Université de Mons
Faculté des Sciences
Département des mathématiques

Analyse Numérique : Rapport
TP 1

Professeurs:
Christophe Troestler
Quentin Lambotte

Auteurs:
Loïc Dupont
Maximilien Vanhaverbeke
Paulo Marcelis

Année académique 2020-2021

Contents

1 Exercice 1:

Soit I un intervalle. Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$. Supposons que $\inf\{|\partial f(x)||x \in I\} > 0$. On doit montrer que

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} = \sup\left\{\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)}\right|\middle|\xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0\right\}$$

càd

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} \text{ est un majorant de } \left\{\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)}\right|\middle|\xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0\right\} \tag{1}$$

et

$$\exists (z_n) \subset \left\{\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)}\right|\middle|\xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0\right\} \text{ tq } z_n \to \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} \tag{2}$$

1.1 Preuve de la majoration

Comme un supremum est en particulier un majorant, on sait que

$$\forall \xi \in I,\ \sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\} \geq |\partial^2 f(\xi)| \tag{3}$$

De même, un infimum étant en particulier un minorant, on sait que

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0,\ \inf\{|\partial f(x)||x \in I\} \leq |\partial f(\eta)|$$

Comme $\inf\{|\partial f(x)||x \in I\} > 0$ par hypothèse, $\inf\{|\partial f(x)||x \in I\} \in \mathbb{R}^{>0}$. On sait aussi que $\forall \eta \in I$ tq $\partial f(\eta) \neq 0,\ |\partial f(\eta)| \in \mathbb{R}^{>0}$. Donc, par décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^{>0}$, on a

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0,\ \frac{1}{\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} \geq \frac{1}{|\partial f(\eta)|} \tag{4}$$

Finalement, par (3) et (4), on a

$$\forall \xi, \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0,\ \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} \geq \frac{|\partial^2 f(\xi)|}{2|\partial f(\eta)|} = \left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)}\right|$$

On a donc bien montré la propriété (1).

1.2 Preuve de la suite convergente

Par les propriétés du supremum, on sait que

$$\exists (x_n) \subset \{|\partial^2 f(x)||x \in I\} \text{ tq } x_n \to \sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}$$

De même, par les propriétés de l'infimum, on sait que

$$\exists (y_n) \subset \{|\partial f(x)||x \in I\} \text{ tq } y_n \to \inf\{|\partial f(x)||x \in I\}$$

Prenons $(z_n) = (x_n/(2y_n))$. Alors, on a bien

$$(z_n) \subset \left\{\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)}\right|\middle|\xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0\right\}$$

Enfin, par les propriétés des limites

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{\lim_{n\to+\infty} x_n}{2\lim_{n\to+\infty} y_n} = \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}}$$

On a donc bien montré la propriété (2), ce qui termine la preuve de l'exercice 1.

2 Exercice 2:

2.1 Partie a:

Objectif : Trouver les racines de f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - 8x^2 - 4$. Autrement dit, nous devons trouver les solutions de $P \equiv x^4 - 8x^2 - 4 = 0$.
Tout d'abord, posons $y = x^2$. On obtient :

$$Q \equiv y^2 - 8y - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \triangle &= (-8)^2 - 4 * 1 * 4 \\ &= 64 + 16 \\ &= 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{80}}{2} \\ \Rightarrow y_1 =& \frac{8 + \sqrt{80}}{2} \; et \; y_2 = \frac{8 - \sqrt{80}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 =& \frac{8 + \sqrt{16 * 5}}{2} \; et \; y_2 = \frac{8 - \sqrt{16 * 5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 =& \frac{8 + 4 * \sqrt{5}}{2} \; et \; y_2 = \frac{8 - 4 * \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 =& 4 + 2 * \sqrt{5} \; et \; y_2 = 4 - 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Donc, les racines de Q sont $y_1 = 4 + 2 * \sqrt{5}$ *et* $y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5}$ mais nous voulons les racines de P. Donc, on obtient : (on sait que y = x^2)

$$\begin{aligned} y_1 = 4 + 2 * \sqrt{5} \; et \; y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ (x_1)^2 = 4 + 2 * \sqrt{5} \; et \; (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ Cependant, \; (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \; est \; impossible \; car \; on \; a \; : \\ 2 = \sqrt{4} \leq \sqrt{5} \leq \sqrt{9} = 3 \; car \; \sqrt{} \; est \; croissante \\ Donc \; 4 - 2 * \sqrt{5} \leq 4 - 2 * \sqrt{4} = 4 - 2 * 2 = 0 \\ i.e. \; (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \leq 0 \\ Finalement, \; les \; racines \; de \; P \; sont \; : \\ (x_1)^2 = 4 + 2 * \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{4 + 2 * \sqrt{5}} \end{aligned}$$

2.2 Partie B:

⌈1⌋ Montrons que f est paire.

⌈2⌋ Montrons que f est croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$

⌈3⌋ Montrons que f est décroissante sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

⌈4⌋ Montrer que f est positive sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$ et sur $]-\infty;\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

⌈5⌋ Montrer que f est négative sur $[-\sqrt{4+2*\sqrt{5}};\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

Preuve :

⌈1⌋ trivial car une somme de fonction paire est paire.

⌈2⌋ Montrons que $\forall x, y \in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
Soient x, y $\in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$, supposons $x \leq y$. Montrons que $f(x) \leq f(y)$.
On a :

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(y) &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 4 \leq y^4 - 8y^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 \leq y^4 - 8y^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - (8y^2 - 8x^2) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - 8(y^2 - x^2) \end{aligned}$$

ok car la fonction x^2 et x^4 sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$ et par hypothèse, $x \leq y$.

⌈3⌋ trivial car, par le fait que la fontion f est paire et croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$, on a que f est décroissante sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$.

⌈4⌋ par la croissance sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$ ainsi que sa décroissance sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$, on sait que $\forall x \in]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[, f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$.
Mais $f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$ car c'est une racine de f (pareil pour $f\left(-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$).
Donc $0 = f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$ càd $0 \leq f(x)$. Donc f est positive sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$

⌈5⌋ Vu que la fonction est pair et que l'intervalle est de la forme]-a; a[, alors on peut se restreindre à regarder l'intervalle $[0;\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$.
TODO

2.3 Partie C:

Je te laisse compléter Paolo ;)

3 Exercice 3:

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application unimodale càd $\exists m \in [a, b]$ tel que *f est strictement croissante* sur [a, m] et *strictement décroissante* sur [m, b].

3.1 Partie a:

Montrons que f possède au plus 2 racines.

Supposons par l'absurde que f possède 3 racines càd
$\exists\ u \neq v \neq w \in [a, b],\ f(u) = f(v) = f(w) = 0.$
Sans perte de généralité, supposons que $u < v < w$.
On a donc 3 cas :

⌈1⌋ soit $u \in [a, m[et v, w \in]m, b]$

⌈2⌋ soit $u, v \in [a, m[et w \in]m, b]$

⌈3⌋ soit u, v ou w est notre m.

Montrons donc que tous les cas sont impossibles.

⌈1⌋ on sait que *f est strictement décroissante* sur [m, b] (et donc strictement décroissante sur]m, b] par inclusion) donc $v < w \Rightarrow f(v) > f(w)$ or ce sont 2 racines de f. **Contradiction**.

⌈2⌋ on sait que *f est strictement croissante* sur [a, m] (et donc strictement croissante sur [a, m[par inclusion) donc $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$ or ce sont 2 racines de f. **Contradiction**.

⌈3⌋

⌈3.1⌋ Si u est m, alors $u, v\ et\ w \in [m, b]$ et par ⌈1⌋, c'est impossible. **Contradiction**.

⌈3.2⌋ Si w est m, alors $u, v\ et\ w \in [a, m]$ et par ⌈2⌋, c'est impossible. **Contradiction**.

⌈3.3⌋ Si v est m, alors $\forall x \in [a, m[,\ y \in]m, b],\ f(x) < f(v)$ (par la stricte croissance de f) et $f(v) > f(y)$ (par la stricte décroissance de f). Cependant, en particulier, $x = u$ et $y = v$ et qui sont racines de f. Donc, $0 = f(u) < f(v = 0$ et $0 = f(u) > f(w) = 0$ qui sont tout 2 impossibles. **Contradiction**.