Université de Mons
Faculté des Sciences
Département des mathématiques

Rapport du TP2

Analyse Numérique

Professeur:
Christophe Troestler
Quentin Lambotte

Auteurs:
Loïc Dupont
Paolo Marcelis
Maximilien Vanhaverbeke

Année académique 2020-2021

Table des matières

Soit $M, N \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ avec rang$A = N \leq M$. Soit $b \in \mathbb{R}^n$.
Intéressons-nous à la résolution de l'équation $Ax = b$.
Les exercices suivants consistent à regarder la meilleur solution au sens des moindres carrés càd la valeur de x qui minimise la fonction :

$$x \mapsto |Ax - b|_2 \tag{1}$$

Pour les questions suivantes, nous allons utiliser les notations ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M,1} & \cdots & a_{M,N} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_i)_{1\leq i\leq M}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_j)_{1\leq j\leq N}$$

1 Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On doit montrer que x réalise le minimum de $x \mapsto |Ax - b|_2$ (1) si et seulement si x réalise le minimum de

$$x \mapsto |Ax - b|_2^2 \tag{2}$$

Commençons par montrer que si x réalise le minimum de (1), alors x réalise le minimum de (2).
Supposons que x réalise le minimum de (1) càd

$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ |Ax - b|_2 \leq |Ay - b|_2$$

Comme toute norme est définie positive, on sait que pour tout $z \in \mathbb{R}^m,\ |z|_2 \in [0, +\infty[$.
Alors, comme chaque membre de l'inégalité ci-dessus est positif, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ |Ax - b|_2^2 \leq |Ay - b|_2^2$$

càd x réalise le minimum de (2).
Il reste à montrer que si x réalise le minimum de (2), alors x réalise le minimum de (1).
Supposons que x réalise le minimum de (2) càd

$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ |Ax - b|_2^2 \leq |Ay - b|_2^2$$

Comme tout carré d'un nombre réel est positif, par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ \sqrt{|Ax - b|_2^2} \leq \sqrt{|Ay - b|_2^2}$$

Comme les normes sont définies positives, $\sqrt{|Ax - b|_2^2} = |Ax - b|_2$ et $\forall y \in \mathbb{R}^n,\ \sqrt{|Ay - b|_2^2} = |Ay - b|_2$.
Par conséquent, on a bien

$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ |Ax - b|_2 \leq |Ay - b|_2$$

càd x réalise le minimum de (1).
On a donc bien montré que x réalise le minimum de (1), alors x réalise le minimum de (2).

2 Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On doit montrer que x réalise le minimum de $x \mapsto |Ax - b|_2$ (1) si et seulement si x vérifie l'équation

$$A^T Ax = A^T b \tag{3}$$

Commençons par montrer que si x réalise le minimum de (1), alors x vérifie l'équation (3).
Supposons que x réalise le minimum de (1) càd

$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ |Ax - b|_2 \leq |Ay - b|_2$$

Par l'exercice 1, on sait que c'est équivalent à dire que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ |Ax - b|_2^2 \leq |Ay - b|_2^2$$

Montrons que la fonction $f : x \mapsto |Ax - b|_2^2$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^n$.
Soit $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.