
Analyse Numérique : Rapport

TP 1

Professeurs:

Christophe TROESTLER
Quentin LAMBOTTE

Auteurs:

Loïc DUPONT
Maximilien VANHAVERBEKE
Paulo MARCELIS

Contents

1	Exercice 1:	2
1.1	Remarque sur l'existence du membre de gauche	2
1.2	Preuve de la majoration	2
1.3	Preuve de la suite convergente	3
2	Exercice 2:	4
2.1	Partie a:	4
2.2	Partie B:	5
2.3	Partie C:	6
3	Exercice 3:	7
3.1	Partie a:	7
3.2	Partie b:	8
	3.2.1 Existence de la racine	8
	3.2.2 Unicité de la racine	8
3.3	Partie c:	9

1 Exercice 1:

Soit I un intervalle compact non-vidé. Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$. Supposons que $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0$. On doit montrer que

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} = \sup \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\}$$

càd

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \text{ est un majorant de } \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\} \quad (1)$$

et

$$\exists(z_n) \subset \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\} \text{ tq } z_n \rightarrow \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \quad (2)$$

1.1 Remarque sur l'existence du membre de gauche

On sait par l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ que ∂f et $\partial^2 f$ sont des fonctions continues sur I . Comme la valeur absolue est aussi une fonction continue, par composition de fonctions continues, $|\partial f|$ et $|\partial^2 f|$ sont des aussi fonctions continues sur I .

Alors, comme I est un compact non-vidé par hypothèse, le théorème des bornes atteintes nous dit que ces fonctions atteignent leurs bornes. En particulier,

$$\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} \in \mathbb{R}$$

1.2 Preuve de la majoration

Comme un supremum est en particulier un majorant, on sait que

$$\forall \xi \in I, \sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\} \geq |\partial^2 f(\xi)| \quad (3)$$

De même, un infimum étant en particulier un minorant, on sait que

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} \leq |\partial f(\eta)|$$

Comme $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0$ par hypothèse, $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} \in \mathbb{R}^{>0}$. On sait aussi que $\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, |\partial f(\eta)| \in \mathbb{R}^{>0}$. Donc, par décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^{>0}$, on a

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, \frac{1}{\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \geq \frac{1}{|\partial f(\eta)|} \quad (4)$$

Finalement, par (3) et (4), on a

$$\forall \xi, \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \geq \frac{|\partial^2 f(\xi)|}{2|\partial f(\eta)|} = \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right|$$

On a donc bien montré la propriété (1).

1.3 Preuve de la suite convergente

Par les propriétés du supremum, on sait que

$$\exists(x_n) \subset \{|\partial^2 f(x)| | x \in I\} \text{ tq } x_n \rightarrow \sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}$$

De même, par les propriétés de l'infimum, on sait que

$$\exists(y_n) \subset \{|\partial f(x)| | x \in I\} \text{ tq } y_n \rightarrow \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}$$

Remarquons que par hypothèse, $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0$. Comme un infimum est en particulier un minorant, on sait que

$$\forall \eta \in I, |\partial f(\eta)| \geq \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0 \quad \text{et donc} \quad \forall \eta \in I, \partial f(\eta) \neq 0$$

En particulier, la suite (y_n) ne s'annule donc jamais. Prenons $(z_n) = (x_n/(2y_n))$. Alors, on a bien

$$(z_n) \subset \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\}$$

Enfin, par les propriétés des limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}{2 \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n} = \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}}$$

On a donc bien montré la propriété (2), ce qui termine la preuve de l'exercice 1.

2 Exercice 2:

2.1 Partie a:

Objectif : Trouver les racines de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - 8x^2 - 4$. Autrement dit, nous devons trouver les solutions de $P \equiv x^4 - 8x^2 - 4 = 0$.

Tout d'abord, posons $y = x^2$. On obtient :

$$Q \equiv y^2 - 8y - 4 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-8)^2 - 4 * 1 * 4 \\ &= 64 + 16 \\ &= 80\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{80}}{2} \\ \Rightarrow y_1 &= \frac{8 + \sqrt{80}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{8 - \sqrt{80}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{8 + \sqrt{16 * 5}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{8 - \sqrt{16 * 5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{8 + 4 * \sqrt{5}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{8 - 4 * \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \text{ et } y_2 = 4 - 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

Donc, les racines de Q sont $y_1 = 4 + 2 * \sqrt{5}$ et $y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5}$ mais nous voulons les racines de P. Donc, on obtient : (on sait que $y = x^2$)

$$\begin{aligned}y_1 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \text{ et } y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ (x_1)^2 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \text{ et } (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ \text{Cependant, } (x_2)^2 &= 4 - 2 * \sqrt{5} \text{ est impossible car on a :} \\ 2 &= \sqrt{4} \leq \sqrt{5} \leq \sqrt{9} = 3 \text{ car } \sqrt{} \text{ est croissante} \\ \text{Donc } 4 - 2 * \sqrt{5} &\leq 4 - 2 * \sqrt{4} = 4 - 2 * 2 = 0 \\ \text{i.e. } (x_2)^2 &= 4 - 2 * \sqrt{5} \leq 0\end{aligned}$$

Finalement, les racines de P sont :

$$\begin{aligned}(x_1)^2 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \pm \sqrt{4 + 2 * \sqrt{5}}\end{aligned}$$

2.2 Partie B:

[1] Montrons que f est paire.

[2] Montrons que f est croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$

[3] Montrons que f est décroissante sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

[4] Montrer que f est positive sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$ et sur $] -\infty; \sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

[5] Montrer que f est négative sur $[-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; \sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

Preuve :

[1] trivial car une somme de fonction paire est paire.

[2] Montrons que $\forall x, y \in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Soient $x, y \in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$, supposons $x \leq y$. Montrons que $f(x) \leq f(y)$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(y) &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 4 \leq y^4 - 8y^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 \leq y^4 - 8y^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - (8y^2 - 8x^2) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - 8(y^2 - x^2) \end{aligned}$$

ok car la fonction x^2 et x^4 sont croissantes sur \mathbb{R}^+ et par hypothèse, $x \leq y$.

[3] trivial car, par le fait que la fonction f est paire et croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$, on a que f est décroissante sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$.

[4] par la croissance sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$ ainsi que sa décroissance sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$, on sait que $\forall x \in] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[, f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$.

Mais $f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$ car c'est une racine de f (pareil pour $f\left(-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$).

Donc $0 = f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$ càd $0 \leq f(x)$. Donc f est positive sur $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$

[5] Vu que la fonction est paire et que l'intervalle est de la forme $] -a; a]$, alors on peut se restreindre à regarder l'intervalle $[0; \sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$.

TODO

2.3 Partie C:

Pour la racine positive de f ($x^{+*} = \sqrt{4 + 2\sqrt{5}}$), prenons l'intervalle $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}] \ni x^{+*}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\frac{5}{2})f(\frac{7}{2}) &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-239}{16} \frac{769}{16} &< 0 \end{aligned}$$

et f est convexe sur $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$.

Regardons l'intersection de la tangente au point $(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2}))$ avec l'axe des abscisses,

$$\begin{aligned} f(\frac{5}{2}) + \partial f(\frac{5}{2})(x_1 - \frac{5}{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{1139}{360} \end{aligned}$$

De même pour la tangente au point $(\frac{7}{2}, f(\frac{7}{2}))$,

$$\begin{aligned} f(\frac{7}{2}) + \partial f(\frac{7}{2})(x_2 - \frac{7}{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{5651}{1848} \end{aligned}$$

On a bien que $x_1, x_2 \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$;

alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite par la méthode de Newton est bien définie (pour tout n , $\partial f(x_n) \neq 0$ et $x_n \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$) et converge vers l'unique racine de f dans $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$.

Même raisonnement pour la racine négative de f ($x^{-*} = -\sqrt{4 + 2\sqrt{5}}$) en prenant l'intervalle $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}] \ni x^{-*}$, car f est une fonction paire (somme de fonctions paires).

3 Exercice 3:

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application unimodale càd $\exists m \in [a, b]$ tel que f est strictement croissante sur $[a, m]$ et strictement décroissante sur $[m, b]$.

3.1 Partie a:

Montrons que f possède au plus 2 racines.

Supposons par l'absurde que f possède 3 racines càd $\exists u \neq v \neq w \in [a, b], f(u) = f(v) = f(w) = 0$.

Sans perte de généralité, supposons que $u < v < w$.

On a donc 3 cas :

- [1] soit $u \in [a, m[$ et $v, w \in]m, b]$
- [2] soit $u, v \in [a, m[$ et $w \in]m, b]$
- [3] soit u, v ou w est notre m .

Montrons donc que tous les cas sont impossibles.

- [1] on sait que f est strictement décroissante sur $[m, b]$ (et donc strictement décroissante sur $]m, b]$ par inclusion) donc $v < w \Rightarrow f(v) > f(w)$ or ce sont 2 racines de f . **Contradiction.**
- [2] on sait que f est strictement croissante sur $[a, m]$ (et donc strictement croissante sur $[a, m[$ par inclusion) donc $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$ or ce sont 2 racines de f . **Contradiction.**
- [3]

[3.1] Si u est m , alors u, v et $w \in [m, b]$ et par [1], c'est impossible. **Contradiction.**

[3.2] Si w est m , alors u, v et $w \in [a, m]$ et par [2], c'est impossible. **Contradiction.**

[3.3] Si v est m , alors $\forall x \in [a, m[, y \in]m, b], f(x) < f(v)$ (par la stricte croissance de f) et $f(v) > f(y)$ (par la stricte décroissance de f). Cependant, en particulier, $x = u$ et $y = v$ et qui sont racines de f . Donc, $0 = f(u) < f(v) = 0$ et $0 = f(v) > f(w) = 0$ qui sont tout 2 impossibles. **Contradiction.**

On suppose maintenant pour le reste de la question 3 que $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$. De plus, on suppose que toutes les racines de la dérivée de f sont simples.

3.2 Partie b:

On doit montrer que la dérivée de f possède une unique racine dans $]a, b[$.

3.2.1 Existence de la racine

Montrons d'abord que la dérivée de f a une racine dans $]a, b[$. Par l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$, on sait que ∂f est continue. On sait également par unimodalité que

$$\exists m \in]a, b[, f \text{ est croissante sur }]a, m[\text{ et } f \text{ est décroissante sur }]m, b[$$

Comme la dérivée d'une fonction croissante (resp. décroissante) est positive (resp. négative), et comme $(a + m)/2 \in]a, m[$ et $(m + b)/2 \in]m, b[$, on sait que

$$\partial f((a + m)/2) \geq 0 \text{ et } \partial f((m + b)/2) \leq 0$$

On peut alors séparer en 3 cas exhaustifs :

- Cas 1 : $\partial f((a + m)/2) = 0$
Alors, comme $(a + m)/2 \in]a, m[\subset]a, b[$, on a bien trouvé une racine de ∂f dans $]a, b[$.
- Cas 2 : $\partial f((m + b)/2) = 0$
Alors, comme $(m + b)/2 \in]m, b[\subset]a, b[$, on a bien trouvé une racine de ∂f dans $]a, b[$.
- Cas 3 : $\partial f((a + m)/2) > 0$ et $\partial f((m + b)/2) < 0$
Comme on sait que ∂f est continue, et comme $\partial f((a + m)/2) \partial f((m + b)/2) < 0$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et on obtient

$$\exists \xi \in \left] \frac{a + m}{2}, \frac{m + b}{2} \right[, \partial f(\xi) = 0$$

Comme $\xi \in](a + m)/2, (m + b)/2[\subset]a, b[$, on a bien trouvé une racine de ∂f dans $]a, b[$.

Par exhaustivité des cas, on a bien montré l'existence d'une racine de ∂f dans $]a, b[$.

3.2.2 Unicité de la racine

Il reste à montrer que cette racine est unique. Supposons par l'absurde que ∂f a au moins 2 racines distinctes c-à-d

$$\exists \xi_1 \neq \xi_2 \in]a, b[, \partial f(\xi_1) = \partial f(\xi_2) = 0$$

Supposons sans perte de généralité que $\xi_1 < \xi_2$.

3.3 Partie c:

Algorithme 1 Recherche de racine

Entrée : f , une fonction unimodale ; ∂f , dérivée de f ; $a, b \in \mathbb{R}$.

Sortie : Une liste des racines de f notée \emptyset , $\{x_1\}$ ou $\{x_1, x_2\}$.

```
 $fa \leftarrow f(a)$ 
 $fb \leftarrow f(b)$ 
 $dfa \leftarrow df(a)$ 
 $dfb \leftarrow df(b)$ 
 $liste \leftarrow \{\}$ 
si ( $fa < 0$  et  $fb > 0$ ) ou ( $fa < 0$  et  $fb = 0$  et  $dfb > 0$ ) alors
   $x \leftarrow \text{Root1D.brent}(f, a, b)$ 
  ajouter  $x$  à la liste
sinon si ( $fa > 0$  et  $fb < 0$ ) ou ( $fa = 0$  et  $fb < 0$  et  $dfa < 0$ ) alors
   $x \leftarrow \text{Root1D.brent}(f, a, b)$ 
  ajouter  $x$  à la liste
sinon si  $fa = 0$  et  $fb = 0$  alors
  ajouter  $a, b$  à la liste
sinon si  $fa = 0$  et  $fb > 0$  alors
  ajouter  $a$  à la liste
sinon si  $fa > 0$  et  $fb = 0$  alors
  ajouter  $b$  à la liste
sinon si  $fa < 0$  et  $fb = 0$  et  $dfb < 0$  alors
   $m \leftarrow \text{Root1D.brent}(df, a, b)$ 
   $x \leftarrow \text{Root1D.brent}(f, a, m)$ 
  ajouter  $x, b$  à la liste
sinon si  $fa = 0$  et  $fb < 0$  et  $dfa > 0$  alors
   $m \leftarrow \text{Root1D.brent}(df, a, b)$ 
   $x \leftarrow \text{Root1D.brent}(f, m, b)$ 
  ajouter  $a, x$  à la liste
sinon si  $fa < 0$  et  $fb < 0$  et  $(dfa \times dfb) < 0$  alors
   $m \leftarrow \text{Root1D.brent}(df, a, b)$ 
   $x \leftarrow \text{Root1D.brent}(f, a, m)$ 
   $y \leftarrow \text{Root1D.brent}(f, m, b)$ 
  ajouter  $x, y$  à la liste
fin si
retourner liste
```
