// 关于T2结论一个可能有问题的证明

我们需要证明：

$$sg(i,j) = \min\{lowbit(i), lowbit(j), lim\}$$

对于边界显然成立，现在考虑，对于位置(x,y)，如果其左上方的sg均满足上述性质，如何证明(x,y)也满足该性质。

设$\min\{lowbit(x), lowbit(y), lim\} = 2^c$，需要证明两个命题：首先是对任意$p \in [0, 2^c)$，存在一种翻转正方形的方案，翻转后$sg = p$；然后是不存在一种方案的$sg = 2^c$。

先考虑前一部分。考虑以(x,y)为右下角的边长2^c的正方形，显然这个正方形的sg值沿主对角线对称，那么我们只要考虑对角线。

可以发现对角线上的元素为$2^0, 2^1, 2^0, 2^2, 2^0, 2^1, 2^0...$这样的形式，也就是$sg(x-i, y-i) = lowbit(i)$。用归纳法可证明数列$\{x_i\}, x_i = 2^{lowbit(i)}, i \in [1, 2^c - 1]$的每个前缀异或和刚好取遍了$[1, 2^c)$中的元素。

考虑后一部分。假设选取的正方形边长为a，考虑所有$sg \geq 2^c$的位置，它们构成了一个边长为$b = \lceil \frac{a}{2^c} \rceil$的正方形。由于我们需要$sg = 2^c$，那么需要满足：

- 对任意$e > c$，选中的正方形内有偶数个$sg = 2^e$的位置。
- 选中的正方形内有偶数个$sg = 2^c$的位置（将(x,y)这个位置也算入其中）。

设$lowbit(b) = 2^d$，那么$sg \geq 2^{c+d}$的位置构成了一个边长为$\frac{b}{2^d}$的正方形（注意到必有$2^{c+d} \leq lim$），由于$\frac{b}{2^d}$是奇数，必定存在一个$e \geq c + d$不满足条件。

于是不可能异或出2^c，命题得证。

（关于这个结论的证明，大家如果有简洁的做法可以和我交流）