NOI2018 Day2 Solution

___debug

2018 年 7 月 6 日

1 A

最小树形图的 $O(nm)$ 实现即可通过此题.

2 B

首先二分答案 λ, 问题转化为求时间不超过 λ 的前提最小代价.

将这个问题写成线性规划的形式

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} & A\mathbf{x} \ge \mathbf{b} \\ & -\mathbf{x} \ge -\mathbf{t} \end{array}$$

其中: (这里考虑的路径是原图中的所有路径, 可能为指数级)

- $\mathbf{x}_j$: 第 j 个点减少的时间
- A_{ij}: 第 j 个点是否在第 i 条路径上
- $\mathbf{b}_i$: 第 i 条路径的长度减去 λ
- $\mathbf{t}_j$: 第 j 个点需要的时间 t_j
- $\mathbf{c}_j$: 第 j 个点减少单位时间的代价 c_j

根据对偶原理, 下面的线性规划和上述答案相同

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + \mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} \\ \text{s.t.} & A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - \mathbf{z} \le \mathbf{c} \end{array}$$

不难发现上述对偶线性规划实际上代表这样一个问题:

> 定义一条路径的收益为长度减去 λ. 一条路径会覆盖经过的所有点, 当一个点 i 被覆盖超过 t_i 次, 每覆盖一次均要支付 c_i 的代价. 现在要选取一些路径最大化收益与代价之差.

这显然是一个最大费用循环流问题, 利用费用流解决.

3 C

3.1 $T = 1, n \le 2000$ 时的做法 (30 - 40 pts)

首先考虑计算对应的有根树的个数.

考虑 DP. 设状态为 $f(i,j)$, 表示当前共有 i 个点, 且根的度数为 j.

先 $1...n$ 枚举 $size$, 表示现在用最大子树大小为 $size$ 的情形来转移. 不妨设 $s = \sum_{k=0}^{3} f(size,k)$, 那么对于一个 $f(i,j)$, 再枚举一个最大子树 (即子树大小为 $size$ 的子树) 的个数 k, 我们便有转移

$$f(i,j) \leftarrow f(i,j) + f(i - size \times k, j - k)\binom{s+k-1}{k}$$

这是 $O(n^2)$ 的.

计算烷烃的个数可以用枚举重心的技巧.

首先只要某个点 u 满足其子树大小都 $\leq \frac{n}{2}$, 那么这个点是这颗树的重心. 比较显然的是, 重心最多只会有两个, 并且有两个重心的情形, 两个重心一定相邻, 并且另一个重心做根的时候, 这个重心的子树大小为 $\frac{n}{2}$ (当然 n 必须要是偶数). 然后很多无根树同构的问题就可以通过重心转化为有根树同构.

我们可以在 DP 的时候, 强制 $size < \frac{n}{2}$ (注意是小于), 这样求出的 $f(i,j)$ 就是点数为 i 且重心度数为 j 的无根树个数. 那么答案为

$$\sum_{k=0}^{4} f(n,k) + [n \bmod 2 = 0]\binom{\sum_{k=0}^{3} f(\frac{n}{2},k)+1}{2}$$

前一项为一个重心的情形, 后一项为两个重心的情形.

总时间复杂度还是 $O(n^2)$.

3.2 $T = 1, n \leq 10^5$ 时的做法 (60 pts)

先算烷基, 即有根树并且根的度数 ≤ 3.

设 $A(x)$ 为烷基的个数的生成函数. 根据 Pólya 定理, 我们有

$$A(x) = 1 + x\frac{A(x)^3 + 3A(x)A(x^2) + 2A(x^3)}{6}$$

这个可以用分治 FFT $O(n\log^2 n)$ 解, 需要用到一些技巧. (可不可以牛顿迭代?)

同样地, 我们可以再次运用重心方法和 Pólya 定理算出烷烃的个数.

3.3 $T = 10^5, n \leq 10^5$ 时的做法 (100 pts)

考虑烷烃个数的生成函数 $B(x)$. 但是并不方便直接用 $A(x)$ 表示出 $B(x)$.

对于一棵无根树, 令 p 和 q 分别表示这棵树的点等价类个数和边等价类个数. 定义对称边为满足连接的两个点是等价的的边 (显然这种边最多只有 1 条). 令 s 表示对称边的个数.

那么有下面这个式子恒成立:

$$p - q + s = 1$$

证明十分简单. $s = 0$ 时, 选任意一个重心做根, 容易证明没有其它点与这个根等价; 然后再考虑每个点及其父边的贡献即可. $s = 1$ 时的情况还更简单一些.

有了这个式子, 接下来的事情就好办了. 对于所有 n 个点的烷烃, 有:

$$\sum p - \sum q + \sum s = \sum 1$$

右边就是我们要求的.

令 $P(x)$ 表示烷烃的 $\sum p$ 的生成函数. 对于一个无根树, 选 n 个点中的任意一个点做根形成互不同构的的有根树的数量就是 p.

用一下 Pólya 定理, 我们有

$$P(x) = x\frac{A(x^4) + 3A(x^2)^2 + 6A(x)^2A(x^2) + 8A(x)A(x^3) + 6A(x^4)}{24}$$

再令 $Q(x)$ 表示烷烃的 $\sum q$ 的生成函数. 对于一个无根树, 选 $n-1$ 条边中的任意一条边劈开, 插入一个度数为 2 的点形成的互不同构的有根树的数量就是 q.

类似地, 我们有

$$Q(x) = \frac{(A(x)-1)^2 + (A(x^2)-1)}{2}$$

然后显然 $\sum s$ 的生成函数就是 $A(x^2)$.

所以最终烷烃的数量的生成函数为

$$B(x) = P(x) - Q(x) + A(x^2)$$

时间复杂度为 $O(n\log^2 n + T)$.