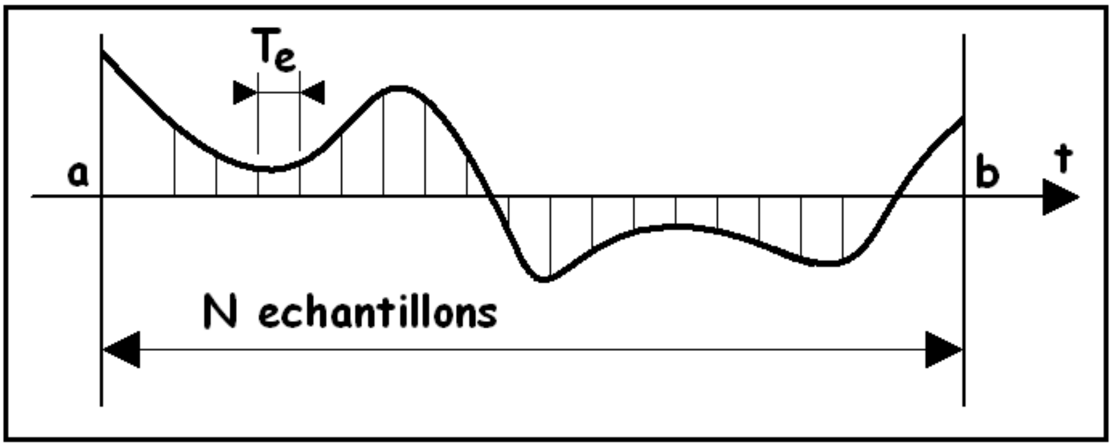
Transformée de FOURIER

I. La fonction Transformée de FOURIER discrète

Description

On considère un signal analogique $x_a(t)$, fonction continue de la variable temps. Pour constituer le signal discret x(n) de N valeurs, on "échantillonne" ce signal $x_a(t)$ avec une période T_e, sur l'intervalle [a, b[. En pratique, cela revient à constituer x(n) selon :

$$x(n) = x_a(\,(n-1).T_e + a\,) \quad \text{avec } T_e = (b-a)\,/\,N \quad \text{et} \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$



T_e est la **période d'échantillonnage**
$f_e = 1/T_e$ est la **fréquence d'échantillonnage**

La fonction Matlab `X=tfour(x)` donne la transformée de FOURIER discrète de ce signal discret x(n) dans un vecteur X de N valeurs. Ce vecteur X correspond à l'échantillonnage de la fonction transformée de FOURIER de $x_a(t)$. Les fréquences représentées sont les fréquences de $-f_e/2$ à $f_e/2$ (ou à peu près). L'écart, en fréquence, entre deux échantillons successifs dans X est donc de :

$$f_e/N = 1\,/(T_e\,.\,N) = 1/(b-a) \text{ Hertz} \quad (\text{ ou } s^{-1}).$$

La fonction Matlab `x=tfourinv(X)` permet de calculer la transformée de FOURIER inverse de la fonction discrétisée X et donc de retrouver x.

Application

On choisit N = 16384 échantillons, a = -2 secondes et b = 2 secondes.

Avec ces paramètres, on échantillonne les 5 premières fonctions suivantes :

$x_0(t) = \text{constante}$ $\qquad$ $x_3(t) = e^{i.2.\pi.f.t}$

$x_1(t) = \cos(2.\pi.f.t)$ $\qquad$ $x_4(t) = \text{rect}_{0.02}(t)$

$x_2(t) = \sin(2.\pi.f.t)$ $\qquad$ $x_5(t) = \text{fonction5}$

pour différentes valeurs de f.
La fonction $x_5(t)$ est déjà donnée échantillonnée, dans le fichier 'fonction5.mat' fourni qu'il faut charger dans Matlab par l'instruction `load('fonction5.mat')`.
Enfin, vous construirez la fonction $x_6(t)$ en périodisant la fonction $x_4(t)$ avec la période To=0,1 seconde.

Questions

- Quelle est la période d'échantillonnage ?
- Quelle est la fréquence d'échantillonnage ?
- Quel est l'intervalle entre deux d'échantillons en fréquence ?
- Affichez ces fonctions ainsi que leurs spectres lorsque l'on échantillonne les fonctions sur un nombre entier de périodes entre a et b (utiliser les spectres amplitude / phase ou partie réelle / imaginaire selon les plus représentatifs) et expliquez.
- Que se passe-t-il lorsque l'on échantillonne une fonction sur un nombre non-entier de périodes entre a et b ? Donner un exemple et expliquer.
- Vérifiez que la fonction `tfourinv(X)` permet bien de récupérer le signal d'origine.

*Les graphiques "temporels" des fonctions devront avoir **l'échelle des abscisses en secondes**, les graphiques "fréquentiels" devront avoir **l'échelle des abscisses en Hertz**. On repérera donc les pas de discrétisation temporelle et fréquentielle, la fréquence nulle, les fréquences extrêmes représentées ... Utilisez pour cela, les fonctions Matlab plot, figure, hold on, hold off, axis … pour les affichages, et real, imag, abs et angle pour avoir la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument des fonctions complexes.*

II. Transmission par modulation d'amplitude

Description

La transmission d'informations à travers un canal unique (câbles, fibres optiques, air, espace...) nécessite bien souvent le codage et l'adaptation de ces informations au canal de transmission (utilisation des fréquences qui se propagent ...).
Le problème est le suivant : on veut transmettre simultanément les n signaux $s_1(t)$, $s_2(t)$ ... et $s_n(t)$ vers un endroit distant à travers un seul canal (de l'air par exemple). On veut ensuite pouvoir récupérer uniquement $s_1(t)$ ou uniquement $s_i(t)$ à partir du signal reçu c(t).

La modulation d'amplitude est une des façons les plus simples pour résoudre ce problème : on se sert des $s_i(t)$ pour moduler l'amplitude de signaux sinusoïdaux de fréquences f_i. Le signal transmis (et donc reçu) est alors la somme de ces signaux modulés :

$$c(t) = s_1(t).\cos(2\pi.f_1.t) + s_2(t).\cos(2\pi.f_2.t) + ... + s_n(t).\cos(2\pi.f_n.t)$$

Pour retrouver un signal $s_i(t)$ particulier à partir du signal c(t), on commencera par « démoduler » ce signal c(t) au point de réception, pour séparer l'information $s_i(t)$ des autres informations contenues dans c(t). On construit pour cela de signal d(t) en remultipliant c(t) par $\cos(2\pi.f_i.t)$. Ce nouveau signal d(t) contient $s_i(t)$ qu'il faudra ensuite isoler du reste par un traitement adapté.

Application

Nous allons étudier le cas de la transmission de n=2 signaux, $s_1(t)$ et $s_2(t)$. En reprenant les paramètres précédents (N = 16384 échantillons, a= -2 secondes et b = 2 secondes), réalisez les opérations de modulation et démodulation avec Matlab pour les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ fournis dans `signal1` et `signal2`. Visualisez les spectres des différentes fonctions. Choisissez des fréquences f_1 et f_2 qui conviennent pour ces opérations.

Questions

- Que donne le calcul théorique pour le spectre du signal modulé c(t) et le spectre du signal démodulé d(t) ?
- Que faut-il faire pour extraire $s_1(t)$ ou $s_2(t)$ à partir de d(t) ?
- Peut-on choisir les fréquences f_1 et f_2 indépendamment de $s_1(t)$ et $s_2(t)$?
- Comparez avec les résultats théoriques.

III. Echantillonnage et aliasing

Description

L'échantillonnage d'un signal par une fréquence mal adaptée peut poser des problèmes de fidélité du signal résultat au signal d'origine. C'est ce que nous allons étudier dans cette partie.
On considère la famille de fonctions g_f , de paramètre f, définies par :

$$g_f(t) = s(t) . \sin(2\pi.f.t)$$

En reprenant le signal $s_1(t)$ ou $s_2(t)$ précédent pour s(t), (par `load('signal1.mat')` ou `load('signal2.mat')`), et les paramètres précédents (N = 16384, a = -2 secondes et b = 2 secondes), échantillonnez les fonctions $g_f(t)$ pour différentes valeurs de f. La fréquence d'échantillonnage ne change pas, puisque elle ne dépend que de N, a et b.

Questions

- Quels sont les spectres théoriques des fonctions g_{1000} et g_{3000} ?
- Echantillonnez les deux fonctions précédentes et expliquez les différences observées.