

## 作业 2

李子龙

123033910195

2023 年 10 月 13 日

3. 解 对于  $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ , 由于

$$f(1.5) = 0.125 > 0$$

$$f(1.4) = -0.216 < 0$$

故方程  $x^3 - x^2 - 1$  有一个根在  $(1.4, 1.5)$  区间内。

(1)  $\phi(x) = 1 + 1/x^2, \phi'(x) = -2/x^3$ ,  $\phi'(x)$  是一个单调函数, 由于  $|\phi'(1.4)| = |-0.7289| < 1, |\phi'(1.5)| = |-0.5926| < 1$ , 所以对于  $\forall x \in (1.4, 1.5), |\phi'(x)| < 1$ , 迭代公式收敛。

(2)  $\phi(x) = \sqrt[3]{1+x^2}, \phi'(x) = \frac{2}{3} \frac{x}{(1+x^2)^{2/3}}, \phi''(x) = \frac{2}{3} \frac{(1+x^2)^{2/3} - x \cdot \frac{2}{3}(1+x^2)^{-1/3} \cdot 2x}{(1+x^2)^{4/3}}, \forall x \in (1.4, 1.5), \phi''(x) > 0$ , 所以  $\phi'(x)$  是一个单调函数,  $\phi'(1.4) = 0.4527 < 1, \phi'(1.5) = 0.4558 < 1$ , 所以  $\forall x \in (1.4, 1.5), \phi'(x) < 1$ , 迭代公式收敛。

(3)  $\phi(x) = 1/\sqrt{x-1}, \phi'(x) = -1/(x-1)$ , 由于  $\phi'$  是一个单调函数,  $\phi'(1.4) = -2.5, \phi'(1.5) = -2, |\phi(x)| > 1$ , 迭代公式发散。

选择 (2) 的  $x_{k+1} = \sqrt[3]{1+x_k^2}$  作为迭代公式, 考虑到压缩率  $q = |\phi'(1.5)| = 0.45577$ , 则根据后验估计, 只需要

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q}{1-q} |x_k - x_{k-1}| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

只需要  $|x_k - x_{k-1}| < 0.000597$  就可以保证结果有四位有效数字。求解过程如下:

$k$	$x_k$
0	1.5
1	1.48125
2	1.47271
3	1.46882
4	1.46705
5	1.46624
6	1.46588

由于  $|x_5 - x_6| = 0.00036 < 0.000597$ , 满足四位有效数字, 所以  $x^* = 1.466$  是原方程的一个近似解。

4. 解 (1) 在区间  $(0, 1)$  上二分法:

$k$	$a_k$	$b_k$	$x_k$	$f(x_k)$ 符号	$k$	$a_k$	$b_k$	$x_k$	$f(x_k)$ 符号
0	0	1	0.5	+	6	0.078125		0.0859375	-
1		0.5	0.25	+	7	0.0859375		0.08984375	-
2		0.25	0.125	+	8	0.08984375		0.091796875	+
3		0.125	0.0625	-	9		0.091796875	0.0908203125	+
4	0.0625		0.09375	+	10		0.0908203125	0.09033203125	-
5		0.09375	0.078125	-					

所以二分法需要 10 次迭代, 使得  $|x^* - x_k| \leq (b_{10} - a_{10})/2 = 0.00048828125 < 0.0005$  满足三位小数精度。

- (2) 使用迭代法  $x_{k+1} = (2 - e^{x_k})/10$ , 对  $\phi(x) = (2 - e^x)/10$  求导, 有  $\phi'(x) = -e^x/10$ , 认为其在  $(0, 1)$  上有根, 不妨取压缩率  $q = |\phi'(1)| \approx 0.271$ , 根据后验估计有

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q}{1-q} |x_k - x_{k-1}| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

故只需要  $|x_k - x_{k-1}| < 0.001345$  就可以满足三位小数精度。取迭代初值  $x_0 = 0$ :

$k$	$x_k$
0	0
1	0.1
2	0.089483
3	0.090639

所以迭代法需要 3 次迭代, 使得  $|x_3 - x_2| = 0.001156 < 0.001345$  将满足三位小数精度。

5. **证明** 令  $\phi(x) = x - \lambda f(x)$ , 则  $\phi'(x) = 1 - \lambda f'(x)$ , 由于  $0 < m \leq f'(x) \leq M$ , 则  $1 - \lambda M \leq \phi'(x) \leq 1 - \lambda m$ , 由于  $0 < \lambda < 2/M$ , 故  $-1 < \phi'(x) < 1$ , 即  $|\phi'(x)| < 1$ , 根据局部收敛定理, 迭代过程  $x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k - \lambda f(x_k)$  在某个区间上收敛到  $x^*$ 。收敛时  $x^* = x^* - \lambda f(x^*)$ , 由于  $\lambda > 0$ , 等价于  $f(x^*) = 0$ , 即  $x^*$  为  $f(x) = 0$  的根。 ■

7. **解** (1)  $f(x) = x^3 - 3x - 1$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 3$ , 则牛顿公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 1}{3x_k^2 - 3}$$

取迭代初值  $x_0 = 2$ , 迭代过程如下:

$k$	$x_k$
0	2
1	1.88889
2	1.87945

由于  $|x_2 - x^*| = |1.87945 - 1.87939| = 0.00006 < 0.0005$  满足四位有效数字精度, 所以使用牛顿法解得近似解  $x^* = 1.879$ 。

(2) 取  $x_0 = 2, x_1 = 1.9$  作为开始值, 用弦切法公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

迭代过程如下:

$k$	$x_k$
0	2
1	1.9
2	1.88109
3	1.87941

由于  $|x_3 - x^*| = 0.00002 < 0.0005$  满足四位有效数字精度, 所以使用弦切法解得近似解  $x^* = 1.879$ 。

9. **证明** 根据 6.3.4 节的配方法得到的公式,  $q = \frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}$ , 由于  $\forall x_0 > 0, |q| < 1$ ,  $2^k$  必定为偶数, 则

$$x_k - \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \frac{q^{2^k}}{1 - q^{2^k}} \geq 0$$

即  $x_k \geq \sqrt{a}$ 。

对原迭代公式两侧同减去  $x_k$ , 有

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{x_k} - x_k \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a - x_k^2}{x_k} \leq 0$$

也就是序列  $x_1, x_2, \dots$  是单调递减的。 ■

11. **解** (1)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = -x$$

则  $\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = -1$ , 牛顿法发散。

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}, & x \geq 0, \\ -\sqrt[3]{x^2}, & x < 0. \end{cases}$$

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}} = -\frac{1}{2}x$$

则  $\forall x \in \mathbb{R}, |\phi'(x)| = |-\frac{1}{2}| < 1$ , 牛顿法收敛。由于  $\phi^{(1)}(x^*) \neq 0$ , 所以其是 1 阶收敛的。

12. **解** 牛顿公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2} = \frac{2x_k^3 + a}{3x_k^2}$$



则

$$\phi(x) = \frac{2x^3 + a}{3x^2} \quad \phi'(x) = \frac{6x^2 \cdot 3x^2 - (2x^3 + a) \cdot 6x}{9x^4} = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{a}{x^3} \right) \quad \phi''(x) = \frac{2a}{x^4}$$

$\phi(\sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a}$ , 当  $a \neq 0$  时, 由于  $\phi'(\sqrt[3]{a}) = 0, \phi''(\sqrt[3]{a}) \neq 0$ , 此时它是 2 阶收敛的。当  $a = 0$  时, 由于  $\phi'(\sqrt[3]{a}) \neq 0$ , 此时它是 1 阶收敛的。

13. 解 牛顿公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1 - \frac{a}{x_k^3}}{\frac{2a}{x_k^4}} = \frac{3ax_k - x_k^3}{2a}$$

将  $a = 115$  代入, 有

$$x_{k+1} = \frac{345x_k - x_k^3}{230}$$

取初值  $x_0 = 11$ , 有

$k$	$x_k$
0	11
1	10.71304
2	10.72379
3	10.72381

由于  $|x_2 - x_3| = 0.00002 < 0.0005$ , 所以  $\sqrt[3]{115} \approx 10.7238$ 。

14. 解 讨论通用的牛顿公式

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

的导数:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)} \\ \phi''(x) &= \frac{[f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)]f'^2(x) - 2f(x)f''(x)f'(x)f''(x)}{f'^4(x)} \\ &= \frac{f'^3(x)f''(x) + f(x)f'^2(x)f'''(x) - 2f(x)f'(x)f''^2(x)}{f'^4(x)} \\ &= \frac{f'^2(x)f''(x) + f(x)f'(x)f'''(x) - 2f(x)f''^2(x)}{f'^3(x)} \end{aligned}$$

根据  $p$  阶收敛定理,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[p]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[p]{a} - x_k)^2} = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \sqrt[p]{a}}{(x_k - \sqrt[p]{a})^2} = - \frac{\phi''(x^*)}{2}$$

(1) 对于  $f(x) = x^n - a$ , 牛顿公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}} = \frac{(n-1)x_k^n + a}{nx_k^{n-1}}$$

由于  $f'(x) = nx^{n-1}, f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ , 则

$$\phi''(x) = \frac{an^3(n-1)x^{2n-4}}{n^3x^{3n-3}} = a(n-1)x^{-n-1}$$



故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2} = -\frac{\phi''(\sqrt[n]{a})}{2} = -\frac{n-1}{2\sqrt[n]{a}}$$

(2) 对于  $f(x) = 1 - \frac{a}{x^n}$ , 牛顿公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1 - \frac{a}{x_k^n}}{\frac{an}{x_k^{n+1}}} = \frac{a(n+1)x_k - x_k^{n+1}}{an}$$

由于  $f'(x) = anx^{-n-1}$ ,  $f''(x) = -an(n+1)x^{-n-2}$ ,  $f'''(x) = an(n+1)(n+2)x^{-n-3}$ , 则

$$\phi''(x) = \frac{-a^2n^3(n+1)x^{-2n-4}}{a^3n^3x^{-3n-3}} = -\frac{(n+1)x^{n-1}}{a}$$

故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2} = -\frac{\phi''(\sqrt[n]{a})}{2} = \frac{n+1}{2\sqrt[n]{a}}$$

15. 解 令

$$\phi(x) = \frac{x(x^2 + 3a)}{3x^2 + a}$$

有  $\phi(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ , 则

$$(3x^2 + a)\phi(x) = x^3 + 3ax$$

$$6x\phi(x) + (3x^2 + a)\phi'(x) = 3x^2 + 3a \quad \Rightarrow \phi'(\sqrt{a}) = 0$$

$$6\phi(x) + 12x\phi'(x) + (3x^2 + a)\phi''(x) = 6x \quad \Rightarrow \phi''(\sqrt{a}) = 0$$

$$18\phi'(x) + 18x\phi''(x) + (3x^2 + a)\phi'''(x) = 6 \quad \Rightarrow \phi'''(\sqrt{a}) = \frac{3}{2a}$$

因此它是计算  $\sqrt{a}$  的三阶方法, 根据  $p$  阶收敛定理, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a} - x_{k+1}}{(\sqrt{a} - x_k)^3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \sqrt{a}}{(x_k - \sqrt{a})^3} = \frac{\phi'''(\sqrt{a})}{6} = \frac{1}{4a}$$