$P_n(x_i)=f_i, i=0,\dots,n$ é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+a_3x_0^3+\ldots+a_nx_0^n=f_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3+\ldots+a_nx_1^n=f_1 \\ \vdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+a_3x_n^3+\ldots+a_nx_n^n=f_n \end{cases}$$

e o sistema tem solução única desde que o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas seja não nulo

Seja A a matriz de coeficientes

$$A=\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

é uma matriz de Vandermonde cujo $det(A)$ é dado por :

$$det(A)=\prod_{1\le i<j\le n}(X_j-X_i)$$

Como $x_i\neq x_j$ para $i\neq j$, temos que $det(A)\neq 0$.

Portanto, existe um único polinômio de grau n que passa por estes pontos.

Entretanto, devido a escolha dos pontos, pode levar à uma matriz mal condicionada, gerando um resultado inesperado.