NOI2018 Day1 Solution

___debug

2018 年 6 月 22 日

1 A

每次 and 操作实际上会将一部分二进制位变为 0, 其它不变; or 操作会将一部分二进制位变为 1, 其它不变. 可以发现一旦某个区间中某一位全部相同, 之后也会一直保持.

所以只用建立一棵线段树, 维护每个区间的每个二进制位是否全部相同即可. 若不相同则递归操作, 若相同则转化为一个区间加法标记.

时间复杂度 $O(n \log n \log w)$.

2 B

观察 S 的生成方式, 发现 $(ai+b) \mod n$ 会取遍 $[0,n)$ 的所有整数, 形成一个排列.

考虑 $T_i = 1$ 的情况, 此时如果某个询问 p 在这一位有贡献, 也就是 $S_{p+i} \neq T_i$, 一定有

$$
\begin{aligned}
S_{p+i} &\in [0, c) \\
S_p &\in [0 - ai, c - ai)
\end{aligned}
$$

$T_i = 0$ 的情况同理. 注意上述的区间是模意义下的, 实际上可能对应着一个或两个区间.

所以我们只需对每 T 的每一位分开预处理贡献即可. 时间复杂度 $O(m \log m)$.

3 C

根据期望的线性性, 我们考虑每一个点对答案的贡献.

每次选择了一个点之后, 如果没有结束, 那么下一步期望的移动距离就是这个点到其他所有点的距离和除以 n.

容易发现树的形态并不影响点的期望被选择次数. 只要 0 和 1 的个数一定, 所有权值为相同的点的期望选择次数是相同的.

设 $val_{i,j}$ 表示 i 个 1 的时候权值为 j 的点的期望选择次数, 有下列方程

$$
val_{i,0} = \frac{1}{n} + \frac{i}{n} val_{i-1,0} + \frac{n-i-1}{n} val_{i+1,0} + \frac{1}{n} val_{i+1,1} \tag{1}
$$

$$
val_{i,1} = \frac{1}{n} + \frac{i-1}{n} val_{i-1,1} + \frac{1}{n} val_{i-1,0} + \frac{n-i}{n} val_{i+1,1} \tag{2}
$$

其中 $val_{0,*} val_{n,*}, val_{1,1}, val_{n-1,0}$ 是边界情况.

移项之后可以发现根据 $val_{i,*}$ 可以推出 $val_{i+1,1}$, 根据 $val_{i,*}$ 和 $val_{i+1,1}$ 可以推出 $val_{i+1,0}$, 因此可以将每一个 $val_{k,*}(1 \leq k < n)$ 表示成 $aval_{1,0} + bval_{1,1} + c$ 的形式, 最后根据在 $n-1$ 的时候的 (1), (2) 两式列出一个二元一次方程, 解之即可.

最后答案就是每个点的期望选择次数乘上它每一步的期望移动步数. 时间复杂度 $O(n)$.