
Analyse Numérique : Rapport

TP 1

Professeurs:

Christophe TROESTLER
Quentin LAMBOTTE

Auteurs:

Loïc DUPONT
Maximilien VANHAVERBEKE
Paulo MARCELIS

Contents

1	Exercice 1:	2
1.1	Remarque sur l'existence du membre de gauche	2
1.2	Preuve de la majoration	2
1.3	Preuve de la suite convergente	3
2	Exercice 2:	4
2.1	Partie a:	4
2.2	Partie B:	5
2.3	Partie C:	6
3	Exercice 3:	7
3.1	Partie a:	7
3.2	Partie b:	8
	3.2.1 Existence de la racine	8
	3.2.2 Unicité de la racine	8
3.3	Partie c:	9

1 Exercice 1:

Soit I un intervalle compact non-vidé. Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$. Supposons que $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0$. On doit montrer que

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} = \sup \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\}$$

càd

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \text{ est un majorant de } \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\} \quad (1)$$

et

$$\exists(z_n) \subset \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\} \text{ tq } z_n \rightarrow \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \quad (2)$$

1.1 Remarque sur l'existence du membre de gauche

On sait par l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ que ∂f et $\partial^2 f$ sont des fonctions continues sur I . Comme la valeur absolue est aussi une fonction continue, par composition de fonctions continues, $|\partial f|$ et $|\partial^2 f|$ sont des aussi fonctions continues sur I .

Alors, comme I est un compact non-vidé par hypothèse, le théorème des bornes atteintes nous dit que ces fonctions atteignent leurs bornes. En particulier,

$$\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} \in \mathbb{R}$$

1.2 Preuve de la majoration

Comme un supremum est en particulier un majorant, on sait que

$$\forall \xi \in I, \sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\} \geq |\partial^2 f(\xi)| \quad (3)$$

De même, un infimum étant en particulier un minorant, on sait que

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} \leq |\partial f(\eta)|$$

Comme $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0$ par hypothèse, $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} \in \mathbb{R}^{>0}$. On sait aussi que $\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, |\partial f(\eta)| \in \mathbb{R}^{>0}$. Donc, par décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^{>0}$, on a

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, \frac{1}{\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \geq \frac{1}{|\partial f(\eta)|} \quad (4)$$

Finalement, par (3) et (4), on a

$$\forall \xi, \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \geq \frac{|\partial^2 f(\xi)|}{2|\partial f(\eta)|} = \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right|$$

On a donc bien montré la propriété (1).

1.3 Preuve de la suite convergente

Par les propriétés du supremum, on sait que

$$\exists(x_n) \subset \{|\partial^2 f(x)| | x \in I\} \text{ tq } x_n \rightarrow \sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}$$

De même, par les propriétés de l'infimum, on sait que

$$\exists(y_n) \subset \{|\partial f(x)| | x \in I\} \text{ tq } y_n \rightarrow \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}$$

Remarquons que par hypothèse, $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0$. Comme un infimum est en particulier un minorant, on sait que

$$\forall \eta \in I, |\partial f(\eta)| \geq \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0 \quad \text{et donc} \quad \forall \eta \in I, \partial f(\eta) \neq 0$$

En particulier, la suite (y_n) ne s'annule donc jamais. Prenons $(z_n) = (x_n/(2y_n))$. Alors, on a bien

$$(z_n) \subset \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\}$$

Enfin, par les propriétés des limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}{2 \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n} = \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}}$$

On a donc bien montré la propriété (2), ce qui termine la preuve de l'exercice 1.

2 Exercice 2:

2.1 Partie a:

Objectif : Trouver les racines de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - 8x^2 - 4$. Autrement dit, nous devons trouver les solutions de $P \equiv x^4 - 8x^2 - 4 = 0$.

Tout d'abord, posons $y = x^2$. On obtient :

$$Q \equiv y^2 - 8y - 4 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-8)^2 - 4 * 1 * 4 \\ &= 64 + 16 \\ &= 80\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{1,2} &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{80}}{2} \\ \Rightarrow y_1 &= \frac{8 + \sqrt{80}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{8 - \sqrt{80}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{8 + \sqrt{16 * 5}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{8 - \sqrt{16 * 5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{8 + 4 * \sqrt{5}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{8 - 4 * \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \text{ et } y_2 = 4 - 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

Donc, les racines de Q sont $y_1 = 4 + 2 * \sqrt{5}$ et $y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5}$ mais nous voulons les racines de P. Donc, on obtient (on sait que $y = x^2$):

$$\begin{aligned}y_1 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \text{ et } y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ (x_{1,2})^2 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \text{ et } (x_{3,4})^2 = 4 - 2 * \sqrt{5}\end{aligned}$$

Cependant, $(x_{3,4})^2 = 4 - 2 * \sqrt{5}$ est impossible car on a :

$$\begin{aligned}2 &= \sqrt{4} \leq \sqrt{5} \leq \sqrt{9} = 3 \text{ car } \sqrt{\cdot} \text{ est croissante} \\ \text{Donc } 4 - 2 * \sqrt{5} &\leq 4 - 2 * \sqrt{4} = 4 - 2 * 2 = 0 \\ \text{i.e. } (x_{3,4})^2 &= 4 - 2 * \sqrt{5} \leq 0\end{aligned}$$

Finalement, les racines de P sont :

$$\begin{aligned}(x_{1,2})^2 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= \pm \sqrt{4 + 2 * \sqrt{5}}\end{aligned}$$

2.2 Partie B:

[1] Montrons que f est paire.

[2] Montrons que f est croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$

[3] Montrons que f est décroissante sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

[4] Montrer que f est positive sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$ et sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

[5] Montrer que f est négative sur $[-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; \sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

Preuve :

[1] trivial car une somme de fonction paire est paire.

[2] Montrons que $\forall x, y \in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Soient $x, y \in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[,$ supposons $x \leq y$. Montrons que $f(x) \leq f(y)$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(y) &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 4 \leq y^4 - 8y^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 \leq y^4 - 8y^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - (8y^2 - 8x^2) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - 8(y^2 - x^2) \\ &\Leftrightarrow 8 \leq (y^2 + x^2) \end{aligned} \quad \text{pour } y \neq x$$

Vrai car vrai pour $y = x = \sqrt{4+2*\sqrt{5}}$ et vrai pour toutes valeurs plus grandes car la fonction x^2 est croissantes sur \mathbb{R}^+ . Pour $x = y$, trivial car $f(x) = f(y)$.

[3] trivial car, par le fait que la fonction f est paire et croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[,$ on a que f est décroissante sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$.

[4] par la croissance sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$ ainsi que sa décroissance sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$, on sait que $\forall x \in] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[, f(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}) \leq f(x)$ (car f est paire). Mais $f(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}) = 0$ car c'est une racine de f (pareil pour $f(-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}) = 0$).

Donc $0 = f(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}) \leq f(x)$ càd $0 \leq f(x)$. Donc f est positive sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$

[5] Montrons que f est négative sur $[-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; \sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

- Montrons que $-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}$ et $\sqrt{4+2*\sqrt{5}}$ sont des racines simples :
 $\partial f(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}) > 0$ et $\partial f(-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}) < 0$ donc ce sont des racines simples.
- On sait que f est continue, ses racines sont simples et f est positive sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$ donc f est négative sur $[-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; \sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

Finalement, pour la racine $-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}$, tout intervalle $[a, b]$, avec $a \in] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$ et $b \in] -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; \sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$, sont valides pour la méthode de bisection. De même pour la racine $\sqrt{4+2*\sqrt{5}}$, tout intervalle $[a, b]$, avec $a \in] -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; \sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$ et $b \in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$, sont valides pour la méthode de bisection.

2.3 Partie C:

Pour la racine positive de f ($x^{+*} = \sqrt{4 + 2\sqrt{5}}$), prenons l'intervalle $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}] \ni x^{+*}$, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{2}\right)f\left(\frac{7}{2}\right) &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-239}{16} \frac{769}{16} &< 0 \end{aligned}$$

et f est convexe sur $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$. (*) (voir en fin d'exercice)

Regardons l'intersection de la tangente au point $(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2}))$ avec l'axe des abscisses,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{2}\right) + \partial f\left(\frac{5}{2}\right)(x_1 - \frac{5}{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{1139}{360} \end{aligned}$$

De même pour la tangente au point $(\frac{7}{2}, f(\frac{7}{2}))$,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{7}{2}\right) + \partial f\left(\frac{7}{2}\right)(x_2 - \frac{7}{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{5651}{1848} \end{aligned}$$

On a bien que $x_1, x_2 \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$;

alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite par la méthode de Newton est bien définie (pour tout n , $\partial f(x_n) \neq 0$ et $x_n \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$) et converge vers l'unique racine de f dans $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$.

Même raisonnement pour la racine négative de f ($x^{-*} = -\sqrt{4 + 2\sqrt{5}}$) en prenant l'intervalle $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}] \ni x^{-*}$, car f est une fonction paire (somme de fonctions paires).

(*)

- Montrons que ∂f est croissante sur $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$

Soit $x, y \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$.

Supposons $x \leq y$. Montrons que $\partial f(x) \leq \partial f(y)$. On a :

$$\begin{aligned} \partial f(x) \leq \partial f(y) &\Leftrightarrow \partial_x(x^4 - 8x^2 - 4) \leq \partial_y(y^4 - 8y^2 - 4) \\ &\Leftrightarrow 4x^3 - 16x \leq 4y^3 - 16y \\ &\Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) \leq 4y(y^2 - 4) \\ &\Leftrightarrow x(x^2 - 4) \leq y(y^2 - 4) \end{aligned}$$

Comme $x, y \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}] \subset \mathbb{R}^+$, on peut juste montrer que :

$$(x^2 - 4) \leq (y^2 - 4)$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq y^2 \text{ ok car par hypothèse } x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2 \text{ car } x, y \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$$

et x^2 est croissante sur \mathbb{R}^+ .

Donc $\partial f(x) \leq \partial f(y)$.

- Montrons que f est convexe sur $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$
 Vrai car si ∂f est croissante sur $[a, b]$ cela implique que f est convexe sur $[a, b]$ (propriété du syllabus)

3 Exercice 3:

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application unimodale càd $\exists m \in [a, b]$ tel que f est strictement croissante sur $[a, m]$ et strictement décroissante sur $[m, b]$.

3.1 Partie a:

Montrons que f possède au plus 2 racines.

Supposons par l'absurde que f possède 3 racines càd

$\exists u \neq v \neq w \in [a, b], f(u) = f(v) = f(w) = 0$.

Sans perte de généralité, supposons que $u < v < w$.

On a donc 3 cas :

[1] soit $u \in [a, m[$ et $v, w \in]m, b]$

[2] soit $u, v \in [a, m[$ et $w \in]m, b]$

[3] soit u, v ou w est notre m .

Montrons donc que tous les cas sont impossibles.

[1] on sait que f est strictement décroissante sur $[m, b]$ (et donc strictement décroissante sur $]m, b]$ par inclusion) donc $v < w \Rightarrow f(v) > f(w)$ or ce sont 2 racines de f . **Contradiction.**

[2] on sait que f est strictement croissante sur $[a, m]$ (et donc strictement croissante sur $[a, m[$ par inclusion) donc $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$ or ce sont 2 racines de f . **Contradiction.**

[3]

[3.1] Si u est m , alors u, v et $w \in [m, b]$ et par [1], c'est impossible. **Contradiction.**

[3.2] Si w est m , alors u, v et $w \in [a, m]$ et par [2], c'est impossible. **Contradiction.**

[3.3] Si v est m , alors $\forall x \in [a, m[, y \in]m, b], f(x) < f(v)$ (par la stricte croissance de f) et $f(v) > f(y)$ (par la stricte décroissance de f). Cependant, en particulier, $x = u$ et $y = v$ et qui sont racines de f . Donc, $0 = f(u) < f(v) = 0$ et $0 = f(v) > f(w) = 0$ qui sont tout 2 impossibles. **Contradiction.**

On suppose maintenant pour le reste de la question 3 que $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$. De plus, on suppose que toutes les racines de la dérivée de f sont simples.

3.2 Partie b:

On doit montrer que la dérivée de f possède une unique racine dans $]a, b[$.

3.2.1 Existence de la racine

Montrons d'abord que la dérivée de f a une racine dans $]a, b[$. Par l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$, on sait que ∂f est continue. On sait également par unimodalité que

$$\exists m \in]a, b[, f \text{ est croissante sur }]a, m[\text{ et } f \text{ est décroissante sur }]m, b[$$

Comme la dérivée d'une fonction croissante (resp. décroissante) est positive (resp. négative), et comme $(a + m)/2 \in]a, m[$ et $(m + b)/2 \in]m, b[$, on sait que

$$\partial f((a + m)/2) \geq 0 \text{ et } \partial f((m + b)/2) \leq 0$$

On peut alors séparer en 3 cas exhaustifs :

- Cas 1 : $\partial f((a + m)/2) = 0$
Alors, comme $(a + m)/2 \in]a, m[\subset]a, b[$, on a bien trouvé une racine de ∂f dans $]a, b[$.
- Cas 2 : $\partial f((m + b)/2) = 0$
Alors, comme $(m + b)/2 \in]m, b[\subset]a, b[$, on a bien trouvé une racine de ∂f dans $]a, b[$.
- Cas 3 : $\partial f((a + m)/2) > 0$ et $\partial f((m + b)/2) < 0$
Comme on sait que ∂f est continue, et comme $\partial f((a + m)/2) \partial f((m + b)/2) < 0$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et on obtient

$$\exists \xi \in \left] \frac{a + m}{2}, \frac{m + b}{2} \right[, \partial f(\xi) = 0$$

Comme $\xi \in](a + m)/2, (m + b)/2[\subset]a, b[$, on a bien trouvé une racine de ∂f dans $]a, b[$.

Par exhaustivité des cas, on a bien montré l'existence d'une racine de ∂f dans $]a, b[$.

3.2.2 Unicité de la racine

- Montrons que $\partial f(m) = 0$
On sait, car f est unimodale, que :
 - f est strictement croissante sur $[a, m]$ donc pour tout x dans $[a, m]$, $\partial f(x) \geq 0$. En particulier $\partial f(m) \geq 0$.
 - f est strictement décroissante sur $[m, b]$ donc pour tout x dans $[m, b]$, $\partial f(x) \leq 0$. En particulier $\partial f(m) \leq 0$.

\Rightarrow On a donc $\partial f(m) = 0$

- Montrons l'unicité de la racine de la dérivée
On suppose l'existence d'un $\xi \in [a, m]$ tel que $\partial f(\xi) = 0 = \partial f(m)$ avec $m \neq \xi$. Donc ξ est dans $[a, m[$. Comme f est strictement croissante sur $[a, m]$ par définition de f , on a que pour tout x dans $[a, m]$, $\partial f(x) \geq 0$. Donc, pour tout x dans $[a, m]$, $\partial f(x) \geq \partial f(\xi) = 0$. Ceci implique que ξ est un minimum local de ∂f , donc $\partial^2 f(\xi) = 0$. Or par hypothèse sur f , ξ est une racine simple de ∂f (càd $\partial^2 f(\xi) \neq 0$). On a une contradiction. Donc on a l'unicité.

3.3 Partie c:

Algorithme 1 rootDeriv

Entrée : ∂f , dérivée de f ; $a, b \in \mathbb{R}$.

Sortie : L'ensemble contient l'unique racine de la fonction df dans l'intervalle $]a, b[$

$dfa \leftarrow df(a)$

$dfb \leftarrow df(b)$

$prec \leftarrow 1e^{-10}$

si $dfa > 0$ **et** $dfb < 0$ **alors**

$x \leftarrow \text{Root1D.brent}(df, a, b, tol = prec)$

retourner x

sinon

$mid \leftarrow \frac{a+b}{2}$

$dfm \leftarrow df(mid)$

si $dfm = 0$ **alors**

retourner mid

sinon si $dfm > 0$ **alors**

retourner $\text{rootDeriv}(df, mid, b)$

sinon

retourner $\text{rootDeriv}(df, a, mid)$

fin si

fin si

Algorithme 2 rootFinding

Entrée : f , une fonction unimodale ; ∂f , dérivée de f ; $a, b \in \mathbb{R}$.

Sortie : L'ensemble des solutions de f dans l'intervat $[a, b]$.

```
 $fa \leftarrow f(a)$ 
 $fb \leftarrow f(b)$ 
si  $fa > 0$  et  $fb > 0$  alors
    retourner  $\emptyset$ 
sinon si  $fa = 0$  et  $fb > 0$  alors
    retourner  $[a]$ 
sinon si  $fa > 0$  et  $fb = 0$  alors
    retourner  $[b]$ 
sinon
     $m = \text{rootDeriv}(df, a, b)$  et  $prec = 1e^{-10}$ 
    si  $fa > 0$  et  $fb \leq 0$  alors
         $x \leftarrow \text{Root1D.brent}(f, m, b, tol = prec)$ 
    sinon si  $fa \leq 0$  et  $fb > 0$  alors
         $x \leftarrow \text{Root1D.brent}(f, a, m, tol = prec)$ 
        retourner  $[x]$ 
    sinon
         $fm \leftarrow f(m)$ 
        si  $fm > 0$  alors
             $x \leftarrow \text{Root1D.brent}(f, a, m, tol = prec)$ 
             $y \leftarrow \text{Root1D.brent}(f, m, b, tol = prec)$ 
            retourner  $[x, y]$ 
        sinon si  $fm = 0$  alors
            retourner  $[m]$ 
        sinon
            retourner  $\emptyset$ ;
    fin si
fin si
fin si
```
