

NOI模拟赛Day1题解

lbn187

June 7, 2018

1 足球大战

1.1 题目大意

两队都有 n 次进球机会，进球概率分别为 p 和 q ，求主队进球更多的概率。 $n \leq 100000000$ 。

1.2 部分分说明

1.2.1 暴力枚举进球与否

$n \leq 10$ ，暴力枚举每个进球机会有没有进，时间复杂度 $O(2^{2n})$ ，得到16分。

1.2.2 暴力枚举进球数

$n \leq 50$ ，暴力枚举两个队分别进几球，将概率相乘累计，时间复杂度 $O(n^2)$ ，得到48分。

1.2.3 特殊数据 $p = 0$ 或 $q = 0$

只需计算另外一队也不进球的概率即可，多得12分。

1.2.4 特殊数据 $p = q$

两队获胜概率相等，那么直接枚举进球数计算打平概率即可，多得12分。

1.2.5 $n \log n$ 求解进球概率

如果求解概率用 $n \log n$ 的做法，可以至少得到88分。

1.3 题解

一个队进 i 球的概率为 $C_n^i \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$

那么枚举主队进球数 A ，主队获胜的情况就是客队进球数 $B \in [0, A)$ ，那么这可以前缀和求解概率。

暴力按照公式计算需要 $O(n \log n)$ 的时间复杂度，我们可以进行优化。

可以预处理阶乘及逆元等，做到 $O(n)$ 时间复杂度，但本题只有64M空间，最多开1个数组

考虑 $C_n^i \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} = \frac{n-i+1}{i} \frac{p}{1-p}$ ，只需要开一个数组求逆元即可，其余都可以递推求得。

1.4 难度

送分题

2 文明

2.1 题目大意

一个 N 个点的树， Q 次询问，每次给出 K 个关键点，一个点被离他最近的关键点占领，问其中第一个关键点占领了多少点。 $N, Q \leq 500000, \sum K \leq 1000000$ 。

2.2 部分分说明

2.2.1 每个询问暴力计算

对于所有点，暴力枚举所有点，计算和每个关键点的距离，时间复杂度 $O(n^3)$ ，预计得分20分。

2.2.2 每个询问做一遍BFS

每次询问以所有关键点为起点做BFS，求出多少个点从第一个点过来即可，时间复杂度 $O(qn)$ ，预计得分48分。

2.2.3 $k_i = 2$

找出两个点的中点，魅力管的点要么是一个子树，要么是整颗树减去一个子树，多得12分。

2.2.4 $k_i \leq 20$

给不会排序求解线段覆盖的人准备的分数，多得12分。

2.2.5 特殊数据一条链

找到左边和右边的关键点即可，可以用set等实现，多得8分或12分。

2.2.6 特殊数据魅力每次都在1号点

以1号点为根，其他每个关键点都能将一个子树挖去，看看剩下有多少点即可，给分类讨论失败的人准备的分数，多得8分。

2.2.7 特殊数据树是随机的

可以暴力求LCA等，给乱搞的人多得4分。

2.3 题解

考虑除魅力外的关键点，每个关键点都可以让一颗子树或者除了一颗子树以外的部分变得不可行。

一颗子树可以用一段DFS序表示，现在相当于给一个 n 数的数轴挖掉若干段，问还有多少数没有被挖掉。

那么做一遍线段覆盖即可（即按左端点排序，右端点取最大，找出所有连续线段）

时间复杂度 $O((n + \sum k) \log n)$ 。

2.4 难度

签到题

3 贪玩蓝月

3.1 题目大意

动态维护一个前后加删模背包，并询问选若干物品取模后在 $[l, r]$ 后的最大价值。 $M \leq 50000, MOD \leq 500$ 。

3.2 部分分说明

3.2.1 暴力计算

每次直接做背包，时间复杂度 $O(m^2 MOD)$ ，预计得到25分。

3.2.2 使用分块、线段树等优化

如果使用线段树，每次合并 $\log m$ 个背包即可，合并背包时间复杂度 $O(MOD^2)$ ，总时间复杂度 $O(m \log m MOD^2)$ 。

应该也可以使用分块等乱搞做法，最多可以多得20分。

3.2.3 只有IF、IG操作和询问

直接做背包即可，送5分。

3.2.4 只有IG、DG操作和询问

维护一个栈背包（即可以从后面删后面加得到背包），我们可以直接用栈背包维护，即用 $f_{i,j}$ 表示前 i 个物品关键值为 j 的最大价值，时间复杂度 $O(MMOD)$ ，额外得到10分。

3.2.5 询问中有 $l = r$

合并两个背包不用优化判断，这一步遇阻者多得10分或15分。

3.2.6 只有IG、DF操作和询问

给得到题目最初想法——维护两个栈背包的人多得10分或15分。

3.3 题解

首先这是一个简单的背包，用 f_i 表示一个背包关键值为 i 的最大价值，加入一件物品可以枚举关键值 $O(MOD)$ 转移，合并两个背包需要 $O(MOD^2)$ 。

只有IG、DG操作和询问的特殊数据，我们用一个栈背包维护。那么考虑只有IG、DF操作的情况，不妨用两个栈背包维护，一个栈开口向左，一个栈开口向右。IG操作直接往开口向右的栈中加，DF操作直接在开口向左的栈中删。**如果遇到删完的情况，直接把开口向右的栈强行倒过来即可。**因为每个物品最多被翻转依次，故修改操作总复杂度 $O(MMOD)$ 。

对于询问操作，要把两个背包合并，暴力合并是 $O(MOD^2)$ 的。可以用线段树优化一下，即询问区间最值，时间复杂度 $O(MMOD \log MOD)$ 。

现在考虑有前后加删四种操作的情况。仍然维护两个栈背包，一个开口向左，一个开口向右。当一个栈删光的时候，将另一个栈的一半倒过来，另一半按原来方向。最坏情况下修改复杂度 $O(MMOD \log M)$ ，询问复杂度为 $O(MMOD \log MOD)$ ，故总时间复杂度 $O(MMOD(\log M + \log MOD))$ 。

3.4 难度

比较简单的T3