

---

# Analyse Numérique : Rapport

## TP 1

---

*Professeurs:*

Christophe TROESTLER  
Quentin LAMBOTTE

*Auteurs:*

Loïc DUPONT  
Maximilien VANHAVERBEKE  
Paulo MARCELIS

# Contents

<b>1</b>	<b>Exercice 1:</b>	<b>2</b>
1.1	Preuve de la majoration . . . . .	2
1.2	Preuve de la suite convergente . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Exercice 2:</b>	<b>3</b>
2.1	Partie a: . . . . .	3
2.2	Partie B: . . . . .	4
2.3	Partie C: . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Exercice 3:</b>	<b>6</b>
3.1	Partie a: . . . . .	6
3.2	Partie b: . . . . .	7
3.2.1	Existence de la racine . . . . .	7
3.2.2	Unicité de la racine . . . . .	7

# 1 Exercice 1:

Soit  $I$  un intervalle. Soit  $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ . Supposons que  $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0$ . On doit montrer que

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} = \sup \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\}$$

càd

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \text{ est un majorant de } \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\} \quad (1)$$

et

$$\exists(z_n) \subset \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\} \text{ tq } z_n \rightarrow \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \quad (2)$$

## 1.1 Preuve de la majoration

Comme un supremum est en particulier un majorant, on sait que

$$\forall \xi \in I, \sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\} \geq |\partial^2 f(\xi)| \quad (3)$$

De même, un infimum étant en particulier un minorant, on sait que

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} \leq |\partial f(\eta)|$$

Comme  $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0$  par hypothèse,  $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} \in \mathbb{R}^{>0}$ . On sait aussi que  $\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, |\partial f(\eta)| \in \mathbb{R}^{>0}$ . Donc, par décroissance de la fonction  $x \mapsto 1/x$  sur  $\mathbb{R}^{>0}$ , on a

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, \frac{1}{\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \geq \frac{1}{|\partial f(\eta)|} \quad (4)$$

Finalement, par (3) et (4), on a

$$\forall \xi, \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0, \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}} \geq \frac{|\partial^2 f(\xi)|}{2|\partial f(\eta)|} = \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right|$$

On a donc bien montré la propriété (1).

## 1.2 Preuve de la suite convergente

Par les propriétés du supremum, on sait que

$$\exists(x_n) \subset \{|\partial^2 f(x)| | x \in I\} \text{ tq } x_n \rightarrow \sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}$$

De même, par les propriétés de l'infimum, on sait que

$$\exists(y_n) \subset \{|\partial f(x)| | x \in I\} \text{ tq } y_n \rightarrow \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}$$

Prenons  $(z_n) = (x_n/(2y_n))$ . Alors, on a bien

$$(z_n) \subset \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \mid \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\}$$

Enfin, par les propriétés des limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}{2 \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n} = \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}}$$

On a donc bien montré la propriété (2), ce qui termine la preuve de l'exercice 1.

## 2 Exercice 2:

### 2.1 Partie a:

**Objectif :** Trouver les racines de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - 8x^2 - 4$ . Autrement dit, nous devons trouver les solutions de  $P \equiv x^4 - 8x^2 - 4 = 0$ .

Tout d'abord, posons  $y = x^2$ . On obtient :

$$Q \equiv y^2 - 8y - 4 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-8)^2 - 4 * 1 * 4 \\ &= 64 + 16 \\ &= 80\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{80}}{2} \\ \Rightarrow y_1 &= \frac{8 + \sqrt{80}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{8 - \sqrt{80}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{8 + \sqrt{16 * 5}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{8 - \sqrt{16 * 5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{8 + 4 * \sqrt{5}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{8 - 4 * \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \text{ et } y_2 = 4 - 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

Donc, les racines de Q sont  $y_1 = 4 + 2 * \sqrt{5}$  et  $y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5}$  mais nous voulons les racines de P. Donc, on obtient : (on sait que  $y = x^2$ )

$$\begin{aligned}y_1 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \text{ et } y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ (x_1)^2 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \text{ et } (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ \text{Cependant, } (x_2)^2 &= 4 - 2 * \sqrt{5} \text{ est impossible car on a :} \\ 2 &= \sqrt{4} \leq \sqrt{5} \leq \sqrt{9} = 3 \text{ car } \sqrt{\phantom{x}} \text{ est croissante} \\ \text{Donc } 4 - 2 * \sqrt{5} &\leq 4 - 2 * \sqrt{4} = 4 - 2 * 2 = 0 \\ \text{i.e. } (x_2)^2 &= 4 - 2 * \sqrt{5} \leq 0\end{aligned}$$

Finalement, les racines de P sont :

$$\begin{aligned}(x_1)^2 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \pm \sqrt{4 + 2 * \sqrt{5}}\end{aligned}$$

## 2.2 Partie B:

[1] Montrons que  $f$  est paire.

[2] Montrons que  $f$  est croissante sur  $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$

[3] Montrons que  $f$  est décroissante sur  $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

[4] Montrer que  $f$  est positive sur  $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$  et sur  $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

[5] Montrer que  $f$  est négative sur  $[-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; \sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

**Preuve :**

[1] trivial car une somme de fonction paire est paire.

[2] Montrons que  $\forall x, y \in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .

Soient  $x, y \in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$ , supposons  $x \leq y$ . Montrons que  $f(x) \leq f(y)$ .

On a :

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(y) &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 4 \leq y^4 - 8y^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 \leq y^4 - 8y^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - (8y^2 - 8x^2) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - 8(y^2 - x^2) \end{aligned}$$

ok car la fonction  $x^2$  et  $x^4$  sont croissantes sur  $\mathbb{R}^+$  et par hypothèse,  $x \leq y$ .

[3] trivial car, par le fait que la fonction  $f$  est paire et croissante sur  $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$ , on a que  $f$  est décroissante sur  $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$ .

[4] par la croissance sur  $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$  ainsi que sa décroissance sur  $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$ , on sait que  $\forall x \in ] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[, f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$ .

Mais  $f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$  car c'est une racine de  $f$  (pareil pour  $f\left(-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$ ).

Donc  $0 = f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$  càd  $0 \leq f(x)$ . Donc  $f$  est positive sur  $] -\infty; -\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}}; +\infty[$

[5] Vu que la fonction est paire et que l'intervalle est de la forme  $] -a; a[$ , alors on peut se restreindre à regarder l'intervalle  $[0; \sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$ .

**TODO**

## 2.3 Partie C:

Je te laisse compléter Paolo ;)

### 3 Exercice 3:

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application unimodale càd  $\exists m \in [a, b]$  tel que  $f$  est strictement croissante sur  $[a, m]$  et strictement décroissante sur  $[m, b]$ .

#### 3.1 Partie a:

Montrons que  $f$  possède au plus 2 racines.

Supposons par l'absurde que  $f$  possède 3 racines càd  $\exists u \neq v \neq w \in [a, b], f(u) = f(v) = f(w) = 0$ .

Sans perte de généralité, supposons que  $u < v < w$ .

On a donc 3 cas :

- [1] soit  $u \in [a, m[$  et  $v, w \in ]m, b]$
- [2] soit  $u, v \in [a, m[$  et  $w \in ]m, b]$
- [3] soit  $u, v$  ou  $w$  est notre  $m$ .

Montrons donc que tous les cas sont impossibles.

- [1] on sait que  $f$  est strictement décroissante sur  $[m, b]$  (et donc strictement décroissante sur  $]m, b]$  par inclusion) donc  $v < w \Rightarrow f(v) > f(w)$  or ce sont 2 racines de  $f$ . **Contradiction.**
- [2] on sait que  $f$  est strictement croissante sur  $[a, m]$  (et donc strictement croissante sur  $[a, m[$  par inclusion) donc  $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$  or ce sont 2 racines de  $f$ . **Contradiction.**
- [3]
  - [3.1] Si  $u$  est  $m$ , alors  $u, v$  et  $w \in [m, b]$  et par [1], c'est impossible. **Contradiction.**
  - [3.2] Si  $w$  est  $m$ , alors  $u, v$  et  $w \in [a, m]$  et par [2], c'est impossible. **Contradiction.**
  - [3.3] Si  $v$  est  $m$ , alors  $\forall x \in [a, m[, y \in ]m, b], f(x) < f(v)$  (par la stricte croissance de  $f$ ) et  $f(v) > f(y)$  (par la stricte décroissance de  $f$ ). Cependant, en particulier,  $x = u$  et  $y = v$  et qui sont racines de  $f$ . Donc,  $0 = f(u) < f(v) = 0$  et  $0 = f(v) > f(w) = 0$  qui sont tout 2 impossibles. **Contradiction.**

On suppose maintenant pour le reste de la question 3 que  $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ . De plus, on suppose que toutes les racines de la dérivée de  $f$  sont simples.

## 3.2 Partie b:

On doit montrer que la dérivée de  $f$  possède une unique racine dans  $]a, b[$ .

### 3.2.1 Existence de la racine

Montrons d'abord que la dérivée de  $f$  a une racine dans  $]a, b[$ . Par l'hypothèse  $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ , on sait que  $\partial f$  est continue. On sait également par unimodalité que

$$\exists m \in ]a, b[, f \text{ est croissante sur } ]a, m[ \text{ et } f \text{ est décroissante sur } ]m, b[$$

Comme la dérivée d'une fonction croissante (resp. décroissante) est positive (resp. négative), et comme  $(a + m)/2 \in ]a, m[$  et  $(m + b)/2 \in ]m, b[$ , on sait que

$$\partial f((a + m)/2) \geq 0 \text{ et } \partial f((m + b)/2) \leq 0$$

On peut alors séparer en 3 cas exhaustifs :

- Cas 1 :  $\partial f((a + m)/2) = 0$   
Alors, comme  $(a + m)/2 \in ]a, m[ \subset ]a, b[$ , on a bien trouvé une racine de  $\partial f$  dans  $]a, b[$ .
- Cas 2 :  $\partial f((m + b)/2) = 0$   
Alors, comme  $(m + b)/2 \in ]m, b[ \subset ]a, b[$ , on a bien trouvé une racine de  $\partial f$  dans  $]a, b[$ .
- Cas 3 :  $\partial f((a + m)/2) > 0$  et  $\partial f((m + b)/2) < 0$   
Comme on sait que  $\partial f$  est continue, et comme  $\partial f((a + m)/2) \partial f((m + b)/2) < 0$ , on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et on obtient

$$\exists \xi \in \left] \frac{a + m}{2}, \frac{m + b}{2} \right[, \partial f(\xi) = 0$$

Comme  $\xi \in ](a + m)/2, (m + b)/2[ \subset ]a, b[$ , on a bien trouvé une racine de  $\partial f$  dans  $]a, b[$ .

Par exhaustivité des cas, on a bien montré l'existence d'une racine de  $\partial f$  dans  $]a, b[$ .

### 3.2.2 Unicité de la racine

Il reste à montrer que cette racine est unique. Supposons par l'absurde que  $\partial f$  a au moins 2 racines distinctes càd

$$\exists \xi_1 \neq \xi_2 \in ]a, b[, \partial f(\xi_1) = \partial f(\xi_2) = 0$$

Supposons sans perte de généralité que  $\xi_1 < \xi_2$ .