Day7讲题+2017集训队作业选讲

高睿泉

南京外国语学校

2018 年 7 月 7 日

T1

将合并操作开成权值线段树合并，对于复制操作，可以发现只要算复制成两遍的情况即可，也就是要算$(\sum_{i\neq j}(cnt[i] \times cnt[j]))/2 = ((\sum cnt[i])^2 - \sum cnt[i]^2)/2$，在线段树上多维护一个平方和即可。复杂度$O(L\log L)$，期望得分100分。

T2

$f_{i,j}$表示计算出区间i,j的最小代价为多少，转移为枚举一个点，计算$\min\{max\{f_{i,k},f_{k+1,j}\}+b_k\}$。

可以发现$f_{i,j}$的值一定在$9\log n$以下且$f_{i,j}$关于j单调不降，故可以计算$g_{i,c}$表示从i开始代价为c最远可以解决右端点为多少的区间，转移可以枚举选择的数值j，找$g_{i,c}$前最近的j转移到$g_{i,c+j}$。复杂度$O(9^2 n\log n)$。

也可以利用单调性进行转移，由于$g_{i,c}$单调不降且注意到$g_{i,c}$能用到的转移$g_{i+1,c}$再用没有任何意义，故对于$g_{i+1,c}$仅转移$g_{i,c}+1\sim g_{i+1,c}$中的即可。时间复杂度$O(9n\log n)$。

T3

比较容易的观察是如果能够把所有的点连到同一个点上面，那么就是最优的。故可以尝试枚举那个点（下记作根），然后随机连点，就可以得到简单地得到$20 \sim 30$分。

然后可以想想哪些点更容易减少距离，一定是连边多的，那么枚举根，找度数最大的K个点和他连，并选择最优的一组，能得到约50分。

之后可以贪心每次找能使得距离和减少最多的那个点，这样就可以通过第一个测试数据。

T3

但是这样处理计算减少最多的点是$O(n^3K)$的，对于较大的数据显然跑不出来。设从根到每个点的最短路为d_i，树上路径长为$L_{i,j}$，那么距离和为：

$$\sum_{i<j} min\{L_{i,j}, d_i + d_j\}$$

如果没有$L_{i,j}$项，那么$\sum d_i$就是答案，所以我们可以近似地转换为让d_i和最小。直接贪心就可以得到大约90分，如果在此基础上加上爬山就能得到95分左右的分数（实际测试如果分数直接累加可以到99左右，可惜lemon不能保留小数分数）。

CheckerExpansion(550-500)

题目大意

A和B两人在方格上轮流放检验器。第一次操作A在$(0,0)$放上一个检验器。之后每次操作中，对于空方格(x,y)，满足下列某一条件时在(x,y)放上一枚检验器：

- $(x-2,y)$上有一个对方的检验器，且$(x-1,y-1)$上没有检验器
- $(x-1,y-1)$上有一个对方的检验器，且$(x-2,y)$上没有检验器

现在双方轮流一共操作t次，问左下角为(x_0,y_0)的$w\times h$的矩形中的每个方格的状态。

题目大意

$t,x_0,y_0\le 10^{12},w,h\le 50$

CheckerExpansion

可以将操作看成异或即加法模2，仔细观察后可以发现为组合数的形式。

ConversionMachine(550-850)

题目大意

给定两个相同长度的单词w_1, w_2（都只含有'a','b','c'三种字符）。已知'a'变成'b'（'b'无法直接变成'a',下同）,'b'变成'c','c'变成'a'的代价分别为c_1, c_2, c_3，求把w_1变为w_2且总代价不超过$maxCost$的方案数。

数据范围

$|w_i| \le 11, maxCost \le 10^9$。

ConversionMachine

可以发现$w_{1,i}$做到$w_{2,i}$一样的最少次数是一定的，而循环的次数的上限可以计算出。也就是说，如果最后变成一样了，总的次数的上限就可以计算出，$f_{i,j,k}$表示当前操作了i步，还有j个差一步正确，k个差两步正确的方案数，用矩乘优化。复杂度$O(|w_1|^6 \log maxCost)$。

SweetFruits(551-1000)

题目大意

有n个水果，其中某些是甜的而另外一些不是，每个甜的水果都有一个甜度$sweetness[i]$，现在你需要用$n-1$条边把它们连成一棵树，定义一个水果为真甜的当且仅当它是甜的且它与至少一个甜的水果直接相连，一棵树的甜度等于所有真甜的水果的甜度之和。现在求有多少种连成树的方案使得树的甜度不超过$maxSweetness$。

数据范围

$1 \le n \le 40; -1 \le sweetness[i] \le 2.5 \times 10^7; 0 \le maxSweetness \le 10^9.$

SweetFruits

可以用meet-in-the-middle算出有k个真甜水果的集合数。计算恰有k个真甜的树的个数，可以先用matrix tree定理算出至多有i个真甜的方案数，再容斥一下即可。

时间复杂度$O(2^{\frac{n}{2}}n+n^4)$。

YamanoteLine(553-1000)

题目大意

给你一个有n个车站的环形铁路，相邻两个车站之间的距离为正整数。再给你一些如以下形式的约束条件：

- 环上顺时针方向由S到T的一段距离大于一个给定的值L
- 环上顺时针方向由S到T的一段距离小于一个给定的值L

最后询问环形铁路的总长度共有几种不同的合法取值。（无穷取值方案输出-1）

数据范围

$1 \le n \le 50, 1 \le$每种约束的个数≤ 50

YamanoteLine

假设已知总长len，那么可以根据从1开始顺时针方向的距离d_i做差分约束（$S > T$的列为$len - (d_S - d_T)$与L的关系，$S < T$同理）。

在差分约束中判负环的过程中，可以记录一个当前点答案写成$k \cdot len + b$形式，k是多少，就可以算出当前的负环是因为len过大还是过小。于是可以分别二分上界和下界，时间复杂度$O(nm \log n)$。

BoundedOptimization(560-1000)

题目大意

定义项为两个不同变量相乘。求一个由多个不同项相加，含有n个不同变量的式子的最大值。另外限制了每一个变量的最大最小值$Upperbound_i$和$Lowerbound_i$和所有变量之和的最大值Max。

数据范围

$n \leq 13, 0 \leq Lowerbound_i \leq Upperbound_i \leq 100, Max \leq 1300$

BoundedOptimization

如果x_ix_j对答案没有贡献，那么要么x_i达到边界，要么x_j达到边界。那么可以枚举哪些选上界，哪些选下界，剩下问题就变成最大化

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m + \sum_{i<j} x_ix_j$$

也就是要求最大化

$$\sum_{i<j}(x_i - a_i)(x_j - a_j) + (\sum_{i=1}^{m} a_i)(\sum_{i=1}^{m} x_i)$$

可以发现$x_i - a_i$均相同时取最大。如果取平均不合法，那么调整后的取值一定在其他情况中出现了。时间复杂度$O(3^n n)$。

InducedSubgraphs(562-1000)

题目大意

给一棵n个结点的树，定义一个结点集合是连通的表示这棵树以这个集合为点集的导出子图是连通图。再给一个整数k，将树上的结点重新编号，使得对于任意一个满足$1 \le i \le n-k+1$的i，都满足由所有编号在$[i, i+k-1]$内的结点组成的结点集合是连通的。问这样的编号方式有多少种。

数据范围

$n \le 40$

InducedSubgraphs

当$2k \le n$时，如果$i, i+1$既可能作为一个区间的前两个点，也可以作为后两个点，那么编号为$i, i+1$的点一定是相邻的（否则其路径上$> i+1$或$< i$的点删掉后就不连通了）。

那么可以发现$[k, n-k+1]$区间内的点一定构成一条链，且仅有链两端与其他点相连。对于链两端点所连的子树的情况，可以将标号看成每次去掉一个叶子节点，直接dp即可。

最后只需枚举哪两点构成那个链即可。时间复杂度$O(n^2)$。

InducedSubgraphs

当$2k > n$时，那么就有若干点在每个区间中都出现了。可以把$[1, n-k]$看成红点，$[k+1, n]$看成蓝点，其余为白点。显然蓝白点、红白点都是连通的，那么如果一棵子树根节点有颜色，整棵子树都与其颜色相同。

同时，整棵树的重心无论如何都出现在了所有的区间中，故可以以重心为根dp，$f_{i,j,k}$表示i号点的子树内红点和蓝点的数目分别为j,k的方案数，转移的过程中要类似$2k \le n$那样计算删点的方案数。

时间复杂度$O(n^4)$。

DefectiveAddition(564-850)

题目大意

给定一个序列A和一个整数n，要求构造一个长度与原序列相同的序列B，对于每个位置i，要求$0 \le B_i \le A_i$，且序列B的异或和为n。求有多少个这样的B序列。

数据范围

$0 \le n, A_i \le 10^9, |A| \le 50$

DefectiveAddition

考虑最高位的情况，如果当前A的最高位已经小于n的了，那么就无解。否则看A中最大的数字，如果该数字的最高位k选择了0，那么剩余的数字的选取只需保证第k位合法即可（因为剩余数字其余位随便选，都可以由这个数字的选值$0 \sim 2^k - 1$来调成n)。如果最高位为1，那么可以将该数字和n均异或上2^k即可变成新的问题。

时间复杂度$O(|A|^2 \log n)$。

WolfPack(573-850)

题目大意

有n个点，每个点每秒钟可以向上下左右移动一单位，要求m秒后所有点到同一点。求所有行动方案。

数据范围

$n \le 50, m \le 100000$

WolfPack

将坐标旋转45度，那么移动就变成了$(\pm 1, \pm 1)$，两维就可以独立考虑。

枚举第一个点+1的次数计算即可。时间复杂度$O(nm)$。

EllysChessboard(577-500)

题目大意

一个$8*8$的棋盘上有若干个位置上需要放棋子，放置第一个棋子的代价为0，之后放置每一个棋子的代价是这个棋子与之前放置的所有棋子的曼哈顿距离的最大值，确定一个顺序使得总代价最小。

EllysChessboard

将坐标旋转45度，那么曼哈顿距离就变成了切比雪夫距离（即(x_1,y_1)和(x_2,y_2)距离为$\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$）。

用f_{l_1,r_1,l_2,r_2}表示加入了行在$[l_1,r_1]$,列在$[l_2,r_2]$的点后的最小代价，可以发现转移一定是加入邻近的一行或一列中所有的点（行内顺序不影响答案，可以加入空行空列）。因为如果先加入了较远的，那么把同一方向较近的直接加在前面答案不会变差。

DeerInZooDivOne(578-1000)

题目大意

给定一棵n个节点的树，要求找出两个最大的没有公共点的同构连通块。求这两个连通块的大小。

两个连通块A, B同构是指存在一组A的点编号集合到B的点编号集合的双射p，使得如果A中的点u, v之间有一条边，那么B中的点$p(u), p(v)$之间也有一条边。

数据范围

$n \leq 51$.

DeerInZooDivOne

首先可以枚举一条割断的边，再枚举两个选作根的点。

$dp_{x,fx,y,fy}$表示以x为根（其父亲为fx），和y为根的最大的同构数量。然后转移可以使用KM来处理。时间复杂度$O(n^6)$，但非常不满。