Rezolvarea sistemelor de ecuații cu ajutorul integralelor prime

1) Fie sistemul de ec. dif.: $\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1(t^2+x_2^2)}{t(x_2^2-x_1^2)} \\ x_2' = -\dfrac{x_2(t^2+x_1^2)}{t(x_2^2-x_1^2)} \end{cases}$

a) Verificați dacă $F_1(t,(x_1,x_2)) = t^2 - x_1x_2$ este integrală primă pentru sistemul (1). Dar $F_2(t,x) = \dfrac{x_1x_2}{t}$?

b) Folosind integrala primă arătați că se poate reduce dimensiunea sistemului (1).

Pentru un sistem de ec. dif. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t,x) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t,x) \\ \dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t,x) \end{cases}$, o funcție $F(t,x)$ este integrală primă $\Leftrightarrow$

$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(t,x)\cdot f_k(t,x)\right) = 0.$$

a) $n=2$, $f=(f_1,f_2)$, $x=(x_1,x_2)$.

$$f_1(t,(x_1,x_2)) = \frac{x_1(t^2+x_2^2)}{t(x_2^2-x_1^2)}$$

$$f_2(t,(x_1,x_2)) = -\frac{x_2(t^2+x_1^2)}{t(x_2^2-x_1^2)}$$

$F_1(t,(x_1,x_2)) = t^2 - x_1x_2$.

Verificăm dacă F_1 e integrală primă, adică, dacă

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(t,x)\cdot f_1(t,x) + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(t,x)\cdot f_2(t,x) = 0.$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(t^2 - x_1x_2) = 2t$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_1}(t^2 - x_1x_2) = -x_2$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_2}(t^2 - x_1x_2) = -x_1.$$

$$2t - x_2 \cdot \frac{x_1(t^2+x_2^2)}{t(x_2^2-x_1^2)} + x_1 \cdot \frac{x_2(t^2+x_1^2)}{t(x_2^2-x_1^2)} = 0 \iff$$

$$\iff 2t - \frac{x_1 x_2}{t(x_2^2-x_1^2)} \cdot (t^2+x_2^2-t^2-x_1^2) = 0$$

$$2t - \frac{x_1x_2}{\cancel{t(x_2^2-x_1^2)}} \cdot \cancel{(x_2^2-x_1^2)} = 0 \iff 2t - \frac{x_1x_2}{t} = 0 \text{ fals!}$$

$\Rightarrow F_1$ nu este integrală primă ptr. problema (1).

Verific $F_2(t,x) = \frac{x_1x_2}{t}$:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(t,x) \cdot f_1(t,x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(t,x) \cdot f_2(t,x) = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x_1x_2}{t}\right) = x_1x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\right) = x_1x_2 \cdot \frac{-1}{t^2} = \frac{-x_1x_2}{t^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1x_2}{t}\right) = \frac{x_2}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 = \frac{x_2}{t} \cdot 1 = \frac{x_2}{t}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_1x_2}{t}\right) = \frac{x_1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 = \frac{x_1}{t} \cdot 1 = \frac{x_1}{t}$$

$$-\frac{x_1x_2}{t^2} + \frac{x_2}{t} \cdot \frac{x_1(t^2+x_2^2)}{t(x_2^2-x_1^2)} + \frac{x_1}{t} \cdot \left(-\frac{x_2(t+x_1^2)}{t(x_2^2-x_1^2)}\right) =$$

$$= \frac{-x_1x_2}{t^2} + \underbrace{\frac{x_1x_2}{t^2(x_2^2-x_1^2)} \cdot (\cancel{t^2}+x_2^2-\cancel{t^2}-x_1^2)}_{\text{se reduc}} = \frac{-x_1x_2}{t^2} + \frac{x_1x_2}{t^2} = 0.$$

$\Rightarrow F_2$ este integrală primă pentru problema (1).

b) F_2 integrală primă $\Rightarrow F_2(t,(x_1,x_2)) = c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x_1x_2}{t} = c_1 \Rightarrow x_1x_2 = c_1 t \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{c_1 t}{x_1}}$$

$$x_1' = \frac{x_1\left(t^2 + \frac{c_1^2t^2}{x_1^2}\right)}{t \cdot \left(\frac{c_1^2t^2}{x_1^2} - x_1^2\right)} \Rightarrow x_1' = \frac{x_1 t^2 \cdot \left(1 + \frac{c_1^2}{x_1^2}\right)}{t \cdot \frac{c_1^2t^2 - x_1^4}{x_1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1' = x_1 t^{\cancel{2}} \cdot \frac{x_1^2+c_1^2}{\cancel{x_1^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{t}} \cdot \frac{\cancel{x_1^2}}{c_1^2t^2-x_1^4}$$

$$\Rightarrow x_1' = t \cdot \frac{x_1(x_1^2+c_1^2)}{c_1^2t^2-x_1^4}$$ răsturnăm $\Rightarrow \frac{dt}{dx_1} = \underbrace{\frac{c_1^2}{x_1(x_1^2+c_1^2)}}_{a(x_1)} \cdot t - \underbrace{\frac{x_1^4}{x_1(x_1^2+c_1^2)}}_{b(x_1)} t^{-1}$

ec. Bernoulli, $\alpha = -1$, se rezolvă, apoi $x_2 = c_1 t / x_1$.

2) Fie sistemul de ecuații diferențiale : $\begin{cases} x' = \dfrac{x^2 - t}{y} \\ y' = -x \end{cases}$.

a) Verificați dacă $F(t,(x,y)) = t^2 + 2xy$ este integrală primă.

b) Găsiți soluția sistemului folosind integrala primă.

a) $n = 2$.

$f = (f_1, f_2)$, (x,y)

$f_1(t,(x,y)) = \dfrac{x^2 - t}{y}$

$f_2(t,(x,y)) = -x$

$F(t,(x,y)) = t^2 + 2xy$ - int. primă $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,(x,y)) \cdot f_1(t,(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial y}(t,(x,y)) \cdot f_2(t,(x,y)) = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,(x,y)) = 2t$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,(x,y)) = 2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t,(x,y)) = 2x.$$

$$2t + 2\cancel{y} \cdot \frac{x^2 - t}{\cancel{y}} + 2x \cdot (-x) = \cancel{2t} + \cancel{2x^2} - \cancel{2t} - \cancel{2x^2} = 0$$

$\Rightarrow$ F - integrala primă.

b) F integrala primă $\Rightarrow F(t,(x,y)) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

$t^2 + 2xy = c_1 \Rightarrow x = \dfrac{c_1 - t^2}{2y}$. înlocuim în ec. a doua $\Rightarrow$

$$y' = -\frac{c_1 - t^2}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{t^2 - c_1}{2y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \underbrace{\frac{t^2 - c_1}{2}}_{a(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{y}}_{b(y)} \rightarrow \text{ec. cu var. separabile.}$$

sol. staționare: $h(y)=0 \Rightarrow \frac{1}{y}=0$ Fals!

separăm variabilele: $y\,dy = \frac{t^2-c_1}{2}\,dt$

$\Rightarrow \int y\,dy = \int \frac{t^2-c_1}{2}\,dt \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{t^3}{3} - \frac{c_1}{2}\cdot t + c_2,\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y^2 = \frac{t^3}{3} - c_1 t + c_2,\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$

Soluția implicită a sistemului:

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(c_1-t^2)^2}{4\cdot\left(\frac{t^3}{3}-c_1t+c_2\right)} \\ y^2 = \frac{t^3}{3}-c_1t+c_2 \end{cases},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Soluția explicită:
$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{c_1-t^2}{2\sqrt{\frac{t^3}{3}-c_1t+c_2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{t^3}{3}-c_1t+c_2}. \end{cases}\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

3) $$\begin{cases} x' = yz \\ y' = xz \\ z' = xy \end{cases}$$

a) $F(t,(x,y,z)) = x^2-y^2$ este integrală primă.

b) Reduceți dimensiunea sistemului folosind integrala primă.

a) $n=3$, $f=(f_1,f_2,f_3)$, (x,y,z)

$f_1(t,(x,y,z)) = yz.$

$f_2(t,(x,y,z)) = xz$

$f_3(t,(x,y,z)) = xy.$

F - integrală primă $\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(t,(x,y,z)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,(x,y,z))\cdot f_1(t,(x,y,z))$

$+ \frac{\partial F}{\partial y}(t,(x,y,z))\cdot f_2(t,(x,y,z)) + \frac{\partial F}{\partial z}(t,(x,y,z))\cdot f_3(t,(x,y,z)) = 0.$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,(x,y,z)) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,(x,y,z)) = 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t,(x,y,z)) = -2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(t,(x,y,z)) = 0.$$

$$0 + 2x \cdot yz + (-2y) \cdot xz + 0 \cdot xy = \cancel{2x}yz - \cancel{2x}yz = 0$$

$\Rightarrow$ F este integrală primă

b) $x^2 - y^2 = c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow y^2 = x^2 - c_1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - c_1}$

Arătăm că $G(t,(x,y,z)) = y^2 - z^2$ este integrală primă:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} \cdot f_1(t,(x,y,z)) + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot f_2(t,(x,y,z)) + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot f_3(t,(x,y,z)) = 0$$

$$0 + 0 \cdot yz + 2y \cdot xz + (-2z) \cdot xy = 2xyz - 2xyz = 0$$

$\Rightarrow G$ - integrală primă $\Rightarrow y^2 - z^2 = c_2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{z^2 + c_2},\ c_2 \in \mathbb{R}$.

Înlocuim în a 3-a ecuație: $z' = x \cdot (\pm\sqrt{z^2 + c_2})$

Din cele 2 integrale prime: $\begin{cases} x^2 - y^2 = c_1 \\ y^2 - z^2 = c_2 \end{cases}$ +

$$x^2 - z^2 = c_1 + c_2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{z^2 + c_1 + c_2}$$

$$\Rightarrow z' = (\pm\sqrt{z^2 + c_1 + c_2}) \cdot (\pm\sqrt{z^2 + c_2}),\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ ec. cu variabile separabile în z.

Avem 2 cazuri: 1) $z' = \sqrt{(z^2 + c_1 + c_2)(z^2 + c_2)},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2) $z' = -\sqrt{(z^2 + c_1 + c_2)(z^2 + c_2)},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Sisteme liniare cu coeficienți constanți.

$x' = Ax,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ x = (x_1, \dots, x_n)$

1) Să se determine mulțimea soluțiilor următoarelor sisteme liniare:

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Forma matriceală a sistemului este: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$x' = A \cdot x,\ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Aflăm valorile proprii ale lui A:

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4\cdot 5 = 36 - 20 = 16,\quad \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1,\ m_1 = 1$ ordin de multiplicitate, $\lambda_2 = 5,\ m_2 = 1$.

- $\lambda_1 = 1,\ m_1 = 1 \to$ determinăm $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vector propriu ptr. $\lambda_1 = 1$.

$$Au = \lambda_1 u \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3u_1 + 2u_2 = u_1 \\ 2u_1 + 3u_2 = u_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2u_2 = 0 \\ 2u_1 + 2u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2 = -u_1 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_1 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot u \Rightarrow \varphi_1(t) = e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 5,\ m_2 = 1 \to$ determinăm $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ a.î. $Au = \lambda_2 u \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3u_1 + 2u_2 = 5u_1 \\ 2u_1 + 3u_2 = 5u_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2u_1 + 2u_2 = 0 \\ 2u_1 - 2u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2 = u_1 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = u_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\varphi_2(t) = e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Conform algoritmului de determinare a sistemului fundamental de soluții, $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ este sistem fundamental de soluții:

$$S_A = \{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix} = c_1 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{5t} \\ x_2(t) = -c_1 e^t + c_2 \cdot e^{5t} \end{cases}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

~~n=2~~

Explicație exc. (3) - cum găsesc integrala primă?

$F(t, (x, y, z)) = x^2 - y^2$ - e int. primă $\Rightarrow x^2 - y^2 = c \Rightarrow (x^2 - y^2)' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2xx' - 2yy' = 0 \Rightarrow xx' - yy' = 0.$

(Vreau să știu cum s-a obținut F, ca să aflu cum pot găsi o a doua integrală primă).

Știu: $\begin{cases} x' = yz \\ y' = xz \end{cases}$ le împart $\Rightarrow \dfrac{x'}{y'} = \dfrac{yz}{xz} \Rightarrow \dfrac{x'}{y'} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow x'x - y'y = 0$

$\Rightarrow 2xx' - 2yy' = 0 \Rightarrow (x^2)' - (y^2)' = 0 \Rightarrow (x^2 - y^2)' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - y^2 =$ constant $\Rightarrow x^2 - y^2 \overset{not}{=} F$ este int. primă

Acum, similar iau $\begin{cases} y' = xz \\ z' = xy \end{cases}$ le împart $\Rightarrow \dfrac{y'}{z'} = \dfrac{z}{y} \Rightarrow y'y = z'z \Rightarrow$

$\Rightarrow y'y - z'z = 0 \Rightarrow 2y'y - 2z'z = 0 \Rightarrow (y^2)' - (z^2)' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (y^2 - z^2)' = 0 \Rightarrow y^2 - z^2 =$ const.

$\Rightarrow y^2 - z^2 \overset{not.}{=} G$ este int. primă