Université de Mons
Faculté des Sciences
Département des mathématiques

Analyse Numérique : Rapport
TP 1

Professeurs:
Christophe Troestler
Quentin Lambotte

Auteurs:
Loïc Dupont
Maximilien Vanhaverbeke
Paulo Marcelis

Année académique 2020-2021

Contents

1 Exercice 1:

Soit I un intervalle compact non-vide. Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$. Supposons que $\inf\{|\partial f(x)||x \in I\} > 0$. On doit montrer que

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} = \sup\left\{\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)}\right|\middle|\xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0\right\}$$

càd

$$\frac{\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} \text{ est un majorant de } \left\{\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)}\right|\middle|\xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0\right\} \tag{1}$$

et

$$\exists (z_n) \subset \left\{\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)}\right|\middle|\xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0\right\} \text{ tq } z_n \to \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} \tag{2}$$

1.1 Remarque sur l'existance du membre de gauche

On sait par l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ que ∂f et $\partial^2 f$ sont des fonctions continues sur I. Comme la valeur absolue est aussi une fonction continue, par composition de fonctions continues, $|\partial f|$ et $|\partial^2 f|$ sont des aussi fonctions continues sur I.
Alors, comme I est un compact non-vide par hypothèse, le théorème des bornes atteintes nous dit que ces fonctions atteignent leurs bornes. En particulier,

$$\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \inf\{|\partial f(x)||x \in I\} \in \mathbb{R}$$

1.2 Preuve de la majoration

Comme un supremum est en particulier un majorant, on sait que

$$\forall \xi \in I,\ \sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\} \geq |\partial^2 f(\xi)| \tag{3}$$

De même, un infimum étant en particulier un minorant, on sait que

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0,\ \inf\{|\partial f(x)||x \in I\} \leq |\partial f(\eta)|$$

Comme $\inf\{|\partial f(x)||x \in I\} > 0$ par hypothèse, $\inf\{|\partial f(x)||x \in I\} \in \mathbb{R}^{>0}$. On sait aussi que $\forall \eta \in I$ tq $\partial f(\eta) \neq 0$, $|\partial f(\eta)| \in \mathbb{R}^{>0}$. Donc, par décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^{>0}$, on a

$$\forall \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0,\ \frac{1}{\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} \geq \frac{1}{|\partial f(\eta)|} \tag{4}$$

Finalement, par (3) et (4), on a

$$\forall \xi, \eta \in I \text{ tq } \partial f(\eta) \neq 0,\ \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)||x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)||x \in I\}} \geq \frac{|\partial^2 f(\xi)|}{2|\partial f(\eta)|} = \left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)}\right|$$

On a donc bien montré la propriété (1).

1.3 Preuve de la suite convergente

Par les propriétés du supremum, on sait que

$$\exists (x_n) \subset \{|\partial^2 f(x)| | x \in I\} \text{ tq } x_n \to \sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}$$

De même, par les propriétés de l'infimum, on sait que

$$\exists (y_n) \subset \{|\partial f(x)| | x \in I\} \text{ tq } y_n \to \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}$$

Remarquons que par hypothèse, $\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0$. Comme un infimum est en particulier un minorant, on sait que

$$\forall \eta \in I,\ |\partial f(\eta)| \geq \inf\{|\partial f(x)| | x \in I\} > 0 \quad \text{et donc} \quad \forall \eta \in I,\ \partial f(\eta) \neq 0$$

En particulier, la suite (y_n) ne s'annule donc jamais. Prenons $(z_n) = (x_n/(2y_n))$. Alors, on a bien

$$(z_n) \subset \left\{ \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{2\partial f(\eta)} \right| \middle| \xi, \eta \in I \text{ et } \partial f(\eta) \neq 0 \right\}$$

Enfin, par les propriétés des limites

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{\lim_{n\to+\infty} x_n}{2\lim_{n\to+\infty} y_n} = \frac{\sup\{|\partial^2 f(x)| | x \in I\}}{2\inf\{|\partial f(x)| | x \in I\}}$$

On a donc bien montré la propriété (2), ce qui termine la preuve de l'exercice 1.

2 Exercice 2:

2.1 Partie a:

Objectif : Trouver les racines de f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - 8x^2 - 4$. Autrement dit, nous devons trouver les solutions de $P \equiv x^4 - 8x^2 - 4 = 0$.
Tout d'abord, posons $y = x^2$. On obtient :

$$Q \equiv y^2 - 8y - 4 = 0$$

$$\begin{aligned}\triangle &= (-8)^2 - 4 * 1 * 4 \\ &= 64 + 16 \\ &= 80\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{80}}{2} \\ \Rightarrow y_1 =& \frac{8 + \sqrt{80}}{2} \; et \; y_2 = \frac{8 - \sqrt{80}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 =& \frac{8 + \sqrt{16 * 5}}{2} \; et \; y_2 = \frac{8 - \sqrt{16 * 5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 =& \frac{8 + 4 * \sqrt{5}}{2} \; et \; y_2 = \frac{8 - 4 * \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 =& 4 + 2 * \sqrt{5} \; et \; y_2 = 4 - 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

Donc, les racines de Q sont $y_1 = 4 + 2 * \sqrt{5} \; et \; y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5}$ mais nous voulons les racines de P. Donc, on obtient : (on sait que y = x^2)

$$\begin{aligned}y_1 = 4 + 2 * \sqrt{5} \; et \; y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ (x_1)^2 = 4 + 2 * \sqrt{5} \; et \; (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ Cependant, \; (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \; est \; impossible \; car \; on \; a \;: \\ 2 = \sqrt{4} \leq \sqrt{5} \leq \sqrt{9} = 3 \; car \; \sqrt{} \; est \; croissante \\ Donc \; 4 - 2 * \sqrt{5} \leq 4 - 2 * \sqrt{4} = 4 - 2 * 2 = 0 \\ i.e. \; (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \leq 0 \\ Finalement, \; les \; racines \; de \; P \; sont \;: \\ (x_1)^2 = 4 + 2 * \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{4 + 2 * \sqrt{5}}\end{aligned}$$

2.2 Partie B:

⌈1⌋ Montrons que f est paire.

⌈2⌋ Montrons que f est croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$

⌈3⌋ Montrons que f est décroissante sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

⌈4⌋ Montrer que f est positive sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$ et sur $]-\infty;\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

⌈5⌋ Montrer que f est négative sur $[-\sqrt{4+2*\sqrt{5}};\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

Preuve :

⌈1⌋ trivial car une somme de fonction paire est paire.

⌈2⌋ Montrons que $\forall x,y \in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
Soient x, y $\in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$, supposons $x \leq y$. Montrons que $f(x) \leq f(y)$.
On a :

$$\begin{aligned}
f(x) \leq f(y) &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 4 \leq y^4 - 8y^2 - 4 \\
&\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 \leq y^4 - 8y^2 \\
&\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - (8y^2 - 8x^2) \\
&\Leftrightarrow 0 \leq (y^4 - x^4) - 8(y^2 - x^2)
\end{aligned}$$

ok car la fonction x^2 et x^4 sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$ et par hypothèse, $x \leq y$.

⌈3⌋ trivial car, par le fait que la fontion f est paire et croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$, on a que f est décroissante sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$.

⌈4⌋ par la croissance sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$ ainsi que sa décroissance sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$, on sait que $\forall x \in]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[, f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$.
Mais $f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$ car c'est une racine de f (pareil pour $f\left(-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$).
Donc $0 = f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$ càd $0 \leq f(x)$. Donc f est positive sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$

⌈5⌋ Vu que la fonction est pair et que l'intervalle est de la forme]-a; a[, alors on peut se restreindre à regarder l'intervalle $[0;\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$.
TODO

2.3 Partie C:

Pour la racine positive de f ($x^{+*} = \sqrt{4+2\sqrt{5}}$),prenons l'intevalle $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}] \ni x^{+*}$,
on a :

$$f(\frac{5}{2})f(\frac{7}{2}) < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-239}{16}\frac{769}{16} < 0$$

et f est convexe sur $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$.
Regardons l'intersection de la tangente au point $(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2}))$ avec l'axe des abscisses,

$$f(\frac{5}{2}) + \partial f(\frac{5}{2})(x_1 - \frac{5}{2}) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1139}{360}$$

De même pour la tangente au point $(\frac{7}{2}, f(\frac{7}{2}))$,

$$f(\frac{7}{2}) + \partial f(\frac{7}{2})(x_2 - \frac{7}{2}) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{5651}{1848}$$

On a bien que $x_1, x_2 \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$;
alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de Newton est bien définie (pour tout $n, \partial f(x_n) \neq 0$ et $x_n \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$) et converge vers l'unique racine de f dans $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$.

Même raisonnement pour la racine négative de f ($x^{-*} = -\sqrt{4+2\sqrt{5}}$) en prenant l'intervalle $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}] \ni x^{-*}$, car f est une fonction paire (sommme de fonctions paires).

3 Exercice 3:

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application unimodale càd $\exists m \in [a, b]$ tel que f *est strictement croissante* sur [a, m] et *strictement décroissante* sur [m, b].

3.1 Partie a:

Montrons que f possède au plus 2 racines.

Supposons par l'absurde que f possède 3 racines càd
$\exists\ u \neq v \neq w \in [a, b],\ \ f(u) = f(v) = f(w) = 0.$
Sans perte de généralité, supposons que $u < v < w$.
On a donc 3 cas :

⌈1⌋ soit $u \in [a, m[\ et\ v, w \in]m, b]$

⌈2⌋ soit $u, v \in [a, m[\ et\ w \in]m, b]$

⌈3⌋ soit u, v ou w est notre m.

Montrons donc que tous les cas sont impossibles.

⌈1⌋ on sait que f *est strictement décroissante* sur [m, b] (et donc strictement décroissante sur]m, b] par inclusion) donc $v < w \Rightarrow f(v) > f(w)$ or ce sont 2 racines de f. **Contradiction**.

⌈2⌋ on sait que f *est strictement croissante* sur [a, m] (et donc strictement croissante sur [a, m[par inclusion) donc $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$ or ce sont 2 racines de f. **Contradiction**.

⌈3⌋

⌈3.1⌋ Si u est m, alors $u, v\ et\ w \in [m, b]$ et par ⌈1⌋, c'est impossible. **Contradiction**.

⌈3.2⌋ Si w est m, alors $u, v\ et\ w \in [a, m]$ et par ⌈2⌋, c'est impossible. **Contradiction**.

⌈3.3⌋ Si v est m, alors $\forall x \in [a, m[,\ \ y \in]m, b],\ \ f(x) < f(v)$ (par la stricte croissance de f) et $f(v) > f(y)$ (par la stricte décroissance de f). Cependant, en particulier, $x = u$ et $y = v$ et qui sont racines de f. Donc, $0 = f(u) < f(v = 0$ et $0 = f(u) > f(w) = 0$ qui sont tout 2 impossibles. **Contradiction**.

On suppose maintenant pour le reste de la question 3 que $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. De plus, on suppose que toutes les racines de la dérivée de f sont simples.

3.2 Partie b:

On doit montrer que la dérivée de f possède une unique racine dans $]a,b[$.

3.2.1 Existance de la racine

Montrons d'abord que la dérivée de f a une racine dans $]a,b[$. Par l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$, on sait que ∂f est continue. On sait également par unimodalité que

$$\exists m \in]a,b[,\ f \text{ est croissante sur }]a,m[\text{ et } f \text{ est décroissante sur }]m,b[$$

Comme la dérivée d'une fonction croissante (resp. décroissante) est positive (resp. négative), et comme $(a+m)/2 \in]a,m[$ et $(m+b)/2 \in]m,b[$, on sait que

$$\partial f((a+m)/2) \geq 0 \text{ et } \partial f((m+b)/2) \leq 0$$

On peut alors séparer en 3 cas exhaustifs :

- Cas 1 : $f((a+m)/2) = 0$
  Alors, comme $(a+m)/2 \in]a,m[\subset]a,b[$, on a bien trouvé une racine de ∂f dans $]a,b[$.
- Cas 2 : $f((m+b)/2) = 0$
  Alors, comme $(m+b)/2 \in]m,b[\subset]a,b[$, on a bien trouvé une racine de ∂f dans $]a,b[$.
- Cas 3 : $\partial f((a+m)/2) > 0$ et $\partial f((m+b)/2) < 0$
  Comme on sait que ∂f est continue, et comme $\partial f((a+m)/2)\partial f((m+b)/2) < 0$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et on obtient

  $$\exists \xi \in \left] \frac{a+m}{2}, \frac{m+b}{2} \right[,\ \partial f(\xi) = 0$$

  Comme $\xi \in](a+m)/2,(m+b)/2[\subset]a,b[$, on a bien trouvé une racine de ∂f dans $]a,b[$.

Par exhaustivité des cas, on a bien montré l'existance d'une racine de ∂f dans $]a,b[$.

3.2.2 Unicité de la racine

Il reste à montrer que cette racine est unique. Supposons par l'absurde que ∂f a au moins 2 racines distinctes càd

$$\exists \xi_1 \neq \xi_2 \in]a,b[,\ \partial f(\xi_1) = \partial f(\xi_2) = 0$$

Supposons sans perte de généralité que $\xi_1 < \xi_2$.

3.3 Partie c:

Algorithme 1 Recherche de racine

Entrée : f, une fonction unimodale ; ∂f, dérivée de f ; $a, b \in \mathbb{R}$.
Sortie : L'ensemble des racines notée $\varnothing$, $\{\ x_1\ \}$ ou $\{\ x_1, x_2\ \}$.

```
fa ← f(a)
fb ← f(b)
dfa ← df(a)
dfb ← df(b)
si fa × fb > 0 alors
  retourner ∅
sinon si fa × fb = 0 alors
  si fa = 0 et fb = 0 alors
    retourner { a, b }
  sinon si fa = 0 alors
    si fb > 0 alors
      retourner { a }
    sinon
      si dfa ≤ 0 alors
        retourner { a }
      sinon
        x ← |a−b| / 2
        tant que f(x) < 0 faire
          x ← |a−x| / 2
        fin tant que
        root ← bissection(f, x, b)
        retourner a, root
      fin si
    fin si
  sinon
    si fa > 0 alors
      retourner { b }
    sinon
      si dfb ≥ 0 alors
        retourner { a }
      sinon
        x ← |a−b| / 2
        tant que f(x) > 0 faire
          x ← |x−b| / 2
        fin tant que
        root ← bissection(f, a, x)
        retourner root, b
      fin si
    fin si
  fin si
sinon
  root ← bissection(f, a, b)
  retourner root
fin si
```