

# 计算方法复习

## 1 绪论

误差、有效数字、映射误差

## 2 方程求根

迭代法：收敛性（全局收敛： $C^1[a, b]$ 、 $R \subseteq I$ 、映射收缩  $|\phi'| < 1$ ；局部收敛： $C^1(x^*)$ 、 $|\phi'(x^*)| < 1$ ）、收敛速度（整数阶收敛， $\phi^{(p)}(x^*) \neq 0$ ，特殊  $0 \leq \phi'(x^*) < 1$ ）

Newton 迭代法、弦截法、割线法

## 3 方程组求解

直接法：顺序 Gauss 消元、列主元消元、Dolittle 分解（充要条件：能够通过顺序 Gauss 消元过程化为上三角阵，顺序主子式  $1 \sim n-1$  非零，LU，LDU）、误差分析（舍入误差）、向量范数、矩阵范数、条件数、谱半径

迭代法：Gauss-Seidel 迭代、Jacobi 迭代、收敛性（充分：严格对角占优，行（列）范数  $< 1$ ；充要：谱半径  $< 1$ ）、松弛迭代 \*（必要： $0 < \omega < 2$ ，对称正定阵时充要）、收敛速度（与谱半径有关）

## 4 插值与逼近

插值：Lagrange 插值、Newton 插值（ $\Rightarrow$  唯一）、插值余项、Runge 现象（可画图，解决方法：分段，分段三次 Hermite 插值 \*、分段三次样条 \*，余项）

逼近： $\|\cdot\|_2$  下的逼近（数据、函数下的逼近，投影，法方程）、函数的范数与内积、正交多项式（Legendre 多项式  $[-1, 1]$ ， $\rho(x) = 1$ ，Chebyshev 多项式  $[-1, 1]$ ， $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ，最多记到两阶，最佳平方逼近）

## 5 数值积分

插值型：等分节点（Newton-Cotes，梯形公式、Simpson 公式、复化梯形公式、复化 Simpson 公式、阶数、积分余项、加速）、不等分节点（代数精度、高斯型）

## 6 常微分方程数值解

Euler 公式、后退 Euler 公式、梯形公式、改进 Euler 公式、Euler 两步格式（5 个）

截断误差分析（Runge-Kutta\*、Taylor 展开）、稳定性分析（针对模型问题  $y' = \lambda y$ ， $\text{Re}(\lambda) < 0$ ）。

## 7 特征值

幂法（规范化）、反幂法（逆或 LU 解方程）

QR 分解（迭代法或 Gram-Schmidt 正交化（需要对角线都是正的）都可以，对称与否，分解出是否对角）