Calcul matriciel : TP n°1

Binôme n°3109

4 novembre 2019

1. Première partie : équation de la chaleur

2. Seconde partie : équation des ondes

Méthodes itératives

- Traduction des éléments donnés en énoncé dans le langage MATLAB.

> `relaxation.m`, `gauss_seidel.m`, `jacobi.m`, `omega_optimal.m`

- On utilise ces méthodes seulement si les conditions d'application des théorèmes sous-jacents sont remplis.

> `diag_dom.m`, `rayon_spectral.m`

Implémentation mathématique

Pour les méthodes, on se fond sur les formules suivantes ($AX = B$) :

Proposition (Gauss-Siedel)

$$X_i^{(m+1)} = \frac{1}{[A]_{i,i}} \left(B_i - \sum_{j=1}^{i-1} [A]_{i,j} X_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} [A]_{i,j} X_j^{(m)} \right)$$

Proposition (Jacobi)

$$X_i^{(m+1)} = \frac{1}{[A]_{i,i}} \left(B_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} [A]_{i,j} X_j^{(m)} \right)$$

Implémentation mathématique

Proposition (Relaxation)

Si jamais on a $0 < \omega < 2$ *et dans ce cas seulement, alors :*

$$X_i^{(m+1)} = X_i^{(m)} + \frac{\omega}{[A]_{i,i}} \left(B_i - \sum_{j=1}^{i-1} [A]_{i,j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} [A]_{i,j} X_j^{(m)} \right)$$

Application à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D.\nabla^2 T$$

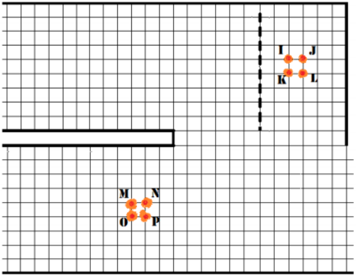
On utilise les éléments finis et un développement de Taylor pour modéliser la grille avec les conditions (raccord, bords).
Deux parties distinctes :

- Équilibre : on part d'une configuration et on fait évoluer jusqu'à atteindre l'équilibre.
- Chauffage : on part d'une configuration puis on chauffe en continu.

Dans les deux cas : pas d'effets de bord (voisins fictifs : modification du laplacien en conséquence)

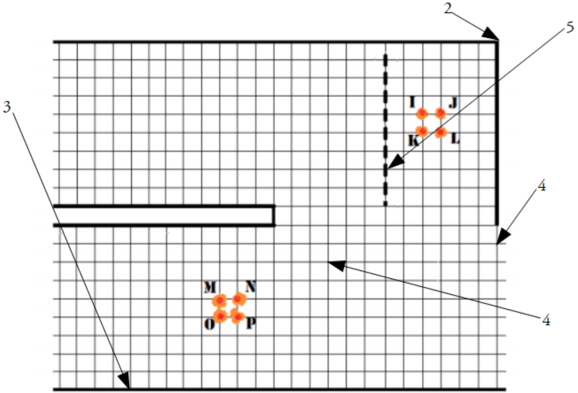
Mise en pratique (1)

- Génération : dépend du nombre de voisins (qui dépend du lieu) > remplissage de la matrice point par point, et choix des conditions de l'énoncé (bords à 100°, points chauds à 500°)
- Trace : utilisation de la fonction *surf*.



Mise en pratique (1)

- Génération : **dépend du nombre de voisins**



Mise en pratique (2)

Puis :

- On fait une convergence soit :

$$(U_n)_n \to U_{eq} : \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \underbrace{||U_n - U_{eq}||}_{dU} < \varepsilon$$

- Or il faut fixer et chercher le rang N (éviter les répétitions inutiles), ici $\varepsilon = 10^{-8}$.
- Exponentielle de matrice [1] : correspond à l'équation différentielle considérée.

1. On a un terme, écrit sous forme simplifiée $\frac{dU}{U}(t)$ que l'on intègre. Sort un log donc une exponentielle de matrice

Méthode générale

- On réutilise les méthodes mises en œuvre dans la première partie mais un peu différent.
- On considère un tambour modifié.
- Équation vue comme un opérateur.
- Différences finies, permettent de chercher les modes propres (cf. diagonalisation de l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$ en MQ, corde de Melde en mécanique)

Implémentation mathématique

Proposition (Méthode de la puissance itérée)

Sous les hypothèses :

$$X_k = \frac{Y_k}{||Y_k||}$$

$$Y_{k+1} = AX_k$$

convergent vers la bonne valeur propre.

Proposition (Weilandt)

Si $\sigma(M) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ *avec* $U_1, ...U_n$ *et* $V_1, ..., V_n$ *ve.p. resp. g et d. :*

$$M - \lambda_1 \frac{V_1 U_1}{U_1 V_1}$$

(Dimensions OK, division par un réel et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}$ *sinon).*

Implémentation mathématique

Lemme

On peut adapter avec A^{-1} (en supposant que...) et on trouve alors l'inverse (donc petit module)

Proposition (Décomposition QR)

Si $A = QR$ ($Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ unitaire, R trig. sup.), alors on peut prendre :

$$A_{n+1} = Q^{-1} A_n Q$$

Idem pour LU.

$\rightarrow$ Valeurs singulières.

Mise en pratique

- Initialisation de la grille (600×600) sur le même principe : particularité du barreau central (voisin fictif) et des parties libres.
- Besoin de plus de soin dans la partie mathématique : utilisation d'une puissance itérée avec déflation de WEILANDT.