Université de Mons
Faculté des Sciences
Département des mathématiques

Analyse Numérique : Rapport
TP 1

Professeurs:
Christophe TROESTLER
Quentin LAMBOTTE

Auteurs:
Loïc DUPONT
Maximilien VANHAVERBEKE
Paulo MARCELIS

UMONS Université de Mons

Faculté des Sciences

Année académique 2020-2021

Contents

1 Exercice 1:

Soit I un intervalle compact non-vide. Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$. Supposons que $\inf\{|\partial f(x)||x \in I\} > 0$. On doit montrer que

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} = \sup\left\{\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)}\right| \middle| \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0\right\}$$

càd

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} \text{ est un majorant de } \left\{\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)}\right| \middle| \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0\right\} \tag{1}$$

et

$$\exists (z_n) \subset \left\{\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)}\right| \middle| \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0\right\} \text{ tq } z_n \to \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} \tag{2}$$

1.1 Remarque sur l'existance du membre de gauche

On sait par l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ que ∂f et $\partial^2 f$ sont des fonctions continues sur I. Comme la valeur absolue est aussi une fonction continue, par composition de fonctions continues, $|\partial f|$ et $|\partial^2 f|$ sont des aussi fonctions continues sur I.
Alors, comme I est un compact non-vide par hypothèse, le théorème des bornes atteintes nous dit que ces fonctions atteignent leurs bornes. En particulier,

$$\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \inf\{|\partial f(x)||x \in I\} \in \mathbb{R}$$

1.2 Preuve de la majoration

Comme un supremum est en particulier un majorant, on sait que

$$\forall \xi \in I,\ \sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\} \geq |\partial^2 f(\xi)| \tag{3}$$

De même, un infimum étant en particulier un minorant, on sait que

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0,\ \inf\{|\partial f(x)||x \in I\} \leq |\partial f(\eta)|$$

Comme $\inf\{|\partial f(x)||x \in I\} > 0$ par hypothèse, $\inf\{|\partial f(x)||x \in I\} \in \mathbb{R}^{>0}$. On sait aussi que $\forall \eta \in I$ tq $\partial f(\eta) \neq 0$, $|\partial f(\eta)| \in \mathbb{R}^{>0}$. Donc, par décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^{>0}$, on a

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0,\ \frac{1}{\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} \geq \frac{1}{|\partial f(\eta)|} \tag{4}$$

Finalement, par (3) et (4), on a

$$\forall \xi, \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0,\ \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} \geq \frac{|\partial^2 f(\xi)|}{2|\partial f(\eta)|} = \left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)}\right|$$

On a donc bien montré la propriété (1).

1.3 Preuve de la suite convergente

Par les propriétés du supremum, on sait que

$$\exists (x_n) \subset \{|\partial^2 f(x)| | x \in I\} \text{ tq } x_n \to \sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}$$

De même, par les propriétés de l'infimum, on sait que

$$\exists (y_n) \subset \{|\partial f(x)| | x \in I\} \text{ tq } y_n \to \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}$$

Remarquons que par hypothèse, $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0$. Comme un infimum est en particulier un minorant, on sait que

$$\forall \eta \in I,\ |\partial f(\eta)| \geq \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0 \quad \text{et donc} \quad \forall \eta \in I,\ \partial f(\eta) \neq 0$$

En particulier, la suite (y_n) ne s'annule donc jamais. Prenons $(z_n) = (x_n/(2y_n))$. Alors, on a bien

$$(z_n) \subset \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \middle| \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\}$$

Enfin, par les propriétés des limites

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = \frac{\lim_{n \to +\infty} x_n}{2 \lim_{n \to +\infty} y_n} = \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2 \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}}$$

On a donc bien montré la propriété (2), ce qui termine la preuve de l'exercice 1.

2 Exercice 2:

2.1 Partie a:

Objectif : Trouver les racines de f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - 8x^2 - 4$. Autrement dit, nous devons trouver les solutions de $P \equiv x^4 - 8x^2 - 4 = 0$.
Tout d'abord, posons $y = x^2$. On obtient :

$$Q \equiv y^2 - 8y - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \triangle &= (-8)^2 - 4 * 1 * 4 \\ &= 64 + 16 \\ &= 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{80}}{2} \\ \Rightarrow y_1 &= \frac{8 + \sqrt{80}}{2} \; et \; y_2 = \frac{8 - \sqrt{80}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{8 + \sqrt{16 * 5}}{2} \; et \; y_2 = \frac{8 - \sqrt{16 * 5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{8 + 4 * \sqrt{5}}{2} \; et \; y_2 = \frac{8 - 4 * \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \; et \; y_2 = 4 - 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Donc, les racines de Q sont $y_1 = 4 + 2 * \sqrt{5}$ *et* $y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5}$ mais nous voulons les racines de P. Donc, on obtient : (on sait que y = x^2)

$$\begin{aligned} y_1 = 4 + 2 * \sqrt{5} \; &et \; y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ (x_1)^2 = 4 + 2 * \sqrt{5} \; &et \; (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ Cependant, \; (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \; &est \; impossible \; car \; on \; a \; : \\ 2 = \sqrt{4} \leq \sqrt{5} \leq \sqrt{9} = 3 \; &car \; \sqrt{} \; est \; croissante \\ Donc \; 4 - 2 * \sqrt{5} \leq 4 - 2 * \sqrt{4} &= 4 - 2 * 2 = 0 \\ i.e. \; (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} &\leq 0 \\ Finalement, \; les \; racines \; de \; P \; &sont \; : \\ (x_1)^2 &= 4 + 2 * \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \pm\sqrt{4 + 2 * \sqrt{5}} \end{aligned}$$

2.2 Partie B:

⌈1⌋ Montrons que f est paire.

⌈2⌋ Montrons que f est croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$

⌈3⌋ Montrons que f est décroissante sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

⌈4⌋ Montrer que f est positive sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$ et sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

⌈5⌋ Montrer que f est négative sur $[-\sqrt{4+2*\sqrt{5}};\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

Preuve :

⌈1⌋ trivial car une somme de fonction paire est paire.

⌈2⌋ Montrons que $\forall x,y \in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
Soient x, y $\in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$, supposons $x \leq y$. Montrons que $f(x) \leq f(y)$.
On a :

$$\begin{aligned}
f(x) \leq f(y) &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 4 \leq y^4 - 8y^2 - 4 \\
&\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 \leq y^4 - 8y^2 \\
&\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - (8y^2 - 8x^2) \\
&\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - 8(y^2 - x^2) \\
&\Leftrightarrow 8 \leq (y^2 + x^2) \qquad \text{pour y} \neq \text{x}
\end{aligned}$$

Vrai car vrai pour $y = x = \sqrt{4+2*\sqrt{5}}$ et vrai pour toutes valeurs plus grandes car la fonction x^2 est croissantes sur $\mathbb{R}^+$. Pour $x = y$, trivial car $f(x) = f(y)$.

⌈3⌋ trivial car, par le fait que la fontion f est paire et croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$, on a que f est décroissante sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$.

⌈4⌋ par la croissance sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$ ainsi que sa décroissance sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$, on sait que $\forall x \in]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[, f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$ (car f est paire). Mais $f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$ car c'est une racine de f (pareil pour $f\left(-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$).
Donc $0 = f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$ càd $0 \leq f(x)$. Donc f est positive sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$

⌈5⌋ Montrons que f est négative sur $[-\sqrt{4+2*\sqrt{5}};\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

- Montrons que $-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}$ et $\sqrt{4+2*\sqrt{5}}$ sont des racines simples :
$\partial f(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}) > 0$ et $\partial f(-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}) < 0$ donc ce sont des racines simples.
- On sait que f est continue, ses racines sont simples et f est positive sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$ donc f est négative sur $[-\sqrt{4+2*\sqrt{5}};\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

Finalement, pour la racine $-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}$, tout intervalle $[a,b]$, avec $a \in]+\infty,-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}[$ et $b \in]-\sqrt{4+2*\sqrt{5}};\sqrt{4+2*\sqrt{5}}[$, sont valides pour la méthode de bissection. De même pour la racine $\sqrt{4+2*\sqrt{5}}$, tout intervalle $[a,b]$, avec $a \in]-\sqrt{4+2*\sqrt{5}};\sqrt{4+2*\sqrt{5}}[$ et $b \in]\sqrt{4+2*\sqrt{5}},+\infty[$, sont valides pour la méthode de bissection.

2.3 Partie C:

Pour la racine positive de f ($x^{+*} = \sqrt{4+2\sqrt{5}}$),prenons l'intevalle $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}] \ni x^{+*}$,
on a :

$$\begin{aligned} &f(\frac{5}{2})f(\frac{7}{2}) < 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{-239}{16}\frac{769}{16} < 0 \end{aligned}$$

et f est convexe sur $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$.($\star$)(voir en fin d'exercice)
Regardons l'intersection de la tangente au point $(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2}))$ avec l'axe des abscisses,

$$\begin{aligned} f(\frac{5}{2}) + \partial f(\frac{5}{2})(x_1 - \frac{5}{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{1139}{360} \end{aligned}$$

De même pour la tangente au point $(\frac{7}{2}, f(\frac{7}{2}))$,

$$\begin{aligned} f(\frac{7}{2}) + \partial f(\frac{7}{2})(x_2 - \frac{7}{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{5651}{1848} \end{aligned}$$

On a bien que $x_1, x_2 \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$;
alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de Newton est bien définie (pour tout $n, \partial f(x_n) \neq 0$ et $x_n \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$) et converge vers l'unique racine de f dans $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$.

Même raisonnement pour la racine négative de f ($x^{-*} = -\sqrt{4+2\sqrt{5}}$) en prenant l'intervalle $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}] \ni x^{-*}$, car f est une fonction paire (sommme de fonctions paires).

($\star$)

- Montrons que ∂f est croissante sur $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$
  Soit $x, y \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$.
  Supposons $x \leqslant y$. Montrons que $\partial f(x) \leqslant \partial f(y)$. On a :

$$\begin{aligned} \partial f(x) \leqslant \partial f(y) &\Leftrightarrow \partial_x(x^4 - 8x^2 - 4) \leqslant \partial_y(y^4 - 8y^2 - 4) \\ &\Leftrightarrow 4x^3 - 16x \leqslant 4y^3 - 16y \\ &\Leftrightarrow 4x(x^2-4) \leqslant 4y(y^2-4) \\ &\Leftrightarrow x(x^2-4) \leqslant y(y^2-4) \\ \text{Comme } x, y \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}] \subset \mathbb{R}^+, &\text{on peut juste montrer que :} \\ &(x^2-4) \leqslant (y^2-4) \\ &\Leftrightarrow x^2 \leqslant y^2 \text{ ok car par hypothèse } x \leqslant y \Rightarrow x^2 \leqslant y^2 \text{ car } x, y \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}] \end{aligned}$$

  et x^2 est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

  Donc $\partial f(x) \leqslant \partial f(y)$.

- Montrons que f est convexe sur $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$
  Vrai car si ∂f est croissante sur $[a, b]$ cela implique que f est convexe sur $[a, b]$ (propriété du syllabus)

3 Exercice 3:

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application unimodale càd $\exists m \in [a, b]$ tel que f *est strictement croissante* sur [a, m] et *strictement décroissante* sur [m, b].

3.1 Partie a:

Montrons que f possède au plus 2 racines.

Supposons par l'absurde que f possède 3 racines càd
$\exists\ u \neq v \neq w \in [a, b],\ f(u) = f(v) = f(w) = 0.$
Sans perte de généralité, supposons que $u < v < w$.
On a donc 3 cas :

$\lceil 1 \rfloor$ soit $u \in [a, m[\ et\ v, w \in]m, b]$

$\lceil 2 \rfloor$ soit $u, v \in [a, m[\ et\ w \in]m, b]$

$\lceil 3 \rfloor$ soit u, v ou w est notre m.

Montrons donc que tous les cas sont impossibles.

$\lceil 1 \rfloor$ on sait que f *est strictement décroissante* sur [m, b] (et donc strictement décroissante sur]m, b] par inclusion) donc $v < w \Rightarrow f(v) > f(w)$ or ce sont 2 racines de f. **Contradiction**.

$\lceil 2 \rfloor$ on sait que f *est strictement croissante* sur [a, m] (et donc strictement croissante sur [a, m[par inclusion) donc $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$ or ce sont 2 racines de f. **Contradiction**.

$\lceil 3 \rfloor$

$\lceil 3.1 \rfloor$ Si u est m, alors $u, v\ et\ w \in [m, b]$ et par $\lceil 1 \rfloor$, c'est impossible. **Contradiction**.

$\lceil 3.2 \rfloor$ Si w est m, alors $u, v\ et\ w \in [a, m]$ et par $\lceil 2 \rfloor$, c'est impossible. **Contradiction**.

$\lceil 3.3 \rfloor$ Si v est m, alors $\forall x \in [a, m[,\ y \in]m, b],\ f(x) < f(v)$ (par la stricte croissance de f) et $f(v) > f(y)$ (par la stricte décroissance de f). Cependant, en particulier, $x = u$ et $y = v$ et qui sont racines de f. Donc, $0 = f(u) < f(v = 0$ et $0 = f(u) > f(w) = 0$ qui sont tout 2 impossibles. **Contradiction**.

On suppose maintenant pour le reste de la question 3 que $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. De plus, on suppose que toutes les racines de la dérivée de f sont simples.

3.2 Partie b:

On doit montrer que la dérivée de f possède une unique racine dans $]a,b[$.

3.2.1 Existance de la racine

Montrons d'abord que la dérivée de f a une racine dans $]a,b[$. Par l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$, on sait que ∂f est continue. On sait également par unimodalité que

$$\exists m \in]a,b[,\ f \text{ est croissante sur }]a,m[\text{ et } f \text{ est décroissante sur }]m,b[$$

Comme la dérivée d'une fonction croissante (resp. décroissante) est positive (resp. négative), et comme $(a+m)/2 \in]a,m[$ et $(m+b)/2 \in]m,b[$, on sait que

$$\partial f((a+m)/2) \geq 0 \text{ et } \partial f((m+b)/2) \leq 0$$

On peut alors séparer en 3 cas exhaustifs :

- Cas 1 : $f((a+m)/2) = 0$
  Alors, comme $(a+m)/2 \in]a,m[\subset]a,b[$, on a bien trouvé une racine de ∂f dans $]a,b[$.
- Cas 2 : $f((m+b)/2) = 0$
  Alors, comme $(m+b)/2 \in]m,b[\subset]a,b[$, on a bien trouvé une racine de ∂f dans $]a,b[$.
- Cas 3 : $\partial f((a+m)/2) > 0$ et $\partial f((m+b)/2) < 0$
  Comme on sait que ∂f est continue, et comme $\partial f((a+m)/2)\partial f((m+b)/2) < 0$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et on obtient

  $$\exists \xi \in \left]\frac{a+m}{2}, \frac{m+b}{2}\right[,\ \partial f(\xi) = 0$$

  Comme $\xi \in](a+m)/2, (m+b)/2[\subset]a,b[$, on a bien trouvé une racine de ∂f dans $]a,b[$.

Par exhaustivité des cas, on a bien montré l'existance d'une racine de ∂f dans $]a,b[$.

3.2.2 Unicité de la racine

- Montrons que $\partial f(m) = 0$
  On sait, car f est unimodale, que :
  - f est strictement croissante sur $[a,m]$ donc pour tout x dans $[a,m]$, $\partial f(x) \geqslant 0$. En particulier $\partial f(m) \geqslant 0$.
  - f est strictement décroissante sur $[m,b]$ donc pour tout x dans $[m,b]$, $\partial f(x) \leqslant 0$. En particulier $\partial f(m) \leqslant 0$

  $\Rightarrow$ On a donc $\partial f(m) = 0$
- Montrons l'unicité de la racine de la dérivée
  On suppose l'existance d'un $\xi \in [a,m]$ tel que $\partial f(\xi) = 0 = \partial f(m)$ avec $m \neq \xi$. Donc ξ est dans $[a,m[$. Comme f est strictement croissante sur $[a,m]$ par définition de f, on a que pour tout x dans $[a,m]$, $\partial f(x) \geqslant 0$. Donc, pour tout x dans $[a,m]$, $\partial f(x) \geqslant \partial f(\xi) = 0$. Ceci implique que ξ est un minimum local de ∂f, donc $\partial^2 f(\xi) = 0$. Or par hypothèse sur f, ξ est une racine simple de ∂f (càd $\partial^2 f(\xi) \neq 0$). On a une contradiction. Donc on a l'unicité.

3.3 Partie c:

Algorithme 1 rootDeriv

Entrée : ∂f, dérivée de f ; $a, b \in \mathbb{R}$.
Sortie : L'ensemble contient l'unique racine de la fonction df dans l'interval]a, b[

$dfa \leftarrow df(a)$
$dfb \leftarrow df(b)$
$prec \leftarrow 1e^{-10}$
si $dfa > 0$ *et* $dfb < 0$ **alors**
    $x \leftarrow Root1D.brent(df, a, b, tol = prec)$
    retourner x
sinon
    $mid \leftarrow \frac{a+b}{2}$
    $dfm \leftarrow df(mid)$
    si $dfm = 0$ **alors**
        retourner mid
    sinon si $dfm > 0$ **alors**
        retourner $rootDeriv(df, mid, b)$
    sinon
        retourner $rootDeriv(df, a, mid)$
    fin si
fin si

Algorithme 2 rootFinding

Entrée : f, une fonction unimodale ; ∂f, dérivée de f ; $a, b \in \mathbb{R}$.
Sortie : L'ensemble des solutions de f dans l'interval [a, b].

$fa \leftarrow f(a)$
$fb \leftarrow f(b)$
si $fa > 0$ *et* $fb > 0$ **alors**
  retourner $[]$
sinon si $fa = 0$ *et* $fb > 0$ **alors**
  retourner $[a]$
sinon si $fa > 0$ *et* $fb = 0$ **alors**
  retourner $[b]$
sinon
  $m = rootDeriv(df, a, b)$ *et* $prec = 1e^{-10}$
  si $fa > 0$ *et* $fb \leq 0$ **alors**
    $x \leftarrow Root1D.brent(f, m, b, tol = prec)$
  sinon si $fa \leq 0$ *et* $fb > 0$ **alors**
    $x \leftarrow Root1D.brent(f, a, m, tol = prec)$
    retourner $[x]$
  sinon
    $fm \leftarrow f(m)$
    si $fm > 0$ **alors**
      $x \leftarrow Root1D.brent(f, a, m, tol = prec)$
      $y \leftarrow Root1D.brent(f, m, b, tol = prec)$
      retourner $[x, y]$
    sinon si $fm = 0$ **alors**
      retourner $[m]$
    sinon
      retourner $[]$;
    fin si
  fin si
fin si