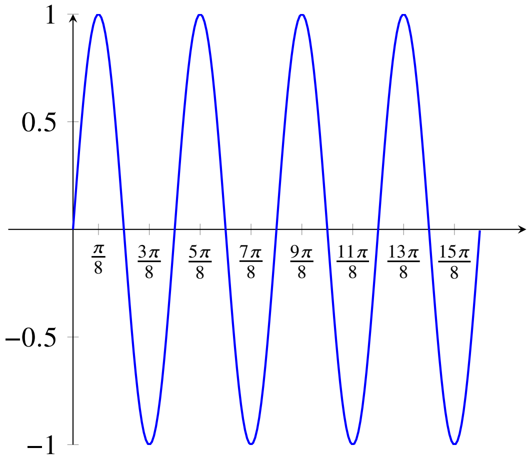
作业 6

Log Creative

2023 年 12 月 8 日

3. **解** 对于 $f(x) = \sin 4x$ 于 $[0, 2\pi]$ 而言，对于 $P(x) = 0$，有 Chebyshev 交错点组 $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$ 共 8 个点，则 $P(x) = 0$ 是 $f(x) = \sin 4x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的最佳一致逼近多项式，由于 $f(x) \in C[0, 2\pi]$，所以它是唯一的。



9. **解** 令 $t = 2x - 1$，则变量代换后，

$$g(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{t+1}{2}\right)^3 - 1 = \frac{t^4}{16} + \frac{5t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} + \frac{11t}{8} - \frac{9}{16}$$

根据 Chebyshev 多项式定理，当

$$g(t) - Q_3^*(t) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^3} T_4(t) = \frac{1}{2^7}(8t^4 - 8t^2 + 1)$$

时，与零偏差最小，故

$$Q_3^*(t) = \frac{5t^3}{8} + \frac{25t^2}{16} + \frac{11t}{8} - \frac{73}{128}$$

将 $t = 2x - 1$ 代回，有

$$P_3^*(x) = 5x^3 - \frac{5x^2}{4} + \frac{x}{4} - \frac{129}{128}$$

为 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 1$ 的最佳三次逼近多项式。

14. **解** (1) $(f, g) = \int_a^b f'(x)g'(x)\mathrm{d}x$ 不是内积，因为对于 $(f, f) \geq 0$，当 $f'(x) = c$，c 是常数时，等号依然满足。

(2) $(f, g) = \int_a^b f'(x)g'(x)\mathrm{d}x + f(a)g(a)$ 是内积，验证如下：

a. $(f,g)=(g,f)$:

$$(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)\mathrm{d}x+f(a)g(a)=\int_a^b g'(x)f'(x)\mathrm{d}x+g(a)f(a)=(g,f)$$

b. $(cf,g)=c(f,g)$，c 是常数:

$$\begin{aligned}(cf,g)&=\int_a^b (cf)'(x)g'(x)\mathrm{d}x+cf(a)g(a)\\&=\int_a^b cf'(x)g'(x)\mathrm{d}x+cf(a)g(a)\\&=c\left(\int_a^b f'(x)g'(x)\mathrm{d}x+f(a)g(a)\right)\\&=c(f,g)\end{aligned}$$

c. $(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$:

$$\begin{aligned}(f_1+f_2,g)&=\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))'g'(x)\mathrm{d}x+(f_1(a)+f_2(a))g(a)\\&=\int_a^b (f_1'(x)+f_2'(x))g'(x)\mathrm{d}x+(f_1(a)+f_2(a))g(a)\\&=\int_a^b f_1'(x)g'(x)\mathrm{d}x+f_1(a)g(a)+\int_a^b f_2'(x)g'(x)\mathrm{d}x+f_2(a)g(a)\\&=(f_1,g)+(f_2,g)\end{aligned}$$

d. $(f,f)\geq 0$，当且仅当 $f=0$ 时 $(f,f)=0$:

$$(f,f)=\int_a^b f'(x)f'(x)\mathrm{d}x+f(a)f(a)=\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x+(f(a))^2\geq 0$$

16. **解** (1)

$$\int_{-1}^{1}(x-ax^2)^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(a^2x^4-2ax^3+x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}a^2+\frac{2}{3}$$

$a=0$ 时取得最小值 $\frac{2}{3}$。

(2) 当 $a=0$ 时,

$$\int_{-1}^{1}|x-ax^2|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\mathrm{d}x=1$$

当 $0 < a \le 1$ 时，

$$\int_{-1}^{1} |x(1-ax)|\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (ax^2 - x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x - ax^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}a = 1$$

当 $a > 1$ 时，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |x(1-ax)|\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} (ax^2 - x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{a}} (x - ax^2)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{a}}^{1} (ax^2 - x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{3}a - \frac{1}{2} - \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{2a^2} \\ &= \frac{2a}{3} + \frac{1}{3a^2} = \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{1}{3a^2} > 1\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $\frac{a}{3} = \frac{1}{3a^2}$，即 $a = 1$，不在范围，所以等号取不到。

根据对称性可以知道，当 $-1 \le a < 0$ 时，$\int_{-1}^{1} |x - ax^2|\mathrm{d}x = 1$；当 $a < -1$ 时，$\int_{-1}^{1} |x - ax^2|\mathrm{d}x > 1$。

所以最小值是 1，最小值取在 $|a| \ge 1$。

17. **解**　(1) 对于 $\phi_1 = \mathrm{span}\{1, x\}$，考虑法方程

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

解得

$$a_0 = -\frac{1}{6}, \quad a_1 = 1$$

得到最佳平方逼近函数 $g_1(x) = -\frac{1}{6} + x$。误差为

$$\|g_1(x) - f(x)\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (g_1(x) - f(x))^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^1 \left(-\frac{1}{6} + x - x^2\right)^2 \mathrm{d}x} = 0.0745$$

(2) 对于 $\phi_2 = \mathrm{span}\{x^{100}, x^{101}\}$，考虑法方程

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{201} & \frac{1}{202} \\ \frac{1}{202} & \frac{1}{203} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{103} \\ \frac{1}{104} \end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2009799}{5356} \\ -\frac{1004647}{2678} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375.2425 \\ -375.1482 \end{pmatrix}$$

得到最佳平方逼近函数 $g_2(x) = 375.2425x^{100} - 375.1482x^{101}$。误差为

$$\|g_2(x) - f(x)\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (g_2(x) - f(x))^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^1 (375.2425x^{100} - 375.1482x^{101} - x^2)^2 \mathrm{d}x} = 0.4050$$

可见前者的误差更小。

22. **解** 令 $\phi_0 = 1, \phi_1 = x^2$，根据数据，

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8
$\phi_0(x_i)$	1	1	1	1	1
$\phi_1(x_i)$	361	625	961	1444	1936

对于 $g(x) = a + bx^2$，有法方程

$$\begin{pmatrix} (\phi_0, \phi_0) & (\phi_0, \phi_1) \\ (\phi_1, \phi_0) & (\phi_1, \phi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y, \phi_0) \\ (y, \phi_1) \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{pmatrix}$$

解得

$$a = 0.9726, \quad b = 0.05004$$

故最小二乘法函数为 $g(x) = 0.9726 + 0.05004x^2$，误差为

$$\|g(x) - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} (g(x_i) - y_i)^2} = 0.1226$$