

# Previsões futuras com Lagrange

---

Alunos: Caio Mariano, Guilherme Paiva, Ygor Henrique.

Utilizamos o método de interpolação de Lagrange para aproximar dados futuros relacionados a dois temas:

1. Poluição atmosférica por veículos automotivos.
2. Desmatamento da Amazônia Legal ao longo dos anos.

No primeiro verificamos a quantidade de CO emitido na queima de gasolina, etanol e diesel nos últimos anos e então calculamos qual será a quantidade de CO emitida por cada combustível nos próximos anos.

Na segunda analisamos a área da Amazônia Legal que é desmatada por ano e aproximamos a quantidade de área desmatada em alguns anos.

O método de Lagrange utiliza a fórmula:

$$\sum_{k=1}^n y_k L_k(x)$$

Onde  $L_k$  é dado por:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Formando um polinômio de forma:  $p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$

que aproxima os pontos dados.

O erro em polinômios interpoladores é dado por:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0) (x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

No entanto o parâmetro  $\xi$  não é conhecido no intervalo, por isso não podemos calcular essa expressão.

Então utilizamos a aproximação :

$$M = \max_{x \in [a, b]} \left| f^{(n+1)}(\xi(x)) \right|$$

E calculamos:

$$\frac{M}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

Portanto:

$$f(x) = P(x) + \frac{M}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

Estudo realizado pelo Ministério do Meio Ambiente (MMA) e parceiros resultou no Inventário Nacional de Emissões Atmosféricas por Veículos Automotores Rodoviários 2013. O trabalho tem como base as emissões atmosféricas de gases poluentes do ano de 2012 e apresenta um quadro completo do total de poluentes emitidos no Brasil pelo transporte rodoviário. Técnicos do MMA utilizaram a mesma metodologia para calcular as taxas de 1992, resultando no comparativo do período de 20 anos.

A queda nas emissões, mesmo com o aumento da frota, se deve ao Programa de Controle da Poluição do Ar por Veículos Automotores (Proconve), criado pela Resolução Conama nº 18/1986. Antes da criação do Programa não havia qualquer limite sobre as emissões dos veículos, ou seja, eles eram produzidos ou importados e vendidos sem que se soubesse ou se limitasse o quanto emitiam de gases poluentes.

**Tabela 30: Emissões de CO por veículos movidos à gasolina C e etanol hidratado (t/ano)**

Ano	Automóveis				Comerciais Leves Otto				Motocicletas		
	Gasolina C	Etanol Hidratado	Flex Fuel		Gasolina C	Etanol hidratado	Flex Fuel		Gasolina C	Flex Fuel	
			Gasolina C	Etanol Hidratado			Gasolina C	Etanol Hidratado		Gasolina C	Etanol Hidratado
1980	3.898.303	52.076	0	0	612.127	3.582	0	0	42.646	0	0
1981	3.464.932	174.992	0	0	516.235	11.210	0	0	59.914	0	0
1982	3.594.201	211.310	0	0	507.218	14.963	0	0	92.575	0	0
1983	3.228.404	383.721	0	0	436.052	29.011	0	0	116.169	0	0
1984	2.946.595	609.226	0	0	386.975	51.000	0	0	136.088	0	0
1985	2.940.157	821.889	0	0	376.032	76.656	0	0	163.051	0	0
1986	3.348.276	1.144.606	0	0	417.192	113.683	0	0	217.607	0	0
1987	2.927.927	1.216.911	0	0	356.587	130.053	0	0	223.082	0	0
1988	2.830.543	1.318.932	0	0	337.955	149.764	0	0	250.123	0	0
1989	2.964.814	1.477.572	0	0	349.042	172.754	0	0	296.689	0	0
1990	3.060.517	1.363.320	0	0	360.144	161.368	0	0	333.981	0	0
1991	3.203.185	1.368.817	0	0	379.904	162.711	0	0	369.619	0	0
1992	3.091.042	1.224.955	0	0	368.537	146.173	0	0	370.304	0	0
1993	2.925.723	1.208.475	0	0	349.258	144.635	0	0	358.660	0	0
1994	2.808.932	1.169.015	0	0	335.037	140.335	0	0	357.030	0	0
1995	2.665.081	1.163.646	0	0	318.520	139.795	0	0	368.450	0	0
1996	2.544.852	1.131.971	0	0	308.096	135.625	0	0	406.385	0	0
1997	2.311.006	951.696	0	0	283.236	113.467	0	0	462.663	0	0
1998	1.988.811	875.838	0	0	244.798	103.878	0	0	522.527	0	0
1999	1.655.560	794.694	0	0	204.122	93.750	0	0	556.750	0	0
2000	1.374.125	599.607	0	0	169.367	70.348	0	0	589.940	0	0

2001	1.156.046	502.031	0	0	142.217	58.594	0	0	645.765	0	0
2002	947.041	653.362	0	0	115.948	75.938	0	0	690.203	0	0
2003	864.982	530.828	138	108	105.255	61.459	32	25	744.268	0	0
2004	781.325	547.645	649	2.107	94.523	63.089	125	402	731.974	0	0
2005	687.074	476.143	2.897	7.288	82.697	54.546	427	1.111	689.747	0	0
2006	598.504	382.057	11.692	9.946	71.758	43.581	1.449	1.260	632.708	0	0
2007	561.936	260.994	15.893	29.706	67.213	29.678	1.881	3.556	625.908	0	0
2008	500.128	221.725	25.343	56.417	59.891	25.148	3.017	6.774	583.769	0	0
2009	429.662	164.823	37.484	71.882	51.681	18.660	4.477	8.648	518.794	512	808
2010	378.053	131.771	47.065	94.280	45.725	14.903	5.605	11.299	469.516	1.457	2.278
2011	331.922	104.462	57.224	117.197	40.536	11.794	6.791	13.991	425.151	2.349	3.639
2012	290.441	81.945	67.823	140.310	36.010	9.233	8.018	16.680	385.773	3.193	4.899
2013	253.422	63.634	78.728	163.311	32.090	7.152	9.269	19.331	350.877	3.995	6.070
2014	220.100	49.315	89.812	185.916	28.721	5.495	10.529	21.911	321.048	4.760	7.160
2015	190.249	38.198	100.963	207.882	25.847	4.205	11.787	24.394	295.800	5.487	8.169
2016	163.706	29.795	112.039	228.898	23.422	3.222	13.026	26.747	274.675	6.175	9.096
2017	140.311	23.601	122.907	248.690	21.398	2.490	14.234	28.942	257.159	6.823	9.943
2018	119.815	18.916	133.494	267.132	19.732	1.956	15.402	30.968	242.802	7.433	10.711
2019	102.033	15.476	143.748	284.153	18.383	1.569	16.528	32.823	231.285	8.009	11.410
2020	86.824	12.885	153.638	299.721	17.328	1.285	17.609	34.508	222.334	8.551	12.039



**Tabela 31: Emissões de CO por veículos movidos a diesel e GNV (t/ano)**

Ano	Diesel						GNV
	Comerciais Leves Diesel	Ônibus Urbanos	Ônibus Rodoviários	Caminhões Leves	Caminhões Médios	Caminhões Pesados	
1980	880	34.756	8.142	7.741	13.505	28.900	0
1981	1.347	34.110	7.991	7.712	13.842	28.009	0
1982	2.069	34.675	8.123	7.755	14.451	27.943	0
1983	2.544	33.139	7.763	7.298	13.897	26.383	0
1984	3.061	34.273	8.029	7.509	14.562	27.444	0
1985	3.484	34.783	8.148	7.687	15.284	28.510	0
1986	4.343	39.964	9.362	8.963	18.643	34.045	0
1987	4.719	41.280	9.670	9.215	20.323	36.279	0
1988	5.006	41.909	9.818	9.007	21.027	37.180	0
1989	5.699	44.129	10.338	9.138	22.317	39.698	0
1990	6.143	44.125	10.337	8.860	22.311	40.520	0
1991	6.593	46.396	10.869	8.770	22.551	42.138	0
1992	6.828	48.372	11.332	8.436	22.085	42.729	0
1993	7.296	49.821	11.671	8.154	21.804	44.725	168
1994	8.065	50.908	11.926	7.998	21.985	48.852	309
1995	8.854	52.977	12.410	7.974	22.702	54.039	329
1996	9.313	55.010	12.887	7.836	23.056	57.301	242
1997	10.091	57.831	13.547	7.844	23.803	61.362	316
1998	11.010	58.718	13.755	7.771	24.411	64.757	887
1999	11.549	57.002	13.353	7.567	24.384	65.687	1.068
2000	11.939	56.162	13.157	7.463	24.335	66.791	2.103

2001	11.886	54.592	12.789	7.181	23.234	67.233	3.842
2002	11.799	53.598	12.556	6.974	22.175	68.855	6.583
2003	10.676	48.706	11.410	6.229	19.528	65.386	8.924
2004	10.555	48.276	11.309	6.088	18.747	69.477	10.618
2005	9.796	44.316	10.470	5.559	16.752	68.794	13.068
2006	9.427	42.160	10.030	5.238	15.457	68.907	15.500
2007	9.382	41.860	9.975	5.097	14.727	71.756	17.196
2008	9.339	41.451	9.817	4.909	13.862	75.935	16.482
2009	8.752	38.319	8.905	4.430	12.215	74.683	14.151
2010	8.744	37.798	8.702	4.286	11.509	77.650	21.462
2011	8.766	37.531	8.647	4.169	10.883	81.207	22.333
2012	8.803	37.341	8.610	4.074	10.332	84.964	23.203
2013	8.854	37.219	8.589	3.997	9.850	88.890	24.074
2014	8.898	37.089	8.565	3.932	9.423	92.736	24.945
2015	8.936	36.950	8.539	3.880	9.047	96.498	25.816
2016	8.967	36.799	8.511	3.838	8.718	100.172	26.686
2017	8.990	36.634	8.479	3.805	8.435	103.753	27.557
2018	9.004	36.452	8.443	3.781	8.192	107.237	28.428
2019	9.010	36.248	8.402	3.764	7.987	110.616	29.299
2020	9.006	36.021	8.355	3.753	7.817	113.885	30.169

Gráfico da quantidade de CO emitido pela queima do Etanol

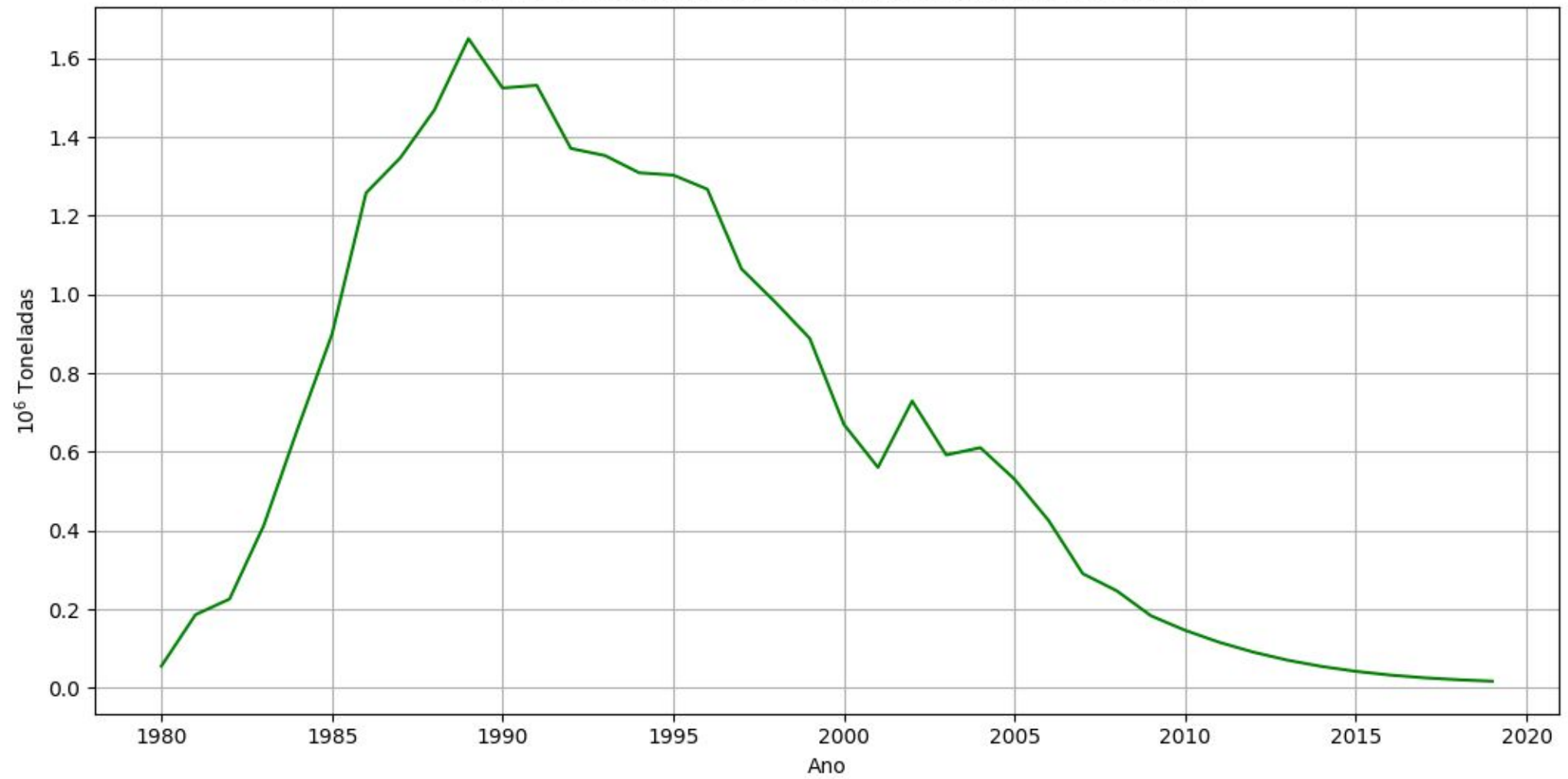


Gráfico da quantidade de CO emitido pela queima do Diesel

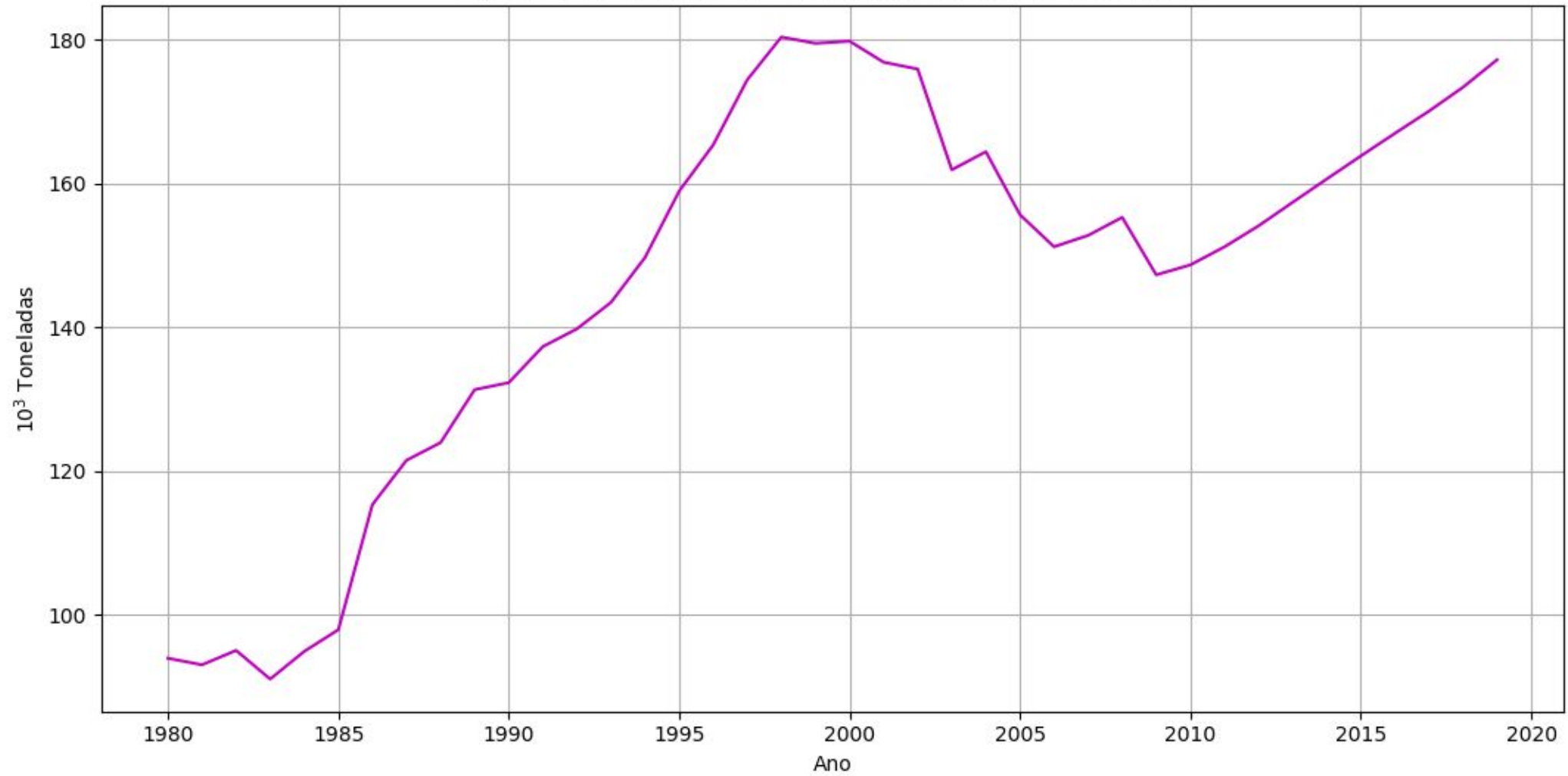
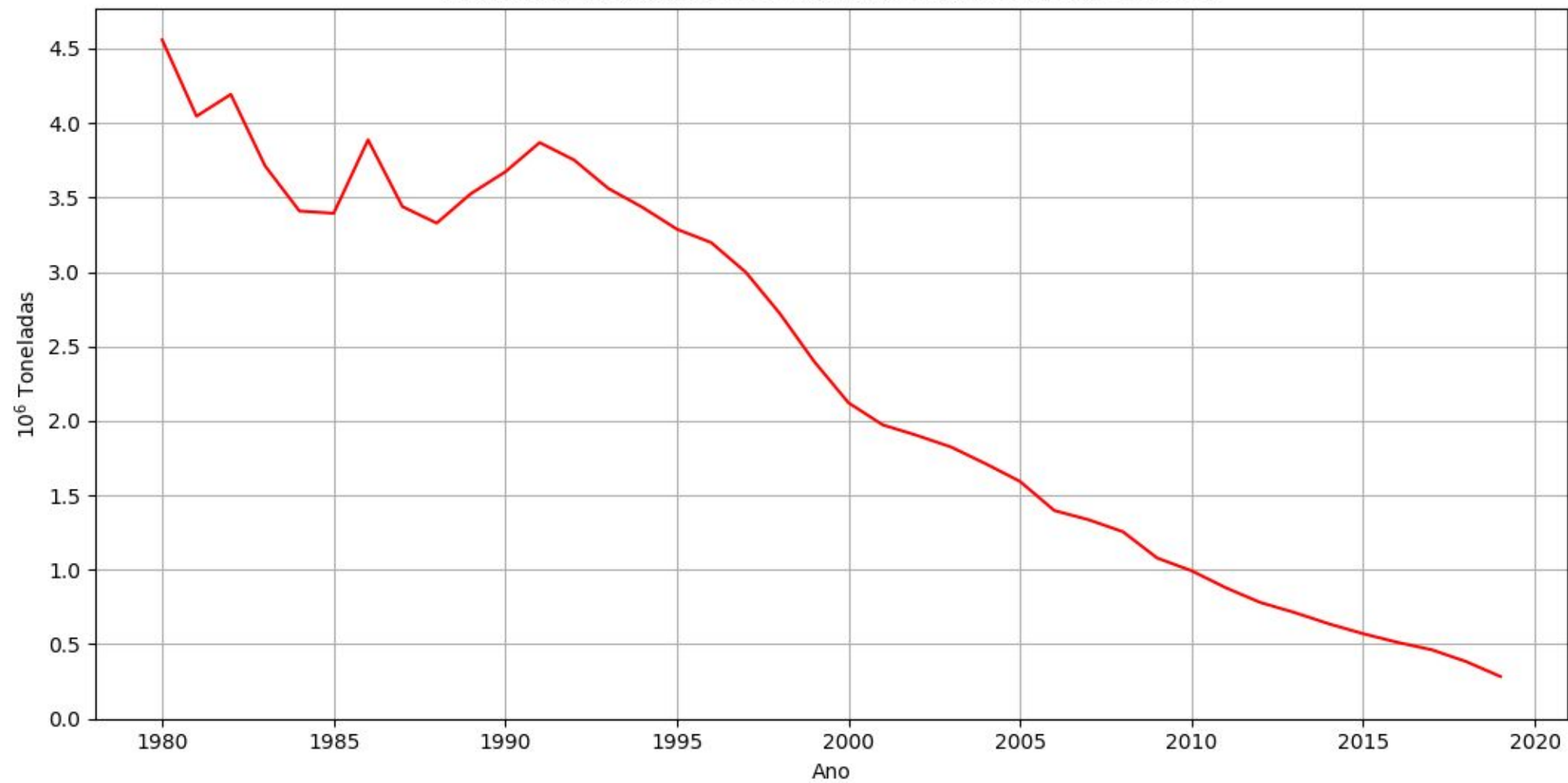
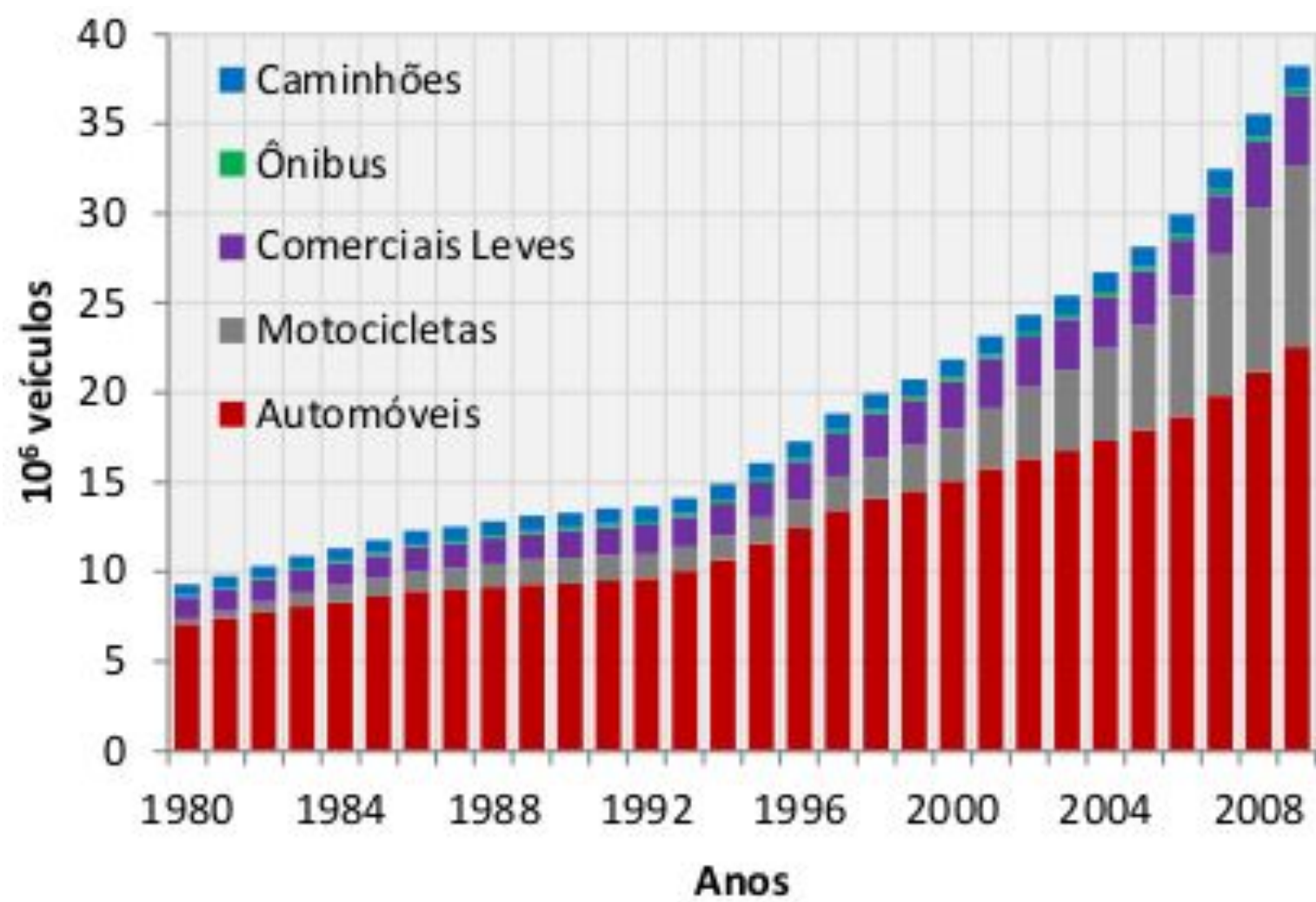


Gráfico da quantidade de CO emitido pela queima da Gasolina





2018	Gasolina	Etanol	Diesel
Valor Estimado Lagrange	382949,49	21051	173430,95
Valor Estimado Oficial	382349	20872	173109
Erro relativo	0,001570528496217	0,008576082790341	0,0018598109

2019	Gasolina	Etanol	Diesel
Valor Estimado Lagrange	282244,5	17310	177259
Valor Estimado Oficial	351701	17045	170027
Erro relativo	0,197487354315171	0,0155470812555	0,042534421



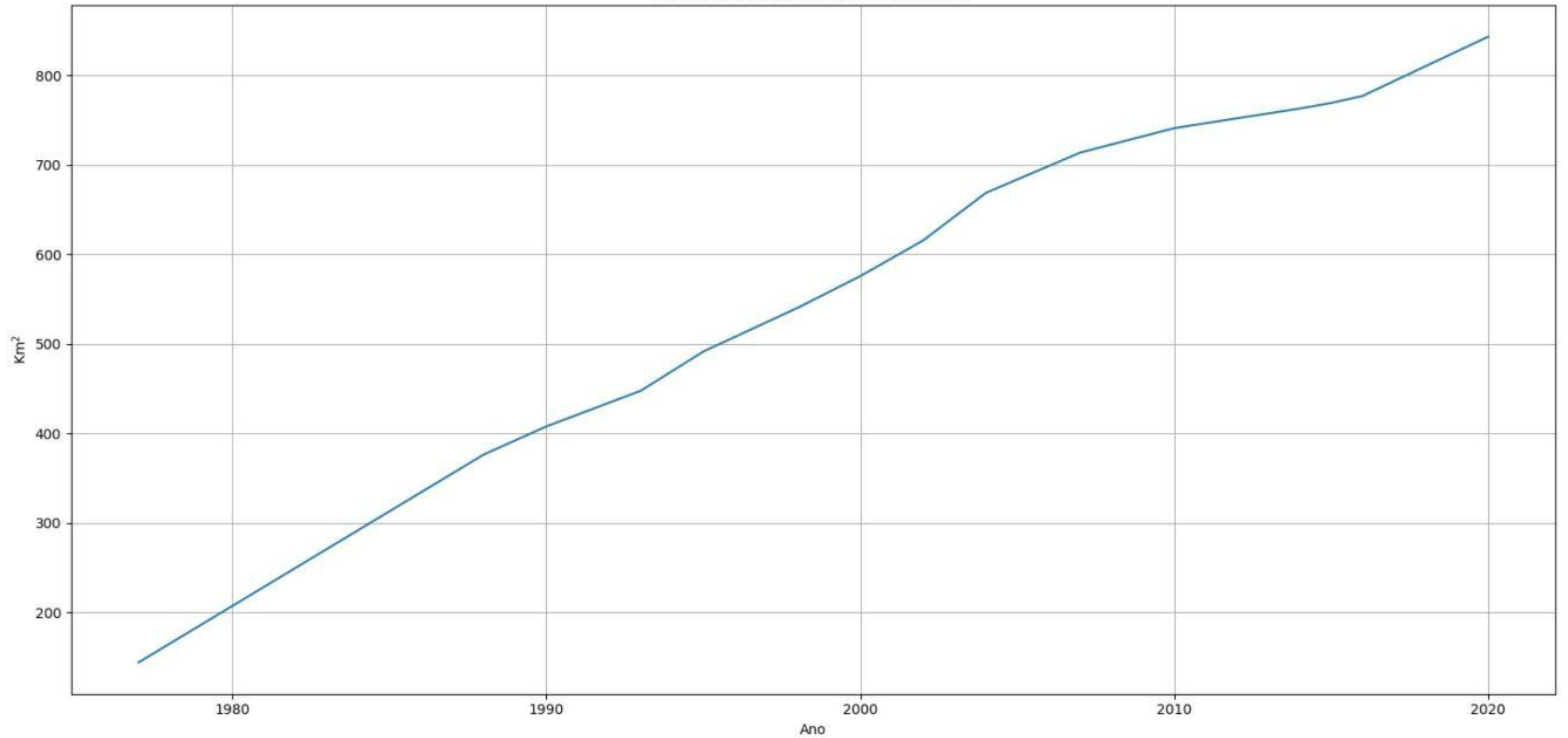
Os dados da tabela foram calculados por estimativas fornecidas pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) e pela Organização das Nações Unidas para Alimentação e Agricultura (FAO). Os números referem-se apenas à Amazônia Brasileira, que corresponde a cerca de 60% da floresta Amazônica.



<b>Period</b>	<b>Estimated Remaining Forest Cover in the Brazilian Amazon (sq. km)</b>	<b>Annual forest loss (sq. km)</b>	<b>Percent of 1970 cover remaining</b>	<b>Total forest loss since 1970 (sq. km)</b>
pre-1970	4,100,000			
1970	4,001,600		97.6%	98,400
1977	3,955,870	21,130	96.5%	144,130
1978-1987	3,744,570	21,130	91.3%	355,430
1988	3,723,520	21,050	90.8%	376,480
1989	3,705,750	17,770	90.4%	394,250
1990	3,692,020	13,730	90.0%	407,980
1991	3,680,990	11,030	89.8%	419,010
1992	3,667,204	13,786	89.4%	432,796
1993	3,652,308	14,896	89.1%	447,692
1994	3,637,412	14,896	88.7%	462,588
1995	3,608,353	29,059	88.0%	491,647
1996	3,590,192	18,161	87.6%	509,808
1997	3,576,965	13,227	87.2%	523,035
1998	3,559,582	17,383	86.8%	540,418
1999	3,542,323	17,259	86.4%	557,677
2000	3,524,097	18,226	86.0%	575,903

2001	3,505,932	18,165	85.5%	594,068
2002	3,484,281	21,651	85.0%	615,719
2003	3,458,885	25,396	84.4%	641,115
2004	3,431,113	27,772	83.7%	668,887
2005	3,412,099	19,014	83.2%	687,901
2006	3,397,814	14,285	82.9%	702,186
2007	3,386,163	11,651	82.6%	713,837
2008	3,373,252	12,911	82.3%	726,748
2009	3,365,788	7,464	82.1%	734,212
2010	3,358,788	7,000	81.9%	741,212
2011	3,352,370	6,418	81.8%	747,630
2012	3,347,799	4,571	81.7%	752,201
2013	3,341,908	5,891	81.5%	758,092
<u>2014</u>	3,336,896	5,012	81.4%	763,104
<u>2015</u>	3,330,689	6,207	81.2%	769,311
<u>2016</u>	3,322,796	7,893	81.0%	777,204
<u>2017</u>	3,316,172	6,624	80.9%	768,935

Floresta Amazônica-Área Desmatada



Ano	2018	2019	2020
Valor estimado Lagrange	801.59	819.86	843.37

$P_n(x_i) = f_i, i = 0, \dots, n$  é equivalente ao sistema :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \dots + a_n x_0^n = f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \dots + a_n x_1^n = f_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + \dots + a_n x_n^n = f_n \end{cases}$$

e o sistema tem solução única desde que o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas seja não nulo

Seja  $A$  a matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

é uma matriz de Vandermonde cujo  $\det(A)$  é dado por :

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Como  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$ , temos que  $\det(A) \neq 0$ .

Portanto, existe um único polinômio de grau  $n$  que passa por estes pontos.

Entretanto, devido a escolha dos pontos, pode levar à uma matriz mal condicionada, gerando um resultado inesperado.



## Referencias Bibliográficas:

Ruggiero, M. A. G. , and Lopes, V. L. d. R. Cálculo Numérico. Aspectos Teóricos e Computacionais, 2ª ed. Pearson Makron Books, 2014.

[https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/i1-polinomios\\_de\\_lagrange.html](https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/i1-polinomios_de_lagrange.html)

<http://www.mma.gov.br/mma-em-numeros/emissoes-veiculares>

[http://portal.antt.gov.br/index.php/content/view/32492/2\\_Inventario\\_Nacional\\_de\\_Emissoes\\_Atmosfericas\\_por\\_Veiculos\\_Automotores\\_Rodoviaros.html](http://portal.antt.gov.br/index.php/content/view/32492/2_Inventario_Nacional_de_Emissoes_Atmosfericas_por_Veiculos_Automotores_Rodoviaros.html)

[https://rainforests.mongabay.com/amazon/deforestation\\_calculations.html](https://rainforests.mongabay.com/amazon/deforestation_calculations.html)

<https://news.mongabay.com/2015/05/whats-the-current-deforestation-rate-in-the-amazon-rain-forest/>