线性规划与整数规划

上海交通大学学生创新中心

2024 .7

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

什么是数学规划

数学规划，也称数学优化，是数学中的一个分支

它主要研究：在给定的区域中可以最小化或最大化某一目标函数的最优解。

数学规划包括线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、目标规划等等。

数学规划的应用

1. 吉尼斯世界纪录
2. 总理的政府工作报告
3. 公司领导的核心工作
4. 如何使用好自己的钱
5. 树木的生长问题
6. 群狼的捕猎计划
7. 地铁车次的安排
8. 原子的内部结构

问题：你还能将想到哪些数学规划的应用?

线性规划的实例与定义

【例 1】某机床厂生产甲、乙两种机床，每台销售后的利润分别为 4000 元与 3000 元。

生产甲机床需用 A、B 机器加工，加工时间分别为每台 2 小时和 1 小时；

生产乙机床需用 A、B、C 三种机器加工，加工时间为每台各 1 小时。

若每天可用于加工的机器时数分别为 A 机器 10 小时、B 机器 8 小时和 C 机器 7 小时，问该厂应生产甲、乙机床各几台，才能使总利润最大？

线性规划的实例与定义

(目标函数) $\max z = 4x_1 + 3x_2$

s.t. (约束条件) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

设 x_1 台甲机床，x_2 台乙机床，
变量 x_1, x_2 称之为决策变量，

(1) 式被称为问题的目标函数

(2) 中的几个不等式是问题的约束条件，
记为 s.t.(即 subject to)

由于上面的目标函数及约束条件均为线性函数，故被称为线性规划问题

线性规划问题 ＝ 目标函数 ＋ 约束条件

线性规划问题是在一组线性约束条件的限制下，求一线性目标函数的最大或最小值

尝试用画图的方法找到最大值

(目标函数) $\max z = 4x_1 + 3x_2$

s.t. (约束条件) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

提示：考虑 x_1, x_2 平面，将目标问题与约束条件转化为平面上的直线和区域

尝试用画图的方法找到最大值

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

最优解 $x_1 = 2, x_2 = 6$
最大利润 $z_{max} = 26$

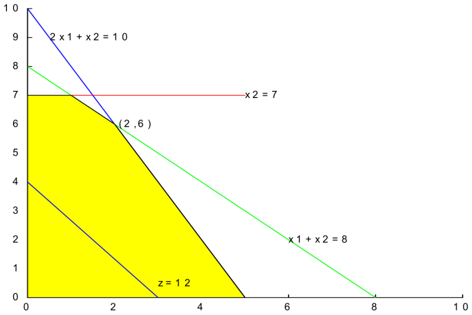


图 1　线性规划的图解示意图

Matlab 求解线性规划问题

思考：为什么要用借助计算机求解线性规划问题?

提示：问题的维数、约束条件的数量、可行域的复杂程度……

线性规划的 Matlab 标准形式

线性规划的目标函数可以是求最大值，也可以是求最小值；
约束条件的不等号可以是小于号，也可以是大于号;
为了避免这种形式多样性带来的不便，Matlab 中规定线性规划的标准形式为:

$$\min c^T x$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \leq b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \leq x \leq ub \end{cases}$$

c 和 x 为 n 维列向量，A 、Aeq 为适当维数的矩阵，b 、beq 为适当维数的列向量

Matlab 求解线性规划问题

【例 2】Step1：转化为标准形式

$$
\begin{aligned}
& \max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\
\text{s.t. } & x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\
& 2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10 \\
& x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min -z &= -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\
&= (-2, -3, 5)(x_1, x_2, x_3) \\
x_1 + x_2 + x_3 &= (1, 1, 1)(x_1, x_2, x_3) = 7 \\
-2x_1 + 5x_2 - x_3 &= (-2, 5, -1)(x_1, x_2, x_3) \leq 10 \\
x_1 + 3x_2 + x_3 &= (1, 3, 1)(x_1, x_2, x_3) \leq 12 \\
x_1, x_2, x_3 &= (x_1, x_2, x_3) \geq 0
\end{aligned}
$$

Matlab 求解线性规划问题

【例 2】Step2：写出对应的参量

$$c = [-2; -3; 5];$$
$$a = [-2, 5, -1; 1, 3, 1];$$
$$b = [-10; 12];$$
$$aeq = [1, 1, 1];$$
$$beq = 7;$$

$$\begin{aligned}
\min -z &= -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\
&= (-2, -3, 5)(x_1, x_2, x_3) \\
x_1 + x_2 + x_3 &= (1, 1, 1)(x_1, x_2, x_3) = 7 \\
-2x_1 + 5x_2 - x_3 &= (-2, 5, -1)(x_1, x_2, x_3) \leq -10 \\
x_1 + 3x_2 + x_3 &= (1, 3, 1)(x_1, x_2, x_3) \leq 12 \\
x_1, x_2, x_3 &= (x_1, x_2, x_3) \geq 0
\end{aligned}$$

Matlab 求解线性规划问题

【例 2】Step3：写出相应 Matlab 代码

$$c = [-2; -3; 5];$$
$$a = [-2, 5, -1; 1, 3, 1];$$
$$b = [-10; 12];$$
$$aeq = [1, 1, 1];$$
$$beq = 7;$$

例 2 Matlab 求解

```
c=[-2;-3;5];
a=[-2,5,-1;1,3,1];
b=[-10;12];
aeq=[1,1,1];
beq=7;
x=linprog(c,a,b,aeq,beq,zeros(3,1))
value=(-c)'*x
```

Matlab 求解线性规划问题

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

【例 3】求解线性规划问题

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

例 3 Matlab 求解

```
c=[2;3;1];
a=[1,4,2;3,2,0];
b=[8;6];
[x,y]=linprog(c,-a,-b,[],[],zeros(3,1))
value=c'*x
```

线性规划问题的建模与求解

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

【例 4】某化工厂根据一项合同要求为用户生产一种用甲、乙两种原料混合配制而成的特种产品。已知甲、乙两种原料都含有 A、B、C 三种化学成分，两种原料分别所含三种化学成分的百分比含量，以及按合同规定的产品中三种化学成分的最低含量如下表所示：

化学成分	甲（%）	乙（%）	产品最低含量（%）
B	12	3	2
C	2	3	5

已知甲、乙两种原料的成本分别是每公斤 3 元和 2 元，厂方希望总成本达到最小，问如何配置该产品？

线性规划问题的建模与求解

定义 x_1, x_2 分别为每公斤产品中甲，乙两种原料的数量，

目标：使总成本最小化 $$\min z = 3x_1 + 2x_2$$

约束：配料平衡条件， $$x_1 + x_2 = 1$$

产品中 A、B、C 三种化学成分的最低含量
$$\begin{aligned} 12x_1 + 3x_2 &\geq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 2 \\ 3x_1 + 15x_2 &\geq 5 \end{aligned}$$

非负性条件 $$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

线性规划问题的建模与求解

例 4 Matlab 求解

```
c=[3;2];
a=[12,3;2,3;3,15];
b=[4;2;5];
aeq=[1,1];
beq=1;
x=linprog(c,-a,-b,aeq,beq,zeros(2,1))
value=c'*x
```

$$x_1 = 0.1111$$

$$x_2 = 0.8889$$

$$z_{min} = 2.1111$$

整数规划的定义

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

规划中的变量（部分或全部）限制为整数时，称为整数规划。

若在线性规划模型中，变量限制为整数，则称为整数线性规划。

目前还没有一种方法能有效地求解一切整数规划。

整数规划的实例-低维数

【例 1】

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

最优解 $x_1 = 2, x_2 = 6$
最大利润 $z_{max} = 26$

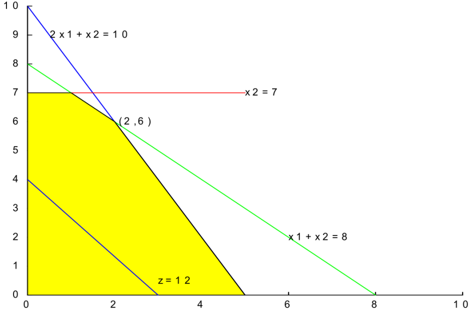


图 1　线性规划的图解示意图

整数规划的实例-高维数

【例 5】

$$\text{Max}\, z = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_5^2 - 8x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5$$

$$s.t. \begin{cases} 0 \le x_i \le 99 \quad (i = 1, \cdots, 5) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 400 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \le 800 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \le 200 \\ x_3 + x_4 + 5x_5 \le 200 \end{cases}$$

整数规划的实例-高维数

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

$$\text{Max } z = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_5^2 - 8x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5$$

$$s.t. \begin{cases} 0 \le x_i \le 99 \quad (i = 1, \cdots, 5) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 400 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \le 800 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \le 200 \\ x_3 + x_4 + 5x_5 \le 200 \end{cases}$$

如果用显枚举法试探，共需计算 $(100)^5 = 10^{10}$ 个点，其计算量非常之大。

然而蒙特卡洛法指出：随机计算 $(10)^6$ 个点，便可找到满意解，为什么？

整数规划的实例-高维数

假设目标函数落在高值区的概率为 0.01

则当计算 10^6 个点后，有任一个点能落在高值区的概率为：

$$1 - 0.99^{1000000} \approx 0.99\cdots99(100\text{ 多位})$$

假设目标函数落在高值区的概率为 0.00001

则当计算 10^6 个点后，有任一个点能落在高值区的概率为：

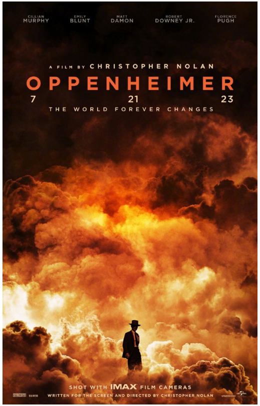
$$1 - 0.99999^{1000000} \approx 0.999954602$$

蒙特卡洛法不一定能找到精确解，但是可以找到一个“相对令人满意”的解。

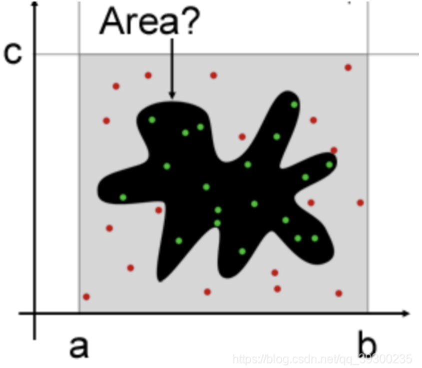
蒙特卡洛法的背景

蒙特卡洛法作为一种计算方法，是由美国数学家乌拉姆 (Ulam,S.M.) 与美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼 (von Neumann,J.) 在 20 世纪 40 年代中叶，为研制核武器的需要而首先提出来的。

虽然利用蒙特卡罗方法估计的计算结果与精确值之间有误差，但是可以通过增加样本量或者改进抽样方法等方法降低计算误差，提高计算精度。



蒙特卡洛法的应用



估计不规则图形的面积：

$$A_{\text{shape}} \approx \frac{N_{\text{hits}}}{N_{\text{total}}} \times A$$

$$A = ab \times ac$$

.

蒙特卡洛法求解整数规划问题

首先定义目标函数 f 和约束向量函数 g,

例 5 Matlab 求解

```
function [f,g]=mengte(x);
f=x(1)^2+x(2)^2+3*x(3)^2+4*x(4)^2+2*x(5)^2-8*x(1)-2*x(2)-3*x(3)-x(4)-2*x(5);
g=[sum(x)-400;
x(1)+2*x(2)+2*x(3)+x(4)+6*x(5)-800;
2*x(1)+x(2)+6*x(3)-200;
x(3)+x(4)+5*x(5)-200];
```

蒙特卡洛法求解整数规划问题

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

然后求例 5 的解

例 5 Matlab 求解

```
rand('state', sum(clock));
p0 = 0; x0 = [];
tic;
for i = 1:10^6
x = 99 * rand(5, 1);
x1 = floor(x);
x2 = ceil(x);
```

例 5 Matlab 求解

```
[f, g] = mente(x1);
if sum(g <= 0) == 4 if p0 <= f x0 = x1;
p0 = f; end end
[f, g] = mente(x2);
if sum(g <= 0) == 4 if p0 <= f x0 = x2;
p0 = f; end end
end
```

蒙特卡洛法求解整数规划问题

【例 6】

$$\text{Max}\, z = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_5^2 - 8x_1 - 4x_2 - 16x_3 - 5x_4 - 3x_5$$

$$s.t.\begin{cases} 0 \le x_i \le 99 \quad (i = 1, \cdots, 5) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 400 \\ x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 6x_5^2 \le 800 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \le 200 \\ x_3^2 + x_4^2 + 5x_5^2 \le 200 \end{cases}$$

蒙特卡洛法求解整数规划问题

【例 7】某铁器加工厂要制作 100 套钢架，每套要用长为 2.9 米，2.1 米和 1.5 米的圆钢各一根。已知原料长为 7.4 米，问应如何下料，可使材料最省？

蒙特卡洛法求解整数规划问题

上海交通大學 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

在长度确定的原料上截取三种不同规格的圆钢，可以归纳出 8 种不同的下料方案:

圆钢 (米)	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII
2.9	1	2	0	1	0	1	0	0
2.1	0	0	2	2	1	1	3	0
1.5	3	1	2	0	3	1	0	4
料头 (米)	0	0.1	0.2	0.3	0.8	0.9	1.1	1.4

问题归纳为：如何混合使用这 8 种不同的下料方案，来制造 1000 套钢架，且要使剩余的余料总长为最短。

蒙特卡洛法求解整数规划问题

设 x_j 表示用第 j 种下料方案下料的原料根数, $j = 1, 2 \ldots, 8$

目标：使余料总长度最小化

$$\min z = 0x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5 + 0.9x_6 + 1.1x_7 + 1.4x_8$$

约束：三种规格圆钢根数

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 &= 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 &= 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_6 + 4x_8 &= 100 \end{aligned}$$

非负取整条件 $x_j \geq 0 (j = 1, 2 \ldots 8)$ 且取整数

Thank You