Probabilidad y Variable aleatoria. Modelos de distribuciones

1. Concepto de variable aleatoria

El objetivo es introducir una herramienta que nos permita cuantificar los resultados de un experimento aleatorio. Para ello definimos una función del espacio muestral Ω en $\mathbb{R}$.

Definición 1.1 *Una **variable aleatoria (v.a.)** es una función del espacio muestral en $\mathbb{R}$, que transforma el resultado de un experimento en un número real,*

$$\begin{array}{rll} X: & \Omega \to & \mathbb{R} \\ & w \to & X(w) \in \mathbb{R} \end{array}$$

Ejemplo 1.1 *Lanzamos dos monedas. Sea $X =$"número de caras obtenidas en los dos lanzamientos".*

Ejemplo 1.2 *Lanzamos un dado dos veces. Podemos definir:*
$X =$"suma de los puntos obtenidos en los dos lanzamientos", es decir, $X(i,j) = i + j$.
$Y =$"diferencia en valor absoluto entre las puntuaciones obtenidas", $Y(i,j) = |i - j|$.
Nótese que sobre un mismo espacio muestral pueden definirse varias v.a.

<u>Operaciones con variables aleatorias</u> Sean X e Y variables aleatorias

- Suma (resta): $(X \pm Y)(w) = X(w) \pm Y(w)\ , \quad \forall w \in \Omega$.
- Producto: $(XY)(w) = X(w)Y(w)\ , \quad \forall w \in \Omega$.
- Cociente: $(X/Y)(w) = X(w)/Y(w)\ , \quad \forall w \in \Omega$ tal que $Y(w) \neq 0$.
- Si X es una v.a. y g es una función real entonces $g(X)$ es también una variable aleatoria.

Definición 1.2 *Sea X una variable aleatoria. Se define la **función de distribución** (FdD) de X como*

$$\begin{array}{rll} F: & \mathbb{R} \to & [0,1] \\ & x \to & F(x) = P(X \leq x) = P(\{w \in \Omega : X(w) \leq x\}) \end{array}$$

Propiedades 1.1 *F verifica las siguientes propiedades:*

(a) *F es no decreciente.*

(b) $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1.$

(c) *F es continua a la derecha, o sea,* $\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$

(d) $P(a < X \leq b) = P(\{w \in \Omega : a < X(w) \leq b\}) = F(b) - F(a).$

(e) $P(a < X) = P(\{w \in \Omega : a < X(w)\}) = 1 - F(a).$

Ejemplo 1.3 *Lanzamos dos monedas. Sea $X =$"número de caras obtenidas en los dos lanzamientos". En este caso $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$ con $P(w) = 1/4$, $\forall \omega \in \Omega$. La FdD es*

- *Si* $x < 0$, $\quad F(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$
- *Si* $0 \leq x < 1$, $\quad F(x) = P(X \leq x) = P(\{XX\}) = \frac{1}{4}$
- *Si* $1 \leq x < 2$, $\quad F(x) = P(X \leq x) = P(\{XX, XC, CX\}) = \frac{3}{4}$
- *Si* $x \geq 2$, $\quad F(x) = P(X \leq x) = P(\{XX, XC, CX, CC\}) = 1$

2. Variable aleatoria discreta

Definición 2.1 *Dada una v.a. X, se define el* ***rango*** *de dicha v.a. como el conjunto de valores que puede tomar X, el cual se denotará por $rg(X)$.*

Definición 2.2 *Se dice que una v.a. X es* ***discreta*** *si su rango es discreto, es decir, finito o infinito numerable. En este caso, el rango se denotará por $rg(X) = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$.*

Ejemplo 2.1 *Lanzamos dos dados y consideramos la v.a. X=suma de los resultados. En este caso, el conjunto de valores que toma la v.a. es*

$$rg(X) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Ejemplo 2.2 *Suponemos que buscamos la solución óptima de un problema utilizando un programa informático. Tomamos la v.a. X=número de iteraciones, hasta conseguir la solución óptima. Entonces*

$$rg(X) = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Definición 2.3 *Sea X una v.a. discreta con rango $rg(X) = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Se define la* ***función de probabilidad*** *(fdp) de X como*

$$P(X = x_i) = P(\{w \in \Omega \ \ tal \ \ que \ \ X(w) = x_i\}) \ , \qquad i \geq 1 \ .$$

Ejemplo 2.3 *Lanzamos dos monedas. Sea $X =$"número de caras obtenidas en los dos lanzamientos". En este caso $rg(X) = \{0, 1, 2\}$ y su fdp es*

- $P(X = 0) = P(\{XX\}) = \frac{1}{4}$
- $P(X = 1) = P(\{CX, XC\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $P(X = 2) = P(\{CC\}) = \frac{1}{4}$

Propiedades 2.1 *La función de probabilidad verifica:*

(a) $0 \leq P(X = x), \quad \forall x \in rg(X)$

(b) *Si* $x \notin rg(X)$, *entonces* $P(X = x) = 0$.

(c) $\displaystyle\sum_{i \,/\, x_i \in rg(X)} P(X = x_i) = 1.$

<u>CÁLCULO DE PROBABILIDADES</u> Dado $B \subseteq \mathbb{R}$, la probabilidad de que la v.a. X (discreta) tome valores en B viene dada por

$$P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} P(X = x_i) \ .$$

Ejemplo 2.4 *Sea* X *una v.a. discreta, con función de probabilidad:*

$X = x$	1	2	3
$P(X = x)$	0.2	0.3	0.5

$$P(X \in \{1,3\}) = P(X = 1) + P(X = 3) = 0.2 + 0.5 = 0.7$$
$$P(X \in [0, 2.5]) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0.2 + 0.3 = 0.5$$

Propiedades 2.2 *Sea* X *una v.a. discreta con* $rg(X) = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, *entonces:*

1. la FdD de X *es*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i \,/\, x_i \leq x} P(X = x_i) \ .$$

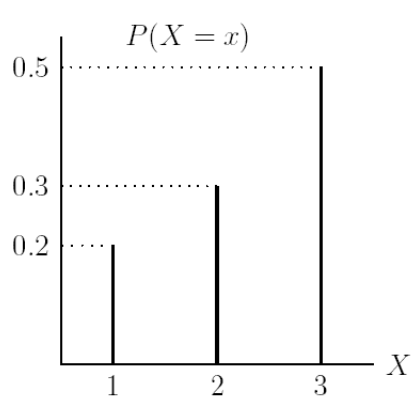
2. $F(x_i) = F(x_{i-1}) + P(X = x_i)$.

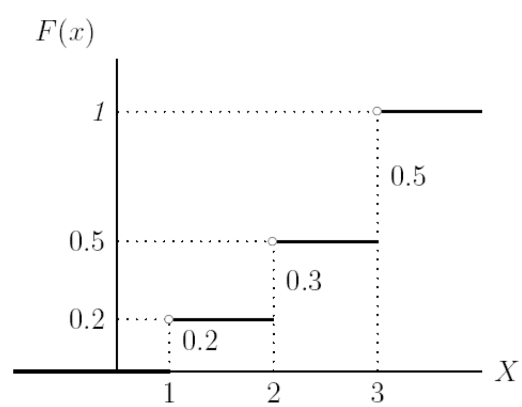
3. La función de distribución de una v.a. discreta es una función escalonada, los puntos en que se producen las discontinuidades de salto son los valores que toma la v.a. y la cuantía del salto es la $P(X = x_i)$, *es decir*

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i^-) = F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Ejemplo 2.5 *Calcular la función de distribución de* X *(ejemplo 2.4).*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \ x < 1 \\ P(X \leq 1) = P(X = 1) = 0.2, & si \ 1 \leq x < 2 \\ F(1) + P(X = 2) = 0.2 + 0.3 = 0.5, & si \ 2 \leq x < 3 \\ F(2) + P(X = 3) = 0.5 + 0.5 = 1, & si \ x \geq 3 \end{cases}$$





2.1. Características asociadas a una variable aleatoria discreta

Definición 2.4 *Se define la* ***esperanza matemática*** *(esperanza, media o valor esperado) de la v.a. discreta X como*

$$\mu = E\left(X\right) = \sum_i x_i \; P\left(X = x_i\right) \; .$$

Se define la ***varianza*** *de una variable aleatoria X como*

$$\sigma^2 = var(X) = E\left[\left(X-\mu\right)^2\right] = \sum_i (x_i-\mu)^2 \; P\left(X = x_i\right) \; ,$$

y la ***desviación típica*** *de X como $\sigma = +\sqrt{var(X)}$.*

Nota 2.1 *Tienen la misma interpretación que en distribuciones de frecuencias.*

Propiedades 2.3 *Se tiene que,*

(a) $E(c) = c$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

(b) $E(cX) = cE(X)$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

(c) $E(c_1X + c_2Y) = c_1E(X) + c_2E(Y), \quad \forall c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2$.

(d) $var\,(X) \geq 0$.

(e) $var\,(X) = 0 \Leftrightarrow \exists\, a/\ P(X = a) = 1$ *(es decir, X es una constante).*

(f) $var(a\,X + b) = a^2\,var(X)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

(g) En la práctica es útil la siguiente expresión:

$$var(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - E^2(X).$$

Ejemplo 2.6 *Calcular la media, varianza y desviación típica de X (ejemplo 2.4).*

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.5 = 2.3 \\ var(X) &= E(X^2) - E^2(X) = (1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.5) - (2.3)^2 = 5.9 - 5.29 = 0.61. \\ \sigma &= \sqrt{0.61} = 0.781. \end{aligned}$$

3. Variables aleatorias continuas

Definición 3.1 *Una* ***variable aleatoria (absolutamente) continua*** *es aquella con rango infinito no numerable.*

Propiedades 3.1 *Si X es una variable aleatoria continua, entonces*

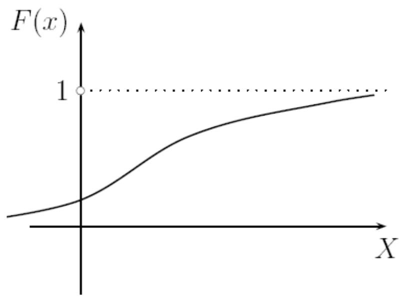
1. $F(x) = P(X \leq x)$ *es una función continua.*

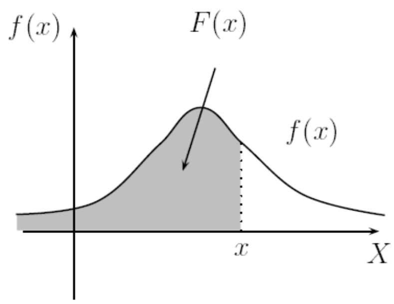
2. Existe una función $f(t) \geq 0\ \forall t$, *tal que*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

A la función f se le llama **función de densidad** *(fdd) de X.*

3. F es derivable salvo a lo sumo en un número discreto de puntos. En los puntos donde F sea derivable, se verifica $F'(x) = f(x)$.





Propiedades 3.2 *La función de densidad verifica*

1. $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

<u>CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN EL CASO CONTINUO</u>

(a) Si $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, entonces $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$.

(b) En general, dado B un subconjunto de $\mathbb{R}$, $\quad P(X \in B) = \int_B f(t)\,dt$.

(c) Si X es una v.a. continua, entonces $P(X = x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Como consecuencia:

(c.1) $P(X < x) = P(X \leq x)$,

(c.2) $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$,

pues estos conjuntos sólo difieren en un punto.

Ejemplo 3.1 *Sea X una v.a. continua con función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} x/6 & \textit{si } x \in (2,4) \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

(a) Calcula la FdD: Si $x \in (2,4)$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_2^x \frac{t}{6}\ dt = \left.\frac{t^2}{12}\right]_{t=2}^{t=x} = \frac{x^2}{12} - \frac{4}{12}$$

Si $x \in (-\infty, 2]$, $F(x) = 0$, y si $x \in [4, +\infty)$, $F(x) = 1$.

(b) Calcula $P[X \in (2.5, 3)] = P(2.5 < X < 3)$:

$$P[X \in (2.5,3)] = P(2.5 < X < 3) = \int_{2.5}^{3} \frac{t}{6}\ dt = \left.\frac{t^2}{12}\right]_{t=2.5}^{t=3} = \frac{3^2}{12} - \frac{2.5^2}{12} = 0.75 - 0.5208 = 0.2292$$

Teniendo en cuanta la propiedad (c.2), también puede calcularse como sigue:

$$P[X \in (2.5,3)] = P(2.5 < X < 3) = F(3) - F(2.5) = 0.4167 - 0.1875 = 0.2292$$

3.1. Características asociadas a una variable aleatoria continua

Definición 3.2 *Sea X una v.a. continua con fdd f. Se define la* ***esperanza matemática*** *(esperanza, media o valor esperado) de X como*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx.$$

Se define la ***varianza*** *de una v.a. X como,*

$$\sigma^2 = var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\ f(x)\ dx,$$

y la ***desviación típica*** *de X, como $\sigma = +\sqrt{var(X)}$.*

Nota 3.1 *Se tienen las mismas propiedades que en el caso discreto.*

Ejemplo 3.2 *Calcular la esperanza matemática de X (ejemplo 3.1) y su varianza.*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx = \int_{2}^{4} x\ \frac{x}{6}\ dx = \left.\frac{x^3}{18}\right]_{x=2}^{x=4} = \frac{4^3}{18} - \frac{2^3}{18} = \frac{64-8}{18} = \frac{56}{18} = 3.11$$

La varianza podemos obtenerla como $var(X) = E(X^2) - E^2(X)$, por lo que calculamos

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ f(x)\ dx = \int_{2}^{4} x^2\ \frac{x}{6}\ dx = \left.\frac{x^4}{24}\right]_{x=2}^{x=4} = \frac{4^4}{24} - \frac{2^4}{24} = \frac{256-16}{24} = \frac{240}{24} = 10$$

Por lo que: $\sigma^2 = var(X) = 10 - 3.11^2 = 0.3279$.

4. Independencia de variables aleatorias

Dadas dos variables aleatorias X e Y, diremos que son independientes si lo son los experimentos aleatorios que cada una de ellas describe, es decir, si el resultado de uno no influye en absoluto en el resultado del otro.

Este concepto puede extenderse a más de dos variables, en general a n variables independientes, $X_1, X_2, ..., X_n$.

5. Modelos Discretos

En esta sección se estudiarán algunos modelos de distribución de variables aleatorias discretas que describen diversos experimentos aleatorios que se presentan frecuentemente en el mundo real.

5.1. Distribución Bernoulli

Considérese un experimento con dos posibles resultados, E (éxito) y F (fracaso). A un experimento así se le denomina experimento de Bernoulli. En este caso el espacio muestral es $\Omega = \{E, F\}$. Sean $P(E) = p \in (0,1)$ y $P(F) = q = 1-p$. A la v.a. que realiza la siguiente asociación:

$$X(E) = 1,\ \ X(F) = 0,$$

se le denomina variable aleatoria Bernoulli (o que sigue un modelo de distribución de Bernoulli) con probabilidad de éxito p y se denota $X \sim Be(p)$.

La función de probabilidad de esta v.a. es

$$P(X = 1) = p, \qquad P(X = 0) = 1 - p = q.$$

La media y la varianza de esta distribución son $E(X) = p$ y $Var(X) = pq$.

Ejemplo 5.1 *Consideremos el experimento aleatorio "recibir un correo electrónico". Se sabe que el 5 % de los correos electrónicos recibidos es spam. Dado un correo electrónico que se ha recibido, la variable aleatoria X definida como:*

$$X = \begin{cases} 1 & \textit{si el correo es spam} \\ 0 & \textit{caso contrario} \end{cases}$$

sigue una distribución Bernoulli de parámetro $p = 0.05$, $X \sim Be(0.05)$.

5.2. Distribución Binomial

Supongamos que realizamos n experimentos Bernoulli independientes, todos ellos con igual probabilidad de éxito p. La distribución de la v.a. definida como

X="Número de éxito en los n experimentos Bernoulli independientes",

se denomina distribución Binomial de parámetros n y p y se denota $X \sim B(n, p)$. La función de probabilidad de esta v.a. es

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

La media y la varianza de esta distribución son $E(X) = np$ y $Var(X) = npq$.

Ejemplo 5.2 *Siguiendo el ejemplo 5.1, vamos a calcular la probabilidad de recibir como mínimo un correo spam y el número esperado de correos spam recibidos, ambos en un día en el que lleguen 40 correos electrónicos.*

En el ejemplo 5.1 vimos que recibir un correo spam puede modelarse según una variable de Bernoulli. En este caso repetimos el experimento 40 veces (cada correo recibido será un experimento que supondremos independiente del resto), por lo tanto la v.a. X = "número de correos spam entre los 40 correos recibidos" es una variable Binomial de parámetros $n = 40$ y $p = 0.05$. El número esperado de spam es

$$E(X) = 40 \times 0.05 = 2,$$

y la probabilidad de recibir como mínimo un spam es

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = \\ &= 1 - \binom{40}{0} 0.05^0 (1 - 0.05)^{40-0} = 1 - 0.1285 = 0.8715. \end{aligned}$$

6. Modelos continuos

6.1. Distribución Uniforme Continua

Diremos que una v.a. X sigue una distribución Uniforme en el intervalo (a, b), $X \sim U(a, b)$, si su función de densidad es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in (a, b), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La función de distribución es

$$F(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b, \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

La media y la varianza son $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ y $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Ejemplo 6.1 *El tiempo en minutos que tarda un tren de cercanías en hacer una parada entre dos estaciones urbanas oscila uniformemente entre 8 y 12 minutos. Calcular la probabilidad de que un individuo que llega justo cuando el tren salió de la estación anterior, tenga que esperar más de 10 minutos, así como el tiempo medio que tendrá que esperar en el andén.*
La v.a. X =tiempo que tarda en llegar el tren $\sim U(8, 12)$, y por tanto,

$$\begin{aligned} &P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - F(10) = 1 - \tfrac{10-8}{12-8} = 0.5 \\ &E(X) = \frac{8+12}{2} = 10 \end{aligned}$$

6.2. Distribución Normal

Un gran número de fenómenos aleatorios continuos como el peso, la altura, etc, se pueden modelar con la distribución Normal. Diremos que una v.a. X sigue una ley Normal de parámetros μ y σ^2 ($\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$), $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La media y la varianza de esta distribución son

$$E(X) = \mu, \qquad Var(X) = \sigma^2.$$

Como la función de densidad es simétrica respecto a la media se cumple que

$$P(X \leq \mu - x) = P(X \geq \mu + x).$$

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

A Z se le denomina variable **tipificada**. A la distribución $N(0,1)$ se le denomina **distribución normal estándar**. Para calcular probabilidades en cualquier distribución normal, lo primero que debemos hacer es tipificar la variable, esto es,

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(z\right),$$

donde Φ representa la función de distribución de una distribución normal estándar y $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$. Los valores de $\Phi(x)$ están tabulados para $x \geq 0$, ya que por ser la distribución normal estándar simétrica respecto del origen, se verifica que $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Ejemplo 6.2 *La cantidad de dinero que las personas de una cierta ciudad llevan en sus bolsillos sigue una distribución normal de media 15 euros y desviación típica 3 euros. Calcular la probabilidad de que elegida una persona al azar lleve en sus bolsillos menos de 18 euros y la probabilidad de que elegida una persona al azar lleve en sus bolsillos entre 8 y 20 euros.*
Tenemos $X \sim N\left(15, 3^2\right)$, *entonces* $Z = \frac{X-15}{3} \sim N(0,1)$.

$$P(X < 18) = P\left(Z < \frac{18-15}{3}\right) = \Phi(1) = 0.8413.$$

$$P(8 < X < 20) = P\left(\frac{8-15}{3} < Z < \frac{20-15}{3}\right) = P(-2.33 < Z < 1.67) = \Phi(1.67) - \Phi(-2.33) =$$
$$= \Phi(1.67) - \{1 - \Phi(2.33)\} = 0.9525 - (1 - 0.9901) = 0.9426.$$

Propiedad 6.1 *Si X e Y son variables aleatorias independientes de modo que $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, entonces para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$aX + bY + c \sim N(a\mu_X + b\mu_Y + c,\ a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2).$$

En particular,

$$X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y,\ \sigma_X^2 + \sigma_Y^2),$$
$$X - Y \sim N(\mu_X - \mu_Y,\ \sigma_X^2 + \sigma_Y^2).$$

La importancia de la distribución normal radica en que no sólo es útil para modelar algunos fenómenos aleatorios frecuentes (peso, altura, etc), sino que también sirve para aproximar a otras distribuciones.

Propiedad 6.2 *(Teorema Central de Límite) Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes y con igual distribución. Si $E(X_1) = \mu$ y $var(X_1) = \sigma^2$, entonces*

$$P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \leq x\right) \simeq \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

El error en la aproximación que da el Teorema Central del Límite converge a 0 cuando n crece.

A continuación se considera un caso especial del resultado anterior, cuando $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias Bernoulli.

Propiedad 6.3 *Si $X \sim B(n,p)$ con n elevado, entonces podemos aproximar la distribución de X por una ley Normal de parámetros $\mu = np$ y $\sigma^2 = npq$, en el siguiente sentido*

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

7. Variables aleatoria multidimensionales

Las variables aleatoria pueden ser multivariantes. De esta forma, al hablar de distribución de probabilidad, se habla de distribución de probabilidad conjunta. En el caso de dos variables X e Y, la distribución de probabilidad conjunta será $P_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$, marcando la probabilidad de que ocurra a la vez que la variable aleatoria X alcance el valor x y la variable Y alcance el valor y. En el caso de variables aleatorias continuas, tendremos que hablar de función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$, que mostrará la densidad de probabilidad del punto (x, y). Igualmente, pueden definirse las funciones de distribución $F_{XY}(xy) = P(X \leq x, Y \leq y)$ Se pueden calcular diferentes medidas, como la esperanza conjunta, la covarianzao las correlaciones entre las variables de una distribución bidimensional. Todo esto es extensible a varias dimensiones.

8. Contrastes de hipótesis

El contraste de hipótesis forma parte de la inferencia estadística. Como vemos, muchos parámetros determinan las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias, como su esperanza o su varianza. En determinados casos, podríamos tener dudas sobre los valores reales de estos parámetros, especialmente si son obtenidos mediante una muestra. Para contrastar las hipótesis sobre los valores de estos parámetros se realizan los denominados contrastes **paramétricos**. Sin embargo, podemos realizar también contrastes sobre otras magnitudes diferentes a los parámetros que nos caracterizan las distribuciones de probabilidad si desconocemos el modelo de la distribución de nuestros datos. En este caso nos encontramos ante lo que denominamos contrastes **no paramétricos**.

El método general de contrastes de hipótesis confronta una hipótesis nula H_0 que es la que deseamos probar si es verdadera, ante una hipótesis alternativa H_1, que engloba todos los casos donde no se cumple H_0. Para poder probarla se encuentra un estadístico, esto es, una función de los datos que, bajo cumplimiento de la hipótesis nula, se sabe que sigue una determinada distribución de probabilidad. A continuación, se confronta el valor del estadístico obtenido con nuestros datos con el valor que tendría si se cumpliera la hipótesis nula. Si hay mucha diferencia, se rechazará H_0. mientras que si no la hay, se aceptará (o mejor dicho, no tendremos argumentos para rechazarla). Obviamente, se puede regular la precisión de este contraste, es decir, cuánto permitimos que difiera el estadístico obtenido del que tendría la hipótesis nula. Esto se hace mediante el nivel de significación del contraste.

9. Intervalos de confianza

En ciertas ocasiones, nos interesa saber el valor de un parámetro desconocido, como la media o la varianza. Sin embargo, podemos incurrir en errores de estimaciones. Por ello, otras veces nos es más adecuado saber entre qué dos valores se encuentra con cierta seguridad y así poder tomar decisiones más conservadoras o arriesgadas. Este es el concepto de intervalo de confianza. De nuevo, mediante un estadístico (función de nuestros datos muestrales) con una distribución de probabilidad conocida, sería posible establecer entre qué dos valores se encuentra el verdadero valor poblacional del parámetro con cierto grado de seguridad medido mediante probabilidades. Este es el concepto de intervalo de confianza.