

DÉNOMBREMENT

1 Ensembles finis et cardinaux

1.1 Cardinal d'un ensemble fini

Définition 1.1

On dit qu'un ensemble non vide E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E . Dans ce cas, l'entier n est unique et est appelé **cardinal** de E : on le note $\text{card } E$, $|E|$ ou encore $\#E$.
Par convention, \emptyset est fini et $\text{card } \emptyset = 0$.

| **REMARQUE.** Plus prosaïquement, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

Proposition 1.1

Deux ensembles finis ont même cardinal **si et seulement si** il existe une bijection de l'un sur l'autre.

Méthode Déterminer le cardinal d'un ensemble

Pour déterminer le cardinal d'un ensemble A , il suffit de trouver un ensemble B de cardinal connu et une bijection de A sur B ou de B sur A . Alors $\text{card } A = \text{card } B$.

Proposition 1.2

Soit E un ensemble fini et A une partie de E . Alors A est fini et $\text{card } A \leq \text{card } E$. Il y a égalité **si et seulement si** $A = E$.

1.2 Opération sur les ensembles finis

Proposition 1.3

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ et $E \cap F$ sont finis et

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F - \text{card}(E \cap F)$$

Exercice 1.1

Principe d'inclusion-exclusion

Soient A_1, \dots, A_n n ensembles finis. Montrer que

$$\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{card} \left(\bigcap_{l=1}^k A_{i_l} \right)$$

Définition 1.2 Partition

Soit E un ensemble (pas nécessairement fini) et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E . On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E si

- ▶ les A_i sont non vides ;
- ▶ les A_i sont disjoints deux à deux ;
- ▶ $E = \bigcup_{i \in I} A_i$.

On note alors $E = \bigsqcup_{i \in I} A_i$.

| **REMARQUE.** Il arrive de parler de partition même si les parties en question ne sont pas toutes vides.

Proposition 1.4

Soit E un ensemble fini et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition de E . Alors $\text{card } E = \sum_{i=1}^n \text{card } A_i$.

| **REMARQUE.** La relation est vraie même si les parties ne sont pas toutes vides.

Proposition 1.5

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ et F^E sont finis. De plus, $\text{card}(E \times F) = \text{card } E \times \text{card } F$ et $\text{card}(F^E) = (\text{card } F)^{\text{card } E}$.

L'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0, 1\}^E$ qui à une partie de E associe sa fonction indicatrice est clairement bijective. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 1.6

Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble des parties de E noté $\mathcal{P}(E)$ est également fini et $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card } E}$.

1.3 Applications entre ensembles finis**Proposition 1.7**

Soit $f : E \rightarrow F$. Si E est fini, alors $\text{Im } f$ est fini et $\text{card}(\text{Im } f) \leq \text{card } E$.

Proposition 1.8

Soit $f : E \rightarrow F$.

- (i) Si f est injective et F fini, alors E est fini et $\text{card } E \leq \text{card } F$.
- (ii) Si f est surjective et E fini, alors F est fini et $\text{card } E \geq \text{card } F$.
- (iii) Si f est bijective et E fini, alors F est fini et $\text{card } E = \text{card } F$.

| **REMARQUE.** Si f est injective et E fini, $\text{Im } f$ est fini et $\text{card}(\text{Im } f) = \text{card } E$ puisqu'alors f induit une bijection de E sur $\text{Im } f$.

Principe des tiroirs de Dirichlet

Supposons que l'on veuille ranger n paires de chaussettes dans p tiroirs. Si $n > p$, il est évident qu'un des tiroirs comportera plus d'une paire de chaussettes. On peut formaliser cette remarque de la manière suivante. Si on note E l'ensemble des paires de chaussettes, F l'ensemble des tiroirs et f l'application qui à une paire de chaussettes associe le tiroir dans laquelle elle se trouve, alors la remarque précédente signifie que f n'est pas injective.

Exercice 1.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $n + 1$ réels de l'intervalle $[0, 1[$. Montrer que deux d'entre eux sont à une distance strictement inférieure à $\frac{1}{n}$ l'un de l'autre.

Exercice 1.3

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qN}$$

Proposition 1.9

Soit $f : E \rightarrow F$ où E et F sont des ensembles finis de **même** cardinal. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est bijective ;
- (ii) f est surjective ;
- (iii) f est injective.

Proposition 1.10 Lemme des bergers

Soit $f : E \rightarrow F$ où E et F sont des ensembles finis. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\text{card}(f^{-1}(y)) = r$ pour tout $y \in F$. Alors $\text{card } E = r \text{ card } F$.

2 Listes, arrangements et combinaisons

2.1 Listes

Définition 2.1 Liste

Soient E un ensemble fini et $k \in \mathbb{N}$. On appelle **k-liste** d'éléments de E tout k -uplet d'éléments de E .

REMARQUE. Une k -liste est également une application de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans E .

REMARQUE. On remarquera que l'**ordre** des éléments compte dans une liste. (a, b, c) et (c, b, a) ne désignent pas la même liste.

Proposition 2.1 Nombre d'arrangements

Soient k et n des entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Le nombre de k -listes d'un ensemble de cardinal n est n^k .

2.2 Arrangements

Définition 2.2 Arrangement

Soient E un ensemble fini et $k \in \mathbb{N}$. On appelle **k-arrangement** d'éléments de E tout k -uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

REMARQUE. Un k -arrangement est également une injection de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans E .

REMARQUE. On remarquera que l'**ordre** des éléments compte dans un arrangement. (a, b, c) et (c, b, a) ne désignent pas le même arrangement.

Définition 2.3 Permutation

On appelle permutation d'un ensemble E de cardinal n tout n -arrangement d'éléments de E .

Proposition 2.2 Nombre d'arrangements

Soient k et n des entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Le nombre de k -arrangements d'un ensemble de cardinal n est $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Corollaire 2.1 Nombre de permutations

Le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n!$.

2.3 Combinaisons

Définition 2.4 Combinaison

Soient E un ensemble fini et $k \in \mathbb{N}$. On appelle **k-combinaison** d'éléments de E toute partie de E de cardinal k .

REMARQUE. On remarquera que l'ordre des éléments ne compte pas dans un arrangement. $\{a, b, c\}$ et $\{c, b, a\}$ désignent la même combinaison.

Si on note $A_{k,n}$ l'ensemble des k -arrangements et $C_{k,n}$ l'ensemble des k -combinaisons d'un même ensemble de cardinal n , le lemme des bergers appliqué à l'application $f : \begin{cases} A_{k,n} & \longrightarrow C_{k,n} \\ (x_1, \dots, x_k) & \longmapsto \{x_1, \dots, x_k\} \end{cases}$ fournit le résultat suivant.

Proposition 2.3 Nombre de combinaisons

Soient k et n des entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Le nombre de k -combinaisons d'un ensemble de cardinal n est $\binom{n}{k}$.

2.4 Preuves combinatoires de relations entre coefficients binomiaux

Si E est un ensemble de cardinal n et $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal n .

Symétrie des coefficients binomiaux

Soient E un ensemble de cardinal n et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$. L'application $\begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & \bar{X} \end{cases}$ est une involution induisant une bijection de $\mathcal{P}_k(E)$ sur $\mathcal{P}_{n-k}(E)$. On en déduit que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Relation du triangle de Pascal

Soient E un ensemble de cardinal $n+1$, x un élément fixé de E et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$. On note \mathcal{A} l'ensemble des parties de E de cardinal $k+1$ contenant x et \mathcal{B} l'ensemble des parties de E de cardinal $k+1$ ne contenant pas x . \mathcal{A} et \mathcal{B} forment clairement une partition de $\mathcal{P}_{k+1}(E)$ de sorte que

$$\binom{n+1}{k+1} = \text{card } \mathcal{A} + \text{card } \mathcal{B}$$

Raisonnement élémentaire

Choisir un élément de \mathcal{A} consiste à choisir une partie de $E \setminus \{x\}$ de cardinal k et à lui ajouter x . Comme $\text{card}(E \setminus \{x\}) = n$, il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire. Ainsi $\text{card } \mathcal{A} = \binom{n}{k}$.

Choisir un élément de \mathcal{B} consiste à choisir une partie de $E \setminus \{x\}$ de cardinal $k+1$. Comme $\text{card}(E \setminus \{x\}) = n$, il y a $\binom{n}{k+1}$ façons de le faire. Ainsi $\text{card } \mathcal{B} = \binom{n}{k+1}$.

On en déduit que $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Raisonnement rigoureux

L'application $\begin{cases} \mathcal{P}_k(E \setminus \{x\}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ F & \longmapsto & F \cup \{x\} \end{cases}$ est bijective de sorte que

$$\text{card } \mathcal{P}_k(E \setminus \{x\}) = \text{card } \mathcal{A}$$

ou encore $\text{card } \mathcal{A} = \binom{n}{k}$. L'application $\begin{cases} \mathcal{P}_{k+1}(E \setminus \{x\}) & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ F & \longmapsto & F \end{cases}$ est bijective de sorte que

$$\text{card } \mathcal{P}_{k+1}(E \setminus \{x\}) = \text{card } \mathcal{B}$$

ou encore $\text{card } \mathcal{B} = \binom{n}{k+1}$.

Finalement, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble de cardinal n . Les $\mathcal{P}_k(E)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ forment une partition de $\mathcal{P}(E)$. On en déduit que

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = \sum_{k=0}^n \text{card } \mathcal{P}_k(E)$$

Autrement dit

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

C'est la formule du binôme de Newton appliqué à $(1+1)^n$.

Preuve de l'identité $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

Soient E un ensemble de cardinal $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$. On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{(x, F), x \in F, F \in \mathcal{P}_k(E)\}$. L'idée consiste à déterminer le cardinal de \mathcal{A} de deux manières différentes.

Raisonnement élémentaire

Choisir un élément (x, F) de \mathcal{A} peut se faire de la manière suivante :

- on choisit un élément x de E (n choix possibles) ;
- puis on choisit partie F' de cardinal $k-1$ de $E \setminus \{x\}$ ($\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles) et on pose $F = F' \cup \{x\}$.

Ainsi $\text{card } \mathcal{A} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Mais choisir un élément (x, F) de \mathcal{A} peut également se faire de la manière suivante :

- on choisit une partie F de cardinal k de E ($\binom{n}{k}$ choix possibles) ;
- puis on choisit un élément x de F (k choix possibles).

Ainsi $\text{card } \mathcal{A} = k \binom{n}{k}$.

Raisonnement rigoureux

Pour $x \in E$, notons $\mathcal{B}_x = \{(x, F), x \in F, F \in \mathcal{P}_k(E)\}$. Les \mathcal{B}_x pour $x \in E$ forment une partition de \mathcal{A} . Ainsi

$$\text{card } \mathcal{A} = \sum_{x \in E} \text{card } \mathcal{B}_x$$

Or pour tout $x \in E$, l'application $\begin{cases} \mathcal{P}_{k-1}(E \setminus \{x\}) & \longrightarrow & \mathcal{B}_x \\ F & \longmapsto & (x, F \cup \{x\}) \end{cases}$ est bijective de sorte que

$$\text{card } \mathcal{P}_{k-1}(E \setminus \{x\}) = \text{card } \mathcal{B}_x$$

ou encore $\text{card } \mathcal{B}_x = \binom{n-1}{k-1}$. On en déduit que $\text{card } \mathcal{A} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Pour $F \in \mathcal{P}_k(E)$, posons $\mathcal{C}_F = \{(x, F), x \in F\}$. Les \mathcal{C}_F pour $F \in \mathcal{P}_k(E)$ forment une partition de \mathcal{A} . Ainsi

$$\text{card } \mathcal{A} = \sum_{F \in \mathcal{P}_k(E)} \text{card } \mathcal{C}_F$$

Or pour tout $F \in \mathcal{P}_k(E)$, l'application $\begin{cases} F & \longrightarrow & \mathcal{C}_F \\ x & \longmapsto & (x, F) \end{cases}$ est bijective de sorte que

$$\text{card } F = \text{card } \mathcal{C}_F$$

ou encore $\text{card } \mathcal{C}_F = k$. On en déduit que $\text{card } \mathcal{A} = k \binom{n}{k}$.

Exercice 2.1

Donner une preuve combinatoire de l'identité $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.