作业 7

李子龙
123033910195

2023 年 12 月 21 日

1. **解** (1)

$$\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

根据 Simpson 公式，有

$$A_{-1} = \frac{h-(-h)}{6} = \frac{h}{3}$$
$$A_0 = \frac{2(h-(-h))}{3} = \frac{4h}{3}$$
$$A_1 = \frac{h-(-h)}{6} = \frac{h}{3}$$

Simpson 公式具有 3 阶代数精度。

(2)

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

设 $f(x) = 1, x, x^2$，有

$$\begin{cases} 4h = A_{-1} + A_0 + A_1 \\ 0 = A_{-1}(-h) + A_1 h \\ \frac{16}{3}h^3 = A_{-1}h^2 + A_1 h^2 \end{cases}$$

解得

$$A_{-1} = \frac{8}{3}h \quad A_0 = -\frac{4}{3}h \quad A_1 = \frac{8}{3}h$$

当 $f(x) = x^3$ 时，

$$\int_{-2h}^{2h} x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}[(2h)^4 - (-2h)^4] = 0 = A_{-1}(-h)^3 + A_1 h^3$$

当 $f(x) = x^4$ 时，

$$\int_{-2h}^{2h} x^4\mathrm{d}x = \frac{1}{5}[(2h)^5 - (-2h)^5] = \frac{64}{5}h^5 \neq A_{-1}(-h)^4 + A_1 h^4$$

所以它具有 3 阶代数精度。

(3)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)}{3}$$

对 $f(x)=1,x,x^2$ 均能准确成立，有

$$\begin{cases} 2=\frac{1}{3}(1+2+3) \\ 0=\frac{1}{3}(-1+2x_1+3x_2) \\ \frac{2}{3}=\frac{1}{3}(1+2x_1^2+3x_2^2) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1=\frac{1-\sqrt{6}}{5} \\ x_2=\frac{3+2\sqrt{6}}{15} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_1=\frac{1+\sqrt{6}}{5} \\ x_2=\frac{3-2\sqrt{6}}{15} \end{cases}$$

当 $f(x)=x^3$ 时，

$$\frac{1}{3}(-1+2x_1^3+3x_2^3)\neq\int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x=0$$

所以它具有 2 阶代数精度。

(4)

$$\int_{0}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+ah^2[f'(0)-f'(h)]$$

对于 $f(x)=1,x,x^2$ 而言均能准确成立，有

$$\begin{cases} h=h \\ \frac{1}{2}h^2=\frac{h^2}{2} \\ \frac{1}{3}h^3=\frac{h^3}{2}-2ah^3 \end{cases}$$

解得

$$a=\frac{1}{12}$$

当 $f(x)=x^3,x^4$ 时，

$$\frac{1}{4}h^4=\frac{1}{2}h^4-3ah^4$$
$$\frac{1}{5}h^5\neq\frac{1}{2}h^5-4ah^5$$

故它具有 3 阶代数精度。

2. **解** (1) 使用复化梯形公式，

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)]$$

$n=8$，$x_k=\frac{k}{8}(k=0,1,\cdots,8)$，$h=\frac{1}{8}$

$$f(x_k)=\frac{k/8}{4+(k/8)^2}=\frac{8k}{256+k^2}$$

$$\int_0^1\frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{7}\frac{8k}{256+k^2}+\frac{1}{5}\right)=0.12703$$

使用复化 Simpson 公式，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]$$

$x_{k+\frac{1}{2}}=\frac{2k+1}{16}$，

$$f(x_{k+\frac{1}{2}})=\frac{16\times(2k+1)}{256\times4+(2k+1)^2}=\frac{32k+16}{4k^2+4k+1025}$$

有

$$\int_0^1\frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{48}\left(\frac{1}{4}+4\sum_{k=0}^{7}\frac{32k+16}{4k^2+4k+1025}+2\sum_{k=1}^{7}\frac{8k}{256+k^2}+\frac{1}{5}\right)=0.11678$$

4. **解** 使用 Simpson 公式，

$$S=\frac{1}{6}(1+4\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}+\frac{1}{\mathrm{e}})\approx0.63233$$

误差为

$$R_S=-\frac{1}{180}(\frac{1}{2})^4\mathrm{e}^{-\eta}=-\frac{1}{2880}\mathrm{e}^{-\eta}$$

其中 $\eta\in(0,1)$，故

$$|R_S|\le\frac{1}{2880}\approx3.47\times10^{-4}$$

5. **解** 根据插值型求积公式的余项，

$$I_n=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x$$

$$R[f]=I-I_n=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\mathrm{d}x$$

有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^b 1\mathrm{d}x+\int_a^b f'(\eta)(x-a)\mathrm{d}x=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_a^b 1\mathrm{d}x+\int_a^b f'(\eta)(x-b)\mathrm{d}x=(b-a)f(b)-\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

根据泰勒展开式和积分中值定理，$(x-\frac{a+b}{2})^2$ 在 $x\in(a,b)$ 上不变号，有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}x \\ &= \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)x+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{f''(\eta)}{6}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]\Bigg|_a^b \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3\end{aligned}$$

7. **解**　复化梯形公式的积分余项为

$$R=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)$$

令 $M=\max_{x\in(a,b)} f''(x)$，则

$$|R|\le\frac{b-a}{12}h^2M\le\epsilon$$

则

$$h=\frac{b-a}{n}\le\sqrt{\frac{12\epsilon}{(b-a)M}}$$

即

$$n\ge\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{(b-a)M}{3\epsilon}}$$

8. **解**　梯形值递推公式

$$T_0^{(k+1)}=\frac{1}{2}T_0^{(k)}+\frac{h^{(k+1)}}{2}\sum_{i=0}^{2^k-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

以及外推方法

$$T_m^{(k)}=T_{m-1}^{(k+1)}+\frac{1}{4^m-1}(T_{m-1}^{(k+1)}-T_{m-1}^{(k)})$$

对 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 求 Romberg 积分：

k	h	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	1	0.7717433			
1	$\frac{1}{2}$	0.7280699	0.7135122		
2	$\frac{1}{4}$	0.7169828	0.7132870	0.7132720	
3	$\frac{1}{8}$	0.7142002	0.7132726	0.7132717	0.7132717

可得 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\approx0.7132717$。

10. **证明**　由于泰勒展开式，

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

故

$$n\sin\frac{\pi}{n}=n(\frac{\pi}{n}-\frac{\pi^3}{3!n^3}+\frac{\pi^5}{5!n^5}-\cdots)=\pi-\frac{\pi^3}{3!n^2}+\frac{\pi^5}{5!n^4}-\cdots$$

对于 $f(n)=n\sin\frac{\pi}{n}$，考虑到 Richardson 外推加速方法

$$f_m(2n)=\frac{4^m}{4^m-1}f_{m-1}(n)-\frac{1}{4^m-1}f_{m-1}(2n)$$

有

n	$f_0(n)$	$f_1(n)$	$f_2(n)$
3	2.598076		
6	3.000000	3.133975	
12	3.105829	3.141105	3.141580

得到 $\pi\approx 3.141580$。 ■

11. **解** (1) 使用 Romberg 法得到 $\int_1^3\frac{\mathrm{d}y}{y}\approx 1.098612$。

k	h	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$T_5^{(k)}$
0	2	1.333333					
1	1	1.166667	1.111111				
2	$\frac{1}{2}$	1.116667	1.100000	1.099259			
3	$\frac{1}{4}$	1.103211	1.098725	1.098640	1.098631		
4	$\frac{1}{8}$	1.099768	1.098620	1.098613	1.098613	1.098613	
5	$\frac{1}{16}$	1.098902	1.098613	1.098612	1.098612	1.098612	1.098612

(2) 使用变换 $y=x+2$，有

$$\int_1^3\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x+2}$$

令 $f(x)=\frac{1}{x+2}$，使用三点 Guass–Legendre 公式，有

$$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x+2}\approx\frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)=\frac{56}{51}\approx 1.098039$$

使用五点 Guass–Legendre 公式，查表 4.5 有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x+2}\approx&0.2369269f(-0.9061793)+0.2369269f(0.9061793)\\&+0.4786287f(-0.5384693)+0.4786287f(0.5384693)+0.5688889f(0)\\\approx&1.098609\end{aligned}$$

(3) 区间等分 4 等份，[1, 1.5], [1.5, 2], [2, 2.5], [2.5, 3]，复化两点 Guass 公式

$$\int_{1}^{1.5}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{5}{4}}+\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{5}{4}}\right)=0.40540541$$

$$\int_{1.5}^{2}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{7}{4}}+\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{7}{4}}\right)=0.28767123$$

$$\int_{2}^{2.5}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{9}{4}}+\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{9}{4}}\right)=0.22314050$$

$$\int_{2.5}^{3}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{11}{4}}+\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{11}{4}}\right)=0.18232044$$

故

$$\int_{1}^{3}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int_{1}^{1.5}\frac{\mathrm{d}y}{y}+\int_{1.5}^{2}\frac{\mathrm{d}y}{y}+\int_{2}^{2.5}\frac{\mathrm{d}y}{y}+\int_{2.5}^{3}\frac{\mathrm{d}y}{y}=1.098538$$

真实值为

$$\int_{1}^{3}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\ln(y)\Big|_{1}^{3}=1.098612$$

可以看到 Romberg 法结果误差最小。

补充 1. **解** 权函数 $\frac{1}{\sqrt{x}}$，设正交多项式零点为 x_0 和 x_1，有正交多项式 $w(x)=(x-x_0)(x-x_1)=x^2+bx+c$ 满足与 1 和 x 的带权正交

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}w(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x^{\frac{3}{2}}+bx^{\frac{1}{2}}+cx^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b+2c=0$$

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}xw(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x^{\frac{5}{2}}+bx^{\frac{3}{2}}+cx^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{7}+\frac{2}{5}b+\frac{2}{3}c=0$$

解得

$$b=-\frac{7}{6}\quad c=\frac{3}{35}$$

故 $w(x)=x^2-\frac{7}{6}x+\frac{3}{35}=0$ 解得

$$x_0=\frac{1}{7}\left(3-2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=0.115587\quad x_1=\frac{1}{7}\left(3+2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=0.741556$$

考虑

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

对 $f(x) = 1, x$ 都准确成立，有

$$\begin{aligned} 2 &= A_0 + A_1 \\ \frac{2}{3} &= A_0 x_0 + A_1 x_1 \end{aligned}$$

解得

$$A_0 = \frac{2 - 6x_1}{3x_0 - 3x_1} = 1.304290 \quad A_1 = \frac{6x_0 - 2}{3x_0 - 3x_1} = 0.695710$$

所以构造出的 Guass 积分公式为

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\mathrm{d}x \approx 1.304290 f(0.115587) + 0.695710 f(0.741556)$$

补充 2. **解** (1) 由于是等分节点，所以三点插值型积分公式即 Simpson 公式，

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x_4 - x_0}{6}[f(x_0) + 4f(x_2) + f(x_4)] \\ &= \frac{1.4 - 1.0}{6} \times [0.2500 + 4 \times 0.2066 + 0.1736] \\ &= 0.0833333 \end{aligned}$$

五点插值型积分公式即 Cotes 公式，

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x_4 - x_0}{90}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] \\ &= \frac{1.4 - 1.0}{90} \times [7 \times 0.2500 + 32 \times 0.2268 + 12 \times 0.2066 + 32 \times 0.1890 + 7 \times 0.1736] \\ &= 0.0833333 \end{aligned}$$

(2) 复化梯形公式求解，

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{0.1}{2}[f(1.0) + 2f(1.1) + 2f(1.2) + 2f(1.3) + f(1.4)] \\ &= \frac{0.1}{2} \times (0.2500 + 2 \times 0.2268 + 2 \times 0.2066 + 2 \times 0.1890 + 0.1736) \\ &= 0.0834200 \end{aligned}$$

(3) 使用复化 Simpson 公式求解，

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{0.2}{6}[f(1.0) + 4f(1.1) + f(1.2) + f(1.2) + 4f(1.3) + f(1.4)] \\ &= \frac{0.2}{6} \times [0.2500 + 4 \times 0.2268 + 2 \times 0.2066 + 4 \times 0.1890 + 0.1736] \\ &= 0.0833333 \end{aligned}$$