
Analyse Numérique : Rapport

TP 1

Professeurs:

Christophe TROESTLER
Quentin LAMBOTTE

Auteurs:

Loïc DUPONT
Maximilien VANHAVERBEKE
Paulo MARCELIS

Contents

1	Exercice 1:	2
1.1	Preuve de la majoration	2
1.2	Preuve de la suite convergente	2
2	Exercice 2:	3
2.1	Partie a:	3
2.2	Partie B:	4
2.3	Partie C:	5

1 Exercice 1:

Soit I un intervalle. Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$. Supposons que $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0$. On doit montrer que

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} = \sup \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\}$$

càd

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \text{ est un majorant de } \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\} \quad (1)$$

et

$$\exists(z_n) \subset \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\} \text{ tq } z_n \rightarrow \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \quad (2)$$

1.1 Preuve de la majoration

Comme un supremum est en particulier un majorant, on sait que

$$\forall \xi \in I, \sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\} \geq |\partial^2 f(\xi)| \quad (3)$$

De même, un infimum étant en particulier un minorant, on sait que

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} \leq |\partial f(\eta)|$$

Comme $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0$ par hypothèse, $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} \in \mathbb{R}^{>0}$. On sait aussi que $\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, |\partial f(\eta)| \in \mathbb{R}^{>0}$. Donc, par décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^{>0}$, on a

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, \frac{1}{\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \geq \frac{1}{|\partial f(\eta)|} \quad (4)$$

Finalement, par (3) et (4), on a

$$\forall \xi, \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \geq \frac{|\partial^2 f(\xi)|}{2|\partial f(\eta)|} = \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right|$$

On a donc bien montré la propriété (1).

1.2 Preuve de la suite convergente

Par les propriétés du supremum, on sait que

$$\exists(x_n) \subset \{|\partial^2 f(x)| | x \in I\} \text{ tq } x_n \rightarrow \sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}$$

De même, par les propriétés de l'infimum, on sait que

$$\exists(y_n) \subset \{|\partial f(x)| | x \in I\} \text{ tq } y_n \rightarrow \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}$$

Prenons $(z_n) = (x_n/(2y_n))$. Alors, on a bien

$$(z_n) \subset \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\}$$

Enfin, par les propriétés des limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}{2 \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n} = \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}}$$

On a donc bien montré la propriété (2), ce qui termine la preuve de l'exercice 1.

2 Exercice 2:

2.1 Partie a:

Objectif : Trouver les racines de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - 8x^2 - 4$. Autrement dit, nous devons trouver les solutions de $P \equiv x^4 - 8x^2 - 4 = 0$.

Tout d'abord, posons $y = x^2$. On obtient :

$$Q \equiv y^2 - 8y - 4 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-8)^2 - 4 * 1 * 4 \\ &= 64 + 16 \\ &= 80\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{80}}{2} \\ \Rightarrow y_1 &= \frac{8 + \sqrt{80}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{8 - \sqrt{80}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{8 + \sqrt{16 * 5}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{8 - \sqrt{16 * 5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{8 + 4 * \sqrt{5}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{8 - 4 * \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \text{ et } y_2 = 4 - 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

Donc, les racines de Q sont $y_1 = 4 + 2 * \sqrt{5}$ et $y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5}$ mais nous voulons les racines de P. Donc, on obtient : (on sait que $y = x^2$)

$$\begin{aligned}y_1 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \text{ et } y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ (x_1)^2 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \text{ et } (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ \text{Cependant, } (x_2)^2 &= 4 - 2 * \sqrt{5} \text{ est impossible car on a :} \\ 2 &= \sqrt{4} \leq \sqrt{5} \leq \sqrt{9} = 3 \text{ car } \sqrt{} \text{ est croissante} \\ \text{Donc } 4 - 2 * \sqrt{5} &\leq 4 - 2 * \sqrt{4} = 4 - 2 * 2 = 0 \\ \text{i.e. } (x_2)^2 &= 4 - 2 * \sqrt{5} \leq 0\end{aligned}$$

Finalement, les racines de P sont :

$$\begin{aligned}(x_1)^2 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \pm \sqrt{4 + 2 * \sqrt{5}}\end{aligned}$$

2.2 Partie B:

[1] Montrons que f est paire.

[2] Montrons que f est croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$

[3] Montrons que f est décroissante sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

[4] Montrer que f est positive sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$ et sur $] -\infty; \sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

[5] Montrer que f est négative sur $[-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; \sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

Preuve :

[1] trivial car une somme de fonction paire est paire.

[2] Montrons que $\forall x, y \in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Soient $x, y \in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$, supposons $x \leq y$. Montrons que $f(x) \leq f(y)$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(y) &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 4 \leq y^4 - 8y^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 \leq y^4 - 8y^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - (8y^2 - 8x^2) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - 8(y^2 - x^2) \end{aligned}$$

ok car la fonction x^2 et x^4 sont croissantes sur \mathbb{R}^+ et par hypothèse, $x \leq y$.

[3] trivial car, par le fait que la fonction f est paire et croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$, on a que f est décroissante sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$.

[4] par la croissance sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$ ainsi que sa décroissance sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$, on sait que $\forall x \in] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[, f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$.

Mais $f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$ car c'est une racine de f (pareil pour $f\left(-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$).

Donc $0 = f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$ càd $0 \leq f(x)$. Donc f est positive sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$

[5] Vu que la fonction est paire et que l'intervalle est de la forme $] -a; a]$, alors on peut se restreindre à regarder l'intervalle $[0; \sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$.

TODO

2.3 Partie C:

Je te laisse compléter Paolo ;)