HNOI2019 练习赛

Solution

March 23, 2019

1 Lemon

先不考虑加固节点。设s_i为节点i到根的路径上的d的最小值，那么问题就是重新排列柠檬，使得$w_i \le s_i$。

由于有$s_i \le s_{fa_i}$，我们可以从根开始贪心。将柠檬按w_i从大到小排序，用一个大根堆维护可用的节点，每次将w_i最大的柠檬匹配s_i最大的节点，然后将这个节点弹出堆，将其儿子加入堆。

但是，如果此时最大的柠檬的w_i大于s_i，我们就必须对某个节点进行加固。可以发现这个节点一定在堆中，并且我们一定会将它的d_i加固到w_i。考虑直接枚举加固哪个节点，但麻烦的是这个节点的子树内的s_i都可能会变化，朴素模拟复杂度是$O(n^2)$的。

设cnt_i表示，有多少个节点j满足$s_j \ge w_i$，那么可行当且仅当$cnt_i - i \ge 0$。考虑用线段树上维护$cnt_i - i$的最小值，修改s_i也就是在线段树进行区间加减。

由于堆中的节点的子树互不相交，总复杂度为$O(n \log n)$。

(似乎有更好的作法

2 Invert

考虑一个类似的游戏：$n \times n$的棋盘上，每个格子上有若干个石子，每次可以选择一个有石子的格子，取走一个石子，然后在以这个格子为右下角的边长不超过k的一个正方形内的其他格子上放上一个石子。由于每个石子可以看成是独立的，可以用$sg(i,j)$表示一个位于(i,j)的石子的sg值，判断胜负只需判断所有石子sg的异或值是否为0。

由于异或的性质，胜负的情况之和每个格子上石子的奇偶性有关。我们可以将有奇数个石子的格子视为白色，有偶数个石子的格子视为黑色，那么这个游戏就变成了题目中描述的游戏。

打表观察可以发现：

$$sg(i,j) = \min\{lowbit(i), lowbit(j), lim\}$$

其中lim为不超过k的最大的2的幂。这一结论可以用归纳法证明。

最后只需计算被矩形覆盖的所有位置的异或和，这部分可以用扫描线+线段树完成。对于每个$i, i \in [0,29]$，用线段树维护当前所有被覆盖的纵坐标y中，$lowbit(y) = 2^i$的y的个数。事实上我们只关心个数的奇偶性，因此可以用一个二进制数存下信息。

最终复杂度为$O(m \log n)$。

3 Triplet

先考虑$n = 5$的情况怎么做。设x_i表示其中第i小的数。我们将所有三元组都询问一次，那么在询问得到的结果中，$x_1 + x_5$会出现3次，$x_1 + x_4, x_2 + x_5$分别会出现2次，$x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_3 + x_5$会出现1次。其中只有$x_1 + x_5$可能会与$x_2 + x_4$相等，不难特判这种情况。利用这些信息不难解出$x_i$的值。

接下来需要知道x_i的位置，最简单的方式是直接枚举排列判断是否与询问结果相符，也可以直接手玩。

对于n更大的情况，询问出前5个值后，在其中任选三个值$A[x_1] < A[x_2] < A[x_3]$，然后考虑每次询问$(x_1, x_2, i), (x_2, x_3, i)$，这样一定能询问出$A[i]$的值，但询问次数为$2 \times n$。考虑询问$(x_1, x_2, i)$时，当且仅当$A[i] \in (A[x_1], A[x_2])$时我们无法确定$A[i]$的值，需要进行额外一次询问，此时我们可以选择$(A[x_1], A[i])$与$(A[i], A[x_2])$两个区间中长度较小的一个作为新的$(A[x_1], A[x_2])$。这样每次需要第二次询问时，$(A[x_1], A[x_2])$的区间长度都会减半。

询问次数为$n + \log Maxval + 5$。