作业 1

Log Creative

2023 年 9 月 22 日

1. 解：设 x^* 为误差值，则

$$\left|\frac{x-x^*}{x}\right| = \delta \Rightarrow \frac{x-x^*}{x} = \pm\delta$$

故 $\ln x$ 的误差

$$\begin{aligned}|\ln x - \ln x^*| &= |\ln x^* - \ln x| = \left|\ln\frac{x^*}{x}\right| = \left|\ln\frac{x^*-x+x}{x}\right| \\ &= \left|\ln\left(1-\frac{x-x^*}{x}\right)\right| = |\ln(1-(\pm\delta))|\end{aligned} \tag{1}$$

一般认为 δ 比较小，假设 $0 \le \delta < 1$，则按照 Taylor 级数展开 (1)，并忽略 δ 的高阶项：

$$|\ln x - \ln x^*| = \left|-(\pm\delta) - \frac{(\pm\delta)^2}{2} - \cdots - \frac{(\pm\delta)^n}{n} - \cdots\right| = \delta$$

这就是 $\ln x$ 的误差。

2. 解：

$$e(x^{*n}) = |(x^{*n})'|e(x^*) = n|x^{*n-1}|2\% \cdot x^* = 2n\%|x^{*n}|$$

则相对误差

$$e_r(x^{*n}) = \frac{e(x^{*n})}{x^{*n}} = 2n\%$$

3. 解：
   (1) $x_1^* = 1.1021$ 有 5 位有效数字。
   (2) $x_2^* = 0.031$ 有 2 位有效数字。
   (3) $x_3^* = 385.6$ 有 4 位有效数字。
   (4) $x_4^* = 56.430$ 有 5 位有效数字。
   (5) $x_5^* = 7 \times 1.0$ 有 2 位有效数字。

4. 解：

$$\varepsilon(x_1^*) = \frac{1}{2}\times 10^{-4} \qquad \varepsilon(x_2^*) = \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$
$$\varepsilon(x_3^*) = \frac{1}{2}\times 10^{-1} \qquad \varepsilon(x_4^*) = \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

   (1) $\varepsilon(x_1^*+x_2^*+x_4^*) = \varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)+\varepsilon(x_4^*) = 0.0105$

(2)

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_1^*x_2^*x_3^*) &= \left|x_2^*x_3^*\right|\varepsilon(x_1^*) + \left|x_1^*x_3^*\right|\varepsilon(x_2^*) + \left|x_1^*x_2^*\right|\varepsilon(x_3^*) \\ &= 11.9536 \times \frac{1}{2} \times 10^{-4} + 424.96976 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} + 0.0341651 \times \frac{1}{2} \times 10^{-1} \\ &= 5.9768 \times 10^{-4} + 212.48488 \times 10^{-3} + 0.01708255 \times 10^{-1} \\ &= 0.214790815\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(\frac{x_2^*}{x_4^*}\right) &= \frac{|x_2^*|\varepsilon(x_4^*) + |x_4^*|\varepsilon(x_2^*)}{|x_4^*|^2} \\ &= \frac{0.0155 \times 10^{-3} + 28.215 \times 10^{-3}}{3184.3449} \\ &= 8.8654 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

5. 解：由球体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

可知，误差限

$$\begin{aligned}\varepsilon(V^*) &= \left|\left(\frac{4}{3}\pi R^{*3}\right)'\right|\varepsilon(R^*) \\ &= 4\pi R^{*2}\varepsilon(R^*)\end{aligned}$$

相对误差限

$$\varepsilon_r(V^*) = \frac{\varepsilon(V^*)}{|V^*|} = \frac{4\pi R^{*2}\varepsilon(R^*)}{\frac{4}{3}\pi R^{*3}} = 3\frac{\varepsilon(R^*)}{R^*} = 3\varepsilon_r(R^*) = 1\%$$

可得度量半径 R 允许的相对误差限为

$$\varepsilon_r(R^*) = \frac{1}{300} \approx 0.00333$$

6. 解：根据递推公式可得

$$Y_{100} = Y_0 - 100 \times \left(\frac{1}{100}\sqrt{783}\right) = Y_0 - \sqrt{783}$$

代入 $\sqrt{783} \approx 27.982$,

$$Y_{100}^* = 28 - 27.982 = 0.018$$

$$\varepsilon(Y_{100}^*) = \varepsilon(Y_0) + \varepsilon(27.982) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

即 Y_{100}^* 的误差限为 $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$。

7. 解：方程 $x^2 - 56x + 1 = 0$ 的两个根为

$$x_{1,2} = \frac{56 \pm 2\sqrt{783}}{2} = 28 \pm \sqrt{783}$$

其中大根

$$x_1 = 28 + \sqrt{783} = 55.982$$

仍然有 5 位有效数字；而另一个根

$$x_2 = 28 - \sqrt{783} = 0.018$$

只有 2 位有效数字，所以进行分子有理化，

$$x_2 = \frac{1}{28 + \sqrt{783}} = \frac{1}{55.982} \approx 0.017863$$

所以原方程的两个根分别为 55.982 和 0.017863。

10. 证明：s 的绝对误差为

$$\varepsilon(s^*) = \left| \left(\frac{1}{2} g t^{*2} \right)' \right| \varepsilon(t^*) = g t^* \varepsilon(t^*)$$

由于 $\varepsilon(t^*) = 0.1\text{s}$ 是定值，也就意味着 t 越大，$\varepsilon(s^*)$ 越大。而 s 的相对误差为

$$\varepsilon_r(s^*) = \frac{\varepsilon(s^*)}{s^*} = \frac{g t^* \varepsilon(t^*)}{\frac{1}{2} g t^{*2}} = \frac{2\varepsilon(t^*)}{t^*}$$

会随着 t 的增大而减小。

12. 解：直接计算

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6} \approx \frac{1}{2.4^6} = \frac{1}{191.102976} \approx 0.00523278 \\
&(3-2\sqrt{2})^3 \approx 0.2^3 = 0.008 \\
&\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} \approx \frac{1}{5.8^3} = \frac{1}{195.112} \approx 0.00512526 \\
&99 - 70\sqrt{2} \approx 1
\end{aligned}$$

令 $x = \sqrt{2}$，$x^* = 1.4$，$\varepsilon(x^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}$，误差分别为

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\left(\frac{1}{(x^*+1)^6}\right) = \left|\frac{-6}{(x^*+1)^7}\right| \varepsilon(x^*) \approx 0.01308\varepsilon(x^*) \\
&\varepsilon\left((3-2x^*)^3\right) = \left|-6(3-2x^*)^2\right| \varepsilon(x^*) = 0.24\varepsilon(x^*) \\
&\varepsilon\left(\frac{1}{(3+2x^*)^3}\right) = \left|\frac{-6}{(3+2x^*)^4}\right| \varepsilon(x^*) = 0.005302\varepsilon(x^*) \\
&\varepsilon(99-70x^*) = 70\varepsilon(x^*)
\end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ 得到的结果最好。

13. 解：

$$f(30) = \ln(30 - \sqrt{30^2 - 1}) = \ln(30 - \sqrt{899}) \approx \ln(30 - 29.9833) = \ln(0.0167) \approx -4.09235$$

令 $x = \sqrt{899}$，$x^* = 29.9833$，$\varepsilon(x^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$，则

$$\varepsilon(\ln(30 - x^*)) = \left|\frac{-1}{30 - x^*}\right| \varepsilon(x^*) = 59.8802\varepsilon(x^*) = 2.99401 \times 10^{-3}$$

采用另一等价公式计算

$$f(30) = -\ln(30+\sqrt{30^2-1}) = -\ln(30+\sqrt{899}) \approx -\ln(30+29.9833) = -\ln(59.9833) = -4.09407$$

此时误差

$$\varepsilon(-\ln(30+x^*)) = \left|\frac{-1}{30+x^*}\right|\varepsilon(x^*) = 0.01667\varepsilon(x^*) = 8.335\times 10^{-7}$$

可见误差变小了。

15. 证明：根据 $S=\frac{1}{2}ab\sin c$ 可得

$$\begin{aligned}
|\Delta S| &= \left|\frac{1}{2}b\sin c\right||\Delta a| + \left|\frac{1}{2}a\sin c\right||\Delta b| + \left|\frac{1}{2}ab\cos c\right||\Delta c| \\
\left|\frac{\Delta S}{S}\right| &= \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\frac{\Delta c\cos c}{\sin c}\right| \\
&= \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\frac{\Delta c}{\tan c}\right|
\end{aligned}$$

由于 $c\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\tan c \geq c$，故

$$\left|\frac{\Delta S}{S}\right| \leq \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\frac{\Delta c}{c}\right|$$