# EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS

## Vectores y matrices

### Operaciones básicas con vectores: suma, resta, multiplicación con escalar y producto vectorial

#### Ejercicio resuelto

Consideremos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -14 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 32 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 55 \end{bmatrix}$$

Las siguientes operaciones lineales han sido desarrolladas como se describen en el documento usado para la primera videoconferencia:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ 35 \end{bmatrix}, \qquad 2.5\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 17.5 \\ 22.5 \\ 137.5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -8 \\ -18 \\ 78 \end{bmatrix}$$

Así mismo, el producto vectorial (denotado por ‹**a**, **b**›) entre los vectores anteriores, vendrá dado por:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -14 \times 6 + 8 \times 0 + 3 \times 32 = 12$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = 139, \qquad \langle \mathbf{bc} \rangle = 1802$$

#### Ejercicio propuesto

Dados los siguientes vectores:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Encuentra:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}, \qquad \mathbf{a}-2\mathbf{d}+3\mathbf{e}, \qquad 4\mathbf{e}-4\mathbf{b}+\mathbf{c}$$

## Norma de un vector

### Ejercicio resuelto

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}6\\-6\\7\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}4\\-10\\0\\6\end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{9+16}=5$$
$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{36+36+49}=11$$
$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{16+100+0+36}=\sqrt{152}\approx 12.33$$

### Ejercicio propuesto

Calcula la norma de los vectores del ejercicio anterior propuesto, es decir:

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}-14\\8\\3\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}6\\0\\32\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}7\\9\\55\end{bmatrix}$$

## Operaciones básicas con Matrices: Transpuesta, suma, resta, multiplicación con escalar y producto matricial

### Ejercicio resuelto

Consideremos las siguientes matrices:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -9\\7 & 2 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}14 & 6 & 5\\13 & 18 & 3\\7 & 21 & 44\end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\c_{21} & c_{22}\\c_{31} & c_{32}\end{bmatrix}$$

Las transpuestas de estas matrices son:

$$\mathbf{A}'=\begin{bmatrix}1 & 7\\3 & 2\\-9 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}'=\begin{bmatrix}14 & 13 & 7\\6 & 18 & 21\\5 & 3 & 44\end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}'=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{21} & c_{31}\\c_{12} & c_{22} & c_{32}\end{bmatrix}$$

Resolvamos ahora una suma y una resta de matrices siguiendo la metodología del documento usado en la primera videoconferencia:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & 6 & 5 \\ 13 & 18 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 9 & -4 \\ 20 & 20 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 26 \\ 14 & -31 \\ 48 & 19 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 23 \\ 36 & 17 \\ -52 & 89 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -22 & -48 \\ -100 & -70 \end{bmatrix}$$

A continuación, la multiplicación por un escalar:

$$3 \times \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 7 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 0 & 21 \\ 24 & -15 \end{bmatrix}$$

Ahora resolveremos la multiplicación entre matrices. ¡Recuerda que el número de columnas de la primera matriz debe ser igual que el número de filas de la segunda! Consideremos las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 9 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -2 & 0 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 12 \times 7 + 3 \times (-2) + 6 \times 1 & 12 \times 8 + 3 \times 0 + 6 \times 11 \\ 9 \times 7 + (-1) \times (-2) + (-4) \times 1 & 9 \times 8 + (-1) \times 0 + (-4) \times 11 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 84 & 162 \\ 61 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 1 \times 7 + (-1) \times (-2) + 0 \times 1 & 1 \times 8 + (-1) \times 0 + 0 \times 11 \\ (-1) \times 7 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 & (-1) \times 8 + 1 \times 0 + 1 \times 11 \\ 0 \times 7 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 & 0 \times 8 + 1 \times 0 + 1 \times 11 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -8 & 3 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 9 \\ 10 & -14 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C'C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{CC'} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

### Ejercicio propuesto

Dadas las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 13 \\ 7 & -8 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 17 & 19 \\ 21 & 12 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Calcula:

$i.\ \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad ii.\ \mathbf{B}(\mathbf{D}+\mathbf{G}') \qquad iii.\ \mathbf{G}\mathbf{F}'$

$iv.\ \mathbf{G}\mathbf{D} \qquad v.\ \mathbf{E}\mathbf{F} \qquad vi.\ \mathbf{B}'\mathbf{C}'$

## Extra para completar las lecturas complementarias: Autovalores y autovectores.

### Ejercicio resuelto

Consideremos la siguiente matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular los autovalores, debemos plantear el determinante que nos da el polinomio característico:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \left| \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

El polinomio será el que iguale el determinante a cero:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0$$

Por lo que obtenemos los autovalores:

$$\lambda_1 = 7, \qquad \lambda_2 = -3$$

Ahora intentaremos encontrar los autovectores que, recordemos, son aquellos que satisfacen:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Por tanto, para el primer autovalor ($\lambda_1$=7), tendremos:

$$\begin{bmatrix} 3-7 & 6 \\ 4 & 1-7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} -4x_{11} + 6x_{12} &= 0 \\ 4x_{11} - 6x_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Como vemos, ambas ecuaciones son la misma, pero tenemos dos variables (coordenadas del autovector) desconocidas. De esta manera, podemos elegir una de las coordenadas arbitrariamente y asignar la segunda mientras cumpla la restricción marcada por las ecuaciones. Por ejemplo, elijamos $x_{12}$=2, por lo que $x_{11}$ será 3 para satisfacer la ecuación y, el autovector asociado al primer autovalor $\lambda_1$=7 es:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Si aplicamos el mismo procedimiento para el segundo autovalor $\lambda_2$=-3 encontramos que, de las ecuaciones resultantes, obtenemos la condición

$$x_{21} = -x_{22}$$

Por lo que de nuevo tenemos infinitas soluciones, ya que, para cada valor de una coordenada, la otra coordenada sería el mismo valor en negativo. Si le asignamos, por ejemplo, $x_{22}$=1, el autovector asociado a $\lambda_2$ será:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Ejercicio propuesto

No evaluaré este ejercicio, pero si queréis hacerlo para practicar y enviármelo, mucho mejor. Encuentra, los autovalores y autovectores de la siguiente matriz **C**:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

## Cálculo: límites, derivadas e integrales. Vectores gradientes y matriz hessiana

Para el cálculo de derivadas necesitaréis la tabla de derivadas simples que os adjunto. Entiendo que todos y todas sabéis derivar funciones de una variable e integrarlas, por lo que me centraré en ejercicios sobre vector gradiente y matriz hessiana.

**Tabla de derivadas:**

| | |
|---|---|
| $y = c$ | $y' = 0$ |
| $y = bx$ | $y' = b$ |
| $y = x^n$ | $y' = nx^{n-1}$ |
| $y = \ln x$ | $y' = \frac{1}{x}$ |
| $y = a^x$ | $y' = a^x \ln a$ |
| $y = e^x$ | $y' = e^x$ |
| $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ |
| $y = \cos x$ | $y' = -\sin x$ |
| $y = u(x) + v(x) + w(x)$ | $y' = u' + v' + w'$ |
| $y = f(u), \quad u = \varphi(x)$ | $y' = f'(u)\varphi'(x)$ |
| $y = u(x)v(x)$ | $y' = u'v + v'u$ |
| $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ | $y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ |

donde *c*, *b*, *n* y *a* son escalares, es decir, constantes. y $a>0$

Ejemplos de derivadas:

$$y = x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Para la función raíz cuadrada:

$$y = x^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

Si hay varias funciones implicadas mediante una suma:

$$y = 2 + 5x - x^{1/2}$$

$$y' = 5 - \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

Con este breve recordatorio, entraremos en las derivadas parciales y los gradientes y Hessianas:

## Gradientes

### Ejercicio resuelto

A partir de la siguiente función de tres variables:

$$f(x, y, z) = xz - 2xy + y^2 + 6yz^2$$

El vector gradiente será el vector columna cuya primera coordenada será la derivada de la función respecto a *x*, considerando *z* e *y* como constantes, mientras que la segunda mostrará la derivada respecto a *y* considerando *x* y *z* como constantes. La tercera coordenada muestra la derivada respecto *z* considerando *x* e *y* constantes:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} z - 2y \\ -2x + 2y + 6z^2 \\ x + 12yz \end{bmatrix}$$

Para la siguiente función:

$$y = x_1^2 x_2^2$$

el vector gradiente será:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2^2 \\ 2x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$$

## Hessianas

La hessiana es la matriz que contiene las derivadas parciales de segundo orden. El elemento $a_{ij}$ de la matriz hessiana es el elemento que contiene la derivada respecto a la variable $x_j$ de la derivada de $f(\mathbf{x})$ respecto a la variable $x_i$, es decir, incluye las derivadas de segundo orden sobre cada una de las derivadas de primer orden que componen el vector gradiente. Por decirlo de alguna manera, cada fila i del Hessiano es el vector gradiente del componente i del vector gradiente original. En los ejercicios resueltos se van a ver muy claramente.

### Ejercicio resuelto

Si usamos el último ejemplo del gradiente, la hessiana sería:

$$y = x_1^2 x_2^2$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_2^2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 2x_1^2 \end{bmatrix}$$

Mientras que para la función:

$$f(x, y) = x \sin^2 y$$

El gradiente y la hessiana serían:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \sin^2 y \\ x \sin 2y \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & \sin 2y \\ \sin 2y & 2x \cos 2y \end{bmatrix}$$

### Ejercicios propuestos (gradiente y hessiana)

Encuentra los gradientes y matrices hessianas de las siguientes funciones:

$$u = x^2 + 2xy + y^3$$

$$u = e^{x^2+y^2+z^2}$$

$$u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

# Optimización

## Optimización sin restricciones de una variable

### Ejercicio resuelto

Si queremos encontrar el máximo de la siguiente función, no sujeta a restricciones:

$$y = -2x^2 + 3$$

Deberemos calcular su derivada e igualarlo a cero (en máximos y mínimos las derivadas son cero)

$$-4x = 0$$

Por lo que el valor de x es cero, que conlleva un valor de la función objetivo (y) igual a 3.

Si la segunda derivada es negativa, será un máximo, mientras que si es positiva será un mínimo:

$$y'' = -4 < 0$$

por lo que x=0 es un máximo.

Si queremos encontrar el mínimo de la función

$$y = 5x^2 - 10x + 8$$

De nuevo, debemos derivar e igualar a cero:

$$10x - 10 = 0$$

Obteniendo

$$x = 1, \qquad y = 3$$

que efectivamente es un mínimo pues la segunda derivada es positiva:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 10 > 0$$

Si por el contrario tenemos esta función:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$$

derivando e igualando a cero:

$$3x^2 - 18x + 15 = 0$$

Que al ser una ecuación cuadrática tiene dos soluciones:

$$x_1 = 1, \qquad f(x_1) = 10$$

$$x_2 = 5, \qquad f(x_2) = -22$$

La segunda derivada viene dada por:

$$f''(x) = 6x - 18$$

Que es negativa en x=1 y positiva en x=5 (puntos obtenidos antes al igualar la derivada a cero)

$$f''(1) = -12, \qquad f''(5) = 12$$

De esta manera, x=1 será un mínimo y x=5 un máximo.

## Ejercicio propuesto

Encuentra los extremos (máximos y/o mínimos) de las siguientes funciones:

$$y = x^2 - 2x + 5, \qquad ii. \quad y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 2x + 1,$$

La idea es similar, pero usando gradiente y hessianas en lugar de derivadas y derivadas de segundo orden

## Ejercicio resuelto

Encontremos los extremos de la siguiente función:

$$z = (x-1)^2 + (y-3)^2 - 5$$

El gradiente es:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y-3)$$

Que al igualar a cero y despejar x e y, obtenemos:

$$x = 1, \qquad y = 3, \qquad z = -5$$

Las segundas derivadas son:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$$

Que forman la siguiente matriz hessiana:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La cual es definida positiva y, por tanto, el mínimo está formado por el vector (1, 3)

## Ejercicio propuesto

Encuentra los extremos de esta función y determina si son máximos o mínimos:

$$z = -2x^2 + xy - y^2 + 3x + y + 6$$

## Ejercicio resuelto

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\max\ z = xy \\ &\text{s.t.}\ \ x + y = 12 \end{aligned}$$

Usando la teoría lagrangiana, podríamos reformularlo como:

$$L = xy + \lambda(x + y - 12)$$

Derivando respecto a las variables (x e y) y el multiplicador de lagrange (λ), obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} &y + \lambda = 0 \\ &x + \lambda = 0 \\ &x + y - 12 = 0 \end{aligned}$$

Obteniendo los siguientes valores de las variables, el multiplicador y la función objetivo:

$$x = y = 6, \qquad xy = 36$$

$$\lambda = -6$$

## Ejercicio propuesto:

Trata de resolver el siguiente problema con la restricción adicional de *x*, *y*≥0

$$\min z = (x-2)^2 + 2(y-5)^2 - 7 \qquad \text{s.t.} \qquad x + y = 12$$
$$\max z = (x-2)^2 + 2(y-5)^2 - 7 \qquad \text{s.t.} \qquad x + y = 12$$