IOI2018 中国国家集训队第一阶段作业
解题报告

广州市第六中学 董炜隽

2017 年 12 月 27 日

1 Division into Two(AGC009_C)

1.1 题目大意

有 N 个互不相同的整数，其中第 i 小的整数为 S_i。问有多少种方案把它们划分成两个集合 X,Y，使得 X 中相邻两个数的差不小于 A，且 Y 中相邻两个数的差不小于 B。

1.2 解法

考虑把序列划分成若干段，之后交替地将每一段放入集合 X,Y 中。

设 f_i 表示已经划分好前 i 个数且 i 为某个放入 X 中的段的结尾的方案数，g_i 表示已经划分好前 i 个数且 i 为某个放入 Y 中的段的结尾的方案数。考虑如何用 f 更新 g（g 更新 f 同理），f_i 可以转移到 $g_j(j > i)$ 的条件为

1. $S_{j+1} - S_i \geq A$
2. $S_{i+1..j}$ 中任意两个相邻的数的差均不小于 B

令 $[l_i, r_i]$ 表示 f_i 可以转移到 g_j 的 j 的范围。显然 l_i 由条件 1 决定，r_i 由条件 2 决定，并且他们都是关于 i 单调非降的，因此可以在 DP 的时候顺带维护一下 l_i, r_i。每次转移时相当于把 $g_{l_i..r_i}$ 都加上 f_i，可以先把 g 差分一下，即把 g_{l_i} 加上 f_i、g_{r_i+1} 减去 f_i，之后用 g 转移时再对其求一下前缀和就能得到实际的值了。

总时间复杂度 $O(N)$。

2 Rotated Palindromes(ARC064_F)

2.1 题目大意

问有多少个长度为 N 且字符集大小为 K 的字符串可以通过回文串旋转（把第一个字符移到最后）若干次得到。

2.2 解法

设 f_i 表示长度为 N，字符集大小为 K，且周期为 i 的回文串的个数。可得

$$f_i = k^{\lceil \frac{i}{2} \rceil} - \sum_{j|i} f_j$$

显然，一个周期为 d 的回文串通过若干次旋转可以得到共 d 个不同的字符串。但是，两个不同的回文串也可能通过旋转得到同一个串，因此我们需要考虑每个串被重复计数了多少次。

对于一个周期为 d 的回文串 x，考虑有哪些与它循环同构的串也是回文的。设 x 旋转 $t(1 \le t < d)$ 次之后能够得到回文串 y，则

x 旋转 $d-t$ 次 $= x$ 逆旋转 t 次 $= x$ 旋转 t 次的反串 $= y$ 的反串 $= y$

由于 x 旋转 $1..d-1$ 次得到的串互不相同，所以有 $t = d - t$，即 $t = \frac{d}{2}$。因此，周期为奇数的串只被计算了一次，而周期为偶数的串会被计算两次，也就是说

$$Ans = \sum_{d|N, d\ is\ odd} f_d \cdot d + \frac{1}{2} \sum_{d|N, d\ is\ even} f_d \cdot d$$

在计算 f 时可以先把 N 分解质因数，然后搜出所有满足 $j \mid i, i \mid N$ 的数对 (i,j) 来计算。令 $d(n)$ 表示 n 的约数个数，则总时间复杂度为 $O(\sum_{i|N} d(i)) \le O(d(N)^2)$。在 $N \le 10^9$ 内 $d(N)$ 的最大值为 $d(735134400) = 1344$，因此该算法可以通过所有数据。

3 Mr.Kitayuta's Gift(Codeforces 506E)

3.1 题目大意

给一个仅包含小写字母的字符串 s。你需要选择恰好 n 个小写字母，并把他们分别插入到 s 的任意位置。问通过这种方式能生成出多少种回文串。

3.2 解法一

暴搜所有方案并计算能得到多少种不同的回文串。

期望得分 10 分。

3.3 解法二

题意相当于问有多少个回文串包含 s 这个子序列。考虑如何判断一个回文串 a 中是否包含子序列 s，我们可以从小到大枚举 i，分别用 a_i 和 a_{n-i+1} 去匹配当前 s 两端的字母，并将 s 中被成功匹配的字符删去。我们可以据此进行 DP，令 $f_{i,l,r}$ 表示枚举到 i 时 $s[l..r]$ 未被匹配的方案数，转移时分 $s_l = s_r$ 与 $s_l \neq s_r$ 讨论即可。时间复杂度为 $O(|s|^2 n)$。

期望得分 30 分。

3.4 解法三

解法二中 DP 每一层的转移是相同的，因此可以用矩阵乘法进行优化。时间复杂度为 $O(|s|^6 \log n)$。

期望得分 40 分。

3.5 解法四

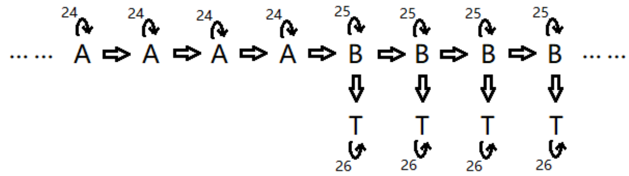
考虑把 DP 转移的过程建成一个自动机，每个节点代表 s 的一个区间 $[l, r]$。我们把 $s_l \neq s_r$ 的节点称为 A 类节点，$s_l = s_r$ 的称为 B 类节点，那么每个 A 类节点有 24 个自环，B 类节点则有 25 个自环。设 a, b 分别为路径上经过的 A 类和 B 类节点的个数。注意到 $b = \lceil \frac{n-a}{2} \rceil$，即合法的数对 (a, b) 仅有 $O(|s|)$ 对。因此我们可以把 (a, b) 相等的所有路径一并计算，先 DP 出经过了 a 个 A 类节点和 b 个 B 类节点的路径数，再通过矩阵快速幂求出把剩下的自环插入到这样的路径中的方案数。由于我们要对每对 (a, b) 做一次矩阵快速幂，因此总时间复杂度为 $O(|s|^4 \log n)$。

注意，当 $|s|+n$ 为奇数时回文串的中心仅有一个字符，需要特殊处理。我们可以分加入中心字符前是否已经匹配完 s 来讨论，两种情况均可以使用之前所说的做法解决。

期望得分 60 分。

3.6 解法五

考虑继续优化解法四。我们可以像这样把所有 (a,b) 的自动机组合在一起：



可以发现，上一个解法中每个需要求的方案数都对应这个自动机中某个 A 类节点走到某个终止节点的长度为 k 的路径数。因此我们只需要对这个自动机做一遍矩阵快速幂就可以得到所有需要求的值。总时间复杂度为 $O(|s|^3 \log n)$。另外可以把矩阵写成上三角的形式，这样能把常数将至约 $\frac{1}{6}$。

期望得分 80 分。

3.7 解法六

使用 Cayley-Hamilton 定理优化解法五的矩阵乘法，时间复杂度为 $O(|s|^3+|s|^2\log n)$，期望得分 100 分。

3.8 解法七

设 $m=\lceil\frac{|s|+n}{2}\rceil-a-b$，那么把自环插入到经过 a 个 A 类节点和 b 个 B 类节点的路径上的方案数为

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}\binom{i+a-1}{a-1}\binom{j+b-1}{b-1}24^i25^j26^{m-i-j}$$

引理 设 $S_{x,y}(n)=\sum_{i=0}^{n} i^x y^i (y\neq 1)$，那么 $S_{x,y}(n)$ 可以表示为 $P_x(n)+w$ 的形式。（下文中所有 P_k 均表示某个 k 次多项式，w 均表示某个常数）

证明

$$\begin{aligned}
S_{x,y}(n)+(n+1)^x y^{n+1} &= 0^x+\sum_{i=0}^{n}(i+1)^x y^{i+1}\\
&= 0^x+\sum_{i=0}^{n}y^{i+1}\sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}i^j\\
&= 0^x+\sum_{j=0}^{x}y\binom{x}{j}S_{j,y}(n)
\end{aligned}$$

那么我们可以得到 $S_{x,y}$ 的递推式

$$(y-1)S_{x,y}(n)=(n+1)^x y^{n+1}-0^x-\sum_{i=0}^{x-1}y\binom{x}{j}S_{j,b}(n)$$

观察递推式，可以发现 $S_{x,y}(n)$ 就是由若干个 $(n+1)^x y^{n+1}$ 及 0^x 乘上一些由 x,y 决定的系数后相加得到的，因此必然可以表示成 $P_a(n)+w$ 的形式。

考虑使用上面的引理来化简我们需要求的式子：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}\binom{i+a-1}{a-1}\binom{j+b-1}{b-1}24^i25^j26^{m-i-j}\\
=&\sum_{i=0}^{m}\binom{i+a-1}{a-1}24^i26^{m-i}\sum_{j=0}^{m-i}\binom{j+b-1}{b-1}(\frac{25}{26})^j\\
=&\sum_{i=0}^{m}\binom{i+a-1}{a-1}24^i26^{m-i}[P_{b-1}(m-i)(\frac{25}{26})^{m-i}+w]\\
=&\sum_{i=0}^{m}\binom{i+a-1}{a-1}24^i[P_{b-1}(m-i)25^{m-i}+w26^{m-i}]\\
=&\sum_{i=0}^{m}25^m P_{a+b-2}(m,i)(\frac{24}{25})^i+w26^m\binom{i+a-1}{a-1}(\frac{24}{26})^i\\
=&25^m[P_{a+b-2}(m)(\frac{24}{25})^m+P_{b-1}(m)]+w26^m[P_{a-1}(m)(\frac{24}{26})^m+w]\\
=&P_{a+b-2}(m)24^m+P_{b-1}(m)25^m+w26^m
\end{aligned}$$

这里的形式看起来还不够优美，直觉告诉我们 24^m 前面的多项式应该是 $a-1$ 次的（实际测试也是如此）。这里我想到的解释是，如果在化简的过程中交换 i,j，最终得到的结果中 24^m 和 25^m 前面的多项式的次数会反过来变成 $a-1$ 和 $a+b-2$。而 24^m 和 25^m 应当是无法互相转化的（因为实际上这个结论可以把 24,25 替换成其他任意常数），所以 $24^m,25^m$ 前的多项式应该分别是 $a-1$ 次和 $b-1$ 次的。

由于最终的答案是由若干对 (a,b) 的方案数相加得到的，设 $t=\lceil\frac{|s|+n}{2}\rceil$，答案必然可以表示为 $P_{n-1}(t)24^t+P_{\lceil\frac{n}{2}\rceil}(t)25^t+w26^n$ 的形式。我们可以暴力求出 n 较小时的答案，再通过高斯消元解方程组求出式子中的各项系数。总时间复杂度为 $O(|s|^3+\log n)$。

期望得分 100 分。

事实上原题的出题人在题解中只是粗略提到存在不使用矩乘的做法，我不太确定他的做法与我的是否相同。如果有同学会其他做法的话欢迎与我交流。