WC2019 简单模拟赛 Day2

January 6, 2019

吐槽

题解

Subtask2：树状数组套主席树

Subtask3：可以发现区间分裂的过程就是启发式合并倒过来。每次分裂时，暴力扫一遍长度较小的一段，主席树求出它内部的逆序对以及它与另一段的逆序对。

题解

Subtask4：操作 0 中逆序对的变化仍然可以用树状数组套主席树维护，复杂度 $O(qlog^2n)$。

每个区间维护一个关键字为权值的平衡树，分裂时的逆序对可以在平衡树上求。维护平衡树的复杂度：0 操作 $O(qlogn)$，1 操作 $O(nlog^2n)$。

总复杂度 $O((n+q)log^2n)$。

吐槽

题解

一次搬运中，匹配数的变化一定是 0->1 或 0->2。1->2 是不可能的。

题解

0->1：

a: * * x * * y * *

b: * * y * * z * *

0->2：

a: * * x * * y * *

b: * * y * * x * *

建一个无向图：对于每个 i，若 $a_i \neq b_i$，在点 a_i 和点 b_i 之间连一条边。

0->1：(x-y) 和 (y-z) 两条边变成了 (x-z) 一条边。

0->2：(x-y) 的边数量减少 2。

题解

建出图，考虑每个联通块。

若联通块点数为 1，不影响答案。

若联通块点数为 2，显然只能采用 0->2，答案加上联通块边数的一半。

若联通块点数大于等于 3，可以用 0->1 把边传来传去，直到最后只剩两条边的情况。每次 0->1 边数减少 1，最后需要一次 0->2，答案加上联通块边数-1。

吐槽

题解

记 $a(i)$ 为以点 i 为端点的边的颜色种数。可以把 $\sum_{i=1}^{c} f(i)$ 转化为 $(\sum_{i=1}^{n} a(i)) - (n-1)$。

$$((\sum_{i=1}^{n} a(i)) - (n-1))^K$$
$$= \sum_{j=0}^{K} C(K,j)(\sum_{i=1}^{n} a(i))^j(-n+1)^{K-j}$$

Subtask3：

$$\sum_{\text{染所有边}} \sum_{i=1}^{n} a(i)$$
$$= \sum_{\text{染 i 的出边}} \sum_{\text{染除 i 的出边之外其他边}} \sum_{i=1}^{n} a(i)$$
$$= (\sum_{i=1}^{n} \sum_{\text{染 i 的出边}} a(i))(\sum_{\text{染除 i 的出边之外其他边}} 1)$$

题解

计算 $\sum_{\text{染 i 的出边}} a(i)$。

令 $F_i(j)$ 表示用至多 j 种颜色染 i 的出边的方案数；$f_i(j)$ 表示用恰好 j 种颜色染 i 的出边的方案数。

$F_i(j) = \sum_{k=0}^{j} C(j,k) f_i(k)$

显然有 $F_i(j) = j^{deg[i]}$

二项式反演得：

$f_i(j) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} C(j,k) k^{deg[i]}$

对于每个 i 只需算出 $f_i(0..deg[i])$。由于 $\sum_{i=1}^{n} deg[i]$ 是 $O(n)$ 的，直接 ntt 算的复杂度为 $O(nlogn)$。

$$\sum_{\text{染 i 的出边}} a(i) = \sum_{j=0}^{deg[i]} C(c,j) f_i(j) j$$

题解

Subtask4：$K=2$，相当于从 n 个点里选 2 个点 i 和 j，求所有染色方案中 $a(i)a(j)$ 的和。影响 $a(i)$ 和 $a(j)$ 的只有 i 和 j 两个点的出边，其他边可以随便染。

若 $i=j$，与 $K=1$ 类似。

若存在 i 到 j 的边，不妨考虑先染 i 后染 j。染 i 的方法与之前类似；染 j 时，相当于 j 的出边中有一条的颜色已经被确定了。

$$\sum_{\text{染 j 的出边 (除去与 i 相连的边)}} a(j)=\sum_{k=1}^{deg[j]}\frac{C(c-1,k-1)f_j(k)}{k}\cdot k$$

题解

$f1(i) = (\sum_{j=0}^{deg[i]} C(c,j) f_i(j) j) c^{-deg[i]}$

$f2(i) = (\sum_{j=1}^{deg[i]} C(c-1,j-1) f_i(j)) c^{-(deg[i]-1)}$

$c^{-deg[i]}$ 表示的是已经确定了 $deg[i]$ 条边。$f1(i)$ 表示的是染 i 的出边的情况，$f2(i)$ 表示的是在 i 的一条出边已经染好时染 i 的其他出边的情况。

若存在 i 到 j 的边，$f1(i)f2(j)c^{n-1}$；若不存在 i 到 j 的边，$f1(i)f1(j)c^{n-1}$。

题解

$K=3$ 时相当于选 3 个点 i,j,k。讨论 3 个点的位置关系。

若 i,j,k 形成一条链，$f1(i)f2(j)f2(k)c^{n-1}$；

若 i,j 形成一条链，k 不与它们相连，$f1(i)f2(j)f1(k)c^{n-1}$；

若 i,j,k 互不相连，$f1(i)f1(j)f1(k)c^{n-1}$。

题解

树形 dp，$O(n \cdot poly(K))$。

定义 $h[u][i][0/1]$ 表示点 u 的子树中取了 i 个点，u 有没有取。用 $f1$ 和 $f2$ 转移。

祝大家冬令营取得好成绩！