Probabilidad

1. Experimentos aleatorios

Llamamos experimento a cualquier proceso que genera un conjunto de datos. En numerosas ocasiones, los resultados de un experimento dependen del azar, no siendo posible predecir el resultado.

Definición 1.1 *Un experimento se dice que es* **aleatorio** *cuando se puede repetir en las mismas condiciones, sus posibles resultados son conocidos y el resultado de cada prueba depende del azar.*

Un ejemplo de experimento aleatorio es el lanzamiento de un dado.

2. Espacio muestral, sucesos, tipos de sucesos

Definición 2.1 *Denominaremos* **espacio muestral** (Ω) *al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.*

Ejemplo 1: Lanzar un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Ejemplo 2: Número de correos electrónicos que recibe una persona a lo largo de una mañana, $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.
Ejemplo 3: Tiempo de vida de un ordenador, $\Omega = \{d \geq 0\} = [0, \infty);$.

En los ejemplos anteriores observamos que los espacios muestrales pueden ser **discretos** o **continuos**.

Definición 2.2 *Un* **suceso** *es cualquier subconjunto del espacio muestral.*

Ejemplo 1: Sea A= sacar un número par, $A = \{2, 4, 6\}$.
Ejemplo 2: Sea A= que se reciban menos de 8 correos electrónicos en una mañana, $A = \{0, 1, 2, .., 6, 7\}$.
Ejemplo 3: Sea A= que un ordenador dure menos de 5 años, $A = [0, 5)$.
Mediante $\mathcal{P}(\Omega)$ denotaremos al conjunto de todos los posibles sucesos, es decir, al conjunto de todos los posibles subconjuntos de Ω.

Operaciones con sucesos

Definición 2.3

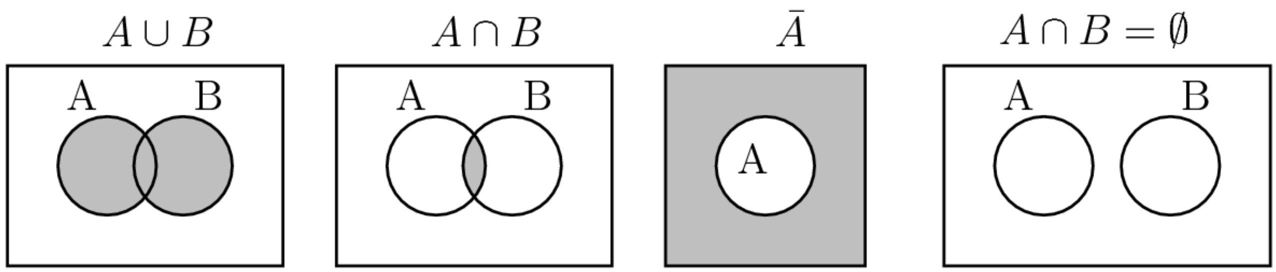
- *Dados dos sucesos A y B se define el suceso $A \cup B$ (***unión***) como aquel que ocurre cuando ocurre A ó B.*

- *Dados dos sucesos A y B se define el suceso $A \cap B$ (***intersección***) como aquel que ocurre cuando ocurren A y B.*

- *Dado un suceso A se define el* **complementario** *de A, y se denota por $\bar{A}$ (también A^c), como el conjunto formado por los elementos del espacio muestral que no están en A.*

- *Dos sucesos A y B se dice que son* **disjuntos** *o* **excluyentes** *si no pueden ocurrir a la vez, es decir, si $A \cap B = \emptyset$.*

En los siguientes gráficos se visualizan las operaciones con sucesos anteriormente definidas, y cuando dos sucesos son excluyentes.



Propiedades

• Propiedades distributivas:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)\,.$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)\,.$$

• Complementario de la unión y de la intersección:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\,.$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}\,.$$

3. Probabilidad. Propiedades

La probabilidad va a ser una función de conjuntos que a cada suceso le va a asignar un número que nos dé idea de la posibilidad de que ocurra dicho suceso. Nos vamos a basar en el concepto frecuentista de probabilidad, que considera la probabilidad de un suceso como el valor en torno al cual se estabilizan las frecuencias relativas de dicho suceso, calculadas éstas cuando se realiza un número elevado de pruebas. Por ejemplo, si varias personas lanzan cada una de ellas muchas veces una moneda no trucada, las frecuencias relativas del suceso “obtener cara”variarán de una persona a otra, pero todas ellas oscilarán en torno a 0.5.

Definición 3.1 *Una función $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ se dirá que es una* **probabilidad** *si cumple:*

(P1) $0 \leq P(A) \leq 1$, *para cualquier suceso* A.

(P2) $P(\Omega) = 1$.

(P3) *Dados* A *y* B, *dos sucesos excluyentes, se tiene que* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Propiedades de la probabilidad

(a) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Como consecuencia $P(\emptyset) = 0$.

(b) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, para cualesquiera A y B.

(c) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

(d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ para cualesquiera A y B. Como consecuencia $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

(e) Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son sucesos excluyentes, es decir, si $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

4. Cálculo de probabilidades en espacios muestrales finitos

En este apartado veremos cómo calcular la probabilidad de un suceso cuando tengamos un espacio muestral finito, $\Omega = \{w_1, .., w_n\}$, y "conozcamos" las probabilidades de cada uno de sus elementos $\{P(\{w_i\}),\ i = 1, .., n\}$.

Nótese que las probabilidades $\{P(\{w_i\}),\ i = 1, .., n\}$ han de verificar:

(a) $0 \leq P(\{w_i\}) \leq 1$, $i = 1, .., n$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} P(\{w_i\}) = 1$, pues $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \{w_i\}$, con $\{w_i\}$ excluyentes, y por tanto

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{w_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{w_i\}) \ .$$

En las condiciones anteriores, para cualquier suceso A, la **probabilidad de A** viene dada por:

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} P(\{w_i\}) \ .$$

Caso particular de gran importancia: cuando todos los elementos del espacio muestral sean equiprobables, es decir, cuando

$$P(\{w_i\}) = \frac{1}{n} \ , \quad i = 1, .., n.$$

En este caso se tiene que

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles},$$

lo que se conoce como **Regla de Laplace**.

EJEMPLO : Si lanzamos un dado equilibrado, entonces $P(\{i\}) = 1/6$, $i = 1, \ldots, 6$.
Sea A:"sacar un número par". Entonces $P(A) = 3/6 = 1/2$.

5. Probabilidad condicionada

Definición 5.1 *Dado un suceso B con $P(B) > 0$, se define la* **probabilidad de un suceso A condicionado a B**, *como:*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

Propiedades:

(a) Dado un suceso B con $P(B) > 0$, $P(\cdot/B)$ es una probabilidad:

  a) $0 \leq P(A/B) \leq 1$

  b) $P(\Omega/B) = 1$

  c) Dados A, C, dos sucesos excluyentes, se tiene que $P(A \cup C/B) = P(A/B) + P(C/B)$.

(b) De la definición de probabilidad condicionada se deduce que $P(A \cap B) = P(A/B)P(B)$.

(c) En general se tiene que (**regla de la multiplicación**):

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)....P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_{n-1}).$$

EJEMPLO : Se tiene una urna con 3B, 2N. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento, calcular las probabilidades de extraer: las dos bolas blancas, la primera blanca y la segunda negra, la primera negra y la segunda blanca, y las dos bolas negras.

Sean B_1= la primera bola extraida es blanca.
B_2= la segunda bola extraida es blanca.
N_1= la primera bola extraida es negra.
N_2= la segunda bola extraida es negra.

Entonces,

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2/B_1) = \frac{3}{5}\frac{2}{4} \qquad P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P(N_2/B_1) = \frac{3}{5}\frac{2}{4}$$
$$P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P(B_2/N_1) = \frac{2}{5}\frac{3}{4} \qquad P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2/N_1) = \frac{2}{5}\frac{1}{4}.$$

Observación. $P(A/B)$ no tiene por qué ser igual a $P(A)$. De hecho se tienen las siguientes posibilidades:

- $P(A/B) > P(A)$, se dice que B favorece la aparición de A.
- $P(A/B) < P(A)$, se dice que B no favorece la aparición de A.
- $P(A/B) = P(A)$, **caso particular** que estudiamos en la siguiente sección con más detalle.

6. Independencia de sucesos

Definición 6.1 *Dos sucesos A y B son* **independientes** *si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ejemplo : Consideremos la siguiente tabla

	Varones	Mujeres	
Usan software libre	25	30	55
No usan software libre	50	60	110
	75	90	N=165

Definimos los sucesos A= el individuo usa software libre y B=elegir una mujer,

$$P(A) = \frac{55}{165} = \frac{1}{3}, \qquad P(B) = \frac{90}{165} = \frac{6}{11}$$

Consideramos $A \cap B$

$$P(A \cap B) = \frac{30}{165} = \frac{2}{11}$$

Comprobamos que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad ya \quad que \quad \frac{2}{11} = \frac{1}{3}\,\frac{6}{11}$$

Observación. La definición que se ha dado para caracterizar la independencia de dos sucesos A y B, es equivalente a que

$$P(A/B) = P(A).$$

Podemos comprobarlo en el ejemplo: $P(A/B) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

Propiedad: Si dos sucesos A y B son independientes, entonces también lo son los siguientes sucesos:

- $\overline{A}$ y B.
- A y $\overline{B}$.
- $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

7. Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes

Definición 7.1 *Diremos que $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ forman un* **sistema completo de sucesos** *si:*

(a) Son excluyentes, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$.

(b) Su unión es el espacio muestral, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Nótese que si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ forman un sistema completo de sucesos entonces se tiene que

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Teorema de la probabilidad total. Dados $\{A_1, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos, con $P(A_i) > 0$ para $i = 1, .., n$, y S otro suceso cualquiera. Se tiene

$$P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(S/A_i)P(A_i)\ .$$

Ejemplo : En una red han entrado virus de 3 tipos: el tipo A, al que corresponden un 35 %, el tipo B, que se presenta en un 50 %, y el tipo C, en un 15 %. El antivirus de que se dispone detecta un 20 % de los virus tipo A, un 50 % de los de tipo B y un 70 % de los de tipo C. Calcular la probabilidad de que el antivirus detecte un virus.

Sistema completo de sucesos: $\{A_1 = A, A_2 = B, A_3 = C\}$,

$$P(A_1) = 0.35, \quad P(A_2) = 0.50, \quad P(A_3) = 0.15$$

Sea $S =$ el antivirus detecta un virus.

$$\begin{aligned} P(S) = P(S/A_1)P(A_1) + P(S/A_2)P(A_2) + P(S/A_3)P(A_3) = \\ = 0.2\ 0.35 + 0.5\ 0.5 + 0.7\ 0.15 = 0.425 \end{aligned}$$

Teorema de Bayes. Dados $\{A_1, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos, con $P(A_i) > 0$ para $i = 1, .., n$, y S otro suceso cualquiera. Se tiene

$$P(A_j/S) = \frac{P(S/A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(S/A_i)P(A_i)}$$

Ejemplo : Si el antivirus detectó un virus, calcular la la probabilidad de que éste sea de tipo C.

$$P(A_3/S) = \frac{P(S/A_3)P(A_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(S/A_i)P(A_i)} = \frac{0.7\ 0.15}{0.425} = 0.2470588235$$