有向图计数 Solution

前置技能

- 容斥原理
- 乘法逆元
- 二项式定理
- 摆脱公式恐惧症

Solution

- 问题的本质是求 N 个点，每个点出度、入度均为 2 的简单有向图，即不存在重边和自环的有向图的个数。我们将该有向图映射到一个序列 a_i $(i \in \{1,2,\dots,2N\})$ 上，令 a_{2i-1} 对应图中点 i 较小的出点， a_{2i} 对应图中点 i 较大的出点，显然，序列 a_i 与原图存在双射关系，考虑对序列 a_i 计数。
- 在这里我们罗列一下对序列 a_i 的限制：
  (1) 、 $1,2,\dots,N$ 在序列中均恰好出现两次。
  (2) 、 $a_{2i-1} < a_{2i}$ $(i \in \{1,2,\dots,N\})$。
  (3) 、 $a_{2i-1} \neq i, a_{2i} \neq i$ $(i \in \{1,2,\dots,N\})$。
- 我们将限制 (2) 稍作修改，考虑计算 $a_{2i-1} \neq a_{2i}$ 的序列个数，最后将答案除去 2^N 。
- 注意到限制 (1) 是方便计数的，考虑对限制 (2),(3) 使用容斥原理，我们总共有 $3N$ 个形如 $a \neq b$ 的限制，考虑强制令一些限制不满足，即令 $a = b$ ，忽略其他限制，计算方案数，假设强制不满足的限制为 i ，则将方案数乘上 $(-1)^i$ 加入答案。
- 考虑枚举强制不满足的限制 (2) 的个数 i ，我们将会把 N 个数分成两类，一类是强制 $a_{2i-1} = a_{2i}$ 的，称为第一类数，一类是没有这个限制的，称为第二类数。枚举第一类数中对应的两个位置有一个强制不满足限制 (3) 的个数 j_1 ，第一类数中对应的两个位置均强制不满足限制 (3) 的个数 j_2 ，则可计算 $j_0 = i - j_1 - j_2$ 表示第一类数中对应的两个位置没有强制不满足限制 (3) 的个数。类似地，我们枚举第二类数中强制不满足限制 (3) 的个数 k_1, k_2 ，并计算 $k_0 = N - i - k_1 - k_2$ 。
- 记 $coef(j_0,j_1,j_2,k_0,k_1,k_2)$ 表示强制不满足的限制个数恰好为 j_0,j_1,j_2,k_0,k_1,k_2 的方案数，有 $coef(j_0,j_1,j_2,k_0,k_1,k_2) = \binom{N}{i}\binom{i}{j_1}\binom{i-j_1}{j_2}\binom{N-i}{k_1}\binom{N-i-k_1}{k_2} * 2^{j_1+k_1}$ ，其中 $i = j_0 + j_1 + j_2$ ，整理得 $coef(j_0,j_1,j_2,k_0,k_1,k_2) = \frac{N!}{j_0!j_1!j_2!k_0!k_1!k_2!} * 2^{j_1+k_1}$ 。
- 记 $value(j_0,j_1,j_2,k_0,k_1,k_2)$ 表示强制不满足的限制个数恰好为 j_0,j_1,j_2,k_0,k_1,k_2 时，满足条件的序列个数，有 $value(j_0,j_1,j_2,k_0,k_1,k_2) = \binom{j_0+k_0}{k_0} * j_0! * \frac{(2k_0+k_1)!}{2^{k_0}}$ 。
- 那么答案满足
  $Ans(N) * 2^N = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j_1=0}^{i}\sum_{j_2=0}^{i-j_1}\sum_{k_1=0}^{N-i}\sum_{k_2=0}^{N-i-k_1}(-1)^{i+j_1+2j_2+k_1+2k_2} * coef(S) * value(S)$ 。
  其中 S 表示 $(j_0,j_1,j_2,k_0,k_1,k_2)$ 。
- 至此，我们有了一个 $O(N^5)$ 的解法。
- 注意到 $value(j_0,j_1,j_2,k_0,k_1,k_2)$ 只和 j_0,k_0,k_1 有关，考虑只枚举 j_0,k_0,k_1 ，并计算 $value(j_0,k_0,k_1)$ 前的系数和。即考虑求 $Ans(N) * 2^N = \sum_{j_0=0}^{N}\sum_{k_0=0}^{N-j_0}\sum_{k_1=0}^{N-j_0-k_0} SumofCoef(j_0,k_0,k_1) * value(j_0,k_0,k_1)$ 。
- 考虑计算 $SumofCoef(j_0,k_0,k_1)$ ，由上述做法，有
  $SumofCoef(j_0,k_0,k_1) = \binom{N}{j_0}\binom{N-j_0}{k_0}\binom{N-j_0-k_0}{k_1}\sum_{j_1=0}^{N-j_0-k_0-k_1}\sum_{j_2=0}^{N-j_0-j_1-k_0-k_1}(-1)^{j_0+j_2+k_1}2^{j_1+k_1}\binom{N-j_0-k_0-k_1}{j_1}\binom{N-j_0-j_1-k_0-k_1}{j_2}$
- 整理上式，记 $F(N) = \sum_{j_1=0}^{N}\sum_{j_2=0}^{N-j_1}2^{j_1}(-1)^{j_2}\binom{N}{j_1}\binom{N-j_1}{j_2} = \sum_{j_1=0}^{N}2^{j_1}\binom{N}{j_1}\sum_{j_2=0}^{N-j_1}(-1)^{j_2}\binom{N-j_1}{j_2}$ ，
  则 $SumofCoef(j_0,k_0,k_1) = \binom{N}{j_0}\binom{N-j_0}{k_0}\binom{N-j_0-k_0}{k_1}(-1)^{j_0+k_1}2^{k_1}F(N-j_0-k_0-k_1)$ 。
- 对 $F(N)$ 的第二个求和符号使用二项式定理，有 $F(N) = \sum_{j_1=0}^{N}2^{j_1}\binom{N}{j_1}[N-j_1=0] = 2^N$ 。
  那么 $SumofCoef(j_0,k_0,k_1) = \binom{N}{j_0}\binom{N-j_0}{k_0}\binom{N-j_0-k_0}{k_1}(-1)^{j_0+k_1}2^{N-j_0-k_0}$ 。
- 综上所述，有 $Ans(N) = \sum_{j_0=0}^{N}\sum_{k_0=0}^{N-j_0}\sum_{k_1=0}^{N-j_0-k_0}\binom{N}{j_0}\binom{N-j_0}{k_0}\binom{N-j_0-k_0}{k_1}(-1)^{j_0+k_1}\frac{1}{2^{j_0+k_0}} * \binom{j_0+k_0}{k_0} * j_0! * \frac{(2k_0+k_1)!}{2^{k_0}}$ 。

- 整理得 $\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i}\sum_{k=0}^{N-i-j}\frac{N!}{i!j!k!(N-i-j-k)!}(-1)^{i+k}\frac{1}{2^{i+j}}*\binom{i+j}{j}*i!*\frac{(2j+k)!}{2^j}$ 。
- 至此，我们有了一个 $O(N^3)$ 的解法。
- 关于模数非质数的问题，在“综上所述”中得出的计算式中，我们只需要计算组合数和 2 的乘法逆元，而在对奇数 P 取模时， 2 存在乘法逆元 $2^{-1}=\frac{P+1}{2}$ ，因此我们只需 $O(N^2)$ 预处理组合数即可。