• **Obiectul teoriei ecuațiilor diferențiale:**

Def. Fiind dată $f(\cdot,\cdot): D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definește obiectul matematic numit ecuație diferențială: $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ sau $x' = f(t,x)$ sau $\dot{x} = f(t,x)$

• **Motivație:**

- Continuare normală a cursului de Analiză Matematică
- a dat răspuns la probleme concrete din diverse domenii ale științei.

• **Probleme fundamentale:**

1. Existența soluțiilor $f = ?$ a.î. ec. $x' = f(t,x)$ are sol.
2. Unicitatea soluțiilor $f = ?$ a.î. ec. $x' = f(t,x)$ are sol. unică
3. Studiu calitativ $f = ?$ a.î. sol. ec. să aibă anumite proprietăți
4. Determinarea soluțiilor
   - soluții explicite (formule)
   - soluții aproximative → „Analiză numerică"

1) Să se determine soluția generală a ec. $tx' - x = t^2 \cdot e^t$

$tx' - x = t^2 \cdot e^t \Rightarrow x' = \frac{1}{t}\cdot x + t\cdot e^t$

Este o ecuație afină scalară. Aplic metoda variației constantelor.

($x' = a(t)\cdot x + b(t)$, $a(\cdot), b(\cdot): I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue)

$a(t) = \frac{1}{t}$, $b(t) = t\cdot e^t$, a, b - continue

$t \neq 0, t > 0.$

$\bar{x}' = \frac{\bar{x}}{t}$ → ecuația liniară asociată.

soluția generală: $\bar{x}(t) = c\cdot e^{\int \frac{1}{t}dt} = c\cdot e^{\ln t} = c\cdot t$

$\bar{x}(t) = c\cdot t$

Se caută soluții de forma: $x(t) = c(t)\cdot t$ → variația const. c

$\Rightarrow (c(t)\cdot t)' = \frac{c(t)\cdot t}{t} + t\cdot e^t \Rightarrow c'(t)\cdot t + \cancel{c(t)} = \cancel{c(t)} + t\cdot e^t \Rightarrow$

$\Rightarrow c'(t)\cdot t = t\cdot e^t \Rightarrow c'(t) = e^t \Rightarrow c(t) = e^t + k, k \in \mathbb{R}$

Soluția: $x(t) = e^t\cdot t + k\cdot t$, $k \in \mathbb{R}$

3) $x' + \frac{2}{t} x = t^3$

$x' = -\frac{2}{t} x + t^3$

Este o ecuație afină scalară. Aplic metoda variației constantelor.

$a(t) = -\frac{2}{t}$, $b(t) = t^3$, $a(\cdot), b(\cdot)$ - continue, $t \neq 0, t > 0$

$\bar{x}' = -\frac{2}{t} \bar{x}$ → ecuația liniară asociată

Soluția generală: $\bar{x}(t) = c \cdot e^{\int -\frac{2}{t} dt} = c \cdot e^{-2 \ln t} =$

$= c \cdot (e^{\ln t})^{-2} = c \cdot t^{-2}$

$\bar{x}(t) = c \cdot t^{-2}$

Se caută soluții de forma: $x(t) = c(t) \cdot t^{-2}$.

$\Rightarrow (c(t) \cdot t^{-2})' = -\frac{2}{t} \cdot c(t) \cdot t^{-2} + t^3$

$\Rightarrow c'(t) \cdot t^{-2} + \cancel{c(t) \cdot (-2) \cdot t^{-3}} = \cancel{-\frac{2}{t} \cdot c(t) \cdot \frac{1}{t^2}} + t^3$

$\Rightarrow c'(t) \cdot t^{-2} = t^3 \;/ \cdot t^2$

$\Rightarrow c'(t) = t^3 \cdot t^2$

$\Rightarrow c'(t) = t^5 \quad \Rightarrow c(t) = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + k, k \in \mathbb{R}$

soluția: $x(t) = \left(\frac{t^6}{6} + k\right) \cdot t^{-2}$

$x(t) = \frac{t^6}{6} \cdot t^{-2} + k t^{-2}$

$x(t) = \frac{t^4}{6} + \frac{k}{t^2}, \quad k \in \mathbb{R}$.

$-x^2$

4) $x' = x^2 \cdot e^t - 2x$. Să se det. sol. generală a ecuației date.

Este o ecuație Bernoulli.

($x' = a(t)\cdot x + b(t)\cdot x^\alpha$, $a,b: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$).

$x' = -2x + e^t\cdot x^2$, $\alpha=2$.

$a(t)=-2$, $b(t)=e^t$ - continue.

Aplic metoda variației constantelor.

ecuația liniară asociată este $\bar{x}' = -2\bar{x}$

soluția generală: $\bar{x}(t) = c\cdot e^{\int -2\,dt} = c\cdot e^{-2t}$

$\bar{x}(t) = c\cdot e^{-2t}$

Căutăm soluții de forma $x(t) = c(t)\cdot e^{-2t}$.

$\Rightarrow (c(t)\cdot e^{-2t})' = -2\cdot c(t)\cdot e^{-2t} + e^t\cdot c^2(t)\cdot e^{-4t} \Rightarrow$

$\Rightarrow c'(t)\cdot e^{-2t} + \cancel{c(t)\cdot e^{-2t}\cdot(-2)} = \cancel{-2\cdot c(t)\cdot e^{-2t}} + c^2(t)\cdot e^{-3t} \Rightarrow$

$\Rightarrow c'(t)\cdot e^{-2t} = c^2(t)\cdot e^{-3t}$

$\Rightarrow c'(t) = c^2(t)\cdot e^{-t}$

$\Rightarrow \frac{dc}{dt} = c^2\cdot e^{-t}$ (ecuație cu variabile separabile) cu sol. staționare

$c^2=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow$ soluția staționară $c(t)\equiv 0$.

Separăm variabilele: $\frac{c'}{c^2} = e^{-t}$

integrăm: $-\frac{1}{c} = -e^{-t} + k$, $k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow c(t) = \frac{1}{e^{-t}+k}$, $k\in\mathbb{R}$ (se ia prin convenție k, nu $-k$)

Soluția: $x_k(t) = \frac{1}{e^{-t}+k}\cdot e^{-2t}$, $k\in\mathbb{R}$

cu $x_0(t) = 0$.

5) $tx' = 2t^2\sqrt{x} + 4x$

Este o ecuație Bernoulli.

$x' = 2t\sqrt{x} + \frac{4}{t}x$

$x' = \frac{4}{t}\cdot x + 2t\sqrt{x}$, $\alpha = \frac{1}{2}$

$a(t) = \frac{4}{t}$, $b(t) = 2t$ -> continue, $t \neq 0$, $t > 0$.

Aplic metoda variației constantelor.

ecuația liniară asociată este: $\overline{x}' = \frac{4}{t}\cdot\overline{x}$

soluția generală: $\overline{x}(t) = c\cdot e^{\int\frac{4}{t}dt} = c\cdot e^{4\ln t} = c\cdot t^4$

$\overline{x}(t) = ct^4$

Căutăm soluții de forma: $x(t) = c(t)\cdot t^4$

$\Rightarrow (c(t)\cdot t^4)' = \frac{4}{t}\cdot c(t)\cdot t^4 + 2t\cdot\sqrt{c(t)\cdot t^4}$

$\Rightarrow c'(t)\cdot t^4 + \cancel{c(t)\cdot 4t^3} = \cancel{4\cdot c(t)\cdot t^3} + 2t\sqrt{c(t)\cdot t^4}$

$\Rightarrow c'(t)\cdot t^4 = 2t\sqrt{c(t)\cdot t^4}$

$\Rightarrow c'(t)\cdot t^4 = 2t\cdot\sqrt{c(t)}\cdot t^2$

$\Rightarrow c'(t)\cdot t = 2\sqrt{c(t)}$

$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{t}\cdot 2\sqrt{c}$ ec. cu variabile separabile cu sol staționare.

$2\sqrt{c} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow$ soluția staționară $c(t) \equiv 0$.

Separăm variabilele: $\frac{c'}{\sqrt{c}} = \frac{2}{t}$

integrăm: $\frac{\sqrt{c}}{\frac{1}{2}} = 2\cdot\ln t + k, k\in\mathbb{R}$

$2\sqrt{c} = 2\ln t + k, k\in\mathbb{R}$

$\sqrt{c} = \ln t + k, k\in\mathbb{R}$

$c(t) = (\ln t + k)^2, k\in\mathbb{R}$

Soluția: $x_k(t) = (\ln t + k)^2\cdot t^4, k\in\mathbb{R}$

$x_0(t) = 0$

2) $$x' = \frac{2x + \ln t}{t \cdot \ln t}$$

$$x' = \frac{2x}{t \cdot \ln t} + \frac{\ln t}{t \cdot \ln t}$$

$$x' = \frac{2}{t \cdot \ln t} \cdot x + \frac{1}{t}$$

Este o ecuație afină scalară. Aplic metoda variației constantelor.

$a(t) = \frac{2}{t \cdot \ln t}$, $b(t) = \frac{1}{t}$, $t > 0$, a, b - continue

$\overline{x}' = \frac{2}{t \cdot \ln t} \cdot \overline{x}$ → ecuația liniară asociată cu soluția generală:

$$\overline{x}(t) = c \cdot e^{\int \frac{2}{t \cdot \ln t} dt} = c \cdot e^{2 \cdot \int \frac{1}{s} ds} = c \cdot e^{2 \ln s} = c \cdot s^2 = c \cdot \ln^2 t$$

Sch. var. $s = \ln t \Rightarrow ds = \frac{1}{t} dt$

Căutăm soluții de forma $x(t) = c(t) \cdot \ln^2 t$

$$(c(t) \cdot \ln^2 t)' = \frac{2}{t \cdot \ln t} \cdot c(t) \cdot \ln^2 t + \frac{1}{t}$$

$$c'(t) \cdot \ln^2 t + \cancel{c(t) \cdot \frac{2 \ln t}{t}} = \cancel{\frac{2}{t \cdot \ln t} \cdot c(t) \cdot \ln^2(t)} + \frac{1}{t}$$

$$c'(t) \cdot \ln^2 t = \frac{1}{t}$$

$$c'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln^2 t}$$

$$c(t) = \int \frac{1}{t \cdot \ln^2 t} dt = \int \frac{1}{s^2} ds = -\frac{1}{s} = \frac{-1}{\ln t}$$

sch. var. $\ln t = s \Rightarrow \frac{1}{t} dt = ds$

$$x(t) = \frac{-1}{\ln t} \cdot \ln^2 t \Rightarrow$$

$\Rightarrow x(t) = -\ln t$.