HNOI2019 Contest Solution

Stay determined!

Wearry

Exchange

注意到每个点的后继都是唯一确定的，因此这个移动是在一个树形结构上进行的，因此题目转化为求 $[l_i, r_i]$ 区间内的点构成虚树森林的最大深度。

进一步观察不难发现，这棵树形结构实际上是与单调栈的分层结构一致，因此每个子树中的点集都是一个连续的区间，在每个点上记录向上最远能走多少步，用线段树维护即可。

Tree

考虑链的情况如何处理，假设从 1 号点开始拓展，并且当前链中左右端点分别是 l, r 。考虑一个没有确定位置的点 x 可以先用一次询问判断 x 在已知链的左侧还是右侧，不妨假设在左侧，右侧情况同理，接下来要得到 x, l 之间的链：

1. 用一次询问判断两个点是否直接相连，若直接相连则结束，否则跳转到 2 。
2. 二分找到两个点之间编号最大的点 m，递归对 x, m 与 m, l 分别进行 1 。

这样我们就得到了一个通用的处理一条链的方法。如果原树不是链，则需要找到与 x 之间构成链的已知点。实际上这样的点可以任意找，简单做法就是直接每次将 $x, 1$ 之间的链确定下来。

然而这样并不能保证询问次数的下界，要尽可能减少询问的次数，应该找到 1 号点所在联通块的与 x 距离最近的点。

不难想到 `BFS` 序，假设点 1 与点 x 路径上在 1 号点联通块中的点有 c 个，在 `BFS` 序上二分，找到最小的 `BFS` 序满足点 1 与点 x 路径上 `BFS` 序在这之前的点有 c 个，即为距离 x 最近的点。

Hanoi

首先考虑解决没有 a,b 限制的问题，不难发现几个简单的限制：

1. 放入三号塔的圆盘必须严格按照顺序。
2. 对于二号塔或者一号塔顶端的连续一段与三号塔顶端匹配的圆盘，应该立即移动到三号塔上。
3. 二号塔中存在 x 在 y 的正上方且 $x < y - 1$ 时一定无解。

定义几乎下降序列为形如 $l_1, l_1+1, \ldots, r_1, l_2, l_2+1, \ldots, r_2, \ldots$ 的序列，其中 $[l_i, r_i]$ 是连续的自然数区间，且满足 $r_i < l_{i-1}$。

Lemma 1 一号塔中的极长几乎下降前缀与剩下部分一定相互独立地离开一号塔。

Proof 1 令极长几乎下降前缀的最后一个位置为 x，则下一个位置一定 $> x + 1$，否则前缀可以更长。如果同时离开，则不满足简单限制 3 的条件。

这样我们可以将一号塔的序列拆分成若干个极长几乎下降序列分开处理，同时定义连续几乎下降序列为满足 $r_i = l_{i-1} - 1$ 的几乎下降序列。

- 对于连续几乎下降序列，最优方案一定是将每个区间分别放入二号塔。
- 对于非连续几乎下降序列，不难发现一定不存在两步以上的方案能够避免违反简单限制 3，于是唯一的方式为将其整个移动到二号塔上，这个方案同样适用于有 a,b 限制的情况。

接下来考虑有 a,b 限制的情况下连续几乎下降序列的处理：

1. a,b 足够大，则方案与无限制的情况下相同。
2. a,b 不够大，一定无法将最小的圆盘放在开头，最大的圆盘放在结尾:
   - 序列的区间数量恰好为 1 ，直接一个一个地移动即可。
   - 序列的区间数量恰好为 2 ，找到任意一组部分合法的解即可。
   - 序列的区间数量大于 2, 唯一的移动方式是整体移动。