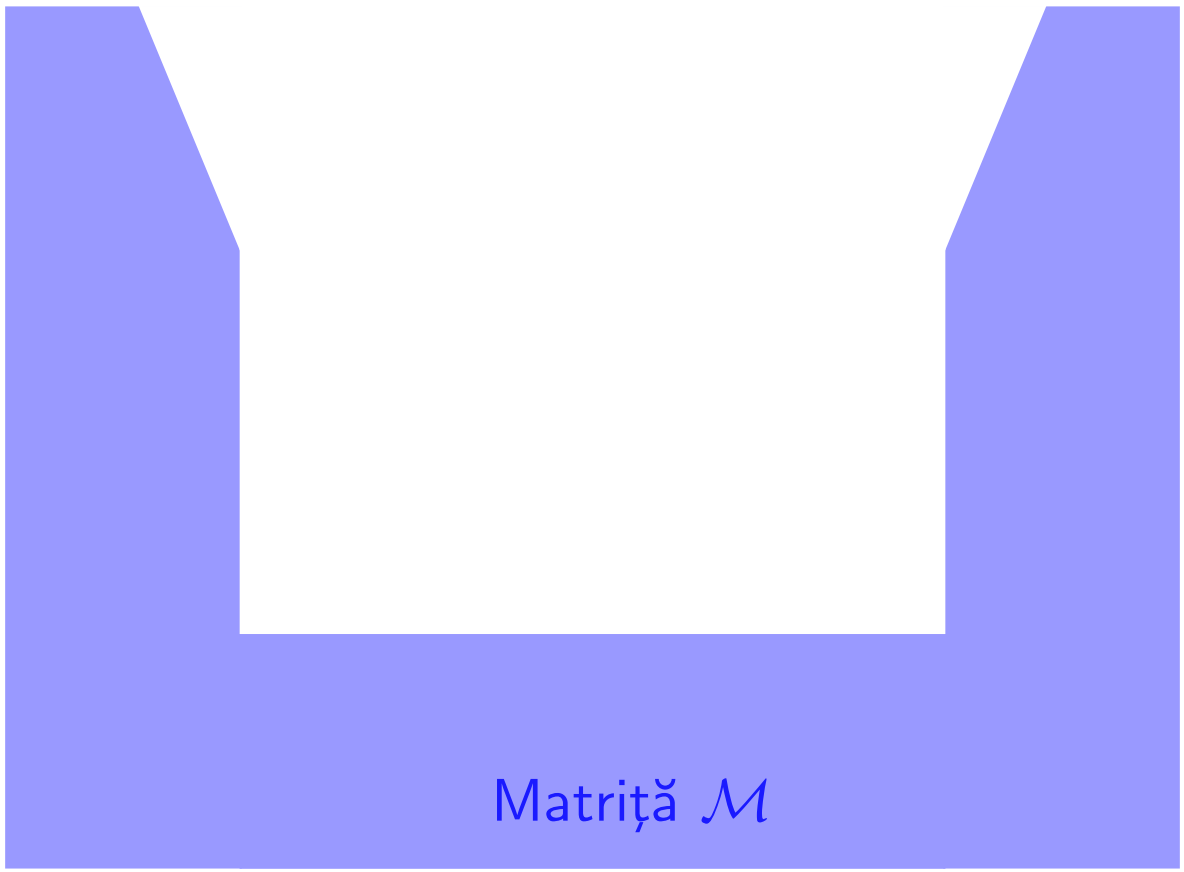
Elemente de programare liniară

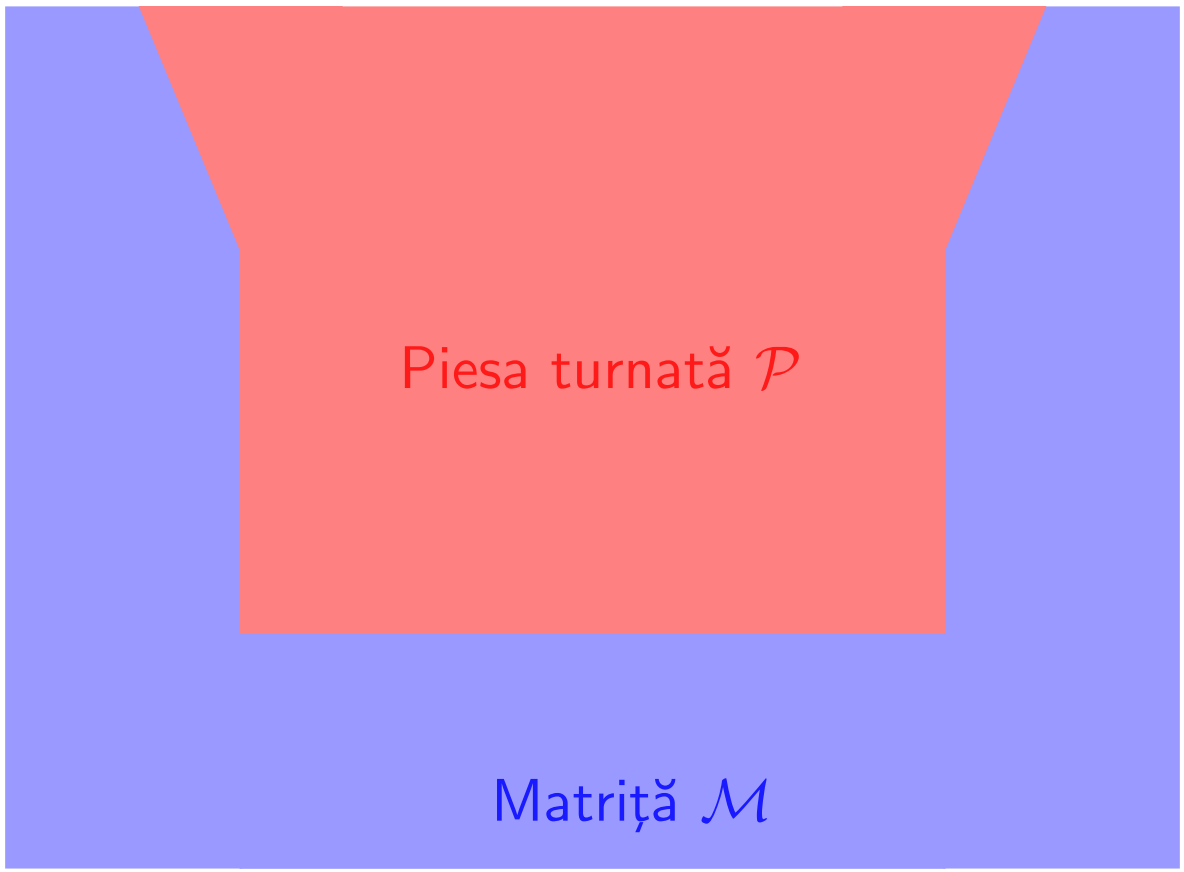
Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2019-2020

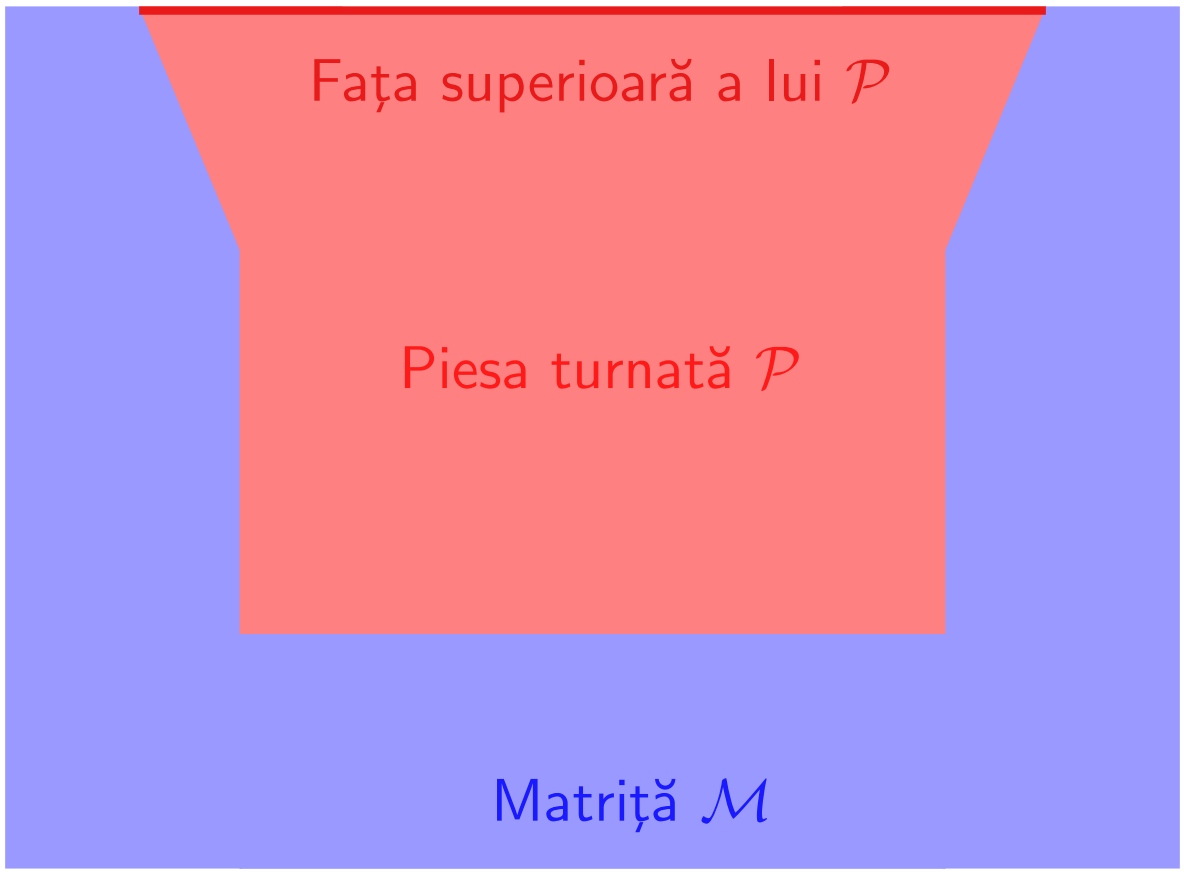
Turnarea pieselor în matrițe



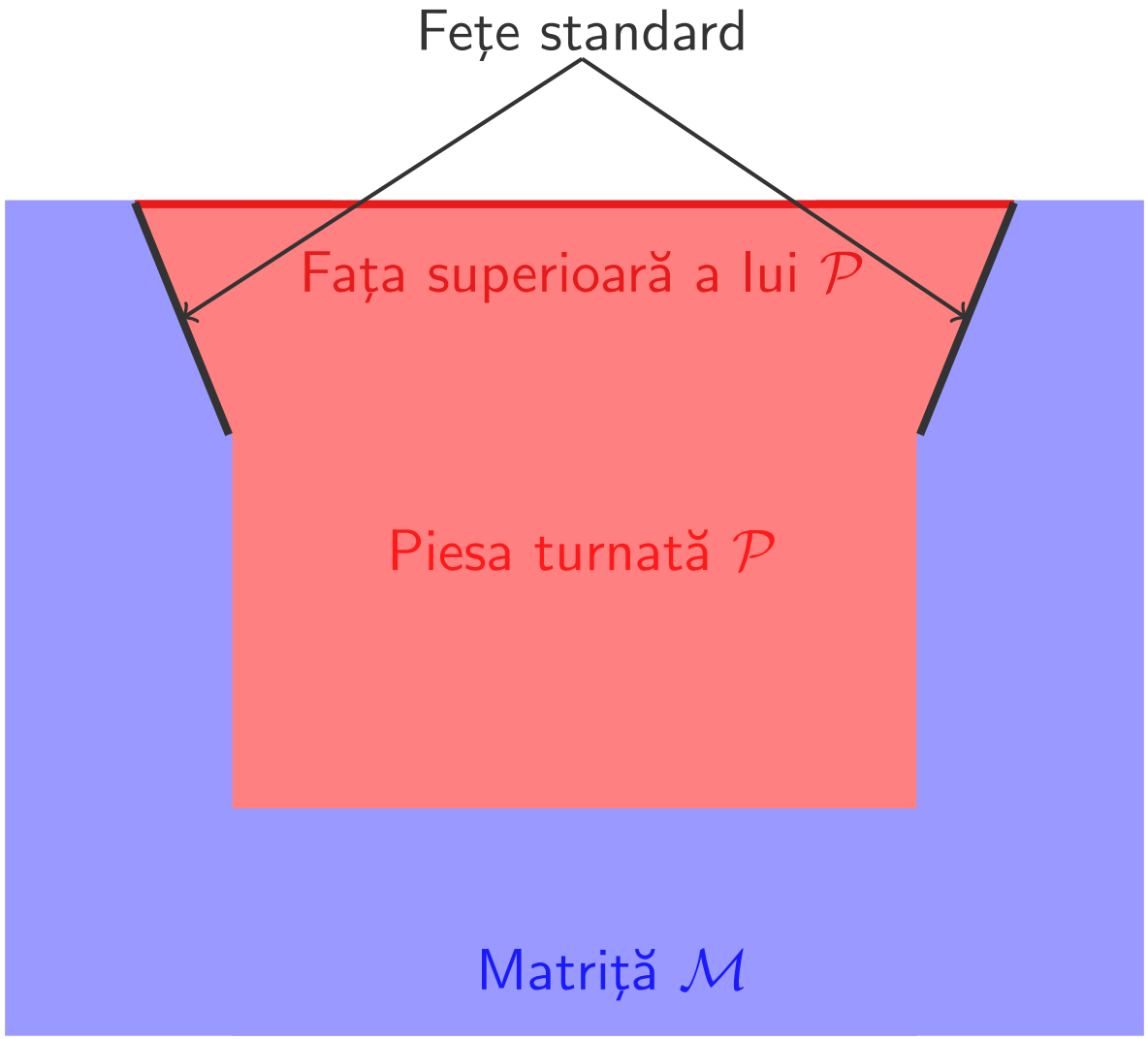
Turnarea pieselor în matrițe



Turnarea pieselor în matrițe



Turnarea pieselor în matrițe



Problematizare

- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.

Problematizare

- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate în matrițe; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată; extragerea obiectului depinde de poziția matriței.

Problematizare

- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate în matrițe; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată; extragerea obiectului depinde de poziția matriței.
- **Problema studiată.** Dat un obiect, există o matriță din care să poată fi extras?

Problematizare

- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate în matrițe; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată; extragerea obiectului depinde de poziția matriței.
- **Problema studiată.** Dat un obiect, există o matriță din care să poată fi extras?
- **Convenții.**

Problematizare

- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate în matrițe; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată; extragerea obiectului depinde de poziția matriței.
- **Problema studiată.** Dat un obiect, există o matriță din care să poată fi extras?
- **Convenții.**
  - Obiectele: **poliedrale**.

Problematizare

- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate în matrițe; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată; extragerea obiectului depinde de poziția matriței.
- **Problema studiată.** Dat un obiect, există o matriță din care să poată fi extras?
- **Convenții.**
  - Obiectele: **poliedrale**.
  - Matrițele: formate dintr-o singură piesă; fiecărui obiect $\mathcal{P}$ îi este asociată o matriță $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$

Problematizare

- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate în matrițe; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată; extragerea obiectului depinde de poziția matriței.
- **Problema studiată.** Dat un obiect, există o matriță din care să poată fi extras?
- **Convenții.**
  - Obiectele: **poliedrale**.
  - Matrițele: formate dintr-o singură piesă; fiecărui obiect $\mathcal{P}$ îi este asociată o matriță $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$
  - Obiectul: extras printr-o singură translație (sau o succesiune de translații)

Terminologie și convenții

- **Alegerea orientării:** diverse orientări ale obiectului pot genera diverse matrițe.

Terminologie și convenții

- **Alegerea orientării:** diverse orientări ale obiectului pot genera diverse matrițe.
- **Fața superioară:** prin convenție, obiectele au (cel puțin) o fața superioară (este orizontală, este singura care nu este adiacentă cu matrița). Celelalte fețe: **standard**; orice față standard f a obiectului corespunde unei fețe standard $\hat{f}$ a matriței.

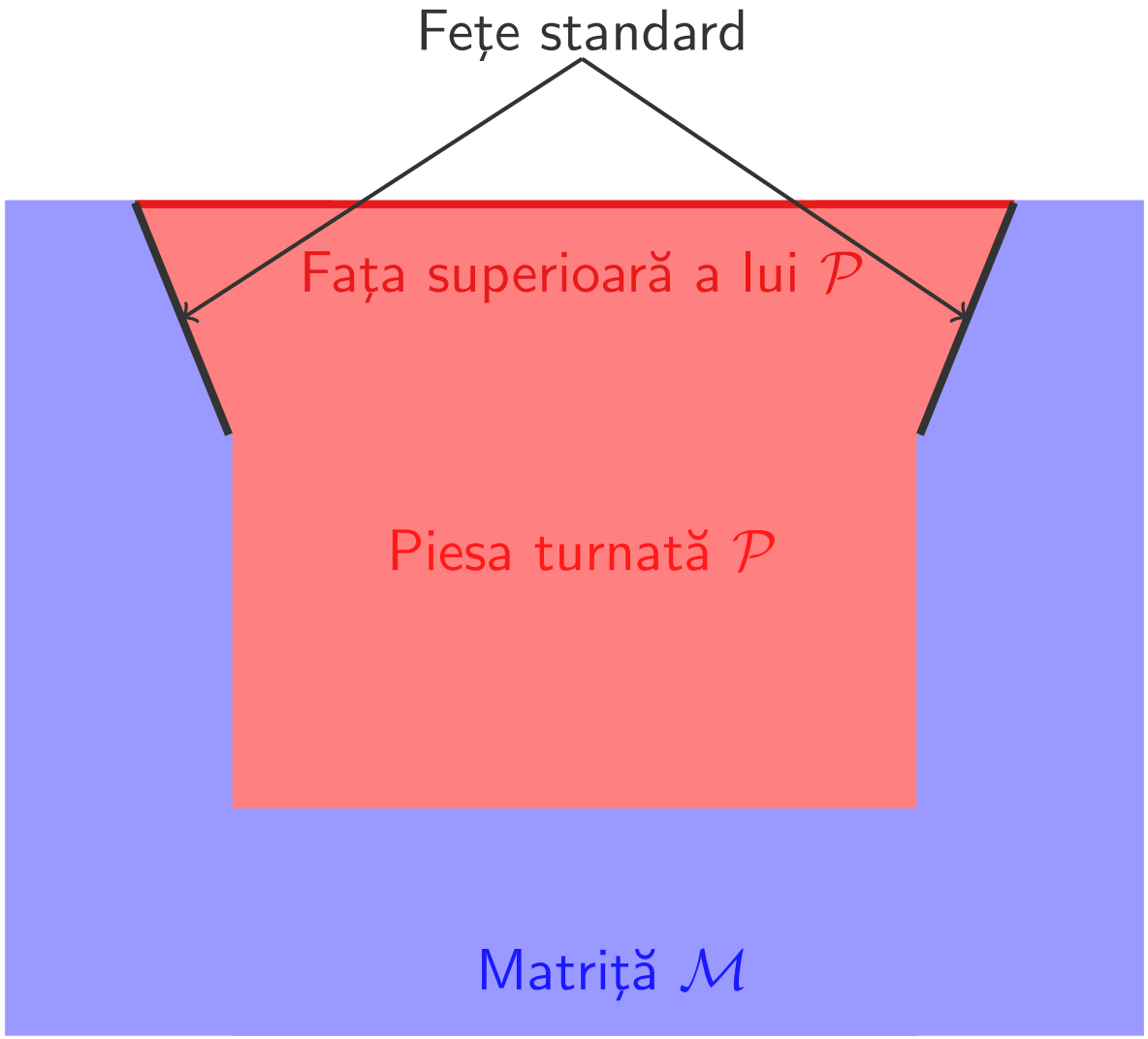
Terminologie și convenții

- **Alegerea orientării:** diverse orientări ale obiectului pot genera diverse matrițe.
- **Fața superioară:** prin convenție, obiectele au (cel puțin) o fața superioară (este orizontală, este singura care nu este adiacentă cu matrița). Celelalte fețe: **standard**; orice față standard f a obiectului corespunde unei fețe standard $\hat{f}$ a matriței.
- **Obiect care poate fi turnat (*castable*):** există o orientare pentru care acesta poate fi turnat și apoi extras printr-o translație (succesiune de translații): *direcție admisibilă*.

Terminologie și convenții

- **Alegerea orientării:** diverse orientări ale obiectului pot genera diverse matrițe.
- **Fața superioară:** prin convenție, obiectele au (cel puțin) o fața superioară (este orizontală, este singura care nu este adiacentă cu matrița). Celelalte fețe: **standard**; orice față standard f a obiectului corespunde unei fețe standard $\hat{f}$ a matriței.
- **Obiect care poate fi turnat (*castable*):** există o orientare pentru care acesta poate fi turnat și apoi extras printr-o translație (succesiune de translații): *direcție admisibilă*.
- **Convenții:** Matrița este paralelipipedică și are o cavitate corespunzătoare obiectului; fața superioară a obiectului (și a matriței) este perpendiculară cu planul Oxy.

Turnarea pieselor în matrițe



Fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la față f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$

Fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la față f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$
- **Propoziție.** *Un poliedru $\mathcal{P}$ poate fi extras din matrița sa $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ prin translație în direcția $\vec{d}$ dacă și numai dacă $\vec{d}$ face un unghi de cel puțin 90° cu normala exterioară a fiecărei fețe standard a lui $\mathcal{P}$.*
- **Reformulare.** Dat $\mathcal{P}$, trebuie găsită o direcție $\vec{d}$ astfel încât, pentru fiecare față standard f, unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90°.

Fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la față f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$
- **Propoziție.** *Un poliedru $\mathcal{P}$ poate fi extras din matrița sa $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ prin translație în direcția $\vec{d}$ dacă și numai dacă $\vec{d}$ face un unghi de cel puțin 90° cu normala exterioară a fiecărei fețe standard a lui $\mathcal{P}$.*
- **Reformulare.** Dat $\mathcal{P}$, trebuie găsită o direcție $\vec{d}$ astfel încât, pentru fiecare față standard f, unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90°.
- **Analitic - pentru o față:** fiecare față definește un semiplan, i.e. dată o față standard f a poliedrului / matriței, a găsi o direcție admisibilă revine la a rezolva o inecuație $(*_f)$, care corespunde unui semiplan.

Fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la față f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$
- **Propoziție.** *Un poliedru $\mathcal{P}$ poate fi extras din matrița sa $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ prin translație în direcția $\vec{d}$ dacă și numai dacă $\vec{d}$ face un unghi de cel puțin 90° cu normala exterioară a fiecărei fețe standard a lui $\mathcal{P}$.*
- **Reformulare.** Dat $\mathcal{P}$, trebuie găsită o direcție $\vec{d}$ astfel încât, pentru fiecare față standard f, unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90°.
- **Analitic - pentru o față:** fiecare față definește un semiplan, i.e. dată o față standard f a poliedrului / matriței, a găsi o direcție admisibilă revine la a rezolva o inecuație $(*_f)$, care corespunde unui semiplan.
- **Analitic - toate fețele:** Fie $\mathcal{P}$ un poliedru; fața superioară fixată, paralelă cu planul Oxy. Considerăm matrița asociată și toate fețele matriței (i.e. toate fețele standard ale poliedrului). A determina o direcție admisibilă revine la a determina o direcție care verifică toate inegalitățile de tip $(*)$, deci un sistem de inecuații.

Fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la față f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$
- **Propoziție.** *Un poliedru $\mathcal{P}$ poate fi extras din matrița sa $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ prin translație în direcția $\vec{d}$ dacă și numai dacă $\vec{d}$ face un unghi de cel puțin 90° cu normala exterioară a fiecărei fețe standard a lui $\mathcal{P}$.*
- **Reformulare.** Dat $\mathcal{P}$, trebuie găsită o direcție $\vec{d}$ astfel încât, pentru fiecare față standard f, unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90°.
- **Analitic - pentru o față:** fiecare față definește un semiplan, i.e. dată o față standard f a poliedrului / matriței, a găsi o direcție admisibilă revine la a rezolva o inecuație $(*_f)$, care corespunde unui semiplan.
- **Analitic - toate fețele:** Fie $\mathcal{P}$ un poliedru; fața superioară fixată, paralelă cu planul Oxy. Considerăm matrița asociată și toate fețele matriței (i.e. toate fețele standard ale poliedrului). A determina o direcție admisibilă revine la a determina o direcție care verifică toate inegalitățile de tip $(*)$, deci un sistem de inecuații.
- **Concluzie:** Pentru a stabili dacă există o direcție admisibilă, trebuie stabilit dacă o **intersecție de semiplane** este nevidă.

Exemple

1. Intersecția semiplanelor

$$-x + y + 1 \leq 0; \quad -y - 3 \leq 0; \quad 2x + 3y - 5 \leq 0.$$

2 (a). Normalele exterioare ale fețelor standard sunt coliniare cu vectorii

$$(0, -1, 1),\ (0, 1, 1),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, -1),\ (0, -1, 0).$$

2 (b). Normalele exterioare ale fețelor standard sunt coliniare cu vectorii

$$(0, 1, 0),\ (0, 1, -1),\ (0, 0, -1),\ (0, -1, -1),\ (0, -1, 0).$$

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
  (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
  (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.
- **Rezultate:** (descrise în detaliu ulterior)

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
  (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.
- **Rezultate:** (descrise în detaliu ulterior)
  (i) *Intersecția unei mulțimi de n semiplane poate fi determinată cu complexitate-timp $O(n \log n)$ și folosind $O(n)$ memorie.*

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  - (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
  - (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.
- **Rezultate:** (descrise în detaliu ulterior)
  - (i) *Intersecția unei mulțimi de n semiplane poate fi determinată cu complexitate-timp $O(n \log n)$ și folosind $O(n)$ memorie.*
  - (ii) *Se poate stabili cu complexitate-timp medie $O(n)$ dacă o intersecție de semiplane este nevidă.*
  - (ii)' *Fie $\mathcal{P}$ un poliedru cu n fețe. Se poate decide dacă $\mathcal{P}$ reprezintă un obiect care poate fi turnat cu complexitate-timp medie $O(n^2)$ și folosind $O(n)$ spațiu. În caz afirmativ, o matriță și o direcție admisibilă în care poate fi extras $\mathcal{P}$ este determinată cu aceeași complexitate-timp.*

(i) Caracterizare explicită - Formularea problemei

- Fie $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ o mulțime de semiplane din $\mathbb{R}^2$; semiplanul H_i dat de o relație de forma

$$a_i x + b_i y \leq c_i$$

(i) Caracterizare explicită - Formularea problemei

- Fie $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ o mulțime de semiplane din $\mathbb{R}^2$; semiplanul H_i dat de o relație de forma

$$a_i x + b_i y \leq c_i$$

- Intersecția $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$ este dată de un sistem de inecuații; este o mulțime poligonală convexă, mărginită de cel mult n muchii (poate fi vidă, mărginită, nemărginită,...)

Algoritm IntersectiiSemiplane ($\mathcal{H}$)

- **Input.** O mulțime $\mathcal{H}$ de semiplane din planul $\mathbb{R}^2$

Algoritm IntersectiiSemiplane ($\mathcal{H}$)

- **Input.** O mulțime $\mathcal{H}$ de semiplane din planul $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Regiunea poligonală convexă $\mathcal{C} = \cap_{H \in \mathcal{H}} H$

Algoritm IntersectiiSemiplane ($\mathcal{H}$)

- **Input.** O mulțime $\mathcal{H}$ de semiplane din planul $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Regiunea poligonală convexă $\mathcal{C} = \cap_{H \in \mathcal{H}} H$

1. 1. **if** $\text{card}(\mathcal{H}) = 1$

Algoritm IntersectiiSemiplane ($\mathcal{H}$)

- **Input.** O mulțime $\mathcal{H}$ de semiplane din planul $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Regiunea poligonală convexă $\mathcal{C} = \cap_{H \in \mathcal{H}} H$

1. 1. **if** $\mathrm{card}(\mathcal{H}) = 1$
2. **then** $\mathcal{C} \leftarrow H \in \mathcal{H}$

Algoritm IntersectiiSemiplane ($\mathcal{H}$)

- **Input.** O mulțime $\mathcal{H}$ de semiplane din planul $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Regiunea poligonală convexă $\mathcal{C} = \cap_{H \in \mathcal{H}} H$

1. 1. **if** $\mathrm{card}(\mathcal{H}) = 1$
2. **then** $\mathcal{C} \leftarrow H \in \mathcal{H}$
3. **else** descompune $\mathcal{H}$ în două mulțimi $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ având fiecare $[n/2]$ elemente

Algoritm IntersectiiSemiplane ($\mathcal{H}$)

- **Input.** O mulțime $\mathcal{H}$ de semiplane din planul $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Regiunea poligonală convexă $\mathcal{C} = \cap_{H \in \mathcal{H}} H$

1. 1. **if** $\mathrm{card}(\mathcal{H}) = 1$
2. **then** $\mathcal{C} \leftarrow H \in \mathcal{H}$
3. **else** descompune $\mathcal{H}$ în două mulțimi $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ având fiecare $[n/2]$ elemente
4. $\mathcal{C}_1 \leftarrow$ IntersectiiSemiplane $(\mathcal{H}_1)$

Algoritm IntersectiiSemiplane ($\mathcal{H}$)

- **Input.** O mulțime $\mathcal{H}$ de semiplane din planul $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Regiunea poligonală convexă $\mathcal{C} = \cap_{H \in \mathcal{H}} H$

1. 1. **if** $\mathrm{card}(\mathcal{H}) = 1$
2. **then** $\mathcal{C} \leftarrow H \in \mathcal{H}$
3. **else** descompune $\mathcal{H}$ în două mulțimi $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ având fiecare $[n/2]$ elemente
4. $\mathcal{C}_1 \leftarrow$ IntersectiiSemiplane $(\mathcal{H}_1)$
5. $\mathcal{C}_2 \leftarrow$ IntersectiiSemiplane $(\mathcal{H}_2)$

Algoritm IntersectiiSemiplane ($\mathcal{H}$)

- **Input.** O mulțime $\mathcal{H}$ de semiplane din planul $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Regiunea poligonală convexă $\mathcal{C} = \cap_{H \in \mathcal{H}} H$

1. 1. **if** $\text{card}(\mathcal{H}) = 1$
2. **then** $\mathcal{C} \leftarrow H \in \mathcal{H}$
3. **else** descompune $\mathcal{H}$ în două mulțimi $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ având fiecare $[n/2]$ elemente
4. $\mathcal{C}_1 \leftarrow$ IntersectiiSemiplane $(\mathcal{H}_1)$
5. $\mathcal{C}_2 \leftarrow$ IntersectiiSemiplane $(\mathcal{H}_2)$
6. $\mathcal{C} \leftarrow$ IntersecteazaRegiuniConvexe $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$

Rezultate principale

- În algoritm, $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt regiuni poligonale convexe cu cel mult n vârfuri; numărul lor de muchii este cel mult n, întrucât fiecare are cel mult $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ muchii, iar $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ are cel mult n fețe, deci $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ au complexitate $O(n)$.

Rezultate principale

- În algoritm, $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt regiuni poligonale convexe cu cel mult n vârfuri; numărul lor de muchii este cel mult n, întrucât fiecare are cel mult $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ muchii, iar $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ are cel mult n fețe, deci $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ au complexitate $O(n)$.
- **Propoziție.** *Adaptând algoritmii de overlay, intersecția dintre două regiuni convexe (*IntersecteazaRegiuniConvexe*) poate fi calculată cu complexitate-timp* $O(n \log n)$.

Rezultate principale

- În algoritm, $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt regiuni poligonale convexe cu cel mult n vârfuri; numărul lor de muchii este cel mult n, întrucât fiecare are cel mult $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ muchii, iar $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ are cel mult n fețe, deci $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ au complexitate $O(n)$.
- **Propoziție.** *Adaptând algoritmii de overlay, intersecția dintre două regiuni convexe (*IntersecteazaRegiuniConvexe*) poate fi calculată cu complexitate-timp* $O(n \log n)$.
- Notând cu $T(n)$ complexitatea-timp pentru a determina intersecția dintre n semiplane, relația de recurență este

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1 \\ O(n \log n) + 2T(\frac{n}{2}), & n > 1. \end{cases}$$

Rezultate principale

- În algoritm, $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt regiuni poligonale convexe cu cel mult n vârfuri; numărul lor de muchii este cel mult n, întrucât fiecare are cel mult $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ muchii, iar $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ are cel mult n fețe, deci $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ au complexitate $O(n)$.
- **Propoziție.** *Adaptând algoritmii de overlay, intersecția dintre două regiuni convexe (*IntersecteazaRegiuniConvexe*) poate fi calculată cu complexitate-timp* $O(n \log n)$.
- Notând cu $T(n)$ complexitatea-timp pentru a determina intersecția dintre n semiplane, relația de recurență este

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1 \\ O(n \log n) + 2T(\frac{n}{2}), & n > 1. \end{cases}$$

- **Teoremă.** *Algoritmul* IntersectiiSemiplane *are complexitate* $O(n \log^2 n)$.

Rezultate principale

- În algoritm, $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt regiuni poligonale convexe cu cel mult n vârfuri; numărul lor de muchii este cel mult n, întrucât fiecare are cel mult $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ muchii, iar $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ are cel mult n fețe, deci $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ au complexitate $O(n)$.
- **Propoziție.** *Adaptând algoritmii de overlay, intersecția dintre două regiuni convexe (*IntersecteazaRegiuniConvexe*) poate fi calculată cu complexitate-timp* $O(n \log n)$.
- Notând cu $T(n)$ complexitatea-timp pentru a determina intersecția dintre n semiplane, relația de recurență este

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1 \\ O(n \log n) + 2T(\frac{n}{2}), & n > 1. \end{cases}$$

- **Teoremă.** *Algoritmul* IntersectiiSemiplane *are complexitate* $O(n \log^2 n)$.
- **Teoremă.** *Algoritmul* IntersecteazaRegiuniConvexe *poate fi îmbunătățit, astfel încât complexitatea-timp să fie liniară.*
- **Teoremă.** *Intersecția unei mulțimi de n semiplane poate fi determinată cu complexitate-timp* $O(n \log n)$ *și folosind* $O(n)$ *memorie.*

Dualitate – motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?

Dualitate – motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**

Dualitate – motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan**?

Dualitate — motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan**?
- **2**

Dualitate — motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan**?
- **2**
- Există o modalitate naturală de a stabili o corespondență între puncte și drepte?

Dualitate – motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan**?
- **2**
- Există o modalitate naturală de a stabili o corespondență între puncte și drepte?
- **DA: dualitate**

Dualitate – motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan**?
- **2**
- Există o modalitate naturală de a stabili o corespondență între puncte și drepte?
- **DA: dualitate**
- Cum se reflectă / respectă diferite proprietăți geometrice (de exemplu incidența) prin dualitate?

Dualitate – "dicționar" concepte și configurații

Plan primal	**Plan dual**
Punct p	Dreaptă neverticală p^*
Dreaptă neverticală d	Punct d^*
Dreaptă determinată de două puncte	Punct de intersecție a două drepte
Punctul p deasupra dreptei d	Punctul d^* deasupra dreptei p^*
Segment	Fascicul de drepte (*wedge*)

(ii) Abordarea calitativă. Motivație

- Sunt realizate 3 produse (notate 1, 2 și 3) pe 2 aparate (notate X și Y).

(ii) Abordarea calitativă. Motivație

- Sunt realizate 3 produse (notate 1, 2 și 3) pe 2 aparate (notate X și Y).
- Ciclul de producție este săptămânal (40h de lucru). Timpul de producție (în minute) pentru produs este indicat în tabel.

	X	Y	Obs.	Nr. prod.	Spațiu	Profit
1	10	27	pe ambele	x_1	0.1m^2	10
2	12	19	în paralel, simultan	x_2, respectiv y_2	0.2m^2	13
3	8	24	în paralel, simultan	x_3, respectiv y_3	0.05m^2	9

(ii) Abordarea calitativă. Motivație

- Sunt realizate 3 produse (notate 1, 2 și 3) pe 2 aparate (notate X și Y).
- Ciclul de producție este săptămânal (40h de lucru). Timpul de producție (în minute) pentru produs este indicat în tabel.

	X	Y	Obs.	Nr. prod.	Spațiu	Profit
1	10	27	pe ambele	x_1	0.1m^2	10
2	12	19	în paralel, simultan	x_2, respectiv y_2	0.2m^2	13
3	8	24	în paralel, simultan	x_3, respectiv y_3	0.05m^2	9

- Aparatele X și Y au un interval de mentenanță de 5%, respectiv 7% din timpul de lucru. Spațiul total de depozitare este de 50m^2.

(ii) Abordarea calitativă. Motivație

- Sunt realizate 3 produse (notate 1, 2 și 3) pe 2 aparate (notate X și Y).
- Ciclul de producție este săptămânal (40h de lucru). Timpul de producție (în minute) pentru produs este indicat în tabel.

	X	Y	Obs.	Nr. prod.	Spațiu	Profit
1	10	27	pe ambele	x_1	0.1m^2	10
2	12	19	în paralel, simultan	x_2, respectiv y_2	0.2m^2	13
3	8	24	în paralel, simultan	x_3, respectiv y_3	0.05m^2	9

- Aparatele X și Y au un interval de mentenanță de 5%, respectiv 7% din timpul de lucru. Spațiul total de depozitare este de 50m^2.
- Modelul matematic:

  Constrângeri:

$$0.1x_1 + 0.2(x_2 + y_2) + 0.05(x_3 + y_3) \leq 50 \quad \textit{Spațiu de depozitare}$$
$$10x_1 + 12x_2 + 8x_3 \leq 0.95 \cdot 40 \cdot 60 \quad \textit{Timp aparatul } X$$
$$27x_1 + 19y_2 + 24y_3 \leq 0.93 \cdot 40 \cdot 60 \quad \textit{Timp aparatul } Y$$

  Cerința:

$$\text{maximizează}(10x_1 + 13(x_2 + y_2) + 9(x_3 + y_3))$$

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul d-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \tag{1}$$

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul d-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \quad (1)$$

- **Denumiri:**

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul d-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \quad (1)$$

- **Denumiri:**
  - date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,d}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}, (c_j)_{j=\overline{1,d}}$

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul d-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \quad (1)$$

- **Denumiri:**
  - date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,d}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}, (c_j)_{j=\overline{1,d}}$
  - funcție obiectiv: $(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul d-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \quad (1)$$

- **Denumiri:**
  - date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,d}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}, (c_j)_{j=\overline{1,d}}$
  - funcție obiectiv: $(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$
  - constrângeri: inegalitățile (1)

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul d-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \quad (1)$$

- **Denumiri:**
  - date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,d}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}, (c_j)_{j=\overline{1,d}}$
  - funcție obiectiv: $(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$
  - constrângeri: inegalitățile (1)
  - regiune realizabilă (fezabilă): intersecția semispațiilor care definesc constrângerile problemei

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul d-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \quad (1)$$

- **Denumiri:**
  - date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,d}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}, (c_j)_{j=\overline{1,d}}$
  - funcție obiectiv: $(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$
  - constrângeri: inegalitățile (1)
  - regiune realizabilă (fezabilă): intersecția semispațiilor care definesc constrângerile problemei
- **Exemple:** probleme de programare liniară 1-dimensională, 2-dimensională.

Rezultate

- **Lemă.** (Pentru $d = 1$) *Un program liniar* 1*-dimensional poate fi rezolvat în timp liniar.*

Rezultate

- **Lemă.** (Pentru $d = 1$) *Un program liniar* 1*-dimensional poate fi rezolvat în timp liniar.*
- **Interpretare a cerinței de maximizare:** Maximizarea funcției obiectiv revine la a determina un punct al cărui vector de poziție are proiecția maximă de direcția dată de vectorul $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_d)$.

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

- **Convenții și terminologie:**

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

- **Convenții și terminologie:**
  - Coordonatele: x și y

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

- **Convenții și terminologie:**
  - Coordonatele: x și y
  - Funcția obiectiv: $f_{\vec{c}}(p) = c_x x + c_y y$, unde $\vec{c} = (c_x, c_y)$.

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

- **Convenții și terminologie:**
  - Coordonatele: x și y
  - Funcția obiectiv: $f_{\vec{c}}(p) = c_x x + c_y y$, unde $\vec{c} = (c_x, c_y)$.
  - Constrângerile: $h_1, h_2, \ldots, h_n$ (semiplane); se notează $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$
  - Regiunea fezabilă este $C = h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_n$.

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

- **Convenții și terminologie:**
  - Coordonatele: x și y
  - Funcția obiectiv: $f_{\vec{c}}(p) = c_x x + c_y y$, unde $\vec{c} = (c_x, c_y)$.
  - Constrângerile: $h_1, h_2, \ldots, h_n$ (semiplane); se notează $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$
  - Regiunea fezabilă este $C = h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_n$.
- **Program liniar:** $(H, \vec{c})$.
- **Scop:** Se caută $p \in C$ astfel ca $f_{\vec{c}}(p)$ să fie maximă.

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

- **Convenții și terminologie:**
  - Coordonatele: x și y
  - Funcția obiectiv: $f_{\vec{c}}(p) = c_x x + c_y y$, unde $\vec{c} = (c_x, c_y)$.
  - Constrângerile: $h_1, h_2, \ldots, h_n$ (semiplane); se notează $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$
  - Regiunea fezabilă este $C = h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_n$.
  - **Program liniar:** $(H, \vec{c})$.
  - **Scop:** Se caută $p \in C$ astfel ca $f_{\vec{c}}(p)$ să fie maximă.
- Pentru o problemă de programare liniară în plan pot fi distinse patru situații: (i) o soluție unică; (ii) toate punctele de pe o muchie sunt soluții; (iii) regiunea fezabilă este nemărginită și pot fi găsite soluții de-a lungul unei semidrepte; (iv) regiunea fezabilă este vidă.

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5. **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5. **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$
6. **else** $v_i \leftarrow$ punctul p de pe d_i care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$ date constrângerile din H_i

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5. **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$
6. **else** $v_i \leftarrow$ punctul p de pe d_i care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$ date constrângerile din H_i
7. **if** p nu există

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5. **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$
6. **else** $v_i \leftarrow$ punctul p de pe d_i care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$ date constrângerile din H_i
7. **if** p nu există
8. **then** raportează "nefezabil" **end**

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5. **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$
6. **else** $v_i \leftarrow$ punctul p de pe d_i care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$ date constrângerile din H_i
7. **if** p nu există
8. **then** raportează "nefezabil" **end**
9. **return** v_n

Algoritm aleatoriu

- Pasul **2.** este înlocuit cu:
  2'. Calculează o permutare arbitrară a semiplanelor, folosind o procedură adecvată.

Algoritm aleatoriu

- Pasul **2.** este înlocuit cu:
  2'. Calculează o permutare arbitrară a semiplanelor, folosind o procedură adecvată.
- Algoritmul incremental $\mathrm{LPMARG2D}$ are complexitate-timp $O(n^2)$, iar varianta bazată pe alegerea aleatorie a semiplanelor are complexitate-timp medie $O(n)$ (n este numărul semiplanelor).