

NOIP2018 模拟题题解

Hermera

2018 年 10 月 3 日

1 Matrix

1.1 40pts

对于 $n \leq 5000$ 的数据，直接暴力即可，时间复杂度 $\mathcal{O}(\log n)$ 。

1.2 20pts

$a = 0$ 时，不同列的元素之间没有任何影响，每一个元素只会影响同一列的下一个元素，所以答案为 $t_n \cdots b^{n-1}$ ，时间复杂度 $\mathcal{O}(\log n)$

1.3 60pts

上两部分 subtasks 结合起来。

1.4 100pts

我们考虑元素 t_i 对答案的贡献，每次向右则乘 a ，向下则乘 b ，总共的贡献就是从该点到右下角的路径数，即

$$\binom{2n-i-2}{n-2} \times a^{n-i} \times b^{n-1}$$

。

直接计算即可，时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$ 。

2 P & Q

2.1 100pts

记状态 (i, j, k) 表示前 i 个数还有 j 个 P 和 k 个 Q 没有匹配，转移时枚举当前数拆分成多少个。

由于数据弱的原因导致每一层的状态并不多，卡卡常数就可以通过

2.2 100pts

在前一种算法的基础上，考虑二分答案。

显然只需保证当前这个数拆分成的 PQ 不超过总答案的一半（即当前这个数拆出来的 $P + Q \leq$ 总答案）就能有合法解，于是我们二分答案后只需在转移时限制一下当前这个数可以拆分的 P 的个数，剩下的全部拆成 Q，即可去掉一维状态。

3 Graph

一个朴素的想法是，把 1 号点拆成两个点，一个连全部的入边，一个连全部的出边，直接最短路。问题在于，这个算法，与 1 号点相邻的点可能出现重复走的情况。

3.1 30pts

暴力枚举除 1 号点外的起始点和终点。

3.2 100pts

考虑我们可以把所有与 1 号点相邻的点分为两个集合 S, T ，只从 1 号点向 S 集连边，只从 T 集向 1 号点连边，然后做最短路。这样求出的最短路为：

$$\min_{u \in S, v \in T} dis_{u,v}$$

也就是说，我们只需要找到几种划分方法，使任意点对 (u, v) ，均被包含在这些划分中。

考虑二进制分组的技巧。我们可以枚举二进制位，把该位为 0 的放在一个集合，该位为 1 的放在另一个集合，这样可以保证任何不相等的数都至少被分到两个不同的集合一次。只需要做 $\mathcal{O}(\log n)$ 次最短路即可得到答案。