Université de Mons
Faculté des Sciences
Département des mathématiques

Rapport du TP2

Analyse Numérique

Professeur:
Christophe Troestler
Quentin Lambotte

Auteurs:
Loïc Dupont
Paolo Marcelis
Maximilien Vanhaverbeke

Année académique 2020-2021

Table des matières

Soit $M, N \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ avec rang$A = N \leq M$. Soit $b \in \mathbb{R}^n$.
Intéressons-nous à la résolution de l'équation $Ax = b$.
Les exercices suivants consistent à regarder la meilleur solution au sens des moindres carrés càd la valeur de x qui minimise la fonction :

$$x \mapsto |Ax - b|_2 \tag{1}$$

Pour les questions suivantes, nous allons utiliser les notations ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M,1} & \cdots & a_{M,N} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} = (b_i)_{1\leq i\leq M}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = (x_j)_{1\leq j\leq N}$$

1 Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}^N$. On doit montrer que x réalise le minimum de $x \mapsto |Ax - b|_2$ (1) si et seulement si x réalise le minimum de

$$x \mapsto |Ax - b|_2^2 \tag{2}$$

Commençons par montrer que si x réalise le minimum de (1), alors x réalise le minimum de (2).
Supposons que x réalise le minimum de (1) càd

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ |Ax - b|_2 \leq |Ay - b|_2$$

Comme toute norme est définie positive, on sait que pour tout $z \in \mathbb{R}^M,\ |z|_2 \in [0, +\infty[$.
Alors, comme chaque membre de l'inégalité ci-dessus est positif, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ |Ax - b|_2^2 \leq |Ay - b|_2^2$$

càd x réalise le minimum de (2).
Il reste à montrer que si x réalise le minimum de (2), alors x réalise le minimum de (1).
Supposons que x réalise le minimum de (2) càd

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ |Ax - b|_2^2 \leq |Ay - b|_2^2$$

Comme tout carré d'un nombre réel est positif, par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ \sqrt{|Ax - b|_2^2} \leq \sqrt{|Ay - b|_2^2}$$

Comme les normes sont définies positives, $\sqrt{|Ax - b|_2^2} = |Ax - b|_2$ et $\forall y \in \mathbb{R}^N,\ \sqrt{|Ay - b|_2^2} = |Ay - b|_2$.
Par conséquent, on a bien

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ |Ax - b|_2 \leq |Ay - b|_2$$

càd x réalise le minimum de (1).
On a donc bien montré que x réalise le minimum de (1), alors x réalise le minimum de (2).

2 Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}^N$. On doit montrer que x réalise le minimum de $x \mapsto |Ax - b|_2$ (1) si et seulement si x vérifie l'équation

$$A^T Ax = A^T b \tag{3}$$

Commençons par montrer que si x réalise le minimum de (1), alors x vérifie l'équation (3).
Supposons que x réalise le minimum de (1) càd

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ |Ax - b|_2 \leq |Ay - b|_2$$

Par l'exercice 1, on sait que c'est équivalent à dire que

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ |Ax - b|_2^2 \leq |Ay - b|_2^2$$

Commençons par calculer explicitement $f : x \mapsto |Ax - b|_2^2$. On a

$$\begin{aligned}
|Ax - b|_2^2 &= \left| \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M,1} & \cdots & a_{M,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \right|_2^2 \\
&= \left| \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^N a_{1,j} x_j\right) - b_1 \\ \vdots \\ \left(\sum_{j=1}^N a_{M,j} x_j\right) - b_M \end{pmatrix} \right|_2^2 \\
&= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^M \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - b_i \right)^2} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^M \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - b_i \right)^2
\end{aligned}$$

On sait donc que x réalise le minimum de

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^M \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - b_i \right)^2$$

En particulier, il réalise également le minimum de toute restriction de f à un ensemble contenant x.
On sait donc que pour tout $k \in \mathbb{N}^{\leq n}$, x réalise le minimum de

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x_k \mapsto \sum_{i=1}^M \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - b_i \right)^2$$

Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^{\leq N}$,

$$\begin{aligned}
\partial_k \sum_{i=1}^M \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - b_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^M \left(\left(2 \sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - 2b_i \right) \partial_k \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - b_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^M \left(\left(2 \sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - 2b_i \right) a_{i,k}
\end{aligned}$$

On sait que $x \in \operatorname{int}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ et qu'il s'agit d'un minimum global de f_k et donc en particulier un minimum local. La propriété VI.16 du syllabus d'analyse 1 nous dit alors que la dérivée de f_k s'annule en x. On sait donc que

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^{\leq N},\ \partial f_k = 0 \quad & \text{càd} \quad \forall k \in \mathbb{N}^{\leq N},\ \sum_{i=1}^{M}\left(\left(2\sum_{j=1}^{N} a_{i,j}x_j\right) - 2b_i\right) a_{i,k} = 0 \\
& \text{càd} \quad \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M}\left(\left(2\sum_{j=1}^{N} a_{i,j}x_j\right) - 2b_i\right) a_{i,1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{M}\left(\left(2\sum_{j=1}^{N} a_{i,j}x_j\right) - 2b_i\right) a_{i,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \text{càd} \quad 2\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M}\left(a_{i,1}\sum_{j=1}^{N}(a_{i,j}x_j)\right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{M}\left(a_{i,N}\sum_{j=1}^{N}(a_{i,j}x_j)\right) \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M}(a_{i,1}b_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{M}(a_{i,N}b_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \text{càd} \quad 2A^TAx - 2A^Tb = 0 \\
& \text{càd} \quad A^TAx = A^Tb
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que si x réalise le minimum de (1), alors x vérifie l'équation (3).
Il reste à monter que si x vérifie l'équation (3), alors x réalise le minimum de (1).
Supposons que x vérifie l'équation (3) càd $A^TAx = A^Tb$.
On sait que $\forall y \in \mathbb{R}^N,\ |Ay - b|_2^2 = (Ay - b \mid Ay - b) = (Ay \mid Ay) - 2(Ay \mid b) + (b \mid b)$ par bilinéarité du produit scalaire. Par conséquent

$$\begin{aligned}
x \text{ réalise le minimum de (1)} &\iff \forall y \in \mathbb{R}^n,\ |Ax - b|_2^2 \leq |Ay - b|_2^2 \\
&\iff (Ax - b \mid Ax - b) \leq (Ay - b \mid Ay - b) \\
&\iff (Ax \mid Ax) - 2(Ax \mid b) \leq (Ay \mid Ay) - 2(Ay \mid b)
\end{aligned}$$

Par défintion du produit scalaire, on a

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n,\ (u \mid v) = \sum_{i=1}^{n}(u_1 v_1)$$

On remarque donc que $\forall u, v \in \mathbb{R}^M,\ (u \mid v)$ est égal à l'unique terme de la matrice u^Tv.
Or, par hypothèse on sait que $A^TAx = A^Tb$ et donc $(Ax)^TAx = x^TA^TAx = x^TA^Tb = (Ax)^Tb$.
Par conséquent $(Ax \mid Ax) = (Ax \mid b)$ et donc

$$\begin{aligned}
x \text{ réalise le minimum de (1)} &\iff (Ax \mid b) - 2(Ax \mid b) \leq (Ay \mid Ay) - 2(Ay \mid b) \\
&\iff 0 \leq (Ay \mid Ay) - 2(Ay \mid b) + (Ax \mid b)
\end{aligned}$$