# Ejercicios Propuestos

Nicole Guzmán Cleto

February 24, 2019

## 1 Vectores y Matrices

### 1.1 Ejercicios Propuestos

**Dados los vectores** $a = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix}$ $c = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

**Encuentre** Primero debemos encontrar las variables **d** y **e**, para ello utlizaremos las ecuacion 2 y 3, por el método de sustitución y el de eliminación, encontraremos los valores de dichas variables.
Primero, con el método de eliminación,

$$a - 2d + 3e = 0 \tag{1}$$
$$-4b + c + 4e = 0 \tag{2}$$

$$2d - 3e = a \tag{3}$$
$$4e = 4b - c \tag{4}$$

Mulplicamos para proceder a la eliminación de la variable **e**:

$$(4)2d - 3e = a \tag{5}$$
$$(3)4e = 4b - c \tag{6}$$

$$-12e + 8d = 4a \tag{7}$$
$$12e = 12b - 3c \tag{8}$$

Luego de la eliminacación, obtendremos:

$$8d = 4a + 12b - 3c$$

$$d = (1/2a + 3/2b - 3/8c)$$

Al sustituir, podemos tener que:
d =

$$1/2 \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix} - 3/8 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.875 \\ 26.5 \\ 5.875 \end{bmatrix}$$

Ahora, para encontrar el valor de **e**, y partiendo de que $0 + 0 = 0$, tomamos las operaciones anteriores y sumamos:

$$2d - 3e = a \tag{9}$$
$$4e = 4b - c \tag{10}$$

teniendo como resultado que **-7e** $= a - 4b + c - 2d$, así que, luego de sustituir las variables por sus valores, obtendremos:

$$-7e = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 87/8 \\ 53/2 \\ 47/8 \end{bmatrix}$$

Y decimos que:

$$e = \begin{bmatrix} 5.25 \\ 14 \\ 3.25 \end{bmatrix}$$

Ahora, con todos los valores, tenemos que nuestros vectores son: $a = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix}$ $c = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$d = \begin{bmatrix} 87/8 \\ 53/2 \\ 47/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.875 \\ 26.5 \\ 5.875 \end{bmatrix}$ $e = \begin{bmatrix} 21/4 \\ 97/8 \\ 13/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.25 \\ 14 \\ 3.25 \end{bmatrix}$

1. $a + b + c$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. $a - 2d + 3e$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 87/8 \\ 53/2 \\ 47/8 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 21/4 \\ 97/8 \\ 13/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -45/8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. $-4b + c - 4e$

$$-4\begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 21/4 \\ 97/8 \\ 13/4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 17 \\ 69/2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

## 1.2 Norma de Vectores

**Calcula la norma de los vectores del ejercicio anterior**

$$a = \begin{bmatrix} -14 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 32 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 55 \end{bmatrix}$$

1. $a = \begin{bmatrix} -14 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

   $\left\|\sqrt{14^2 + 8^2 + 3^2}\right\| = \sqrt{196 + 64 + 9} = \sqrt{269} \approx 16.40$

2. $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 32 \end{bmatrix}$

   $\left\|\sqrt{6^2 + 0^2 + 32^2}\right\| = \sqrt{36 + 0 + 1024} = \sqrt{1060} \approx 32.56$

3. $c = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 55 \end{bmatrix}$

   $\left\|\sqrt{7^2 + 9^2 + 55^2}\right\| = \sqrt{49 + 81 + 3025} = \sqrt{3155} \approx 56.17$

## 1.3 Multiplicacion de vectores

**Dadas las siguientes matrices**

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 13 \\ 7 & -8 & -10 \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} 17 & 19 \\ 21 & 12 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Transpuestas:

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} B^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} C^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 14 & -8 \\ 13 & -10 \end{bmatrix} E^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$F^T = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} G^T = \begin{bmatrix} 17 & 21 & 6 \\ 19 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

1. $A(B + C)$

   $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3+5 & 0+4 \\ 0-3 & -2+11 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5*8) + (-3*-3) & (5*4) + (-3*9) \\ (0*8) + (3*-3) & (0*4) + (3*9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40+9 & 20-27 \\ 0-9 & 0+27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & -7 \\ -9 & 27 \end{bmatrix}$$

2. $B(D + G^T)$

$$D + G^T = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 13 \\ 7 & -8 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17 & 21 & 6 \\ 19 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$D + G^T = \begin{bmatrix} 12+17 & 14+21 & 13+6 \\ 7+19 & -8+12 & -10+8 \end{bmatrix}$$

$$D + G^T = \begin{bmatrix} 29 & 35 & 19 \\ 26 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B(D + G^T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 29 & 35 & 19 \\ 26 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3*29)+0 & (3*35)+0 & (3*19)+0 \\ (-2*26) & (-2*4) & (-2*-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87 & 105 & 57 \\ -52 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

3. $GF^T$

$$\begin{bmatrix}17 & 19\\21 & 12\\6 & 8\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}2 & -6 & 4\\7 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}167 & -45 & 87\\126 & -90 & 96\\68 & -12 & 32\end{bmatrix}$$

4. $GD$

$$\begin{bmatrix}17 & 19\\21 & 12\\6 & 8\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}12 & 14 & 13\\7 & -8 & -10\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}337 & 86 & 31\\336 & 198 & 153\\128 & 20 & -2\end{bmatrix}$$

5. $EF$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\7 & 2 & -7\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}2 & 7\\-6 & 3\\4 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 11\\-2 & 54\end{bmatrix}$$

6. $B^TC^T$

$$\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & -2\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}5 & -3\\4 & 11\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}15 & -9\\-8 & -22\end{bmatrix}$$

## 1.4 Autovalores y Autovectores

**Encuentra, los autovalores y autovectores de la siguiente matriz**

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Autovalores:

$$(C - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 5$

Autovector:

Con $\lambda = 2$

(C - $\lambda I) = \begin{bmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 5-2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplicando

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$3x_{12} = 0$; $x_{12} = 0$

x$_{11} = 0$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con $\lambda = 5$

$$(C - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2-5 & 0 \\ 0 & 5-5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-3x_{11} = 0$

$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

## 2 Gradientes y Matrices Hessianas

**Encuentra los gradientes y matrices hessianas de las siguientes funciones**

1. $u = x^2 + 2xy + y^3$

   Vector Gradiente

$$\nabla u = \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 2x + 3y^2 \end{bmatrix}$$

Matrices Hessianas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x + 3y^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial xy} = 2 \qquad \frac{\partial u}{\partial yx} = 2$$
$$\frac{\partial u}{\partial^2 x} = 2 \qquad \frac{\partial u}{\partial^2 y} = 6y$$

$$\nabla^2 u = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6y \end{bmatrix}$$

2. $u = e^{x^2+y^2+z^2}$

   Vector Gradiente

$$\nabla u = \begin{bmatrix} 2xe^{x^2+y^2+z^2} \\ 2ye^{x^2+y^2+z^2} \\ 2ze^{x^2+y^2+z^2} \end{bmatrix}$$

   Matrices Hessianas

$$\partial xx = 2e^{x^2+y^2+z^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2+z^2} \qquad \partial xy = 4xye^{x^2+y^2+z^2} \qquad \partial xz = 4xze^{x^2+y^2+z^2}$$
$$\partial yx = 4xye^{x^2+y^2+z^2} \qquad \partial yy = 2e^{x^2+y^2+z^2} + 4y^2 e^{x^2+y^2+z^2} \qquad \partial yz = 4yze^{x^2+y^2+z^2}$$
$$\partial zx = 4xze^{x^2+y^2+z^2} \qquad \partial zy = 4yze^{x^2+y^2+z^2} \qquad \partial zz = 2e^{x^2+y^2+z^2} + 4z^2 e^{x^2+y^2+z^2}$$

$$\nabla^2 u = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{x^2+y^2+z^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2+z^2} & 4xye^{x^2+y^2+z^2} & 4xze^{x^2+y^2+z^2} \\ 4xye^{x^2+y^2+z^2} & 2e^{x^2+y^2+z^2} + 4y^2 e^{x^2+y^2+z^2} & 4yze^{x^2+y^2+z^2} \\ 4xze^{x^2+y^2+z^2} & 4yze^{x^2+y^2+z^2} & 2e^{x^2+y^2+z^2} + 4z^2 e^{x^2+y^2+z^2} \end{bmatrix}$$

3. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

   Vector Gradiente

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \end{bmatrix}$$

Matrices Hessianas

$$\partial xx = \frac{-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \partial xy = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \partial xz = \frac{-4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$
$$\partial yx = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \partial yy = \frac{-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \partial yz = \frac{-4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$
$$\partial zx = \frac{-4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \partial zy = \frac{-4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \partial zz = \frac{-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\nabla^2 u = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{-4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{-4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{bmatrix}$$

# 3 Máximos y Mínimos

**Encuentra los extremos (máximos y/o mínimos) de las siguientes funciones**

1. $y = x^2 - 2x + 5$

   $y' = 2x - 2$
   $0 = 2x - 2$
   $x = 1$
   $y = (1)^2 - 2(1) + 5 = 4$

   Puntos de inflexión: $x = 1 \;\; y = 4$

   $y'' = 2 > 0$
   Podemos afirmar que es un mínimo, pues su segunda derivada es positiva.

2. $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 2x + 1$

   $y' = x^2 - 6x + 2$
   $0 = x^2 - 6x + 2$

   Luego de pasar por la formula general, encontramos que:

$$x = 3 \pm \sqrt{7}$$

$$x_1 = 3-\sqrt{7} f(x_1) = \frac{\partial(3-\sqrt{7})^3}{\partial 3} - 3(3-\sqrt{7})^2 + 2(3-\sqrt{7}) + 1$$
$$x_1 = 0.97$$

$$x_2 = 3+\sqrt{7}$$
$$f(x_2) = \frac{\partial(3+\sqrt{7})^3}{\partial 3} - 3(3+\sqrt{7})^2 + 2(3+\sqrt{7}) + 1$$
$$x_2 \approx -118.97$$

La segunda derivada viene por:

$$y" = 2x - 6$$

Al sustituir por los valores de x, vemos que:

y$_1$" $= 2(3-\sqrt{7}) - 6; y_1" \approx -5.91$

$y_2" = 2(3+\sqrt{7}) - 6 \approx 353.91$

Y decimos que es positiva en $x = 3-\sqrt{7}$ y negativa en $x = 3+\sqrt{7}$

**Encuentra los extremos de esta función y determina si son máximos o mínimos**

1. $z = -2x^2 + xy - y^2 + 3x + y + 6$

   Gradiente: $\frac{z}{x} = -4x + y + 3$ $\frac{z}{y} = x - 2y + 1$

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{y+3}{4} \\ \frac{x+1}{2} \end{bmatrix}$$

Luego de las sustituciones corresponientes, obtenemos: $x = 1$ $y = 1$ $z = 8$
Segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

Matriz Hessiana:

$$\nabla^2 u = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Podemos decir que es definida negativa y, por ende, el máximo estará formado por el vector gradiente.

**Trata de resolver el siguiente problema con la restricción adicional de x, y** $\geq 0$

1. $minz = (x-2)^2 + 2(y-5)^2 - 7 \ \ s.t. x + y = 12$

   L = ( x -2 )$^2 + 2(y-5)^2 - 7 + \lambda(x + y - 12)$
   $\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-2) + \lambda = 0$
   $\frac{\partial L}{\partial y} = 4(y-5) + \lambda = 0$
   $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 12 = 0$
   $Resolviendoparaeliminara \lambda$ : 2x - 4 + $\lambda = 0$ $4y - 20 + \lambda = 0$

   Al cambiar de signo la segunda ecuación y reduciendo los términos: x = 2y + 8

   Sustituyendo a x en (x + y = 12), obtenemos: y = $20/3 \approx 6.67 x = 2(20/3) - 8 = 40/3 - 24/3 = 16/3 \approx 5.33 \lambda = -2(16/3) + 4 = -32/3 + 12/3 = -20/3 \approx -6.67$

2. $maxz = (x-2)^2 + 2(y-5)^2 - 7 \ \ s.t. x + y = 12$