$\boxed{A}$ Ecuații diferențiale de ordinul I

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad , \quad f(\cdot,\cdot): D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Tipuri de ecuații

I <u>Ecuație liniară</u> (cu variabile separabile)

✓ $$x'(t) = f(t)\cdot g(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = f(t)\cdot g(x) \to \text{separ var.}$$

Discuție I $g(x)=0 \to x = x_0$ verific în ec. → sol ~~singulare~~ staționare sau particulare

II $g(x) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{dx}{g(x)} = f(t)\,dt \to$ integrez
→ sol. generală

II <u>Ecuație afină scalară</u>

✓ $$x'(t) = a(t)\cdot x + b(t) \qquad a(\cdot), b(\cdot): I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continue}$$

⇒ ec. are sol.

<u>Pas1</u> se rezolvă ec liniară asociată $\bar{x}'(t) = a(t)\cdot\bar{x}$ ca mai sus
și se obține $\bar{x}(t) = C\cdot\varphi(t)$

<u>Pas2</u> se caută sol ec. inițiale de forma $x(t) = C(t)\varphi(t)$
(metoda variației constantelor) → se înlocuiește în ec
și se obține o ec pt $c(t)$ → apoi sol gen.

III <u>Ecuație Bernoulli</u>

✓ $$x'(t) = a(t)\cdot x + b(t)\cdot x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}, \quad a, b: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ cont.}$$

⇒ ∃ soluție

se rezolvă cu metoda variației constantei

$\boxed{A}$

IV Ec. Riccati

$x'(t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$ $a, b, c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont

$\Rightarrow \exists$ sol.

Se dă sau se află o soluție particulară $\varphi_0(t) =$ ~~ct~~

Se face schimbarea de funcție $\frac{1}{y(t)} = x(t) - \varphi_0(t)$

$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{y(t)} + \varphi_0(t)$ → se înlocuiește în ecuația inițială

→ se găsește o ec dif pt y

→ se află y

→ se află x

V Ec. omogenă

$x'(t) = f\left(\frac{x}{t}\right)$, $x : I \to \mathbb{R}$, se face sch de funcție

$y(t) = \frac{x(t)}{t}$ → se înlocuiește în ec → ec pt $y = y(t)$

→ se află y

→ se află x.

VI Ec. reductibile la ec omogenă $\frac{dx}{dt} = g\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right)$

$(a_1, a_2) \neq (0,0)$, $(b_1, b_2) \neq (0,0)$

- se rezolvă sist $\begin{cases} a_1 t + b_1 x + c_1 = 0 \\ a_2 t + b_2 x + c_2 = 0 \end{cases}$ $\underset{d}{\overset{\shortparallel}{\det}} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

Caz 1 $\underset{\text{sist nu are sol.}}{d = 0}$ fac sch. de funcție $y(t) = a_1 t + b_1 x$

Caz 2 $d \neq 0$ sistemul are sol. unică (t_0, x_0).

Fac sch. de variabilă $s = t - t_0$

funcție $y =$ ~~y~~ $x - x_0$ → $y = y(s)$

→ obțin o ec $\overset{\text{omogenă}}{\text{pt } y}$ → aflu y → aflu x

$$\frac{dy}{ds} = \frac{d(x - x_0)}{d(t - t_0)} = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

A

✓ VII Ec. LAGRANGE

$x = t\varphi(x') + \psi(x')$ $\varphi, \psi : J \to \mathbb{R}$ derivabile

Sch. de funcție $p(t) = x'(t)$

$x = t\varphi(p) + \psi(p) \xrightarrow{\text{derivez}} x' = \varphi(p) + t\varphi'(p)\cdot p' + \psi'(p)\cdot p'$

$\Leftrightarrow p - \varphi(p) = p'\cdot(t\varphi' + \psi') \Leftrightarrow p - \varphi(p) = \frac{dp}{dt}\cdot(t\varphi' + \psi')$

Se schimbă rolul variabilelor $p = p(t) \to t = t(p)$

se „răstoarnă" $\Rightarrow \frac{dt}{dp} = \frac{t\varphi' + \psi'}{p - \varphi(p)} \Leftrightarrow \frac{dt}{dp} = \frac{\varphi'}{p - \varphi(p)}\cdot t + \frac{\psi'}{p - \varphi(p)}$

pt $p - \varphi(p) \neq 0$

$\to$ ec. afină pt $t = t(p) \to$ aflu $\begin{cases} t = \text{funcție de } p \\ x = t\cdot\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}$ sol gen. sub formă parametrică

! De studiat cazul $p - \varphi(p) = 0$

✓ VIII Ec. CLAIRAUT

$x = tx' + \psi(x')$ $\psi : J \to \mathbb{R}$ deriv.

Sch. de funcție $p(t) = x'(t)$

$x = t\cdot p + \psi(p) \xrightarrow{\text{derivez}} \cancel{x'} = tp' + \cancel{p} + \psi'(p)\cdot p'$

$\Rightarrow p'\cdot(t + \psi'(p)) = 0$

$\to p' = 0 \to p = c \Rightarrow x = c\cdot t + \psi(c)$ sol gen.

$\begin{cases} t = -\psi'(p) \\ x = tp + \psi(p) \end{cases}$ sol singulară

✓ Problema Cauchy pt ed. de ord 1

$$(*) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \cancel{t \in I} \qquad f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (t_0, x_0) \in D$$

TEU Dacă ① $\exists\, a, b > 0$ aî. $D_{a,b} = [t_0 - a; t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset D$

② f continuă în ambele variabile

③ f Lipschitz în a 2^a var: $\exists L > 0$ aî. $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$ $\forall (t, x_1), (t, x_2) \in D_{a,b}$

$\Rightarrow$ $\exists\, \alpha > 0$ și $\exists!\, \varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to [x_0 - b, x_0 + b]$ sol a probl Cauchy $(*)$

Obs ③ poate fi înlocuită cu f deriv. parțial în rap cu x și $\frac{\partial f}{\partial x}$ cont pe $D_{a,b}$, $L = \sup\limits_{(t,x) \in D(a,b)} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|$

Șirul aproximărilor succesive

$$n \geq 1, \quad \varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s))\, ds \quad ; \quad \varphi_0(t) = x_0$$

$$\varphi_n : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}.$$

$\boxed{B}$ Ecuații de ordin superior care admit reducerea ordinului

1) $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \ldots, x^{(n)}) = 0$, $k \geq 1$, $x = x(t)$

Fac sch. de funcție $y(t) = x^{(k)}(t)$ $\to$ ec pt y $\to$ aflu y

$\Rightarrow$ rezolv ec $x^{(k)}(t) = y(t)$ integrând succesiv de k ori

sol. $x(t)$ depinde de n const. $c_1, c_2, \ldots, c_n$

2) $F\left(t, \frac{x'}{x}, \frac{x''}{x}, \ldots, \frac{x^{(n)}}{x}\right) = 0$ (ec omogenă) $x \neq 0$

Fac sch. de funcție $y(t) = \frac{x'(t)}{x(t)}$ $\Rightarrow x'(t) = y(t)\, x(t)$

$\Rightarrow x''(t) = y'(t)\, x(t) + y(t) \cdot x'(t) \Rightarrow x'' = xy' + y^2 \cdot x \quad | : x$

$\Rightarrow \frac{x''}{x} = y' + y^2$ etc. $\to$ Obțin o ec pt y $\to$ aflu y, apoi x

3) $F(x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$ ec. autonomă (lipsește t)

Sch. de funcție și var $y(x) = x'(t)$

$\Rightarrow x''(t) = \frac{d}{dt} y(x(t)) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot x' = \frac{dy}{dx} \cdot y$ etc.

$\to$ ec pt y, apoi x

✓ 4) $F(x, tx', t^2x'', \ldots, t^n x^{(n)}) = 0$ (EULER)

Fac sch. de variabilă $|t| = e^s$ (2 cazuri), $y(s) = x(t)$

a) pt $t > 0$ $\Rightarrow$ $t = e^s \to s = \ln t \to \frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = e^s \cdot x'(t)$

$\to \frac{d^2y}{ds^2} = \ldots$

b) pt $t < 0$ $\Rightarrow$ $t = -e^s \to s = \ln(-t) \Rightarrow$ analog

se obține o ec cu coeficienți constanți pt y $\to$ vezi tipul 5)

Pt $t>0$ $t=e^s \Rightarrow s=\ln t$; $y=y(s)=x(t(s))$

$$x'(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{1}{t}\frac{dy}{ds}=e^{-s}\frac{dy}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt}=e^{-s}\frac{d}{ds}$$

$$x''(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=e^{-s}\frac{d}{ds}\left(e^{-s}\frac{dy}{ds}\right)=e^{-2s}\left(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\right)$$

$$x'''(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=e^{-s}\frac{d}{ds}\left[e^{-2s}\left(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\right)\right]=e^{-3s}\left(\frac{d^3y}{ds^3}-3\frac{d^2y}{ds^2}+2\frac{dy}{ds}\right)$$

Deci $x'(t)=e^{-s}\frac{dy}{ds}$; $x''(t)=e^{-2s}\left(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\right)$

$$x'''(t)=e^{-3s}\left(\frac{d^3y}{ds^3}-3\frac{d^2y}{ds^2}+2\frac{dy}{ds}\right)$$

Pt $t<0 \Rightarrow t=-e^s \Rightarrow s=\ln(-t)$

$$x'(t)=-e^{-s}\frac{dy}{dt} ; \quad x''(t)=e^{-2s}\left(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\right)$$

$$x'''(t)=-e^{-3s}\left(\frac{d^3y}{ds^3}-3\frac{d^2y}{ds^2}+2\frac{dy}{dt}\right)$$

B

✓ 5) Ec. liniară cu coeficienți constanți omogenă

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0 \quad , x = x(t), a_0 \neq 0$$

$a_0, \dots, a_n$ numere $\in \mathbb{R}$

Se caută $x(t) = e^{\lambda t}$ → se înlocuiește în ec ⇒ se obține pt λ

Ecuația caracteristică $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$

Ec. are n sol. $\in \mathbb{C}$

a) Dacă $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ sol simplă ⇒ $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$

b) Dacă $\lambda_1 = \dots = \lambda_k \in \mathbb{R}$ sol multiplă $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$

$x_2(t) = t e^{\lambda_1 t}$

$\vdots$

$x_k(t) = t^{k-1} e^{\lambda_1 t}$

c) Dacă $\lambda_1 = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ ⇒ $x_1(t) = e^{at}\cos bt$, $x_2(t) = e^{at}\sin bt$

d) Dacă $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = a+ib$ ⇒ $x_1(t) = e^{at}\cos bt$, $x_2(t) = t e^{at}\cos bt$

$\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{2k} = a - ib$ — $x_k = t^{k-1} e^{at}\cos bt$

$x_{k+1}(t) = e^{at}\sin bt$, $x_{k+2}(t) = t e^{at}\sin bt$, etc

$\{x_1, \dots, x_n\}$ sistem fundamental de soluții (sfs)

Sol gen $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n(t) x_n(t)$

✓ 6) Ec. dif. liniară de ord n neomogenă

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(x) \quad , x = x(t) \, , a_0 \neq 0$$

- se rezolvă ec. liniară omogenă atașată → se află

$\bar{x}(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$, $\{x_1, \dots, x_n\} = sfs$

- se caută sol particulară $x_p(t)$ a ec. neomogene cu met. coeficienților nedeterminați $x_p(t)$ de aceeași formă cu $f(t)$

x_p se înlec. în ec inițială și se află coeficienții

Sol. generală $x(t) = \bar{x}(t) + x_p(t)$

$\boxed{C}$ SISTEME LINIARE DE E.D. DE ORD I

I SISTEME OMOGENE

$X'(t) = A \cdot X(t)$ cu A matrice cu elem constante

$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ necunoscutele

Met. 1 Metoda eliminării → scot x_2 din prima ec și înlocuiesc în a 2^a → obțin o ec de ord 2 pt x_1 (dacă am doar nec x_1, x_2)

Met 2 Aflu valorile proprii ale matricii A

- Dacă λ_1 e val. proprie simplă $\in \mathbb{R}$ caut v = vector propriu

  ⇒ o sol. este $\varphi_1(t) = v \cdot e^{\lambda_1 t}$

- Dacă $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e sol. multiplă cu m_1 = ord. de multiplicitate

  caut $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \text{pol de grad } m_1 - 1 \\ \text{---} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}$ aflu coef.

  → trebuie să obțin sol $\varphi_1, \dots, \varphi_{m_1}$

- Dacă $\lambda_1 = a + ib \in \mathbb{C}$ aflu v = vector propriu

  ⇒ $\varphi_1(t) = Re\left[v \cdot e^{\lambda_1 t}\right]$, $\varphi_2(t) = Im\left[v \cdot e^{\lambda_1 t}\right]$

II SISTEME NEOMOGENE

$$X'(t) = A \cdot X(t) + b(t) \qquad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Pas 1 Aflu sol. sist. omogen $\bar{X}$ care verifică $\bar{X}'(t) = A \cdot \bar{X}(t)$

Pas 2 Caut sol particulară $X_p(t) = \Phi \cdot \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$ cu met. var. constantelor

unde $\Phi(t) =$ matrice $\Big(\underbrace{\varphi_1(t) \,\vdots\, \varphi_2(t) \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \varphi_n(t)}_{\text{sol. sistemului omogen}} \Big)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(t) \cdot b(t) \rightarrow \text{aflu} \begin{cases} c_1(t) = \ldots \\ \ldots \\ c_n(t) = \ldots \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_p(t) = \ldots$$

Soluția generală $X(t) = \bar{X}(t) + X_p(t)$

D SISTEME DE ED. DE ORD I

$$(*) \begin{cases} x_1'(t) = f_1(t,x) \\ x_2'(t) = f_2(t,x) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t,x) \end{cases}$$

unde $x=(x_1, \dots, x_n)$

$x = x_j(t)$

Def. O funcție $F = F(t,x)$ este <u>integrală primă</u> a sistemului dacă pt orice sol $x=(x_1,\dots,x_n)$ avem $F(t,x) = \text{const}$

$$\Leftrightarrow \frac{dF}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot f_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot f_n = 0}$$

- Pt a reduce dimensiunea sistemului folosind o integrală primă: $F(t,x) = c_1$ → scot x_2 în funcție de restul și înlocuiesc în sistem

- Pt a reduce dim. sist. folosind p integrale prime $F_1, \dots F_p$ fac schimbarea de fcție:

$$\begin{cases} y_1 = F_1 \\ y_2 = F_2 \\ \vdots \\ y_p = F_p \\ y_{p+1} = x_{p+1} \\ \dots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

(T) Dacă sistemul admite $n-1$ integrale prime funcțional independente $F_1, \dots, F_{n-1}$ ⇒ sol sistemului este

$$(**) \begin{cases} F_1(t,x) = c_1 \\ \vdots \\ F_{n-1}(t,x) = c_n \end{cases}$$

Sisteme diferențiale autonome : ca (*) în care f_j nu depind explicit de t => sist se rescrie

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n} \; (= dt)$$ sist. simetric

Se determină $n-1$ integrale prime funcțional indep. și sol. este

(**)

$\boxed{E}$ ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORD I

$\boxed{I}$ EDP OMOGENE LINIARE

(1) $a_1(x)\partial_1 u + a_2(x)\partial_2 u + \dots + a_n(x)\partial_n u = 0$

unde $x=(x_1,\dots x_n)$; $u = u(x_1,\dots,x_n)$, $\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial x_k}$

→ se scrie sistemul simetric asociat

(2) $\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n}$ → afle n-1 integrale prime $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}$

Sol edp (1) se scrie $f(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) = u$, f o funcție oarecare cu der. parțiale continue de ord 2

$\boxed{II}$ EDP CVASILINIARE DE ORD I

(2) $a_1(x,u)\partial_1 u + \dots + a_n(x,u)\partial_n u = g(x,u)$

→ sistemul caracteristic (simetric) atașat ec.

(3) $\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{g}$

→ $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ integrale prime

→ soluția: $\Phi(\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_n)=0$

Φ = funcție oarecare cu deriv parțiale cont.

✓ $\boxed{\text{III}}$ Problema Cauchy pt. edp cvasiliniare

$$\begin{cases} a_1(x,u)\,\partial_1 u + \dots + a_n(x,u)\,\partial_n u = g(x,u) \\ u(x) = u_0(x) \quad \text{dacă} \quad h(x) = 0 \end{cases}$$

→ se scot $\phi_1, \dots, \phi_n$ integrale prime ale sistemului (3)

→ se face sistemul
$$\begin{cases} \phi_1(x,u) = c_1 \\ \vdots \\ \phi_n(x,u) = c_n \\ u(x) = u_0(x) \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

se det. o relație între constante, apoi se înlocuiesc c_j cu ϕ_j

Obs Dacă se dă o integrală primă F_1

iau $F_1 = c_1$ → scot una din variabile