Université de Mons
Faculté des Sciences
Département des mathématiques

Rapport du TP2

Analyse Numérique

Professeur:
Christophe Troestler
Quentin Lambotte

Auteurs:
Loïc Dupont
Paolo Marcelis
Maximilien Vanhaverbeke

UMONS Université de Mons — Faculté des Sciences

Année académique 2020-2021

Table des matières

Soit $M, N \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ avec rang$A = N \leq M$. Soit $b \in \mathbb{R}^n$.
Intéressons-nous à la résolution de l'équation $Ax = b$.
Les exercices suivants consistent à regarder la meilleur solution au sens des moindres carrés càd la valeur de x qui minimise la fonction :

$$x \mapsto |Ax - b|_2 \tag{1}$$

Pour les questions suivantes, nous allons utiliser les notations ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M,1} & \cdots & a_{M,N} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} = (b_i)_{1\leq i\leq M}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = (x_j)_{1\leq j\leq N}$$

1 Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}^N$. On doit montrer que x réalise le minimum de $x \mapsto |Ax - b|_2$ (1) si et seulement si x réalise le minimum de

$$x \mapsto |Ax - b|_2^2 \tag{2}$$

Commençons par montrer que si x réalise le minimum de (1), alors x réalise le minimum de (2).
Supposons que x réalise le minimum de (1) càd

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ |Ax - b|_2 \leq |Ay - b|_2$$

Comme toute norme est définie positive, on sait que pour tout $z \in \mathbb{R}^M,\ |z|_2 \in [0, +\infty[$.
Alors, comme chaque membre de l'inégalité ci-dessus est positif, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ |Ax - b|_2^2 \leq |Ay - b|_2^2$$

càd x réalise le minimum de (2).
Il reste à montrer que si x réalise le minimum de (2), alors x réalise le minimum de (1).
Supposons que x réalise le minimum de (2) càd

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ |Ax - b|_2^2 \leq |Ay - b|_2^2$$

Comme tout carré d'un nombre réel est positif, par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ \sqrt{|Ax - b|_2^2} \leq \sqrt{|Ay - b|_2^2}$$

Comme les normes sont définies positives, $\sqrt{|Ax - b|_2^2} = |Ax - b|_2$ et $\forall y \in \mathbb{R}^N,\ \sqrt{|Ay - b|_2^2} = |Ay - b|_2$.
Par conséquent, on a bien

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ |Ax - b|_2 \leq |Ay - b|_2$$

càd x réalise le minimum de (1).
On a donc bien montré que x réalise le minimum de (1), alors x réalise le minimum de (2).

2 Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}^N$. On doit montrer que x réalise le minimum de $x \mapsto |Ax - b|_2$ (1) si et seulement si x vérifie l'équation

$$A^T Ax = A^T b \tag{3}$$

Commençons par montrer que si x réalise le minimum de (1), alors x vérifie l'équation (3).
Supposons que x réalise le minimum de (1) càd

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ |Ax - b|_2 \leq |Ay - b|_2$$

Par l'exercice 1, on sait que c'est équivalent à dire que

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ |Ax - b|_2^2 \leq |Ay - b|_2^2$$

Commençons par calculer explicitement $f : x \mapsto |Ax - b|_2^2$. On a

$$\begin{aligned}
|Ax - b|_2^2 &= \left| \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M,1} & \cdots & a_{M,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \right|_2^2 \\
&= \left| \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^N a_{1,j} x_j\right) - b_1 \\ \vdots \\ \left(\sum_{j=1}^N a_{M,j} x_j\right) - b_M \end{pmatrix} \right|_2^2 \\
&= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^M \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - b_i \right)^2} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^M \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - b_i \right)^2
\end{aligned}$$

On sait donc que x réalise le minimum de

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^M \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - b_i \right)^2$$

En particulier, il réalise également le minimum de toute restriction de f à un ensemble contenant x.
On sait donc que pour tout $k \in \mathbb{N}^{\leq n}$, x réalise le minimum de

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x_k \mapsto \sum_{i=1}^M \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - b_i \right)^2$$

Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^{\leq N}$,

$$\begin{aligned}
\partial_k \sum_{i=1}^M \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - b_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^M \left(\left(2 \sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - 2b_i \right) \partial_k \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - b_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^M \left(\left(2 \sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - 2b_i \right) a_{i,k}
\end{aligned}$$

On sait que $x \in \operatorname{int} \mathbb{R} = \mathbb{R}$ et qu'il s'agit d'un minimum global de f_k et donc en particulier un minimum local. La propriété VI.16 du syllabus d'analyse 1 nous dit alors que la dérivée de f_k s'annule en x. On sait donc que

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^{\leq N},\ \partial f_k = 0 \quad & \text{càd} \quad \forall k \in \mathbb{N}^{\leq N},\ \sum_{i=1}^{M} \left(\left(2 \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} x_j \right) - 2b_i \right) a_{i,k} = 0 \\
& \text{càd} \quad \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M} \left(\left(2 \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} x_j \right) - 2b_i \right) a_{i,1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{M} \left(\left(2 \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} x_j \right) - 2b_i \right) a_{i,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \text{càd} \quad 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M} \left(a_{i,1} \sum_{j=1}^{N} (a_{i,j} x_j) \right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{M} \left(a_{i,N} \sum_{j=1}^{N} (a_{i,j} x_j) \right) \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M} (a_{i,1} b_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{M} (a_{i,N} b_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \text{càd} \quad 2A^T A x - 2A^T b = 0 \\
& \text{càd} \quad A^T A x = A^T b
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que si x réalise le minimum de (1), alors x vérifie l'équation (3).