

## 1 观察

当  $n \times m$  的网格被填满  $*$  时, 此时  $L$  形最多, 共有  $C = 4 * (n - 1) * (m - 1)$  个。  $k > C$  时显然无解, 下面仅讨论  $k \leq C$  的情况。同时容易注意到当  $k < C - ?$  时, 很容易找到解, 只有  $k \geq C - ?$  时, 会有无解情况。下面的讨论将会围绕以上观察展开, 并在推导过程中求出  $?$  具体的值。

## 2 讨论

设  $r$  表示当前还需要增添的  $L$  型数目。构造程序从上向下, 从左向右填加  $*$ 。从第二行开始, 在每行的开头位置添加一个  $*$  会使得网络比原先多出 1 个  $L$  型, 而在中间位置和行末添加  $*$  则会使网络比原先分别多出 4 个和 3 个  $L$  型。

构造程序按照上述顺序依次添加  $*$ , 直至若再按照上述顺序添加  $*$  会使得  $r < 0$  时停止。此时  $r < 4$ , 下面从 1.3 开始将对  $r$  作分类讨论。为了方便, 记  $cur$  表示填写停止时处在的行,  $nex$  为  $cur$  的下一行,  $\alpha$  和  $\beta$  表示  $cur$  中已经填写了多少  $*$  及剩余未填写  $*$  的数量, 显然  $\alpha + \beta = m$ 。

## 3 $r=0$

此时网络已满足合法条件。

## 4 $r=1$

### 4.1 $\beta = 1$

- 若不存在  $nex$ , 那么  $k \geq C - 3 + 1$ , 跳转到 7
- Otherwise, 在  $nex$  第一列添加  $*$

### 4.2 Otherwise

在  $cur$  的末尾添加  $*$

## 5 $r=2$

### 5.1 $\beta \geq 3$

在  $cur$  倒数第二列添加  $*$

### 5.2 $\beta < 3$

若不存在  $nex$ , 那么  $k \geq C - 7 + 2$ , 跳转到 7

- $\alpha \geq 2$ , 在  $nex$  行第  $\alpha$  与  $\alpha + 1$  列添加  $*$
- $\alpha = 1$ , 此时  $m = 3, \beta = 2$ , 删去  $cur$  第 1 列的  $*$ , 在  $cur$  第 2 列及  $nex$  第 2, 3 列添加  $*$
- $\alpha = 0$ , 由于  $n, m \geq 3$ , 不存在

## 6 $r=3$

### 6.1 $\beta \geq 4, a \geq 2$

删去  $cur$  第一列的  $*$ , 并在  $cur$  第  $\alpha+2, \alpha+3$  分别添加  $*$

### 6.2 $\alpha = 0$

#### 6.2.1 $\beta \geq 4$

在  $cur$  第 1, 3 列添加  $*$

#### 6.2.2 $\beta = 3$

- 若不存在  $nex$ , 那么  $k \geq C - 8 + 3$ , 跳转到 7
- Otherwise, 在  $cur$  第 2 列及  $nex$  第 2, 3 列添加  $*$

### 6.3 $\alpha = 1$

#### 6.3.1 $\beta \geq 4$

在  $cur$  第 3 列和行末添加  $*$

#### 6.3.2 $\beta = 3, 2$

- 若不存在  $nex$ , 那么  $k \geq C - 11 + 3$ , 跳转到 7
- Otherwise, 删去  $cur$  第 1 列的  $*$ , 在  $cur$  第 2 列及  $nex$  第 1, 2, 3 列添加  $*$

### 6.4 $\beta < 4, \alpha \geq 2$

若不存在  $nex$ , 那么  $k \geq C - 7 + 3$ , 跳转到 7

- $\beta = 1$ , 在  $cur$  行末添加  $*$
- $\beta = 2$ , 在  $cur$  行末及  $nex$  第  $\alpha, \alpha+1$  列添加  $*$

## 7 $k \geq C - 8$

$C-3, C-6, C-7$  都可以构造出解, 而可以证明  $C-1, C-2, C-4, C-5$  无解。但  $k = C-8$  在  $\min(n, m) = 3$  时是有解的: 留下长度为 3 的一行全部放。