UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA

FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL
DEPARTAMENTO ACADEMICO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas

CURSO: Cáculo de Probabilidades

PROFESOR: ROMERO PLASENCIA, Jackson

ALUMNO: TITO MENDOZA , Máximo

AYACUCHO - PERÚ
2019

1. Demuestre que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de si, y sólo si, satisface las siguientes propiedades:

   a. $\emptyset \in \mathcal{F}$
   b. A $\in \longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
   c. $A_1, A_2, A_3 \ldots \in \mathcal{F} \longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

   Demostración:

   a. Sabemos que $\Omega \in \mathcal{F}$ entonces su complento $\Omega^c \in \mathcal{F}$ es $\emptyset \in \mathcal{F}$.
   b. A $\in \longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$ (propiedad 2 de σ-álgebra).
   c. $A_1, A_2, A_3 \ldots \in \mathcal{F}$ entonces su comlemento ${A_1}^c, {A_2}^c, {A_3}^c \ldots \in \mathcal{F}$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} {A_n}^c \in \mathcal{F}$ entonces su complemento es $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

2. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra; demuestre que $\mathcal{F}^c$ es una σ-álgebra definida por: $\mathcal{F}^c = \{A^c : A \in \mathcal{F}\}$.

   Demostración:

   a. Si $\emptyset \in \mathcal{F}$ entonces su complemento $\emptyset^c \in \mathcal{F}^c$ entonces $\Omega \in \mathcal{F}^c$.
   b. $A \in \mathcal{F}$ entonces su complemento $A^c \in \mathcal{F}^c$
   c. $A_1, A_2, A_3 \ldots \in \mathcal{F}$ entonces su comlemento ${A_1}^c, {A_2}^c, {A_3}^c \ldots \in \mathcal{F}^c$ entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} {A_n}^c \in \mathcal{F}^c$ entonces su complemto es $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}^c$.

3. Sea $\{A_n\}_{n \in N}$ la sucesión de eventos, definida por:

$$\begin{array}{lll} A_n = A & si & n = 1, 3, 5 \ldots \\ A_n = A^c & si & n = 2, 4, 6 \ldots \end{array}$$

   Determine el $\lim\limits_{x \to \infty} A_n$

   Demostración:

$$\left(\lim_{x \to \infty} inf A_n \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A^c) = \quad \bigcup_{\emptyset} = \quad \emptyset$$

$$\left(\lim_{x \to \infty} sup A_n \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega = \Omega$$

   como los limites

$$\lim_{x \to \infty} inf A_n \neq \lim_{x \to \infty} sup A_n$$

entonces el limite $\lim\limits_{x\to\infty} A_n$ no existe

4. Sea $\{A_n\}_{n\in N}$ la sucesión de eventos, definida por:

$$\begin{array}{c} A_n = \left[\frac{-1}{n}, 0\right] \quad si \quad n = 1, 3, 5 \ldots \\ A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right] \quad si \quad n = 2, 4, 6 \ldots \end{array}$$

Determine el $\lim\limits_{x\to\infty} A_n$

Demostración:

$$\lim_{x\to\infty} infA_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k \ldots\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{0\} = \{0\}$$

$$\lim_{x\to\infty} supA_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

5. Sean $A_1, A_2, A_3 \ldots$ eventos aleatorios, demuestre:

a. $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} P\left({A_k}^c\right)$

b. Si $P\left(A_k\right) \geq 1 - e \quad para \quad K = 1, 2, 3, \ldots, n$ entonces $P\left(\bigcap_{n=1}^{n}\right) \geq 1 - ne$

c. $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} P\left({A_k}^c\right)$

Demostración:

solución **a**

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P\left({A_k}^c\right)$$

sabemos

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P\left({A_k}^c\right)$$

solución **b**

$$P(A_k) \geq 1 - e$$
$$e \geq 1 - P(A_k)$$
$$\prod_{i=1}^{n} e \geq \prod_{i=1}^{n} (A_k)^c$$
$$ne \geq \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_k))$$
$$\Rightarrow ne \geq 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_k\right)$$
$$\Rightarrow ne \geq 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

6. Demuestre las desigualdades de Boole.

   Demostración:

   (a) $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

   (b) $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P({A_k}^c)$

   solución **a**
   Sea

$$B_n = A_n$$

   $B_n = A_n$-$\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$ donde $n = 2, 3, 4 \ldots, n$

   entonces $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ = $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$ luego ;$B_n \cap B_m \quad si \quad n \neq m \quad luego \quad B_n \subseteq A_m$

por tanto

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(B_n\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) \end{aligned}$$

solución **b**

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} {A_n}^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P\left({A_n}^c\right) \end{aligned}$$

7. Sea $\{A_n\}_{n\in N}$ una sucesión de eventos, demuestre que:

   a. $\left(\lim\limits_{x\to\infty} infA_n\right)^c \quad = \quad \lim\limits_{x\to\infty} sup{A_n}^c$

   b. $\left(\lim\limits_{x\to\infty} supA_n\right)^c \quad = \quad \lim\limits_{x\to\infty} inf{A_n}^c$

   c. $P\left(\lim\limits_{x\to\infty} infA_n\right) \quad = \quad 1 - P\left(\lim\limits_{x\to\infty} sup{A_n}^c\right)$

   Demostración:

   solución **a**

$$\begin{aligned} \left(\lim_{x\to\infty} infA_n\right)^c &= \lim_{x\to\infty} sup{A_n}^c \\ &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} {A_k}^c \\ &= \lim_{x\to\infty} sup{A_n}^c \end{aligned}$$

solución **b**

$$
\begin{aligned}
\left(\lim_{x\to\infty} supA_n\right)^c &= \lim_{x\to\infty} infA_n{}^c \\
&= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k{}^c \\
&= \lim_{x\to\infty} infA_n{}^c
\end{aligned}
$$

solución **c**

$$
P\left(\lim_{x\to\infty} infA_n\right) = 1 - P\left(\lim_{x\to\infty} supA_n\right)^c
$$

$$
\begin{aligned}
\left([P\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k]^c\right)^c &= 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c \\
&= 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k{}^c\right) \\
&= 1 - P\left(\lim_{x\to\infty} supA_n{}^c\right)
\end{aligned}
$$

8. Encuentre las condiciones sobre los eventos A_1 y A_2 para que la siguiente suceción sea convergente.

$$
\begin{array}{c}
A_n = A_1 \quad si \quad n \quad es \quad impar \\
A_n = A_2 \quad si \quad n \quad es \quad par
\end{array}
$$

Demostración: