Université de Mons
Faculté des Sciences
Département des mathématiques

Analyse Numérique : Rapport
TP 1

Professeurs:
Christophe TROESTLER
Quentin LAMBOTTE

Auteurs:
Loïc DUPONT
Maximilien VANHAVERBEKE
Paulo MARCELIS

Année académique 2020-2021

Contents

1 Exercice 1:

Je te laisse compléter Maximilien ;)

2 Exercice 2:

2.1 Partie a:

Objectif : Trouver les racines de f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - 8x^2 - 4$. Autrement dit, nous devons trouver les solutions de $P \equiv x^4 - 8x^2 - 4 = 0$.
Tout d'abord, posons $y = x^2$. On obtient :

$$Q \equiv y^2 - 8y - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \triangle &= (-8)^2 - 4 * 1 * 4 \\ &= 64 + 16 \\ &= 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{80}}{2} \\ \Rightarrow y_1 =& \frac{8 + \sqrt{80}}{2} \; et \; y_2 = \frac{8 - \sqrt{80}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 =& \frac{8 + \sqrt{16 * 5}}{2} \; et \; y_2 = \frac{8 - \sqrt{16 * 5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 =& \frac{8 + 4 * \sqrt{5}}{2} \; et \; y_2 = \frac{8 - 4 * \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow y_1 =& 4 + 2 * \sqrt{5} \; et \; y_2 = 4 - 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Donc, les racines de Q sont $y_1 = 4 + 2 * \sqrt{5}$ *et* $y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5}$ mais nous voulons les racines de P. Donc, on obtient : (on sait que y = x^2)

$$\begin{aligned} y_1 = 4 + 2 * \sqrt{5} \; et \; y_2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ (x_1)^2 = 4 + 2 * \sqrt{5} \; et \; (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \\ Cependant, \; (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \; est \; impossible \; car \; on \; a \; : \\ 2 = \sqrt{4} \leq \sqrt{5} \leq \sqrt{9} = 3 \; car \; \surd \; est \; croissante \\ Donc \; 4 - 2 * \sqrt{5} \leq 4 - 2 * \sqrt{4} = 4 - 2 * 2 = 0 \\ i.e. \; (x_2)^2 = 4 - 2 * \sqrt{5} \leq 0 \\ Finalement, \; les \; racines \; de \; P \; sont \; : \\ (x_1)^2 = 4 + 2 * \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{4 + 2 * \sqrt{5}} \end{aligned}$$

2.2 Partie B:

⌈1⌋ Montrons que f est paire.

⌈2⌋ Montrons que f est croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$

⌈3⌋ Montrons que f est décroissante sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

⌈4⌋ Montrer que f est positive sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$ et sur $]-\infty;\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

⌈5⌋ Montrer que f est négative sur $[-\sqrt{4+2*\sqrt{5}};\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$

Preuve :

⌈1⌋ trivial car une somme de fonction paire est paire.

⌈2⌋ Montrons que $\forall x,y \in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
Soient x, y $\in [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$, supposons $x \leq y$. Montrons que $f(x) \leq f(y)$.
On a :

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(y) &\Leftrightarrow x^4-8x^2-4 \leq y^4-8y^2-4 \\ &\Leftrightarrow x^4-8x^2 \leq y^4-8y^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (y^4-x^4)-(8y^2-8x^2) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (y^4-x^4)-8(y^2-x^2) \end{aligned}$$

ok car la fonction x^2 et x^4 sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$ et par hypothèse, $x \leq y$.

⌈3⌋ trivial car, par le fait que la fontion f est paire et croissante sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$, on a que f est décroissante sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$.

⌈4⌋ par la croissance sur $[\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$ ainsi que sa décroissance sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$, on sait que $\forall x \in]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[, f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$.
Mais $f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$ car c'est une racine de f (pareil pour $f\left(-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) = 0$).
Donc $0 = f\left(\sqrt{4+2*\sqrt{5}}\right) \leq f(x)$ càd $0 \leq f(x)$. Donc f est positive sur $]-\infty;-\sqrt{4+2*\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{4+2*\sqrt{5}};+\infty[$

⌈5⌋ Vu que la fonction est pair et que l'intervalle est de la forme]-a; a[, alors on peut se restreindre à regarder l'intervalle $[0;\sqrt{4+2*\sqrt{5}}]$.
TODO

2.3 Partie C:

Je te laisse compléter Paolo ;)