
# 基于网格的 NM 不等式约束优化算法

汇报人：侯力广

2023.12

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

# 引言

Nelder-Mead 算法（NM）

- 无约束优化问题
- 可能不收敛

网格自适应直接搜索算法（Mads）

- 不等式约束优化问题
- 具备收敛性

基于网格的NM算法（Mads-NM）

- 不等式约束优化问题
- 具备收敛性
- 优化效果提升

# 目录

# NM-基本概念

上海交通大學 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

对于无约束优化问题 $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$,

- ♠ $x, y \in \mathbb{R}^n$，若 $f(x) < f(y)$，称 $x$ 控制 $y$，记作 $x \prec y$.

- ♠ $\mathrm{Older}(x, y) = \begin{cases} x & \text{若} x \text{ 在} y \text{ 之前生成} \\ y & \text{其他} \end{cases}$

- ♠ $\mathrm{Best}(x, y) = \begin{cases} x & \text{若} x \prec y \\ y & \text{若} y \prec x \\ \mathrm{Older}(x, y) & \text{若} f(x) = f(y) \end{cases}$

# NM-基本概念

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

$\mathbb{Y} = \{y^0, y^1, \cdots, y^n\}$ 是 $\mathrm{R}^n$ 中的一个有序单纯形

$x^c = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y^i$ 中心

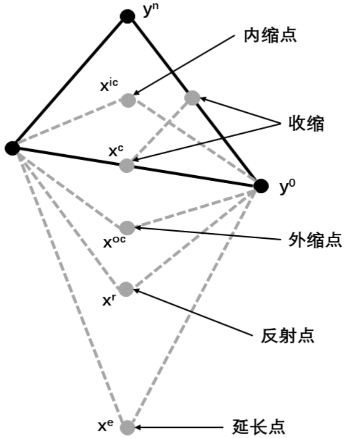
$x^r = x^c + (x^c - y^n)$ 反射点

$x^e = x^c + 2(x^c - y^n)$ 延长点

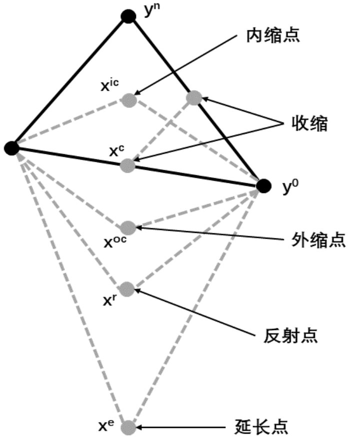
$x^{oc} = x^c + \frac{1}{2}(x^c - y^n)$ 外缩点

$x^{ic} = x^c - \frac{1}{2}(x^c - y^n)$ 内缩点

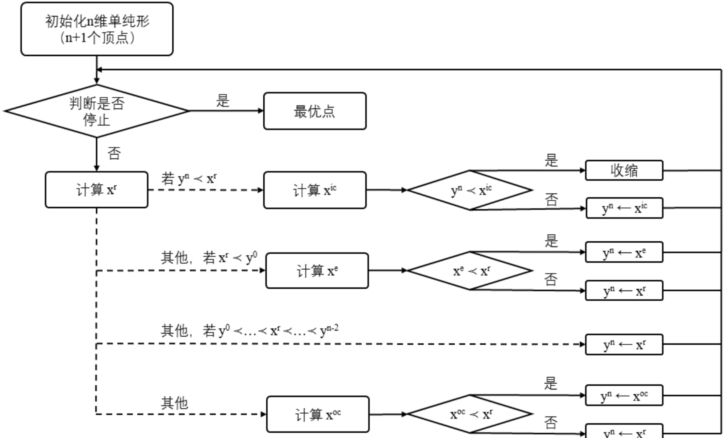
$\gamma = \frac{1}{2}$ 收缩参数



# NM-算法思路



$y^n$
内缩点
$x^{ic}$
收缩
$x^c$
$y^0$
$x^{oc}$
外缩点
$x^r$
反射点
$x^e$
延长点

初始化n维单纯形（n+1个顶点）
判断是否停止
是
最优点
否
计算 $x^r$
若 $y^n \prec x^r$
计算 $x^{ic}$
$y^n \prec x^{ic}$
是
收缩
否
$y^n \leftarrow x^{ic}$
其他，若 $x^r \prec y^0$
计算 $x^e$
$x^e \prec x^r$
是
$y^n \leftarrow x^e$
否
$y^n \leftarrow x^r$
其他，若 $y^0 \prec \ldots \prec x^r \prec \ldots \prec y^{n-2}$
$y^n \leftarrow x^r$
其他
计算 $x^{oc}$
$x^{oc} \prec x^r$
是
$y^n \leftarrow x^{oc}$
否
$y^n \leftarrow x^r$

# Mads-基本概念



对于不等式约束优化问题 $\begin{array}{l} \min\limits_{x \in X \subset \mathrm{R}^n} f(x) \\ s.t. \quad c(x) \leq 0 \end{array},$

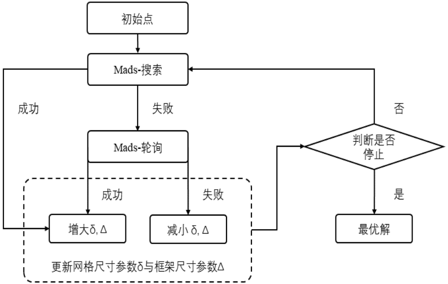
- ♠ $f : X \mapsto \mathrm{R} \cup \infty$ 且 $c : X \mapsto (\mathrm{R} \cup \infty)^m$
- ♠ 渐进障碍法 (PB) 通过违约函数寻找可行域内最优点

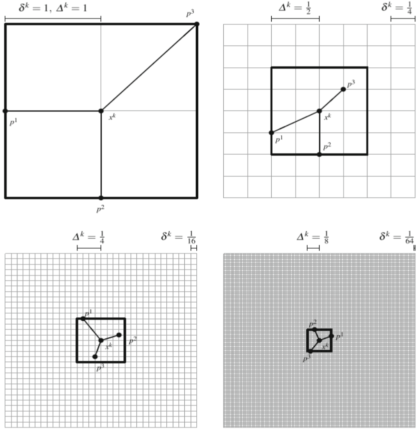
$$h(x) = \begin{cases} \sum_{j \in J} (\max\{c_j(x), 0\})^2 & \text{若} x \in X \\ \infty & \text{其他} \end{cases}$$

# Mads-基本概念

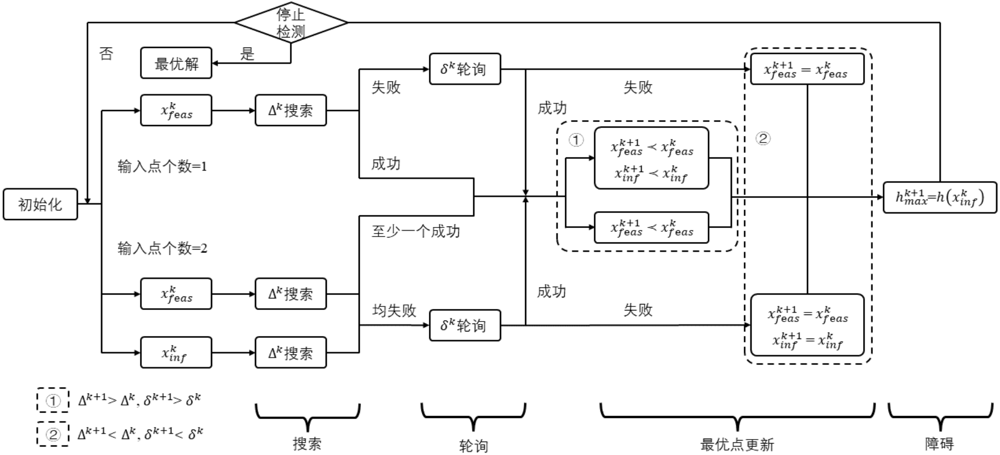
上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

Mads 的核心步骤为：搜索-轮询



# Mads-算法思路



停止检测
否
是
最优解
$x^k_{feas}$
$\Delta^k$搜索
$\delta^k$轮询
失败
成功
输入点个数=1
输入点个数=2
初始化
至少一个成功
均失败
$x^k_{inf}$
①
②
$x^{k+1}_{feas} \prec x^k_{feas}$
$x^{k+1}_{inf} \prec x^k_{inf}$
$x^{k+1}_{feas} = x^k_{feas}$
$x^{k+1}_{inf} = x^k_{inf}$
$h^{k+1}_{max}=h(x^k_{inf})$
① $\Delta^{k+1}> \Delta^k, \delta^{k+1}> \delta^k$
② $\Delta^{k+1}< \Delta^k, \delta^{k+1}< \delta^k$
搜索
轮询
最优点更新
障碍

# Mads-收敛性分析

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

如果测试点序列属于一个有界集，且更新方向集合足够丰富，则存在一个聚点 $x^*$:

- 若 $x^*$ 可行，则 $x^*$ 在可行域 $\Omega$ 的每个超切线方向 $d$ 上，广义 Clarke 方向导数 $f^o(x^*; d)$ 是非负的；
- 若 $x^*$ 不可行，则 $x^*$ 在集合 $X$ 的每个超切线方向 $d$ 上，广义 Clarke 方向导数 $h^o(x^*; d)$ 是非负的。

# Mads-NM-基本概念

对于不等式约束优化问题，

- $x$ 控制 $y$，记作 $x \prec y$，如果
  - $x, y$ 均可行，且 $f(x) < f(y)$；或
  - $x, y$ 均不可行，且 $f(x) \leq f(y), h(x) \leq h(y)$

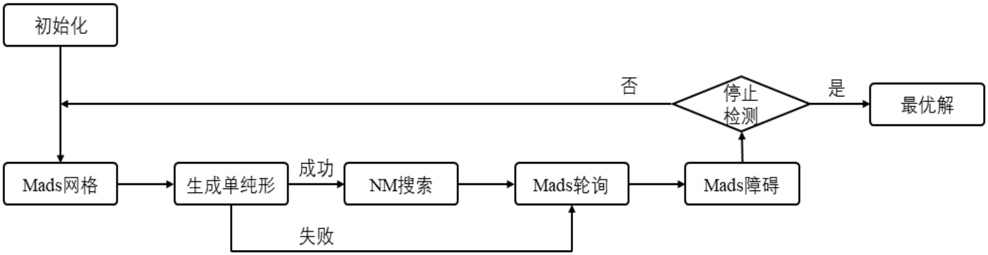
  且两不等式中至少一个满足严格不等号

- $$\text{Best}(x,y) = \begin{cases} x & 若 x \prec y 或 h(x) < h(y) \\ y & 若 y \prec x 或 h(y) < h(x) \\ \text{Older}(x,y) & 若 f(x) = f(y) 且 h(x) = h(y) \end{cases}$$

# Mads-NM-基本概念

$$
\begin{aligned}
x_{\oplus}^{r} &\quad \text{反射点}x^{r}\text{舍入的网格点} \\
x_{\oplus}^{e} &\quad \text{延长点}x^{e}\text{舍入的网格点} \\
x_{\oplus}^{oc} &\quad \text{外缩点}x^{oc}\text{舍入的网格点} \\
x_{\oplus}^{ic} &\quad \text{内缩点}x^{ic}\text{舍入的网格点} \\
\mathbb{Y}^{0} &= \{y \in \mathbb{Y} : \nexists x \in \mathbb{Y}, x \prec y\} \\
\mathbb{Y}^{n} &= \{y \in \mathbb{Y} : \nexists x \in \mathbb{Y}, y \prec x\}
\end{aligned}
$$

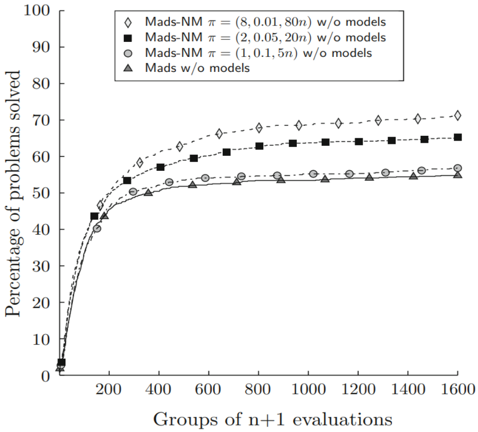
# Mads-NM-算法思路



# 调参实验

调参实验得到参数：

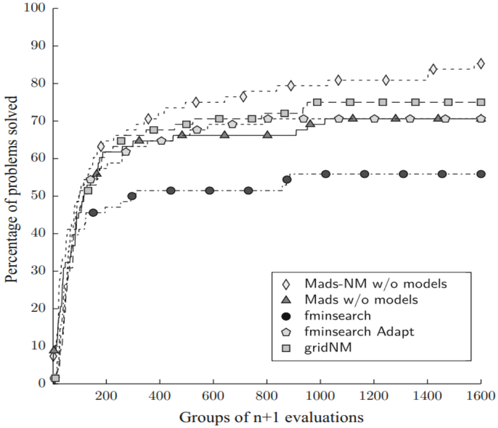
$$\pi = (\pi_{svd}, \pi_{eval}, \pi_{radius}) = (0.01, 80n, 8)$$



# 无约束问题与 NM 的比较

上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

**Fig. 4** Data profiles using Mads-NM, Mads, fminsearch, fminsearch Adapt, and gridNM with a convergence tolerance of $\tau = 10^{-5}$ on one replication of 68 test problems without constraints other than bounds



# 有约束问题与 Mads 的比较——LOCKWOOD

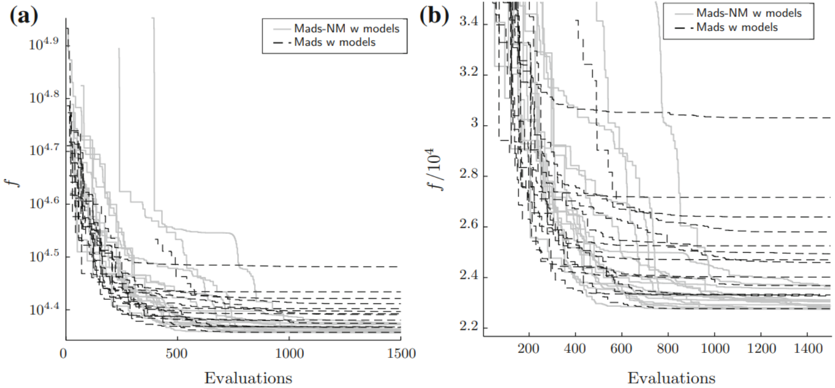



**Fig. 5** Optimization history on 20 LOCKWOOD problems (right plot is a zoom on low objective values)

# 有约束问题与 Mads 的比较——LOCKWOOD

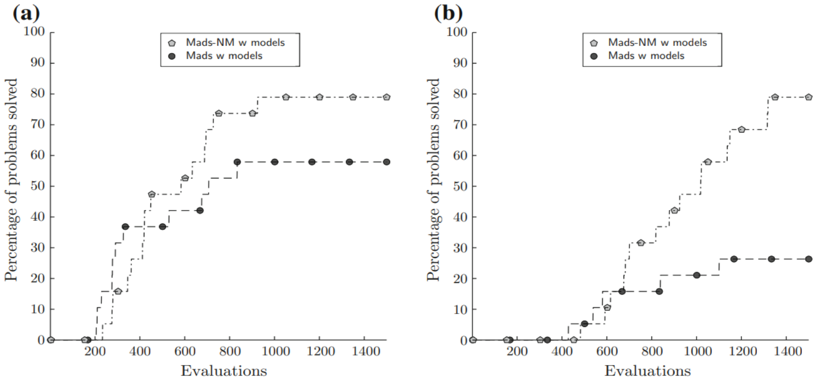
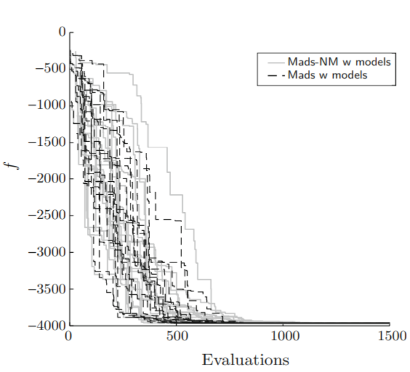



**Fig. 6** Data profiles obtained with convergence tolerance $\tau$ on 20 LOCKWOOD problems. **a** $\tau = 10^{-1}$ and **b** $\tau = 10^{-2}$

# 有约束问题与 Mads 的比较——MDO



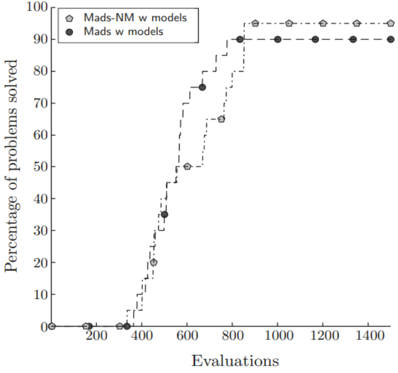
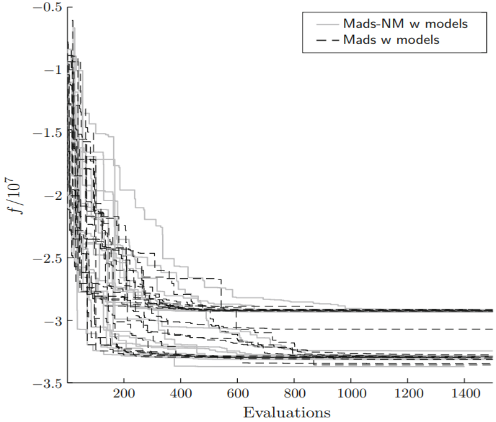



**Fig. 7** Mads and Mads-NM with quadratic models on 20 MDO problems. **a** Optimization history and **b** Data profiles with $\tau = 10^{-2}$

# 有约束问题与 Mads 的比较——STYRENE

**Fig. 8** Optimization history on 20 STYRENE problems



# 有约束问题与 Mads 的比较——STYRENE

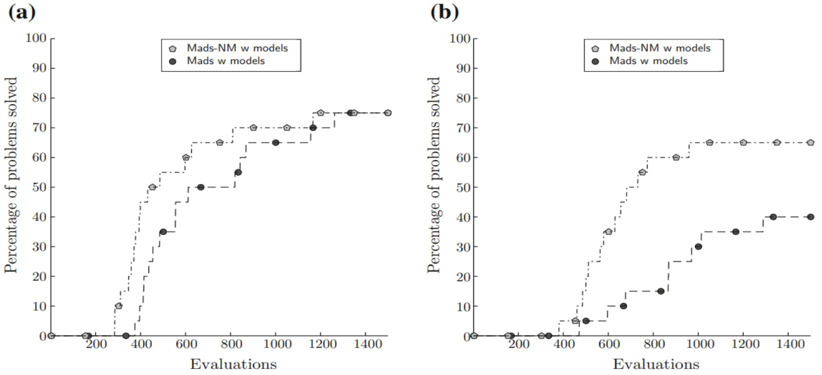



**Fig. 9** Data profiles obtained with two convergence tolerances on 20 STYRENE problems. **a** $\tau = 10^{-2}$ and **b** $\tau = 10^{-3}$

# 谢谢