Hartman 定理的一个证明

侯力广 521070910043 数学科学学院

摘 要： Hartman 定理是双曲非线性常微分系统局部拓扑等价于线性常微分系统的一个著名定理。本文将利用微分拓扑几何的方法，给出 Hartman 定理的一个证明。

关键词： Hartman 定理；双曲非线性常微分系统；局部拓扑；微分拓扑几何；

1. 符号说明

本文引用的符号，意义与 [1,2,3] 相同。设系统

$$\dot{\mathrm{X}} = \mathrm{V}(\mathrm{X}) \quad (\mathrm{X} \in \mathrm{R}^n) \tag{1}$$

其右方向量场 $\mathrm{V}(\mathrm{X}) \in \mathrm{R}^n$ 在原点的一个开邻域 $W \in \mathrm{R}^n$ 内是有定义, 连续可微的。原点为孤立奇点。令线性算子 $A : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ 为 $A = \left(\frac{\partial \mathrm{V}(\mathrm{X})}{\partial \mathrm{X}}\right)$. 由于系统具有双曲非线性，A 所对应的所有特征值 λ_{i} 的实部均不为零, 即 $\mathrm{Re}\lambda_{\mathrm{i}} \neq 0 (i = 1\ 2 \cdots n)$ 。由此在原点的充分小邻域内, (1) 式可以写成

$$\dot{\mathrm{X}} = A\mathrm{X} + \mathrm{O}(|\mathrm{X}|)$$

$$\text{或} \begin{cases} \dot{\mathrm{X}}_1 = A_{-}\mathrm{X}_1 + \mathrm{O}_1\left(|\mathrm{X}_1| + |\mathrm{X}_2|\right) \overset{\text{记}}{=} \mathrm{V}_1 \\ \dot{\mathrm{X}}_2 = A_{+}\mathrm{X}_2 + \mathrm{O}_2\left(|\mathrm{X}_1| + |\mathrm{X}_2|\right) \overset{\text{记}}{=} \mathrm{V}_2 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2 \in C', \mathrm{X} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}, \mathrm{X}_1 \in \mathrm{R}^{\mathrm{k}}, \mathrm{X}_2 \in \mathrm{R}^{\mathrm{m}} \quad (k + m = n, k \geq 0, m \geq t0), |\mathrm{X}|^2 = |\mathrm{X}_1|^2 + |\mathrm{X}_2|^2$ ($|\cdot|$ 是欧氏范数), $(A) = \begin{pmatrix} A_{-} & 0 \\ 0 & A_{+} \end{pmatrix}$

$A_{-} : \mathrm{R}^k \to \mathrm{R}^{\mathrm{k}}$ 所有特征值实部均负值, 即 $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0 (i = 1 \cdots k)$

$A_{+} : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$ 所有特征值实部均正值, 即 $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0 (i = 1 \cdots k)$

$$\lim_{|\mathrm{X}_1|+|\mathrm{X}_2| \to 0} \frac{\mathrm{O}_1\left(|\mathrm{X}_1| + |\mathrm{X}_2|\right)}{|\mathrm{X}_1| + |\mathrm{X}_2|} = \mathrm{O}_1 \in \mathbf{R}^{\mathrm{k}}$$
$$\lim_{|\mathrm{X}_1|+|\mathrm{X}_2| \to 0} \frac{\mathrm{O}_2\left(|\mathrm{X}_1| + |\mathrm{X}_2|\right)}{|\mathrm{X}_1| + |\mathrm{X}_2|} = \mathrm{O}_2 \in \mathbf{R}^{\mathrm{m}}$$

2. 引理证明

【引理 1】考虑特殊系统

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{X}}_1 = A_{-}\mathrm{X}_1 + \mathrm{O}_1\left(|\mathrm{X}_1|\right) \overset{\text{记}}{=} \mathrm{V}_1' \\ \dot{\mathrm{X}}_2 = A_{+}\mathrm{X}_2 + \mathrm{O}_2\left(|\mathrm{X}_2|\right) \overset{\text{记}}{=} \mathrm{V}_2' \end{cases} \tag{3}$$

若系统 (3) 其右方在原点的充分小邻域内有 $\mathrm{V}_1', \mathrm{V}_2' \in C'$, 令 $r_i^2 = (\mathrm{X_i}\ , \mathrm{X_i})\,(i=1,2)$, 则必存在 $\sigma_i > 0 (i=1,2)$ 和正常数 $\alpha_1 > \beta_1 > 0, \beta_2 > \alpha_2 > 0$ 使得 r_i^2 沿向量场 $\mathrm{V}_i'(i=1,2)$ 的方向导数 $\mathrm{L}_{\mathrm{v}_1'}^{r_i^2}$ 应有下面不等式

$$
\begin{aligned}
&-\alpha_1 r_1^2 < \mathrm{L}_{\mathrm{v}_1'}^{r_1^2} < -\beta_1 r_1^2 \quad (\text{对 } \forall\, |\mathbf{X}_1| < \sigma_1) \\
&\alpha_2 r_2^2 < \mathrm{L}_{\mathrm{v}_2'}^{r_2^2} < \beta_2 r_2^2 \qquad\quad (\text{对 } \forall\, |\mathbf{X}_2| < \sigma_2)
\end{aligned}
$$

证 先考虑系统 (3) 第一式，二次型 $r_1^2 = \langle \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_1 \rangle$ 沿向量场 V_1' 的分向导数 $\mathrm{L}_{\mathrm{v}_1'}^{r_1^2}$ 有：

$$
\mathrm{L}_{\mathrm{v}_1'}^{r_1^2} = \mathrm{L}_{A_- \mathrm{X}_1}^{r_1^2} + L_{O_1(|\mathrm{X}_1|)}^{r_1^2}.
$$

在复化空间 ${}^cR^k$ 内考虑 $\mathrm{L}_{cA_-\mathbf{X}_1}^{r_1'^2}$ 其中 ${}^cA_-: {}^c\mathrm{R}^k \to^c \mathrm{R}^k$ 是 A_- 的复化算子, $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{X}_1 + i\mathrm{Y}_i \in {}^cR^k \left(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1 \in R^k\right), r_1'^2 = (\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_1)$ 。由 [1] §22.4 引理 4 知, 只要选定“ε-几乎真”的酉基 $\xi_1, \cdots \xi_k$ 下, 有

$$
(A_-) = ({}^cA_-) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & a_{\mathrm{fe}} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}
$$

其中 $|a_{\mathrm{fe}}| < \varepsilon\,(f<e;\ f,e = 1\cdots k), \lambda_1 \cdots \lambda_{\mathrm{k}}$ 为 A_- 的特征值, 且 $\operatorname{Re}\lambda_i < 0 (i = 1\cdots k)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}_{{}^cA_-Z_1}^{r_1'^2} = 2\operatorname{Re}\left({}^cA_-\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_1\right) &= 2\operatorname{Re}\left(\left(\xi_1, \cdots \xi_k\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & a_{\mathrm{fe}} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix}, \left(\xi_1, \cdots \xi_k\right)\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix}\right) \\
&= 2\sum_{i=1}^{k}\left(\operatorname{Re}\lambda_i\right)\left(x_i^2 + y_i^2\right) + 2\sum_{\mathrm{f<e}}^{k}\left(\operatorname{Re}a_{\mathrm{fe}}\right) Z_{\mathrm{f}} \cdot \bar{Z}_{\mathrm{e}}
\end{aligned}
$$

由 $\operatorname{Re}\lambda_{\mathrm{i}} < 0$ 可知 $\sum\limits_{i=1}^{k}(\operatorname{Re}\lambda_{\mathrm{i}})\,(x_i^2 + y_i^2)$ 是负定二次型。又由于 $|a_{\mathrm{fe}}| < \varepsilon$, 故 $\operatorname{Re}a_{\mathrm{f}} < \varepsilon$, 由 [1] §22.4 引理 5 知, $\mathrm{L}_{{}^cA_-Z_1}^{r_1'^2}$ 限制在球 $|\mathrm{X}_1| < \sigma$ 内，必存在 $\alpha_1' > \beta_1' > 0$ 的常数，使得

$$
-a_1'\,|\mathbf{X}_1|^2 < \mathrm{L}_{A_-\mathrm{X}_1}^{r_1^2} < \beta_1'\,|\mathrm{X}_1|^2
$$

而对 $\mathrm{L}_{\mathrm{O}_1(|\mathrm{X}_1|)}^{r_1^2} = 2\operatorname{Re}\left(\mathrm{O}_1\left(|\mathrm{X}_1|\right), \mathrm{X}_1\right) = 2\operatorname{Re}\left(\mathrm{O}_1(1), \frac{\mathrm{X}_1}{|\mathrm{X}_1|}\right) \cdot |\mathrm{X}_1|^2$ 沿 $\mathrm{O}_1\left(|\mathrm{X}_1|\right)$ 向量场的方向导数, 其系数仍为一个无穷小量, 记为 $\mathrm{O}_1'(1)$ 。据无穷小量性质, 对任一给定的常数 $0 < \overline{r_1} < \beta_1'$, 必存在 $0 < \sigma_1 < \sigma_1'$, 对于 $\forall\,|\mathrm{X}_1| < \sigma_1$ 有 $|\mathrm{O}_1'(1)| < \overline{r_1}$, 使得

$$
\left\|\mathrm{L}_{\mathrm{O}_1(|X_1|)}^{r_1^2}\right\| < \overline{r_1}\,|\mathrm{X}_1|^2
$$

记 $\beta_1=\beta_1'-\overline{r_1}>0,\alpha_1=\alpha_1'+\overline{r_1}>0$，可得

$$-\alpha_1 r_1^2=-\alpha_1\left|\mathrm{X}_1\right|^2<L_{v_1'}^{r_1^2}<-\beta_1\left|\mathrm{X}_1\right|^2=-\beta_1 r_1^2 \quad (\forall\left|\mathrm{X}_1\right|<\sigma_1)$$

同理，对（3）第二式进行如上讨论，可证引理 1. 进一步，若将 $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2$ 限制在 $\left|\mathrm{X}_1\right|<\sigma_1,\left|\mathrm{X}_2\right|<\sigma_2$ 内, 其中 σ_1,σ_2 均由引理 1 给出, 则有以下引理。

【引理 2】设 $\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{pmatrix}$ 是系统 (3) 满足初值 $|\varphi_i(0)|=\delta_i<\sigma_i(i=1,2)$ 的任一非零解 $(\delta_\mathrm{i}>0)$. 做一实变量 t 的函数 $\rho_\mathrm{i}(t)=\ln\frac{(\varphi_\mathrm{i}(t),\varphi_\mathrm{i}(t))}{\delta_i^2} \quad (i=1,2)$, 则有

$$\rho_\mathrm{i}:\mathbf{R}\cap\{t_:|\boldsymbol{\varphi}_\mathrm{i}(t)|<\sigma_\mathrm{i}\}\rightarrow\rho_\mathrm{i}\left(\mathbf{R}\cap\{t:|\boldsymbol{\varphi}_\mathrm{i}(t)|<\sigma_\mathrm{i}\}\left(i=1,2\right)\right.$$

对每一 i 是一个微分同胚, 且有

$$\begin{aligned}-\alpha_1<\frac{\mathrm{d}\rho_1(t)}{\mathrm{d}t}<-\beta_1 \quad &(\alpha_1>\beta_1>0\text{为常数})\\ \alpha_2<\frac{\mathrm{d}\rho_2(t)}{\mathrm{d}t}<\beta_2 \quad &(\beta_2>\alpha_2>0\text{为常数})\end{aligned}$$

证 $i=1$ 时, 令 $r_1^2=(\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_1(t))$，作实变量 t 的函数

$$\rho_1(t)=\ln\frac{(\varphi_1(t),\varphi_1(t))}{\delta_1^2}=\ln\frac{r_1^2}{\delta_1^2}$$

由 $\frac{\mathrm{d}\rho_1(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{L}_{\mathrm{V}_1'}^{r_1^2}}{r_1^2}$ 的存在性可知，$\rho_1(t)$ 是可微的。结合引理 1，对应于 $\mathrm{L}_{\mathrm{V}_1'}^{r_1^2}$ 的方向导数，必存在 $\sigma_1>0$，当 $\forall|\mathbf{X}_1|<\sigma_1$ 时，有 $-\alpha_1 r_1^2<\mathrm{L}_{\mathrm{v}_1'}^{r_1^2}<-\beta_1 r_1^2$ 成立。从而当 $t\in R\cap\{t:|\varphi_1(t)|<\sigma_1\}$ 时，有不等式 $-\alpha_1<\frac{\mathrm{d}\rho_1(t)}{\mathrm{d}t}<-\beta_1\left(\alpha_1>\beta_1>0\right.$ 为常数) 成立，则可知 $\frac{\mathrm{d}\rho_1(t)}{\mathrm{d}t}\neq 0$. 继而根据反函数存在定理，$\rho_1^{-1}$ 存在且可微，则有 $\rho_1:R\cap\{t:|\varphi(t)|<\sigma_1\}\rightarrow\rho_1\left(R\cap\{t:|\varphi_1(t)|<\sigma_1\}\right)$ 是微分同胚，且满足引理 2 不等式.

同理可证 $\rho_2:R\cap\{t:|\varphi_2(t)|<\sigma_2\}\rightarrow\rho_2\left(R\cap\{t:|\varphi_2(t)|<\sigma_2\}\right.$ 是微分同胚, 引理 2 成立。

【引理 3】

对每一 $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}\mathrm{X}_1\\ \mathrm{X}_2\end{pmatrix}\neq 0$, 其中 $\mathrm{X}_1\in\mathrm{R}^k,\mathrm{X}_2\in\mathrm{R}^m \quad (k+m=n,k\geq 0,m\geq 0)$

$|\mathrm{X_i}| < \sigma_\mathrm{i}\,(\sigma_\mathrm{i} > 0)\,(i=1,2)$ 都有唯一形式

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} f_1^t \mathrm{x}_{10} \\ f_2^t \mathrm{x}_{10} \end{pmatrix}$$

其中 $\mathrm{X}_{10} \in \mathrm{R}^k, \mathrm{X}_{20} \in \mathrm{R}^m$, $\begin{pmatrix} f_1^t \\ f_2^t \end{pmatrix}$ 是系统 (3) 的相流

$$\mathrm{X_{i0}} \in S_\mathrm{i} = \left\{\mathrm{X_{i0}} \mid (\mathrm{X_{i0}}, \mathrm{X_{i0}}) = \delta_i^2 < \sigma_i^2\right\} \quad (i=1,2)$$

证 设 $\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_z(t) \end{pmatrix}$ 在区域 $|\varphi_i(t)| < \sigma_i (i=1,2)$ 内是系统 (3) 满足初值条件 $\varphi_i(0) = \mathrm{X}_i \neq 0 (i=1,2)$ 的解。

考虑实变量 t 的函数, $\rho_i(t) = \ln \frac{(\varphi_i(t), \varphi_i(t))}{\delta_i} (i=1,2)$ 其中 δ_i 的选取使得 $\rho_\mathrm{i}(t)$ 在定义区域 $\boldsymbol{R} \cap \{t : |\varphi_\mathrm{i}(t)| < \sigma_\mathrm{i}\}$ 内必存在一 t 值, 使得 $\begin{pmatrix} \rho_1(t) \\ \rho_2(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (i=1,2)$. 只须按如下选取 t 值, 对满足 $(\varphi_1(\tau), \varphi_1(\tau)) = \delta_1^2 < \sigma_1^2$ 的 τ 值代入 $\varphi_2(t)$ 的内积中, 记 $\sigma_2^2 > \delta_2^2 = (\varphi_2(\tau), \varphi_2(\tau))$, 则存在 τ 使得 $\begin{pmatrix} \rho_1(\tau) \\ \rho_2(\tau) \end{pmatrix} = 0$ 。由引理 2 知, $\rho_1 : \mathbf{R} \cap \{t : \varphi_\mathrm{i}(t) \mid < \sigma_\mathrm{i}\} \rightarrow \rho_\mathrm{i}\left(\mathbf{R} \cap \{t : |\varphi_\mathrm{i}(t)| < \sigma_\mathrm{i} \mid\right)$ 对每一 i 是一个微分同胚, 且对 t 值是双方单值的，则这样的 τ 是唯一存在的，记 $\mathrm{X_{i0}} = \varphi_\mathrm{i}(\tau)$, 有 $\mathrm{X_{i0}} \in S_\mathrm{i} \quad (i=1,2)$.

由假设 $\varphi_\mathrm{i}(t) (i=1,2)$ 是满足初值条件 $\varphi_\mathrm{i}(0) = \mathrm{X_i}$ 系统 (3) 的解，则此解可用相流 $\begin{pmatrix} f_1^t \\ f_2^t \end{pmatrix}$ 来表示

$$\begin{pmatrix} \mathrm{X}_{10} \\ \mathrm{X}_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(\tau) \\ \varphi_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^\tau \mathrm{X}_1 \\ f_2^\tau \mathrm{X}_2 \end{pmatrix} \quad \text{取} t = -\tau \quad \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^t \mathrm{X}_{10} \\ f_2^t \mathrm{X}_{20} \end{pmatrix}$$

3. 定理证明

【步骤 1】系统（3）局部拓扑等价于

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{Y}}_1 = -\mathrm{Y}_1 \\ \dot{\mathrm{Y}}_2 = \mathrm{Y}_2 \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\mathrm{Y}_1 \in \mathrm{R^k}, \mathrm{Y}_2 \in \mathrm{R^m}, k+m=n, k \geq 0, m \geq 0$

证 设 $\begin{pmatrix} f_1^t \\ f_2^t \end{pmatrix}$ 是系统（3）的相流，$\begin{pmatrix} g_1^t \\ g_2^t \end{pmatrix}$ 是系绞 (4) 的相流。

$S_1=\{\mathrm{X}_{10} \mid \mathrm{X}_{10}\in \mathrm{R}^{\mathrm{k}}, (\mathrm{X}_{10},\mathrm{X}_{10})=\delta_1^2<\sigma_1^2\}, S_2=\left\{\mathrm{X}_{20} \mid \mathrm{X}_{20}\in \mathrm{R}^{\mathrm{m}}, (\mathrm{X}_{20},\mathrm{X}_{20})=\delta_2^2<\sigma_2\right\}$

继而证明：

1）若将 X_2 限制在 $|\mathrm{X}_2|<\sigma_2$ 内来确定映射 h_1

$$h_1:\mathrm{R}^{\mathrm{k}}\cap\{\mathrm{X}_1:\mathrm{X}_1<\sigma_1\}\rightarrow \mathrm{R}^{\mathrm{k}}\cap\{\mathrm{X}_1:|\mathrm{X}_1|<\sigma_1\}$$

则 h_1 是一一映射且双方连续的，满足 $h_1\circ f_1^t=g_1^t\circ h_1$，即 h_1 是一个同胚. 故系统（3）第一式与系统（4）第一式的两个相流拓扑等价。

2）若将 X_1 限制在 $|\mathrm{X}_1|<\sigma_1$ 内来确定映射 h_2

$$h_2:\mathrm{R}^{\mathrm{m}}\cap\{\mathrm{X}_2:\mathrm{X}_2<\sigma_1\}\rightarrow \mathrm{R}^{\mathrm{m}}\cap\{\mathrm{X}_2:|\mathrm{X}_2|<\sigma_2\}$$

则 h_2 是一一映射且双方连续的，满足 $h_2\circ f_2^t=g_2^t\circ h_2$，即 h_2 是一个同胚。故系统（3）第二式与系统（4）第二式的两个相流拓扑等价。

证 1）与 2）的证明类似，可采用构造映射的方法证明，详见 [3] .

3）拓扑等价系统的直积仍是拓扑等价的

证 限制 $|\mathrm{X}_i|<\sigma_i(i=1,2)$ 范围内

$$h_1:\mathrm{R}^{\mathrm{k}}\rightarrow\mathrm{R}^{\mathrm{k}}\quad h_2:\mathrm{R}^{\mathrm{m}}\rightarrow\mathrm{R}^{\mathrm{m}}\,(k+n=n,k\geq 0,m\geq 0)$$

则存在一个变换 $h=(h_1,h_2)$, $h:\mathrm{R}^k+\mathrm{R}^m\rightarrow\mathrm{R}^k+\mathrm{R}^m$. 由 1）2）可知 h 是一个同胚，故系统（3）与系统（4）局部拓扑等价。

【步骤 2】系统（2）与系统（3）局部拓扑等价

证 对系统（2）作变换

$$\begin{cases}\mathrm{X}_1=\mathrm{Y}_1-\varphi(\mathrm{Y}_2)\\ \mathrm{X}_2=\mathrm{Y}_2-\psi(\mathrm{Y}_1)\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}\dot{\mathrm{Y}}_1=A_-\mathrm{Y}_1+\mathrm{O}(\Delta)\left(|\mathrm{Y}_1|+|\psi(\mathrm{Y}_1)|\right)\\ \dot{\mathrm{Y}}_2=A_+\mathrm{Y}_2+\mathrm{O}_2(\Delta)\left(|\mathrm{Y}_2|+|\varphi(\mathrm{Y}_2)|\right)\\ \dot{\psi}(\mathrm{Y}_1)=A_+\varphi(\mathrm{Y}_1)-\mathrm{O}_2(\Delta)\left(|\mathrm{Y}_1|+|\psi(\mathrm{Y}_1)|\right)\\ \dot{\varphi}(\mathrm{Y}_2)=A_-\varphi(\mathrm{Y}_2)-\mathrm{O}_1(\Delta)\left(|\mathrm{Y}_2|+|\varphi(\mathrm{Y}_2)|\right)\end{cases}\tag{5}$$

其中 $\Delta=\frac{|\mathrm{Y}_1-\varphi(\mathrm{Y}_2)|+|\mathrm{Y}_2-\psi(\mathrm{Y}_1)|}{|\mathrm{Y}_1|+|\mathrm{Y}_2|+|\varphi(\mathrm{Y}_2)|+|\psi(\mathrm{Y}_1)|}$ 为有界量。根据解的存在唯一性定理，解对初值连

续依赖定理可知，系统（5）满足 $\mathrm{Y}_1=\mathrm{O}_1,\quad \mathrm{Y}_2=\mathrm{O}_2,\quad \varphi(O_2)=\mathrm{O}_2,\quad \psi\left(\mathrm{O}_1\right)=\mathrm{O}_1$ 条件的解 $\mathrm{Y}_1(t), \mathrm{Y}_2(t), \varphi\left(\mathrm{Y}_2\right), \psi\left(\mathrm{Y}_1\right)$ 唯一存在，且连续可微。在 $\left(O_1, O_2\right)$ 充分小邻域内，对系统（2）所作变换的 Jacobian 行列式 $J=\left(\frac{\partial \mathrm{X_i}}{\partial \mathrm{Y_i}}\right) \neq 0\ (i=1,2)$.

则由反函数存在定理知，在 $\left(O_1, O_2\right)$ 充分小邻域内，该变换是一个微分同胚。

又由 $\varphi\left(\mathrm{Y}_2\right), \psi\left(\mathrm{Y}_1\right)$ 可微性知，在 $\left(O_1, O_2\right)$ 充分小邻域内

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(\mathrm{Y}_2\right) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d} \varphi\left(s \mathrm{Y}_2\right)}{\mathrm{d} s}\ \mathrm{d} s=\int_0^1 \varphi^{\prime}\left(s \mathrm{Y}_2\right) \mathrm{d} s \cdot \mathrm{Y}_2 \\
\psi\left(\mathrm{Y}_1\right) &= \int_1^0 \frac{\mathrm{d} \psi\left(s \mathrm{Y}_1\right)}{\mathrm{d} s}\ \mathrm{d} s=\int_0^1 \psi^{\prime}\left(s \mathrm{Y}_1\right) \mathrm{d} s \cdot \mathrm{Y}_1
\end{aligned}
$$

其中 $\int_0^1 \varphi^{\prime}\left(s \mathrm{Y}_2\right) \mathrm{d} s,\ \int_0^1 \psi^{\prime}\left(s \mathrm{Y}_1\right) \mathrm{d} s \in C^{\prime}$，将两式代入系统（5）的前两式中整理得

$$
\left\{\begin{array}{l}
\dot{\mathrm{Y}}_1=A_{-} \mathrm{Y}_1+\mathrm{O}_1(\Delta)\left(1+\left|\int_0^1 \psi\left(s \mathrm{Y}_1\right) \mathrm{d} s\right|\right)\left|\mathrm{Y}_1\right| \\
\dot{\mathrm{Y}}_2=A_{+} \mathrm{Y}_2+\mathrm{O}_2(\Delta)\left(1+\left|\int_0^1 \varphi\left(s \mathrm{Y}_2\right) \mathrm{d} s\right|\right)\left|\mathrm{Y}_2\right|
\end{array}\right. \tag{6}
$$

其中 $\mathrm{O}_1(\Delta)\left(1+\mid \int_0^1 \psi^{\prime}\left(s \mathrm{Y}_1\right) \mathrm{d} s \mid\right), \mathrm{O}_2(\Delta)\left(1+\mid \int_0^1 \varphi^{\prime}\left(s \mathrm{Y}_2\right) \mathrm{d} s \mid\right)$ 是有界量，且仍为无穷小量，故系统（2）与系统（6）是局部拓扑等价的。而系统（6）与系统（3）形式相同，故系统（2）与系统（3）也是局部拓扑等价的。

【步骤 3】（Hartman 定理）系统（1）在原点的充分小邻域内局部等价于系统

$$
\left\{\begin{array}{l}
\dot{\mathrm{X}}_1=A_{-} \mathrm{X}_1 \\
\dot{\mathrm{X}}_2=A_{+} \mathrm{X}_2
\end{array}\right. \tag{7}
$$

证 因为 $\mathrm{V(X)} \in C^{\prime}$，所以在原点的充分小邻域内，系统（1）可以写成系统（2）的形式。由步骤 2 可知，系统（2）局部拓扑等价与系统（3），而由步骤 1 知，系统（3）局部拓扑等价于系统（4）。又因为系统（7）是系统（3）的特殊情况 $\left(\mathrm{O}_1\left|\mathrm{X}_1\right|=\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2\left|\mathrm{X}_2\right|=\mathrm{O}_2\right)$，所以根据上述引理 1-3 及步骤 1 的论证，可得系统（4）局部拓扑等价于系统（7），则系统（1）局部拓扑等价于系统（7）.

参考文献

[1] Arnold V I.Ordinary Differential Equations[M]. Translated and edited dy RA Silverman.USA.M.I.T.1973

[2] 阿诺尔德 B N 著. 沈家踖, 周宝熙等译. 常微分方程 [M]. 北京：料学出版社,1985

[3] 李冬梅. Hartman 定理的一个新证 [J]. 哈尔滨科学技术大学学报 14(2). 1990. 195-202

[4] 李冬梅. Hartman 定理的一个新证及推论 [D]. 哈尔滨科学技术大学硕士研究生毕业论文，1986