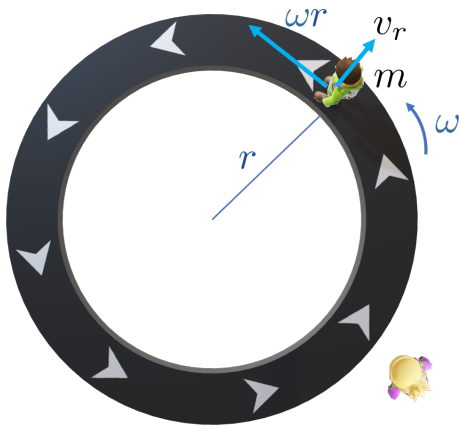


Figure: 传送带上的甲与地面上的乙

接着，甲按耐不住了，相对于传送带，有了一个沿着半径方向的速度 $v_r$ 。但是切向速度是不变的，故在叉乘规则下角动量大小不变，表达式仍为(27)式。

不同的是，现在的 $r$ 是一个关于 $t$ 的函数，已非常量。那么为了使角动量改变，一定有一个力矩。假设这个力沿着半径的切向，大小为 $F_C$ 。则

$$M = F_C r \quad (28)$$

由角动量定理(25)式知，

$$M = \frac{dL}{dt} = 2m\omega r \frac{dr}{dt} \quad (29)$$

(28)式和(29)式代表的力矩是同一个力矩，故有

$$F_C = 2m\omega \frac{dr}{dt} = 2m\omega v_r \quad (30)$$

这个式子可按照叉乘规则改写为

$$F_C = 2m(\mathbf{v}_r \times \boldsymbol{\omega}) \quad (31)$$

这个力就被定义为科里奥利力。

值得一提的是，当相对速度 $\mathbf{v}$ 方向不再沿着径向时，上式仍然成立，即

$$F_C = 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (32)$$

**直觉** 还是甲相对于传送带的速度沿着径向，站在地上的乙认为甲的运动时两个运动的合成：

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (33)$$

这是真实速度，故向心力的大小为

$$F_n = -m \frac{v'^2}{r} = -\frac{mv_r^2}{r} - m\omega^2 r - 2m\omega v_r \quad (34)$$

而最后一项恰是我们之前定义的科里奥利力！

甲能感受到前两项，因为我相对传送带有一个 $v_r$ 的速度，向心力也应该如此，维持甲有这么一个相对速度。第二项是因为甲现有的物理知识能想象得到，如果甲不动的话，这就是甲的向心力。但第三项只看传送带是他是无论如何也不知道的。而第三项是因为我们在不同的参考系下，在这里是由旋转参考系变为乙所在的地面系转换所导致的，所以它和向心力一样，也是一种效果力。

# 注释



- ① 视频地址(合集): <https://www.bilibili.com/video/av40013448/>
- ② LogCreative 个人主页: <http://space.bilibili.com/31271993?>
- ③ 全文摘自《费曼物理学讲义》(*Feynman Lectures on Physics*)第一卷 第18章-第20章,  
在线版网址:
  - 第18章: [http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I\\_18.html](http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_18.html)
  - 第19章: [http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I\\_19.html](http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_19.html)
  - 第20章: [http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I\\_19.html](http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_19.html)
- ④ 视频结尾摘自 Lecture 2 The Relation of Mathematics to Physics—The Characteristic of Physics Law—Richard Feynman  
网址: 视频链接
- ⑤ 视频中的符号均为加粗, 有时代表向量, 视情况而定。
- ⑥ 视频与本篇讲义内容或有不妥之处, 敬请斧正!