IOI 2018 国家队集训 @长郡

day 9 题解

$Author : diamond\_duke$

南京外国语学校 戴言

集合

集合

得分情况

- 100 分： 8 人； （一个分段打表）
- 43 分： 5 人；
- 22 分： 20 人；
- 无人爆零。

集合

$T=2$ 有一个和此题正解无关的精妙做法：

考虑 $[n]$ 的任意一个大小至少为 k 的子集，我们把它对应到他最大的 k 个数形成的集合。
那么一个最小值为 x 的，大小为 k 的集合会被 2^{x-1} 个集合对应上。

因此 $\sum_{S\subseteq[n],|S|=k} F(S)=2\cdot\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}$。

而因为 $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$，所以这个和我们就可以 $\Theta(k)$ 计算出来了（扣掉 $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}$ 即可）。

集合

正解

一方面，答案是:

$$A_k = \sum_{i=1}^{n} T^i \cdot \binom{n-i}{k-1}$$

而如果枚举 $\min_{x \in S}\{x\}$ 至少是多少，则答案也是:

$$A_k = T \cdot \binom{n}{k} + \sum_{i=1}^{n-1} (T-1) \cdot T^i \cdot \binom{n-i}{k}$$

集合

发现上式的第二个求和就是 $A_{k+1}\cdot(T-1)$，则:

$$A_k = T\cdot\binom{n}{k} + (T-1)A_{k+1}$$

不停地令 $k=k+1$ 并代入，则可得:

$$A_k = T\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-k}(T-1)^i\cdot\binom{n}{k+i}\right)$$

集合

$$A_k = T \cdot \left(\sum_{i=k}^{n} (T-1)^{i-k} \cdot \binom{n}{i} \right)$$

而由二项式定理，有:

$$\sum_{i=0}^{n} (T-1)^{i} \cdot \binom{n}{i} = (T-1+1)^n = T^n$$

集合

故可得:

$$A_k = T \cdot (T-1)^{-k} \cdot \left(T^n - \sum_{i=0}^{k-1} (T-1)^i \cdot \binom{n}{i}\right)$$

则直接 $\Theta(k)$ 计算即可。

数学

数学

得分情况

- 100 分: 9 人;
- 45 分: 12 人;
- 20 分: 10 人;
- 5 分: 1 人;
- 0 分: 1 人;

数学

我们考虑 $F(n,k)$ 的生成函数，令:

$$G_n(x) = \sum_{i=0}^{k} F(n,k) \cdot x^i$$

则有:

$$G_n^R(x) = \prod_{i=1}^{n} (x+i)$$

直接分治 FFT 可以得到 $n \leq 10^5$ 的部分分。

数学

因为我们只关心非 0 位的个数，所以我们就是要求 $\prod_{i=1}^{n}(x+i)$ 在模 p 意义下有多少项非零。

设 $n = a \cdot p + b$，则原式即为：

$$\left(\prod_{i=1}^{p}(x+i)\right)^{a} \cdot \prod_{i=1}^{b}(x+i)$$

数学

考虑 $\prod_{i=1}^{p}(x+i)$，可以发现这个东西在模 p 意义下有且仅有 p 个根：$0,1,\cdots,p-1$。

而因为 p 是质数，所以由费马小定理可知：
$x^{p-1}\equiv 1(\bmod p)(0<x<p)$。
那么我们考虑 $x\cdot(x^{p-1}-1)$，可以发现这个式子在模 p 意义下也有 p 个根：$0,1,\cdots,p-1$。由代数基本定理可知，这个式子也是这些根。

又 $\mathbb{Z}_p[x]$ 是唯一分解整环，所以这个多项式就是 $\prod_{i=1}^{p}(x+i)$。

数学

所以原式就是 $x^a \cdot (x^{p-1}-1)^a \cdot \prod_{i=1}^{b}(x+i)$。其中 x^a 是整体位移，可以忽略。

考虑 $(x^{p-1}-1)^a$，用二项式定理展开：

$$\sum_{i=0}^{a} x^{(p-1)\cdot i} \cdot \binom{a}{i} \cdot (-1)^{a-i}$$

数学

$$\sum_{i=0}^{a} x^{(p-1)\cdot i} \cdot \binom{a}{i} \cdot (-1)^{a-i}$$

我们考虑这个式子中有多少个非 0 项。根据 $Lucas$ 定理，$\binom{a}{i}$ 非 0 等价于 i 在 p 进制下每一位都不超过 a 的同一位。

那么如果 $a = (a_k a_{k-1} \cdots a_0)_p$，$i$ 的取值个数就是 $\prod_{i=0}^{k}(a_i + 1)$。

数学

$$(x^{p-1}-1)^a\cdot\prod_{i=1}^{b}(x+i)$$

若 $b<p-1$，则因为 $(x^{p-1}-1)^a$ 中非 0 项的次数一定都是 $p-1$ 的倍数，所以任意两个这样的项乘上 $\prod_{i=1}^{b}(x+i)$ 都不会重叠。
那么原式中非 0 项的个数就是 $(x^{p-1}-1)^a$ 以及 $\prod_{i=1}^{b}(x+i)$ 的非 0 项个数之积。前者用上一页的方法做，后者直接分治 FFT 求即可。

数学

否则，若 $b = p - 1$，那么可以发现前后两个式子是一样的，我们当做 $(x^{p-1} - 1)^{a+1}$ 做即可。

时间复杂度：$\Theta(p \cdot \log_2^2 p)$。

PS：这个题的模数不支持 NTT（注意模数是 p 而不是 $998,244,353$），所以要写 MTT 或者双模数 NTT 然后 CRT 合并（FFT 用 `long double` 大概也能过）。

道路

道路

得分情况

- 100 分： 5 人；（一个 BM）
- 71 分： 5 人；
- 48 分： 1 人；
- 40 分： 1 人；
- 29 分： 2 人；
- 12 分：15 人；
- 0 分： 4 人；

道路

考虑一个矩阵，每一个元素是一个 $T+1$ 维向量，第 i 个元素这两个点之间的路径的 $\sum L^i$ 的值。

那么在乘法时，两个向量乘起来就直接把 $(L_1+L_2)^i$ 用二项式定理展开即可得到一个 $\Theta(\log_2 k \cdot N^3 \cdot T^2)$ 的做法，可以得到 72 分。

道路

正解

斯特林反演，把 L^T 转化为

$$\sum_{i=0}^{T} \left\{ {T \atop i} \right\} \cdot L^{\underline{i}} = \sum_{i=0}^{T} \left\{ {T \atop i} \right\} \cdot \binom{L}{i} \cdot i!$$

那么我们相当于就是要维护 $\sum \binom{L}{i}$ 的值。

用矩阵维护 (u, v) 之间的路径的 $\sum \binom{L}{i}$，考虑如何做乘法（即合并两个 L）。

道路

有组合恒等式（范德蒙恒等式）：

$$\binom{n+m}{x} = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{x-i}$$

那么我们考虑如果我们把两个矩阵（分别表示长度不超过 L_1 和 L_2 的路径的 $\binom{L}{i}$ 之和）拼起来：

- 如果新路径长度不超过 L_1，那么就是左边的和；
- 否则是左边的一条长度恰好为 L_1 的路径拼上右边的一条不超过 L_2 的路径。

道路

其中的前者直接算，而后者中的 $\sum \binom{L_L}{i}$ 可以变为 $\binom{L_1}{i}$ 乘上路径条数。所以可以把：

$$\sum_{i=0}^{x} \sum_{L_L, L_R} \binom{L_L}{x-i} \cdot \binom{L_R}{i}$$

变为：

$$\sum_{i=0}^{x} \left(\sum_{L_R} \binom{L_R}{i} \cdot \binom{L_1}{x-i} \right) \cdot |P_L|$$

于是我们可以先把前面的 $\sum$ 在 $\Theta(n^3)$ 的时间内算出来之后再对路径条数的矩阵做一次矩阵乘法。

时间复杂度：$\Theta(\log_2 k \cdot (N^3 \cdot T + N^2 \cdot T^2))$。

PS：其实直接用二项式定理也可以同样这么优化做到同样的复杂度，但是因为出题人~~懒得再写一个 std 了~~一开始没想到，所以题解里面写了没啥用的斯特林展开。

Thank you!