计数技巧选讲

Wearry

Stay determined!

Paint

有一块长度为 n 的画布，每个位置可以染成 $[1, m]$ 这些颜色中的一种。如果画布上恰好有 k 种颜色恰好出现了 s 次，则会产生 w_k 的愉悦度，求所有不同画布的愉悦度之和，对 998244353 取模。

$n \leq 10^7, m \leq 10^5, s \leq 150$

Paint

考虑先计算至少有 i 种颜色出现了 s 次的方案数 g_i:

$$g_i = \binom{m}{i}\binom{n}{is}\frac{(is)!(m-i)^{n-is}}{(s!)^i}$$

接下来考虑计算恰好有 i 种颜色出现 s 次的方案数 f_i:

$$g_i = \sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}f_j$$

$$i!g_i = \sum_{j=i}^{n}\frac{1}{(j-i)!}\times j!f_j$$

转化成了可以卷积的形式。

Permutation

对于长度为 n 的排列 $\{a_i\}$ 定义其特征值为:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i < a_{i+1}$$

求长度为 n 的排列中特征值为 $0, 1, \ldots, n-1$ 的排列分别有多少个。
答案对 998244353 取模。

$n \leq 10^5$

直接用 DP 计算复杂度难以优于 n^2 。
注意到特征值为 k 的序列，可以分为 k 段，每一段内部是无序的。
记 f_i 表示特征值为 i 的序列数，则有：

$$m!\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\} = \sum_{i=1}^{m-1} f_i \binom{n-i-1}{m-i-1}$$

继续化简得到：

$$(n-m)!m!\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\} = \sum_{i=1}^{m-1} f_i (n-i-1)! \times \frac{1}{(m-i-1)!}$$

这样得到了一个卷积形式的容斥式子，FFT 优化卷积计算即可。

Calc

定义序列 $\{a_i\}$ 是合法的当且仅当:

- $\forall i,\ a_i \in [1, C]$
- $\forall i, j,\ a_i \neq a_j$

定义序列的权值为所有元素的乘积，求所有长度为 n 的不同的合法序列的权值和，对 10^9+7 取模。

$n \le 500, C \le 10^9$

Calc

构成相同的序列权值相等，因此只需计算上升序列的答案的 $n!$ 倍即可。记 f_n 表示长度为 n 的严格上升序列的权值和，$f_{n,x}$ 表示长度为 n 的包含元素 x 的上升序列的权值和，有：

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{C} f_{n,i}$$

Calc

构成相同的序列权值相等，因此只需计算上升序列的答案的 $n!$ 倍即可。
记 f_n 表示长度为 n 的严格上升序列的权值和，$f_{n,x}$ 表示长度为 n 的包含元素 x 的上升序列的权值和，有：

$$f_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{C} f_{n,i}$$

考虑 f_{n-i} 是否包含 x，不难得到：

$$x^i f_{n-i} = x^i f_{n-i,x} + x^{i-1} f_{n-i+1,x}$$

考虑用容斥求出 $f_{n,x}$：

$$f_{n,x} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} x^i f_{n-i}$$

因此：

$$f_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} g_i f_{n-i} \right)$$

其中：

$$g_n = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{C} i^n$$

Color

有 n 种不同颜色的石子，第 i 种颜色的石子有 a_i 个，你要将它们排成一个序列，序列的权值定义为首尾相连后极大连续相同颜色段的大小乘积。

求所有本质不同的序列的权值和对 998244353 取模的结果。

$n \le 10^5, \sum a_i \le 2 \times 10^5$

Color

首先考虑处理序列首尾不相接的情况，令 $f_{i,j}$ 表示将 i 个相同元素分成 j 段的所有方案中，每段大小的乘积和；通过组合意义不难得到：

$$f_{i,j} = \binom{i+j-1}{2j-1}$$

Color

首先考虑处理序列首尾不相接的情况，令 $f_{i,j}$ 表示将 i 个相同元素分成 j 段的所有方案中，每段大小的乘积和；通过组合意义不难得到：

$$f_{i,j} = \binom{i+j-1}{2j-1}$$

直接计算还是无法保证段数满足要求，不妨考虑容斥，钦定第 i 种颜色分成的段数恰好为 b_i ，则相当于要求最后没有两个相邻的段颜色相同，因此方案数等于：

$$\sum_{c_i \le b_i} \frac{(\sum c_i)!}{\prod c_i!} \prod_{i=1}^{n} (-1)^{b_i - c_i} \binom{b_i - 1}{c_i - 1} f_{i,b_i}$$

Color

接下来考虑首尾相连的条件:

- 不妨钦定序列开头的段是 1 且结尾的段不是 1。
- 最后的答案除以 1 的段数并乘上 $\sum a_i$ 即可。
- 以 1 开头的方案相当于将 c_1 减少 1。
- 以 1 开头并结尾的方案相当于 c_1 减少 2。

这样即使存在不超过 $\sum a_i$ 的循环节也不会有问题，证明留作思考。
由于具有良好的形式，可以方便地使用卷积进行优化。

Divide

对一棵 n 个点的树进行如下分治操作：

1. 如果当前联通块大小不超过 1 ，则结束，否则执行 2 。
2. 在当前联通块中任选一个点删除，并断开与这个点相连的所有边，对剩下的联通块递归执行 1 操作。

问一共能得到多少本质不同的分治结构。

$n \leq 5000$

Divide

对于原树中相邻的两个点 u,v，考虑断开连边分别得到一个分治结构然后合并。不难发现 u,v 各自所在的分治树中：

- 不在 u,v 到根的路径上的点一定不会受到影响。
- 在到根的路径上的点对另一棵分治树不会产生影响。

Divide

对于原树中相邻的两个点 u, v，考虑断开连边分别得到一个分治结构然后合并。不难发现 u, v 各自所在的分治树中：

- 不在 u, v 到根的路径上的点一定不会受到影响。
- 在到根的路径上的点对另一棵分治树不会产生影响。

于是可以令 $f_{i,j}$ 表示 i 所在联通块中，点 i 在分治树上的深度为 j 的方案数是多少，合并两个相邻点所在联通块时有：

$$f_{u,k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} f_{u,i} \sum_{j=k-i}^{n} f_{v,j}$$

Pigeon

现在有 n 个鸽笼，第 i 个鸽笼有 a_i 个位置，现在共有 $\sum a_i - 1$ 只鸽子要飞回来，每只鸽子会在所有未满的鸽笼中随机选择一个飞入，对于每个笼子，求其最终未满的概率。

$n, a_i \leq 30$

Pigeon

由于概率分布在不停变化，考虑让装满的鸽笼加入可选集合中，如果选到已经满的鸽笼，则强制重新进行一次选择，这样概率分布与原来保持一致。

Pigeon

由于概率分布在不停变化，考虑让装满的鸽笼加入可选集合中，如果选到已经满的鸽笼，则强制重新进行一次选择，这样概率分布与原来保持一致。

假设要计算 x 号笼子的概率，考虑钦定其它 i 个笼子未满，则选中一个被钦定的笼子或者 x 号笼子的概率为：

$$\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{n-i-1}{n}\right)^x\frac{1}{n}=\frac{1}{i+1}$$

Pigeon

考虑容斥，由于钦定的位置比较好控制，因此可以强制被钦定的位置在 x 满之前都没有满，所有这样的满足条件的序列可以用 DP 求出。
令 $f_{i,j}$ 表示钦定了 i 个笼子，在 x 满之前一共用掉了 j 个位置的序列数，则答案为：

$$\sum_{i,j}(-1)^i\left(\frac{1}{i+1}\right)^j f_{i,j}$$

其中 $(-1)^i$ 表示除了钦定的位置一定未满之外，其它位置也可能未满的容斥系数。

Chess

有一个 $3 \times n$ 的棋盘，棋盘上有一些位置已经放上了棋子，现在你要将其填满棋子，一个位置能放棋子当且仅当以下两个条件满足至少一个：

1. 这个位置的左右都有棋子。
2. 这个位置的上下都有棋子。

求有多少种不同的方案能够最终放满棋子，两种方案不同当且仅当某一步放棋子的位置不同。

$n \leq 2000$

Chess

首先分析填棋子的条件，可以知道：

1. 对于第一行和第三行不能有两个连续的空位，否则无解。
2. 第二行的每个点有两种可能的放法。
3. 对于第二行，被棋子分割开得两个部分互不影响，可以独立求解。

Chess

首先分析填棋子的条件，可以知道：

1. 对于第一行和第三行不能有两个连续的空位，否则无解。
2. 第二行的每个点有两种可能的放法。
3. 对于第二行，被棋子分割开得两个部分互不影响，可以独立求解。

考虑 DP，记 $f_{i,j,k}$ 表示当前考虑到第二行的第 i 个位置，且它是第 j 个被填上，填上的方式是 k，使用组合数转移与合并即可。

Graph

求所有 $2^{\binom{n}{2}}$ 种 n 个点的无向图的联通块个数的 k 次方的和。

$n \le 30000, k \le 50$

Graph

考虑组合意义，x^k 相当于在 x 种物品种可重地选择 k 次，枚举选择的物品构成的可重集的大小：

$$\begin{aligned} x^k &= \sum_{i=0}^{k} \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i}} \\ &= \sum_{i=0}^{k} i! \left\{ {k \atop i} \right\} \binom{x}{i} \end{aligned}$$

注意到由于 k 的范围相对较小，因此需要考虑的联通块的最大数量从 $O(n)$ 降到了 $O(k)$ ，可以直接对于每种联通块的数量求出生成函数。

1 容斥原理

2 题目特殊性质

3 结合其它知识

Spanning Tree

给出一个 n 个点，m 条边的无向图，定义一棵生成树的权值为边权值之和的 k 次方。求图上所有不同的生成树的权值和对 10^9+7 取模的结果。

$n, k \leq 50, m \leq \frac{n(n-1)}{2}$

Spanning Tree

不妨将和的乘积转化成乘积的和:

$$(w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1})^k = \sum_{\sum a_i = k} k! \prod_{i=1}^{n-1} \frac{w_i^{a_i}}{a_i!}$$

然后可以考虑矩阵树，将权值为 w 的边设为:

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{w^i x^i}{i!}$$

Spanning Tree

这样求出的矩阵树本质上是一个多项式，而我们希望知道的是这个多项式在 x^k 项上的系数。

Spanning Tree

这样求出的矩阵树本质上是一个多项式，而我们希望知道的是这个多项式在 x^k 项上的系数。

直接对未知数计算行列式是较为困难的，我们可以使用多项式插值，带入 $n \times k$ 个不同的 x 值并计算行列式，最后通过插值得到整个多项式即可。

Count

一个 n 个点的图，图中第 i 个点的权值为 a_i ，对于图的任意一个生成树 T ，假设第 i 个点的度数为 d_i，定义其权值为:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^m \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{d_i} d_i^m \right)$$

求图中所有生成树的权值和对 998244353 取模的结果。

$n \leq 3 \times 10^4, m \leq 30$

Count

与度数相关的生成树问题，可以考虑 Prufer 序列:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\sum d_i = n-2} \frac{(n-2)!}{\prod d_i!} \prod_{i=1}^{n} a_i^{d_i+1}(d_i+1)^m \sum_{i=1}^{n}(d_i+1)^m \\
=&(n-2)! \prod_{i=1}^{n} a_i \sum_{\sum d_i = n-2} \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i^{d_i}(d_i+1)^m}{d_i!} \sum_{i=1}^{n}(d_i+1)^m \\
=&(n-2)! \prod_{i=1}^{n} a_i \sum_{\sum d_i = n-2} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{d_i}(d_i+1)^{2m}}{d_i!} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{a_j^{d_j}(d_j+1)^m}{d_j!}
\end{aligned}
$$

Count

令:

$$A(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i(i+1)^m}{i!}$$
$$B(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i(i+1)^{2m}}{i!}$$

则答案的生成函数 $F(x)$ 等于:

$$\begin{aligned}&(n-2)!\prod_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}B(a_ix)\prod_{j=1,j\neq i}^{n}A(a_jx)\\=&(n-2)!\prod_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{B(a_ix)}{A(a_ix)}\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\ln(A(a_jx))\right)\end{aligned}$$

Count

忽略前面乘上的常数项，剩下的部分是:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{B(a_ix)}{A(a_ix)}\right)\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(A(a_ix))\right)$$

要计算带 $\sum$ **的项，先求出** $\frac{B(x)}{A(x)}$ **和** $\ln(A(x))$ **，然后将** x^k **项的系数乘以** $\sum_{i=1}^{n} a_i^k$ **即可。**

Paint

有 n 个球排成一列，编号 0 到 $n-1$ ，初始时均为白色，现在你会进行两次染色，每次随机选择 m 个球并将其染成黑色。

令 a 为最小的黑球的编号，求 $F(a)$ 的期望对 998244353 取模的结果。其中 $F(x)$ 是一个次数不超过 m 的多项式，并且其点值表示已经给出。

$n < 998244353, m \leq 10^6$

Paint

首先解决问题的弱化版 $F(x) = x^c$。

考虑期望线性性：x^c 的期望的组合意义相当于选择 c 个位置，都比 x 小的概率和，因此答案可以表示为：

$$\sum_{i=m+1}^{m+c} \binom{n}{i} \sum_{j=1}^{i} G_j H_{i-j}$$

其中 G_n 表示选择的位置去重后有 n 个的方案数，H_n 表示染色的位置去重后有 n 个的方案数。

Paint

不难发现：

$$G_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^c$$
$$H_n = \binom{n}{m} \binom{m}{2m-n}$$

所以对于一般的 $F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$：

$$\begin{aligned} G_n &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{m} a_j i^j \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} F(i) \end{aligned}$$

剩下的部分都可以利用卷积优化。