WC2019 练习赛

Day5 Solution

January 12, 2019

1 Inverse

设$f(i,j,k)$表示进行k次操作后$P_i < P_j$的概率。转移可以直接枚举第k次操作的区间，这样是$O(n^4k)$的，考虑怎么优化。

假设$i < j$，那么可以将区间$[l,r]$分为四类：

- $r < i$ or $l > j$ or $i < l \le r < j$，翻转这些区间不会对i,j位置造成影响。
- $l \le i \le r < j$，只会改变i的位置，即从$f(l+r-i,j,k-1)$转移而来。
- $i < l \le j \le r$，只会改变j的位置，即从$f(i,l+r-j,k-1)$转移而来。
- $l \le i < j \le r$，会改变i,j的位置，但两者距离不变，即从$f(l+r-i,l+r-j,k-1)$转移而来。

转移到的状态为$O(n)$的，且可以$O(1)$计算转移系数（或者$O(n^4)$预处理），因此复杂度为$O(n^3k)$。

这个做法可以通过前缀和继续优化，以第二类区间为例，我们需要计算：

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=i}^{j-1} f(l+r-i,j,k)\\ =&\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=0}^{j-i-1} f(l+r,j,k)\end{aligned}$$

设$S_1(n,j,k)=\sum_{i=1}^{n} f(i,j,k)$, $S_2(n,j,k)=\sum_{i=1}^{n} S_1(i,j,k)$，那么：

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=0}^{j-i-1} f(l+r,j,k)\\ =&\sum_{l=1}^{i} S_1(l+j-i-1,j,k)-S_1(l-1,j,k)\\ =&S_2(j-1,j,k)-S_2(j-i-1,j,k)-S_2(i-1,j,k)\end{aligned}$$

第三类区间的情况是对称的，第四类只需先令$g(i,j,k)=f(i,i+j,k)$，处理方法也是一样的。这样复杂度为$O(n^2k)$。

2 Subsequence

设$f(i,j)$表示前i个数选了j个数的最大权值，于是有

$$f(i,j)=\max(f(i-1,j),f(i-1,j-1)+a_i\times j)$$

这样是$O(n^2)$的。通过打表发现，对于每一个i，转移方程中满足后一种决策更优的j一定是一段后缀。考虑用平衡树维护dp值的差分，即$f(i,j)-f(i,j-1)$。那么每次可以先在平衡树上二分找到从哪个位置开始第二种决策更优，接下来的操作是插入一个位置以及对后缀进行区间加。复杂度为$O(n\log n)$。

考虑证明，我们设$p(i,j)=\frac{f(i,j)-f(i,j-1)}{j}$，那么只有当$p(i-1,j)\geq a_i$时，$f(i,j)=f(i-1,j)$，即选择前一种决策。事实上当$i$一定时，$p(i,j)$随$j$增加而递减。这只需要考虑转移时$p(i,j)$的变化：

$$p(i+1,j)=\begin{cases}\frac{(j-1)p(i,j-1)+a_i}{j} & p(i,j)<a_i \text{ and } p(i,j-1)<a_i\\ a_i & p(i,j)>a_i \text{ and } p(i,j-1)\geq a_i\\ p(i,j) & p(i,j)\geq a_i\end{cases}\tag{1}$$

可以发现如果$p(i,j)$是是随j递减的，那么$p(i+1,j)$仍然是随j递减的。

另外，这个性质实际上暗示了另一个结论，并引出另一个做法：第$k=i+1$时的最优子序列可以由$k=i$时的子序列加一个元素得到，且只需要贪心地选一个能使当前子序列权值增加最大的元素即可。由于贡献是一次函数的形式，可以想到用凸壳来找最大值。

考虑分块，每个块维护这一块内的凸壳。每次在凸壳上二分找到这一块内的最大值，选择某个元素后需要将它删掉，直接重构凸壳即可，但直接这样做是$O(n\sqrt{n}\log n)$的。注意到二分时找到的元素是单调的，于是可以用一个指针来代替二分，这样其均摊复杂度变为$O(n\sqrt{n})$；而重构凸包时不需要重新排序，因此重构也是线性的，这样就得到了一个$O(n\sqrt{n})$的做法。

3 Convex

只需要计算切开之后面积较小的那部分的面积之和即可。枚举对角线的一个端点i，我们只需要找到顺时针方向上的第一个j，满足P_iP_j左边部分的面积较

大（两部分面积相等的情况需要特殊处理），这样的j是单调的因此可以线性计算。问题变为计算一些多边形的面积和。

由于多边形的面积可以表示为多个以原点为端点的三角形的有向面积之和，可以发现需要计算的部分是一些三角形面积的前缀和（以及前缀和的前缀和）。预处理凸包上相邻点的叉积的前缀和，以及横纵坐标的前缀和即可计算。复杂度为$O(n)$。