alexamaricoarei.github.io → Teaching → P&S

02.10.2019

Teme (~2 săpt. ⇒ 5 teme) = 30%

Proiect (3 săpt./lună pt. rezolvare) = 20%

Examen (doar exerciții, nu teorie) = 50% → 2 foi A4 pt. "materiale"

1p oficiu $\qquad E \geq 25\%$

1.5p sem./lab. $\qquad T \geq 4.5$.

Restanță: aceeași adunare SAU examen+1 of. ⇒ max. dintre ele

Câmp de probabilitate. Evenimente și operații cu evenimente

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Ω – mulțimea evenimentelor elementare

Ex: $\Omega = \{H, T\}$

Ex: arunc de 3 ori cu banul.

$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) / x_i \in \{H, T\}\} = \{H, T\}^3$

Ex.: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ex.: $\Omega = \{(x_1, \dots, x_m) / x_i \in A, |A| = m\} \Rightarrow |\Omega| = m^m$

Ω – infinită → numărabilă / nenumărabilă

$\Omega = \mathbb{N} = \{$nr. de aruncări cu banul pt. a obține prima oară $H\}$

$= \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

$\omega_k = \underbrace{T \dots T}_{k-1}H$

Def.: Se numește eveniment orice submulțime a lui Ω

Def.: Mulțimea evenimentelor asociate unui experiment se not. $\mathcal{F}$
$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$
mulț. părților

PROPRIETĂȚI:

a) în urma desfășurării unui ev., atât cel posibil cât și imposibil se află în mulțimea $\mathcal{F}$.

$\emptyset \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$

b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ ($\bar{A} \in \mathcal{F}$) ← complementar

c) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

c') $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$

Obs.: O submulțime de părți ale lui Ω care satisface A, B, C se numește algebră.

Notația	Teoria Mulțimilor	Teoria Probabilităților
Ω	Ω	evenimentul sigur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{2, 4, 6\}$ $\omega \in A$
$\emptyset$	mulțimea vidă	evenimentul imposibil
A	mulțimea A	evenimentul A
A^c	complementara mulțimii A	evenimentul contrar lui A
$A \cup B$		realizarea lui A sau B
$A \cap B$		realizarea lui A și B
$A \setminus B$		realizarea lui A, dar nu și B
diferența simetrică $A \Delta B$ $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$		s-a realizat sau A sau B, dar nu simultan
$A \subseteq B$		realizarea lui A implică realizarea lui B

09.10.2019

2

$(\Omega, \mathcal{F})$

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0;1]$

$N, A \Rightarrow N(A)$ = nr. de realizări ale evem. A.

$$\frac{N(A)}{N} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(A) \simeq \frac{N(A)}{N}$$

$A=\emptyset \Longrightarrow N(\emptyset)=0$

$\mathbb{P}(A)=0.$

$A=\Omega \Rightarrow N(\Omega)=N$

$\mathbb{P}(\Omega)=1$

$A, B, \ A\cap B=\emptyset$

$$\mathbb{P}(A\cup B) \simeq \frac{N(A\cup B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B).$$

$N(A\cup B) = N(A)+N(B).$

σ-aditivitate $\begin{cases} (A_n)_n \subseteq \mathcal{F}, \ A_i\cap A_j=\emptyset, (\forall) i\neq j \\ \mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n) \end{cases}$

Def.: O funcție $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0;1]$ care verifică urm. propr. se numește măsură de probabilitate.

a) $\mathbb{P}(\emptyset)=0$ și $\mathbb{P}(\Omega)=1$

b) $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}, \ A_i\cap A_j=\emptyset, (\forall) i\neq j$

$\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$

Def.: Tripletul $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se numește câmp de posibilități.

Ex.: $\Omega=\{H,T\}$, $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)=\{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \{H,T\}\}$

$\mathbb{P}: \mathcal{F}\to[0;1]$

$\mathbb{P}(\{H\}) = p\in[0;1]$

Ex.: $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$, $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}: \mathcal{F}\to[0;1)$, $\mathbb{P}(A)=\sum_{i\in A} p_i$, unde $p_1+p_2+\dots+p_6=1$, $p_i\in(0;1)$

$p_i=\mathbb{P}(\{i\})$

$\mathbb{P}(m \text{ par}) = \frac{1}{2}$

$\{1; 3; 4\} = \frac{1}{2}$.

PROPRIETĂȚI:

Presupunem că $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probabilitate

a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

b) $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$, $A_k \cap A_l = \emptyset$ $\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)$

c) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

d) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

e) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

f) $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{F}$

FORMULA LUI POINCARÉ

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{m-1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m)$$

Dem.:

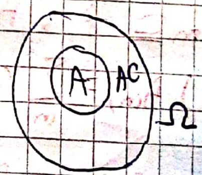
(a) Presp. că $\mathbb{P}(\emptyset) > 0$ $\quad (A_m)_m \subseteq \mathcal{F}$, $A_m = \emptyset$

$\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}(\emptyset) = \infty$ ∡

(b) $(A_m)_m$ $\quad A_{m+1} = \emptyset$, $A_{m+2} = \emptyset$, ...

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}(A_m) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)$

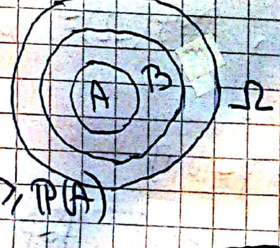
(c) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$



$A \cup A^c = \Omega$

$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$

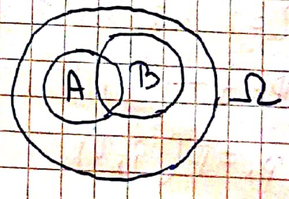
(d) $A \subseteq B$



$B = A \cup (B \setminus A)$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$

(e) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$



$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$

$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$

$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$

e) Formula lui Poincaré: prin inducție

P(2) adev.

Pres. P(n) adev. $\longrightarrow$ P(n+1)

$$\mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i\neq j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^n \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}) \cdot P(n).$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}}_{B}$$

$$\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n-1_1}) - \mathbb{P}(B \cap A_{n-1_1})$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})$$

RESTUL $\Rightarrow$ TEMĂ

g) inegalitatea lui Boole: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

!

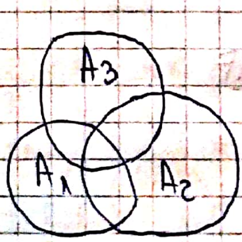
$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$

...

$B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$



$(B_n)_n \subseteq \mathcal{F}$

$B_i \cap B_j = \emptyset \; i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(B_i)}_{\leq \mathbb{P}(A_i)}$$

Scanned by CamScanner

Ex: $\Omega = \{H, T\}^{\mathbb{N}}$

$A_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid (\exists)_i \text{ a.î. } x_i = H\}$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{$ să apară H mai devreme sau mai târziu$\}$.

$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$

$A_n^c = \{(T, \dots, T)\}$

$A_n^c \supseteq A_{n-1}^c$

$\lim_n A_n^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$

Obs.: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$

$\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (poate fi văzut ca sup)

$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots \supseteq B_n$

$\lim_n B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

$\mathbb{P}$ este cont. în sensul că $\lim_n \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\lim_n (A_n))$

$\lim_n \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\lim_n (B_n))$

$\mathbb{P}(A_n^c) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n) = \lim_n (1 - \mathbb{P}(A_n^c)) = 1 - \lim_n \mathbb{P}(A_n^c) = 1 - 0 = 1$

! Dacă $A \in \mathcal{F}$ a.î. $\mathbb{P}(A) = 1$ atunci spunem că A se realizează aproape sigur (a.s.)

Ex: 60% $\neg T, \neg F$

20% T

30% F

Probab. să folosească sau T sau F. $(T \cup F)$

A - folosesc T, $\mathbb{P}(A) = 0{,}2$

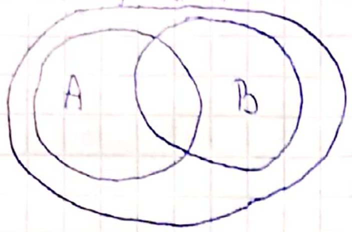
B - folosesc F, $\mathbb{P}(B) = 0{,}3$.

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

$\mathbb{P}(A \cup B) = ? = 0{,}4$

Scanned by CamScanner

$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cup B) = 0,1.$



$A\cap B^c = A \setminus (A\cap B) \longrightarrow 0,1$

MODELUL CLASIC DE PROBABILITATE (MODELUL LUI LAPLACE)

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$

$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{N} : \frac{1}{|\Omega|} \rightarrow$ echirepartiția

$A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\{\omega\}\subseteq A} \{\omega\}\right) = \sum_{i\,|\,\omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i\,|\,\omega_i\in A} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nr. fav.}}{\text{nr. pos.}}$

PRINCIPIUL INCLUDERII-EXCLUDERII

$A_1, \dots, A_m$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap \dots \cap A_m|.$$

ex.: **Formula lui Euler:**

$m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$

$\varphi(m) =$ nr. de numere prime cu m ($\leq m$).

A_k – $m \leq m$ divizibile cu p_k

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r \longrightarrow (A_1 \cup \dots \cup A_r)^c$

$\varphi(m) = |(A_1 \cup \dots \cup A_r)^c| = m - |A_1 \cup \dots \cup A_r|$

$\prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

1. Probabilitatea ca 2 pers. să se fi născut în aceeași zi.

an = 365 zile

n persoane, echirepartiție

$\mathbb{P}$(2 să se fi născut în aceeași zi) = ?

$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) / x_i \in \{1; \dots; 365\}\} \Rightarrow 365^n$

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$

$1 - \mathbb{P}$(toate cele n persoane să se fi născut în zile diferite).

$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n} = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}$$

pt. $n = 23 \Rightarrow \sim 50\%$ dintre persoane

2. Care este șansa să obținem full la un joc de poker.

52 cărți de joc $\qquad 5 \Rightarrow \boxed{A|A|A|K|K}$

$\Omega = \{\{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5\} / x_i$ - o carte de joc din cele 52; $x_i \neq x_j\}$

$\Rightarrow C_{52}^5$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$\mathbb{P}$ - echirepartiția

$$\mathbb{P}(\text{Full House}) = \frac{\text{nr. caz. fav.}}{C_{52}^5}$$

A

52 → 13 figuri
↘ 4 culori

13

$12 \Rightarrow C_4^2$

As $\Rightarrow C_4^3$

$$\mathbb{P}(\text{Full House}) = \frac{13 \cdot C_4^3 C_4^2}{C_{52}^5}$$

(3) Care eveniment este mai probabil?

a) Să avem cel puțin un 6 în 6 aruncări cu zarul

b) Să avem cel puțin un 2 valori de 6 în 12 aruncări cu zarul

c) Să avem cel puțin un 3 valori de 6 în 18 aruncări cu zarul.

$\Omega = \{ (x_1; x_2; \dots; x_n) / x_i \in \{1; \dots; 6\} \}$

$n = 6; 12; 18 \to 6^6, 6^{12}, 6^{18}$ cazuri posibile

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}$ echirepartiția

a) A - eveniment dorit.

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{5^6}{6^6}$

$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}$(să nu obținem niciodată valoarea 6) $= \frac{5^6}{6^6}$

b) B - eveniment dorit.

$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c)$ cel mult o valoare de 6 → nicio val (B_1); exact o val (B_2).

$\mathbb{P}(B_1) = \frac{5^{12}}{6^{12}}$

$\mathbb{P}(B_2) = \frac{12 \cdot 5^{11}}{6^{12}}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{5^{12} + 12 \cdot 5^{11}}{6^{12}} \simeq 0,62.$

c) $\mathbb{P}(C) = 1 - \frac{5^{18} + C_{18}^{1} \cdot 5^{17} + C_{18}^{2} \cdot 5^{16}}{6^{18}}$

(4) O secretară obosită de la et 3, are n plicuri și n scrisori; toate le se împrăștie. Care este probab. ca să avem o scrisoare corectă într-un plic corect?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

$\Omega: S_n = \{ \sigma : \{1; \dots; n\} \to \{1; \dots; n\} \text{ bij} \}$ $\quad n!$

E_i - avem o potrivire pentru plicul i

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ \_ & \_ & \dots & i & \dots & \_ \end{pmatrix}$$

$A = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \dots + (-1)^{n}\mathbb{P}(E_1 \cap \dots \cap E_n)$

$\mathbb{P}(E_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & n \\ \dots & & i & \dots & \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}(E_i \cap E_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \dots & & i & \dots & j & \dots & \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{i<j} \frac{1}{n(n-1)} + \sum_{i<j<k} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$

$P(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k!}$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

$e^{-x} = 1 + \frac{(-x)}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + \dots + \frac{(-x)^n}{n!} = 1 + \frac{(-1)x}{1!} + \frac{(-1)^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

$e^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$

$P(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \simeq 1 - \frac{1}{e} \simeq 0{,}63.$

$E_1 \quad E_2 \quad E_3$

$(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) \cup (E_1^c \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2^c \cap E_3).$

Scanned by CamScanner

PROBABILITĂȚI CONDIȚIONATE. INDEPENDENȚĂ

$\mathbb{P}(A)$

$N \quad A \quad B$

$\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

$$\frac{N(A\cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A\cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}}$$

$\ldots n \in m).$

Def.: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și A, B cu $\mathbb{P}(B)>0$. $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

$\mathbb{P}_B(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|B)$ este o probab. pe $(\Omega, \mathcal{F})$

$\mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(A^c|B)$.

$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$.

Def.: Spunem că evenimentele A și B sunt independente ($A \perp\!\!\!\perp B$)
$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$.

Obs.: Dacă $A \perp\!\!\!\perp B$, atunci: $\begin{cases} A^c \perp\!\!\!\perp B \\ A \perp\!\!\!\perp B^c \\ A^c \perp\!\!\!\perp B^c \end{cases}$

Def.: Spunem că $A_1, \ldots, A_n$ sunt (mutual) independente dacă
$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$, J mulțime finită

$2^n - n - 1$

5. O familie are 2 copii.

a) Care este probab. ca familia are 2 fete, știind că cel mare este fată?

b) Care este probab. ca cel puțin un copil să fie fată?

a) $1/2$

b) $1/3$

$\Omega = \{FF; FB; BF; BB\}$ a)

$P(FF \mid \text{cel mare este } F) = \{FF; BF\} = \dfrac{P(\{FF\} \cap \{FF; BF\})}{P(FF; BF)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$

b) $= \{FF; FB; BF\} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

23.10.2019

4

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$A, B \in \mathcal{F}, \quad P(B) > 0.$

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

→ Formula prob. totale

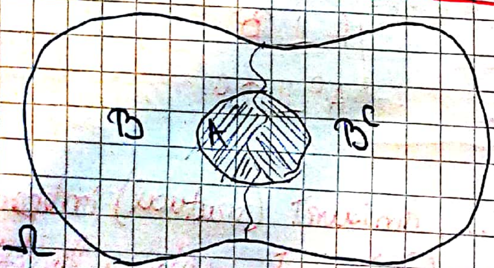
→ Formulele lui Bayes

1) a) Fie $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$. Atunci $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ (dacă $P(A) > 0$).

b) Fie $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$, $P(A_1 \cap \ldots \cap A_m) > 0$. Atunci

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_m \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{m-1})}$$

formula produs



2) a) $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) = 0$.

$$\boxed{P(A) = P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid B^c) \cdot P(B^c)}$$

$A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

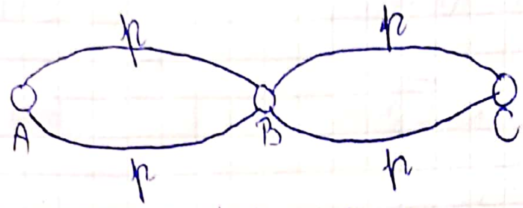
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

b) Fie $A \in \mathcal{F}$ și $(B_i)_{1 \le i \le m} \subseteq \mathcal{F}$

$\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} B_i, \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \ i \ne j$

$$\boxed{\mathbb{P}(A)=\sum_{i=1}^{m}\mathbb{P}(A|B_i)\cdot\mathbb{P}(B_i)}$$

(*)



Probab. să ajungem de la A la C.

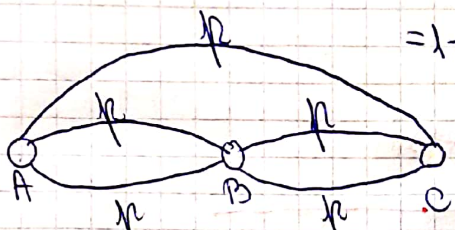
$\mathbb{P}$(drum deschis între A și C) = $\mathbb{P}$(dr. des. între A și B și dr. des. între B și C)

= $\mathbb{P}$(dr. des. între A și B) x $\mathbb{P}$(dr. des. între B și C) $=(1-p^2)^2$

$\mathbb{P}$(dr. deschis între A și B) = 1 - $\mathbb{P}$(ambele dr. închise între A și B).

= 1 - $\mathbb{P}$(primul dr. închis A și B) x $\mathbb{P}$(al II-lea dr. închis A-B).

$=1-p^2$



- $\mathbb{P}$(dr. deschis A-C) = $\mathbb{P}$(A-C | direct deschis) $\mathbb{P}$(direct deschis) + $\mathbb{P}$(A-C | direct închis) $\mathbb{P}$(dr. direct închis).

$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$.

- $=1(1-p)+(1-p^2)p$.

(*) Mersul la întâmplare simetric

! la examen în 2 sau 3 dimensiuni

$k, N, p=\frac{1}{2}$

Probab. ca jucătorul să ajungă la ruină?

A = jucătorul se ajunge la ruină

B = la aruncarea cu banul a rezultat H

$\mathbb{P}_k(A)$ - probab. ca jucătorul să ajungă la ruină atunci când capitalul inițial este k unități monetare.

$\mathbb{P}_k(A)=\mathbb{P}_k(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}_k(A|B^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)=\frac{1}{2}\mathbb{P}_{k+1}(A)+\frac{1}{2}\mathbb{P}_{k-1}(A)$.

Fie $p_k=\mathbb{P}_k(A)$ $\qquad p_0=1$

$p_k=\frac{1}{2}p_{k+1}+\frac{1}{2}p_{k-1}$. $\qquad p_N=0$.

Scanned by CamScanner

$2p_k = p_{k+1} + p_{k-1}$

$p_k - p_{k-1} = p_{k+1} - p_k$.

$b_k = p_{k+1} - p_k, \quad k \in \overline{0, N-1}$

$b_0 = \dots = b_{k-1} = b_k$.

$p_{k+1} = b_k + p_k$

$\qquad\qquad \shortparallel$

$\qquad\qquad b_{k-1} + p_{k-1}$

$p_{k+1} = 2b_0 + p_{k-1} = (k+1) b_0 + p_0$.

$b_0 + b_1 + \dots + b_{N-1} = p_N - p_0$

$N b_1 = -1 \Longrightarrow b_0 = \frac{-1}{N} \Rightarrow p_k = k b_0 + p_0 = 1 - \frac{k}{N}$.

$b) \; q = 1 - p.$

$q.\; q b_k = p\, b_{k+1}$

Formula lui Bayes.

a) Fie $A, B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \in (0,1)$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)}$$

Dem.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c)}$$

b) Fie $B \in \mathcal{F}$ și $(A_i)_{1 \le i \le m} \subseteq \mathcal{F}$ partiție pe Ω.

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(B|A_j) \cdot \mathbb{P}(A_j)}$$

(*) $3/4 \to H$

"H H H"

Prob. ca moneda aleasă să fi fost echilibrată?

A - even. HHH

E - moneda echilibrată

$$\mathbb{P}(E|A) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(A|E) \cdot \mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(A|E) \cdot \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(A|E^c) \cdot \mathbb{P}(E^c)} = \frac{\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{3^3}{2^3}} = \frac{8}{35}$$

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E^c) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(A|E) = \frac{1}{2^3}$

$\mathbb{P}(A|E^c) = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

(*) 1% D – evenim. prin care A este bolnav

T – testul este poz.

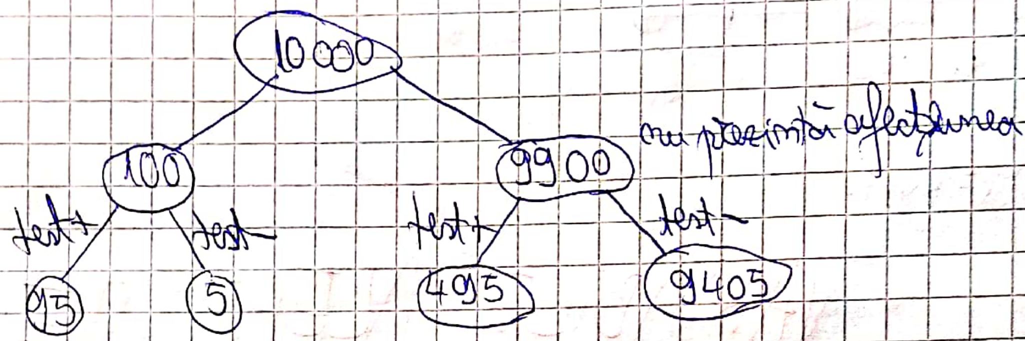
Testul are o acuratețe de 95%.

$\mathbb{P}(T|D)=0.95$

$\mathbb{P}(T^c|D^c)=0.95$

Probabilitatea ca individul să fie bolnav în care testul este pozitiv.

$$\mathbb{P}(D|T) \overset{Bayes}{=} \frac{\mathbb{P}(T|D)\cdot\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T|D)\cdot\mathbb{P}(D)+\mathbb{P}(T|D^c)\cdot\mathbb{P}(D^c)} = \frac{0.95\cdot 0{,}01}{0.95\cdot 0{,}01+0.05\cdot 0.99} = 0.16$$



$$\frac{95}{495+95} = 0.16.$$

VARIABILE ALEATOARE

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $X: \Omega \to \mathbb{R}$.

$\{X \le x\}$ $\{X \in A\}$.

$\{X = x\}$

Def.: Se numește variabilă aleatoare $X: \Omega \to \mathbb{R}$ a.î. $\{X \le x\} = \{\omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathcal{A}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

30.10.2019

5

(3) $A^{\varepsilon_1} \cap B^{\varepsilon_2} \cap C^{\varepsilon_3}$ $\qquad \varepsilon_i \in \{0,1\}$

$A^{\varepsilon_1} \to A, \varepsilon_1 = 1$; $\quad A^{\varepsilon_1} \to A^c, \varepsilon_1 = 0$.

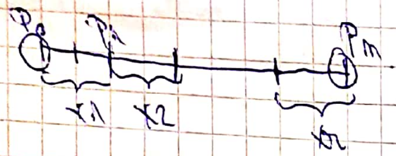
$A \cap B \cap C$

$A \cap B \cap C^c$

$A \cap B^c \cap C^c$

(5) $x_1 + \dots + x_r = n$, $x_i \geq 0$.

a)

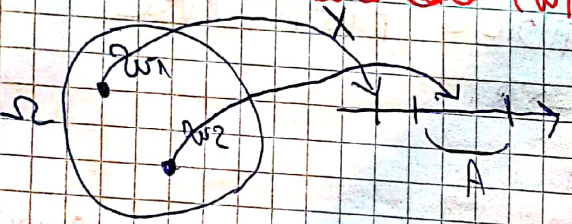


C_{n-1}^{r-1}

b) $y_i = x_i + 1$

VARIABILE ALEATOARE

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de probabilitate. Spunem că $X: \Omega \to \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare dacă $\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.



$\{X \in A\}$

Ex: $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$.

X v.a. nr. de capete, $X: \Omega \to \mathbb{R}$

$X(HH) = 2$

$X(HT) = X(TH) = 1$

$X(TT) = 0$.

Y var. aleat. ce ne dă nr de cozi $Y = 2 - X$, $Y: \Omega \to \mathbb{R}$.

$Z = \begin{cases} 1, & \text{la prima aruncare am obținut } H \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

$Z(HH) = Z(HT) = 1$

$Z(TH) = Z(TT) = 0$.

$P(X=2) = \frac{1}{4}$

$P(X=1) = 2/4$

$P(X=0) = \frac{1}{4}.$

$Im(X) = X(\Omega) = \begin{cases} \text{discrete (} X(\Omega) \text{ finită sau numărabilă)} \\ \text{continuă (în caz contrar)} \end{cases}$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o var. aleat. Se num. repartiția (distribuția) lui X măsura de probabilitate Q.
$Q(A) = \mathbb{P}(X \in A)$, $(\forall) A$ interval.

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. S.n. funcție de rep. a lui X

$F: \mathbb{R} \to [0,1]$, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{P}(X \in (-\infty; x])$.

Ex: $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$, X = nr. de capete.

$F(x) = ?$

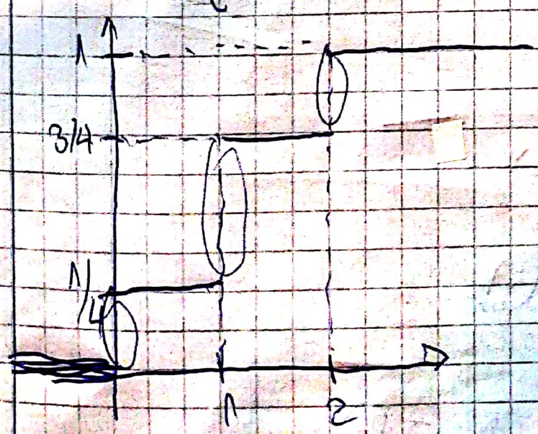
$X \in \{0; 1; 2\}$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2. \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$\mathbb{P}(X \leq x) = 0$ pt. că $\{X \leq x\} = \emptyset$

$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{X=0\} \cup \{X=1\})$
$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$



(1) Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. şi $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. cu fct. de repartiţie F

a) F e cresc.

b) F este cont. la dr.

c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ şi $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Dem: $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Dacă $x < y$, atunci $\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq y)$.

$F(x) \leq F(y)$.

$\lim_{x \downarrow x_0} F(x) = F(x_0)$.

$x + \frac{1}{n} \downarrow x$.

$A_n = \{X \leq x + \frac{1}{n}\}$.

$A_{n+1} \subseteq A_n$.

$(A_n) \downarrow \lim_n A_n = \bigcap_n A_n$.

$\mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$.

$\mathbb{P}(X \leq x) = \lim_n F(x + \frac{1}{n})$.

$y_n \downarrow x_0$. $\Rightarrow F$ cont. la dr.

$B_n = \{X \leq -n\}$

$C_n = \{X > n\}$

$\mathbb{P}(X \leq n) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(X > n)}_{\downarrow 0} \to 1$

$\mathbb{P}(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$.

$\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$.

$\mathbb{P}(X = x) = F(x) - \lim_{y \nearrow x} F(y)$.

VARIABILE ALEATOARE DISCRETE

- def. $\begin{cases} \text{- repr.} \\ \text{- fct. de rep.} \end{cases}$
- exemple
- momente
- independența v.a.
- transformări de v.a.

Def: Spunem că o v.a. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ este discretă dacă $X(\Omega)$ este cel mult numărabilă.

$X \in \{x_1, \dots, x_n\}$ s.m. $X \in \{x_1, x_2, \dots\}$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. discretă.

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$

S.n. fct. de masă $p_X: X(\Omega) \to [0,1]$ (se mai not. cu $f(x)$).

$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \; x \in X(\Omega)$.

$p_X: \mathbb{R} \to [0,1]$

$$p_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x), & x \in X(\Omega) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Obs: Dacă X v.a. discretă și $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} \{X = x\}\right)$

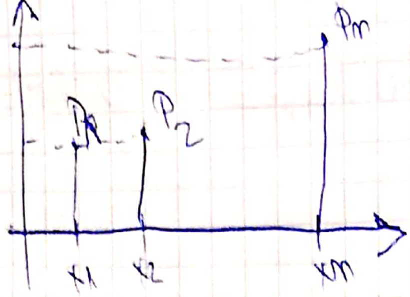
$$= \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} p_X(x).$$

Obs: $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

$p_X(x_i) = p_i$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$.



A, B independente $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Def.: Fie X, Y două v.a.d. $X(\Omega)=\{x_1, x_2, \dots\}$

$Y(\Omega)=\{y_1, y_2, \dots\}$.

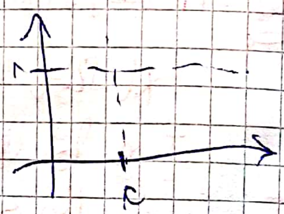
Spunem că $X \perp Y$ dacă $P(X=x, Y=y)=P(X=x)\,P(Y=y)$ $(\forall)\, x\in X(\Omega)$, $y\in Y(\Omega)$

Obs.: $P(X\in A, Y\in B)=P(X\in A)\,P(Y\in B)$, $(\forall)\, A,B\subseteq\mathbb{R}$.

Ex: $X=c$ (const).

$P(X=c)=1$. $X\sim C^1_c$

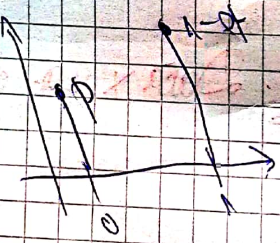
$F(x)=\begin{cases}0, & x<c\\ 1, & x\geq c\end{cases}$



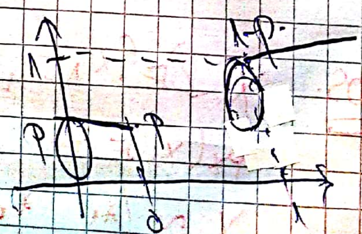
Ex: (Bernoulli) $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $X(\Omega)=\{0,1\}$.

$P(X=0)=p$ și $P(X=1)=1-p$

$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ p & p\end{pmatrix}$



$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ p, & 0\leq x<1\\ 1, & 1\leq x\end{cases}$



Ex: un exp. aleator și A un ev. ?

$1_A:\Omega\to\mathbb{R}$, $1_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}$.

$1_A\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-P(A) & P(A)\end{pmatrix}$

Uniformă.

$X \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1/n & 1/n & & 1/n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}(X = x) = 1/n, \ x \in \{1, \dots, n\}$.

$F(x) = 0, \ x < 1$

$1/n, \ 1 \le x < 2$.

$2/n, \ 2 \le x < 3$

$1, \ x \ge n$.

06. 11. 2019

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\quad X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. dacă $X(\Omega)$ cel mult numărabilă

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$

$p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i), \ i \ge 1$.

$f(x_i)$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1(x_1) & p_2(x_2) \end{pmatrix}$$

Ce prop. are $p_X(x)$? $\quad p_X(x) \ge 0$.

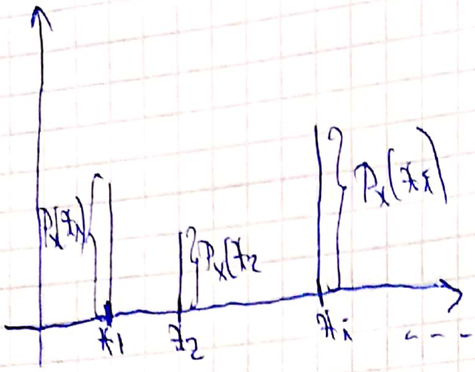
$$\mathbb{P}(X \in \Omega) = 1 \iff \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1 \iff \sum_{i \ge 1} p_X(x_i) = 1.$$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$$

interval

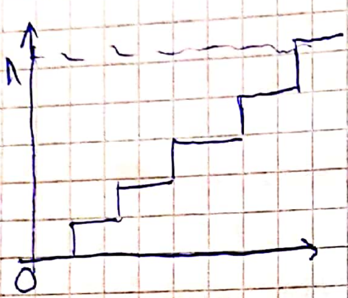
Barplot (diagrama cu bare)

$x_1 \le x_2 \le \dots$



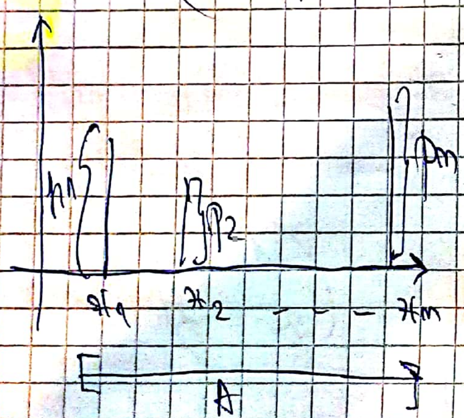
$F(x)=P(X\le x),\ (\forall)\, x\in\mathbb{R}$

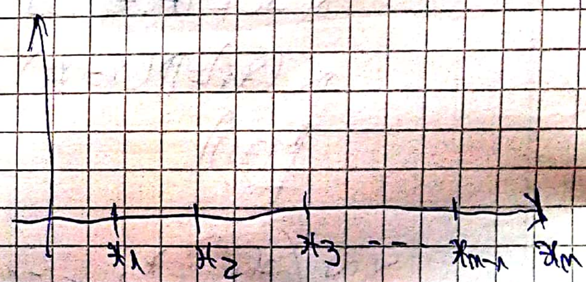
În cazul în care X discretă, $F(x)$ este o formă scară



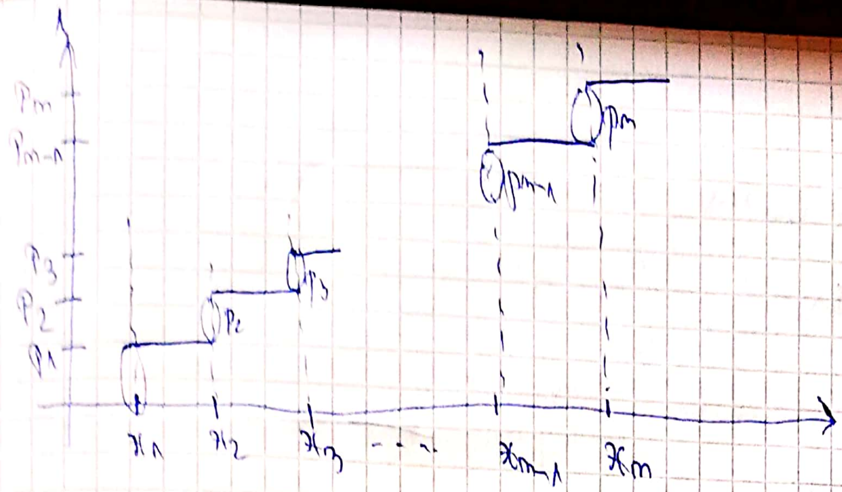
$x\in\{x_1,\dots,x_n\}$ (Pp. $x_1\le x_2\le\dots\le x_n$)

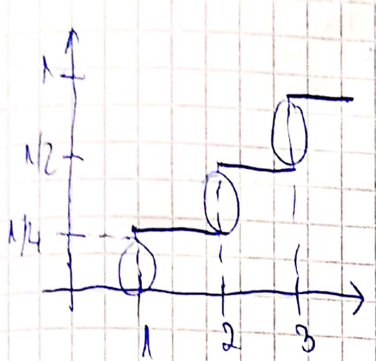
$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \qquad p_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i=1.$$





$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<x_1 \\ p_1, & x_1\le x<x_2 \\ p_1+p_2, & x_2\le x<x_3 \\ \dots \\ p_1+\dots+p_{n-1}, & x_{n-1}\le x< x_n \\ 1, & x_n\le x \end{cases}$$





$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Independență:

$X \in \{x_1, x_2, \dots\}$

$Y \in \{y_1, y_2, \dots\}$

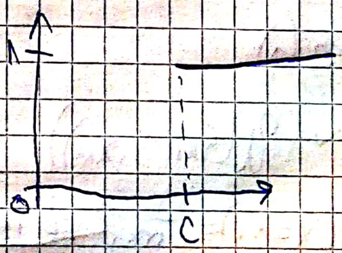
$X \perp\!\!\!\perp Y \quad : \quad \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_i) = \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_i)$

$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$.

Exemple de variabile aleatoare discrete.

1) $X = c \qquad \mathbb{P}(X = c) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$$



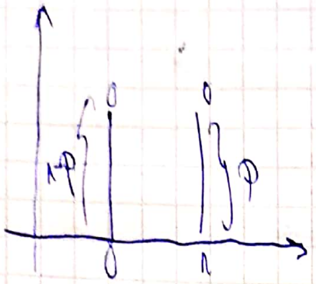
2) $X \in \{0, 1\}$ (Bernoulli)

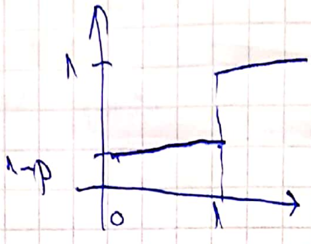
$\mathbb{P}(X = 1) = p$

$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, $\quad p \in (0, 1)$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-p, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$





$A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

$\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0;1\}$

$\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$.

PROPRIETĂȚI: a) $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$

b) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$

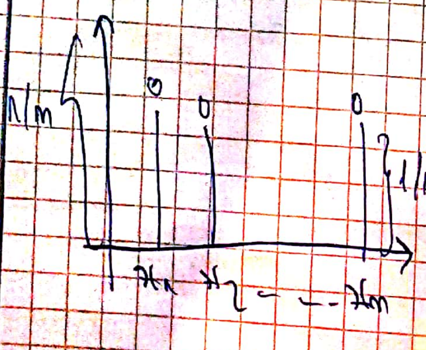
c) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$

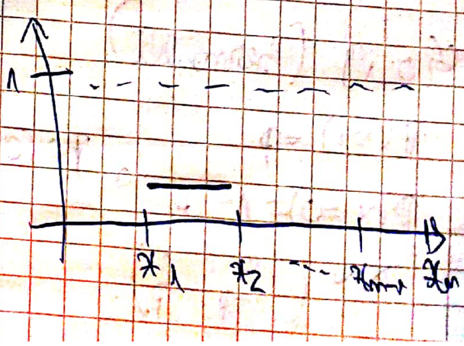
3) $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Uniformă pe $\{x_1, \dots, x_n\}$

NOT: $X \sim Ber(p)$

$X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$

$\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.





$\mathbb{P}(X=x_i) = \frac{1}{|\{x_1, \dots x_n\}|}$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{|A \cap \{x_1, \dots x_n\}|}{|\{x_1, \dots x_n\}|} = \frac{|A \cap \{x_1, \dots x_n\}|}{n}$$

Obs: Fie C mult. fin., $X \sim \mathcal{U}(C)$

$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|C|}, x \in C$.

$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{|A \cap C|}{|C|}$

4) Binomiala de parametrii n, p: $X \sim Bi(n,p)$ $(Bin(n,p))$.

$X \in \{0, 1, \dots, n\}$.

$X \sim B(n,p)$

$X \in \{0, 1, \dots, n\}$

$\mathbb{P}(X=k)$.

$\{X=k\}$, $HHTH \dots T$

$\mathbb{P}^{n-?}(HHT) = p \times p \times (1-p)$

A_i – la a i-a aruncare am obținut H

$\{HHT\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3^c$

$\mathbb{P}(HHT) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3^c) = p \cdot p \cdot (1-p)$

$\mathbb{P}(HHTH \dots T) = p^k (1-p)^{n-k}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0, \dots, n\}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \underset{\text{Newton}}{\overset{\text{binom}}{=}} (p+1-p)^n = 1$$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \sum_{\substack{k \le x \\ k \in \{0, \dots n\}}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} \le 1 \iff \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k+1}} \le 1$$

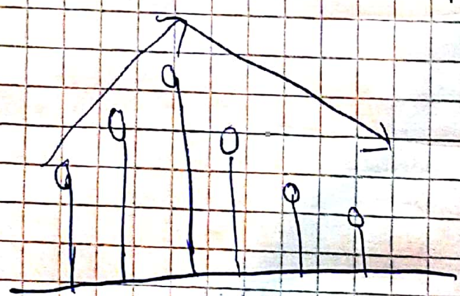
$$\iff \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}(1-p)} \le 1$$

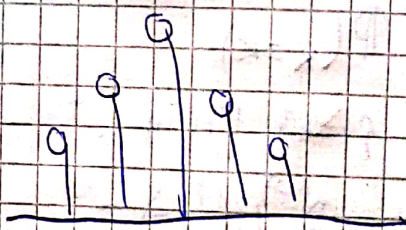
$$\iff \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)} \le 1$$

$$\iff (n-k+1)p \le k(1-p)$$

$$\iff (n+1)p \le k(1-p+p)$$

$$k \ge (n+1)p$$





(P) Dacă $X \sim B(n,p)$

$X = X_1 + \dots + X_n$

$X_i \sim Bin(p)$ indep.

X_i – rez. obținut în urma rulării exp. i-

în cazul ~~[illegible]~~ aruncării cu banul – $X_i = 1$ dacă am obținut H la aruncarea i și 0 altfel

P) $X \sim B(n,p)$ și $Y \sim B(m,p)$ cu $X \perp Y$, atunci $X+Y \sim B(n+m,p)$.

Dem.:

$X+Y \in \{0,1,\dots,n+m\}$

$P(X+Y=k) = P(X+Y=k,\ X\in\{0,1,\dots,n\}) = \sum_{x=0}^{n} P(X+Y=k,\ X=x) =$

$= \sum_{x=0}^{n} P(Y=k-x,\ X=x) \overset{indep}{=} \sum_{x=0}^{n} P(Y=k-x)\cdot P(X=x)$

SAU

$X = X_1 + \dots + X_n,\ X_i \sim Ber(p)$

$Y = Y_1 + \dots + Y_m,\ Y_j \sim Ber(p)$

$X+Y = X_1 + \dots + X_n + Y_1 + \dots + Y_m \sim B(n+m,p)$.

$P(A_k) = \dfrac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$

5) Hipergeometrică

N bile A+N, dintre care M sunt negre.

Efectuăm n extrageri fără întoarcere.

X v.a. = nr. de bile N din cele n extrageri.

În cazul binomial: $p = \frac{M}{N}$, $X \sim B\left(n, \frac{M}{N}\right)$

$P(X=k) = \dfrac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$X \in \{0, \dots, \min\{n, M\}\}$.

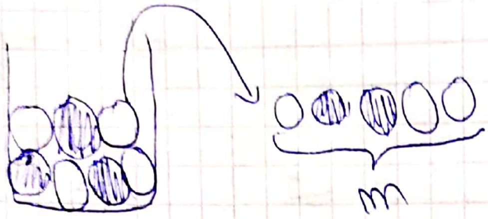
$(1+x)^M \cdot (1+x)^{N-M} = (1+x)^N$

Scanned by CamScanner

13.11.2019.

5) Hipergeometrică

N, M negre, extragem m bile fără întoarcere



X - nr. de bile negre extrase

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{m-k}}{\binom{N}{m}},\quad k\in\{0,1,\dots,\min(m,M)\}.$$

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{k\le x}P(X=k).$$

Aplicație:

Pres. că într-un lac sunt N pești

M pești

m pești

k pești marcați.

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{m-k}}{\binom{N}{m}}\stackrel{\text{not}}{=}p(k,N)$$

$$\frac{p(k,N)}{p(k,N-1)}\ge 1 \iff \frac{\dfrac{\cancel{\binom{M}{k}}\binom{N-M}{m-k}}{\binom{N}{m}}}{\dfrac{\cancel{\binom{M}{k}}\binom{N-1-M}{m-k}}{\binom{N-1}{m}}}\ge 1$$

$$\iff \frac{C_{N-M}^{m-k}\cdot\binom{N-1}{m}}{\binom{N}{m}\cdot\binom{N-1-M}{m-k}}\ge 1$$

$$\iff \frac{\dfrac{(N-M)!}{(m-k)!\,[N-M-(m-k)]!}}{\dfrac{N!}{m!\,(N-m)!}}\cdot\frac{\dfrac{(N-1)!}{m!\,(N-1-m)!}}{\dfrac{(N-1-M)!}{(m-k)!\,(N-1-M-(m-k))!}}\ge 1$$

$$\iff \frac{(N-M)(N-m)}{N(N-M-m+k)}\ge 1$$

$$\iff N^2-mN-MN+Mm\ge N^2-NM-mN+kN$$

$$\iff N\le\frac{Mm}{k}\implies \hat{N}=\left[\frac{Mm}{k}\right].$$

$\Rightarrow$ $M = 100$

$m = 50$ $\Rightarrow \hat{N} = 150$

$k = 20$

REPARTIȚIA POISSON

Spunem că o v.v. $X: \Omega \to \{0, 1, 2, \dots\} \in \mathbb{N}$ este repartizată Poisson de parametrul λ dacă $\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$, $k \geq 0$, $\lambda > 0$.

$X \sim P(\lambda)$
$(Pois(\lambda))$

PROPOZIȚIE:
Fie $X \sim Pos(\lambda_1)$ și $Y \sim Pos(\lambda_2)$ cu X și Y independente. Atunci $X + Y \sim Pos(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Dem: $\mathbb{P}(X + Y = k) = \mathbb{P}(X + Y = k \cap \Omega)$. $\Omega = \bigcup_{k'} \{\lambda_1 - \lambda_2\}$.

$A = \{X + Y = k\}$.

$\Omega = \bigcup_{k'} B_{k'}$

$$\mathbb{P}(A \cap \bigcup_{k'} B_{k'}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k'} (A \cap B_{k'})\right) = \sum_{k'} \mathbb{P}(A \cap B_{k'}) =$$

$$= \sum_{k'} \mathbb{P}(A \mid B_{k'}) \cdot \mathbb{P}(B_{k'}) =$$

$$= \sum_{k'} \mathbb{P}(X + Y = k \mid X = k') \cdot \mathbb{P}(X = k') =$$

$$= \sum_{k'} \mathbb{P}(Y = k - k' \mid X = k') \cdot \mathbb{P}(X = k') =$$

$$= \sum_{k'=0}^{k} \mathbb{P}(Y = k - k') \mathbb{P}(X = k') =$$

$$= \sum_{k'=0}^{k} e^{-\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2^{k-k'}}{(k-k')!} \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1^{k'}}{k'!} =$$

$$= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot \sum_{k'=0}^{k} \frac{1}{k'! \cdot (k - k')!} \lambda_1^{k'} \cdot \lambda_2^{k-k'}$$

≥ 1

$k'!$

$$\mathbb{P}(X-Y=k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{k'=0}^{k} \binom{k}{k'} \cdot \lambda_1^{k'} \cdot \lambda_2^{k-k'} =$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X-Y=k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}}$$

PROPOZIȚIE:

Fie $X \sim B(n,p)$. Dacă $n \to \infty$ a.î. $np \to \lambda$, atunci

$$\mathbb{P}(X=k) \simeq e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Dem.:

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Cum $np \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$ putem aproxima $p \simeq \frac{\lambda}{n}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots}{n^k} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-1)\,n}{n^k} = \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{n-k+2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{\left(-\frac{\lambda}{n}\right)(n-k)}$$

$$-\frac{\lambda}{n}(n-k) = -\lambda + \lambda \frac{k}{n} \longrightarrow \lambda$$

$$\mathbb{P}(X=k) \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\longrightarrow \lambda(n \cdot p).$$

6) Geometrică

p - probabilitatea de succes ($\mathbb{P}(\{H\})=p$).

X - nr. de aruncări necesare obținerii pt. prima oară a H (incluzând aruncarea cu care a apărut H).

$X \in \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$

$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad k \geq 1 \quad \underbrace{T\,T\,T \dots T}_{k-1} H$

$X \sim Geom(p)$
↑ repartiție

7) Negativ Binomială

$p > 0, r \in \mathbb{N}^*$

X - nr. de repetări ale experimentului până obținem pt. a r-a oară succes.

$X \sim NB(r, p)$

$X \in \{r, r+1, \dots\} \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot (1-p)^{k-r} \cdot p^r, \quad k \geq r$

$TH \dots H\,T \dots H \rightarrow (1-p)^{k-r} \cdot p^r$

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_r$

Obs.: $X \sim NB(r, p)$, atunci:

$X = X_1 + \dots + X_r$ cu $X_i \sim Geom(p)$ indep.

MEDIA UNEI V.A. DISCRETE

$x_1, x_2, \dots, x_m \longrightarrow \dfrac{x_1+x_2+\dots+x_m}{m} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \simeq \dfrac{1}{N}\sum_{x} x \cdot N \cdot f(x) \simeq \sum_{x} x \cdot f(x) \simeq \sum_{x} x \cdot p_X(x)$

Fie X = v.a. discrete, N – nr. de rep. ale exp. aleatoare

$x_1, x_2, \dots, x_N$

$X(m_1) \quad X(m_2) \quad X(m_N)$

$x \simeq N \cdot P(X=x)$

$x \simeq N \cdot f(x) \cdot \; (N = p_X(x))$

$2, 2, 3, 5, 7, 2, 3, 8, 9, 5$

$x_1 \qquad x_{10}$

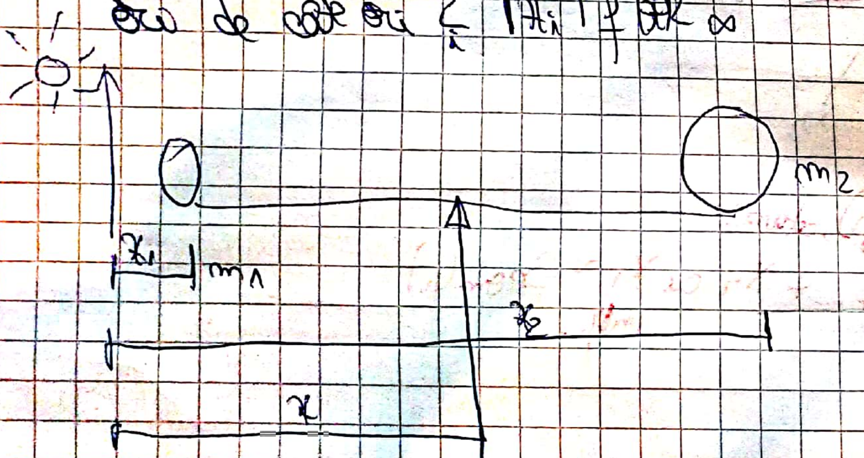
$T_0 = (2+\dots+5) = \frac{1}{10}(3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 5 + 1\cdot 7 + 1\cdot 8 + 1\cdot 9)$

$x_1 \qquad x_2$

Def: Fie X o v.a. discretă, $X \in \{x_1, \dots, x_m\}$. Se numește media v.a. X.

$$\boxed{E[X] = \sum_i x_i \cdot f(x_i) \left(\sum_i x_i \cdot P(X = x_i)\right)}$$

oricare de câte ori $\sum_i |x_i| f(x_i) < \infty$



EXAMEN!

ex.: $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1/8 \end{pmatrix}$

$E[X] = (-1)\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{8}$

$X,\ X+Y,\ X^2-3X+2,\ \sqrt{X}$

PROPOZIȚIE:

a) Dacă $X=c$, atunci $E[X]=c$.

b) Dacă $X\geq 0$, atunci $E[X]\geq 0$.

(monotonie) c) Dacă $X\leq Y$, atunci $E[X]\leq E[Y]$.

(liniaritate) d) $E[aX+bY] = aE[X]+bE[Y]$, $a,b\in\mathbb{R}$.

e) Dacă $X \perp Y$, atunci $E[XY]=E[X]E[Y]$.

TRANSFORMĂRI DE V.A.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "g\circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$g\circ X: \Omega\to\mathbb{R}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Dacă X v.a. discretă, atunci $g\circ X$ este o discretă.

Fie $Y=g(X)$.

$$P(Y=y)=P(g(X)=y)$$
$$=P(X\in g^{-1}(y))=\sum_{x\in g^{-1}(y)} P(X=x).$$

PROPOZIȚIE:

Fie $Y=g(X)$. Atunci $E[g(X)]=\sum_{x} g(x)\cdot P(X=x)$.

$E[X]=\sum x P(X=x)$.

$X\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/8 & 1/2 & 1/8\end{pmatrix}$ $\qquad X^2\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8\end{pmatrix}$

$E[X^2]=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{4}+4\cdot\frac{1}{8}$.

$E[X^2]=(-1)^2\frac{1}{4}+0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{8}$.

$E[\underbrace{X^2+3X}_{g(X)}]=E[X^2]+3E[X]$.

COVARIANȚĂ ȘI COEFICIENTUL DE VARIAȚIE

27.11.2019.

Def: Fie X și Y două v.a. Se numește covarianța X, Y:

$$Cov(X,Y) = E[(X-E\{X\})(Y-E\{Y\})].$$

Obs.: $Cov(X,Y) = E\{XY\} - E\{X\} \cdot E\{Y\}$.

Obs.: Dacă $\underbrace{X \text{ și } Y \text{ sunt independente}}_{X \perp Y}$, atunci $Cov(X,Y)=0$

$$E\{XY\} = E\{X\} \cdot E\{Y\}.$$

Def: Spunem că X și Y sunt necorelate dacă $Cov(X,Y)=0$.

$$E\{XY\} = E\{X\} \cdot E\{Y\}.$$

PROPRIETĂȚI:

1) $Cov(X,X) = Var(X)$
2) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
3) $Cov(aX+b, cY+d) = ac\, Cov(X,Y)$

$$E[(aX+b-\underbrace{E[aX+b]}_{aE\{X\}+b})(cY+d-\underbrace{E[cY+d]}_{cE\{Y\}+d})]$$

4) $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a., atunci $Var(X_1+X_2+\dots+X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j)$.

Def: Fie X și Y două v.a. cu $Var(X)>0$ și $Var(Y)>0$. Se numește corelația lui X cu Y

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$$

TEOREMĂ:

Fie X, Y două v.a. cu $Var(X)>0$ și $Var(Y)>0$. Atunci $|\rho(X,Y)| \leq 1$. Mai mult, dacă $|\rho(X,Y)|=1$, atunci $(\exists)\, a,b \in \mathbb{R}$ a.î. $Y = aX+b$.

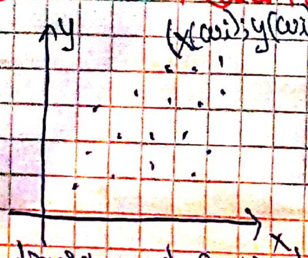
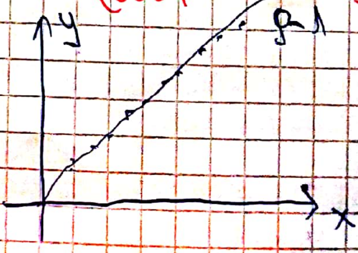
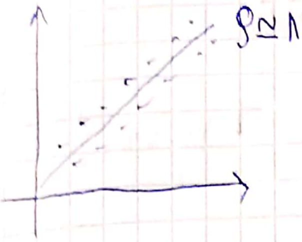
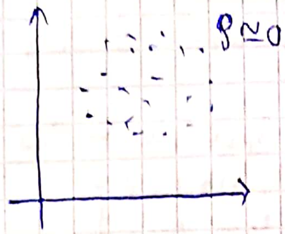


diagrama de împrăștiere







Def: Notăm cu $\mu_x = E[X]$, $\mu_y = E[Y]$, $\sigma_x^2 = Var(X)$, $\sigma_y^2 = Var(Y)$.

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}} = \frac{E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]}{\sigma_x\cdot\sigma_y} =$$

$$= E\left[\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right)\cdot\left(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right]$$

v.a. $\frac{X-\mu_x}{\sigma_x} = \frac{X-E[X]}{\sqrt{Var(X)}}$ s.n. variabile standardizate (z-score).

$E\left[\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right]=0$, $Var\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right)=1$.

pres. că X și Y verifică $E[X]=E[Y]=0$

$Var(X)=Var(Y)=1$.

$\rho(X,Y)=E[XY]$.

Fie $\lambda\in\mathbb{R}$ avem că $(X+\lambda Y)^2\geq 0 \Rightarrow E[(X+\lambda Y)^2]\geq 0, (\forall)\lambda\in\mathbb{R}$.

$E[X^2+\lambda^2Y^2+2\lambda XY]\geq 0, (\forall)\lambda\in\mathbb{R}$.

$\lambda^2E[Y^2]+2\lambda E[XY]+E[X^2]\geq 0, (\forall)\lambda\in\mathbb{R}$.

Dar mai, $E[X^2]=E[Y^2]=1$ (din varianță) și $E[X]=E[Y]=0$ var.

(X_i, X_j)

$\rho(X,Y)=E[X,Y]$.

$\lambda^2+2\lambda\rho(X,Y)+1\geq 0, (\forall)\lambda\in\mathbb{R}$.

$\iff \Delta=4\rho^2(X,Y)-4\leq 0 \iff \rho^2(X,Y)\leq 1 \iff |\rho(X,Y)|\leq 1$.

Pres. $\rho(X,Y)=1$, atunci $E[(X+\lambda Y)^2]=(\lambda+1)^2$ pt $\lambda=-1$ $\Rightarrow E[(X-Y)^2]=0$

$\Rightarrow P(X=Y)=1$.

$P(X=Y)=1$: $X=Y$ a.s. (aproape sigur).

Revenind, $\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}=\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} \Rightarrow Y=\mu_y+\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X-\frac{\sigma_y\mu_x}{\sigma_x}$.

$$\begin{cases} a=\frac{\sigma_x\mu_y-\sigma_y\mu_x}{\sigma_x\sigma_y} \\ b=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\end{cases}$$

$Y=a+bX$.

TEOREMĂ: (Inegalitatea Cauchy-Schwartz).

Fie x și y două v.a ai $Var(X) \in (0;\infty)$ și $Var(Y) \in (0;\infty)$. Atu

a) $E[xy]^2 \leq E[x^2] \cdot E[y^2]$.

(consecință) b) $Cov(X,Y) \leq \sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}$

$E[(x+\lambda y)^2] \geq 0$, $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda^2 E[y^2] + 2\lambda E[xy] + E[x^2] \geq 0$, $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$

$\Delta = 4E[xy]^2 - 4E[x^2] \cdot E[y^2]$.

$\Delta \leq 0$

REPARTIȚIA COMUNĂ, REP. MARGINALĂ ȘI REP. CONDIȚIONATĂ A UNUI VECTOR V.A.

X_1 - naționalitatea

X_2 - culoarea ochilor.

X_3 - culoarea părului

X_4 - sexul.

X_5 - venitul

X_6 - înălțimea

X_7 - greutatea

$\Omega \to \omega$

$(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

		X_1	X_2	...	X_n
ω_1	Ind. 1	$X_1(\omega_1)$	$X_2(\omega_1)$		$X_n(\omega_1)$.
ω_2	Ind. 2				
⋮					

Fie X, Y v.a. discrete $X: \Omega \to \mathbb{R}$

$Y: \Omega \to \mathbb{R}$

$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

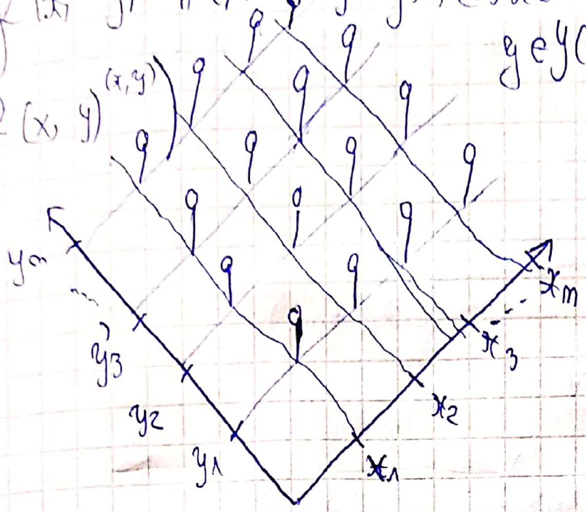
$Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$

$(X,Y): \Omega \to X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Definim fct de masă a cuplului (X,Y) (sau rep. comună)

$f(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y), (\forall) x \in X(\Omega)$
$y \in Y(\Omega)$.

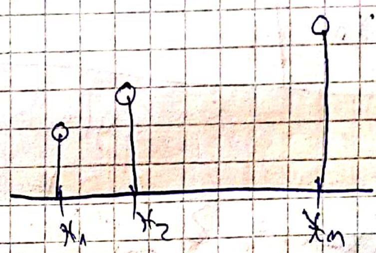
$(f(x,y))^{(x,y)}$



a) $f(x,y) \geq 0, \ (\forall) x, y$ $\qquad (x_i, y_i) \longrightarrow \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_i)$.

b) $\sum_{x,y} f(x,y) = 1$

$\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x,y) = 1$.



Știind fct. de masă $f(x,y)$, putem calcula $\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} f(x,y)$.

$\left(\sum_{(x,y)\in A} \mathbb{P}(X=x, Y=y)\right.$.

Def. Fie (X,Y) un cuplu de v.a. Sem. rep. marginală a lui X

$f_X(x) = \mathbb{P}(X=x), (\forall) x \in X(\Omega)$

(resp. $f_Y(y) = \mathbb{P}(Y=y), (\forall) y \in Y(\Omega)$).

PROPRIETĂȚI:

$f_X(x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x,y)$.

$f_Y(y) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x,y)$.

Dem.: $\mathbb{P}(\underbrace{X=x}_{A}) = \mathbb{P}(X=x, Y \in Y(\Omega))$.

Scanned by CamScanner

$Y \in Y(\Omega) = \bigcup_{y_j \in Y(\Omega)} \{Y = y_j\} = \sum$

$\mathbb{P}(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A \cap B_i) = \sum \mathbb{P}(A \cap B_i)$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$				$f(x_1, y_m)$
x_2						
$\vdots$						
x_i				$f(x_i, y_j)$		
$\vdots$						
x_n						

$f_X(x_i) = \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)$

$f_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)$

$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x, y)$.

$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f_X(x_1) & f_X(x_2) & \dots & f_X(x_n) \end{pmatrix}, \quad f_X(x_i) = \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)$.

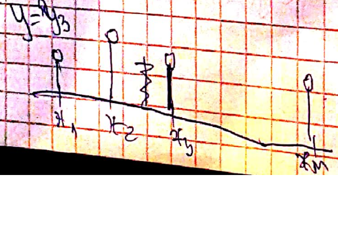
$Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ f_Y(y_1) & f_Y(y_2) & \dots & f_Y(y_m) \end{pmatrix}, \quad f_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)$

X atunci când $Y = y_j$.

Def: Rep. condiționată a lui X la $Y = y_j$ prin $f_{X|Y}(x_i | y_j) =$

$= \mathbb{P}(X = x_i \mid Y = y_j) = \dfrac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} = \dfrac{f(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)}$

$f_{X|Y}(x_i | y_j) = \dfrac{f(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)}$.



$$X|Y=y_j \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f_{X|Y}(x_1|y_j) & f_{X|Y}(x_2|y_j) & \dots & f_{X|Y}(x_n|y_j) \end{pmatrix}$$

$$f_{X|Y}(x_i|y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)}$$

$$Y|X=x_i \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ f_{X|Y}(y_1|x_i) & f_{X|Y}(y_2|x_i) & \dots & f_{X|Y}(y_m|x_i) \end{pmatrix}$$

$$f_{Y|X}(y_j|x_i) = \frac{f(x_i, y_j)}{f_X(x_i)}$$

9) Avem (X, Y) v.a. $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$E\{g(X,Y)\} = \sum_{x,y} g(x,y) \cdot P(X=x, Y=y)$$

În particular, $E\{XY\} = \sum_{x,y} xy \cdot P(X=x, Y=y)$

$$\rho(X,Y) \to Cov(X,Y) = E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\}$$

$$\to Var(X), Var(Y)$$

$f_X(x)$

EXAMEN!

$$\begin{cases} E\{X\} = \sum_x x \cdot f_X(x) \\ Var(X) = \sum_x x^2 \cdot f_X(x) - \left(\sum_x x \cdot f_X(x)\right)^2 \\ E\{XY\} = \sum_{x,y} f(x,y) \end{cases}$$

X / Y	-1	0	1
1	1/18	3/18	2/18
2	2/18	0	3/18
3	0	4/18	3/18

repartiția lui X $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6/18 & 5/18 & 7/18 \end{pmatrix}$

$$E\{XY\} = -1 \times 1 \cdot 1/18 + 1 \times 0 \cdot 3/18 + 1 \times 1 \times 2/18 + \dots$$

04.12.2019.

X, Y sunt 2 v.a.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$ y_j $\dots$	y_m	Σ
x_1					$f_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} f_{(X,Y)}(x_i, y_j)$
x_2					
$\vdots$ i			$f_{(X,Y)}(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$		
x_n					
Σ	$f_Y(y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} f_{(X,Y)}(x_i, y_j)$				

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f_X(x_1) & f_X(x_2) & \dots & f_X(x_n) \end{pmatrix} \qquad Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ f_Y(y_1) & f_Y(y_2) & \dots & f_Y(y_m) \end{pmatrix}$$

! media unei funcții

$$E[g(X)] = \sum_{i=1} g(x_i) \cdot f_X(x_i)$$

$\Downarrow$ care depinde de X și Y.

$$E[h(X,Y)] = \sum_{i,j} h(x_i, y_j) \, f_{(X,Y)}(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j) \cdot \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

$$h(X,Y) = XY$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y].$$

Repartiția condiționată a lui X la $Y = y_j$.

$$f_{X|Y}(x_i | y_j) = \frac{f_{(X,Y)}(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)}$$

$$X | Y = y_j \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f_{X|Y}(x_1 | y_j) & \dots & & f_{X|Y}(x_n | y_m) \end{pmatrix}$$

Def. Fie X o variabilă discretă cu val. $\{x_1, x_2, \dots\}$ și $A \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A) > 0$. Se numește media condiționată a lui X la A

$$E[X|A] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i | A).$$

În particular, dacă $A = \{Y = y_j\}$, atunci avem med. cond. a lui X la $Y = y_j$.

$$E\{X|Y=y_j\} = \sum_i x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \sum_i x_i f_{X|Y}(x_i|y_j).$$

Obs. În mod similar, $Var(X|Y=y_j) = E\{X^2|Y=y_j\} - E\{X|Y=y_j\}^2$.

Def: Fie X și Y două var. aleatoare discrete. Se numește media condiționată a lui X la Y și se not. $E\{X|Y\}$ variabila aleatoare a cărei valori sunt $E\{X|Y=y_j\}$ pt. $Y = y_j$.

Obs.: $E\{X|Y\}$ este o v.a. care este o fct. de Y ($h(Y)$).

$$E\{X|Y\} \sim \begin{pmatrix} E\{X|Y=y_1\} & E\{X|Y=y_2\} & \dots & E\{X|Y=y_m\} \\ \mathbb{P}(Y=y_1) & \mathbb{P}(Y=y_2) & \dots & \mathbb{P}(Y=y_m) \end{pmatrix}$$

Obs.: Media mediei condiționate:

$$E[E\{X|Y\}] = \sum_{j=1} E\{X|Y=y_j\} \cdot \mathbb{P}(Y=y_j).$$

PROPOZIȚIE:

$$E[E\{X|Y\}] = E\{X\}$$

Dem.:

$$E\{X\} = \sum_i x_i \underbrace{\mathbb{P}(X=x_i)}_{f_X(x_i)} = \sum_i x_i \sum_j \underbrace{f_{(X,Y)}(x_i, y_j)}_{f_{X|Y}(x_i|y_j) \cdot f_Y(y_j)} =$$

$$= \sum_i x_i \sum_j f_{(X|Y)}(x_i|y_j) \cdot f_Y(y_j) =$$

$$= \sum_j f_Y(y_j) \cdot \underbrace{\sum_i x_i f_{X|Y}(x_i|y_j)}_{E\{X|Y=y_j\}}$$

PROPOZIȚIE:

$$Var(X) = Var(E\{X|Y\}) + E\{Var(X|Y)\}.$$

$$Var(X|Y) = E\{X^2|Y\} - E\{X|Y\}^2.$$

$$E\{Var(X|Y)\} = E\{X^2\} - E\{E\{X|Y\}^2\}.$$

$$Var(E\{X|Y\}) = E\{E\{X|Y\}^2\} - \underbrace{E\{E\{X|Y\}\}^2}_{E\{X\}^2}$$

VARIABILE ALEATOARE CONTINUE

Def.: Spunem că v.a. X este continuă (absolut) dacă $(\exists)$ o fct. f pozitivă a.î. probabilitatea $P(X \in B) = \int_B f(x)\,dx$, $(\forall) B \subseteq \mathbb{R}$, B interval.

Def.: Funcția f se numește densitate de repartiție.

Obs.: $P(X \in (a;b]) = \int_a^b f(x)\,dx$.

cazul discret:

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

cazul continuu:

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$$

Presu. că X este v.a. cont. $P(X = a)$?

$$= P(X \in \{a\}) = \int_{\{a\}} f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

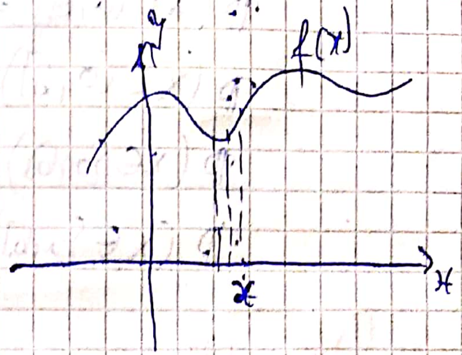
! **Obs.** Densitatea de probabilitate nu este o probabilitate.

PROPOZIȚIE

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o densitate de prob., atunci:

a) $f(x)\geq 0$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$.

b) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=1$ $\quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1\right)$.



Dacă X este v.a. cu densitatea f.

$P(X\in\mathbb{R})=1$.

$P(X\in(x,x+\delta)) = \int_{x}^{x+\delta} f(t)\,dt \to (cm^{-1})$

$\simeq f(x)\cdot\delta \to (cm)$.

$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ → formula de medie.

$f(x)\simeq \dfrac{P(X\in(x,x+\delta))}{\delta} = \dfrac{\text{probabilitatea}}{\text{unitatea de lungime}}$

$f(x)\,dx \longrightarrow$ este o probab.

Ex: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x\in[0,1]\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$

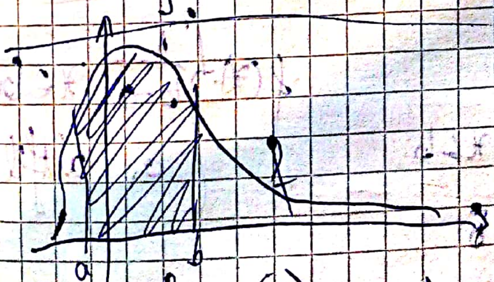
$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\Big|_0^1 = 1$.

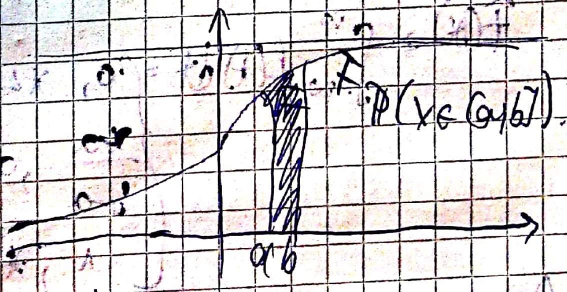
FUNCȚIA DE REPARTIȚIE A V.A.

Funcția de repartiție a v.a. X este $F(x)=P(X\leq x)$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$.

$F(x)=P(X\in(-\infty,x])=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$.

Dacă f cont. în x_0, atunci F este derivabilă în x_0 și $F'(x_0)=f(x_0)$.





Dacă $f>0$, $(\forall)\, x$, atunci F strict cresc.

$\mathbb{P}(X\in[a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

$\mathbb{P}(X\in(a,b)) = \mathbb{P}(X\in(a,b]) = \mathbb{P}(X\in[a,b)) = \mathbb{P}(X\in[a,b])$.

Def.: Fie X o v.a. cont. cu densitatea f ($X\sim f$). Media v.a. X este definită prin $E[X]=\int x\cdot f(x)\,dx$ ori de câte ori $\int |x|\cdot f(x)\,dx<\infty$.

În cazul discret: $E[X]=\sum x\cdot \mathbb{P}(X=x)$

continuu: $E[X]=\int x\cdot f(x)\,dx$.

PROPOZIȚIE:

Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și X o v.a. cont. cu dens. f. Atunci $E[g(X)]=\int g(x) f(x)\,dx$.

Obs.: $Var(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-E[X]^2=\int (x-E[X])^2 f(x)\,dx$.

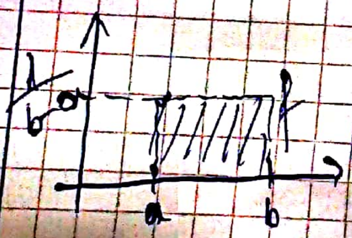
REPARTIȚIA UNIFORMĂ

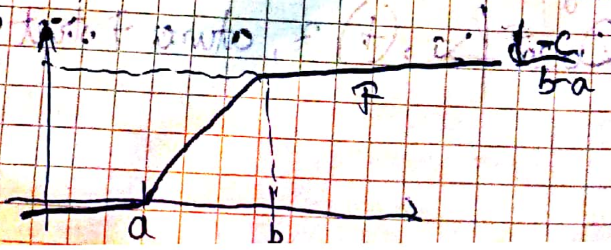
$X\sim \mathcal{U}([a,b])$ dacă densitatea lui X este dată de $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$

$\mathbb{P}(X\in[c,d])=\int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{b-a}$

$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x>b\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$





UNIVERSALITATEA REPARTIȚIEI UNIFORME

Fie X o v.a. cu fct. de repartiție F.

Definim funcția cuantilă asociată fct. de rep. F, $F^{-1}:(0;1)\to\mathbb{R}$.

$F^{-1}(u)=\inf\{x/F(x)\geq u\}$.

TEOREMĂ:

Fie X o v.a. cu fct. de rep. F. Dacă $U\sim\mathcal{U}([0;1])$, atunci $F^{-1}(U)$ are fct. de rep. F.

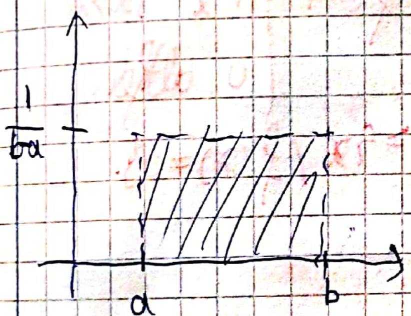
$F^{-1}(u)=\inf\{x/F(x)\geq u\},\ u\in(0;1)$

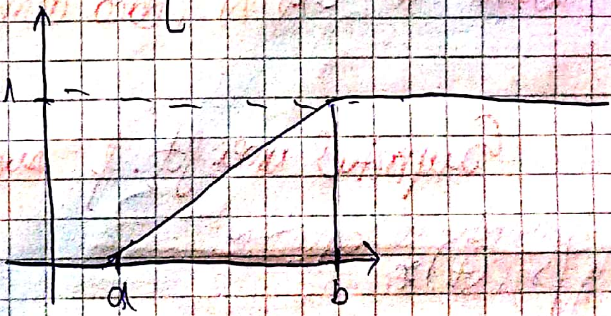
11.12.2019.

11

Ex. $X\sim\mathcal{U}([a;b])$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a;b]\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leq x<b\\ 1, & x>b\end{cases}$$





TEOREMA DE UNIVERSALITATE:

Fie X o v.a. de fct. de rep. F și $U\sim\mathcal{U}[0;1]$. Atunci v.a. $F^{-1}(U)$ are aceeași rep. ca v.a. X.

$F^{-1}(u)=\inf\{x/F(x)\geq u\},\ u\in(0;1)$.

X discretă	X continuă
$E[X]=\sum_x x\cdot P(X=x)$	$E[X]=\int x\cdot f(x)\,dx$
$E[g(X)]=\sum_x g(x)\cdot P(X=x)$	$E[g(X)]=\int g(x)\cdot f(x)\,dx$

Fie $X \sim \mathcal{U}([a;b])$. Media lui X?

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Dispersia (varianța): $Var(X) = E\{X^2\} - E\{X\}^2$.

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$U \sim \mathcal{U}[0;1] \Rightarrow (b-a)\cdot U \sim \mathcal{U}[0;b-a] \Rightarrow a+(b-a)U \sim \mathcal{U}[a;b]$

$E\{U\} = 1/2$

$Var(U) = 1/12$

Ex: Repartiția Exponențială.

Spunem că o v.a. X este repartizată exponențial de param. $\lambda > 0$ și notăm $X \sim Exp(\lambda)$, dacă densitatea $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

Suportul unei fct. f: $supp(f) = \{x \,/\, f(x) \neq 0\}$.

f densitate de repartiție

1) $f \geq 0$, $(\forall)\, x$.

2) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = 0+1 = 1.$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t} = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$P(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

PROPRIETATEA LIPSEI DE MEMORIE:

$$\mathbb{P}(X > t+s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s), \ (\forall)\, t, s \in \mathbb{R}.$$

$$E\{X\} = \int x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1_{(0,\infty)}(x)\,dx = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty x \cdot (-e^{-\lambda x})'\,dx =$$

$$= -x e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\lambda x})\,dx =$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

$$Var(X) = E\{X^2\} - E\{X\}^2$$

$$E\{X^2\} = \int x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1_{[0,+\infty)}(x)\,dx = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx =$$

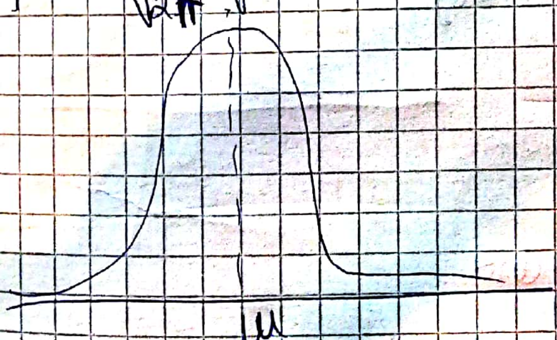
$$= -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}\underbrace{\int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx}_{1/\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

ex.: **Repartitia Normal (Gaussian).**

Spunem că o v.a. X este rep. normal de param. μ şi σ^2 şi scriem $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dacă densitatea de repartiţie a lui X este

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$



μ

Obs.: Spunem că v.a. Z este o v.a. normală standard dacă $Z \sim N(0,1)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt.$$

Pt. normala standard, $\phi(x)$ = fct. de rep.

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \text{densitatea de rep.}$$

Dacă $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, atunci $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0;1)$ $\leftarrow Z$ redusă

Reciproc, dacă $Z\sim N(0,1)$, atunci $X=\mu+\sigma Z\sim N(\mu,\sigma^2)$.

$F(x)=P(X\le x)=P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)=\Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{dF}{dx}=\frac{d\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{dx}=\varphi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)\frac{1}{\sigma}$$

$$\begin{cases}F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\\ f(x)=\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\cdot\frac{1}{\sigma}\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}>0$$

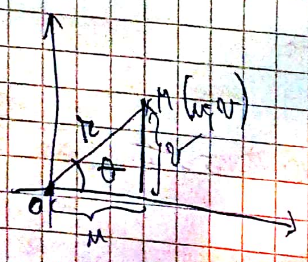
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1\iff\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=1.$$

Not. $u=\frac{x-\mu}{\sigma}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma\,du=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}du$

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}du=\sqrt{2\pi}=2\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-u^2/2}du}_{I}$$

$$I^2=\Big(\int_0^{\infty}e^{-u^2/2}du\Big)\Big(\int_0^{\infty}e^{-v^2/2}dv\Big)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-u^2/2}\cdot e^{-v^2/2}du\,dv=$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}du\,dv$$



$u=r\cos\theta$

$v=r\sin\theta$

$(u,v)=g(r,\theta)$

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}du\,dv=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2}e^{-r^2/2}\cdot r\,d\theta\,dr=\int_0^{\infty}\frac{\pi}{2}r\cdot e^{-r^2/2}dr=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(-e^{-r^2/2}\right)\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx\Big)^2=4\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi.$$

18.12.2019.

12

$t = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\pi\sigma^2}(x-\mu)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\cancel{\sigma}} \cdot e^{-t^2/2}\,\cancel{\sigma}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}\,dt =$$

$$= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt =$$

$$= \mu + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \mu.$$

fct. impară

$X = \mu + \sigma Z$, $Z \in N(0,1)$, $Var(X) = E\{X^2\} - E\{X\}^2$

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-1/2\sigma^2 \cdot \frac{x-\mu}{\sigma}}\,dx =$$

$$\overset{t = \frac{x-\mu}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma t)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}\,dt = \mu^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu^2 + \sigma^2 t^2 + 2\mu\sigma t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}\,dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2\mu\sigma t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}\,dt = 0$$

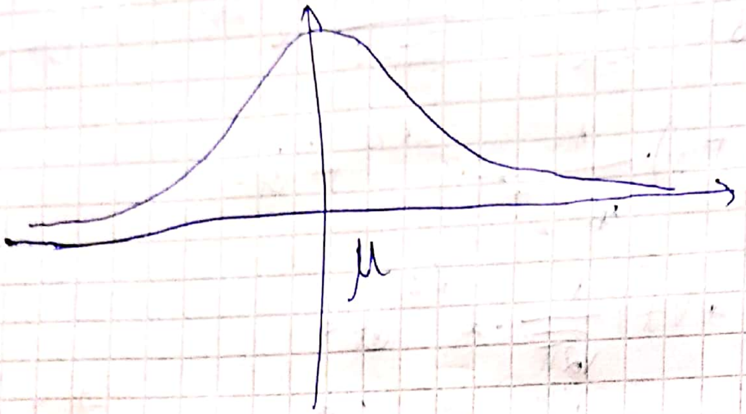
$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}\,dt = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t \cdot (-e^{-t^2/2})\,dt =$$

$$= \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\underbrace{-t e^{-t^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt \Big] =$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}\,dt = \sigma^2$$

$E\{x^2\} = \mu^2 + \sigma^2 \Rightarrow Var(X) = \sigma^2$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$

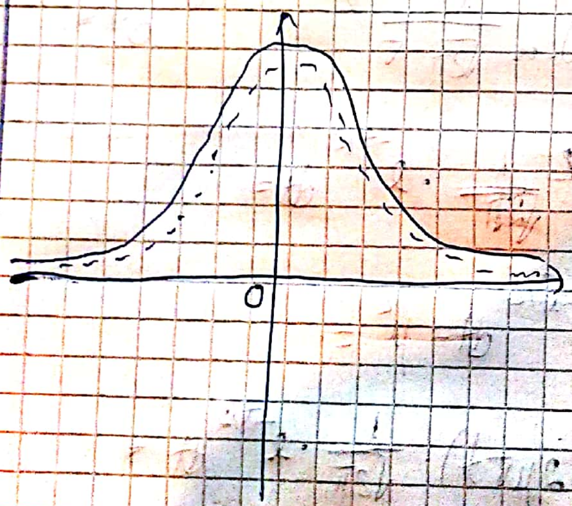


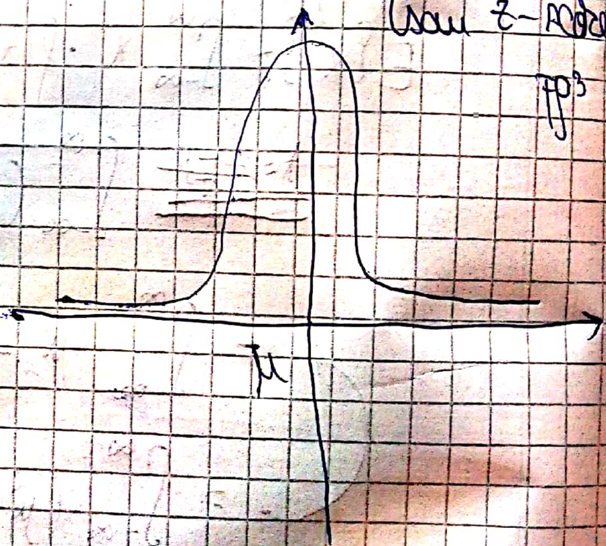
$\phi(z),\ z \geq 0$

$P(-1 < X < 4),\ X \sim N(3;2)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow Z \sim N(\underset{\text{medie}}{0}, \underset{\text{dispersie}}{1})$

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ variabilă standardizată sau normalizată (sau z-scor)





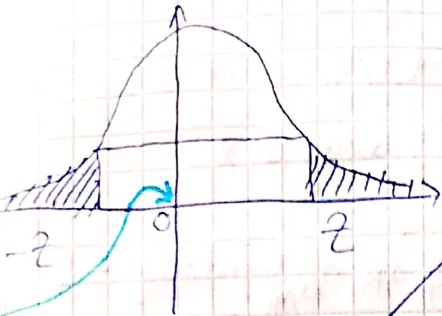
$E[Z] = \frac{1}{\sigma} E\{X-\mu\} = 0$

$Var\{Z\} = \frac{1}{\sigma^2} Var(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X) = 1.$

$P(-1 < X < 4),\quad X \sim (N, 2)$ σ^2

$P\left(\frac{-1-3}{\sqrt{2}} < \frac{X-3}{\sqrt{2}} < \frac{4-3}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{-4}{\sqrt{2}} < \frac{X-3}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \phi(1/\sqrt{2}) - \phi\left(\frac{-4}{\sqrt{2}}\right)$

Scanned by CamScanner



$\phi(z)$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

Cum arăt că sunt egale?

$$1-\phi(z) = 1 - \int_{-\infty}^{z}\varphi(t)\,dt = \int_{z}^{\infty}\varphi(t)\,dt \underset{\text{sch. var.}}{\overset{u=-t}{=}} \int_{-z}^{-\infty}\varphi(-u)(-du) =$$

$$= \int_{-\infty}^{-z}\varphi(-u)\,du = \int_{-\infty}^{-z}\varphi(u)\,du = \phi(-z)$$

EXAMEN

Cantitatea de zăpadă care cade pe parcursul anului în București:

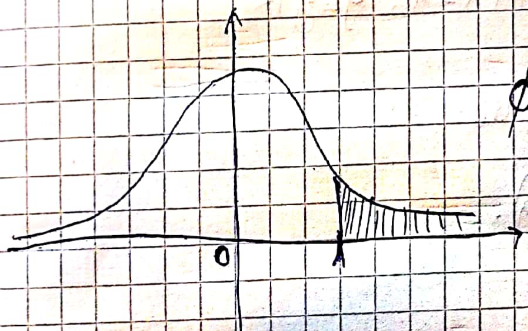
$\mu = 60$ cm ← medie

$\sigma = 20$ cm ← aleatoare

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$P(X \geq 80)$

$P\left(\frac{X-60}{20} \geq \frac{80-60}{20}\right) = 1 - \phi(1) \simeq 0,16$



$\phi(1) \simeq 0,84$

CUPLURI DE V.A. CONTINUE. DENSITATEA COMUNĂ, DENSITATEA MARGINALĂ ȘI DENSITATEA CONDIȚIONALĂ

Fie X și Y v.a. $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Spunem că (X, Y) admite o densitate comună $f \geq 0$ (X, Y) dacă

$$P((X,Y)\in B) = \iint_B f(x,y)\,dx\,dy, \ (\forall)\ B \subseteq \mathbb{R}^2.$$

În particular, $B = [a;b] \times [c;d]$.

În contextul de mai sus,

$\mathbb{P}(X=x, Y=y)$ și $f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$ const

$\mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}(X\in A, Y\in\mathbb{R}) \int_A \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$

Fie $f_X(x)$ densitatea de rep. a lui X.

$\mathbb{P}(X\in A) = \int_A f_X(x)\,dx \Rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$. densitatea marginală a lui X.

În discret. $\mathbb{P}(X=x) = \sum_y \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \sum_y f_{(X,Y)}(x,y)$.

Obs.: Indep.: Fie X și Y două v.a. Spunem că $X \perp\!\!\!\perp Y$ (sunt indep.) dacă $\mathbb{P}(X\in A, Y\in B) = \mathbb{P}(X\in A)\cdot\mathbb{P}(Y\in B)$, $(\forall) A, B$

PROPOZIȚIE:

Dacă X și Y v.a. cont. cu densitatea comună $f(x,y)$ și dens. marginale f_X și resp. f_Y, atunci $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

$F(x,y) = \mathbb{P}((X,Y)\le(x,y)) = \mathbb{P}(X\le x, Y\le y) =$

$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,du\,dv.$

$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} F(x,y).$

Ex.: $12^{00} - 13^{00}$

$X, Y \sim U[0,60]$.

$X \perp\!\!\!\perp Y$.

Posib. să întârzie cel puțin 10 min?

$\mathbb{P}(X+10 < Y) + \mathbb{P}(Y+10 < X) =$

$= 2\mathbb{P}((X,Y)\in A) = 2\int_A\int f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$

$A = \{(x,y)\in[0,60]^2 \mid x+10<y\}$

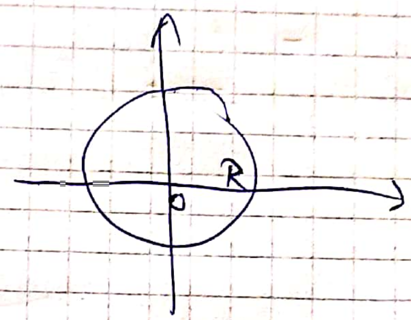
$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{60} \cdot \mathbb{1}_{(0,6)}(x) \cdot \frac{1}{60} \cdot \mathbb{1}_{[0;60]}(y) =$$

$$= 2\int_{10}^{60} \int_0^{y-10} \frac{1}{60^2}\, dx\, dy = \frac{2}{60^2} \int_{10}^{60} (y-10)\, dy =$$

$$= \frac{2}{60^2}\left(y^{2}/2 - 10y\right)\Big|_{10}^{60} = \left(1-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{60^2}\left(\frac{10^2}{2} - 10^2\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{36}.$$

$(X,Y) \sim \mathcal{U}(D(0,R))$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2 \le R^2 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$



Ex.:

(Buffon) d

$\ell < d$

$(x, \theta) \in [0, d/2] \times [0; \frac{\pi}{2}]$.

$$\mathbb{P}\left(x < \frac{\ell}{2}\sin\theta\right) = \iint \frac{4}{d\pi} \mathbb{1}_{[0;d/2]}(x)\, \mathbb{1}_{[0;\frac{\pi}{2}]}(\theta)\, dx\, d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\ell/2 \sin\theta} \frac{4}{d\pi}\, dx\, d\theta = \frac{4}{d\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell}{2}\sin\theta\, d\theta = \frac{2\ell}{d\pi}$$