## Calcul matriciel: TP n°1

Binôme n°3109

5 novembre 2019

1 Première partie : équation de la chaleur

2 Seconde partie : équation des ondes

1 Première partie : équation de la chaleur

2 Seconde partie : équation des ondes

## Méthodes itératives

MATLAB.

• Traduction des éléments donnés en énoncé dans le langage

- > relaxation.m, gauss\_seidel.m, jacobi.m, omega\_optimal.m
- On utilise ces méthodes seulement si les conditions d'application des théorèmes sous-jacents sont remplis.
- > diag\_dom.m, rayon\_spectral.m

Pour les méthodes, on se fond sur les formules suivantes (AX = B):

Proposition (Gauss-Siedel)

$$X_i^{(m+1)} = \frac{1}{[A]_{i,i}} \left( B_i - \sum_{j=1}^{i-1} [A]_{i,j} X_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} [A]_{i,j} X_j^{(m)} \right)$$

Proposition (Jacobi)

$$X_i^{(m+1)} = \frac{1}{[A]_{i,i}} \left( B_i - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n [A]_{i,j} X_j^{(m)} \right)$$

### Proposition (Relaxation)

Si jamais on a  $0 < \omega < 2$  et dans ce cas seulement, alors :

$$X_i^{(m+1)} = X_i^{(m)} + \frac{\omega}{[A]_{i,i}} \left( B_i - \sum_{j=1}^{i-1} [A]_{i,j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n [A]_{i,j} X_j^{(m)} \right)$$

# Application à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D.\nabla^2 T$$

On utilise les éléments finis et un développement de Taylor pour modéliser la grille avec les conditions (raccord, bords).

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- On utilise les intersections comme points d'intérêt.
- On prend  $\Omega = \{(x,y)|x \in [1;25]; y \in [1;20]\}$

# Application à la grille

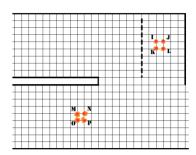
### Deux parties distinctes:

- Équilibre : on part d'une configuration et on fait évoluer jusqu'à atteindre l'équilibre.
- Chauffage : on part d'une configuration puis on chauffe en continu.

Dans les deux cas : pas d'effets de bord (voisins fictifs : modification du laplacien en conséquence)

# Mise en pratique (1)

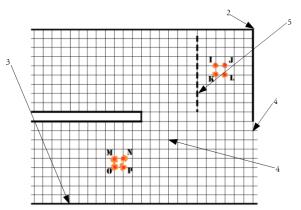
- Génération : dépend du nombre de voisins direct (qui dépend du lieu) > remplissage de la matrice point par point, et choix des conditions de l'énoncé (bords à 100°, points chauds à 500°)
- Trace: utilisation de la fonction *surf*.



# Mise en pratique (1)

• Génération : dépend du nombre de voisins

$$\nabla^2 f(x,y) = \left(\sum_{(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathcal{V}(x,y)} f(\tilde{x},\tilde{y})\right) - |\mathcal{V}(x,y)| f(x,y)$$



# Mise en pratique (2)

#### Puis:

• On fait une convergence soit :

$$(U_n)_n \to U_{eq} : \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N, \underbrace{||U_n - U_{eq}||}_{dU} < \varepsilon$$

- Or il faut fixer et chercher le rang N (éviter les répétitions inutiles), ici  $\varepsilon = 10^{-8}$ .
- Exponentielle de matrice <sup>1</sup> : correspond à l'équation différentielle considérée.

<sup>1.</sup> On a un terme, écrit sous forme simplifiée  $\frac{dU}{U}(t)$  que l'on intègre. Sort un log donc une exponentielle de matrice

1 Première partie : équation de la chaleur

2 Seconde partie : équation des ondes

# Méthode générale

- On réutilise les méthodes mises en œuvre dans la première partie mais un peu différent.
- On considère un tambour modifié.
- Équation vue comme un opérateur.
- Différences finies, permettent de chercher les modes propres (cf. diagonalisation de l'opérateur hamiltonien  $\hat{H}$  en MQ, corde de Melde en mécanique)

## Proposition (Méthode de la puissance itérée)

Sous les hypothèses :

$$X_k = \frac{Y_k}{||Y_k||}$$

 $Y_{k+1} = AX_k$ 

convergent vers la bonne valeur propre.

### Proposition (Weilandt)

Si  $\sigma(M) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$  avec  $U_1, ..., U_n$  et  $V_1, ..., V_n$  ve.p. resp. g et d. :

$$M - \lambda_1 \frac{V_1 U_1}{U_1 V_1}$$

(Dimensions OK, division par un réel et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sinon).

14 / 17

#### Lemme

On peut adapter avec  $A^{-1}$  (en supposant que...) et on trouve alors l'inverse (donc petit module)

## Proposition (Décomposition QR)

Si A = QR ( $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  unitaire, R trig. sup.), alors on peut prendre :

$$A_{n+1} = Q^{-1} A_n Q$$

Idem pour LU.

 $\rightarrow$  Valeurs singulières.

# Mise en pratique

- Initialisation de la grille (600×600) sur le même principe : particularité du barreau central (voisin fictif) et des parties libres.
- Besoin de plus de soin dans la partie mathématique : utilisation d'une puissance itérée avec déflation de WEILANDT.

## Autour du bonus

