

# 投资的风险和收益分析

## 1.问题背景

市场上有  $n$  种资产  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 可以选择, 现用数额为  $M$  的相当大的资金作一个时期的投资。这  $n$  种资产在这一时期内购买  $s_i$  的平均收益率为  $r_i$ , 风险损失率为  $q_i$ , 投资越分散, 总的风险越少, 总体风险可用投资的  $s_i$  中最大的一个风险来度量。

购买  $S_i$  时要付交易费 (费率  $p_i$ ), 当购买额不超过给定值  $u_i$  时, 交易费按购买额  $u_i$  计算。此外, 如果选择将资金存入银行, 可以享受无交易费用且无风险的银行存款利率  $r_0 = 5\%$ 。

已知在  $n = 4$  时, 有以下相关数据:

$S_i$	$r_i$ (%)	$q_i$ (%)	$p_i$ (%)	$u_i$ (元)
$S_1$	28	2.5	1	103
$S_2$	21	1.5	2	198
$S_3$	23	5.5	4.5	52
$S_4$	25	2.6	6.5	40

该公司想要设计一种投资组合方案, 可利用的资金数为  $M$ 。

## 2.符号规定和基本假设

符号规定:

- $S_i$ : 第  $i$  种投资项目, 如股票、债券。
- $r_i$ :  $S_i$  的平均收益率。
- $p_i$ :  $S_i$  的交易费率。
- $q_i$ :  $S_i$  的风险损失率。
- $u_i$ :  $S_i$  的交易定额。
- $r_0$ : 同期银行利率。
- $x_i$ : 投资项目  $S_i$  的资金。
- $\alpha$ : 投资风险度。
- $Q$ : 总体收益。

基本假设:

1. 投资数额  $M$  相当大, 为了便于计算, 假设  $M = 1$  ;
2. 投资越分散, 总的风险越小;
3. 总体风险用投资项目  $S_i$  中最大的一个风险来度量;
4.  $n$  种资产  $S_i$  之间是相互独立的;
5. 在投资的这一时期内,  $r_i, P_i, q_i, r_0$  为定值, 不受意外因素影响;
6. 净收益和总体风险只受  $r_i, P_i, q_i$  影响, 不受其他因素干扰。

## 3.问题描述

在实际投资中, 投资者承受风险的程度不一样, 若给定风险一个界限  $a \in (0, 1]$  , 投资的最大风险不能超过承受限度, 即投资要满足:  $\frac{q_i x_i}{M} \leq a_0$ 。

该公司的投资目标是收益最大化。 $a$ 取不同的值时, 对应的投资策略有何变化? 你能发现什么规律?

