上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

作业 7

李子龙
123033910195

2023 年 12 月 19 日

1. **解** (1)

$$\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

根据 Simpson 公式，有

$$A_{-1} = \frac{h-(-h)}{6} = \frac{h}{3}$$
$$A_0 = \frac{2(h-(-h))}{3} = \frac{4h}{3}$$
$$A_1 = \frac{h-(-h)}{6} = \frac{h}{3}$$

Simpson 公式具有 3 阶代数精度。

(2)

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

设 $f(x) = 1, x, x^2$，有

$$\begin{cases} 4h = A_{-1} + A_0 + A_1 \\ 0 = A_{-1}(-h) + A_1 h \\ \dfrac{16}{3}h^3 = A_{-1}h^2 + A_1 h^2 \end{cases}$$

解得

$$A_{-1} = \frac{8}{3}h \quad A_0 = -\frac{4}{3}h \quad A_1 = \frac{8}{3}h$$

当 $f(x) = x^3$ 时，

$$\int_{-2h}^{2h} x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}[(2h)^4 - (-2h)^4] = 0 = A_{-1}(-h)^3 + A_1 h^3$$

当 $f(x) = x^4$ 时，

$$\int_{-2h}^{2h} x^4\mathrm{d}x = \frac{1}{5}[(2h)^5 - (-2h)^5] = \frac{64}{5}h^5 \neq A_{-1}(-h)^4 + A_1 h^4$$

所以它具有 3 阶代数精度。

(3)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)}{3}$$

对 $f(x)=1,x,x^2$ 均能准确成立，有

$$\begin{cases} 2 = \frac{1}{3}(1+2+3) \\ 0 = \frac{1}{3}(-1+2x_1+3x_2) \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(1+2x_1^2+3x_2^2) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{5} \\ x_2 = \frac{3+2\sqrt{6}}{15} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{6}}{5} \\ x_2 = \frac{3-2\sqrt{6}}{15} \end{cases}$$

当 $f(x)=x^3$ 时，

$$\frac{1}{3}(-1+2x_1^3+3x_2^3) \neq \int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x = 0$$

所以它具有 2 阶代数精度。

(4)

$$\int_{0}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+ah^2[f'(0)-f'(h)]$$

对于 $f(x)=1,x,x^2$ 而言均能准确成立，有

$$\begin{cases} h = h \\ \frac{1}{2}h^2 = \frac{h^2}{2} \\ \frac{1}{3}h^3 = \frac{h^3}{2} - 2ah^3 \end{cases}$$

解得

$$a = \frac{1}{12}$$

当 $f(x)=x^3,x^4$ 时，

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}h^4 &= \frac{1}{2}h^4 - 3ah^4 \\ \frac{1}{5}h^5 &\neq \frac{1}{2}h^5 - 4ah^5 \end{aligned}$$

故它具有 3 阶代数精度。

2. **解** (1) 使用复化梯形公式，

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)]$$

$n=8$，$x_k=\frac{k}{8}(k=0,1,\cdots,8)$，$h=\frac{1}{8}$

$$f(x_k)=\frac{k/8}{4+(k/8)^2}=\frac{8k}{256+k^2}$$

$$\int_0^1\frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{7}\frac{8k}{256+k^2}+\frac{1}{5}\right)=0.12703$$

使用复化 Simpson 公式，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]$$

$x_{k+\frac{1}{2}}=\frac{2k+1}{16}$，

$$f(x_{k+\frac{1}{2}})=\frac{16\times(2k+1)}{256\times 4+(2k+1)^2}=\frac{32k+16}{4k^2+4k+1025}$$

有

$$\int_0^1\frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{48}\left(\frac{1}{4}+4\sum_{k=0}^{7}\frac{32k+16}{4k^2+4k+1025}+2\sum_{k=1}^{7}\frac{8k}{256+k^2}+\frac{1}{5}\right)=0.11678$$