# WC2019 模拟赛 Solution

Wearry

Stay determined!

## Union

定义 $f(s)$ 表示点集 $s$ 构成的图联通方案数, $g(s)$ 表示点集 $s$ 构成的图不一定联通的方案数. 其中 $g(s)$ 比较好求:

$$g(s) = \prod_{(u,v)\in s} (C_{u,v} + 1)$$

考虑 $g(s)$ 中点集 $s$ 中编号最小的点 $u$ 所在联通块的集合 $t$, 不难得到:

$$g(s) = \sum_{u\in t, t\subset s} f(t)g(s-t)$$

注意到求解的过程中只需要考虑所有包含 1 号点的集合 $s'$ 并计算所有 $f(s')$ 即可.

倒过来考虑这个过程, 相当于用 $f(s')$ 与 $g(s-s')$ 进行子集卷积会得到 $g(s)$. 现在求 $f(s')$ 只需要用 $g(s)$ 和 $g(s-s')$ 做子集卷积意义下的除法即可.

## Power

首先根据 $k$ 的奇偶性, 可以将 $\sum x_i$ 分成若干段分别考虑贡献.

- 当 $k$ 为奇数时, 需要考虑的范围是 $(-\infty, a], (a, +\infty)$.
- 当 $k$ 为偶数时, 需要考虑的范围是 $(-\infty, -|a|], (-|a|, |a|], (|a|, +\infty)$.

接下来要计算的是 $\sum x_i$ 恰好落在某一个区间内部的概率, 为了方便, 先假设所有变量都是在 $[0, +\infty)$ 上均匀随机的.

记 $p_n(s)$ 表示 $n$ 个随机变量之和不超过 $s$ 的概率, 更准确而言是满足这样条件的点在 $n$ 维空间中所占的体积. 考虑枚举最后一个变量的取值, 可以得到:

$$p_n(s) = \int_0^s p_{n-1}(x)\mathrm{d}x$$

由于我们有边界条件:

$$\forall s, p_0(s) = 1$$

于是不难归纳得到:

$$p_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

类似地, 我们可以知道 $n$ 个随机变量的和恰好等于 $x$ 的概率 $q_n(x)$ 就等于 $p_{n-1}(x)$.

接下来要处理 $l_i, r_i$ 的限制, 考虑容斥, 用 $s_i + y_i$ 表示 $x_i$, 其中 $s_i$ 为 $l_i$ 或者 $r_i$, 后者一定不合法. 这样 $\sum x_i = t$ 的概率就是 $q_n(t - \sum s_i)$, 所以区间 $[l, r]$ 对答案的贡献就是:

$$\int_l^r q_n(x - \sum s_i) \max\{x^k, a^k\}\mathrm{d}x$$

然而这样计算上界为 $+\infty$ 的积分时会出现问题, 这里需要一些变形的技巧, 用 $s_i - y_i$ 表示 $x_i$, $s_i$ 等于 $l_i$ 或 $r_i$, 这样是前者不合法, 同时 $\sum x_i = t$ 的概率等于 $q_n(\sum s_i - t)$.

由于容斥之外的计算只与 $\sum s_i$ 有关, 因此可以使用背包 dp 优化, 另外一个需要注意的细节是特判 $l_i = r_i$ 的所有变量.

## Traffic

在点 $x$ 处计算答案时, 显然会从最大的联通块中选择一棵子树接到最小的联通块上.

首先二分答案, 转化成区间存在性问题, 并在每个点上维护子树内所有点的 $size$ 信息. 接下来的部分有多种方法可以处理:

- 使用启发式合并, 每次计算答案前删掉轻儿子维护的信息.
- 使用线段树合并直接维护每个点的信息进行计算.

需要特殊注意最大联通块来自父边的情况, 这样会改变从 1 号点到 $x$ 号点这条链的子树大小.