作业 3

Log Creative

2023 年 11 月 1 日

1. **解**　解方程组，限制计算精度为 4 位小数。

$$\begin{cases}0.4096x_1+0.1234x_2+0.3678x_3+0.2943x_4=0.4043\\0.2246x_1+0.3872x_2+0.4015x_3+0.1129x_4=0.1550\\0.3645x_1+0.1920x_2+0.3781x_3+0.0643x_4=0.4240\\0.1784x_1+0.4002x_2+0.2786x_3+0.3927x_4=-0.2557\end{cases}$$

(1) 高斯消元法：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 & 0.4043\\0.2246 & 0.3872 & 0.4015 & 0.1129 & 0.1550\\0.3645 & 0.1920 & 0.3781 & 0.0643 & 0.4240\\0.1784 & 0.4002 & 0.2786 & 0.3927 & -0.2557\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 & 0.4043\\0.0000 & 0.3195 & 0.1998 & -0.0485 & -0.0667\\0.0000 & 0.0822 & 0.0508 & -0.1976 & 0.0642\\0.0000 & 0.3465 & 0.1184 & 0.2645 & -0.4318\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 & 0.4043\\0.0000 & 0.3195 & 0.1998 & -0.0485 & -0.0667\\0.0000 & 0.0000 & -0.0006 & -0.1851 & 0.0814\\0.0000 & 0.0000 & -0.0983 & 0.3171 & -0.3595\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 & 0.4043\\0.0000 & 0.3195 & 0.1998 & -0.0485 & -0.0667\\0.0000 & 0.0000 & -0.0006 & -0.1851 & 0.0814\\0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 30.6427 & -13.6955\end{pmatrix}$$

回代解得

$$x_1=-0.1800\qquad x_2=-1.6617\qquad x_3=2.2148\qquad x_4=-0.4469$$

(2) 列主元消元法：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 & 0.4043\\0.2246 & 0.3872 & 0.4015 & 0.1129 & 0.1550\\0.3645 & 0.1920 & 0.3781 & 0.0643 & 0.4240\\0.1784 & 0.4002 & 0.2786 & 0.3927 & -0.2557\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 & 0.4043\\0.0000 & 0.3195 & 0.1998 & -0.0485 & -0.0667\\0.0000 & 0.0822 & 0.0508 & -0.1976 & 0.0642\\0.0000 & 0.3465 & 0.1184 & 0.2645 & -0.4318\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 & 0.4043\\0.0000 & 0.3465 & 0.1184 & 0.2645 & -0.4318\\0.0000 & 0.0000 & 0.0227 & -0.2603 & 0.1666\\0.0000 & 0.0000 & 0.0906 & -0.2924 & 0.3315\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 & 0.4043\\0.0000 & 0.3465 & 0.1184 & 0.2645 & -0.4318\\0.0000 & 0.0000 & 0.0906 & -0.2924 & 0.3315\\0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1870 & 0.0835\end{pmatrix}$$

回代解得

$$x_1 = -0.1826 \qquad x_2 = -1.6632 \qquad x_3 = 2.2178 \qquad x_4 = -0.4465$$

实际上不限定计算小数精度的情况下的解为

$$x_1 = -0.1819 \qquad x_2 = -1.6630 \qquad x_3 = 2.2172 \qquad x_4 = -0.4467$$

列主元消去法通过选择绝对值最大的主元避免了高斯消元法中大数除以小数的现象，从而提高了准确度。

2. (1) **证明** 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，故令矩阵及其第一步约化矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_1^\top \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$$

则第一步约化后

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_1^\top \\ a_{11}\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{m}_1\boldsymbol{a}_1^\top + \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_1^\top \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$$

最后一个等号是高斯消元法的定义，则

$$a_{11}\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}_1 = -a_{11}\boldsymbol{m}_1 \tag{1}$$

另一方面，

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{m}_1(-a_{11}\boldsymbol{m}_1)^\top + \boldsymbol{A}_1 = -a_{11}\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_1^\top + \boldsymbol{A}_1$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}_1$ 也是对称矩阵，$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_1^\top$，考察

$$\boldsymbol{A}_2^\top = -a_{11}(\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_1^\top)^\top + \boldsymbol{A}_1^\top = -a_{11}(\boldsymbol{m}_1^\top)^\top\boldsymbol{m}_1^\top + \boldsymbol{A}_1^\top = -a_{11}\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_1^\top + \boldsymbol{A}_1$$

也就意味着

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2^\top$$

即 $\boldsymbol{A}_2$ 是对称矩阵。 ■

(2) **解** 解方程组

$$\begin{cases} 0.6428x_1 + 0.3475x_2 - 0.8468x_3 = 0.4127 \\ 0.3475x_1 + 1.8423x_2 + 0.4759x_3 = 1.7321 \\ -0.8468x_1 + 0.4759x_2 + 1.2147x_3 = -0.8621 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6428 & 0.3475 & -0.8468 & 0.4127 \\ 0.3475 & 1.8423 & 0.4759 & 1.7321 \\ -0.8468 & 0.4759 & 1.2147 & -0.8621 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.6428 & 0.3475 & -0.8468 & 0.4127 \\ 0.0000 & 1.6544 & 0.9337 & 1.5090 \\ 0.0000 & 0.9337 & 0.0992 & -0.3184 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 0.6428 & 0.3475 & -0.8468 & 0.4127 \\ 0.0000 & 1.6544 & 0.9337 & 1.5090 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.4278 & -1.1700 \end{pmatrix}$$

回代解得

$$x_1 = 4.5867 \qquad x_2 = -0.6315 \qquad x_3 = 2.7352$$

6. **证明** 由于 $\boldsymbol{A}$ 是对角占优阵，则它对角线上的元素

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \tag{2}$$

式 (2) 在 $i = 1$ 时的特殊情况

$$|a_{11}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{n} |a_{1j}| = \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| \tag{3}$$

由高斯消元法，对于 $\boldsymbol{A}$ 消去一步后的形式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_1^\top \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$$

中的矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 元素有表达式

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \tag{4}$$

式 (4) 在 $j = i$ 时的特殊情况

$$a_{ii}^{(2)} = a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} \tag{5}$$

考察矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 每一行初对角线上元素的绝对值的和

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}^{(2)}\right| &= \sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n} \left|a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}\right| && \text{式 (4)} \\
&= \sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n} \left(|a_{ij}| + \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}\right|\right) && \text{三角不等式} |a \pm b| \leq |a| + |b| \\
&= \sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} \sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n} |a_{1j}| \\
&< |a_{ii}| - |a_{i1}| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} \sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n} |a_{1j}| && \text{式 (2)} \\
&< |a_{ii}| - |a_{i1}| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} (|a_{11}| - |a_{1i}|) && \text{式 (3)} \\
&= |a_{ii}| - \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} |a_{1i}| \\
&\leq \left|a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i}\right| && \text{不等式} |a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a \pm b| \\
&= \left|a_{ii}^{(2)}\right| && \text{式 (5)}
\end{aligned}$$

这就证明了矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 是对角占优阵。

结合习题 2 的结论和数学归纳法，对于对称的对角占优阵来说，用高斯消去法每一步产生的右下角矩阵都是对称的对角占优阵，对角占优性将保证小矩阵的第一个元素的绝对值是同行中最大的，结合对称性，将是同列中最大的，则其在列主元中也将被选为主元，从而得到与列主元消去法同样的计算过程。 ■

7. **证明** (1) 由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定矩阵，根据 Cholesky 分解，存在一个实的非奇异下三角矩阵 $\boldsymbol{L}=(l_{ij})_n$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^\top$，根据矩阵乘法运算规则，可以得到 $\boldsymbol{A}$ 对角线上的元素

$$a_{ii}=\sum_{j=1}^{i} l_{ij}^2>0$$

其中不取等号是 $\boldsymbol{L}$ 为非奇异矩阵保证的，否则 $l_{ij}=0(j=1,\cdots,n)\Rightarrow \det \boldsymbol{L}=0$ 不满足非奇异条件。

(2) 考察高斯消元法第一步约化

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \boldsymbol{a}_1^\top\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$$

根据习题 2(1) 的结论，$\boldsymbol{A}$ 是对称的，$\boldsymbol{A}_2$ 也是对称矩阵。

由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，则

$$\forall \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0 \tag{6}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{L}_1$ 是非奇异的，所以 $\forall \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{L}_1^\top\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$（若 $\exists \boldsymbol{x}^*\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{L}_1^\top\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{0}$，也就意味着 $\boldsymbol{L}$ 中的列向量是线性相关的，$\det\boldsymbol{L}=0$，违背了非奇异的定义），则根据 $\boldsymbol{A}$ 的正定性

$$0<(\boldsymbol{L}_1^\top\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}_1^\top\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}_1^\top)\boldsymbol{x}$$

则矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}_1^\top$ 也是正定的。展开

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11} & \boldsymbol{a}_1^\top\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{m}_1^\top\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{11}\boldsymbol{m}_1^\top+\boldsymbol{a}_1^\top\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$$

最后一个等号由对称性导致的式 (1) 得出。考察 $\boldsymbol{B}$ 的所有顺序主子式 $D_k=a_{11}D'_{k-1}>0(k=2,\cdots,n)$，由 (1) 可得 $a_{11}>0$，所以所有 $\boldsymbol{A}_2$ 对应的顺序主子式 $D'_k>0$，故 $\boldsymbol{A}_2$ 是正定的。综上，$\boldsymbol{A}_2$ 是对称正定的。

(3) 式 (5) 成立，由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，且 $a_{11}>0$，则

$$a_{ii}^{(2)}=a_{ii}-\frac{a_{i1}^2}{a_{11}}\leq a_{ii}\quad (i=2,3,\cdots,n)$$

(4) 反证法。由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定的，设 $a_{ij}=a_{ji}(i\neq j)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中绝对值最大的元素，在 (1) 中已经证明对角线上的元素大于 0，$a_{ii}>0, a_{jj}>0$，有两种情形：

i. $a_{ij}=a_{ji}\geq\max(a_{ii},a_{jj})>0$，取式 (6) 中的 $\boldsymbol{x}$ 为

$$x_k=\begin{cases}1, & k=i,\\ -1, & k=j,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则

$$\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(a_{ii}-a_{ji})-(a_{ij}-a_{jj})=a_{ii}+a_{jj}-2a_{ij}\leq 0$$

ii. $a_{ij}=a_{ji}\le -\max(a_{ii},a_{jj})$，取式 (6) 中的 $\boldsymbol{x}$ 为

$$x_k=\begin{cases}1, & k=i,\\ 1, & k=j,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(a_{ii}+a_{ji})+(a_{ij}+a_{jj})=a_{ii}+a_{jj}+2a_{ij}\le 0$$

不论如何都会与式 (6) 矛盾。所以 $\boldsymbol{A}$ 的绝对值最大的元素必在对角线上。

(5) 第 (2) 小题已证明 $\boldsymbol{A}_2$ 是对称正定矩阵，结合第 (4) 小题对于对称正定矩阵，其绝对值最大的元素必在对角线上，令 $a_{pp}^{(2)}(p\in\{2,\cdots,n\})$ 是 $\boldsymbol{A}_2$ 中绝对值最大的元素，有

$$\max_{2\le i,j\le n}\left|a_{ij}^{(2)}\right|=\left|a_{pp}^{(2)}\right| \tag{7}$$

考虑第 (3) 小题的结果，以及第 (1) 小题的结果：对称正定矩阵对角线上的元素都是大于 0 的，

$$0<a_{pp}^{(2)}\le a_{pp}\Rightarrow \left|a_{pp}^{(2)}\right|\le \left|a_{pp}\right| \tag{8}$$

考虑到 p 的取值范围 $[2,\cdots,n]$，则根据最大值的定义，

$$\left|a_{pp}\right|\le \max_{2\le i,j\le n}\left|a_{ij}\right| \tag{9}$$

综合式 (7) – 式 (9)，有

$$\max_{2\le i,j\le n}\left|a_{ij}^{(2)}\right|\le \max_{2\le i,j\le n}\left|a_{ij}\right|$$

(6)（目测题目有误，应该是 $\forall i,j \quad |a_{ij}|<1$，即 $\max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|<1$）
当 $i=1$ 时，$\left|a_{1j}^{(2)}\right|=|a_{1j}|<1$；当 $2\le i\le n, j=1$ 时，$\left|a_{i1}^{(2)}\right|=0<1$；当 $2\le i,j\le n$ 时，

$$\left|a_{ij}^{(2)}\right|\le \max_{2\le i,j\le n}\left|a_{ij}^{(2)}\right|\le \max_{2\le i,j\le n}|a_{ij}|\le \max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|<1$$

类似的，根据数学归纳法，将得到 $\forall k, \left|a_{ij}^{(k)}\right|<1$。 ■

9. **证明** 设 $\boldsymbol{A}$ 的 Crout 分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n}\\ & 1 & \cdots & u_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & 1\end{pmatrix}$$

使用数学归纳法。

起步 可知

$$a_{i1}=l_{i1}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

则

$$a_{1j}=l_{11}u_{1j}\Rightarrow u_{1j}=a_{1j}/l_{11}\quad (j=2,\cdots,n)$$

从而得到 $\boldsymbol{L}$ 的第 1 行列和 $\boldsymbol{U}$ 的第 1 行。

迭代 设已经定出 $\boldsymbol{L}$ 的前 $r-1$ 列和 $\boldsymbol{U}$ 的前 $r-1$ 行，则

$$a_{ir}=\sum_{k=1}^{n}l_{ik}u_{kr}=\sum_{k=1}^{r-1}l_{ik}u_{kr}+l_{ir}\Rightarrow l_{ir}=a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{ik}u_{kr}\quad(i=r,r+1,\cdots,n)$$

从而得到 $\boldsymbol{L}$ 的第 r 列；另一方面，

$$a_{rj}=\sum_{k=1}^{n}l_{rk}u_{kj}=\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}u_{kj}+l_{rr}u_{rj}\Rightarrow u_{rj}=\left(a_{ri}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}u_{kj}\right)/l_{rr}\quad(j=r+1,\cdots,n)$$

从而得到 $\boldsymbol{U}$ 的第 r 行。

结论 根据数学归纳法原理，可以得到 $\boldsymbol{A}$ 的 Crout 分解。 ■

10. **解** (1) 若 $\boldsymbol{U}$ 为上三角矩阵，则

$$\begin{pmatrix}u_{11}&\cdots&u_{1,n-1}&u_{1n}\\&u_{22}&\cdots&u_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&u_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{pmatrix}$$

求解方法为从下而上，先计算 $x_n=d_n/u_{nn}$，再代入上一行，$u_{n-1,n-1}x_{n-1}+u_{n-1,n}x_n=d_{n-1}\Rightarrow x_{n-1}=\frac{d_{n-1}-u_{n-1,n-1}x_{n-1}}{u_{n-1,n-1}}$；$\cdots$ 类似地，有

$$x_i=\frac{d_i-\sum_{j=i+1}^{n}u_{ij}x_j}{u_{ii}}\quad(i=n-1,n-2,\cdots,1)$$

若 $\boldsymbol{U}$ 为下三角矩阵，则为从上到下，$x_1=d_1/u_{11}$，

$$x_i=\frac{d_i-\sum_{j=1}^{i-1}u_{ij}x_j}{u_{ii}}\quad(i=2,3,\cdots,n)$$

(2) 乘法：$0+1+\cdots+n-1$，除法：n，乘除法总计：$\frac{n^2+n}{2}$。

(3) 若 $\boldsymbol{U}$ 为上三角矩阵，它的逆矩阵 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{U}^{-1}$ 也是上三角矩阵，设

$$\begin{pmatrix}u_{11}&\cdots&u_{1,n-1}&u_{1n}\\&u_{22}&\cdots&u_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&u_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{11}&\cdots&s_{1,n-1}&s_{1n}\\&s_{22}&\cdots&s_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&s_{nn}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$$

则

$$u_{ii}s_{ii}=1\Rightarrow s_{ii}=\frac{1}{u_{ii}}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$s_{ij}=-\frac{\sum_{k=i+1}^{n}u_{ik}s_{kj}}{u_{ii}}\qquad(i=n-1,n-2,\cdots,1;j=i+1,i+2,\cdots,n)$$

若 $\boldsymbol{U}$ 为下三角矩阵，同理可得

$$u_{ii}s_{ii}=1\Rightarrow s_{ii}=\frac{1}{u_{ii}}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$s_{ij}=-\frac{\sum_{k=1}^{i-1}u_{ik}s_{kj}}{u_{ii}}\qquad(i=2,3,\cdots,n;j=1,2,\cdots,i-1)$$

11. **证明** (1) 由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\top}$，则

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\top}=(\boldsymbol{A}^{\top})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是对称的。

若 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定矩阵，则存在非奇异的下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 满足它的 Cholesky 分解：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\top}$$

考虑它的逆，由于 $\boldsymbol{L}$ 非奇异所以它存在逆矩阵 $\boldsymbol{L}^{-1}$，

$$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{L}^{\top})^{-1}\boldsymbol{L}^{-1}=(\boldsymbol{L}^{-1})^{\top}\boldsymbol{L}^{-1}$$

考察 $\forall x\neq 0$，

$$\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{L}^{-1})^{\top}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{x})^{\top}(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{x})>0$$

易知 $\boldsymbol{L}^{-1}$ 也是非奇异的，所以 $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{x}\neq 0$，最后一个大于号成立。故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定的。

综上，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 是对称正定的。

(2) 由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定的，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是对称正定的（上一小问的结论），存在它的 Cholesky 分解，使得 L^* 对角线上的元素都是正的且唯一：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{L}^{*\top}$$

则

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=(\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{L}^{*\top})^{-1}=(\boldsymbol{L}^{*\top})^{-1}\boldsymbol{L}^{*-1}=(\boldsymbol{L}^{*-1})^{\top}\boldsymbol{L}^{*-1}$$

其中 $\boldsymbol{L}^{*-1}$ 的对角线元素均正（根据矩阵乘法，$a_{ii}a_{ii}^*=1$，$a_{ii}>0, a_{ii}^*=\frac{1}{a_{ii}}>0$）。 ■

13. **解**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&&&\\-1&2&-1&&\\&-1&2&-1&\\&&-1&2&-1\\&&&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&&&&\\-1&\frac{3}{2}&&&\\&-1&\frac{4}{3}&&\\&&-1&\frac{5}{4}&\\&&&-1&\frac{6}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&&&\\&1&-\frac{2}{3}&&\\&&1&-\frac{3}{4}&\\&&&1&-\frac{4}{5}\\&&&&1\end{pmatrix}$$

解 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}$：

$$\begin{pmatrix}2&&&&\\-1&\frac{3}{2}&&&\\&-1&\frac{4}{3}&&\\&&-1&\frac{5}{4}&\\&&&-1&\frac{6}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{5}\\\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

解 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$：

$$\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&&&\\&1&-\frac{2}{3}&&\\&&1&-\frac{3}{4}&\\&&&1&-\frac{4}{5}\\&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{5}\\\frac{1}{6}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

14. **解**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -\frac{5}{2} & \\ & & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{7}{5} \\ & & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^\top$$

求解 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ \frac{69}{5} \end{pmatrix}$$

求解 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -\frac{5}{2} & \\ & & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{7}{5} \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ \frac{69}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{23}{9} \end{pmatrix}$$

15. **解**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

的 $D_1 \neq 0, D_2 = 0, D_3 \neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 不能进行 Doolittle 分解。

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

的 $D_1 \neq 0, D_2 = 0, D_3 = 0$，存在 Doolittle 分解但不唯一，

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & -1 \\ & & b-2 \end{pmatrix}$$

其中 b 为任意实数。

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{pmatrix}$$

的 $D_1 = 1, D_2 = 1, D_3 = 1$，故 $\boldsymbol{C}$ 有唯一的 Doolittle 分解:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

18. **解**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

行范数

$$||\boldsymbol{A}||_\infty = 1.1$$

列范数

$$||\boldsymbol{A}||_1 = 0.8$$

2-范数：由于

$$\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.37 & 0.33 \\ 0.33 & 0.34 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.68534073, \lambda_2 = 0.02465927$$

$$||\boldsymbol{A}||_2 = \sqrt{0.68534073} = 0.82785$$

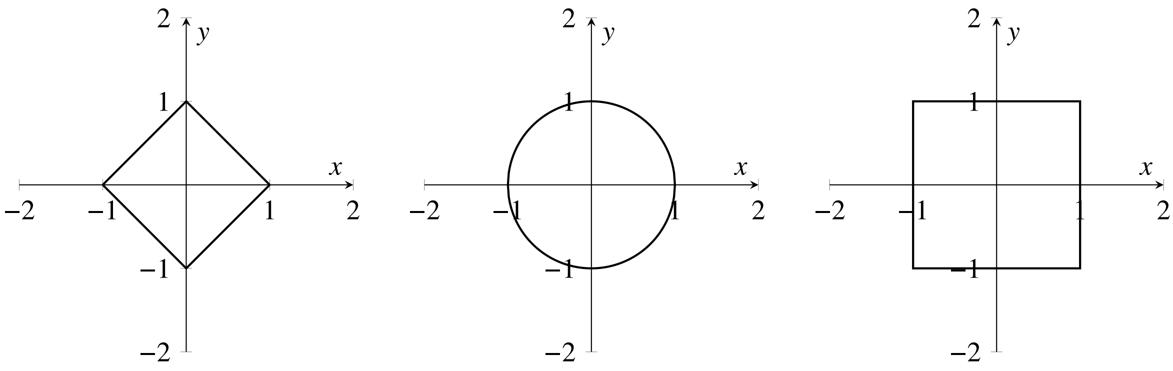
F-范数

$$||\boldsymbol{A}||_F = \sqrt{0.6^2 + 0.5^2 + 0.1^2 + 0.3^2} = 0.842615$$

20. **证明** **正定条件** $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}} = \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\| \geq 0$ 显然。因为 $\det \boldsymbol{P} \neq 0$，所以 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$。
齐次条件 $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}} = \|\boldsymbol{P}\alpha\boldsymbol{x}\| = \|\alpha\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\| = \alpha\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\| = \alpha\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}}, \forall\alpha \in \mathbf{R}$
三角不等式 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{P}} = \|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}} + \|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{P}}$
故 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上向量的一种范数。 ■

23. **解** 令 $\boldsymbol{x} = (x, y)$，

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\|_1 = 1 &\quad \Rightarrow |x| + |y| = 1 \\ \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1 &\quad \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1 &\quad \Rightarrow \max\{x, y\} = 1 \end{aligned}$$



(a) $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 1$ (b) $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$ (c) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1$

29. **证明**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & -1 \\ -\frac{1}{\lambda} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max\{|3\lambda|, 2\} \qquad \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \max\left\{\left|\frac{1}{\lambda}\right| + 1, \left|-\frac{1}{\lambda}\right| + 2\right\} = \left|\frac{1}{\lambda}\right| + 2$$

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_\infty = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \|\boldsymbol{A}\|_\infty = \left(\left|\frac{1}{\lambda}\right| + 2\right) \cdot \max\{|3\lambda|, 2\} = \begin{cases} \left(\left|\frac{1}{\lambda}\right| + 2\right) \cdot |3\lambda| = 3 + 6|\lambda|, & |\lambda| \geq \frac{2}{3}, \\ 2\left(\left|\frac{1}{\lambda}\right| + 2\right), & |\lambda| < \frac{2}{3} \end{cases}$$

三个分段分别单调，均在边界处取得最小值，即在 $\lambda = \pm\frac{2}{3}$ 处取得最小值 7。 ■

31. **解**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 19801 & 19602 \\ 19602 & 19405 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda E - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A}) = 0$$

$$\lambda_1 = 3.92 \times 10^4$$

$$\lambda_2 = 2.55 \times 10^{-5}$$

根据 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，$\lambda_1\lambda_2 = \det(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^2) = \det(\boldsymbol{A})^2 = (-1)^2 = 1$，故谱条件数：

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \sqrt{\lambda_1^2} = \lambda_1 = 3.92 \times 10^4 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -98 & 99 \\ 99 & -100 \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = 199 \qquad \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 199$$

则

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_\infty = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \|\boldsymbol{A}\|_\infty = 39601 \tag{11}$$

32. **证明** 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则

$$\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$$

则谱条件数

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A})}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{E})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{E})}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$$ ■