作业 8

李子龙
123033910195

2024 年 1 月 3 日

1. **解**

$$\begin{cases} y' = ax + b \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Euler 方法:

$$y_{n+1} = y_n + h(ax_n + b)$$

取步长 $h = 0.1$，计算结果如表所示。

x_n	y_n	$y(x_n)$	x_n	y_n	$y(x_n)$
0.1	$0.1b$	$0.005a + 0.1b$	0.6	$0.15a + 0.6b$	$0.18a + 0.6b$
0.2	$0.01a + 0.2b$	$0.02a + 0.2b$	0.7	$0.21a + 0.7b$	$0.245a + 0.7b$
0.3	$0.03a + 0.3b$	$0.045a + 0.3b$	0.8	$0.28a + 0.8b$	$0.32a + 0.8b$
0.4	$0.06a + 0.4b$	$0.08a + 0.4b$	0.9	$0.36a + 0.9b$	$0.405a + 0.9b$
0.5	$0.1a + 0.5b$	$0.125a + 0.5b$	1.0	$0.45a + 1.0b$	$0.5a + 1.0b$

表达式为

$$y_n - y_0 = \sum_{k=0}^{n-1} h(ax_k + b) = \sum_{k=0}^{n-1} h(akh + b) = \sum_{k=0}^{n-1} akh^2 + bh = \frac{n(n-1)}{2}ah^2 + nbh$$

误差为

$$y(x_n) - y_n = \frac{1}{2}a(nh)^2 + b(nh) - \frac{n(n-1)}{2}ah^2 - nbh = \frac{1}{2}nah^2$$

改进 Euler 方法:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[ax_n + b + a(x_n + h) + b] = y_n + ahx_n + hb + \frac{1}{2}ah^2$$

取步长 $h = 0.1$，计算结果如表所示。
表达式为

$$y_n - y_0 = \sum_{k=0}^{n-1}\left(ahx_k + hb + \frac{1}{2}ah^2\right) = \frac{n(n-1)}{2}ah^2 + nbh + \frac{1}{2}ah^2n = \frac{1}{2}an^2h^2 + bnh$$

x_n	y_n	$y(x_n)$	x_n	y_n	$y(x_n)$
0.1	$0.005a+0.1b$	$0.005a+0.1b$	0.6	$0.18a+0.6b$	$0.18a+0.6b$
0.2	$0.02a+0.2b$	$0.02a+0.2b$	0.7	$0.245a+0.7b$	$0.245a+0.7b$
0.3	$0.045a+0.3b$	$0.045a+0.3b$	0.8	$0.32a+0.8b$	$0.32a+0.8b$
0.4	$0.08a+0.4b$	$0.08a+0.4b$	0.9	$0.405a+0.9b$	$0.405a+0.9b$
0.5	$0.125a+0.5b$	$0.125a+0.5b$	1.0	$0.5a+1.0b$	$0.5a+1.0b$

误差为

$$y(x_n) - y_n = 0$$

可见改进 Euler 方法的结果没有误差，Euler 方法在一次项系数上有一定误差。

2. **解**　改进 Euler 方法的表达式为

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[x_n + y_n + x_n + h + y_n + h(x_n + y_n)] \\ &= x_n\left(h + \frac{1}{2}h^2\right) + y_n\left(1 + h + \frac{1}{2}h^2\right) + \frac{1}{2}h^2 \end{aligned}$$

取 $h = 0.1$，有

$$y_{n+1} = 0.105x_n + 1.105y_n + 0.005$$

计算结果如表所示

x_n	y_n	$y(x_n)$	x_n	y_n	$y(x_n)$
0.1	1.1100	1.1103	0.6	2.0409	2.0442
0.2	1.2420	1.2428	0.7	2.3231	2.3275
0.3	1.3985	1.3997	0.8	2.6456	2.6511
0.4	1.5818	1.5836	0.9	3.0124	3.0192
0.5	1.7949	1.7974	1.0	3.4282	3.4366

与精确解比较后可知有 2 位小数精度。

4. **证明**　根据梯形计算格式，

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}[-y_n - y_{n+1}] \\ y_{n+1} &= \frac{2-h}{2+h}y_n \end{aligned}$$

根据此迭代公式，

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n y_0 = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

当 $h \to 0$ 时，$x = x_0 + nh = nh$，

$$y_n = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n = \lim_{h\to 0}\left(1 - \frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{h\to 0}\left(1 - \frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{2+h}{2h}\frac{2h}{2+h}\frac{x}{h}} = \lim_{h\to 0}\left[\left(1 - \frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{2+h}{2h}}\right]^{\frac{2}{2+h}x} = \mathrm{e}^{-x}$$

■

5. **解**　根据微积分基本定理，有

$$y = \int_0^x e^{t^2} dt \Rightarrow \begin{cases} y' = e^{x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

构造 Euler 格式，

$$y_{n+1} = y_n + he^{x_n^2}$$

取 $h = 0.5$，有

$$\begin{aligned} y(0.5) &= 0 + 0.5 \times e^{0^2} = 0.5 \\ y(1) &= 0.5 + 0.5 \times e^{0.5^2} = 1.1420 \\ y(1.5) &= 1.1420 + 0.5 \times e^{1^2} = 2.5011 \\ y(2) &= 2.5011 + 0.5 \times e^{1.5^2} = 7.2450 \end{aligned}$$

6. **解**　经典的四阶 Runge-Kutta 方法是

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases}$$

(1)

$$\begin{cases} y' = x + y, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解得

x_n	y_n
0.2	1.2428
0.4	1.5836
0.6	2.0442
0.8	2.6510
1.0	3.4365

(2)

$$\begin{cases} y' = 3y/(1 + x), \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解得

x_n	y_n
0.2	1.7275
0.4	2.7430
0.6	4.0942
0.8	5.8292
1.0	7.9960

7. **证明**

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + th, y_h + thK_1) \\ K_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hK_1) \end{cases}$$

根据 Taylor 格式，

$$\begin{aligned} K_1 &= f_n \\ K_2 &= f_n + th(f_x + f \cdot f_y)_n + \cdots \\ K_3 &= f_n + (1-t)h(f_x + f \cdot f_y)_n + \cdots \end{aligned}$$

代入第一个式子，

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}(f_x + f \cdot f_y)_n + \cdots$$

这与二阶 Taylor 格式的前两阶相同，所以误差是 $O(h^3)$，也就是它是二阶 Runge-Kutta 格式。■

8. **证明**　对于形如

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + ph, y_n + phK_1) \\ K_3 = f(x_n + qh, y_n + qh(rK_1 + sK_2)) \end{cases}$$

的格式，只要满足

$$\begin{cases} \lambda_2 p + \lambda_3 q = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 p^2 + \lambda_3 q^2 = \frac{1}{3} \\ \lambda_3 pqs = \frac{1}{6} \end{cases} \tag{1}$$

就是三阶 Runge-Kutta 格式。

(1)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(K_1 + 3K_3), \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}K_1\right), \\ K_3 = f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hK_2\right) \end{cases}$$

这里，

$$\lambda_1=\frac{1}{4},\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=\frac{3}{4},\quad p=\frac{1}{3},\quad q=\frac{2}{3},\quad r=0,\quad s=1$$

容易验证满足式 (1)。

(2)

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{9}(2K_1+3K_2+4K_3),\\ K_1=f(x_n,y_n),\\ K_2=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1\right),\\ K_3=f\left(x_n+\frac{3}{4}h,y_n+\frac{3}{4}hK_2\right)\end{cases}$$

这里，

$$\lambda_1=\frac{2}{9},\quad \lambda_2=\frac{1}{3},\quad \lambda_3=\frac{4}{9},\quad p=\frac{1}{2},\quad q=\frac{3}{4},\quad r=0,\quad s=1$$

容易验证满足式 (1)。 ■

12. **解** 令 $y_1=y,y_2=y'$，

(1)

$$\begin{cases} y_1'=y_2\\ y_2'=3y_2-2y\end{cases} \xrightarrow{z=y_2} \begin{cases} y'=z,y(0)=1\\ z'=3z-2y,z(0)=1\end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} y_1'=y_2\\ y_2'=0.1(1-y^2)y_2-y\end{cases} \xrightarrow{z=y_2} \begin{cases} y'=z,y(0)=1\\ z'=0.1(1-y^2)z-y,z(0)=0\end{cases}$$

(3) 令 $x_1=x,x_2=x',r=\sqrt{x^2+y^2}$，

$$\begin{cases} x_1'=x_2\\ x_2'=-\frac{x}{r^3}\\ y_1'=y_2\\ y_2'=-\frac{y}{r^3}\end{cases} \xrightarrow{u=x_2,z=y_2} \begin{cases} x'=u,x(0)=0.4\\ y'=z,y(0)=0\\ u'=-\frac{x}{r^3},u(0)=0\\ z'=-\frac{y}{r^3},z(0)=2\end{cases}$$

补充题. **解** 对于隐式中点公式，

$$y_{n+1}=y_n+hf\left(x_n+\frac{h}{2},\frac{1}{2}(y_n+y_{n+1})\right)$$

对于模型方程 $y'=\lambda y$，有

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}\lambda h(y_n+y_{n+1})$$

也就是

$$y_{n+1}=\frac{1+\frac{1}{2}\lambda h}{1-\frac{1}{2}\lambda h}y_n$$

则为了使其绝对稳定，需要满足

$$\left|\frac{1+\frac{1}{2}\lambda h}{1-\frac{1}{2}\lambda h}\right|\le 1$$