2019 考研数学强化讲义

章　飞　编著

章飞老师从事考研数学辅导工作十余载，考研数学阅卷组成员，经验十分丰富，对考研数学的考点考法、命题趋势了若指掌。针对实践教学中万千学子的疑难与困惑，在云逸未来平台设立课程，帮助大家理清思路，正本清源，系统梳理考研数学考点与题型，帮助同学们养成方法体系。斩数学于马下，夺考研之高分。

云逸未来

高 等 数 学

目 录

第一章　函数、极限、连续

第 1 讲　函数及其特性

【核心考点 1】函数有界性的判定

（1）有界与极限、连续的关系

（2）无界的判定思路

例 1.1：设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是（　　）.

（A）周期函数　　（B）奇函数

（C）单调函数　　（D）有界函数

例 1.2：当 $x\neq 0$ 时，设 $f(x)=\dfrac{(x^3-1)\sin x}{(x^2+1)x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，下述命题

（1）对任意 $X>0$，在 $0<|x|<|X|$ 上 $f(x)$ 有界，但在 $(-\infty,+\infty)$（$x\neq 0$）上无界

（2）在 $(-\infty,+\infty)$（$x\neq 0$）上 $f(x)$ 有界

（3）$g(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内无界，但 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\neq\infty$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\infty$

正确的个数有__________个

【核心考点 2】函数、原函数、导函数之间性态的关系

（1）函数与导函数、原函数的奇偶性关系

（2）函数与导函数周期性关系

例 1.3： $f(x)$ 为可导的奇函数， $g(x)=f(x^2)$ ， $F(x)=\int_0^x[\int_0^{-u} f(t)dt]du$ ，

$G(x)=\int_0^x[\int_0^u g'(t)dt]du$ ，则（　　　）

（A） $F(x)$ ， $G(x)$ 均为奇函数　　　　（B） $F(x)$ ， $G(x)$ 均为偶函数

（C） $F(x)$ 奇函数， $G(x)$ 偶函数　　　　（D） $F(x)$ 偶函数， $G(x)$ 奇函数

例 1.4：设 $f(x)$ 为可导的偶函数， $\lim_{x\to 0}\frac{f(\cos x)}{x^2}=2$ ，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(-1,f(-1)\right)$ 处的切线方程

例 1.5：设 $f(x)$ 是以 4 为周期的奇函数，且 $f'(0)=2$ ，则 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x^3)+f(x^2)}{x-2}=$______

第 2 讲　函数极限

【核心考点】不定式极限

（1）四则运算型

（2）幂指函数型

【方法与技巧点拨】

（1）利用恒等变形、四则运算法则求极限
（2）利用等价无穷小代换求极限
（3）不定式极限的洛必达法则
（4）利用泰勒公式
（5）夹逼准则
（6）导数定义及中值定理

例 2.1：求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

例 2.2：求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x[\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)]}$

例 2.3（2004-2）：求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1]$

例 2.4：求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}$

例 2.5：求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\ln x}{x-2\ln x}\right)^{\frac{x}{\ln x}}$

例 2.6（2014-3）：求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos 2x+2x\sin x\right)^{\frac{1}{x^4}}$

例 2.7：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1})$

例 2.8：求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]$

第 3 讲　数列极限

【核心考点】如何计算数列的极限

（1）转化为函数极限

（2）单调有界定理

（3）夹逼准则（和式的极限）

（4）定积分定义（和式的极限）

例 3.1：求极限$\lim\limits_{n\to\infty} n^4\left(\cos\frac{1}{n}-e^{-\frac{1}{2n^2}}\right)$

例 3.2：设$x_1>0$，$x_{n+1}=1-e^{-x_n}$，$n=1,2,3,\cdots$，求

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n\cdot x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}$

例 3.3：求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\frac{\ln 2}{2}+\sin\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\frac{\ln n}{n})^{\frac{1}{n}}$

例 3.4（2016-23）：求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots n\sin\frac{n}{n}\right)=$______

例 3.5：求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{1^2+2^2+\cdots+n^2}}$

例 3.6：求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2+1}$

第 4 讲　积分的极限

【核心考点】如何处理积分的极限

（1）含变上限积分的洛必达法则

（2）积分中值定理、不等式性化简和估计积分

例 4.1（2014-123）：求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

例 4.2：设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$

例 4.3：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}dx=$ ______

例 4.4：设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内可导，且 $f(a)\neq 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx}{f(a)}\right)^n$

第 5 讲　极限的应用（一）

【核心考点 1】无穷小量比阶

（1）利用定义

（2）利用无穷小量替换

（3）利用泰勒公式

例 5.1：$x\to 0$ 时，下列无穷小中阶数最高的是_______

A. $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$　　B. $e^{\sin x}-e^{\tan x}$　　C. $e^{x^2}-\cos x$　　D. $x-\ln(1+x)$

例 5.2：$x\to 0+$时，$(1+x)^x-1$是x的（　　）无穷小

（A）2阶　　（B）3阶　　（C）4阶　　（D）5阶

例 5.3：把$x\to 0+$时的无穷小量$\alpha=\int_0^x \cos t^2 dt, \beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt, \gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt$排列，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是_____

例 5.4（2015-123）：设 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小量，求常数 a,b,k 的值

例 5.5：设函数$f(x)$在$x=0$的某领域具有二阶连续导数，且$f(0)f'(0)f''(0)\neq 0$,

证明：存在唯一的一组实数a,b,c，使得当$h\to 0$时，

$$af(h)+bf(2h)+cf(3h)-f(0)=o(h^2)$$

【核心考点 2】由极限反求参数、极限、导数

【方法点拨】

（1）

（2）

（3）

（4）

例 5.6：已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=2$，求 $f(0)$ 及 $f'(0)$

例 5.7：设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内二阶可导，且 $f''(0)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，已知 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^\alpha-\sin x}=\beta\neq 0$，求 α,β 的值

例 5.8：设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-2$，则函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　　）

（A）可导且 $f'(0)\neq 0$　　（B）可导且取得极大值

（C）可导且取得极小值　　（D）不可导且不取极值

第 6 讲　极限的应用（二）

【核心考点 1】判定连续性与间断点

例 6. 1：函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 有______个可去间断点

例 6. 2：求函数$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$的表达式，并指出函数$f(x)$的间断点及其类型

例 6. 3：设 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-1}{x}=a$，若

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^1 g(x^2t)dt-1}{x^2},x<0\\ \dfrac{1}{2},x=0\\ \dfrac{a+b\cos x}{x^2},x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，求 a,b 的值

例 6. 4：讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的连续性

【核心考点 2】判定曲线的渐近线

【方法点拨】

例 6.5：设 $f(x)=arc\tan x+\dfrac{x}{1-e^{x}}$，则 $f(x)$ 具有渐近性的条数为（　　）

(A)　1　　(B)　2　　(C)　3　　(D)　4

例 6.6：求曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})$ 的渐近线

第二章　一元函数微分学

第 1 讲　导数定义

【核心考点 1】可导性判定

【方法点拨】

例 1.1： 设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则$f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$处 可导 的（　）

（A）充分必要条件

（B）充分非必要条件

（C）必要非充分条件

（D）既非充分也非必要条件

例 1.2：设函数$f(x)$在点$x=a$处可导，则函数$\left|f(x)\right|$在点$x=a$处不可导的充分条件是（ ）

（A）$f(a)=0$且$f'(a)=0$

（B）$f(a)=0$且$f'(a)\neq 0$

（C）$f(a)>0$且$f'(a)>0$

（D）$f(a)<0$且$f'(a)<0$

【核心考点 2】导数与极限的相互利用

【方法点拨】

例 1.3：设$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\ln(f(x)+2)}=1$，则$f'(0)=$____

例 1.4：设$f(1)=0$，$f'(1)=a$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x}$

例 1.5：设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，且$f'(0)=1$，$f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$，求$f(x)$

例 1.6：已知 $f(x)$ 是周期为5的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(6,f(6)\right)$ 处的切线方程

第 2 讲　导数的计算

【核心考点 1】各种类型函数求导

【方法点拨】

复合函数、反函数、分段函数、幂指函数、隐函数、积分函数等类型求导

例 2.1：设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^{t}}dt$，则函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\frac{dx}{dy}|_{y=0}=$ ____

例 2.2：设 $y=y(x)$ 由方程 $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{y}{x}}$ 确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

例 2.3：设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\int_0^t e^{-u^2}du \\ y=\int_0^t \sin(t-u)^2du \end{cases}$ 确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$（数一、数二）

例 2.4：设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$ 可导，求常数 a,b 的值

例 2.5：设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（常数），求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性

例 2.6：设 $f(x)$ 有一阶连续导数，$f''(1)=4$ 且

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0，\quad \varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]dt$$

（1）求 $\varphi'(x)$　　（2）讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性

【核心考点 2】求高阶导数

【方法点拨】

（1）熟练掌握常见函数的高阶导公式

$(\dfrac{1}{x-a})^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$；

$(a^x)^{(n)}=(\ln^n a)a^x$；

$\left(\ln(1+x)\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})$，$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})$；

（2）利用高阶导的运算法则

$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$；

$(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$

（3）利用幂级数展开（数一、数三）

例 2.7：$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，求 $f^{(n)}(x)$

例 2.8：设 $y=\dfrac{x^n}{x-1}+x\cos^2 x$，求 $y^{(n)},n=2,3,\cdots$

例 2.9：$f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f^{(n)}(0)$，$n\ge 3$

第 3 讲　微分中值定理的应用（一）

【核心考点 1】中值等式的证明

【方法点拨】

（1）$f^{(n)}(\xi)=0$ 型

直接用罗尔定理或多次使用罗尔定理

（2）$G\left(\xi,f(\xi),f'(\xi),\cdots\right)=0$ 型

构造辅助函数，用罗尔定理

例 3.1：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

例 3.2：设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且满足

$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx(k>1)$，证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$

例 3.3：设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$

证明：（1）存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得$f(\eta)=\eta$

（2）对任意实数λ，必存在$\xi\in(0,\eta)$，使得$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

例 3.4：设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内具有二阶导数，且

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}=0，\quad 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx=f(2)$$

证明：存在 $\xi\in\left(0,2\right)$，使得 $f''(\xi)=0$

例 3.5：设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

例 3.6：$0<a<b$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$a\ln b-b\ln a=(ab^2-ba^2)(1-\ln\xi)/\xi^2$$

第 4 讲　微分中值定理的应用（二）

【核心考点】证明多中值等式

【方法点拨】

（1）多次使用中值定理

（2）将区间分段，每一段上分别使用中值定理

例 4.1：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$

例 4.2：已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$

证明：（1）存在 $\xi\in\left(0,1\right)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$

（2）存在两个不同的点 $\eta,\ \zeta\in\left(0,1\right)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

例 4.3：设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$，$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：(1)　在 $x\in(a,b)$ 时 $f(x)>0$；

（2）$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

(3) 在 (a,b) 内存在与（2）中 ξ 相异的点 η 使得 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

例 4.4：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$\int_0^1 f(x)dx=0$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，在 $(0,1)$ 内 $g'(x)\neq 0$，且 $\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$，证明：存在两个不同 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$$

第 5 讲　微分中值定理的应用（三）

【核心考点】利用导数证明函数的性态

【方法点拨】

例 5.1：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，当 $x>a$ 时，$f'(x)>K>0$（K 为常数），$f(a)<0$

证明：方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{K}\right)$ 内有且仅有一个实根

例 5.2：设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，

证明：$f(x)\geq x$

例 5.3（2018-23）：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，则（　　）

（A）当 $f'(x)<0$ 时，$f(\dfrac{1}{2})<0$

（B）当 $f''(x)<0$ 时，$f(\dfrac{1}{2})<0$

（C）当 $f'(x)>0$ 时，$f(\dfrac{1}{2})<0$

（D）当 $f''(x)>0$ 时，$f(\dfrac{1}{2})<0$

例 5.4：设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f(a)>0$，$f'(a)<0$，当 $x>a$ 时，

$f''(x)<0$，试证：$f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内有且仅有一个实根

第 6 讲　导数的应用（一）

【核心考点 1】函数性态的判定

【方法点拨】

例 6.1：设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f'^2(x)=x, f'(0)=0$，　则（　　　　）.

(A) $f(0)$ 为函数 $f(x)$ 的极小值

(B) $f(0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值

(C) $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D)不能确定 $f(x)$ 的极值情况与曲线 $y=f(x)$ 的拐点情况

例 6.2：设 $f(x)=\int_0^1|t(t-x)|dt$，$0<x<1$，求 $f(x)$ 的极值、单调区间和凹凸区间

例 6.3：求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值

例 6.4：设 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, x\le 0\\ e^{-x^2}, x>0\end{cases}$，则曲线 $y=\int_0^x f(t)dt$ 拐点有________个

【核心考点 2】讨论方程根的个数

【方法点拨】

例 6.5：证明方程$\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$在区间$\left(0,+\infty\right)$内有且仅有两个不同实根

例 6.6：讨论方程$e^x=ax^2$在$(-\infty,+\infty)$内根的个数（a为常数）.

第 7 讲　导数的应用（二）

【核心考点】不等式证明

【方法点拨】

（1）基本方法：利用单调性

（2）利用最值思想证明不等式

（3）利用拉格朗日定理优化证明

例 7.1：设$0<x<1$，证明：$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$

例 7.2： 证明：$当x>0时,\left(x^2-1\right)\ln x\geq\left(x-1\right)^2$

例 7.3（2018）：已知常数$k\geq 2\ln 2-1$，证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geq 0$

例 7.4：设$e<a<b<e^2$，证明：$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$

第三章　一元函数积分学

第 1 讲　积分的计算（一）

【核心考点】：不定积分计算的方法与技巧

例 1.1：求 $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

例 1.2：求 $\int \frac{3x+4}{x^2-6x+25}\mathrm{d}x$

例 1.3：求 $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

例 1.4（2018-12）：求 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

例 1.5：设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导， $f(0)=1$，且满足

$$f'(x)-f(x)+\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)dt=0$$

求 $\int[f''(x)-f'(x)]e^{-x}dx$

例 1.6：设 $f(x,y)$ 可微，且 $\frac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$， $\frac{\partial f}{\partial y}=e^{-x}\cos y$， $f(0,0)=0$，

求 $\int f(x,x)dx$

第 2 讲　积分的计算（二）

【核心考点】定积分计算与化简的方法与技巧

例 2.1：求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx$

例 2.2：设 $f'(x)=\arcsin(x-1)^2$， $f(0)=0$，求 $I=\int_0^1 f(x)dx$

例 2.3：求$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx$

例 2.4：求$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

例 2.5：设$I(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)dt$，其中$f(x)=x$，$g(x)=\begin{cases}\sin x, x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0, x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，求$I(x)$

例 2.6：设$g(x)$是可微函数$y=f(x)$的反函数，且$f(1)=0$，证明：

$$\int_0^1[\int_0^{f(x)}g(t)dt]dx=2\int_0^1 xf(x)dx$$

例 2.7：设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶连续导数，证明：

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx$$

例 2.8：$f(x)$在$[a,b]$上具有二阶连续导数，且$f(a)=f'(a)=0$，

证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$\int_a^b f(x)dx=\frac{f''(\xi)}{6}\left(b-a\right)^3$

第 3 讲　积分不等式

【核心考点】积分不等式的证明

例 3.1（2018）：$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)dx$，

则M,N,K的大小关系是（　　）

（A）$M>N>K$
（B）$M>K>N$
（C）$K>M>N$
（D）$N>M>K$

例 3.2：设$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$，证明：

（1）$I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$（$n\geq 2$）

（2）$\frac{1}{2n+2}<I_n<\frac{1}{2n-2}$（$n\geq 2$）

例 3. 3：设 $S(x)=\int_0^x|\cos x|dx$

（1）证明：当 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$ （n 为自然数）时，$2n\le S(x)\le 2(n+1)$

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$

例 3. 4：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\le\frac{1}{4}\mathop{Max}_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|$$

例 3. 5：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且严格单调上升，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)dx\le 2\int_a^b xf(x)dx$$

例 3. 6（2014-23）：

设函数$f(x)$，$g(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(x)$单调增加,$0\le g(x)\le 1$，证明：

（1）$0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$

（2）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$

第 4 讲　反常积分

【核心考点】反常积分的敛散性判定与计算

例 4.1：计算下列反常积分

（1）$\int_{5}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+3}dx$（2018-2）

（2）$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$

（3）$\int_{0}^{+\infty}x^7e^{-x}dx$

（4）$\int_{0}^{+\infty}x^7e^{-x^2}dx$

例 4.2：设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}},1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x},x\ge e\end{cases}$，若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 α 的取值范围是_______

例 4.3：设反常积分 $\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛，证明反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛

例 4.4：判别反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\left(\arctan\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^{2\beta}}dx$ 的敛散性 $(\alpha,\beta>0)$.

例 4.5：判别下列反常积分的敛散性

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx\quad(n\ge 0)$

第 5 讲　积分的应用

【核心考点】定积分的物理应用与几何应用

例 5.1：一根 10 米长的轴，密度分布为 $\rho(x)=(0.3x+6)kg/m$（$0\le x\le 10$），求轴的质量

例 5.2：水库的闸门是一个等腰梯形，上底 $36m$，下底 $24m$，高 $16m$，水平面距上底 $4m$，求闸门所受到的水压力（水的密度为 $1000kg/m^3$）

例 5.3：一个由曲线 $x^2+y^2=2y$ 绕 y 轴旋转而成的容器中盛满水，将容器内水从容器内抽出，要做多少功？

例 5.4：求两椭圆 $x^2+\frac{1}{3}y^2=1$ 和 $\frac{1}{3}x^2+y^2=1$ 公共部分的面积.

例 5.5：已知曲线 $y=a\sqrt{x}$（$a>0$）与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共切线，求：

(1) 常数 a 及切点 (x_0,y_0)；

(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积；

(3) 两曲线与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体体积 V_x.

例 5.6：求由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 围成的区域绕 $x=2$ 旋转而成的几何体的体积

第四章　多元函数微分学

第 1 讲　多元函数微分学基本理论

【核心考点】

（1）二元极限的讨论与计算

（2）二元连续、可微的判定

（3）多元函数微分学的基本关系

例 1.1：讨论下列二元极限是否存在

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$

例 1.2：计算二元极限

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to1}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

（2）$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$

例 1.3：$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}，\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0,\qquad\qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、偏导存在性、可微性

例 1.4：已知函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 某领域内有定义，且 $f(0,0)=0$，

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）

A．连续且可微　　　　B．连续不可微

C．可微不连续　　　　D．不连续也不可微

例 1.5：连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $dz|_{(0,1)}=$ ____

第 2 讲　多元函数微分法

【核心考点】多元复合函数与隐函数微分法

例 2.1（2011-12）：设 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{x=1,y=1}$

例 2.2：设(r,θ)为极坐标，$u=u(r,\theta)$具有二阶连续偏导数，并满足$\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\equiv 0$，且$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，求$u(r,\theta)$

例 2.3：设方程$x^2+z^2=y\varphi(\dfrac{z}{y})$确定函数$z=z(x,y)$，其中$\varphi$可微，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$与$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

例 2.4：设$u=f(x,y,xyz)$，函数$z=z(x,y)$由方程$\int_{xy}^{z} g(xy+z-t)dt=e^{xyz}$确定，其中$f$可微，$g$连续，求$x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}$

例 2.5：若函数$z=f(x,y)$满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$，且$f(x,1)=x+2$，又$f_y{}'(x,1)=x+1$，求$f(x,y)$

例 2.6：设函数$z=z(x,y)$由方程$(z+y)^x=xy$确定，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=\_\_\_\_\_\_，\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\_\_\_\_\_\_$$

第 3 讲　多元函数的极值与最值

【核心考点】求多元函数的极值与最值

例 3.1：求函数 $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值

例 3.2（2012 年真题）：求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值

例 3.3：设 $f(x,y)$ 在 $\left(0,0\right)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-a-bx-cy}{x^2+y^2}=1$，其中 a,b,c 为常数，讨论 $f(x,y)$ 在 $\left(0,0\right)$ 处是否取得极值，说明理由。

例 3.4（数三）：设某工厂生产甲乙两种产品，产量分别为x,y（千只），其利润函数为$L(x,y)=-x^2-4y^2+8x+24y-15$，如果现有原料 15000 公斤（不要求用完），生产两种产品每千只都需要原料 2000 公斤，求

（1）使利润最大的x,y和最大利润

（2）如果原料降至 12000 公斤，求这时利润最大的产量和最大利润

例 3.5（数一数二）：平面$x+y+z=0$与椭球面$x^2+y^2+4z^2=1$相交成一个椭圆，求该椭圆的面积。

例 3.6：已知函数$z=f(x,y)$的全微分$dz=2xdx-2ydy$，且$f(1,1)=2$，求$f(x,y)$在椭圆盘$D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\right\}$上的最大值和最小值

第五章 二重积分

第 1 讲 二重积分的计算

【核心考点】二重积分直接计算、换元计算、对称性计算

例 1.1（2017-2）：已知平面区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2y\right\}$，计算二重积分

$$\iint_D (x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例 1.2（2010-2）：求二重积分$\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$

其中$D=\left\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le\sec\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right\}$

例 1.3：求$\iint_D y(1+xe^{x^2+y^2})dxdy$，其中$D: y=-1, y=x^3, x=1$所围成区域

例 1.4（2014-3）：

求 $I=\iint\limits_{D}\frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy$，其中 $D:1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0$

例 1.5：计算 $\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

例 1.6：设 D 表示全平面，$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求 $\iint\limits_{D}f(x)f(y-x)d\sigma$

例 1.7：求 $\iint\limits_{D}[x+y]dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$，[ ]表示取整

第 2 讲　二重积分的性质

【核心考点】二重积分的不等式性、中值定理、区域可加性、对称性

例 2.1（2005-3）：设

$$I_1=\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\text{，}\quad I_2=\iint_D \cos(x^2+y^2)dxdy\text{，}\quad I_3=\iint_D \cos(x^2+y^2)^2\,dxdy\text{，}$$

其中$D:x^2+y^2\le 1$，则三个积分的大小关系为_______________

例 2.2：极限 $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} e^{xy}\cos(x^2+y^2)dxdy}{t^2}=$________

例 2.3（2007-2）：设$f(x,y)$连续，则二重积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy$等于（　　）

（A）$\int_0^1 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$　　（B）$\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$

（C）$\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$　　（D）$\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$

例 2.4（2004-1）：设$f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则$F'(2)=$（　　）

（A）$2f(2)$　　（B）$f(2)$

（C）$-f(2)$　　（D）0

例 2.5（2015-12）：设D是第一象限中曲线$2xy=1,4xy=1$，直线$y=x,y=\sqrt{3}x$所围成的平面区域，$f(x,y)$在D上连续，则$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$（ ）

（A）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

（B）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

（C）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

（D）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

例 2.6：设 D 是平面上以$(1,1),(-1,1),(-1,-1)$为顶点的三角形，D_1是它的第一象限部分，则$\iint\limits_D\left(xy+\cos x\sin y\right)dxdy=$（ ）

A. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$　　B. $2\iint\limits_D xydxdy$

C. $4\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)dxdy$　　D. 0

例 2.7（2005-2）：设区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le4,x\ge0,y\ge0\right\}$，$f(x)$正值连续函数，则$\iint\limits_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma$等于（ ）

(A) $ab\pi$　(B) $\frac{ab}{2}\pi$　(C) $(a+b)\pi$　(D) $\frac{a+b}{2}\pi$

第六章　微分方程与差分方程

第 1 讲　一阶微分方程

变量分离方程、可化为变量分离方程的方程、一阶线性方程、伯努利方程、全微分方程

（1）变量分离方程：$\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

解法：分离变量，两边积分得通解$\int\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x$

（2）可化为变量分离方程的方程

齐次方程：$\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$

解法：代换：$u=\dfrac{y}{x}$，转化为变量分离方程：$\dfrac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

方程：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$

情形 1：$c_1=c_2=0$

解法：原方程转换为齐次方程：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1+b_1\dfrac{y}{x}}{a_2+b_2\dfrac{y}{x}}$

情形 2：$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$

解法：令$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$，原方程化为：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=f(a_2x+b_2y)$

再令$a_2x+b_2y=u$，方程化为变量分离方程：$\dfrac{du}{dx}=a_2+b_2f(u)$

情形 3：$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$

解法：解方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$，得唯一解：$x=x_0,y=y_0$

令$\begin{cases}X=x-x_0\\ Y=y-y_0\end{cases}$，原方程化为：$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}$，此为情形（1）

（3）一阶线性方程

1）$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0$，其通解为：$y=Ce^{-\int p(x)dx}$

2）$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$，其通解为：$e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

（4）伯努利方程：$y'+P(x)y=Q(x)y^k \quad (k\neq 0,1)$（仅数学一）

解法：作代换$z=y^{1-k}$，则（2.4）化为$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-k)P(x)z=(1-k)Q(x)$

（5）全微分方程：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$（仅数学一）

解法：当$\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$时，求出全微分$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$的原函数$u(x,y)$即可

原函数的求法：（1）利用第二类曲线积分与路径无关法

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(s,t)ds+Q(s,t)dt$

（2）不定积分法：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$，$u(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(\int P(x,y)dx)+C'(y)=Q(x,y)$，解出$C(y)$即可

【核心考点】求解一阶方程$F(x,y,y')=0$

例 1.1：微分方程$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$满足条件$y(1)=e^3$的解为______

例 1.2：求方程$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x+3y+1}{3x+2y+1}$的通解

例 1.3：（2005）：微分方程$xy'+2y=x\ln x$满足$y(1)=-\dfrac{1}{9}$的解为__________

例 1. 4：求 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$ 的通解

例 1. 5：求方程 $\frac{dy}{dx}=\cos(y-x)$ 的通解

第 2 讲　二阶微分方程的求解

二阶线性方程解的性质与结构

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$　　①　$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$　　②

（1）若 y_1 与 y_2 为方程①的两个特解, 且 $\frac{y_2}{y_1}\neq$ 常数（即 y_1 与 y_2 线性无关）, 则①的通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2$

（2）若 y_1^* 与 y_2^* 为方程②的两个特解, 则 $y_1^*-y_2^*$ 为方程①的特解.

（3）若 $C_1y_1+C_2y_2$ 为方程①的通解，y^* 为方程②的一个特解, 则方程②的通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2+y^*$

（4）若 y_1^* 与 y_2^* 分别为方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$, $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 的特解，则 $y_1^*+y_2^*$ 为方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解.

注：上述结论是二阶线性方程解的性质与结构的一般结果，特别地，对二阶常系数线性方程 $y''+py'+qy=0$ 、$y''+py'+qy=f(x)$ 　也成立。

（1）可降阶的二阶方程的求解（数一、数二）

1） $y''=f(x,y')$ 型

解法：令 $y'=p$, $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，化为 p 的一阶方程

2） $y''=f(y,y')$

解法：令 $y'=p$, $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程，化为 p 的一阶方程

（2）二阶常系数齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的求解

解法： $y''+py'+qy=0$ 特征方程:为 $r^2+pr+q=0$

结论：只要特征方程有一个根 $r=r_1$，微分方程对应有特解 $y=e^{r_1x}$.

1）特征方程有两个相异实根 $r_1\neq r_2$，微分方程有特解 e^{r_1x}，e^{r_2x}，通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$.

2）特征方程有两个相等实根 $r_1=r_2=r$，微分方程有特解 e^{rx}，xe^{rx}，

通解为 $y=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}=(C_1+C_2x)e^{rx}$.

3）特征方程有一对共轭复根 $r=\alpha\pm i\beta$，微分方程有特解：

$e^{\alpha x}\cos\beta x$，$e^{\alpha x}\sin\beta x$，通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

推广： $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_ny=0$

特征方程： $r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_n=0$，求出特征方程的根，由此可得方程的通解及特解.

（3）二阶常系数非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的求解

解法： $y''+py'+qy=f(x)$

关键是求它的一个特解，只要求掌握下述两种情形特解的求法：

1) $y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}$

2) $y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}\cos\omega x$

或 $y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}\sin\omega x$

对 1)，可设特解为： $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$，

$$其中\ k=\begin{cases}0, & 当\lambda不是特征方程的根,\\ 1, & 当\lambda是特征方程的单根,\\ 2, & 当\lambda是特征方程的重根.\end{cases}$$

$Q_m(x)$ 为 m 次待定多项式。

对 2)，可设特解 $y^*=x^k[R_m(x)\cos\omega x+Q_m(x)\sin\omega x]e^{\lambda x}$，

其中 $k=\begin{cases}0, & 当\lambda\pm i\omega不是特征方程的根,\\ 1, & 当\lambda\pm i\omega是特征方程的单根.\end{cases}$ $R_m(x)$、$Q_m(x)$ 为 m 次待定多项式.

（4）欧拉方程的求解： $x^2y''+pxy'+qy=\begin{cases}0\\ f(x)\end{cases}$ （仅数学一）

解法：令 $x=e^t$，化为以 t 为自变量，以 y 为函数的二阶常系数线性

方程： $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(p-1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+qy=\begin{cases}0\\ f(e^t)\end{cases}$

【核心考点】二阶方程的性质与求解

例 2.1（数一数二）：求 $xy''=y'\ln y'$ 的通解

例 2.2（数一数二）：求解初值问题 $\begin{cases} yy''+(y')^2=0 \\ y(0)=0, y'(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

例 2.3：求方程 $y''+3y'=6x+2$ 的通解

例 2.4：求方程 $y''-y'-2y=\sin 2x$ 的通解

例 2.5（仅数一）：求方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的通解

例 2.6：已知方程 $y''+ay'+2y=f(x)$ 的两个特解 $y_1=2e^x+\sin x$， $y_2=\sin x$，

求 a， $f(x)$

例 2.7：已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x - e^{-x}, y_3 = xe^x + e^{2x} + e^{-x}$ 为某二阶线性常系数非齐次方程的特解，求此方程

例 2.8：下列方程中，以 $y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$（$C_1, C_2, C_3$ 是常数）为通解的是（　　）

A. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$　　B. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$

C. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$　　D. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

第 3 讲　微分方程的应用

【核心考点】

微分方程在微积分中的应用、在几何中的应用、在实际问题中的应用

例 3.1：设 $f(x) = \mathrm{e}^x - \int_0^x (x-u)f(u)\,\mathrm{d}u$，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

例 3.2：设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z = f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x\cos y)e^{2x}$$

若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$，求 $f(u)$ 的表达式

例 3.3：在xoy面上，连续曲线L过点$M\left(1,0\right)$，其上任意的$P(x,y)$ $(x\neq 0)$处的切线斜率与直线OP的斜率之差等于ax（常数$a>0$）

（1）求L的方程

（2）当L与直线$y=ax$所围平面图形面积为$\dfrac{8}{3}$时，求a的值

例 3.4：设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续，若由曲线$y=f(x)$，直线$x=1$，$x=t$ $(t>1)$与x轴所围成的平面图形绕x轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)],$$

试求$y=f(x)$所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件$f(2)=\dfrac{2}{9}$的解.

例 3.5（数一、数二）：一个半球状雪堆，其体积融化的速率与半球面面积S成正比，比例系数$k>0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状. 已知半径为r_0的雪堆在开始融化的 3 小时内融化了其体积的$7/8$，问雪堆全部融化需要多少小时？

例 3.6（数一数二）：一容器含盐水 100 升，含盐 100 克，现以 5 升 /分的速度注入浓度为 10 克/升的盐水，同时将搅拌均匀的盐水以 5 升/分的速度排出

（1）求 20 分钟后容器含盐多少？

（2）经过多长时间容器中含盐 800 克？

第七章 无穷级数（数一、数三）

第 1 讲 数项级数敛散性

1．数项级数及其收敛的概念

对于一般的无穷个数相加的形式：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$

称为无穷级数或数项级数：a_n 为一般项，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 称为级数的部分和

级数收敛：若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$（有限值），则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$，称 S 为级数和.

若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在或为 $\pm\infty$，称级数发散.

2．级数的基本性质

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 同敛散，且在收敛时有： $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = cS$

（2）设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$ ，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 也收敛 ，

且 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_1 + S_2$；

（3）增加、减少、改变级数有限项，不改变级数的敛散性;

（4）对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ 的项任意加括号，所成的新级数仍收敛，且和为 S

（5）若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3．几个重要的级数

（1）p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1 & \text{收敛,} \\ p \le 1 & \text{发散.} \end{cases}$

（2）等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\begin{cases} |x|<1 & 收敛, \\ |x|\geq 1 & 发散. \end{cases}$

（3）$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}$ $\begin{cases} p>1 & 收敛, \\ p\leq 1 & 发散. \end{cases}$

4．正项级数敛散性判别

1）有界判别法：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是它的部分和序列 $\{S_n\}$ 有上界.

2）比较判别法及其极限形式

设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ①和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ②

（1） 如果级数②收敛，并且 $a_n \leq b_n$ （$n=1,2,\cdots$），则级数①也收敛；

（2） 如果级数①发散，并且 $a_n \leq b_n$ （$n=1,2,\cdots$），则级数②也发散；

注：可利用已知级数的敛散性来判别所要考虑的级数的敛散性.

（3） 若 $\exists N$ 使当 $n>N$ 时，有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 则

由②收敛⇒①收敛 ，由①发散⇒②也发散

（4）若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$，$b_n>0$ 有

当 $0<l<+\infty$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同时敛散；

当 $l=0$ 时由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

当 $l=+\infty$ 时由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注：若 $n\to\infty$ 时，$a_n \sim b_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散

3）比值法与根值法

达朗贝尔判别法（比值）：

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，若

① $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛； ② $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

柯西判别法（根值）：

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$，若 $\rho<1$ 级数收敛 ，若 $\rho>1$ 级数发散.

注：若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ 或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$，推不出级数的敛散性，如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$$

5．一般项级数敛散性判别

1）交错级数及其收敛性判别

设交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$，$a_n>0$，满足条件：$a_{n+1}\le a_n$，$n=1,2,\cdots$ 2）且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛。

2）绝对收敛、条件收敛：

若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的各项取绝对值后所组成的级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

若$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

注：绝对收敛一定收敛

【核心考点】数项级数敛散性判定

例 1.1：判定下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$

（2）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$

例 1.2：讨论下列级数敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

例 1.3：讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$（$a>0$）的敛散性

例 1.4：已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sqrt{n}\tan\frac{1}{n^{\alpha}}$绝对收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3-\alpha}}$条件收敛，则（　　）

A．$0<\alpha\le\frac{1}{2}$　　B．$1<\alpha<\frac{5}{2}$

C．$1<\alpha<3$　　D．$\frac{5}{2}<\alpha<3$

例 1.5：设正项数列$\{a_n\}$单调减少, 且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散, 试问$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$是否收敛, 说明理由.

第 2 讲　幂级数的收敛域与和函数

1．函数项级数的收敛域及和函数

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$

其中每一项 $u_i(x)$, $i=1,2,\cdots$ 都是定义在区间I上的一个函数，则称级数为函数项级数（或函数级数）.

（2）收敛点和收敛域

凡使级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 收敛的点 x_0 称为级数的收敛点，否则称为发散点. 所有收敛点所组成的集合称为级数的收敛域。所有发散点的集合称为级数的发散域.

（3）和函数：若 $\forall x \in I_0 \subset I, S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k}^{n} u_k(x)$ 存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 I_0 上收敛，其和函数为 $S(x)$.

2．幂级数及其收敛域

1）形如 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的级数，称为幂级数. 其中 x_0 是任意给定的实数，$a_n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 称为幂级数的系数. 特别：$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

2）设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 \neq 0$ 处收敛，则它在 $|x| < |x_0|$ 处绝对收敛；若其在 $x = x_1$ 处发散，则它在 $|x| > |x_1|$ 处也发散.

3）收敛半径

若幂级数不仅在 $x = x_0$ 点收敛，也不是在整个实轴上收敛，则必存在一个正数 R，使得①当 $|x - x_0| < R$ 时，幂级数收敛；②当 $|x-x_0| > R$ 时，幂级数发散；$(x_0 - R, x_0 + R)$ 称为幂级数的收敛区间。R—收敛半径.

4）收敛域的求法

（1）设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，其系数满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$，

则当 $0 < \rho < +\infty$ 时，$R = \frac{1}{\rho}$，当 $\rho = 0$ 时，$R = +\infty$，当 $\rho = +\infty$ 时，$R = 0$；

（2）对任意幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$，也可由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < 1$ 解出 $|x| < R$（或 $|x - x_0| < R$），由此可得收敛半径 R 及收敛区间，再讨论区间端点的敛散性，从而可得收敛域·

3．幂级数的和函数的性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $(-R\ ,R\ )$ 内的和函数为 $S(x)$，则

（1）$S(x) \in c(-R, +R\ )$，若幂级数在 $x = R, (or\ x = -R)$ 也收敛，则 $S(x)$ 在 $x = R$ 处左连续，（或在 $x = -R$ 处右连续)；

（2）逐项可导：$S(x)$ 在 $(-R\ ,R\ )$ 内每一点都是可导的，且有逐项求导公式：

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}\ ;$$

（3）逐项可积：$S(x)$ 在 $(-R\ ,R\ )$ 内可以积分，且有逐项积分公式：

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\int_0^x x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\quad ,$$

积分后的幂级数与原级数有相同的收敛半径.

【核心考点】幂级数的收敛域与和函数

例 2.1：求下列幂级数的收敛域

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$

（2）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{2n+1}$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

例 2.2：（2014-3）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数

例 2.3：求和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n+1}{2^n}$

例 2.4（2012-1）：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

第 3 讲　函数的幂级数展开

泰勒级数：

（1）若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处具有任意阶导数，则幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数. 可记作： $f(x)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

注：不能保证这个幂级数正好收敛到 $f(x)$ 本身.

（2）当 $x_0=0$ 时，得麦克劳林级数.

（3）函数能展开成泰勒级数的条件

若 $f(x)$ 在含有点 x_0 的某个区间 I 内有任意阶导数，$f(x)$ 在点 x_0 的 n 阶泰勒公式为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

记 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ，ξ 介于 x 与 x_0 之间，则 $f(x)$ 在 I 内能展开成泰勒级数的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, $\forall x\in I$.

（4） 初等函数的泰勒级数（ $x_0=0$ ）

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\quad,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1},x\in(-\infty,+\infty),$$

$$\cos x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,x\in(-1,1],\quad ,$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,x\in(-1,1),\alpha\in R,$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\quad |x|<1.\qquad \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\quad,\quad |x|<1$$

函数的幂级数展开：

若在 x_0 的邻域内才能展成 $(x-x_0)$ 的幂级数，则幂级数的系数完全由 $f(x)$ 在 x_0 处的导数值唯一确定：$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},a_0=f(0),n=1,2,\cdots$

【核心考点】函数的幂级数展开法

例 3.1： $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$

（1）展开成x的幂级数

（2）展开成$x-1$的幂级数

例 3.2：将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展成关于 x 的幂级数.

例 3.3：已知 $f(x)=\int_0^x \dfrac{1-\cos t}{t}dt$，将 $f(x)$ 展开成x的幂级数，并求

$$f^{(n)}(0)，\quad n=1,2,\cdots$$

例 3.4：把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!}$ 的和函数展开成$x-1$的幂级数

第 4 讲　傅里叶级数（仅数一）

1．若函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期, 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则傅立叶级数为:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ ，$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$，

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$，称为 $f(x)$ 的傅立叶系数.

2．若函数 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期, 在区间 $[-l,l]$ 上可积，则傅立叶级数为:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

其中 $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x$ ，$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$ （ $n=1,2,\cdots$ ），

$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \ (n=1,2,\cdots)$.

3．奇、偶函数的傅立叶级数

若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上为奇(偶)函数, 则

正弦级数: $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$， 余弦级数: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$， 系数的求法与上同.

在 $[-l,l]$ 上的奇(偶)函数结论与上同.

4．若 $f(x)$ 定义在 $[0,\pi]$ 上, 则 $f(x)$ 对进行奇(偶)延拓可展成傅氏级数.

（1）奇延拓：$f(x)$ 为 $[0,\pi]$ 上的非周期函数，

令 $F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le \pi, \\ -f(-x), & -\pi \le x < 0, \end{cases}$ 则 $F(x)$ 除 $x=0$ 外在 $[-\pi,\pi]$ 上为奇函数.

可得正弦级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{其中 } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin n x\mathrm{d}x \ ,(n=1,2,\cdots).$$

（2）偶延拓：$f(x)$ 为 $[0,\pi]$ 上的非周期函数

令 $F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le \pi, \\ f(-x), & -\pi \le x < 0, \end{cases}$ 则 $F(x)$ 除 $x=0$ 外，在 $[-\pi,\pi]$ 上为偶函数.

余弦级数:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{其中 } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos n x\mathrm{d}x \ ,(n=1,2,\cdots)$$

对定义在 $[0,l]$ 上的函数同理可进行奇（偶）延拓展开成正弦（余弦）级数.

5．收敛定理：狄利克雷收敛定理:

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，如果在 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(x)$ 满足条件：

① 连续或至多存在有限个第一类间断点；② 至多只有有限个极值点（即不

作无限次振荡）；

则 $f(x)$ 的傅氏级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处收敛，且其和

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x_0\text{为}f(x)\text{的连续点}, \\ \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)], & x_0\text{为间断点}, \\ \frac{1}{2}[f(-\pi^+)+f(\pi^-)], & x=\pm\pi. \end{cases}$$

当 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 时，称 $f(x)$ 可以展开成傅里叶级数

【核心考点】傅里叶的收敛性特征与函数的傅里叶展开

例 4. 1：例 1. 1：若 $f(x)$ 是周期为 2 的函数, 且 $f(x)=\begin{cases} 2, & -1<x\le 0, \\ x^2, & 0<x\le 1. \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 处收敛于________ ；

在 $x=\frac{1}{2}$ 处收敛于________ ；

在 $x=1$ 处收敛于________ ；

在 $x=2$ 处收敛于________ .

例 4. 2：将函数 $f(x)=ax-x^2\quad(0\le x\le a)$（$0\le x\le\pi$）展开成余弦级数，并求和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

第八章　微积分在经济学中的应用（数三）

一. 边际与边际分析

边际即经济函数的导数称为边际。而利用导数研究经济变量的边际变化的方法，就是边际分析方法。

1．总成本、平均成本、边际成本

（1）总成本通常由固定成本和可变成本两部分构成。用 $c(x)$表示，其中 x 表示产品的产量，$c(x)$表示当产量为 x 时的总成本。$x=0$，这时 $c(x)=c(o)$，$c(o)$就是固定成本。

（2）$c(x)/x$ 称为平均成本函数，表示在产量为 x 时平均每单位产品的成本。

（3）若成本函数 $c(x)$ 在区间 I 内可导，则 $c'(x)$ 为 $c(x)$ 在区间 I 内的边际成本函数，产量为 x_0 时的边际 $c'(x_0)$ 为边际成本函数 $c'(x)$ 在 x_0 处的函数值。其经济意义是：$c'(x_0)$ 近似地等于产量为 x_0 时再增加（减少）一个单位产品所增加（减少）的总成本。

例 4.1：已知某商品的成本函数为：

$$c(Q) = 100 + \frac{1}{4}Q^2 \qquad （Q\text{表示产量}）$$

求：（1）当 Q=10 时的平均成本及 Q 为多少时，平均成本最小？

（2）Q=10 时的边际成本并解释其经济意义。

解：（1）由 $c(Q) = 100 + \frac{1}{4}Q^2$ 得平均成本函数为：

$$\frac{c(Q)}{Q} = \frac{100 + \frac{1}{4}Q^2}{Q} = \frac{100}{Q} + \frac{1}{4}Q$$

当 Q=10 时：$\left.\frac{c(Q)}{Q}\right|_{Q=10} = \frac{100}{10} + \frac{1}{4} \times 10 = 12.5$

记 $\bar{c} = \frac{c(Q)}{Q}$，则 $\bar{c}' = -\frac{100}{Q^2} + \frac{1}{4}$ $\qquad \bar{c}'' = \frac{200}{Q^3}$

令 $\bar{c}' = 0$ 　　得：Q=20

而 $\bar{c}''(20) = \frac{200}{(20)^3} = \frac{1}{40} > 0$，所以当 Q=20 时，平均成本最小。

（2）由$c(Q)=100+\frac{1}{4}Q^2$得边际成本函数为：$c'(Q)=\frac{1}{2}Q$，$c'(Q)\big|_{x=10}=\frac{1}{2}\times 10=5$

则当产量 Q=10 时的边际成本为 5，其经济意义为：当产量为 10 时，若再增加（减少）一个单位产品，总成本将近似地增加（减少）5 个单位。

2．总收益、平均收益、边际收益

（1）总收益是生产者出售一定量产品所得以的全部收入，表示为 $R(x)$，其中 x 表示销售量（一般地，我们总是假设销售量、产量、需求量均相等）。

（2）平均收益函数为$R(x)/x$，表示销售量为 x 时单位销售量的平均收益。

（3）$R'(x)$称为边际收益函数，且$R'(x_0)=R'(x)\big|_{x=x_0}$。其经济意义为在销售量为 x_0时，再增加（减少）一个单位的销售量，总收益将近似地增加（减少）$R'(x_0)$个单位。

3．总利润、平均利润、边际利润

（1）总利润是指销售 x 个单位的产品所获得的净收入，即总收益与总成本之差，记 $L(x)$为总利润，则：$L(x)=R(x)-c(x)$（其中 x 表示销售量）

（2）$L(x)/x$　称为平均利润函数

（3）若总利润函数 $L(x)$为可导函数，称$L'(x)$为 $L(x)$的的边际利润。其经济意义为在销售量为 x_0时，再多（少）销售一个单位产品所增加（减少）的利润。

结论：

（1）函数取得最大利润的必要条件是边际收益等于边际成本。

又由 $L(x)$取得最大值的充分条件：$L'(x)=0且L''(x)<0$可得：$R''(x)<c''(x)$，故

（2）函数取得最大利润的充分条件是：边际收益等于边际成本且边际收益的变化率小于边际成本的变化率。

（1）（2）称为最大利润原则。

例 4.2：设某产品的需求函数为$x=100-5P$，其中 P 为价格，x 为需求量，求边际收入函数以及 x=20、50 和 70 时的边际收入，并解释所得结果的经济意义。

解：由题设有$P=\frac{1}{5}(100-x)$，于是，总收入函数为：

$$R(x)=xP=x\cdot\frac{1}{5}(100-x)=20x-\frac{1}{5}x^2$$

于是边际收入函数为：$R'(x)=20-\frac{2}{5}x=\frac{1}{5}(100-2x)$

$$R'(20)=12，\quad R'(50)=0，\quad R'(70)=-8$$

由所得结果可知，当销售量（即需求量）为 20 个单位时，再增加销售可使总收入增加，多销售一个单位产品，总收入约增加 12 个单位；当销售量为 50 个单位时，总收入的变化率为零，这时总收入达到最大值，增加一个单位的销售量，总收入基本不变；当销售量为 70 个单位时，再多销售一个单位产品，反而使总收入约减少 8 个单位，或者说，再少销售一个单位产品，将使总收入少损失约 8 个单位。

二．弹性与弹性分析

弹性，用来定量地描述一个经济变量对另一个经济变量变化的反应程度。

定义：设函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0(x_0\neq 0)$ 的某邻域内有定义，且 $f(x_0)\neq 0$，$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{x_0}{f(x_0)}\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$。如果函数 $y=f(x)$ 在区间（a、b）内可导，且 $f(x)\neq 0$，则称 $\frac{Ey}{Ex}=\frac{x}{f(x)}f'(x)$ 为函数 $y=f(x)$ 在区间（a、b）内的点弹性函数，简称为弹性函数。

1．需求的价格弹性

定义：设某商品的市场需求量为 Q，价格为 P，需求函数 $Q=Q(P)$ 可导，则称 $\frac{EQ}{EP}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP}$ 为该商品的需求价格弹性，简称为需求弹性，通常记为 ε_P。

注：需求弹性 ε_P 表示商品需求量 Q 对价格 P 变动的反应强度。由于需求量与价格 P 反方向变动，即需求函数为价格的减函数，故需求弹性为负值，即 $\varepsilon_P<0$。因此需求价格弹性表明当商品的价格上涨（下降）1%时，其需求量将减少（增加）约 $|\varepsilon_P|\%$。

例 4.3：设某商品的需求函数为 $Q=f(P)=12-\frac{1}{2}p$

（1）求需求弹性函数及 P=6 时的需求弹性，并给出经济解释。

（2）当 P 取什么值时，总收益最大？最大总收益是多少？

解：（1） $\varepsilon_P = \frac{EQ}{EP} = \frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP} = \frac{P}{12-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{P}{24-P}$， $\varepsilon(6) = -\frac{6}{24-6} = -\frac{1}{3}$

$\left|\varepsilon(6)\right| = \frac{1}{3} < 1$ 低弹性

经济意义为当价格P=6时，若增加1%，则需求量下降1/3%，而总收益增加（ $\Delta R > 0$ ）。

（2） $R = PQ = P(12 - \frac{1}{2}P)$， $R' = 12 - P$

令 $R' = 0$ 则 $P = 12$ $R(12) = 72$

且当 P=12 时，R’’<0

故当价格 P =12 时，总收益最大，最大总收益为 72。

2．供给的价格弹性

定义：设某商品供给函数 $Q = Q(P)$ 可导，（其中 P 表示价格，Q 表示供给量）则称： $\frac{EQ}{EP} = \frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP}$ 为该商品的供给价格弹性，简称供给弹性，通常用 ε_s 表示。

由于 ΔP 和 ΔQ 同方向变化，故 ε_s>0。它表明当商品价格上涨 1%时，供给量将增加 ε_s%。

三．差分方程

1．差分的概念

设函数 $y_t = y(t)$. 称改变量 $y_{t+1} - y_t$ 为函数 y_t 的差分，也称为函数 y_t 的一阶差分，记为 Δy_t，即 $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$ 或 $\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$.

一阶差分的差分称为二阶差分 $\Delta^2 y_t$，即

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t) = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t .$$

2．差分方程的概念

含有未知函数 y_t 的差分的方程称为差分方程.

差分方程的一般形式： $F(t, y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t, \cdots, \Delta^n y_t) = 0$

若差分方程中所含未知函数及未知函数的各阶差分均为一次的，则称该差分方程为线性差分方程.

线性差分方程的一般形式是

$$y_{t+n}+a_1(t)y_{t+n-1}+\cdots+a_{n-1}(t)y_{t+1}+a_n(t)y_t=f(t)$$

其特点是 $y_{t+n},y_{t+n+1},\cdots,y_t$ 都是一次的.

3．差分方程的解

满足差分方程的函数称为该差分方程的解.

如果差分方程的解中含有相互独立的任意常数的个数恰好等于方程的阶数，则称这个解为该差分方程的通解.

根据初始时刻对差分方程附加一定的条件，这种附加条件称为初始条件，满足初始条件的解称为特解.

4．一阶常系数线性差分方程

（1）一阶常系数齐次差分方程：$y_{t+1}+ay_t=0$

通解：$y_t=C(-a)^t$，其中C为任意常数

（2）一阶常系数非齐次差分方程：$y_{t+1}+ay_t=f(t)$

通解：齐次 $y_{t+1}+ay_t=0$ 的通解加自身的一个特解

情形一：$f(t)=b$

$a\neq-1$时，$y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 的特解：$y^*=\dfrac{b}{a+1}$

$a=-1$时，$y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 的特解：$y^*=bt$

情形二：$f(t)=\left(a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0\right)b^t$

$y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 的特解：$y^*=t^k\left(b_nt^n+b_{n-1}t^{n-1}+\cdots+b_1t+b_0\right)b^t$

当$a\neq-b$时，$k=0$

当$a=-b$时，$k=1$

例 1：求解差分方程$y_{t+1}-\dfrac{2}{3}y_t=\dfrac{1}{5}$

解：由于$a=-\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{b}{1+a}=\dfrac{3}{5}$。由通解公式，差分方程的通解为

$$y_t=C(\frac{2}{3})^t+\frac{3}{5}，（C为任意常数）。$$

例 2：求解差分方程 $y_{t+1}+2y_t=t$ 的通解

解： $y_{t+1}+2y_t=0$ 通解 $y_t=C(-2)^t$

$a=2,b=1,a\neq -b$，令 $y^*=At+B$，代入原方程，得 $A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{1}{9}$

故原方程通解为 $y_t=C(-2)^t+\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}$

例 3：求差分方程 $y_{t+1}-y_t=(2t+1)2^t$ 的通解

解： $y_{t+1}-y_t=0$ 的通解为 $y_t=C$

$a=-1,b=2,a\neq -b$，令 $y^*=(At+B)2^t$，代入原方程得 $A=2$，$B=-3$

故原方程通解为 $y_t=C+(2t-3)2^t$

第九章　空间解析几何（数一）

第 1 讲　向量代数

一．空间解析几何的基本对象

二．向量的运算

三．向量的几何应用

第 2 讲　空间的平面与直线方程

一．空间的平面方程

二．空间的直线方程

三．空间的位置关系

【核心考点】空间平面与直线的方程、几何量的计算

例 2. 1：设一平面经过原点及$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，则此平面方程为________

例 2. 2：求过点$\left(-1,2,1\right)$且平行于直线$\begin{cases}x+y-2z-1=0\\x+2y-z+1=0\end{cases}$的直线方程

例 2. 3：求直线$\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上的投影直线的方程

例 2. 4：求通过直线$l:\begin{cases}3x-2y+2=0\\x-2y-z+6=0\end{cases}$且与点$M_0\left(1,2,1\right)$的距离为1的平面方程

例 2. 5：设$l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$，$l_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$，则$l_1$与$l_2$的夹角为____

例 2. 6：$l_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$，$l_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$，问$l_1$与$l_2$是否共面，若共面，求交点，若不共面，求两直线的距离

第 3 讲　二次曲面

一．柱面及其方程

二．锥面及其方程

三．旋转曲面及其方程

四．其他常见的二次曲面

【核心考点】求柱面、锥面、旋转曲面的方程

例 3.1：求以曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=0\end{cases}$为准线，母线平行于直线$x=y=z$的柱面方程

例 3.2：求由曲线$\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转一周得到的旋转面

例 3.3：求空间直线$\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$绕$y$轴旋转而成的旋转曲面方程

第 4 讲 偏导数在几何中的应用

一．空间曲线的切向量及切线和法平面方程(数学一)

(1) 曲线方程$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$. $t=t_0$的切向量为$\tau=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$

切线：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$， 法平面：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$.

(2) 曲线方程$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$， $P_0(x_0,y_0,z_0)$处的切向量

$$\tau=\left\{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}\right\}_{P_0}=\{l,m,n\}.$$

切线：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$，法平面：$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$.

二．空间曲面的法向量及切平面和法线方程

(1)曲面方程 $F(x,y,z)=0$，(x_0,y_0,z_0) 处的法向量 $n=\{F_x'(x_0,y_0,z_0),F_y'(x_0,y_0,z_0),F_z'(x_0,y_0,z_0)\}$

切平面：$F_x'(x_0,\ y_0,\ z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,\ y_0,\ z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,\ y_0,\ z_0)(z-z_0)=0$

法线：$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,\ y_0,\ z_0)}$.

(2)特别的：若曲面方程为 $z=z(x,y)$，写成 $F(x,y,z)\equiv z-z(x,y)=0$ 之后，其法向量 $n=\{-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\}$，此 n 指向与 z 轴正向夹角为锐角.

例 4.1：求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在某点处的切平面方程使其平行于已知平面 $x+4y+6z=10$

例 4.2：求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线和法平面方程

第十章　三重积分（数一）

【核心考点】三重积分的计算

例 1.1：求$\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$，其中$V$由$z=xy$，$y=x$，$x=1$和$z=0$围成立体

例 1.2：计算$\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$

其中V是由曲面$z=x^2+y^2$与平面$z=4$所围立体

例 1.3：计算$\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$，其中

（1）V是椭球体：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$

（2）V是球体：$x^2+y^2+z^2\le 1$

例 1.4：求$\iiint\limits_{V} z^2 dv$，其中V为球$x^2+y^2+z^2 \le R^2$与球$x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$所围公共部分

第十一章　曲线积分（数一）

第 1 讲　两类曲线积分

【核心考点】两类曲线积分的基本计算

例 1.1：求$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$，$L$：$x^2+y^2=a^2, y=x, y=0$在第一象限所围图形边界

例 1.2：$L:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，周长为$a$，求$\oint_L (2x-3y)^2 ds$

例 1.3：求$\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中$L$为$x^2+y^2+z^2=1$与$x+y+z=1$的交线.

例 1.4：计算 $\oint_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$

其中 $L: x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限的边界，方向为从球面往内看的顺时针方向

第 2 讲　格林公式及曲线积分与路径无关

【核心考点】

（1）格林公式的应用

（2）曲线积分与路径无关的判定

（3）积分与路径无关的应用

例 2.1：求 $I=\int_L \left[e^x \sin y-b(x+y)\right]dx+\left(e^x \cos y-ax\right)dy$

其中 a,b 为正常数，L 为点 $A\left(2a,0\right)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O\left(0,0\right)$ 的弧

例 2.2：计算曲线积分$\oint_L \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}$

（1）不包围原点也不经过原点的简单闭曲线

（2）$x^2+y^2=a^2, a>0$，逆时针方向

（3）$(x-1)^2+y^2=R^2 \quad (R>1)$，逆时针方向

例 2.3：若曲线积分

$$\int_L (6xy+ky^2)dx+(3x^2+4xy)dy$$

与路径无关，求k的值，并计算$\int_{(0,1)}^{(1,2)} (6xy+ky^2)dx+(3x^2+4xy)dy$

例 2.4：设函数$Q(x,y)$在xoy平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分

$$\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$$

与路径无关，并且对任意t恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+Q(x,y)dy$$

求$Q(x,y)$

例 2.5：求$\frac{xdx-ydy}{x^2+y^2}$在右半平面内的一个原函数

第十二章　曲面积分（数一）

第 1 讲　两类曲面积分

【核心考点】两类曲面积分的基本计算

例 1.1：求 $\iint\limits_{\Sigma}|xyz|dS$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所割下的部分

例 1.2：求 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$，其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax$ 所割下的部分

例 1.3：求 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 为

（1）球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$

（2）球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的上半部分

例 1.4：求$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$，其中$\Sigma$为$z=x^2+y^2\quad(0\le z\le 1)$的上侧

例 1.5：计算$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Sigma$是由曲面$x^2+y^2=R^2$及两平面

$z=\pm R$（$R>0$）所围立体表面的外侧

第 2 讲　高斯公式与斯托克斯公式

【核心考点】高斯公式与斯托克斯公式的应用

例 2.1：计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x^3+z^2)dydz+(y^3+x^2)dzdx+(z^3+y^2)dxdy$，

其中Σ为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，取下侧.

例 2.2：求$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中$\Sigma$是椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的外侧

例 2. 3：计算 $I=\oint_L\left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz$，其中 L 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截三角形的边界，方向为从 x 轴正向看去，逆时针方向

例 2. 4：计算 $I=\oint_L z^2dx+xydy+yzdz$，其中 L 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与柱面 $x^2+y^2=ay$ 的交线，方向为从 z 轴正向看去，顺时针方向

第十三章　积分的应用（数一）

【核心考点】

例 1. 1：某体育馆屋顶可看作一个抛物面 $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^z\right)$（$0\le z\le 1$），其面密度分布为 $\rho\left(x,y,z\right)=z$，求该屋顶面的质量

例 1. 2：某球体 $V:x^2+y^2+z^2\le 2az$ 中任一点的密度与该点到原点的距离成正比，求此球体的质心

例 1. 3：求圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 截下的那部分面积

第十四章　场论初步（数一）

一．数量场

（1）方向导数的定义

（2）方向导数与偏导数的关系

（3）方向导数与可微性的关系

（4）方向导数的计算

设l单位向量$l^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，$u$可微则

$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$．显然$\frac{\partial u}{\partial l}=gradu\bullet(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$．

（5）梯度：设$u=u(x,y,z)$，则$gradu=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$

二．向量场

（1）散度：设$\vec{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，则

$$divF=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

（2）旋度 ：设$\vec{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，则

$$rot\overrightarrow{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}.$$

例 1.1：求函数$u(x,y,z)=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点$M_0(1,0,1)$处沿着方向$\vec{l}=\left(2,-2,1\right)$的方向导数.

例 1.2：向量场$\vec{u}(x,y,z)=xy^2\vec{i}+ye^z\vec{j}+x\ln(1+z^2)\vec{k}$在$P(1,\ 1,\ 0)$处的散度

$div\vec{u}=$__________

例 1.3：设$u=u(x,y,z)$为一个数量场，且具有二阶连续偏导数，求$rot(gradu)$

线 性 代 数

目　　录

第一章　行列式

第 1 讲　行列式的计算

【核心考点】具体行列式的计算

方法一：

例 1.1：计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

例 1.2：计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1-1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-3 & \cdots & a_n \\ & \cdots & \cdots & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n-n \end{vmatrix}$

方法二：

例 1.3（2014-123）：$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$____________

例 1.4：计算行列式$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$

方法三：

例 1.5（2015-1）：计算 n 阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$

例 1.6：计算行列式$D_n=\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a \end{vmatrix}$

方法四：

例 1.7：计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n\\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n\\ & \cdots & & \cdots & \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n\end{vmatrix}$

例 1.8：求解方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & a_1 & a_1^{\ 2} & \cdots & a_1^{\ n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^{\ 2} & \cdots & a_2^{\ n-1}\\ 1 & a_3 & a_3^{\ 2} & \cdots & a_3^{\ n-1}\\ & \cdots & & \cdots & \\ 1 & a_n & a_n^{\ 2} & \cdots & a_n^{\ n-1}\end{pmatrix}，\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}，\ b=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}，\ a_i\neq a_j$$

第 2 讲　抽象行列式的计算

【核心考点】如何计算矩阵的行列式

（1）利用矩阵行列式的性质

①$\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$；　②$|kA|=k^n|A|$；　③$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$；

④$|AB|=|BA|=|A||B|$；

（2）利用特征值计算矩阵的行列式

（3）利用矩阵相似计算行列式

例 2. 1：设 A,B 是 n 阶方阵，$\left|A\right|=2,\left|B\right|=3,\left|A-B\right|=1,$ 求 $\left|A^{-1}-B^{-1}\right|$.

例 2. 2：设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$ ，

则 $\left|B\right|=$_____ .

例 2. :3： $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$，其中 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 均为三维列向量，且 $|A|=1$，

$B=(\alpha_1+\alpha_2,\ \ \alpha_2+\alpha_3,\ \ \alpha_3+\alpha_1)$，则 $|B|=$_____

例 2.4（改自 2013-123）：已知实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$ 且 $a_{11}\neq0,$ 求 $\left|A\right|$

例 2. 5：设三阶矩阵 A 满足 $\left|A-E\right|=0$，$\left|A-2E\right|=0$，$\left|A-3E\right|=0$，求 $\left|A-4E\right|=0$

例 2. 6：设三阶实对称矩阵 A 满足 $A^2+2A=O$，且 $r\left(A\right)=2$，求 $\left|A+E\right|$

第二章　矩阵

第 1 讲　矩阵运算

【核心考点 1】求矩阵的幂

方法一：

例 1.1：$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^n

方法二：

例 1.2：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^n

方法三：

例 1.3：设α，β均为三维列向量，且$\alpha\beta^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & x \\ -1 & -2 & y \end{pmatrix}$，求$x, y, \beta^T\alpha$

例 1.4：$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$，求 A^n

【核心考点 2】矩阵的逆矩阵的计算与证明

方法一：

方法二：

例 1.5：已知n阶矩阵A，B满足$AB=A+2B$，证明：$A-2E$可逆，并求逆

例 1.6：设A,B是n阶矩阵，$E-AB$可逆，证明$E-BA$可逆.

例 1.7（2000-2）：设$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$，$B=(E+A)^{-1}(E-A)$，

则$(E+B)^{-1}=$______

方法三：

例 1.8：设A是n阶方阵，n是奇数，且$|A|=1$，又$A^T=A^{-1}$，试证：$(E-A)$不可逆.

例 1.9：设A为n阶可逆矩阵，α是n维列向量，b为常数，令

$P=\begin{pmatrix}E&O\\-\alpha^T A^*&|A|\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&b\end{pmatrix}$

(1)计算PQ

(2)证明Q可逆的充要条件是$\alpha^T A^{-1}\alpha\neq b$

第 2 讲　矩阵分块及其应用

1．概念　将大矩阵用若干条纵线和横线分成多个小矩阵，每个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵．

2．分块的运算

分块矩阵的运算与普通矩阵的运算规则相似，但要注意，运算的两矩阵按块能运算，并且参与的子块也能运算，即内外都能运算．

3．常用的分块

（ⅰ）列分块　$A_{m\times n}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n\right)_{1\times n}$，$\boldsymbol{\alpha}_i$—— $n\times 1$.

（ⅱ）行分块　$A_{m\times n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}_{m\times 1}$，$\boldsymbol{\beta}_i$——$1\times n$.

（ⅲ）$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的分块

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\boldsymbol{0}\Leftrightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}\ .$$

（ⅳ）$AB=O$ 的分块

$$AB=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow A(\boldsymbol{\beta}_1,\quad \boldsymbol{\beta}_2,\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta}_n)=(0,\quad 0,\quad \cdots\quad 0)\Leftrightarrow(A\boldsymbol{\beta}_1,\quad A\boldsymbol{\beta}_2,\quad \cdots\quad A\boldsymbol{\beta}_n)=(0,\quad 0,\quad \cdots\quad 0)$$

$$\Leftrightarrow A\boldsymbol{\beta}_i=0\ \ (i=1,2,\cdots n)\ .$$

【核心考点】矩阵分块的应用

应用 1：

例 2.1：$\begin{vmatrix}0&0&9&0&0\\0&0&8&5&0\\0&0&4&-1&-1\\1&2&22&13&40\\3&4&2&1&-9\end{vmatrix}=$_______

例 2.2：计算行列式$\begin{vmatrix}1&1&0&0&0&1\\x_1&x_2&0&0&0&x_3\\a_1&b_1&1&1&1&c_1\\a_2&b_2&x_1&x_2&x_3&c_2\\a_3&b_3&x_1^2&x_2^2&x_3^2&c_3\\x_1^2&x_2^2&0&0&0&x_3^2\end{vmatrix}$

应用 2：

例 2. 3： $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求 A^n

应用 3：

例 2. 4：设 $a_i\neq 0,\ i=1,2,\ldots n$， $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$.

例 2. 5： A,B均为2阶矩阵，$|A|=2$，$|B|=3$，则$\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^*=$（ ）

$A.\begin{pmatrix}0&3B^*\\2A^*&0\end{pmatrix}$ $B.\begin{pmatrix}0&2B^*\\3A^*&0\end{pmatrix}$ $C.\begin{pmatrix}0&3A^*\\2B^*&0\end{pmatrix}$ $D.\begin{pmatrix}0&2A^*\\3B^*&0\end{pmatrix}$

例 2. 6：设$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，求$A_{k1}+A_{k2}+\cdots+A_{kn}$

第 3 讲 矩阵的初等变换与秩

【核心考点 1】初等变换与初等矩阵的关系

例 3.1：设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$，

$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，其中 A 可逆，则 B^{-1} 等于（　　）

(A) $A^{-1}P_1P_2$　　(B) $P_1A^{-1}P_2$　　(C) $P_1P_2A^{-1}$　　(D) $P_2A^{-1}P_1$

例 3.2：设 A,P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 Q^TAQ 为　（　　）

（A）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

例 3.3：设A为三阶矩阵，P为三阶可逆矩阵，$P^{-1}AP=B$，

其中$P=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$A^{2018}$

【核心考点 2】秩的计算与证明

【注】秩的性质

（1）$R(A)=\begin{cases}=0\Leftrightarrow A=0,\\ \geq 1\Leftrightarrow A\neq 0;\end{cases}$

（2）设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $R(A)=R(A^T)=R(kA)\leq \min\{m,n\}(k\neq 0)$；

（3）设 A 为 n 阶矩阵，则 $R(A)=\begin{cases}=n\Leftrightarrow |A|\neq 0,\\ <n\Leftrightarrow |A|=0;\end{cases}$

（4）$R(AB)\leq \min\{R(A),R(B)\}$；

（5）$R(A+B)\leq R(A)+R(B)$；

（6）设 $A_{m\times n}B_{n\times s}=0$，则 $R(A)+R(B)\leq n$；

（7）设 P,Q 为可逆阵，则 $R(A)=R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)$.

（8）$R(A^*)=\begin{cases}n\Leftrightarrow R(A)=n,\\ 1\Leftrightarrow R(A)=n-1,\\ 0\Leftrightarrow R(A)<n-1;\end{cases}$

（9）$r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leq r(A)+r(B)$

（10）$r\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$

例 3.4：设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $r(A)=m<n$，E_m 为 m 阶单位矩阵，则（　　）

（A）A 的任意 m 个列向量必线性无关

（B）A 的任意一个 m 阶子式不等于零

（C）若矩阵 B 满足 $BA=O$，则 $B=O$

（D）A 通过初等行变换，必可化为 (E_m,O) 的形式

例 3.5：若 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&-1&k&2\\0&1&1&3\\1&-1&0&4\\2&0&2&5\end{pmatrix}$ 的秩为 3，则 $k=$ _______

例 3.6：证明：$R(A^*)=\begin{cases} n \Leftrightarrow R(A)=n, \\ 1 \ \Leftrightarrow R(A)=n-1, \\ 0 \Leftrightarrow R(A)<n-1; \end{cases}$

例 3.7(2008-1)：设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$为 3 维列向量，矩阵 $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$，证明：

（1）秩 $R(A)\le 2$；

（2）若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关，则 $R(A)<2$

例 3.8：A,B,C,D均为四阶方阵，$A\ne O,|B|\ne 0,|C|\ne 0,D\ne O$，

满足$ABCD=O$，若$r(A)+r(B)+r(C)+r(D)=r$，则r的取值范围是______

例 3.9：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ (a_1+1)^2 & (a_2+1)^2 & (a_3+1)^2 & (a_4+1)^2 & (a_5+1)^2 \end{pmatrix}, a_i\ne a_j$

则 $r(A)$=________

第三章　向量

第 1 讲　向量组的线性关系

【核心考点】向量线性关系的判定

例 1.1：设 $\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T$，$\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T$，$\beta=(1,3,-3)^T$，试讨论当 a,b 为何值时，

(1) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

(2) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示， 并求出表示式；

(3) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示， 但表示式不唯一， 并求出表示式.

例 1.2（2006-123）：

设$\alpha_1,\cdots$，α_s均为n维列向量，A是$m\times n$矩阵，则下列说法正确的是（ ）

(A)若$\alpha_1,\cdots$，α_s线性相关，则$A\alpha_1,\cdots$，$A\alpha_s$线性相关

(B)若$\alpha_1,\cdots$，α_s线性相关，则$A\alpha_1,\cdots$，$A\alpha_s$线性无关

(C)若$\alpha_1,\cdots$，α_s线性无关，则$A\alpha_1,\cdots$，$A\alpha_s$线性相关

(D)若$\alpha_1,\cdots$，α_s线性无关，则$A\alpha_1,\cdots$，$A\alpha_s$线性无关

例 1.3：设$\boldsymbol{\alpha}_1=(6,a+1,3)$，$\alpha_2=(a,2,-2)$，$\alpha_3=(a,1,0)$，$\alpha_4=(0,1,a)$，问：

（1）a为何值时，α_1,α_2线性相关？线性无关？

（2）a为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关？线性无关？

（3）a为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关？线性无关？

例 1.4：设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是（ ）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$

（B）$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

例 1.5：（2014-123）：设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均为三维向量，则对任意常数$k,l$，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关的（ ）

（A）必要非充分条件

（B）充分非必要条件

（C）充分必要条件

（D）既非充分也非必要条件

例 1.6：设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，α_3 向量满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，

（1）证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

（2）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$.

第 2 讲 向量组的极大无关组与秩

【核心考点 1】求向量组的极大无关组与秩

例 2.1：求向量组 $\alpha_1=(2,-1,3,5)$，$\alpha_2=(4,-3,1,3)$，$\alpha_3=(3,-2,3,4)$，$\alpha_4=(4,-1,15,17)$ 的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

例 2.1：设向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T$，$\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$，$\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T$，$\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$，

(1) p 为何值时，该向量组线性无关?并在此时将向量 $\alpha=(4,1,6,10)^T$ 用该向量组线性表出；

(2) p 为何值时，该向量组线性相关?并在此时求出它的秩和一个极大无关组.

例 2.2：已知$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3, R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$，

求$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)$．

例 2.3：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为 2，求向量组$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，

$\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$的秩

【核心考点 2】向量组之间的线性关系判定

例 2.4：设有向量组（I）$\alpha_1=(1,2,-1,3),\alpha_2=(-1,0,3,1),\alpha_3=(1,3,a+1,5)$

向量组（II）$\beta_1=(0,1,6,2),\beta_2=(2,3,8-a^2,4),\beta_3=(1,a,a^2-5,7)$

若β_3可由（I）线性表出，试判断向量组（I）与（II）是否等价

例 2.5：设有向量组（I）$\alpha_1=(1,1,a)^T,\alpha_2=(1,a,1)^T,\alpha_3=(a,1,1)^T$

（II）$\beta_1=(1,1,a)^T,,\beta_2=(-2,a,4)^T,\beta_3=(-2,a,a)^T$

求a的值，使向量组（I）可由（II）线性表示，但（II）不能由（I）线性表示

例 2.6：设n维列向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_m (m<n)$线性无关，则n维列向量组

β_1，$\beta_2,\cdots$，β_m线性无关的充要条件是（　　）

(A)向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m可由向量组β_1，$\beta_2,\cdots$，β_m线性表示
(B)向量组β_1，$\beta_2,\cdots$，β_m可由向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m线性表示
(C)向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m与向量组β_1，$\beta_2,\cdots$，β_m等价
(D)矩阵A=（α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m）与矩阵B=（β_1，$\beta_2,\cdots$，β_m）等价

第 3 讲　向量空间（仅数一）

1.向量空间的定义

(1)对加法和数乘封闭的实n维向量的全体称为一个n维向量空间，记为$\Re^n$。
(2)若$V\subset\Re^n$,且V中向量对加法与数乘也封闭，则称V是$\Re^n$的一个子空间。

2.向量空间的基、维数

设V是一个向量空间，α_1，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_r\in V$,满足：
（1）α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r线性无关
（2）V中任何一个向量都可以由α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r线性表示
则称α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r为V的一组基。r称为V的维数，记为$\dim V=r$

α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r是V的一组基，且两两正交，则称α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r是V的一组正交基；
此时若α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r是单位向量，则称α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r是V的一组标准正交基

例：齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$的解向量构成一个向量空间V且:$\dim V=n-r(A)$

$A_{m\times n}x=0$的基础解系即为V的一组基

3.坐标：设V是一个向量空间，α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r是V的一组基，$\forall\alpha\in V$，

则$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}$，则称$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}$是向量$\alpha$在

基α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r下的坐标

4. 基到基的过度矩阵

设α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r与β_1，$\beta_2,\cdots$，β_r是V的两组基,$\left(\beta_1，\beta_2,\cdots，\beta_r\right)=\left(\alpha_1，\alpha_2,\cdots，\alpha_r\right)P$

则称矩阵P为基α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r到基β_1，$\beta_2,\cdots$，β_r的过渡矩阵

5. 坐标变换

β在基α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r下的坐标为$x=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T$，在基$\beta_1$，$\beta_2,\cdots$，$\beta_r$下的坐标为$y=\left(y_1,\cdots,y_n\right)^T$

基α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r到基β_1，$\beta_2,\cdots$，β_r的过渡矩阵为P，则$x=Py$

【核心考点】求基、维数、坐标、过渡矩阵

方法：

例 3.1：$\alpha_1=\left(-2,4,1\right)^T,\alpha_2=\left(-1,3,5\right)^T,\alpha_3=\left(2,-3,1\right)^T,\beta=\left(1,1,3\right)^T$，

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\Re^3$的一个基，并求$\beta$在此基下的坐标

例 3.2：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维向量空间$\Re^3$的一组基，则有基$\alpha_1,\dfrac{1}{2}\alpha_2,\dfrac{1}{3}\alpha_3$到

基$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为______

例 3.3： 设$\alpha_1=\left(1,1,1\right)^T,\alpha_2=\left(0,1,1\right)^T,\alpha_3=\left(0,0,1\right)^T$；

$\beta_1=\left(1,0,1\right)^T,\beta_2=\left(0,1,-1\right)^T,\beta_3=\left(1,2,0\right)^T$ 是$\Re^3$的两组基，

（1）求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵

（2）若α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$\left(-1,2,1\right)^T$，求$\alpha$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标

第四章　线性方程组

第 1 讲　线性方程组

【核心考点 1】基础解系的判定与求解

例 1.1：已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系，问$t_1$、$t_2$取何值时，$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=t_1\boldsymbol{\alpha}_3+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$也是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

例 1.2：已知A是$m\times n$矩阵，其m个行向量是$CX=0$的基础解系，B为m阶可逆矩阵，证明:BA行向量组也是$CX=0$的基础解系

例 1.3：已知三阶矩阵A的第一行是(a,b,c)，a,b,c不全为零，

矩阵$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$($k$为常数)，且$AB=O$，求线性方程组$Ax=0$ 的通解

例 1.4：设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，且$|A|=0$，又设$A$中元素$a_{11}$代数余子式$A_{11}\neq 0$，求$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解.

【核心考点 2】非齐次线性方程组的求解

例 1.5：若方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=1\\x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$ 有无穷多个解，求λ并求解方程组

例 1.6：已知 4 阶方阵$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$，若$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$通解.

第 2 讲　线性方程组解理论的应用与延伸

【核心考点】

（1）解与线性表示的关系

（2）同解理论的应用

（3）公共解的理论与计算

例 2.1：

设A为四阶矩阵，$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为$k(1,-1,\ 2,\ 0)^{\mathrm{T}}+(2,\ 1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$，

（1）$\boldsymbol{\beta}$ 能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示

（2）$\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示

例 2.2：设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$

（1）证明：$r(A)=\mathrm{r}(A^TA)$

（2）若 $r\left(A\right)=n$，证明：$r\left(AB\right)=r\left(B\right)$

例 2.3：已知齐次方程组

（I）$\begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ ax_1+a^2x_3=0 \\ ax_2+a^2x_4=0 \end{cases}$ 的解全是四元方程（II）$x_1+x_2+x_3=0$ 的解

（1）求 a

（2）求方程组（I）的解

例 2.4：若 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，

求 a 的值及所有的公共解

第 3 讲 矩阵方程

【核心考点】

（1）方阵型矩阵方程

（2）一般型矩阵方程

例 3.1（2001-2）：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}，B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}，且AXA+BXB=AXB+BXA+A(A-B)，求X$$

例 3.2：设矩阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵 B.

例 3.3：设$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&a\\1&a&0\end{pmatrix}$，$B$是三阶非零矩阵，满足$BA=0$，求矩阵$B$

例 3.4（2014-123）：设$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$为三阶单位矩阵

（1）求方程组$Ax=0$的一个基础解系

（2）求满足$AB=E$ 的所有矩阵B

第五章　矩阵的特征值与特征向量

第 1 讲　特征值与特征向量

【核心考点】特征值与特征向量的计算

例 1.1：求 $A=\begin{pmatrix}8 & -2 & -1\\ -2 & 5 & -2\\ -3 & -6 & 6\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量

例 1.2：设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{pmatrix}$，其行列式 $|A|=-1$，又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，求 a,b,c 和 λ_0 的值.

例 1.3（2015）：设3阶矩阵A的特征值为$2,-2,1$，$B=A^2-A+E$,则行列式$\left|B\right|=$____

例 1.4：已知A为三阶矩阵，满足$A^2-A-2E=0$，且$0<\left|A\right|<5$，则$\left|A+2E\right|=$____

例 1.5：设$\alpha=\left(a_1,\cdots,a_n\right)^T$，若$a_1\neq 0$，且$A=\alpha\alpha^T$

（1）求$Ax=0$的通解

（2）求A的非零特征值及其对应的线性无关的特征向量

第 2 讲　矩阵的对角化

【核心考点】矩阵对角化的判定

例 2. 1：已知$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\3&1&1\\2&2&0\end{pmatrix}$，判断$A$是否可以对角化，如果可以，求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵

例 2. 2：设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，求 x 和 y 应满足的条件.

例 2. 3：设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$，求常数 k 及可逆阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

例 2.4（2010-3）：

设A为4阶实对称矩阵，且$A^2+A=O$，若$r(A)=3$, 则A 相似于（　）

（A）$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

例 2.5：设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量$\alpha_1=(-1,2,-1)^T$，$\alpha_2=(0,-1,1)^T$是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

（1）求 A 的特征值与特征向量；

（2）求正交矩阵 Q 和对角矩阵Λ，使得$Q^TAQ=\Lambda$；

（3）求 A 及$(A-\dfrac{3}{2}E)^6$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

第 3 讲　矩阵相似

【核心考点】矩阵相似的判定与应用

例 3.1（2014-123）：证明 n 阶矩阵$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$相似

例 3.2：设A为一个3阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为已知的线性无关的3维列向量，且满足

$$A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad A\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad A\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

求A 的特征值及特征向量

例 3.3：已知3阶矩阵A与3维向量x，使得x, Ax, A^2线性无关，

且满足$A^3x=3Ax-2A^2x$

(1)记$P=\left(x, Ax, A^2x\right)$，求3阶矩阵$B$，使得$A=PBP^{-1}$

(2)计算行列式$\left|A+E\right|$

例 3.4：已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$与矩阵$B=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$的伴随阵$B^*$相似，

求 A^n.

第六章　二次型

第 1 讲　二次型及其标准形

【核心考点】

（1）二次型的核心理论

（2）如何化二次型为标准型

例 1.1：若实对称阵 A 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$ 合同，则二次型 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ 的规范形为________.

例 1.2：（2016-3）：设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 $1,2$，则（　　）

（A）$a>1$

（B）$a<-2$

（C）$-2<a<1$

（D）$a=1$ 或 $a=-2$

例 1.3：若二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1{}^2-x_2{}^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围是__________

例 1.4：设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 则 A 与 B（　　）.

（A）合同且相似　（B）合同但不相似

（C）不合同但相似　（D）既不合同也不相似

例 1.5（2012）：

已知$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^T(A^TA)X$，的秩为2，

求（1）实数a值

（2）利用正交变换$X=QY$将f化为标准形

第 2 讲　正定二次型与正定矩阵

若对 $\forall x\neq 0$，有 $f(x)=x^TAx>0$，称 $f(x)$ 为正定二次型， A 称正定矩阵；

A 正定的充分必要条件：

(1) A 的正惯性指数等于 n;

(2) A 与 E 合同，即存在可逆阵 D，使 $A=D^TD$；

(3) A 的特征值全正;

(4) A 的顺序主子式全正;

A 正定的必要条件： $a_{ii}>0$，$|A|>0$；

若 A 是正定矩阵，则 $A^T,A^{-1},A^*,A^m,p(A)$ 均为正定阵，其中 $p(x)$ 为系数全正的多项式;

若 A,B 均为正定阵，则 $kA+lB\ (k,l>0)$ 也是正定阵，但 AB 正定 $\Leftrightarrow$ $AB=BA$；

【核心考点】正定性的性质与判定

例 2.1：设 A 为 m 阶实对称阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，证明：

$$B^T AB \text{ 为正定矩阵} \Leftrightarrow r(B)=n.$$

例 2.2：设 A 为 n 阶实对称矩阵，$A^2=A$，$r(A)=r$（$0<r<n$），证明：

$A+E$ 正定，且计算行列式$\left|E+A+A^2+\cdots+A^k\right|$

例 2.3：已知 A,B 都是正定阵，证明：AB 也是正定阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

概 率 论 与 数 理 统 计

目 录

第一章 随机事件与概率

第 1 讲　三大概型

【核心考点】三种常见概型的计算

例 1.1：设盒子中有 10 只球，其中 4 只红球，3 只白球，3 只黑球，现从中不放回地取三次，每次取一个，求三次所取的球颜色不同的概率。

例 1.2：将 n 个球随机地放入 $2n$ 个不同盒子中，假设每个盒子足够大，容纳的球数不限，且 n 个球在 $2n$ 个盒子中的分布是等可能的，求

（1）每个盒子中最多只有一个球的概率

（2）某个指定的盒子不空的概率

例 1.3：在线段 AD 上任取两点 B，C，在 B，C 处折断而得三条线段，求这三条线段能构成三角形的概率。

例 1.4：随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}\ (a > 0)$ 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为__________。

例 1.5：设独立重复地进行某试验，已知第四次试验出现第二次成功的概率为$\frac{3}{16}$，求第六次试验出现第三次成功的概率。

例 1.6：设甲乙两支球队进行足球比赛，采用五局三胜制，若每局比赛中甲胜的概率为$\frac{2}{3}$，求甲最终获胜的概率。

第 2 讲　概率的公式

【核心考点】五大概率公式的应用

例 2.1：设A,B,C是三个事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，$A,B,C$至少有一个发生的概率为1，则下列说法错误的是（　　）

A．$P(AB)=P(BC)$　　B．$P(A-B)=0$

C．$P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=1$　　D．$P\left(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\right)=0$

例 2.2：设事件A与B相互独立，$P(A)=a,P(B)=b$．若事件C发生，必然导致A与B同时发生，求A，B，C都不发生的概率．

例 2.3：设袋中有 5 只白球和一只黑球，每次从中任取一个球，并换入一只白球，这样继续下去，求交换 3 次后，第 4 次取到白球的概率。

例 2.4：甲袋中有 3 个白球 2 个黑球，乙袋中有 4 个白球 4 个黑球，今从甲袋中任取 2 个球放入乙袋，再从乙袋中任取一个球，求该球是白球的概率。

例 2.5：假设有两箱同种零件，第一箱内装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱内装 30 只，其中 18 只一等品．现从两箱中随机挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，取后不放回，求：

（1）第一次取到的零件是一等品的概率；

（2）在第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率．

例 2.6：设有甲乙两名射击运动员，甲命中目标的概率是 0.6，乙命中目标的概率是 0.5，求

（1）从甲乙中任取一人射击，若目标被击中，求是甲命中的概率

（2）甲乙两人各自独立射击，若目标被击中，求是甲命中的概率

第二章 随机变量及其分布

第 1 讲 分布函数

【核心考点】分布函数的概念、性质、应用

例 1.1：如下四个函数，哪个是某随机变量的分布函数（ ）

(A) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le x\le 1\\ \frac{3}{4}, & 1<x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

(B) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\le x\le \frac{\pi}{4}\\ x, & \frac{\pi}{4}<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^2}{2}, & 0<x\le 1\\ -\frac{3}{2}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1+x}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

例 1.2：设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x),f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是（ ）

(A) $f_1(x)f_2(x)$

(B) $2f_2(x)F_1(x)$

(C) $f_1(x)F_2(x)$

(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

例 1.3：设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)=af_1(x)+bf_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 是正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 的密度函数，$f_2(x)$ 是参数为 λ 的指数分布的密度函数，已知 $F(0)=\frac{1}{8}$，则（　　）

(A) $a=1,b=0$　　(B) $a=\frac{3}{4},b=\frac{1}{4}$

(C) $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$　　(D) $a=\frac{1}{4},b=\frac{3}{4}$

例 1.4：设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，且 $f(-x)=f(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有（　　）

(A) $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$　　(B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

(C) $F(-a)=F(a)$　　(D) $F(-a)=2F(a)-1$

例 1.5：设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ A\sin x, & 0\le x\le \pi/2\\ 1, & x>\pi/2\end{cases}$$

则 $P\{|X|<\frac{\pi}{6}\}=$______.

第 2 讲　离散型随机变量

【核心考点】分布列的计算与应用

例 2.1：设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 0.3, 0\le x<1\\ 0.6, 1\le x<2\\ 1, x\ge 2\end{cases}$，求 X 的分布列

例 2.2：一射手对同一目标独立地进行 4 次射击，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则该射手的命中率为__________

例 2.3：设随机变量 X 在 $[2,5]$ 上服从均匀分布，现在对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

例 2.4：设随机变量 $X\sim P(\lambda)$，已知 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots$，

则 $P(X>2)=$____

例 2.5：假设一厂家生产的每台仪器，以概率 0.70 可以直接出厂；以概率 0.30 需进一步调试，经调试后以概率 0.80 可以出厂，以概率 0.20 定为不合格不能出厂，现该厂新生产了 $n(n\ge 2)$ 台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立)，求：

（1）全部能出厂的概率 α；

（2）其中恰好有两件不能出厂的概率 β

（3）其中至少有两件不能出厂的概率 θ.

第 3 讲 连续型随机变量

【核心考点】概率密度的计算与应用

例 3.1：设随机变量 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}k\sin x, 0<x<\pi \\ 0, 其它\end{cases}$，求

（1）求常数 k

（2）求 X 的分布函数

（3）求概率 $P(X>\frac{2\pi}{3}\mid X>\frac{\pi}{2})$

例 3.2：填空题

（1）设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$__________

（2）设随机变量 ξ 服从 $(1,6)$ 上的均匀分布，则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率为__________

例 3.3：某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩(百分制)近似正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%。试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率。

（$\Phi(2)=0.977$，$\Phi(1)=0.841$）

例 3. 4：假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布（1）求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布；（2）求在设备已经无故障工作 8 小时的情形下，再无故障工作 8 小时的概率 Q.

第 4 讲　随机变量的函数

【核心考点】求随机变量函数的分布

例 4. 1：设 X 有分布列

$$P(X=k)=\frac{1}{2^k},k=1,2,\ldots,$$

求 $Y=g(X)=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$ 的分布列。

例 4. 2：设随机变量 X 在区间 $(1,2)$ 上服从均匀分布，求 $Y=\mathrm{e}^{2X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

例4.3：假设一设备开机后无故障工作的时间X 服从指数分布，平均无故障工作的时间(EX)为5小时.设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作2 小时便关机.试求该设备每次开机无故障工作的时间Y的分布函数$F_Y(y)$.

例 4.4：设随机变量 X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x\in[1,8]\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

$F(x)$是 X的分布函数，求随机变量$Y=F(X)$的分布函数.

第三章　多维随机变量及其分布

第 1 讲　二维离散型随机变量

【核心考点】联合、边缘、条件分布列的计算与应用

例 1.1：设随机变量 $X_i\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4}\end{bmatrix}(i=1,2)$，且满足$P\{X_1X_2=0\}=1$，则$P\{X_1=X_2\}$等于（　　）

(A)0　(B)$\dfrac{1}{4}$　(C)$\dfrac{1}{2}$　(D)1

例 1.2：设袋中有 1 个红球，2 个黑球和 3 个白球。现有放回地从袋中取两次，每次取一球，以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球和白球的个数.
（1）求 $P\{X=1|Z=0\}$；（2）求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

例 1.3：将三个相同的球等可能地放入编号为 1,2,3 的三个盒子中，记落入第 1 号与第 2 号盒子中球的个数分别为 X 和 Y

（1）求 (X,Y) 的联合分布律

（2）求 X 与 Y 的边缘分布律

（3）X 与 Y 是否独立？

（4）求 $X=1$ 时，Y 的条件分布律

第 2 讲 二维连续型随机变量

【核心考点】联合、边缘、条件密度的计算与应用

例 2.1：设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} ke^{-x}, & 0<y<x, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

求：（1）常数 k；

（2）求 (X,Y) 的联合分布函数

（3）求 $P(X+Y<2)$

例 2.2：设二维连续型随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, 0<x<1, x^2<y<x \\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}$$

求边缘密度函数$f_X(x)$，$f_Y(y)$

例 2.3：

设X在$(0,1)$上服从均匀分布，在$X=x$ $(0<x<1)$的条件下，Y在$(0,x)$上服从均匀分布，求

(1)(X,Y)的联合密度函数

(2)$f_Y(y)$

(3)$P(Y>\frac{1}{4}|X=\frac{1}{2})$

例 2.4：设二维随机变量(X,Y)在区域$D:|x|+|y|\le 1$上服从均匀分布

（1）讨论X与Y的独立性

（2）令$U=\begin{cases}1, & X\ge 0\\ 0, & X<0\end{cases}$，$V=\begin{cases}1, & Y\ge 0\\ 0, & Y<0\end{cases}$，讨论$U$与$V$的独立性

第 3 讲　二维随机变量函数的分布

【核心考点】求二维随机变量函数的分布

注：可加性定理：

(1) 设$X \sim B(m,p)$，$Y \sim B(n,p)$，且X,Y相互独立，则$X+Y \sim B(m+n,p)$；

(2) 设$X \sim P(\lambda_1)$，$Y \sim P(\lambda_2)$，且X,Y相互独立，则$X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$；

(3) 设$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且$X,Y$相互独立，则有

$$X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2);$$

推广到有限多个，若$X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2,\cdots,n$，且$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，

则有 $$Z=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2),$$

称为正态分布的可加性.

例 3.1：设(X,Y)联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 6xy^2, & 0<y<x<2-y \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求：（1）边缘密度函数$f_X(x)$、$f_Y(y)$；

（2）X与Y的独立性；

（3）$Z=X+Y$是密度函数$f_Z(z)$

例 3.2：设二维随机变量(X,Y)的联合密度为$f(x,y)=\begin{cases} 3x, & 0<y<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

求$Z=2X-Y$的概率密度函数

例 3.3：设二维随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^x, & 1-x\le y\le 1，0\le x\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求$Z=\max\{X,Y\}$的密度函数$f_Z(z)$

例 3.4：设随机变量X与Y相互独立，且X服从标准正态分布$N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=1/2$，记$F_Z(z)$为随机变量$Z=XY$的分布函数，则函数$F_Z(z)$的间断点个数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

第四章　随机变量的数字特征

【核心考点】期望、方差、协方差、相关系数的计算

例 4.1：设X有分布列$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$，求$E\left(\min\{X,EX\}\right)$

例 4. 2：设有 $n\ (n>1)$ 张卡片（编号为 1, 2，⋯， n ），现从中有放回地任取 k 张，求所取号码之和 X 的期望 EX 和方差 DX

例 4. 3：设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，求 $Y=\dfrac{1}{X}$ 的数学期望.

例 4. 4：设随机变量 (X,Y) 的联合概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 X^2 和 Y^2 的协方差 $\mathrm{Cov}(X^2,Y^2)=$____________

例 4. 5：设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D:0<x<1,|y|<x$ 内服从均匀分布，求随机变量 $Z=2X+1$ 的方差.

例 4.6：设随机变量 $X\sim U(-1,2)$，$Y=\begin{cases}-1, X<0\\ 0, X=0\\ 1, X>0\end{cases}$，求 ρ_{XY}

例 4.7：设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\ -\infty<x<+\infty$，

(1) 求 X 的数学期望 EX 和方差 DX；

(2) 求 X 与 $|X|$ 的协方差，并问 X 与 $|X|$ 是否不相关？

(3) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立？为什么？

第五章　大数定律和中心极限定理

一、Chebyshev 不等式

随机变量 X 的数学期望为 $EX=\mu$，方差为 $DX=\sigma^2$，则对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

注：则对于任意的 $\varepsilon>0$，有：$P(|X-\mu|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$

二、大数定律

1、大数定律的定义

定义 1(依概率收敛) 设 $X_n(n=1,2,\cdots)$为随机变量列，若存在随机变量 X，对于任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0 \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}P(|X_n-X|<\varepsilon)=1,$$

则称随机变量列$\{X_n\}$依概率收敛于随机变量 X，并用下面符号表示：

$$X_n\xrightarrow{P}X \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}X_n=X(P).$$

定义 2(大数定律) 设$\{X_n\}$为一随机变量列，并且 $E(X_n)$存在，若令 $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

有

$$\lim_{n\to\infty}[\overline{X}_n-E(\overline{X}_n)]=0 \quad (P),$$

则称随机变量列$\{X_n\}$服从大数定律.

2、常见的大数定律

(1)切比雪夫大数定律

设随机变量 X_1，X_2，…相互独立，均具有有限方差，且被同一常数 C所界：$D(X_i)<C(i=1,2,\cdots)$，则对于任意的正数 ，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right)=1.$$

特殊情形：若 X_1，X_2，…具有相同的数学期望 $E(X_i)=\mu$，则上式成为

$$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon)=1.$$

切比雪夫大数定律指出，n个相互独立，且具有有限的相同的数学期望与方差的随机变量，当 n 很大时，它们的算术平均以很大的概率接近它们的数学期望.

(2)伯努利大数定律

设μ是 n 次独立试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对于任意的正数ε，有$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{\mu}{n}-p|<\varepsilon)=1.$

伯努利大数定律说明，当试验次数 n 很大时，事件 A 发生的频率与概率有较大差别的可能性很小，即$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{\mu}{n}-p|\geq\varepsilon)=0.$

(3)辛钦大数定律

设 X_1，X_2，…，X_n，…是相互独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_n)=\mu$，则对于任意的正数　有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon)=1.$

三、中心极限定理

1、列维－林德伯格定理　设随机变量 X_1，X_2，…相互独立，服从同一分布，且具有相同的数学期望和方差：$E(X_k)=\mu$，$D(X_k)=\sigma^2\neq 0(k=1，2，\cdots)$，则随机变量

$$Y_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}=\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}=\frac{\overline{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

的分布函数 $F_n(x)$对任意的实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\left\{\frac{\overline{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\leq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

此定理也称为独立同分布的中心极限定理.

2、棣莫弗－拉普拉斯定理

设随机变量 X_1，X_2，…均为具有参数 n，$p(0<p<1)$的二项分布，则对于任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P(\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}-\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

注：设 $u_n\sim B(n,p)$，则当 n 很大时，有

$$P(k_1<u_n\leq k_2)=P(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}<\frac{u_n-np}{\sqrt{npq}}\leq\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}})$$
$$\approx\Phi(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}})-\Phi(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}),\quad q=1-p.$$

【核心考点 1】切比雪夫不等式的应用

例 1.1：已知随机变量 X,Y 的数学期望分别为-2 和 2，方差分别为 1 和 4，相关系数为-0.5，根据 Chebyshev 不等式 $P(|X+Y|\geq 6)\leq$__________。

例 1.2：抛一枚均匀硬币 100 次，则事件“出现正面”的次数在 40 与 60 之间的概率为（　　）

A．$p\leq 0.25$　　B．$p\leq 0.75$　　C．$p\geq 0.75$　　D．$p\geq 0.25$

【核心考点 2】大数定律的判定与应用

例 2.1：设$\{X_k\}$为相互独立的随机变量序列，且

$$X_k \sim \begin{pmatrix} -2^k & 0 & 2^k \\ \frac{1}{2^{2k+1}} & 1-\frac{1}{2^{2k}} & \frac{1}{2^{2k+1}} \end{pmatrix} \ (k=1,2,\cdots),$$

试证$\{X_k\}$服从大数定律.

例 2.2：设$\{X_k\}$为相互独立且同分布的随机变量序列，并且X_k的概率分布为

$$P(X_i = 2^{i-2\ln i}) = 2^{-i} (i=1,2,\cdots),$$

试证$\{X_i\}$服从大数定律.

例 2.3：设总体X服从参数为 2 的指数分布，X_1，X_2，…，X_n为来自总体X的简单随机样本，则当$n\to\infty$时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于________.

【核心考点 3】中心极限定理的应用

例 3.1：设随机变量序列X_1，$X_2,\cdots$，X_{32}独立同分布，且$X_i \sim e(2)$，$i=1,2,\cdots,32$，记$X=\sum_{i=1}^{32}X_i$，$p_1=P(X<16)$，$p_2=P(X>12)$，则（　　）

A．$p_1=p_2$　B．$p_1<p_2$　C．$p_1>p_2$　D．无法确定

例 3.2：某车间有 200 名车床独立工作，但因换条件、维修等原因，每台车床开工率均为 0.6，开工时耗电各为 1 千瓦，问供电所至少给这个车间多少电才能以不小于 99.9%的概率保证这个车间不会因为供电不足而影响生产

（$\Phi(3.1)=0.999$）

第六章 抽样分布

【核心考点】抽样分布的判定与计算

例 6.1：设 X_1，X_2，…，X_{10} 相互独立同 $N(0，2^2)$ 分布，求常数 a，b，c，d 使

$$Y=aX_1^2+b(X_2+X_3)^2+c(X_4+X_5+X_6)^2+d(X_7+X_8+X_9+X_{10})^2$$

服从 χ^2 分布，并求自由度 m.

例 6.2：设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$ 的简单随机样本，则统计量

$\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为（　　）

（A）$N(0,1)$　　（B）$t(1)$　　（C）$\chi^2(1)$　　（D）$F(1,1)$

例 6. 3：设总体 $X \sim N(1,0.04)$ 分布， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 X ，要使得 $P\left(0.9<\overline{X}<1.1\right)\geq 0.95$ ，问样本容量 n 至少取多少

例 6. 4：设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，且

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+\cdots+X_6)，\quad Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)，$$

$$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2，\quad Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}，$$

证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

例 6. 5：设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}，\quad -\infty<x<+\infty .$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，其样本方差为 S^2，则 $E(S^2)=$ ________

例 6. 6：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其样本均值为 $\overline{X}$ ，记 $Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n.$ 求：

（1） Y_i 的方差 $DY_i,i=1,2,\cdots,n$ ；

（2） Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$ ；

第七章 参数估计

一、点估计

1．设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 的形式已知，其中 θ 为一个未知参数，又设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为总体 X 的一个样本．我们构造一个统计量 $K=K(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 作为参数 θ 的估计，称统计量 K 为参数 θ 的一个估计量．当 x_1，x_2，…，x_n 为一组样本值时，则 $\hat{K}=K(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 就是 θ 的一个估计值．θ 的估计量和估计值统称为 θ 的点估计．

2.估计量的评选标准（仅数一）

(1)无偏性设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 为未知参数 θ 的估计量.若 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量.

若总体 X 的均值 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 存在，则样本均值 $\overline{x}$ 和样本方差 S^2 分别为 $E(X)$ 和 $D(X)$ 的无偏估计，即 $E(\overline{x})=E(X)$，$E(S^2)=D(X)$.

(2)有效性

设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 是未知参数 θ 的两个无偏估计量．若 $D(\hat{\theta}_1)=D(\hat{\theta}_2)$ 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效．

(3)相合性 设 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的一串估计量，如果对于任意的正数 ε，都有

$$\lim_{x\to\infty}P(|\hat{\theta}_n-\theta|>\varepsilon)=0,$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合估计量(或一致估计量)．

二、点估计的两种常用方法

1．矩估计

设总体 X 的分布中包含有未知参数 $(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$，按照“当参数等于其估计量时，总体矩等于相应的样本矩”的原则建立方程，

$$\text{即有}\begin{cases} v_1(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i, \\ v_2(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_{2,}\cdots,\hat{\theta}_m)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2, \\ \quad\cdots \\ v_m(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_{2,}\cdots,\hat{\theta}_m)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^m. \end{cases}$$

由上面的 m 个方程中，解出的 m 个未知参数（$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$）即为参数 $(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ 的矩估计量.

注 1：设 $g(\theta)$ 为 θ 的连续函数，若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的矩估计，则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的矩估计。

注 2：总体均值和方差的矩估计分别为样本均值和样本二阶中心矩。

2．最大似然估计法

（1）思想

一般说，事件 A 发生的概率与参数 $\theta\in\Theta$ 有关，θ 取值不同，则 $P(A)$ 也不同。因而应记事件 A 发生的概率为 $P(A|\theta)$. 若 A 发生了，则认为此时的 θ 值应是在 Θ 中使 $P(A|\theta)$ 达到最大的那一个。这就是极大似然思想。

（2）步骤

写出似然函数：$L(\theta)=L(x_1,x_2,...,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$；

写出对数似然函数 $\ln L(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta)$；

求解似然方程组 $\dfrac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=0,$

若该方程有解，则其解就是 $\hat{\theta}_{MLE}=\hat{\theta}_{MLE}(X_1,X_2,..,X_n).$

注：设 $g(\theta)$ 具有单值反函数，若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的最大似然估计，则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的最大似然估计。

三、区间估计（仅数一）

1、定义

定义 1（置信区间）：$P(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2)=1-\alpha,$

则称 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 为参数 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 分别称为置信下限和置信上限。

2、单正态总体均值的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,...,X_n)$ 是来自总体 X 的一个样本，μ 未知

（1）σ^2 已知时，μ 的置信区间估计

参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}),$$

其中 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 为标准正态分布的上侧 $\frac{\alpha}{2}$ 分为点。

（2）σ^2 未知时，μ 的置信区间估计

参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}),$$

其中 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 为自由度为 $n-1$ 的 t 分布的上侧 $\frac{\alpha}{2}$ 分为点。

3、单正态总体方差的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,...,X_n)$ 是来自总体 X 的一个样本，σ^2 未知，

（1）μ 已知时，σ^2 的置信区间估计

参数 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right).$

其中 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 和 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 分别为自由度为 n 的 χ^2 分布的上侧 $\frac{\alpha}{2}$ 和 $1-\frac{\alpha}{2}$ 分为点。

（2）μ 未知时，σ^2 的置信区间估计

参数 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right),$

其中 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 和 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 分别为自由度为 n 的 χ^2 分布的上侧 $\frac{\alpha}{2}$ 和 $1-\frac{\alpha}{2}$ 分为点。

【核心考点】矩估计法与最大似然估计法

例 1.1：设箱子中有 100 个球，只有红球和白球，现从箱子中有放回地取 6 个球，若出现红球记 X 为 1，出现白球记 X 为 0，得观察值：1, 1, 0, 1, 1, 1，分别用矩估计和极大似然估计法估计红球个数 r

例 1.2：设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-(x-\theta)}, & x>\theta, \\ 0, & x\le\theta \end{cases},$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，求参数 θ 的矩估计量

例 1.3：设 $X_1,\mathrm{K}\ ,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

θ 未知，$\theta>0$，求 θ 的极大似然估计

例 1.4：设总体 X 的分布密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & x\le\theta \end{cases}$$

$X_1,\mathrm{K}\ ,X_n$ 为 X 的简单随机样本，求：

（1）θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$；（2）考察 $\hat{\theta}$ 关于 θ 的无偏性；

（其中第 2 小问仅数一）

例 1.5（2018-13）：设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}，\quad -\infty<x<+\infty$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$

（1）求 $\hat{\sigma}$

（2）求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$

第八章　假设检验（仅数一）

一、假设检验的基本思想、基本步骤和可能产生的两类错误

1、基本思想

假设检验的统计思想是：概率很小的事件在一次试验中可以认为基本上是不会发生的，即小**概率原理**.

为了检验一个假设 H_0 是否成立，我们先假定 H_0 是成立的．如果根据这个假定导致了一个不合理的事件发生，那就表明原来的假定 H_0 是不正确的，我们**拒绝接受** H_0；如果由此没有导出不合理的现象，则不能拒绝接受 H_0，我们称 H_0 是**相容**的.

这里所说的小概率事件就是事件｛　$K\in R$　｝，其概率就是**检验水** α，通常我们取 $\alpha=0.05$，有时也取 0.01 或 0.10.

2、假设检验的基本步骤

3、假设检验的两类错误

假设检验的依据是人们根据经验而普遍接受的一条原则：小概率事件在一次试验中很难发生．但是很难发生不等于决不发生．因而，假设检验所作出的结论有可能是错误的．假设检验的错误可以分成两类：

（Ⅰ）当 H_0 为真时，而样本值却落入了 V(否定域)，按照我们规定的检验法则，应当否定 H_0．这时，我们把客观上 H_0 成立判为 H_0 不成立(即否定了真实的假设)，称这种错误为“以真当假”的错误或第一类错误，记 α 为犯此类错误的概率，即

$$P\{\text{否定 } H_0 | H_0 \text{为真}\}=\alpha .$$

（Ⅱ）当 H_1 为真时，而样本值却落入了 $\bar{V}$（相容域），按照我们规定的检验法则，应当接受 H_0．这时，我们把客观上 H_0 不成立判为 H_0 成立(即接受了不真实的假设)，称这种错误为“以假当真”的错误或第二类错误，记 $\tilde{\beta}$ 为犯此类错误的概率，即

$$P\{\text{接受 } H_0 | H_1 \text{为真}\}=\beta$$

人们当然希望犯两类错误的概率同时都很小．但是，当容量 n 一定时，α 变小，则 β 变大；相反地，β 变小，则 α 变大．取定 α 要想使 β 变小，则必须增加样本容量.

二、单正态总体的均值和方差的假设检验

设 x_1，x_2，…，x_n为总体 $X\sim N(\mu，\sigma^2)$的一个样本，在检验水平为α下，我们来检验它的均值、方差是否与某个指定的取值有关．可分为单正态总体均值和方差的假设检验．

$$\text{单正态总体假设检验}\begin{cases}\text{均值的假设检验}\begin{cases}\text{已知方差}\\ \text{未知方差}\end{cases}\\ \text{方差的假设检验}\end{cases}$$

【核心考点】正态总体参数的假设检验

例 1.1：某洗衣粉厂用自动包装机进行包装，正常情况下包装量$X\sim N(\mu，\sigma^2)$，现随机取 25 袋洗衣粉，测得平均重量$\overline{x}=501.5g$，样本标准差$s=2.5g$

（1）可否认为$\mu=500\ \ (\alpha=0.05)$

（2）可否认为$\sigma^2>6\ \ (\alpha=0.1)$