试题讲评

ditoly

树

- i号点的父亲在$1 \sim i-1$内均匀随机，求树高的期望
- $n \leq 24$

子任务1：$n \leq 10$

- 枚举每个点的父亲，再树形DP求出树高
- 把所有情况的答案加起来除以总情况数
- $p \leq 10^6 + 7$，不会求逆元的小朋友可以枚举答案判断答案乘上总情况数是不是总和
- 时间复杂度$O(n!)$

子任务2：$n \leq 12$

- 枚举每个点的父亲，枚举的时候顺便维护每个点的深度
- 时间复杂度$O((n-1)!)$

40%的分数

- 显然第一问更好做一点
- 多次随机取平均值
- 也可以打表

正解

- 考虑DP，每次加入一个新的点
- 每个点向之前的点连边的概率相等，并且我们只关心之前每个点的深度
- 把之前每个点的深度排序后作为状态状压DP
- 由于深度排序后必然是连续的，差分后可以得到一个01串，用这个01串表示状态即可
- 每次枚举新的点的父亲的深度转移
- i个点的树有$O(2^i)$种状态，转移$O(i)$，总时间复杂度$O(n \cdot 2^n)$
- 常数写大了或者转移复杂度写大了可以通过$n \leq 18$的数据

仙人掌

- 给一棵仙人掌，为每条边定向使得点i的出度不超过a_i，求方案数
- $n \leq 10^5$

子任务1：$m \le 20$

- 枚举每条边的方向判断合不合法即可
- 时间复杂度$O(m \cdot 2^m)$或$O(2^m)$

子任务2：$m = n - 1$且$a_i = 2$

- 给出的图是树
- $f(i, j)$表示i的子树内的边完成了定向，i的出度为j的方案数
- 时间复杂度$O(n)$

子任务3： $a_i = 2$

- 仙人掌DP
- $f(i,j)$ 表示圆方树上 i 的子树内的点的生成子图内的边完成了定向，i的出度为j的方案数
- 转移一个环时枚举其中一条边的方向，把状态转移到环上dfs最小的点上即可
- 时间复杂度$O(n)$

子任务4：$m = n - 1$

- 仍然用之前的$f(i,j)$表示状态，j不会超过这个点的度数，故总状态数为$O(n)$
- 暴力转移遇到菊花的情况是$O(n^2)$的
- 考虑每个点的转移，对于连向每个儿子的边，要么边定向到儿子，儿子出度随意，自己出度加1；要么边定向自己，儿子出度不超过度数限制减1，自己出度不变
- 把每个儿子的转移表示成生成函数的形式，分治+FFT即可
- 时间复杂度$O(n\log^2 n)$

子任务5：每个点至多属于一个简单环

- 把用生成函数优化的方法沿用到仙人掌上，对于所有桥边构建生成函数，分治+FFT优化即可
- 环上的情况与之前一样转移
- 时间复杂度$O(n\log^2 n)$

子任务6：无特殊限制

- 一个点可能接很多个环，如果每个环都暴力转移，时间复杂度又会变成$O(n^2)$
- 把环的转移也表示成生成函数的形式，每个环做DP时先不处理对dfs序最小的点的影响，而是分别求出让dfs序最小的点出度加2，加1和不加的方案，表示成生成函数和桥边一起分治即可
- 时间复杂度$O(n\log^2 n)$

图

- n个点的图，每个点为黑或白或黑白都行
- 对于每对$i < j$，可以i向j连有向边或不连
- 求有多少种情况最终图中黑白相间的路径为奇数/偶数条
- $n \leq 2 * 10^5$

子任务1：$n \le 5$

- 把所有东西都枚举一下，然后DP一下有多少条交错路
- $g(i)$表示以i为结尾的交错路有多少条，枚举之前一个有边的颜色相反的点转移即可
- 时间复杂度$O(2^{n+\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n^2)$

子任务2：$n \le 50$

- 直接DP出方案数，把所有有用的东西表示进状态里
- $f(i,j,x,y)$表示前i个点有j个是黑的，其中x个黑的g为奇数，y个白的g为奇数
- 转移时枚举新的点的颜色，再枚举与之间几个颜色相反且g为奇数的连边，乘上组合数，颜色相同或g为偶数的点连不连没有影响，乘上2的次幂
- 时间复杂度$O(n^5)$

子任务3：$n \leq 150$

- 转移时我们显然只关心之前g为奇数的点
- 发现只用$f(i,x,y)$表示状态就够了
- 时间复杂度$O(n^4)$

子任务4： $n \leq 500$

- 转移每个点时，实际上只有两种情况，连接到之前奇数/偶数个颜色相反且g为奇数的点
- 对每个n预处理组合数C_n^m其中m为奇数/偶数的和，即可$O(1)$转移
- 时间复杂度$O(n^3)$

子任务5：$n \le 5000$

- 我也没有特别好的做法

子任务6：无特殊限制

- 当$n = 0$时，$\sum_{i=0}^{n}[i为奇数] \cdot C_n^i = 0$，$\sum_{i=0}^{n}[i为偶数] \cdot C_n^i = 1$
- 当$n > 0$时，$\sum_{i=0}^{n}[i为奇数] \cdot C_n^i = \sum_{i=0}^{n}[i为偶数] \cdot C_n^i = 2^{n-1}$
- 转移时，如果之前没有颜色相反且g为奇数的点，我们特殊转移
- 如果有，转移的两种情况的方案数都是2的次幂，与有几个无关
- 把x和y改成是否存在黑色/白色且g为奇数的点即可
- 由于还要算总交错路数是奇还是偶，再开一维来表示即可
- 时间复杂度$O(n)$

- 谢谢大家