

# APPLICATIONS LINÉAIRES

## 1 Définition et premiers exemples

### 1.1 Définition

#### Définition 1.1 Application linéaire

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On appelle **application linéaire de  $E$  dans  $F$**  toute application  $f : E \rightarrow F$  vérifiant :

- (i)  $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$  i.e.  $f$  est un morphisme du groupe  $(E, +)$  dans le groupe  $(F, +)$  ;
- (ii)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$ .

Cette définition équivaut à la suivante :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$$

L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est noté  $\mathcal{L}(E, F)$ .

Une application linéaire de  $E$  dans  $E$  est appelé un **endomorphisme** (linéaire) de  $E$ . L'ensemble des endomorphismes de  $E$  est noté  $\mathcal{L}(E)$ .

Une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  est appelé une **forme linéaire** de  $E$ . L'ensemble des formes linéaires de  $E$  est noté  $E^*$ .

#### REMARQUE.

- ◇ On a en particulier  $f(0_E) = 0_F$ .
- ◇ L'application nulle  $\begin{cases} E & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto 0_F \end{cases}$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .
- ◇ L'identité  $\text{Id}_E$  est un endomorphisme de  $E$ .

### 1.2 Exemples

#### 1.2.1 Géométrie

##### Exemple 1.1

On note  $\vec{E}$  l'ensemble des vecteurs de l'espace.

- ◇ Soit  $\vec{v} \in \vec{E}$ . L'application  $\begin{cases} \vec{E} & \longrightarrow \vec{E} \\ \vec{u} & \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v} \end{cases}$  est un endomorphisme de  $\vec{E}$ .
- ◇ Soit  $\vec{v} \in \vec{E}$ . L'application  $\begin{cases} \vec{E} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{u} & \longmapsto \vec{u} \cdot \vec{v} \end{cases}$  est une forme linéaire de  $\vec{E}$ .
- ◇ Soit  $\vec{v}, \vec{w}$ . L'application  $\begin{cases} \vec{E} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{u} & \longmapsto \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \end{cases}$  est une forme linéaire de  $\vec{E}$ .

## 1.2.2 Suites

**Exemple 1.2**

- ◇ L'application  $\begin{cases} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \longmapsto (u_{n+1}) \end{cases}$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .
- ◇ Notons  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites convergentes. L'application qui à  $(u_n) \in E$  associe  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  est une forme linéaire sur  $E$ .

## 1.2.3 Espaces fonctionnels

**Exemple 1.3**

Soit  $I$  un intervalle.

- ◇ L'application  $\begin{cases} \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R}^I \\ f & \longmapsto f' \end{cases}$  est linéaire.
- ◇ Soit  $a \in \bar{I}$ . Notons  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions définies sur  $I$  admettant une limite finie en  $a$ .  
L'application  $\begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \lim_a f \end{cases}$  est une forme linéaire de  $E$ .
- ◇ Soit  $a \in I$ . L'application  $\begin{cases} \mathbb{R}^I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto f(a) \end{cases}$  est une forme linéaire de  $\mathbb{R}^I$ .

## 1.2.4 Polynômes

**Exemple 1.4**

- ◇ L'application  $\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto P' \end{cases}$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .
- ◇ Soit  $a \in \mathbb{K}$ . L'application  $\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow \mathbb{K} \\ P & \longmapsto P(a) \end{cases}$  est une forme linéaire de  $\mathbb{K}[X]$ .
- ◇ Soit  $Q \in \mathbb{K}[X]$ . L'application  $\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto PQ \end{cases}$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .

1.2.5 Espaces  $\mathbb{K}^n$ **Exemple 1.5**

- ◇ L'application  $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto (y - 2x, 3y + x - 2z, x + z) \end{cases}$  est linéaire.
- ◇ L'application  $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x + y + 1 \end{cases}$  n'est pas linéaire.
- ◇ L'application  $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x^2 + y^2 \end{cases}$  n'est pas linéaire.

### 1.3 Opérations sur les applications linéaires

#### Théorème 1.1 Opérations sur les applications linéaires

- (i) Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2, \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F)$$

- (ii) La composée d'applications linéaires est linéaire.  
Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .
- (iii) La composition à gauche et à droite est linéaire.  
Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall (g, h) \in \mathcal{L}(F, G)^2, (\lambda g + \mu h) \circ f = \lambda g \circ f + \mu h \circ f$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2, \forall h \in \mathcal{L}(F, G), h \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda h \circ f + \mu h \circ g$$

#### Corollaire 1.1 Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Le vecteur nul de  $\mathcal{L}(E, F)$  est l'application nulle  $\begin{cases} E & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto 0_F \end{cases}$ .

**REMARQUE.**  $\mathcal{L}(E, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $F^E$ .

#### Corollaire 1.2 Anneau $\mathcal{L}(E)$

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est un anneau (**non commutatif** et **non intègre** en général). De plus,  $1_{\mathcal{L}(E)} = \text{Id}_E$ .

**REMARQUE.** Si  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes d'un même espace vectoriel, la composée  $u \circ v$  sera parfois notée  $uv$ .

#### Exemple 1.6

Les applications  $\begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto f' \end{cases}$  et  $\begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto (x \mapsto xf(x)) \end{cases}$  sont deux endomorphismes de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  qui ne commutent pas.

#### Exemple 1.7

Considérons  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x, 0) \end{cases}$  et  $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (0, y) \end{cases}$ . On a  $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  et  $g \circ f = f \circ g = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$  et pourtant  $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$  et  $g \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ .

Comme  $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est un anneau, on a les deux formules suivantes.

#### Proposition 1.1

Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  qui **commutent**.

$$(i) \quad (f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$$

$$(ii) \quad f^n - g^n = (f - g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}$$

La notion suivante n'est pas au programme de MPSI.

### Structure d'algèbre

Soit  $\mathbb{K}$  un corps. On appelle  **$\mathbb{K}$ -algèbre** tout quadruplet  $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$  tel que :

- (i)  $(\mathcal{A}, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ;
- (ii)  $(\mathcal{A}, +, \times)$  est un anneau ;
- (iii)  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, (\lambda \cdot x) \times (\mu \cdot y) = (\lambda \mu) \cdot (x \times y)$ .

Si  $\times$  est commutative, on dit que l'algèbre est commutative.

### Exemple 1.8

Si  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre non commutative en général.

## 1.4 Isomorphismes linéaires

### Définition 1.2 Isomorphisme linéaire

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On appelle **isomorphisme (linéaire)** toute application linéaire **bijective** de  $E$  sur  $F$ .

Un isomorphisme de  $E$  sur  $E$  est appelé un **automorphisme**.

On dit que  $E$  est **isomorphe à**  $F$  ou que  $E$  et  $F$  sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ .

### Proposition 1.2 Propriétés des isomorphismes

Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- (i) Si  $f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ ,  $f^{-1}$  est un isomorphisme de  $F$  sur  $E$ .
- (ii) Si  $f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$  et  $g$  un isomorphisme de  $F$  sur  $G$ , alors  $g \circ f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $G$ .

### Exemple 1.9

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z & \longmapsto & (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a, b) & \longmapsto & a + ib \end{cases} \quad \text{est un isomorphisme de du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } \mathbb{C} \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ d'isomorphisme réciproque}$$

### Corollaire 1.3 Groupe linéaire

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de  $E$  muni de la loi  $\circ$  est un groupe. On l'appelle le **groupe linéaire** de  $E$  et on le note  $\operatorname{GL}(E)$ . Plus précisément, c'est le groupe des éléments inversibles de  $\mathcal{L}(E)$ .

### Exemple 1.10

L'espace vectoriel des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de polynôme caractéristique  $X^2 + aX + b$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^2$ .

### Exercice 1.1

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - 2f + 3\operatorname{Id}_E = 0$ . Montrer que  $f \in \operatorname{GL}(E)$  et déterminer  $f^{-1}$  en fonction de  $f$ .

## 2 Images directe et réciproque par une application linéaire

### 2.1 Images directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel

#### Proposition 2.1 Images directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $A$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $B$  un sous-espace vectoriel de  $F$ . Alors

- (i)  $f(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ ;
- (ii)  $f^{-1}(B)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

### 2.2 Noyau et image d'une application linéaire

#### Définition 2.1 Noyau et image d'une application linéaire

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- (i) Le **noyau** de  $f$  noté  $\text{Ker } f$  est défini par  $\text{Ker } f = f^{-1}(\{0_F\})$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- (ii) L'**image** de  $f$  notée  $\text{Im } f$  est définie par  $\text{Im } f = f(E)$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

#### Méthode

#### Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel

Soit  $F$  une partie d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Pour montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , il suffit de montrer que  $F$  est le noyau d'une application linéaire de  $E$  dans un autre  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

#### Exemple 2.1

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$  est le noyau de la forme linéaire  $\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto x + y + z \end{cases}$ .  $F$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

#### Exemple 2.2

L'application  $\begin{cases} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto f'' \end{cases}$  est linéaire. Son noyau, à savoir l'ensemble des fonctions affines de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  et donc un espace vectoriel.

#### Exercice 2.1

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer que  $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$  et que  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ .  
Montrer que  $g \circ f = 0$  **si et seulement si**  $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ .

#### Théorème 2.1 Injectivité et surjectivité d'une application linéaire

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- (i)  $f$  est injective **si et seulement si**  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ .
- (ii)  $f$  est surjective **si et seulement si**  $\text{Im } f = F$ .

**Exemple 2.3**

Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ \mathcal{P} & \longmapsto & \mathcal{P}' \end{cases}$ . Alors  $\text{Ker } f = \mathbb{K}_0[X]$  et  $\text{Im } f = \mathbb{K}[X]$ . Ainsi  $f$  est surjective mais pas injective.

**Exemple 2.4**

Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+1} - u_n) \end{cases}$ . Alors  $\text{Ker } f = \text{vect}((1))$  et  $\text{Im } f = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

**Exercice 2.2**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent. Montrer que  $f$  est non injectif.

**Exercice 2.3**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u_1, \dots, u_n \in E$ .

Notons  $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \end{cases}$ . Démontrer les assertions suivantes.

- (i) La famille  $(u_1, \dots, u_n)$  engendre  $E$  **si et seulement si**  $\Phi$  est surjective.
- (ii) La famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre **si et seulement si**  $\Phi$  est injective.
- (iii) La famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$  **si et seulement si**  $\Phi$  est injective.

**2.3 Image d'une famille de vecteurs****Proposition 2.2**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $A \subset E$ . Alors  $f(\text{vect}(A)) = \text{vect}(f(A))$ .  
En particulier, si  $(u_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $E$  (notamment une base),  $(f(u_i))_{i \in I}$  engendre  $\text{Im } f$ .

**Proposition 2.3**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ .

- (i)  $f$  est surjective **si et seulement si**  $(f(u_i))_{i \in I}$  engendre  $F$ .
- (ii)  $f$  est injective **si et seulement si**  $(f(u_i))_{i \in I}$  est libre dans  $F$ .
- (iii)  $f$  est bijective **si et seulement si**  $(f(u_i))_{i \in I}$  est une base de  $F$ .

**Exercice 2.4**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Montrer que  $f$  est surjective **si et seulement si** l'image d'une famille génératrice de  $E$  est une famille génératrice de  $F$ .
2. Montrer que  $f$  est injective **si et seulement si** l'image de toute famille libre de  $E$  est une famille libre de  $F$ .

**Proposition 2.4 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soient  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de  $F$ . Il existe une unique application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $f(e_i) = f_i$  pour tout  $i \in I$ .

**REMARQUE.** Ce résultat signifie que pour définir une application linéaire, il suffit de la définir sur une base. Il prendra toute son importance lors de l'étude des matrices.

## 2.4 Cas d'une application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$

Une application linéaire de  $\mathbb{K}^n$  dans  $\mathbb{K}^p$  est souvent donnée sous forme d'un  $p$ -uplet d'expressions linéaires en fonction des  $n$  coordonnées d'un élément de  $\mathbb{K}^n$ .

### Exemple 2.5

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z) \end{cases}.$$

#### Méthode Déterminer le noyau

Le noyau de  $f$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  défini par le système linéaire  $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ . On a vu au chapitre précédent comment déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.

#### Méthode Déterminer l'image

L'image est formé des vecteurs  $x(1, 2, 1) + y(2, 1, 2) + z(1, -1, 1)$  avec  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Ainsi  $\text{Im } f = \text{vect}((1, 2, 1), (2, 1, 2), (1, -1, 1))$ . On a vu au chapitre précédent comment déterminer une base et un système d'équations cartésiennes de ce sous-espace vectoriel.

**Méthode** Déterminer le noyau et l'image en même temps !

On reprend la méthode matricielle utilisée pour déterminer le noyau. On écrit d'abord la matrice correspondant à  $f$  puis on ajoute une matrice carrée formée de zéros et de 1 sur la diagonale.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Puis on pivote sur les colonnes.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array}$$

Encore une fois pour avoir la dernière colonne nulle.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) C_3 \leftarrow C_3 - C_2$$

On a alors  $\text{Im } f = \text{vect}((1, 2, 1), (0, -3, 0))$  et  $\text{Ker } f = \text{vect}((-3, -1, 1))$ .

## 2.5 Restriction et corestriction d'une application linéaire

**Proposition 2.5** Restriction et corestriction d'une application linéaire

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- (i) Si  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $f|_G \in \mathcal{L}(G, F)$ .
- (ii) Si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  contenant  $\text{Im } f$ , alors  $f|_H \in \mathcal{L}(E, H)$ .
- (iii) Si  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  contenant  $f(G)$ , alors  $f|_G^H \in \mathcal{L}(G, H)$ .



**Exemple 2.6**

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $\text{Ker } f|_G = \text{Ker } f \cap G$  et  $\text{Im } f|_G = f(G)$ .  
 Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors  $\text{Im } g|_{\text{Im } f} = \text{Im } g \circ f$ .

**REMARQUE.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$  i.e.  $f(F) \subset F$ , on dit que  $f$  induit un endomorphisme de  $F$  (qui n'est autre que  $f|_F$ ).

**Proposition 2.6**

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $E_1, \dots, E_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$ .

Soient  $(u_1, \dots, u_p) \in \prod_{k=1}^p \mathcal{L}(E_k, F)$ . Il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $u|_{E_k} = u_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

**2.6 Formes linéaires et hyperplans****Définition 2.2 Formes coordonnées dans une base**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $(e_i)_{i \in I}$ . Pour tout  $i \in I$ , il existe une unique forme linéaire sur  $e_i^*$  telle que  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$  pour tout  $j \in I$ .  
 La famille  $(e_i^*)_{i \in I}$  s'appelle la famille des **formes coordonnées** relativement à la base  $(e_i)_{i \in I}$ .

**Proposition 2.7**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $(e_i)_{i \in I}$ . Pour tout  $x \in E$ ,  $x = \sum_{i \in I} e_i^*(x) e_i$ .

**REMARQUE.** De là vient le nom de «formes coordonnées».

**Définition 2.3 Hyperplan**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle **hyperplan** de  $E$  tout noyau d'une forme linéaire non nulle sur  $E$ .

**Exemple 2.7**

L'application  $\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto 4x - 5y + 3z \end{cases}$  est une forme linéaire de  $\mathbb{R}^3$ .  
 $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 5y + 3z = 0\}$  est donc un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemple 2.8**

Soit  $a \in \mathbb{K}$ . L'application  $\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow \mathbb{K} \\ P & \longmapsto P(a) \end{cases}$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{K}[X]$ .  
 $H = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(a) = 0\}$  est donc un hyperplan de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Proposition 2.8 Hyperplans et droites vectorielles**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- (i) Si  $H$  est un hyperplan de  $E$  et si  $D$  est une droite vectorielle de  $E$  non contenue dans  $H$ , alors  $E = H \oplus D$ .
- (ii) Réciproquement tout supplémentaire d'une droite vectorielle de  $E$  est un hyperplan.

### 3 Applications linéaires en dimension finie

#### 3.1 Isomorphisme et dimension

##### Théorème 3.1 Isomorphisme et dimension

- (i) Si deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont isomorphes et si  $E$  est de dimension finie, alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim E = \dim F$ .
- (ii) Deux espaces vectoriels de même dimension finie sont isomorphes.

**REMARQUE.** Ce résultat est d'une importance capitale puisqu'il dit que tous les espaces vectoriels de dimension  $n$  sont isomorphes à  $\mathbb{K}^n$ . L'étude d'un espace vectoriel de dimension  $n$  se résume par exemple à l'étude de  $\mathbb{K}^n$ , ce qu'exploite à fond la théorie des matrices.

**REMARQUE.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est seulement injective, on peut tout de même affirmer que  $\dim E \leq \dim F$ .

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est seulement surjective, on peut tout de même affirmer que  $\dim E \geq \dim F$ .

##### Exemple 3.1

$\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{C}$  sont isomorphes en tant que  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

##### Exemple 3.2

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  n'est pas de dimension finie. En effet, le sous-espace vectoriel des suites presque nulles  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$  est isomorphe à  $\mathbb{K}[X]$ . Or  $\mathbb{K}[X]$  n'est pas de dimension finie donc  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$  non plus. Comme  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , ce dernier n'est pas non plus de dimension finie.

##### Exemple 3.3

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . L'ensemble  $E$  des suites réelles  $p$ -périodiques est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension car

$$\begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, \dots, u_{p-1}) \end{cases} \text{ est un isomorphisme.}$$

#### 3.2 Rang d'une application linéaire

##### Définition 3.1 Rang d'une application linéaire

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On dit que  $f$  est de **rang fini** si  $\text{Im } f$  est de dimension finie. On appelle alors **rang** de  $f$  la dimension de  $\text{Im } f$  et on la note  $\text{rg } f$ .

**REMARQUE.** Si  $(u_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $E$  et si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est de rang fini, alors  $\text{rg } f = \text{rg}((f(u_i))_{i \in I})$ .

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $E$  et  $F$  sont de dimensions finies,  $\text{rg } f \leq \min(\dim E, \dim F)$ .

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie, alors  $f(G)$  est de dimension finie et  $\dim f(G) \leq \dim G$  (une application linéaire fait toujours baisser la dimension).

##### **Méthode** Déterminer le rang d'une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$

On a vu au chapitre précédent comment déterminer une base de l'image d'une telle application linéaire. Le cardinal de cette base est le rang de l'application linéaire.

**Théorème 3.2**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels avec  $E$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $S$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $E$ , alors  $f$  induit un isomorphisme de  $S$  sur  $\text{Im } f$ .

| **REMARQUE.** En termes savants, on dit qu'on factorise  $f$  par son noyau.

**Corollaire 3.1 Théorème du rang**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels avec  $E$  de dimension finie. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$$\dim E = \text{rg } f + \dim \text{Ker } f$$

**Exemple 3.4**

On peut prouver différemment la formule  $\dim E \times F = \dim E + \dim F$  en considérant l'application

$$\begin{cases} E \times F & \longrightarrow E \\ (x, y) & \longmapsto x \end{cases}.$$
**Exemple 3.5**

On peut aussi prouver différemment la formule de Grassmann  $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$  en considérant l'application

$$\begin{cases} F \times G & \longrightarrow E \\ (x, y) & \longmapsto x + y \end{cases}.$$
**Corollaire 3.2 Injectivité, surjectivité et rang**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

- (i)  $f$  est surjective **si et seulement si**  $\text{rg } f = \dim F$ .
- (ii)  $f$  est injective **si et seulement si**  $\text{rg } f = \dim E$ .

**Corollaire 3.3**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de même dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est bijective.
- (ii)  $f$  est injective.
- (iii)  $f$  est surjective.

C'est en particulier le cas lorsque  $f$  est un **endomorphisme** d'un espace vectoriel de dimension finie.

**REMARQUE.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- Si  $\dim E < \dim F$ ,  $f$  ne peut être surjective.
- Si  $\dim E > \dim F$ ,  $f$  ne peut être injective.

**Méthode Prouver qu'une application linéaire est un isomorphisme**

Si on sait que les dimensions de l'espace d'arrivée et de l'espace de départ sont égales, pour montrer qu'une application linéaire est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective **ou** surjective (en pratique, on montre plus souvent l'injectivité). Encore une fois, travail divisé par deux grâce à la dimension !

**Exercice 3.1**

Montrer que  $\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x + y, -x + y, z) \end{cases}$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition 3.1**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de **même** dimension **finie** et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $f$  est bijective **si et seulement si** il existe  $g \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que  $g \circ f = \text{Id}_E$  **ou**  $f \circ g = \text{Id}_F$ . Dans ce cas  $g = f^{-1}$ .

**REMARQUE.** En dimension finie, il suffit donc de prouver l'inversibilité à gauche **ou** à droite.

On suppose  $E$  de dimension finie. Pour montrer que  $f \in \mathcal{L}(E)$  est un automorphisme d'inverse  $g \in \mathcal{L}(E)$ , il suffit de prouver que  $g \circ f = \text{Id}_E$  **ou**  $f \circ g = \text{Id}_E$ .

**Proposition 3.2 Invariance du rang par composition avec un isomorphisme**

Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois espaces vectoriels de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ .

- (i) Si  $u$  est un isomorphisme, alors  $\text{rg } v \circ u = \text{rg } v$ .
- (ii) Si  $v$  est un isomorphisme, alors  $\text{rg } v \circ u = \text{rg } u$ .

**Exercice 3.2**

Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois espaces vectoriels de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer que  $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg } u, \text{rg } v)$ .

**3.3 Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$** **Exercice 3.3**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(f_j)_{1 \leq j \leq p}$ .

Montrer que l'application  $\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow \mathbb{K}^{np} \\ u & \longmapsto (f_j^*(u(e_i)))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \end{cases}$  est un isomorphisme.

**Proposition 3.3 Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$** 

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est aussi de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$$

**REMARQUE.** En particulier, si  $E$  est de dimension finie,  $\dim E^* = \dim E$ . On montre alors que si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$ .

**3.4 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie****Proposition 3.4 Hyperplans en dimension finie**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors les hyperplans de  $E$  sont les sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension  $n - 1$ .

**Exemple 3.6**

Les hyperplans de l'espace vectoriel géométrique sont les plans vectoriels. Les hyperplans du plan vectoriel géométrique sont les droites vectorielles.

**Proposition 3.5 Équations d'un hyperplan en dimension finie**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  muni d'une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

- (i) Tout hyperplan de  $E$  admet une équation de la forme  $\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$  où  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées dans la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ .
- (ii) Soient  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_1, \dots, b_n)$  des  $n$ -uplets de  $\mathbb{K}^n$  non nuls. Alors  $\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$  et  $\sum_{k=1}^n b_k x_k = 0$  sont deux équations d'un même hyperplan **si et seulement si** les  $n$ -uplets  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_1, \dots, b_n)$  sont colinéaires.

**Exemple 3.7**

Tout plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  admet une équation de la forme  $ax + by + cz = 0$  où  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .  
Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lambda ax + \lambda by + \lambda cz = 0$  est également une équation de ce même hyperplan.

**Proposition 3.6 Intersections d'hyperplans**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ .

- (i) L'intersection de  $m$  hyperplans de  $E$  est de dimension au moins  $n - m$ .
- (ii) Tout sous-espace vectoriel de dimension  $n - m$  est l'intersection de  $m$  hyperplans.

**Exemple 3.8**

Une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  est l'intersection de deux plans vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .  
Elle admet donc un système d'équations cartésiennes formé par deux équations de plans.

**Exemple 3.9**

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à  $m$  équations à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et à  $n$  inconnues dans  $\mathbb{K}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  de dimension au moins  $n - m$ .

## 4 Projecteurs, symétries, homothéties

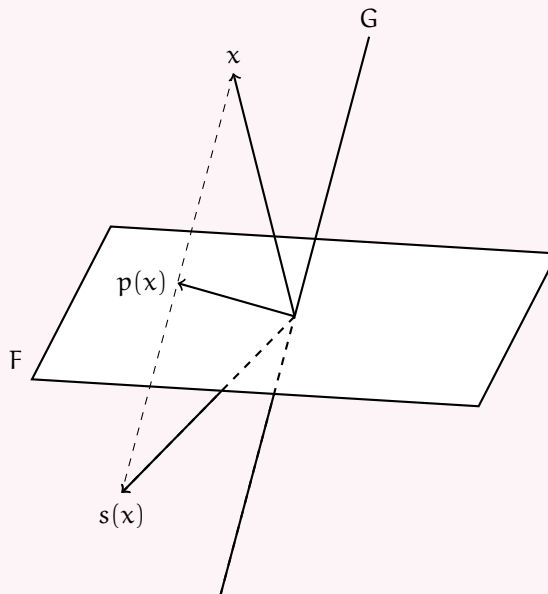
### 4.1 Projecteurs et symétries

#### Définition 4.1 Projecteur et symétrie

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Tout vecteur  $x$  de  $E$  se décompose de manière unique sous la forme  $x = x_F + x_G$ .

- (i) On appelle **projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$**  l'application qui à  $x$  associe  $x_F$ .
- (ii) On appelle **symétrie par rapport  $F$  parallèlement à  $G$**  l'application qui à  $x$  associe  $x_F - x_G$ .

Le sous-espace vectoriel  $G$  est appelé la direction du projecteur ou de la symétrie.



**REMARQUE.** Si  $p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $q$  est le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$ , alors  $p + q = \text{Id}_E$ .

**REMARQUE.** Si  $p$  et  $s$  sont le projecteur et la symétrie associés au même couple de sous-espaces supplémentaires, alors  $s = 2p - \text{Id}_E$  ou encore  $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$ .

#### Proposition 4.1 Propriétés des projecteurs

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Soit  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

- (i)  $p$  est un endomorphisme de  $E$ .
- (ii)  $p^2 = p$ .
- (iii)  $\text{Ker } p = \text{Im}(p - \text{Id}_E) = G$  et  $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = F$ .

**REMARQUE.**  $x \in G \iff p(x) = 0_E$  et  $x \in F \iff p(x) = x$ .

#### Proposition 4.2 Caractérisation des projecteurs

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $p$  est un projecteur **si et seulement si**  $p^2 = p$ .

Dans ce cas,  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$  et  $p$  est le projecteur sur  $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$  parallèlement à  $\text{Ker } p$ .

**REMARQUE.**  $x \in \text{Im } p \iff p(x) = x$ .

#### Exemple 4.1

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'application qui à un polynôme associe la somme de ses monômes de degré inférieur ou égal à  $n$  est le projecteur sur  $\mathbb{K}_n[X]$  parallèlement à  $X^{n+1}\mathbb{K}_n[X]$ .

### Projecteurs associés à une décomposition en somme directe

Soient  $E_1, \dots, E_n$  des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ . Pour tout  $x \in E$ , il existe un unique  $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $p_i$  l'application qui à  $x \in E$  associe  $x_i$ . Alors  $p_i$  le projecteur sur  $E_i$  parallèlement à  $\bigoplus_{j \neq i} E_j$  et pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ ,  $p_i \circ p_j = 0$ .

### Proposition 4.3 Propriétés des symétries

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Soit  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

- (i)  $s$  est un endomorphisme de  $E$ .
- (ii)  $s^2 = \text{Id}_E$ .
- (iii)  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = F$  et  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = G$ .

**REMARQUE.** La dernière assertion signifie que  $x \in F \iff s(x) = x$  et que  $x \in G \iff s(x) = -x$ .

### Proposition 4.4 Caractérisation des symétries

Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $s$  est une symétrie **si et seulement si**  $s^2 = \text{Id}_E$ .

Dans ce cas,  $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$  et  $s$  est la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$  parallèlement à  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ .

### Exemple 4.2

L'application qui à une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  associe la fonction  $x \mapsto f(-x)$  est la symétrie par rapport au sous-espace vectoriel des fonctions paires parallèlement au sous-espace vectoriel des fonctions impaires.

**REMARQUE.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un espace vectoriel  $E$ . Si  $p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ , alors  $s = 2p - \text{Id}_E$ .

## 4.2 Homothéties

### Définition 4.2 Homothétie

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On appelle **homothétie de  $E$  de rapport  $\lambda$**  l'application  $h_\lambda : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \lambda x \end{cases}$ . C'est un endomorphisme de  $E$ . De plus,  $h_\lambda$  un automorphisme de  $E$  **si et seulement si**  $\lambda \neq 0$ .

### Exercice 4.1

Montrer que les endomorphismes de  $E$  commutant avec tous les endomorphismes de  $E$  sont les homothéties.