董先生的休闲方案

解法一

每个方案只会评估一次，显然评估顺序与 $1 \dots n$ 的排列一一对应。

x 只算一次当且仅当排列中比 x 小的数都在 x 的前面。

枚举排列即可做到 $\mathcal{O}(n!n)$ 的时间复杂度。

期望得分 10%。

解法二

显然可以状态压缩。

$f_{i,S}$ 表示已经提出了前 i 个方案，目前已知方案为 S，仍需耗时的期望。

转移显然。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n2^n)$。

期望得分 20%。

解法三

因为期望是线性函数，每个方案对答案的贡献是独立的。

考虑计算有多少个排列，满足排列中比 x 小的数都在 x 的前面。

枚举 x 前比 x 大的数的个数，容易得到

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-x} \binom{n-x}{i} (x-1+i)!(n-x-i)!$$

答案即为

$$2n - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(i)}{n!}$$

时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2)$。

期望得分 30%。

解法四

化简 $f(x)$，容易得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n-x} \frac{(n-x)!(x-1+i)!(n-x-i)!}{i!(n-x-i)!} \\ &= (n-x)!(x-1)!\sum_{i=0}^{n-x} \frac{(x-1+i)!}{i!(x-1)!} \\ &= (n-x)!(x-1)!\sum_{i=0}^{n-x} \binom{x-1+i}{i} \\ &= (n-x)!(x-1)!\binom{n}{n-x} \\ &= \frac{(n-x)!(x-1)!n!}{x!(n-x)!} \\ &= \frac{n!}{x} \end{aligned}$$

化简和式使用了平行求和公式。

形象地理解，比 x 大的数都确定后，x 的位置就已经确定了，所以有 $\frac{n!}{x}$ 种排列。

答案即为

$$2n - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$。

期望得分 40%。

解法五

考虑优化解法二的状态。

f_i 表示剩余 i 份方案未评估的期望耗时，显然有

$$f_i = \frac{1}{i}(f_{i-1}+1) + (1-\frac{1}{i})(f_{i-1}+2) = f_{i-1} + 2 - \frac{1}{i}$$

答案即为

$$f_n = 2n - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$。

期望得分 40%。

解法六

设

$$F(n,p,k) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \pmod{p^k}$$

$$
\begin{aligned}
F(n,p,k) &\equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{[p \nmid i]}{i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \frac{1}{ip} \pmod{p^k} \\
&\equiv \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{[p \nmid i]}{i} \right) + \frac{F(\lfloor \frac{n}{p} \rfloor, p, k+1)}{p} \pmod{p^k}
\end{aligned}
$$

时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log_p n)$。

期望得分 60%。

解法七

设

$$f(n,p,k) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{[p \nmid i]}{i} \pmod{p^k}$$

则

$$f(n,p,k) \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1} \frac{1}{jp+i} + \sum_{i=\lfloor \frac{n}{p} \rfloor p+1}^{n} \frac{1}{i} \pmod{p^k}$$

其中 $\sum_{i=\lfloor \frac{n}{p} \rfloor p+1}^{n} \frac{1}{i}$ 可以 $\mathcal{O}(p)$ 求得。

将 $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1} \frac{1}{jp+i}$ 展开有

$$\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1} \frac{1}{jp+i} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(-1)^x j^x p^x}{i^{x+1}} \pmod{p^k}$$

当 $x \geq k$ 时，$p^x \equiv 0 \pmod{p^k}$，因此

$$\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1} \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(-1)^x j^x p^x}{i^{x+1}} \equiv \sum_{x=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(-1)^x p^x}{i^{x+1}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1} j^x \pmod{p^k}$$

其中 $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1} j^x$ 可以用伯努利数 $\mathcal{O}(k^2)$ 或矩阵乘法快速幂 $\mathcal{O}(k^3 \log n)$ 预处理，因而上式可以 $\mathcal{O}(pk)$ 求得。

总时间复杂度 $\mathcal{O}((pk+k^2)\log_p n)$ 或 $\mathcal{O}((pk+k^3 \log n)\log_p n)$。

期望得分 100%。

数据

因为有解的点非常少，所以 p,k,n 都不会非常满，拿了四台电脑跑了一个星期终于把最后四组数据造了出来。