Seria 33, Curs 3, EDDP, 19.10.2020

Ecuații diferențiale de ordinul întâi integrabile (continuare)

5 Ec. diferențială Bernoulli:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)\,x + b(t)\cdot x^{\alpha}} \qquad (1)$$

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Obs:
- dacă în (1): $\alpha = 0$, atunci se obține ec. afină: $\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)$
- dacă în (1): $\alpha = 1$, atunci se obține ec. liniară omogenă: $\frac{dx}{dt} = \underbrace{(a(t) + b(t))}_{a_1(t)}\, x$.

În (1) avem $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții continue.

Ecuația (1) poate integrată prin 2 metode:

Metoda 1: Prin variația constantelor:

- integrăm ec. liniară omogenă atașată:
$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t)\,\bar{x}$$
pentru care avem $\bar{x}(t) = C\, e^{A(t)}$,
A primitivă pt a.
- aplicăm metoda variației constantelor: determinăm $C : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $\boxed{x(t) = C(t)\, e^{A(t)}}$ să fie soluție a ec. Bernoulli (1):

$$\left(C(t)\, e^{A(t)}\right)' = a(t)\cdot C(t)\cdot e^{A(t)} + b(t)\left(C(t)\cdot e^{A(t)}\right)^{\alpha}$$

$$C'(t)\cdot e^{A(t)} + \cancel{C(t)\, e^{A(t)}\cdot A'(t)} = \cancel{a(t)\, C(t)\, e^{A(t)}} + b(t)\cdot C^{\alpha}(t)\cdot e^{\alpha A(t)} \quad \Big| \cdot e^{-A(t)}$$

$$\Rightarrow \quad C'(t) = b(t)\cdot C^{\alpha}(t)\cdot e^{(\alpha-1)A(t)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dC}{dt} = \underbrace{\left(b(t)\cdot e^{(\alpha-1)A(t)}\right)}_{a_1(t)}\cdot \underbrace{C^{\alpha}}_{b_1(C)}} \qquad (2)$$

ec. cu variabile (t,C) separabile.

OBS: Dacă $\boxed{\alpha > 0}$, atunci ec. (2) admite soluția staționară $C=0$ și deci ecuația Bernoulli are soluția particulară $x(t) = 0\cdot e^{A(t)} = 0$.

Metoda 2: printr-o schimbare de variabile:

$$\underset{\text{în ec. (1)}}{(t,x)} \longrightarrow (t,y)$$

$$! \quad \boxed{x = y^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

sau $\boxed{y = x^{1-\alpha}}$

Ec. (1): $$\left(y^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)' = a(t)\, y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t)\cdot\left(y^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\, y^{\frac{1}{1-\alpha}-1\frac{1-\alpha}{}}\cdot y' = a(t)\, y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t)\, y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\, y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, y' = a(t)\, y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t)\, y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \Big| : y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\, y' = a(t)\, y^{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}} + b(t)$$

$$\Rightarrow y' = (1-\alpha)(a(t)\, y) + (1-\alpha)\, b(t).$$

ec. afină (liniară neomogenă) cu $a_1(t) = (1-\alpha)a(t)$, $b_1(t) = (1-\alpha)\, b(t)$.

(6) Ec. diferențială Riccati:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)\, x^2 + b(t)\, x + c(t)} \qquad (3)$$

unde $a, b, c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții continue.

<u>Obs.</u> (cazuri particulare de ec. Riccati care pot încadrate pe alte cazuri)

1) a, b, c sunt funcții constante, atunci ec (3) este ec. cu variabile separabile:

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{(ax^2+bx+c)}_{b_1(x)} \cdot \underbrace{1}_{a_1(t)}$$

2) Dacă $c(t)=0, \forall t \in I$, atunci este o ecuație Bernoulli cu $\alpha = 2$:

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{b(t)}_{a_1(t)} x + \underbrace{a(t)}_{b_1(t)} \cdot \underbrace{x^2}_{\alpha=2}.$$

3) Dacă $a = b = c$ sunt funcții egale, atunci e ecuație cu variabile separabile:

$$\frac{dx}{dt} = a(t) \underbrace{(x^2+x+1)}_{b_1(x)}.$$

Integrarea ecuației Riccati presupune să cunoaștem o soluție particulară a ecuației.

<u>Prop. 1.</u> Dacă $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ este o soluție a ec. Riccati (3), atunci prin schimbarea de variabile

$$(t, x) \xrightarrow{x = y + \varphi_0} (t, y)$$

se obține o ecuație Bernoulli cu $\alpha = 2$.

<u>Dem:</u> În ec. (3):

$$(y+\varphi_0)' = a(t)(y+\varphi_0)^2 + b(t)(y+\varphi_0) + c(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' + \cancel{\varphi_0'} = a(t)y^2 + \underline{2a(t)y \cdot \varphi_0} + \cancel{a(t)\varphi_0^2} + \underline{b(t)y} + \cancel{b(t)\varphi_0} + \cancel{c(t)} \Rightarrow$$

dar φ_0 soluție a ec Riccati $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi_0' = a(t)\varphi_0^2 + b(t) \cdot \varphi_0 + c(t)$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{\left[2a(t)\varphi_0 + b(t)\right]}_{a_1(t)} y + \underbrace{a(t)}_{b_1(t)} y^2 \Rightarrow \text{ec. Bernoulli cu } \alpha = 2.$$

<u>Exemplu</u>: Fie ecuația: $\underbrace{\frac{dx}{dt} = -x^2 + \frac{4}{t}x - \frac{4}{t^2}}$ (4)

$a, b, c : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$a(t) = -1$

$b(t) = \frac{4}{t}$

$c(t) = -\frac{4}{t^2}$.

a) Arătați că există $m \in \mathbb{R}$ a.î. ec. (4) să aibă soluție de forma $\varphi_0(t) = \frac{m}{t}$.

b) Să se determine mulț. soluțiilor ec. (4).

a) $\left(\frac{m}{t}\right)' = -\left(\frac{m}{t}\right)^2 + \frac{4}{t} \cdot \frac{m}{t} - \frac{4}{t^2}$

$-\frac{m}{t^2} = -\frac{m^2}{t^2} + \frac{4m}{t^2} - \frac{4}{t^2}, \forall t > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -m = -m^2 + 4m - 4$

$m^2 - 5m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \varphi_0(t) = \frac{1}{t}$

sau $\varphi_0(t) = \frac{4}{t}$

b) Pt. rezolvarea ec. Riccati folosim doar una dintre cele 2 soluții particulare: $\varphi_0(t) = \frac{1}{t}$.

$(t, x) \xrightarrow[x = y + \frac{1}{t}]{} (t, y)$

ec. (4)

$\left(y + \frac{1}{t}\right)' = -\left(y + \frac{1}{t}\right)^2 + \frac{4}{t}\left(y + \frac{1}{t}\right) - \frac{4}{t^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' - \cancel{\frac{1}{t^2}} = -y^2 - 2y\frac{1}{t} - \cancel{\frac{1}{t^2}} + \frac{4y}{t} + \cancel{\frac{4}{t^2}} - \cancel{\frac{4}{t^2}}$

$y' = \underbrace{\left(\frac{2}{t}\right)}_{a_1(t)} y + \underbrace{(-1)}_{b_1(t)} \cdot y^2$ ec Bernoulli pt $\alpha = 2$.

Mai departe aplicăm o variantă de la ec. Bernoulli:

Ecuații implicite de ordinul I

$$\boxed{F(t, x, x') = 0} \quad (5)$$

Explicitarea ec. (5) înseamnă să exprimăm, dacă se poate pe x' ca funcție de (t, x):

$$x' = f(t, x)$$

și apoi să o integrăm dacă este unul dintre cazurile cunoscute.

<u>Exemplu</u>: Fie ec:

$$(x')^2 + 2x'xt - xt - \frac{1}{4} = 0.$$

Se cere mulțimea soluțiilor.

Încercăm explicitarea: ec. de gradul al doilea în x':

$$\Delta = (2xt)^2 - 4 \cdot 1\left(-xt - \frac{1}{4}\right) =$$
$$= 4x^2t^2 + 4xt + 1 = (2xt+1)^2$$

$$\Rightarrow x' = \frac{-2xt \pm (2xt+1)}{2 \cdot 1} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2} \\ x' = \frac{-4xt-1}{2} \end{cases}$$

1) $x' = \frac{1}{2}$

ec. de tip primitiva $\Rightarrow$ $x(t) = \frac{1}{2}t + C$, $C \in \mathbb{R}$

2) $x' = \underbrace{-\frac{1}{2}t}_{a(t)}x \underbrace{-\frac{1}{2}}_{b(t)}$ ec. afină $\Rightarrow$ încă o submulțime de soluții.

Dacă ec. nu se poate explicita, atunci exprimăm x sau t în funcție de t și x', respectiv în funcție de x și x', adică:

$$x = g(t, x') \quad \text{sau} \quad t = h(x, x')$$

<u>Cazuri particulare</u> ale ec: $\boxed{x = g(t, x')}$ (6)

1) <u>Ec. Lagrange</u>: $\boxed{x = \varphi(x')t + \psi(x')}$ (7)

(funcția g este liniară în t).

unde $\varphi, \psi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue și derivabile.

Pt ec. (7) căutăm soluții parametrice.

Parametrul va fi $\boxed{p = x'}$ $\underset{(7)}{\Rightarrow}$ $\underline{x = \varphi(p)t + \psi(p)}$ (8)

Căutăm pt t o exprimare în funcție de p.

Derivăm (7) în raport cu t:

$$x' = \varphi'(x')\cdot(x')'\cdot t + \varphi(x')\cdot 1 + \psi'(x')\cdot(x')'$$

dar $x' = p \Rightarrow p = \underline{\varphi'(p)\cdot p'\cdot t} + \varphi(p) + \underline{\psi'(p)\cdot p'}$

$$\Rightarrow p - \varphi(p) = p'\left(\varphi'(p)\cdot t + \psi'(p)\right) \Rightarrow$$

$\varphi(p) \neq p$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{p - \varphi(p)}{\varphi'(p)t + \psi'(p)} \quad (9)$$

(D) Pt o ecuație $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$, numită ec. răsturnată

ec. $\frac{dt}{dx} = f_1(x,t)$ cu $f_1(x,t) = \frac{1}{f(t,x)}$ și în

care x devine variab independentă,
iar t variab dependentă.

Pt. (9) scriem ec. răsturnată:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{\varphi'(p)t + \psi'(p)}{p - \varphi(p)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dp} = \underbrace{\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}}_{a(p)}\cdot t + \underbrace{\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}}_{b(p)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ pt t în funcție de p o ecuație afină (liniară neomogenă) pentru care avem metode de integrare $\Rightarrow$

$\Rightarrow t = t(p) \Rightarrow$ Mulțimea soluțiilor parametrice pt. ec. (7) este:

$$\begin{cases} x = \varphi(p)t + \psi(p) \\ t = t(p) \end{cases} \quad (10)$$

Dacă din (10) se poate exprima p ca funcție de t,

atunci îl înlocuim în (10)$_1$ și avem soluțiile ec. (7) în formă explicită.

<u>Exemplu</u>: Fie ecuația: $x = t(1+x') + (x')^2$.

Se cere mulțimea soluțiilor ec.

Dacă încercăm explicitarea:

$$(x')^2 + t x' + (t - x) = 0$$

$$\Delta = t^2 - 4(t-x) = t^2 - 4t + 4x.$$

Dacă $\Delta \geq 0$: $x' = \dfrac{-t \pm \sqrt{t^2-4t+4x}}{2}$, dar nu sunt ec. integrabile pt care să obțin alg. de integrare.

Este ec. Lagrange: $\varphi(x') = 1 + x'$

$\psi(x') = (x')^2$

$\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue și derivabile

Derivăm ecuația:

$$x' = 1\cdot(1+x') + t(x')' + 2(x')^1\cdot(x')'$$

Notăm $p = x' \Longrightarrow \cancel{p} = 1 + \cancel{p} + \underline{t p'} + \underline{2 p \cdot p'} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -1 = p'(t+2p) \Rightarrow -1 = \frac{dp}{dt}(t+2p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dp} = -t - 2p$$ ec. afină cu $a(p) = -1$, $b(p) = -2p$.

$\Rightarrow$ ec. liniară omogenă atașată:

$$\frac{d\bar{t}}{dp} = -\bar{t} \Rightarrow \bar{t}(p) = C e^{-p}$$

$A(p) = -p$ (primitivă pt $a(p)$)

Aplicăm variația constantelor $\Rightarrow$ determinăm $C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $t(p) = C(p) e^{-p}$ sol a ec. afine $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(C(p)\cdot e^{-p}\right)' = -C(p) e^{-p} - 2p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(p) e^{-p} + \cancel{C(p) e^{-p}\cdot(-1)} = \cancel{-C(p) e^{-p}} - 2p \Big|_{\cdot e^{p}}$$

$$\Rightarrow C'(p) = -2p e^{p} \Rightarrow C(p) = -2\int p e^{p} dp =$$

$$= -2\int p (e^{p})' dp = -2\left(p e^{p} - \int p' e^{p} dp\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(p) = -2(pe^p - e^p) + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(p) = -2e^p(p-1) + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p) = (-2e^p(p-1) + C_1)e^{-p} = \underbrace{-2(p-1)}_{\text{sol. particulară pt ec. afină}} + C_1 e^{-p}$$

Mulțimea de soluții parametrice pt ec. Lagrange dată este:

$$\boxed{\begin{cases} x = t(1+p) + p^2 \\ t = -2(p-1) + C_1 e^{-p} \end{cases}, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \ p = \text{parametru}}$$

2) Ec Clairaut (caz particular al ec. Lagrange).

$$\varphi(p) = p \rightarrow \boxed{x = tx' + \psi(x')} \quad (11)$$

Se procedează la fel ca la ec. Lagrange:

• derivăm ec. (11):

$$\cancel{x'} = \cancel{1 \cdot x'} + t(x')' + \psi'(x')(x')'$$

$$0 = p'(t + \psi'(p))$$

unde $\boxed{p = x'}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a) $p' = 0 \Rightarrow (x')' = 0 \Rightarrow x' = C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

înloc. în ec. (11) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{C_1 t} + C_2 = \cancel{t C_1} + \psi(C_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2 = \psi(C_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ o submulțime de soluții:

$$\boxed{x = C_1 t + \psi(C_1), \quad C_1 \in \mathbb{R}}$$

b) $t + \psi'(p) = 0 \rightarrow t = -\psi'(p) \Rightarrow$ o soluție parametrică:

$$\boxed{\begin{cases} x = t \cdot p + \psi(p) \\ t = \psi'(p) \end{cases}}$$