难题选讲

MikuNotFoundException

烟台二中

自我介绍

- 我非常弱。
- ~~可能是在座各位联赛最低分~~
- 所以讲的题自然也都是水题..
- 希望在座各位不要笑话我QAQ

洛谷5110 块速递推

- 求数列$a_n = 233a_{n-1} + 666a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 1$的第$n(n \le 10^{18})$项对$10^9 + 7$取模的值，$T(T \le 5 \times 10^7)$组询问。
- 对于2%的数据,$T \le 5000$
- 对于6%的数据,$T \le 500000$
- 时限1s，空间16MB
- (这题在场各位可能都做过吧...)

2分

- 显然只需要最朴素的矩乘就可以了..
- ~~(不过三分有什么意义呢qwq)~~

6分

- 写的不丑而且稍微卡点常的矩乘..

100分

- 显然我们不能用任何复杂度高于O(T)的算法处理这道题..
- 于是考虑一些别的东西，比如打表？
- 首先对于这种递推数列，我们首先应该想到去算一下特征根...(?)
- 令$x^2 = 233x + 666$,解得$\mathrm{x}_1 = \frac{233+13\sqrt{337}}{2}, x_2 = \frac{233-13\sqrt{337}}{2}$
- 然后应该看一下337在模$10^9 + 7$意义下是否存在二次剩余
- $337^{\frac{10^9+6}{2}} = 1(mod\ 10^9 + 7), 216284168^2 = 337(mod\ 10^9 + 7)$
- 设$a_n = ax_1^n + bx_2^n$,联立方程$\begin{cases} 0 = a + b \\ 1 = x_1 a + x_2 b \end{cases}$，解得$a = \frac{\sqrt{337}}{4381}, b = -a$,将$a_n$放到模意义下可得$a_n = 766769301(905847205^n - 94153035^n)$

- 现在问题似乎没有得到任何简化...每组询问仍然带log..
- 注意到根据欧拉定理，$a^n \equiv a^{n \bmod 10^9+6} (mod\ 10^9+7)$
- 好像还是没什么用..
- 注意到一点，现在我们的复杂度完全在计算905847205^n和94153035^n这两个每组询问底数都相同的幂上。
- 既然前面都提到了打表那我们来打表吧..
- 令$n = mk + q$,k是一个恒定的常数。
- 则有$a^{mk+q} = \left(a^k\right)^m \times a^q$,根据欧拉定理，$n < 10^9 + 7$,所以只要能预处理出$(a^k)^0, (a^k)^1, (a^k)^2 \dots (a^k)^{\lfloor \frac{10^9+7}{k} \rfloor}$和$a^0, a^1, a^2 \dots . a^{k-1}$，就可以$O(1)$时间回答一组询问了！

ckw同学的数论函数求和好题

- 题目名称很没意义，这道题是SDWC(山东省计算机学会组织的集训)的一道考题，看题目名就知道是谁出的了....
- 这题甚至被在座的rqy神仙当场秒切...
- 题目：
- https://yt2soj.top/problem/1402
- 定义$\forall n \geq 1, F_0(n) = 1, F_k(n) = \sum_{d|k} F_{k-1}(d)\ (k \geq 1)$.
- 有q组询问，每组给定L,R,k，输出$\sum_{L \leq n \leq R} F_k(n) \ mod\ 998244353$

数据范围

对于10%的数据，$maxn, maxk \le 2000, q \le 10^5$；

对于另外20%的数据，$maxn, maxk \le 10^4, q \le 10$；

对于另外20%的数据，$maxn, maxk, q \le 10^5, \forall i \in [1, q], L_i = R_i$；

对于另外20%的数据，$maxn, maxk, q \le 10^5$；

对于另外20%的数据，$maxn \le 5 \times 10^5, maxk \le 3 \times 10^5, q \le 3 \times 10^5$；

对于100%的数据，$maxn \le 5 \times 10^5, maxk \le 10^9, q \le 3 \times 10^5$。

其中$maxn, maxk$为这个测试点最大的n和k。

- 乍一看非常不可做是吧...考试的时候我也是这样觉着的..
- 但是这个东西是个积性函数，所以我们不如考虑一下质数幂的时候如何处理。

$$\text{对于质数幂}p^c, F_k(p^c) = \sum_{d|p^c} F_{k-1}(d) = \sum_{0 \le i \le c} F_{k-1}(p^i)$$

$$\text{设}F_k(p^n)\text{的生成函数为}G_k(x)$$

$$\text{根据生成函数相关理论则有}G_0 = \frac{1}{1-x}, G_k(x) = \frac{G_{k-1}(x)}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = (1-x)^{-k-1}$$

根据广义二项式定理

$$G_k(x)=(1-x)^{-k-1}=\sum_{i\ge 0}\binom{-k-1}{i}(-x)^i=\sum_{i\ge 0}(-1)^i\binom{-k-1}{i}x^i$$

$$\text{其中}(-1)^i\binom{-k-1}{i}=(-1)^i\frac{(-k-1)(-k-2)(-k-3)\dots(-k-i)}{i!}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)\dots.(k+i)}{i!}=\binom{k+i}{i}$$

$$\text{故}F_k(p^n)=\binom{n+k}{k}$$

- 到现在已经可以做第2,3个子任务了。
- 看起来接下来的子任务都完全不可做是吧..
- 注意到一个事情，令$x=p_1^{c_1}p_2^{c_2}\dots.p_t^{c_t}$,则$F_k(x)$的取值只与集合$S(x)=\{c_1,c_2\dots.c_t\}$的取值有关。
- 如果考试已经阿克闲的无聊的话枚举一下，会发现在5×10^5的范围内，S(x)只有244种不同的取值。
- 这说明了什么？

- 我们可以把这244种取值每种的次数统计成前缀和，在预处理出这244中值的F(x)的情况下，我们就可以做到O(244)(?)回答一组询问啦！
- 现在问题前进了一大步....瓶颈完全在于如何计算$\binom{n}{k}$,其中n在10^9级别..
- 当然可以分段把阶乘的表打出来(~~划掉~~)，不过那样带根号。

但是可以注意到, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$, 在$n$一定的时候,

是一个关于n的k次多项式!

所以可不可以插值呢?(当然可以)

- 尽管我们需要计算$\binom{n}{k}$,但是在这道题中,k都是在O(logN)级别的.
- 所以令$x = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots . p_t^{c_t}$,$\prod_{1 \le i \le t} \binom{k}{c_i}$是一个次数O(logN)的多项式。
- 直接使用拉格朗日插值计算出这个多项式，我们就可以O(244*logn)的时间计算一组询问了！
- 不过原题还需要毒瘤卡常...我至今没卡进原题时限...(2s)

- 讲完了...希望大家别喷我QAQ
- (尽管这两道题对于在座的各位来说都水到不能再水了...但是我也没办法，因为我确实没做过什么难题...)