



作业 1

李子龙

123033910195

2023 年 9 月 22 日

1. 解：设 x^* 为误差值，则

$$\left| \frac{x - x^*}{x} \right| = \delta \Rightarrow \frac{x - x^*}{x} = \pm \delta$$

故 $\ln x$ 的误差

$$\begin{aligned} |\ln x - \ln x^*| &= |\ln x^* - \ln x| = \left| \ln \frac{x^*}{x} \right| = \left| \ln \frac{x^* - x + x}{x} \right| \\ &= \left| \ln \left(1 - \frac{x - x^*}{x} \right) \right| = |\ln(1 - (\pm\delta))| \end{aligned} \quad (1)$$

一般认为 δ 比较小，假设 $0 \leq \delta < 1$ ，则按照 Taylor 级数展开 (1)，并忽略 δ 的高阶项：

$$|\ln x - \ln x^*| = \left| -(\pm\delta) - \frac{(\pm\delta)^2}{2} - \dots - \frac{(\pm\delta)^n}{n} - \dots \right| = \delta$$

这就是 $\ln x$ 的误差。

2. 解：

$$e(x^{*n}) = |(x^{*n})'|e(x^*) = n|x^{*n-1}|2\% \cdot x^* = 2n\%|x^{*n}|$$

则相对误差

$$e_r(x^{*n}) = \frac{e(x^{*n})}{x^{*n}} = 2n\%$$

3. 解：

(1) $x_1^* = 1.1021$ 有 5 位有效数字。

(2) $x_2^* = 0.031$ 有 2 位有效数字。

(3) $x_3^* = 385.6$ 有 4 位有效数字。

(4) $x_4^* = 56.430$ 有 5 位有效数字。

(5) $x_5^* = 7 \times 1.0$ 有 2 位有效数字。

4. 解：

$$\varepsilon(x_1^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon(x_2^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon(x_3^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}$$

$$\varepsilon(x_4^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$(1) \varepsilon(x_1^* + x_2^* + x_4^*) = \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*) + \varepsilon(x_4^*) = 0.0105$$



(2)

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_1^* x_2^* x_3^*) &= |x_2^* x_3^*| \varepsilon(x_1^*) + |x_1^* x_3^*| \varepsilon(x_2^*) + |x_1^* x_2^*| \varepsilon(x_3^*) \\ &= 11.9536 \times \frac{1}{2} \times 10^{-4} + 424.96976 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} + 0.0341651 \times \frac{1}{2} \times 10^{-1} \\ &= 5.9768 \times 10^{-4} + 212.48488 \times 10^{-3} + 0.01708255 \times 10^{-1} \\ &= 0.214790815\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(\frac{x_2^*}{x_4^*}\right) &= \frac{|x_2^*| \varepsilon(x_4^*) + |x_4^*| \varepsilon(x_2^*)}{|x_4^*|^2} \\ &= \frac{0.0155 \times 10^{-3} + 28.215 \times 10^{-3}}{3184.3449} \\ &= 8.8654 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

5. 解：由球体积公式

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

可知，误差限

$$\begin{aligned}\varepsilon(V^*) &= \left| \left(\frac{4}{3} \pi R^{*3} \right)' \right| \varepsilon(R^*) \\ &= 4\pi R^{*2} \varepsilon(R^*)\end{aligned}$$

相对误差限

$$\varepsilon_r(V^*) = \frac{\varepsilon(V^*)}{|V^*|} = \frac{4\pi R^{*2} \varepsilon(R^*)}{\frac{4}{3} \pi R^{*3}} = 3 \frac{\varepsilon(R^*)}{R^*} = 3\varepsilon_r(R^*) = 1\%$$

可得度量半径 R 允许的相对误差限为

$$\varepsilon_r(R^*) = \frac{1}{300} \approx 0.00333$$

6. 解：根据递推公式可得

$$Y_{100} = Y_0 - 100 \times \left(\frac{1}{100} \sqrt{783} \right) = Y_0 - \sqrt{783}$$

代入 $\sqrt{783} \approx 27.982$,

$$Y_{100}^* = 28 - 27.982 = 0.018$$

$$\varepsilon(Y_{100}^*) = \varepsilon(Y_0) + \varepsilon(27.982) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

即 Y_{100}^* 的误差限为 $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$ 。

7. 解：方程 $x^2 - 56x + 1 = 0$ 的两个根为

$$x_{1,2} = \frac{56 \pm 2\sqrt{783}}{2} = 28 \pm \sqrt{783}$$

其中大根

$$x_1 = 28 + \sqrt{783} = 55.982$$

仍然有 5 位有效数字；而另一个根

$$x_2 = 28 - \sqrt{783} = 0.018$$

只有 2 位有效数字，所以进行分子有理化，

$$x_2 = \frac{1}{28 + \sqrt{783}} = \frac{1}{55.982} \approx 0.017863$$

所以原方程的两个根分别为 55.982 和 0.017863。

10. 证明： s 的绝对误差为

$$\varepsilon(s^*) = \left| \left(\frac{1}{2} g t^{*2} \right)' \right| \varepsilon(t^*) = g t^* \varepsilon(t^*)$$

由于 $\varepsilon(t^*) = 0.1s$ 是定值，也就意味着 t 越大， $\varepsilon(s^*)$ 越大。而 s 的相对误差为

$$\varepsilon_r(s^*) = \frac{\varepsilon(s^*)}{s^*} = \frac{g t^* \varepsilon(t^*)}{\frac{1}{2} g t^{*2}} = \frac{2\varepsilon(t^*)}{t^*}$$

会随着 t 的增大而减小。

12. 解：直接计算

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6} &\approx \frac{1}{2.4^6} = \frac{1}{191.102976} \approx 0.00523278 \\ (3-2\sqrt{2})^3 &\approx 0.2^3 = 0.008 \\ \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} &\approx \frac{1}{5.8^3} = \frac{1}{195.112} \approx 0.00512526 \\ 99-70\sqrt{2} &\approx 1 \end{aligned}$$

令 $x = \sqrt{2}$, $x^* = 1.4$, $\varepsilon(x^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}$, 误差分别为

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\frac{1}{(x^*+1)^6}\right) &= \left| \frac{-6}{(x^*+1)^7} \right| \varepsilon(x^*) \approx 0.01308\varepsilon(x^*) \\ \varepsilon((3-2x^*)^3) &= |-6(3-2x^*)^2| \varepsilon(x^*) = 0.24\varepsilon(x^*) \\ \varepsilon\left(\frac{1}{(3+2x^*)^3}\right) &= \left| \frac{-6}{(3+2x^*)^4} \right| \varepsilon(x^*) = 0.005302\varepsilon(x^*) \\ \varepsilon(99-70x^*) &= 70\varepsilon(x^*) \end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ 得到的结果最好。

13. 解：

$$f(30) = \ln(30 - \sqrt{30^2 - 1}) = \ln(30 - \sqrt{899}) \approx \ln(30 - 29.9833) = \ln(0.0167) \approx -4.09235$$

令 $x = \sqrt{899}$, $x^* = 29.9833$, $\varepsilon(x^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 则

$$\varepsilon(\ln(30 - x^*)) = \left| \frac{-1}{30 - x^*} \right| \varepsilon(x^*) = 59.8802\varepsilon(x^*) = 2.99401 \times 10^{-3}$$

采用另一等价公式计算

$$f(30) = -\ln(30 + \sqrt{30^2 - 1}) = -\ln(30 + \sqrt{899}) \approx -\ln(30 + 29.9833) = -\ln(59.9833) = -4.09407$$

此时误差

$$\varepsilon(-\ln(30 + x^*)) = \left| \frac{-1}{30 + x^*} \right| \varepsilon(x^*) = 0.01667 \varepsilon(x^*) = 8.335 \times 10^{-7}$$

可见误差变小了。

15. 证明：根据 $S = \frac{1}{2}ab \sin c$ 可得

$$\begin{aligned} |\Delta S| &= \left| \frac{1}{2}b \sin c \right| |\Delta a| + \left| \frac{1}{2}a \sin c \right| |\Delta b| + \left| \frac{1}{2}ab \cos c \right| |\Delta c| \\ \left| \frac{\Delta S}{S} \right| &= \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| + \left| \frac{\Delta c \cos c}{\sin c} \right| \\ &= \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| + \left| \frac{\Delta c}{\tan c} \right| \end{aligned}$$

由于 $c \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\tan c \geq c$, 故

$$\left| \frac{\Delta S}{S} \right| \leq \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| + \left| \frac{\Delta c}{c} \right|$$