午后划水

chives

2019 年 3 月 15 日

山东省烟台第二中学

集训队作业 2018 喂鸽子

喂鸽子

喂鸽子

题面

有 n 只鸽子，每秒钟会随机选择选择一个鸽子喂给它一粒玉米。如果一个鸽子已经吃了至少 k 粒玉米，那么我们就说这个鸽子饱了。求期望多久能让所有鸽子都饱。答案对 998244353 取模。

数据范围

$n \le 50, k \le 1000$。

题解

题解

我们要求的是所有鸽子吃饱时间最大值的期望，但是这个不好做。我们上 MIN-MAX 容斥，转化为求某个子集的鸽子吃饱时间最小值的期望。注意到答案只和这个集合的大小有关，我们不妨设这个大小为 c。

题解

我们要求的是所有鸽子吃饱时间最大值的期望，但是这个不好做。我们上 MIN-MAX 容斥，转化为求某个子集的鸽子吃饱时间最小值的期望。注意到答案只和这个集合的大小有关，我们不妨设这个大小为 c。直接求最小值期望还是不可行的。我们可以将期望转化为 $\sum_{i\geq 1}[\text{ans} \geq i]$ 的形式，下面只需要求答案大于等于某个数的概率就行了。答案大于等于 i 也就说明了在 $i-1$ 时刻这些鸽子还没饱。下面设 $f(c,s)$ 为给这 c 只鸽子喂了 s 粒玉米且这些鸽子都还没饱的概率，那么答案为：

$$\sum_{i\geq 1}\sum_{s=0}^{i-1}\binom{i-1}{s}f_{c,s}(\frac{n-c}{n})^{i-1-s}$$

题解

题解

但是 i 可能会无限大这个事情很扯淡，我们考虑改成枚举 s（下设 $p=\frac{n-s}{n}$）：

$$\sum_{s=0}^{ck-c} f_{c,s} \sum_{t\geq 0} \binom{s+t}{t} p^t$$

题解

但是 i 可能会无限大这个事情很扯淡，我们考虑改成枚举 s（下设 $p=\frac{n-s}{n}$）：

$$\sum_{s=0}^{ck-c} f_{c,s} \sum_{t\ge 0} \binom{s+t}{t} p^t$$

问题的关键就变成了求级数 $\sum_{t\ge 0}\binom{s+t}{t}p^t$，注意到这个组合数的形式和高阶前缀和里的组合数很相似，所以我们可以猜到这个级数就是 $(1-p)^{-1-s}$（可以用广义二项式定理验证一下），也就是 $(\frac{n}{c})^{1+s}$。

题解

题解

剩下的硬骨头就是 $f(c,s)$ 怎么求了。首先这个显然可以枚举第 c 个喂了几次，然后 DP ：

$$f(c,s) = s! \sum_{i=0}^{\min(s,k-1)} \frac{f(c-1,s-i)}{(s-i)!} \cdot \frac{1}{i!n^i}$$

这个东西直接 DP 是绝对会 T 的。

题解

剩下的硬骨头就是 $f(c,s)$ 怎么求了。首先这个显然可以枚举第 c 个喂了几次，然后 DP ：

$$f(c,s) = s! \sum_{i=0}^{\min(s,k-1)} \frac{f(c-1,s-i)}{(s-i)!} \cdot \frac{1}{i!n^i}$$

这个东西直接 DP 是绝对会 T 的。但是这个式子两边除上 $s!$ 之后就是一个卷积的形式（或者也可以说是 EGF 的乘法）。直接上 NTT $\mathcal{O}(n^2 k \log(nk))$ 求出所有 $f(c,s)$ 就行了。

集训队作业 2018 普通的计数题

普通的计数题

普通的计数题

题面

你有一个初始为空的 01 序列，每次可以进行两种操作：

- 往末位插一个 0。
- 先删除一个非空子序列，再往末位插入一个 1。假设被删除子序列有 x 个 0 和 y 个 1，那么要满足 $y=0$ 时有 $x\in B$，$y>0$ 时有 $x\in A$。其中 A,B 为输入集合。

现在，你需要对序列执行 n 次操作。请你求出在所有不同的操作方案中，最终序列长度为 1 的方案有多少种。两种操作方案被视为不同，当且仅当某一次操作的种类不同，或某个第二类操作中选取的子序列不同（子序列不同指的是位置不同，与值无关）。答案对 998244353 取模。

数据范围

$n\leq 120000$。

题解

题解

首先对这么奇怪的一个玩意怎么可能计数啊？但是咋转化啊？

题解

首先对这么奇怪的一个玩意怎么可能计数啊？但是咋转化啊？
转化很妞批，这个东西可以视为一棵树，第一类操作就是叶子，第二类操作就是以被删除的结点为儿子的一个结点。
当然在这个树也是有限制的，首先最显然的限制是任意父亲的权值都要比他的儿子大（这里认为权值是操作时间）。然后根据题目本身的要求，如果一个非叶子结点只有叶子儿子那么他的儿子数属于 B，如果有非叶子儿子的话那么叶子儿子的数目在 A 中。

题解

首先对这么奇怪的一个玩意怎么可能计数啊？但是咋转化啊？
转化很ㄓ批，这个东西可以视为一棵树，第一类操作就是叶子，第二类操作就是以被删除的结点为儿子的一个结点。
当然在这个树也是有限制的，首先最显然的限制是任意父亲的权值都要比他的儿子大（这里认为权值是操作时间）。然后根据题目本身的要求，如果一个非叶子结点只有叶子儿子那么他的儿子数属于 B，如果有非叶子儿子的话那么叶子儿子的数目在 A 中。
这是啥呀，带限制的堆计数？

任意堆计数

任意堆计数

题面

求 n 个点，每个点可以有任意个儿子的堆的数量。

数据范围

$n \leq 10^7$。

任意堆计数

题面

求 n 个点，每个点可以有任意个儿子的堆的数量。

数据范围

$n \le 10^7$。

题解

每个点的父亲权值比它大，所以对除了 n 以外所有点考虑父亲是谁，那么答案显然为 $(n-1)!$，没了……

当然这个其实也是可以当成微分方程做的，设其 EGF 为 $F(x)$，那么 $F'(x) = e^{F(x)}$，这是一个基本的一阶非线性线性微分方程……

偶叉堆计数

偶叉堆计数

题面

求 n 个点，每个点可以有偶数个儿子的堆的数量。

数据范围

$n \leq 10^5$。

偶叉堆计数

题面

求 n 个点，每个点可以有偶数个儿子的堆的数量。

数据范围

$n \le 10^5$。

题解

设其 EGF 为 $F(x)$，那么有 $F'(x) = \cosh(F(x))$。
这是一个可以直接分离变量的弱智一阶非线性微分方程……稍微搞搞就知道 $F(x) = 2\operatorname{arctanh}(\tan(\frac{x}{2}))$。

012 叉堆计数

012 叉堆计数

题面

求 n 个点，每个点可以有不超过两个儿子的堆的数量。

数据范围

$n \le 10^5$。

012 叉堆计数

题面

求 n 个点，每个点可以有不超过两个儿子的堆的数量。

数据范围

$n \leq 10^5$。

题解

这次的微分方程是 $F'(x) = 1 + F(x) + \frac{F^2(x)}{2}$。
和上几次不同，这一次对常数的确定比较有趣。总之最后的答案就是 $\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - 1$。

题解

题解

好了，来考虑这道题。首先为了下面方便一点，再加上 B 有没有 0 其实无所谓，所以我们不妨就认为 $0 \in B$ 好了。仿照上面的思路，我们很容易写出：

$$f_n = [n-1 \in B] + \sum_{i=1}^{n-1} [i \in A] \sum_{\sum_j a_j = n-i-1, a_j > 1} \frac{1}{j!} \cdot \frac{(n-1)!}{i!} \prod_j \frac{f_{a_j}}{a_j!}$$

题解

好了，来考虑这道题。首先为了下面方便一点，再加上 B 有没有 0 其实无所谓，所以我们不妨就认为 $0 \in B$ 好了。仿照上面的思路，我们很容易写出：

$$f_n = [n-1 \in B] + \sum_{i=1}^{n-1} [i \in A] \sum_{\sum_j a_j = n-i-1, a_j > 1} \frac{1}{j!} \cdot \frac{(n-1)!}{i!} \prod_j \frac{f_{a_j}}{a_j!}$$

两边除 $(n-1)!$，得到：

$$\frac{f_n}{(n-1)!} = \frac{[n-1 \in B]}{(n-1)!} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[i \in A]}{i!} \sum_{\sum_j a_j = n-i-1, a_j > 1} \frac{1}{j!} \prod_j \frac{f_{a_j}}{a_j!}$$

题解

题解

我们对 $\{f_i\}, A, B$ 分别构造其 EGFF, A, B，上面的式子就可以写成：

$$F' = B + A(e^{F-x} - 1)$$
$$F' = Ae^{-x}e^F + B - A$$

题解

我们对 $\{f_i\}, A, B$ 分别构造其 EGFF, A, B，上面的式子就可以写成：

$$F' = B + A(e^{F-x} - 1)$$
$$F' = Ae^{-x}e^F + B - A$$

设 $C = Ae^{-x}, D = B - A$，可以进一步将上式化为：

$$F' = Ce^F + D$$

我们日思夜想的微分方程又出现了。可惜这一次虽然还是一个非线性的微分方程，但是 F 是不能分离的，也就是说没法直接解出来了……

题解

题解

不能直接解怎么办？上多项式牛顿迭代！

题解

不能直接解怎么办？上多项式牛顿迭代！
假设我们已经知道了模 x^{2^t} 的答案 F_0，现在要扩展到模 $x^{2^{t+1}}$ 的答案 F，那么套用牛顿迭代的方法就是：

$$F' \equiv Ce^{F_0}e^{F-F_0} + D \pmod{x^{2^{t+1}}}$$

$$F' \equiv Ce^{F_0}\left(1 + (F-F_0) + \frac{(F-F_0)^2}{2!} + \ldots\right) + D \pmod{x^{2^{t+1}}}$$

$$F' \equiv Ce^{F_0} + Ce^{F_0}(F-F_0) + D \pmod{x^{2^{t+1}}}$$

题解

题解

稍加整理之后这个方程变成了 $F' = TF + Z$（T, Z 和 F 无关），然后就很魔幻的出现了一个一阶线性微分方程……
一阶线性微分方程不就是套路了吗……构造 $v = e^{-\int T\mathrm{d}x}$，然后就是 $F = \frac{1}{v}\int vZ\mathrm{d}x$，不难发现其中需要确定的常数项都是 0。