



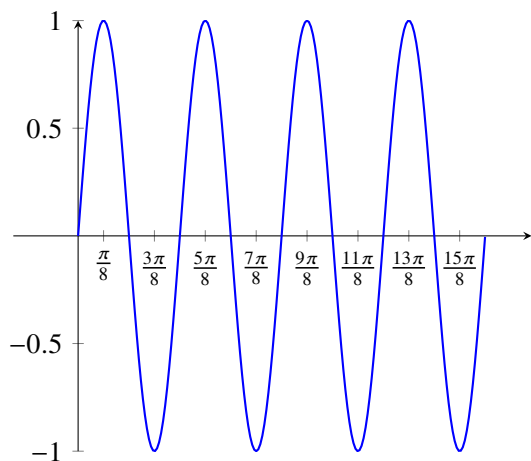
作业 6

李子龙

123033910195

2023 年 12 月 8 日

3. 解 对于 $f(x) = \sin 4x$ 于 $[0, 2\pi]$ 而言, 对于 $P(x) = 0$, 有 Chebyshev 交错点组 $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$ 共 8 个点, 则 $P(x) = 0$ 是 $f(x) = \sin 4x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的最佳一致逼近多项式, 由于 $f(x) \in C[0, 2\pi]$, 所以它是唯一的。



9. 解 令 $t = 2x - 1$, 则变量代换后,

$$g(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{t+1}{2}\right)^3 - 1 = \frac{t^4}{16} + \frac{5t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} + \frac{11t}{8} - \frac{9}{16}$$

根据 Chebyshev 多项式定理, 当

$$g(t) - Q_3^*(t) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^3} T_4(t) = \frac{1}{2^7} (8t^4 - 8t^2 + 1)$$

时, 与零偏差最小, 故

$$Q_3^*(t) = \frac{5t^3}{8} + \frac{25t^2}{16} + \frac{11t}{8} - \frac{73}{128}$$

将 $t = 2x - 1$ 代回, 有

$$P_3^*(x) = 5x^3 - \frac{5x^2}{4} + \frac{x}{4} - \frac{129}{128}$$

为 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 1$ 的最佳三次逼近多项式。

14. 解 (1) $(f, g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx$ 不是内积, 因为对于 $(f, f) \geq 0$, 当 $f'(x) = c$, c 是常数时, 等号依然满足。



(2) $(f, g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx + f(a)g(a)$ 是内积, 验证如下:

a. $(f, g) = (g, f)$:

$$(f, g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx + f(a)g(a) = \int_a^b g'(x)f'(x)dx + g(a)f(a) = (g, f)$$

b. $(cf, g) = c(f, g)$, c 是常数:

$$\begin{aligned}(cf, g) &= \int_a^b (cf)'(x)g'(x)dx + cf(a)g(a) \\&= \int_a^b cf'(x)g'(x)dx + cf(a)g(a) \\&= c \left(\int_a^b f'(x)g'(x)dx + f(a)g(a) \right) \\&= c(f, g)\end{aligned}$$

c. $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$:

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2, g) &= \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))'g'(x)dx + (f_1(a) + f_2(a))g(a) \\&= \int_a^b (f_1'(x) + f_2'(x))g'(x)dx + (f_1(a) + f_2(a))g(a) \\&= \int_a^b f_1'(x)g'(x)dx + f_1(a)g(a) + \int_a^b f_2'(x)g'(x)dx + f_2(a)g(a) \\&= (f_1, g) + (f_2, g)\end{aligned}$$

d. $(f, f) \geq 0$, 当且仅当 $f = 0$ 时 $(f, f) = 0$:

$$(f, f) = \int_a^b f'(x)f'(x)dx + f(a)f(a) = \int_a^b (f'(x))^2dx + (f(a))^2 \geq 0$$

16. 解 (1)

$$\int_{-1}^1 (x - ax^2)^2 dx = \int_{-1}^1 (a^2x^4 - 2ax^3 + x^2)dx = \frac{2}{5}a^2 + \frac{2}{3}$$

$a = 0$ 时取得最小值 $\frac{2}{3}$ 。

(2) 当 $a = 0$ 时,

$$\int_{-1}^1 |x - ax^2| dx = \int_{-1}^1 |x| dx = 2 \int_0^1 x dx = 1$$



当 $0 < a \leq 1$ 时,

$$\int_{-1}^1 |x(1-ax)|dx = \int_{-1}^0 (ax^2-x)dx + \int_0^1 (x-ax^2)dx = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}a = 1$$

当 $a > 1$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x(1-ax)|dx &= \int_{-1}^0 (ax^2-x)dx + \int_0^{\frac{1}{a}} (x-ax^2)dx + \int_{\frac{1}{a}}^1 (ax^2-x)dx \\ &= \frac{1}{3}a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{3}a - \frac{1}{2} - \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{2a^2} \\ &= \frac{2a}{3} + \frac{1}{3a^2} = \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{1}{3a^2} > 1 \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $\frac{a}{3} = \frac{1}{3a^2}$, 即 $a = 1$, 不在范围, 所以等号取不到。

根据对称性可以知道, 当 $-1 \leq a < 0$ 时, $\int_{-1}^1 |x-ax^2|dx = 1$; 当 $a < -1$ 时, $\int_{-1}^1 |x-ax^2|dx > 1$ 。

所以最小值是 1, 最小值取在 $|a| \geq 1$ 。

17. 解 (1) 对于 $\phi_1 = \text{span}\{1, x\}$, 考虑法方程

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

解得

$$a_0 = -\frac{1}{6}, \quad a_1 = 1$$

得到最佳平方逼近函数 $g_1(x) = -\frac{1}{6} + x$ 。误差为

$$\|g_1(x) - f(x)\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (g_1(x) - f(x))^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 \left(-\frac{1}{6} + x - x^2\right)^2 dx} = 0.0745$$

(2) 对于 $\phi_2 = \text{span}\{x^{100}, x^{101}\}$, 考虑法方程

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{201} & \frac{1}{202} \\ \frac{1}{202} & \frac{1}{203} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{103} \\ \frac{1}{104} \end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2009799}{5356} \\ -\frac{1004647}{2678} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375.2425 \\ -375.1482 \end{pmatrix}$$

得到最佳平方逼近函数 $g_2(x) = 375.2425x^{100} - 375.1482x^{101}$ 。误差为

$$\|g_2(x) - f(x)\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (g_2(x) - f(x))^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (375.2425x^{100} - 375.1482x^{101} - x^2)^2 dx} = 0.4050$$

可见前者的误差更小。

22. 解 令 $\phi_0 = 1, \phi_1 = x^2$, 根据数据,

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8
$\phi_0(x_i)$	1	1	1	1	1
$\phi_1(x_i)$	361	625	961	1444	1936

对于 $g(x) = a + bx^2$, 有法方程

$$\begin{pmatrix} (\phi_0, \phi_0) & (\phi_0, \phi_1) \\ (\phi_1, \phi_0) & (\phi_1, \phi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y, \phi_0) \\ (y, \phi_1) \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{pmatrix}$$

解得

$$a = 0.9726, \quad b = 0.05004$$

故最小二乘法函数为 $g(x) = 0.9726 + 0.05004x^2$, 误差为

$$\|g(x) - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^5 (g(x_i) - y_i)^2} = 0.1226$$