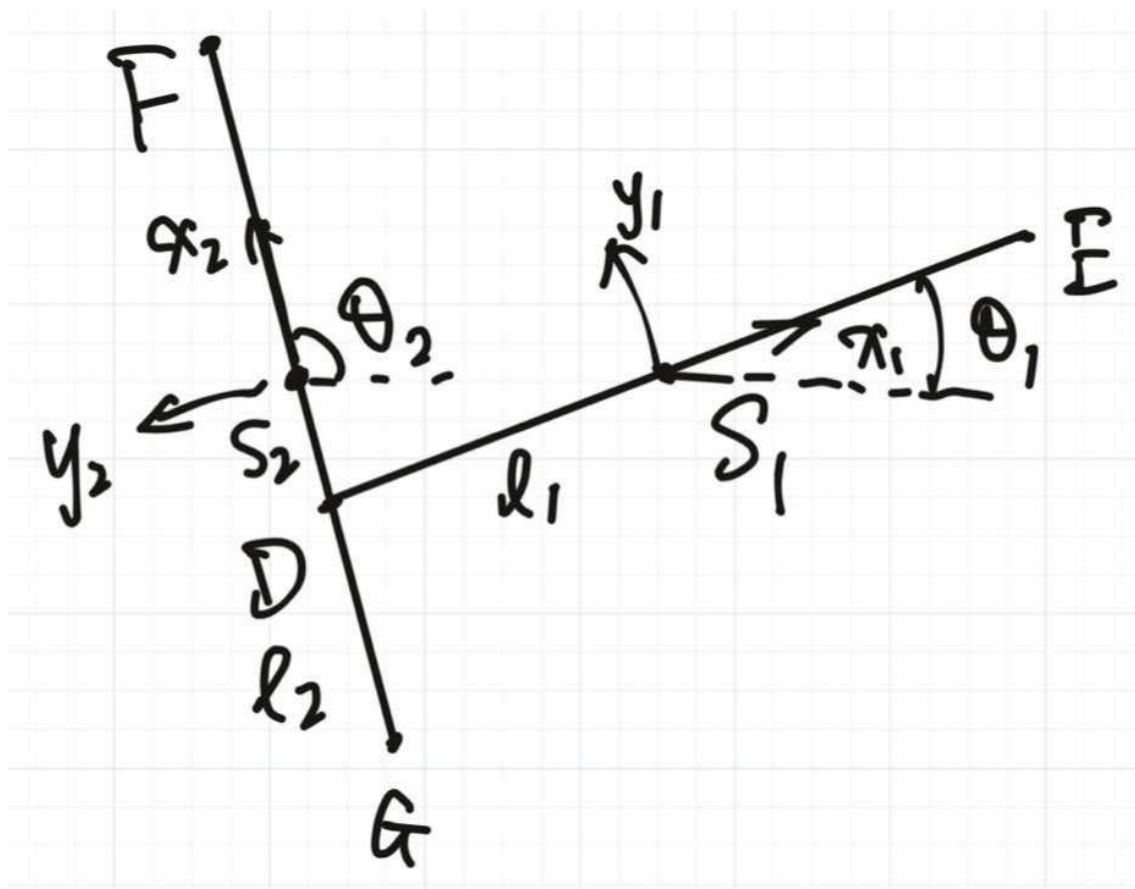


# 动力学建模

## 建立坐标系



如图建立随体坐标系。活动构件个数 $nb = 2$ ，则选取系统广义坐标 $q = [q_1, q_2]^T$ ，其中

$$q_1 = [S_{1x}, S_{1y}, \theta_1]^T$$

$$q_2 = [S_{2x}, S_{2y}, \theta_2]^T$$

## 约束方程

### 旋转铰C

$$\Phi_C(q) = \begin{bmatrix} S_{1x} - (\frac{1}{2}l_{DE} - l_1) \cos \theta_1 \\ S_{1y} - (\frac{1}{2}l_{DE} - l_1) \sin \theta_1 - h \end{bmatrix}$$

### 旋转铰D

$$\Phi_D(q) = \begin{bmatrix} S_{2x} - (\frac{1}{2}l_{GF} - l_2) \cos \theta_2 - S_{1x} + \frac{1}{2}l_{DE} \cos(\theta_1) \\ S_{2y} - (\frac{1}{2}l_{GF} - l_2) \sin \theta_2 - S_{1y} + \frac{1}{2}l_{DE} \sin(\theta_1) \end{bmatrix}$$

则总约束方程为

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} \Phi_C \\ \Phi_D \end{bmatrix}$$

总约束方程对时间求导得到速度方程为

$$\Phi_q \dot{q} = 0$$

速度方程继续对时间求导得到加速度方程为

$$\Phi_q(q) \ddot{q} = \gamma$$

其中

$$\gamma = -\frac{(\Phi_q(q) \dot{q})}{dq} \frac{dq}{dt}$$

## 广义驱动力

根据虚功原理有

$$\delta W = -m_1 g \delta S_{1y} - m_2 g \delta S_{2y} - C_1 \dot{\theta}_1 \delta \theta_1 - C_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \delta \theta_2 = Q^A \delta q$$

则广义驱动力为

$$Q^A = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ -C_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ -m_2 g \\ -C_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \end{bmatrix}$$

## 约束系统运动方程

构建约束系统运动方程如下

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^A \\ \gamma \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda$ 为拉格朗日乘子，可用于计算关节处的约束力，广义外部驱动力 $Q^A$ 为

$$Q^A = [Q_1^{AT}, Q_2^{AT}]^T$$

广义质量矩阵 $M$ 为

$$M = diag(M_1, M_2)$$

$$M_i = diag(m_i, m_i, J_i)$$

## 数值求解

由于优化涉及运动学方程的重复求解，考虑算法实时性，给出混沌双摆正运动学解析表达如下

$$S_{1x} = (0.5l_{DE} - l_1) \cos(\theta_1)$$

$$S_{1y} = (0.5l_{DE} - l_1) \sin(\theta_1)$$

$$S_{2x} = (0.5l_{GF} - l_2) \cos(\theta_2) + S_{1x} - 0.5l_{DE} \cos(\theta_1)$$

$$S_{2y} = (0.5l_{GF} - l_2) \sin(\theta_2) + S_{1y} - 0.5l_{DE} \sin(\theta_1)$$

## 考虑速度约束的广义坐标划分法

具体步骤如下：

1. 给定初始 $\theta_0$ ，使用正运动学可求解得到初始位置条件 $q(t_0)$ 。初始静止，则初始速度条件 $\dot{q}(t_0) = 0$ 。
2. 在某一时刻 $t_i$ ，代入 $q(t_i), \dot{q}(t_i)$ ，可求解约束系统运动方程得到 $\ddot{q}(t_i)$ 。
3. 对 $\ddot{q}(t_i)$ 进行数值积分即可得到 $q(t_{i+1})$ 。此时选取 $v = \theta(t_{i+1})$ 作为独立坐标，其余非独立坐标由正运动学给出 $u(t_{i+1})$ 。将 $\dot{v} = \dot{\theta}(t_{i+1})$ 代入速度约束方程 $\Phi_u \dot{u} = -\Phi_v \dot{v}$ ，可求解得到满足速度约束的广义坐标解。
4. 在不同时刻重复上述步骤即可得到完整运动轨迹 $q(t)$

# 机构参数优化

## 最小机械能

系统最小机械能在最小势能处取到。根据杆长的不同，最小势能根据几何关系的不同可分为以下四种情况讨论

$$1. l_1 < l_{DE}/2, l_2 < l_{GF}/2$$

此时， $S_1$ 和 $S_2$ 在最小势能处的上下位置关系可再分为两种情况，实际最小势能为两者的下界

$$(h + l_{DE}/2 - l_1)m_1g + (h - l_1 - l_{GF}/2 + l_2)m_2g$$

$$(h - l_{DE}/2 + l_1)m_1g + (h + l_1 - l_{GF}/2 + l_2)m_2g$$

$$2. l_1 < l_{DE}/2, l_2 > l_{GF}/2$$

此时， $S_1$ 和 $S_2$ 在最小势能处的上下位置关系同样可再分为两种情况，实际最小势能为两者的下界

$$(h + l_{DE}/2 - l_1)m_1g + (h - l_1 + l_{GF}/2 - l_2)m_2g$$

$$(h - l_{DE}/2 + l_1)m_1g + (h + l_1 + l_{GF}/2 - l_2)m_2g$$

$$3. l_1 > l_{DE}/2, l_2 < l_{GF}/2$$

此时，在最小势能处， $S_2$ 肯定悬吊于 $S_1$ 下方

$$(h + l_{DE}/2 - l_1)m_1g + (h - l_1 - l_{GF}/2 + l_2)m_2g$$

$$4. l_1 > l_{DE}/2, l_2 > l_{GF}/2$$

此时，在最小势能处， $S_2$ 同样肯定悬吊于 $S_1$ 下方

$$(h + l_{DE}/2 - l_1)m_1g + (h - l_1 + l_{GF}/2 - l_2)m_2g$$

## 摆动停止判据

当系统机械能达到最小机械能的100.1%时视为运动终止。系统机械能 $E$ 包括动能 $E_k$ 和势能 $E_p$

$$E = E_k + E_p$$

$$E_k = \dot{q}^T M \dot{q} / 2$$

其中

$$E_p = S_{1y}m_1g + S_{2y}m_2g$$

## 优化求解

至此，通过改变系统中的部分参数，可计算得到相应的摆动时间。

将摆动时间作为最大化目标函数 $f(x)$ ，取系统中的 $l_1, l_2$ 为优化参数，考虑几何约束，可建立非线性约束优化问题如下

$$\max_{l_1 \in [0, l_{DE}], l_2 \in [0, l_{GF}]} \text{swing\_time} = f(l_1, l_2)$$

考虑非线性优化器，使用遗传算法迭代求解可较好地平衡求解效率和全局最优性。

## 计算结果

### 动力学仿真

在题给的初始几何构型和阻尼系数条件下，使用四阶Adams格式在 $1e-3s$ 步长下求解动力学仿真得到的摆动时间为1.145s。仿真动画见附件result.gif。

### 参数优化

优化过程为减小内存使用与计算时间，使用一阶欧拉格式在 $1e-3s$ 步长下求解动力学仿真得到初步优化结果，再使用四阶Adams格式在 $1e-3s$ 步长下进行动力学仿真结果验证。在题给的阻尼系数条件下，优化得到的结果为

$$\begin{cases} l_1 = 0.04091\text{m} \\ l_2 = 0.04936\text{m} \end{cases}$$

使用最小机械能作为摆动停止判据得到的摆动时间为72.183s，相比初始几何参数的摆动时间大大增加。可以观察得到，此时系统在初始位置时十分接近最小势能处，通过缓慢运动逐渐释放初始势能，可以减少能量耗散于摩擦力。 变更阻尼系数条件，可得到其他几何构型。常见的除上述结果外，另外包括以下两种

1. 取阻尼系数小于 $0.03N \cdot m/(rad \cdot s)$ ，为保证系统摆动时间最长，系统退化为两连杆首尾相连的结构。

$$\begin{cases} l_1 = 0.15\text{m} \\ l_2 = 0\text{m} \end{cases}$$

此时，系统摆动时间为32.549s。相比初始几何参数的摆动时间依然较长，但不如 $0.05N \cdot m/(rad \cdot s)$ 阻尼。

2. 取阻尼系数为 $0.04N \cdot m/(rad \cdot s)$ ，系统近似退化为单摆的结构。

$$\begin{cases} l_1 = 0.15\text{m} \\ l_2 = 0.5\text{m} \end{cases}$$

此时，系统摆动时间为3.014s。相比初始几何参数增加有限。 综合实验结果如下表所示

阻尼系数	$l_1$	$l_2$	摆动时间
$C_1 = C_2 = 0.05$	0.04091m	0.04936m	72.183s
$C_1 = C_2 = 0.05$	0.05m	0.025m	1.145s
$C_1 = C_2 = 0.04$	0.15m	0.5m	3.014s
$C_1 = C_2 = 0.03$	0.15m	0.1m	3.751s
$C_1 = C_2 = 0.01$	0.15m	0m	32.549s
$C_1 = C_2 = 0.003$	0.15m	0m	30.857s

可以看出，阻尼系数取 $0.05N \cdot m/(rad \cdot s)$ 时，优化得到的关节位置可以令系统摆动时间最长。在此基础上逐步减小阻尼，有以下初步的结论：

1. 系统在过阻尼段摆动时间快速衰减，无法通过调整关节位置进一步增加摆动时长。  
2. 系统在欠阻尼段，系统退化为两连杆首尾相连的结构，可达到一定维持摆动时间的效果。

## 总结

本项工作主要包括以下两点：

1. 对两自由度双摆进行了动力学建模分析，并给出了相应的动画仿真。  
2. 通过优化关节位置，使双摆摆动时间最长。在最优长度条件下，考察了不同阻尼系数下摆动时间的变动规律。

需要注意的是，本工作中主要使用数值方法对动力学建模，求解精度受制于求解效率，最终得到的动力学仿真结果不可避免地存在一定水平的误差。同时，使用遗传算法用于机构参数优

化无法保证全局最优性。关于其他优化方法的讨论对于提高结果的可靠性依然具有一定的必要性。

## 参考教材

1. [Haug E.J.] Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems
2. [洪嘉振] 计算多体系统动力学
3. 高等机械动力学讲义