

# 矩阵论

---

- 例1.20
- 习题2.1.5
  - 范数等价
  - 定理2.1的证明
- 例3.14
- 例4.11
- 习题5.4.8
- 例6.10
- [矩阵论](#)
  - [some cal](#)
  - [Unit1](#)
  - [Unit2](#)
  - [Unit3](#)
  - [Unit4](#)
  - [Unit5](#)
  - [Unit6](#)
  - [question](#)

## some cal

---

已知

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

WHY

$$e^{A(2t)} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

1. 给定矩阵  $P^{-1}AP$  的形式:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2. 由相似性质, 得到指数函数的形式:

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

3. 因此, 对于  $e^{At}$  的形式:

$$e^{At} = P^{-1}e^{Dt}P$$

代入具体数值, 得到:

$$e^{A(2t)} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

## Unit1

已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

求  $A^{100} + 2A^{50}$

- 1.20

例 1.20 已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

求  $A^{100} + 2A^{50}$ .

解 令  $\psi(\lambda) = \lambda^{100} + 2\lambda^{50}$ , 可求得  $A$  的特征多项式为

拉格朗日.

• 54 •

矩 阵 论

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

用  $\varphi(\lambda)$  除  $\psi(\lambda)$ , 可得

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda)q(\lambda) + b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2$$

以  $\lambda = 1, 2$  分别代入上式, 便有

$\varphi(\lambda)$

特征值.

$$\begin{cases} b_0 + b_1 + b_2 = 3 \\ b_0 + 2b_1 + 4b_2 = 2^{100} + 2^{51} \end{cases}$$

为了寻找足够的信息以确定  $b_i (i = 0, 1, 2)$ , 对  $\lambda$  来微分  $\psi(\lambda)$ , 便得到

$$\psi'(\lambda) = [2(\lambda - 1)(\lambda - 2) + (\lambda - 1)^2]q(\lambda) + \varphi(\lambda)q'(\lambda) + b_1 + 2b_2\lambda$$

以  $\lambda = 1$  代入上式后, 就有

$$b_1 + 2b_2 = \psi'(1) = 200$$

从而求得

$$b_0 = 2^{100} + 2^{51} - 400$$

$$b_1 = 606 - 2^{101} - 2^{52}$$

$$b_2 = -203 + 2^{100} + 2^{51}$$

于是

$$A^{100} + 2A^{50} = \psi(A) = b_0I + b_1A + b_2A^2$$

以矩阵  $A$  为根的多项式有时是很多的, 但是它们之间却有一定的关系. 为了弄清楚这些关系, 引入以下定义.

- $\psi(\lambda) = \lambda^{100} + 2\lambda^{50}$
- $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$
- 用  $\varphi(\lambda)$  除  $\psi(\lambda)$ , 可得  $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda)q(\lambda) + b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2$
- $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda)q(\lambda) + b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2$  是怎么来的

○



**ChatGPT**

当我们用  $\varphi(\lambda)$  除以  $\psi(\lambda)$  时，可以表示为：

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$$

其中， $r(\lambda)$  是余式。在这个情况下，余式是一个次数小于  $\varphi(\lambda)$  的多项式，因此可以表示为：

$$r(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2$$

这就是多项式除法的一般形式。在你的问题中，给定的商是  $q(\lambda)$ ，余式是  $b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2$ 。

- 当  $\varphi(\lambda)$  为四次方，余式是什么样的

○



**ChatGPT**

如果  $\varphi(\lambda)$  是一个四次方程，即  $\varphi(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\lambda - d)$ ，其中  $a, b, c, d$  是四个根，那么余式的最高次数将是三次的。余式的一般形式为：

$$r(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3$$

对于四次方程， $b_0, b_1, b_2, b_3$  将是实数或复数的系数，取决于具体的情况。如果你提供了具体的四次方程  $\varphi(\lambda)$ ，我可以帮你进一步计算余式的系数。

## Unit2

- $\|x\|_2$

○

$$\|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2} \quad (2.1.1)$$

- $\|x\|_{\infty}$

○

称例 2.2 中的范数为  $\infty$ -范数，记为  $\|x\|_{\infty}$ ，即

$$\|x\|_{\infty} = \max_i |\xi_i|$$

- $\|x\|_1$

○

称例 2.3 中的范数为 1-范数，记为  $\|x\|_1$ ，即

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|$$

- $\|x\|_p$

○

称  $(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p)^{1/p}$  为向量  $x$  的  $p$ -范数或  $l_p$  范数, 记为  $\|x\|_p$ ,  
即

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |\xi_i|^p \right)^{1/p} \quad (2.1.7)$$

在式(2.1.7)中, 令  $p = 1$ , 便得  $\|x\|_1$ ; 令  $p = 2$ , 便得  $\|x\|_2$ ; 并且还有

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$$

- 定理2.1

**定理 2.1** 设  $\|x\|_\alpha$  和  $\|x\|_\beta$  为有限维线性空间  $V$  的任意两种向量范数(它们不限于  $p$ -范数),则存在两个与向量  $x$  无关的正常数  $c_1$  和  $c_2$ ,使得不等式

$$c_1 \|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq c_2 \|x\|_\beta \quad (\forall x \in V) \quad (2.1.9)$$

成立.

\* 证 如果范数  $\|x\|_\alpha$  和  $\|x\|_\beta$  都与一固定范数譬如例 2.6 的范数  $\|x\|_2$  满足式(2.1.9)的关系,则这两种范数之间也存在式(2.1.9)的关系.这是因为若存在正常数  $c'_1, c'_2$  和  $c''_1, c''_2$ ,使

$$\begin{aligned} c'_1 \|x\|_2 &\leq \|x\|_\alpha \leq c'_2 \|x\|_2 \\ c''_1 \|x\|_\beta &\leq \|x\|_2 \leq c''_2 \|x\|_\beta \end{aligned}$$

成立,则显然有

$$c'_1 c''_1 \|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq c'_2 c''_2 \|x\|_\beta$$

令  $c_1 = c'_1 c''_1, c_2 = c'_2 c''_2$ ,便得不等式(2.1.9). 因此,只要对  $\beta = 2$  证明不等式(2.1.9)成立就行了.

设  $V$  是  $n$  维的,它的一个基是  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,于是  $V$  中的任意向量  $x$  可表示为

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$$

由例 2.6 知

$$\|x\|_2^2 = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2$$

注意

$$\|x\|_\alpha = \|\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n\|_\alpha$$

它可视为  $n$  个变量  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  的函数,记为

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\|_\alpha$$

容易证明  $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  是连续函数. 事实上,若令  $x' = \xi'_1 x_1 + \xi'_2 x_2 + \dots + \xi'_n x_n \in V^n$ , 则

$$\|x'\|_\alpha = \varphi(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)$$

$$|\varphi(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n) - \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)| =$$

$$|\|x'\|_\alpha - \|x\|_\alpha| \leq \|x' - x\|_\alpha =$$

$$\|(\xi'_1 - \xi_1)x_1 + \dots + (\xi'_n - \xi_n)x_n\|_\alpha \leq$$

$$|\xi'_1 - \xi_1| \|x_1\|_\alpha + \dots + |\xi'_n - \xi_n| \|x_n\|_\alpha$$

由于  $\|x_i\|_\alpha (i=1, 2, \dots, n)$  是常数,因此当  $\xi'_i$  与  $\xi_i$  充分接近时,  $\varphi(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)$  就与  $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  充分接近. 这就说明了  $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  是连续函数.

根据连续函数的性质可知,在有界闭集

$$S = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2 = 1\}$$

上,函数  $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  可达到最大值  $c_2$  及最小值  $c_1$ . 因为在  $S$

- 证明范数等价 中,  $\xi_i$  不能全为零, 所以  $c_1 > 0$ . 当  $x \neq 0$  时, 记向量

- 习题2.1.5

$$y = \frac{\xi_1}{\|\xi\|} x_1 + \frac{\xi_2}{\|\xi\|} x_2 + \cdots + \frac{\xi_n}{\|\xi\|} x_n$$

- 5. 设矩阵  $S \in \mathbb{C}^{m \times n}$  列满秩, 给定  $\mathbb{C}^m$  上的一种向量范数  $\|\cdot\|$ , 证明

$$\|x\|_s = \|Sx\| \quad (\forall x \in \mathbb{C}^n)$$

是  $\mathbb{C}^n$  上的向量范数.

- 证 当  $x \neq 0$  时, 由于  $S$  列满秩, 所以  $Sx \neq 0$ , 从而  $\|x\|_s =$

$\|Sx\| > 0$ ; 当  $x = 0$  时,  $Sx = 0$ , 于是  $\|x\|_s = \|Sx\| = 0$ .

$$\|kx\|_s = \|S(kx)\| = \|k(Sx)\| =$$

$$|k| \|Sx\| = |k| \|x\|_s$$

$$\|x + y\|_s = \|S(x + y)\| = \|Sx + Sy\| \leq$$

$$\|Sx\| + \|Sy\| = \|x\|_s + \|y\|_s$$

因此,  $\|x\|_s$  是  $\mathbb{C}^n$  上的范数.

## Unit3

• 120 •

矩 阵 论

- 定义3.12

设  $X = (\xi_{ij})_{m \times n}$ , 则

- 

**定义 3.12** 设  $X = (\xi_{ij})_{m \times n}$ ,  $mn$  元函数  $f_{ij}(X) = f_{ij}(\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{1n}, \xi_{21}, \dots, \xi_{mn}) (i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s)$ . 定义函数矩阵

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_{11}(X) & \cdots & f_{1s}(X) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{r1}(X) & \cdots & f_{rs}(X) \end{bmatrix}$$

对矩阵  $X$  的导数如下:

$$\frac{dF}{dX} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \xi_{11}} & \frac{\partial F}{\partial \xi_{12}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial \xi_{1n}} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_{21}} & \frac{\partial F}{\partial \xi_{22}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial \xi_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_{m1}} & \frac{\partial F}{\partial \xi_{m2}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial \xi_{mn}} \end{bmatrix} \quad (3.4.17)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial \xi_{ij}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \xi_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{1s}}{\partial \xi_{ij}} \\ \frac{\partial f_{21}}{\partial \xi_{ij}} & \frac{\partial f_{22}}{\partial \xi_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{2s}}{\partial \xi_{ij}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{r1}}{\partial \xi_{ij}} & \frac{\partial f_{r2}}{\partial \xi_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{rs}}{\partial \xi_{ij}} \end{bmatrix}$$

- 例子3.14

○

**例 3.14** 设  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $n$  元函数

$$f_j(x) = f_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

令  $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ , 求  $\frac{dF}{dx}$ .

**解** 根据定义 3.12, 有

$$\frac{dF}{dx} = \left( \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \frac{\partial F}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \xi_n} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \xi_n} \end{bmatrix} \quad (3.4.19)$$

称矩阵(3.4.19)为函数  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  的 Jacobi 矩阵, 它在求解非线性方程组的 Newton 方法中有重要应用.

## Unit4

•

成的矩阵.

证毕

**例 4.11** 求矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2j & j & 0 \end{bmatrix}$  ( $j = \sqrt{-1}$ ) 的满秩分解.

**解**  $A \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$

因为  $B$  的第 1 列和第 3 列构成  $I_3$  的前两列, 所以  $F$  为  $A$  的第 1 列和第 3 列构成的  $3 \times 2$  矩阵, 从而有

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

利用矩阵的满秩分解处理一些矩阵问题时, 有时会十分方便.

## Unit5

• 前置知识



## 二、线性矩阵方程的可解性

在系统控制等工程领域,经常遇到矩阵方程

$$AX + XB = F \quad (5.4.5)$$

的求解问题,其中  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{C}^{m \times n}$  为已知矩阵,而  $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$  为未知矩阵. 一般的线性矩阵方程可表示为

$$\sum_{i=1}^l A_i X B_i = F \quad (5.4.6)$$

其中  $A_i \in \mathbb{C}^{m \times p}$ ,  $B_i \in \mathbb{C}^{q \times n}$ ,  $F \in \mathbb{C}^{m \times n}$  为已知矩阵,而  $X \in \mathbb{C}^{p \times q}$  为未知矩阵.

定理5.31

**定理 5.31** 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , 且  $A$  与  $B$  的特征值之和不等于零,那么,如果积分  $\int_0^{+\infty} e^{At} F e^{Bt} dt$  存在,则方程 (5.4.5) 的唯一解  $X = -\int_0^{+\infty} e^{At} F e^{Bt} dt$ .

**证** 令  $Y(t) = e^{At} F e^{Bt}$ , 则有

$$\frac{dY(t)}{dt} = AY(t) + Y(t)B, \quad Y(t)|_{t=0} = F$$

由积分  $\int_0^{+\infty} Y(t) dt$  存在知,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = O$ . 上式两端求积分,可得

$$Y(t)|_0^{+\infty} = A \left( \int_0^{+\infty} Y(t) dt \right) + \left( \int_0^{+\infty} Y(t) dt \right) B$$

即

$$-F = A(-X) = (-X)B$$

也就是  $AX + XB = F$ .

证毕

**推论 1** 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$  与  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  的特征值满足

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad \operatorname{Re}(\mu_j) < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

则方程 (5.4.5) 的唯一解为  $X = -\int_0^{+\infty} e^{At} F e^{Bt} dt$ .

■ ■ 特征值的实部小于零

8. 使用矩阵函数方法求解矩阵方程  $AX + XA = I$ , 其中  $A =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

- ○

解  $A$  的特征值为  $-1, -1, -2$ , 根据定理 5.31 的推论 1 知, 该矩阵方程有惟一解

$$X = - \int_0^{+\infty} e^{At} I e^{At} dt = - \int_0^{+\infty} e^{A(2t)} dt$$

对  $A$  求得

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} e^{A(2t)} &= P \begin{bmatrix} e^{-2t} & & \\ & e^{-2t} & \\ & & e^{-4t} \end{bmatrix} P^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & & \\ 0 & e^{-2t} & \\ e^{-4t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - 2e^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix} \\ X &= - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & & \\ 0 & 2 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Unit6

- 前置知识
  - 最小二乘解



### ChatGPT

最小二乘法是一种处理超定系统或矛盾系统的方法，它寻找一个近似解，使得方程组的残差的平方和最小化。在一个矛盾或超定系统中，通常不存在精确的解，但通过最小二乘法可以找到一个在某种意义上最优的解。

考虑上面的例子：

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 5 \\ 3x + 3y = 8 \end{cases}$$

我们可以将其表示为矩阵形式  $Ax = b$ ，其中：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

矩阵  $A$  的列向量并不是线性独立的，导致  $A$  的秩小于列数，这是一个超定系统。最小二乘解  $\hat{x}$  可以通过以下公式得到：

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

#### 极小范数

### ChatGPT

在数学中，范数是一个将向量映射到非负实数的函数，它度量向量的大小或长度。极小范数通常指的是某个向量的范数在所有满足一定条件的向量中取得最小值。

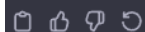
具体而言，对于一个向量  $x$ ，它的范数通常表示为  $\|x\|$ 。极小范数是指在一组向量中，某个特定的范数达到最小值。这可能在优化问题、最小化误差或满足某些约束条件的情况下具有特殊的意义。

例如，对于二维实数向量  $(x, y)$ ，其  $L_2$  范数（欧几里德范数）定义为：

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

在所有满足  $x^2 + y^2 = 1$  的向量中，这个范数的最小值是 0。因此，对于单位圆上的向量，它们的  $L_2$  范数的极小值是 0。

在某些问题中，极小范数可能表示最小能量、最小化误差或最简单解等概念，具体取决于问题的上下文。



#### $\$A^H\$$

#### ChatGPT

在线性代数中,  $A^H$  表示矩阵  $A$  的共轭转置, 也被称为厄尔米特共轭 (Hermitian transpose) 或伴随矩阵 (adjoint matrix)。

对于一个复数矩阵  $A$ , 其共轭转置  $A^H$  可以通过以下步骤得到:

1. **转置 (Transpose)**: 将矩阵  $A$  的行和列互换, 得到  $A^T$ 。
2. **共轭 (Conjugate)**: 将  $A^T$  中的每个元素取复共轭, 即将每个复数的虚部取负值。

数学表达式为:

$$A^H = (A^T)^*$$

其中,  $(A^T)^*$  表示  $A^T$  中的每个元素取复共轭。

对于实数矩阵, 共轭转置就是普通的转置。但在复数域中, 由于存在虚数单位  $i$ , 共轭转置涉及到对复数的共轭操作。

○  $A^H$

### 一、Penrose 的广义逆矩阵定义

**定义 6.4** 设矩阵  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , 若矩阵  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$  满足如下四个 Penrose 方程

$$AXA = A \quad (\text{i})$$

$$XAX = X \quad (\text{ii})$$

$$(AX)^H = AX \quad (\text{iii})$$

$$(XA)^H = XA \quad (\text{iv})$$

则称  $X$  为  $A$  的 Moore-Penrose 逆, 记为  $A^+$ 。

○ 计算  $A^+$

§ 4.3 介绍了矩阵  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  的满秩分解的概念, 并给出了用初等变换进行满秩分解的方法. 设  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n} (r > 0)$  的满秩分解为

$$A = FG \quad (6.3.4)$$

其中  $F \in \mathbb{C}_r^{m \times r}, G \in \mathbb{C}_r^{r \times n}$ . 那么, 可以按照下述定理给出的结论计算广义逆矩阵.

**定理 6.15** 设  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n} (r > 0)$  的满秩分解为式 (6.3.4). 则有:

- (1)  $G^{(i)} F^{(1)} \in A\{i\} (i = 1, 2, 4);$
- (2)  $G^{(1)} F^{(i)} \in A(i) (i = 1, 2, 3);$
- (3)  $G^{(1)} F^+ \in A\{1, 2, 3\}, G^+ F^{(1)} \in A\{1, 2, 4\};$
- (4)  $A^+ = G^+ F^{(1,3)} = G^{(1,4)} F^+;$
- (5)  $A^+ = G^+ F^+ = G^H (GG^H)^{-1} (F^H F)^{-1} F^H = G^H (F^H A G^H)^{-1} F^H.$

• 例子6.5

#### 例 6.4 求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2j & j & 0 & 4+2j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3j \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4j & 1 \end{bmatrix} \quad (j = \sqrt{-1})$$

的  $\{1\}$ -逆.

#### 例 6.5 求例 6.4 中矩阵 $\mathbf{A}$ 的 Moore-Penrose 逆.

解  $\mathbf{A}$  的一个满秩分解式为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2j & 0 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1-2j & -\frac{1}{2}j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1+j \end{bmatrix}$$

于是有

$$\mathbf{F}^H \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} \mathbf{G}^H = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & \frac{3}{2} - \frac{9}{2}j \\ \frac{3}{2} + \frac{9}{2}j & 7 \end{bmatrix}$$

从而  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{G}^H (\mathbf{G} \mathbf{G}^H)^{-1} (\mathbf{F}^H \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^H =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1+2j & 2 \\ \frac{1}{2}j & 1-j \end{bmatrix} \frac{1}{46} \begin{bmatrix} 14 & -3(1-3j) \\ -3(1+3j) & 13 \end{bmatrix} \times \\ \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2j & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \\ \frac{1}{1748} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -18-146j & 78-108j & 120+18j \\ -9-73j & 39-54j & 60+9j \\ -90+56j & -165-2j & -1-81j \\ 94-70j & -36-6j & 82+96j \\ 39+137j & -138+177j & -91-20j \end{bmatrix}$$

- 定理6.33

○

#### 四、矛盾方程组的极小范数最小二乘解与广义逆矩阵 $A^+$

虽然最小二乘解一般不唯一,但是极小范数最小二乘解却是唯一的,并且它可由 Moore-Penrose 逆  $A^+$  表出.

**定理 6.33** 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{C}^m$ , 则  $x = A^+ b$  是方程组 (6.4.1) 的唯一极小范数最小二乘解. 反之, 设  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , 若对所有  $b \in \mathbb{C}^m$ ,  $x = Xb$  是方程组 (6.4.1) 的极小范数最小二乘解, 则  $X = A^+$ .

• 例子6.10

○

**例 6.10** 取例 6.4 的矩阵  $A$  和

$$b = \begin{bmatrix} -j \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

求方程组 (6.4.1) 的极小范数最小二乘解.

**解** 由例 6.5 的结果知, 方程组 (6.4.1) 的极小范数最小二乘解为

$$x = A^+ b = \frac{1}{874} \begin{bmatrix} 0 \\ 26 - 36j \\ 13 - 18j \\ -55 - 9j \\ -12 - 2j \\ -46 + 59j \end{bmatrix}$$

• real 6.10

例 6.10 已知  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

(1) 求  $A$  的 Moore-Penrose 逆  $A^+$ ;

(2) 用广义逆矩阵方法判断线性方程组  $Ax = b$  是否有解, 并求其极小范数解或者极小范数最小二乘解  $x_0$ .

解 (1) 采用满秩分解方法求  $A^+$ . 计算得

$$A \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = FG$$

$$F^+ = (F^T F)^{-1} F^T = \frac{1}{58} \begin{bmatrix} -10 & 6 & 4 & 14 \\ 13 & -2 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$G^+ = G^T (G G^T)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = G^+ F^+ = \frac{1}{174} \begin{bmatrix} -33 & 14 & 19 & 23 \\ 36 & -10 & -26 & -4 \\ 3 & 4 & -7 & 19 \end{bmatrix}.$$

(2) 计算, 有

$$x_0 = A^+ b = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因为  $AA^+ b = Ax_0 = b$ , 所以  $Ax = b$  有解, 从而  $x_0$  是  $Ax = b$  的极小范数解.

#### 6.4.5 矩阵方程 $AXB = D$ 的极小范数最小二乘解

## question

### Unit2

$S = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2 = 1\}$   
上, 函数  $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  可达到最大值  $c_2$  及最小值  $c_1$ . 因为在  $S$  中,  $\xi_i$  不能全为零, 所以  $c_1 > 0$ . 当  $x \neq 0$  时, 记向量

$$y = \frac{\xi_1}{\|x\|_2} x_1 + \frac{\xi_2}{\|x\|_2} x_2 + \dots + \frac{\xi_n}{\|x\|_2} x_n$$

则其坐标分量满足 ① 为什么满足

$$\left| \frac{\xi_1}{\|x\|_2} \right|^2 + \left| \frac{\xi_2}{\|x\|_2} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\xi_n}{\|x\|_2} \right|^2 = 1$$

因此  $y \in S$ . 从而有

$$0 < c_1 \leq \|y\|_a = \varphi\left(\frac{\xi_1}{\|x\|_2}, \frac{\xi_2}{\|x\|_2}, \dots, \frac{\xi_n}{\|x\|_2}\right) \leq c_2$$

### Unit5



- p怎么求

解  $A$  的特征值为  $-1, -1, -2$ , 根据定理 5.31 的推论 1 知, 该矩阵方程有惟一解

$$X = - \int_0^{+\infty} e^{At} I e^{At} dt = - \int_0^{+\infty} e^{A(2t)} dt$$

对  $A$  求得

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} e^{A(2t)} &= P \begin{bmatrix} e^{-2t} & & \\ & e^{-2t} & \\ & & e^{-4t} \end{bmatrix} P^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & & \\ 0 & e^{-2t} & \\ e^{-4t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - 2e^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix} \\ X &= - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & & \\ 0 & 2 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. 求特征值
2. 求特征向量
3. 特征向量构成  $P$
4. 初等变换法求  $P^{-1}$

pandoc your\_file.md -o output.pdf

pandoc G:\code\note\15.研究生\研1\矩阵论\例题.md -o G:\code\note\15.研究生\研1\矩阵论\例题2.pdf