Transformée de FOURIER

Partie 2

IV. Filtrages

A partir de la fonction gaussienne, on peut construire les fonctions de transfert de filtres très utilisés en pratique, applicables sur des signaux 1D, 2D ou plus. La définition de ces filtres dans un espace fréquentiel 2D (dans lequel on représentera les spectres de signaux 2D comme des images par exemple) serait :

$$H(u,v) = \exp(- K.(u^2 + v^2))$$

Testez les effets de ces filtres sur les images en niveaux de gris de votre choix pour différentes valeurs de K. Conclusions ?

Application

On veut diviser par 4 chaque dimension de l'image « Thorg.png » qui occupe beaucoup de place, en la sous-échantillonnant. Pour cela, on construit une première image en prenant un point sur 4 dans l'image (en ligne et en colonne). Quelles sont les raisons de la forte dégradation constatée ? Comment améliorer ce résultat ?

V. Restauration d'image par filtre de Wiener

Description

De nombreuses dégradations d'images (flou, bougé, défauts d'optique …) peuvent se modéliser par le passage de l'image idéale $I_{Idéale}(u,v)$ dans un filtre linéaire de dégradation $H(u,v)$. Si on arrive à modéliser de façon suffisamment précise ce filtre de dégradation $H(u,v)$, on peut alors atténuer les effets de la dégradation sur l'image $D(u,v)$ par filtrage inverse. En fréquence, cela s'écrira de façon simpliste :

$$D(u,v)=I_{Idéale}(u,v).H(u,v) \quad \text{et donc} \quad I_{Idéale}(u,v)=D(u,v)/H(u,v)$$

De façon, plus réaliste, il faut tenir compte du bruit, toujours plus ou moins présent :

$$D(u,v)=I_{Idéale}(u,v).H(u,v)+B(u,v)$$

et donc $$I_{Idéale}(u,v)=[D(u,v)-B(u,v)]\ /\ H(u,v)$$

Cependant, pour pouvoir utiliser cette formule, il faudrait connaître précisément ce bruit $B(u,v)$, ce qui n'est pas possible, car il est aléatoire par nature. De plus, les zéros de $H(u,v)$ posent un problème évident. Pour pouvoir néanmoins atténuer la dégradation de l'image $D(u,v)$, on peut construire des filtres de restauration qui utilisent des caractéristiques statistiques de ce bruit. Le filtre de Wiener $W(u,v)$ est un exemple de ce type de filtres. Il est donné par :

$$W(u,v)=\frac{1}{H(u,v)}\frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2+\dfrac{P_B(u,v)}{P_I(u,v)}} \quad \text{et} \quad I_{Idéale}(u,v)\approx D(u,v).W(u,v)$$

Ici, $P_B(u,v)$ et $P_I(u,v)$ sont des estimations des spectres de puissance du bruit et de l'image idéale respectivement. Ce ne sont que des estimations puisqu 'elles ne sont pas accessibles.

Application

L'image *'image_floue.png'* de 512 x 512 pixels a été obtenue à la suite d'une mauvaise opération de numérisation de la page. Nous voulons cependant savoir ce que raconte ce texte que l'on devine. Nous choisissons pour cela d'appliquer la méthode de restauration par filtre de Wiener. Pour pouvoir calculer $W(u,v)$, nous devrons déterminer les trois fonctions $H(u,v)$, $P_B(u,v)$ et $P_I(u,v)$.

Le filtre de dégradation $h(x,y)$, de fonction de transfert $H(u,v)$, sera synthétisé pour traduire la dégradation observée. C'est la convolution d'une image $i(x,y)$ par l'image $h(x,y)$ (ou la multiplication des deux transformées de Fourier $I(u,v)$ et $H(u,v)$) qui donne la dégradation observée.

Les deux spectres de puissance $P_B(u,v)$ et $P_I(u,v)$ seront estimés à partir d'une image de référence $i_R(x,y)$ contenue dans *'image_ref.png'*, qui présente des caractéristiques statistiques vraisemblablement proches de celles de notre image idéale. $P_I(u,v)$ est approximé par le spectre de puissance de $i_R(x,y)$. $P_B(u,v)$ est approximé par le spectre de puissance du bruit $b(x,y)$ de quantification qui apparaît lors du passage de $d_R(x,y)$ à $d_Q(x,y)$ qui n'est codée que sur des nombres entiers, avec :

$$d_R(x,y)=i_R(x,y)\otimes h(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad D_R(u,v)=I_R(u,v).H(u,v)$$

$$d_Q(x,y)=i_R(x,y)\otimes h(x,y)+b(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad D_Q(u,v)=I_R(u,v).H(u,v)+B(u,v)$$

Questions

- Construisez et affichez les images correspondant aux représentations fréquentielles du filtre et des différentes images. On réalisera un recadrage sur une échelle logarithmique pour l'affichage des amplitudes en fréquence.
- Programmez la chaine de traitements à réaliser pour restaurer l'image par :
  - filtrage inverse "simpliste"
  - filtrage de Wiener
- Trouvez le modèle du filtre de dégradation sachant qu'il correspond à une translation horizontale. La réponse impulsionnelle correspond ici à un rectangle (hauteur 3, largeur à déterminer) centré à l'origine, d'intégrale 1, le reste de l'image étant nul.
- Comparez les résultats obtenus par les deux méthodes précédentes (simpliste et Wiener)

Quelques instructions utiles en Matlab …

Ouverture de l'image 'image.png' :	`[im,map]=imread('image.png');`
Construction d'une palette 'Niveau de Gris'	`gris=([0:255]/255)'*[1 1 1] ;`
Affichage de l'image :	`figure(1)`
	`image(im)`
	`colormap(gris)`
Conversion en réels pour les calculs	`im=double(im) ;`
Fast Fourier Transform 2D :	`IM=fft2(im) ;`
Permutation des cadrans :	`IM=fftshift(IM) ;`
Calcul du spectre d'amplitude recadré	`logIM=log(abs(IM)+1) ;`
sur une échelle logarithmique	`maxi=max(max(logIM)) ;`
	`mini=min(min(logIM)) ;`
Affichage de la representation	`figure(2)`
Fréquentielle (ici spectre d'amplitude)	`image( (logIM-mini)/(maxi-mini)*255 )`
	`colormap(gris)`

Attention :

En Matlab, le produit simple terme à terme entre tableau est : .*

Le produit * est un produit matriciel