Solution:July, 1

Amberframe

July 1, 2018

1 coin

1.1 $n \le 300$

记 $f(i,j)$ 表示恰好有 j 个人最喜欢的假币种类是 i 的概率，可以用 dp 计算。设 $h(i,j,k)$ 表示前 k 个人恰好有 j 个喜爱的假币种类是 i 的概率，那么 $h(i,j,k) = h(i,j-1,k-1) * \frac{p_{ij}}{1000} + h(i,j-1,k) * (1 - \frac{p_{ij}}{1000})$，$f(i,j) = h(i,j,n)$。

记 $g(i,j)$ 表示第 i 种假币携带 j 枚，会被拿走的期望个数。$g(i,j) = \sum\limits_{0 \le k \le m} min(k,j) * f(i,k) = [\sum\limits_{k \le j} k * f(i,k)] + j * \sum\limits_{j<k \le m} f(i,k)$。

假设确定了每枚假币的携带数量 w_i，那么 $E = \sum g(i, w_i)$，现在就是要让 E 最大。

考虑记 $dp[i][j]$ 表示决策前 i 种假币中共选取了 j 枚作礼物，所收获的最大期望。

$dp[i][j] = \max\limits_{k} \{dp[i-1][j-k] + g(i,k)\}$

复杂度 $O(n^2 m)$

1.2 $n \le 3000$

分析一下 $\nabla g(i,j) = g(i,j) - g(i,j-1)$ 的特性，$\nabla g(i,j) = \sum j \le k \le m f(i,j)$，你会发现 $\nabla g(i,j)$ 首先是非负的，其次是单调不升的，也就是说针对第 i 种假钞而言，拿 $x+1$ 枚一定比 x 收益大，但是从 $x+1$ 枚变成 $x+2$ 枚增加的收益比从 x 枚增加到 $x+1$ 枚是要少的。

摒弃第二部分的 dp，先假设所有假钞都选了 0 份，接着贪心得选择一种假钞，将其数量 +1 使得收益增幅最大，重复这个操作 n 次。计算 g 的复杂度也是 $O(n^2 m)$，注意到如果第 i 种假钞当前只选了 a 份，那么 $g(i,a+2), g(i,a+3)..$ 是不用计算的，$g(i,x)$ 需要用到时从 $g(i,x-1)$ 可以 $O(n)$ 推得，即只有 $O(n)$ 个 $g(i,j)$ 需要计算，总时间复杂度 $O(nm + n^2)$。

2 game

问题其实和“每次随机选择一个点，将所在联通块捶一遍，删除该点及其连边”是等价的。

E(每个点被捶次数之和)=$\sum$ E(i 被捶次数)=$\sum\limits_{i,j}$ P(删除 j 时 i 被捶)

删除 j 时，i 被捶了 $\Leftrightarrow$ 删除 j 时，i 仍然和 j 连通 $\Leftrightarrow$ 删除 j 时，i 到 j 的路径上所有点都没有被删除 $\Leftrightarrow$ j 是 i 到 j 路径上最早被删除的

$P(i,j) = \frac{1}{dist(i,j)}$，其中 $dist(i,j)$ 表示 i 到 j 的路径上的点数。

$E = \sum\limits_{x,y} \frac{1}{dist(x,y)}$，就是考虑计算对于每一个 $x \in [1,n]$，求出树上有多少点对距离为 x。

直接 dp 是 $O(n^2)$ 的，如果只考虑路径过根的点对，可以用 FFT 合并。外层套上树分治即可，时间复杂度 $O(n \log^2 n)$。

3 battery

炮台发射激光的方向实际是互不干扰的，可以直接模拟判断炮台某个方向射出的激光是否合法。

如何确保每个空位都能被激光覆盖？若没有激光能打到必然无解；若有炮台两个方向的激光都能打到，这个空位必然能覆盖到；否则，就是形如 $(x_1) \cup (!x_2) \cup .. \cup (!x_k) = True$ 的限制形式。其中 x_i 表示第 i 个炮台是否是竖直摆放的。

k-SAT 问题是非常困难的，问题陷入了僵局？但是观察到，一个空地只可能被竖直穿过一次，横向穿过一次。若竖直方向有两条激光穿过，则必有炮台被激光打到。所以问题只是 2-SAT，可以顺利解决，不过这个问题中还需要判不合法以及输出方案，写起来会很难受，需要一些耐心。